2ème partie : LES LOIS THEORIQUES

I : Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une variable pouvant prendre l'une quelconque des valeurs d'un ensemble fini ou infini. Cette variable peut être discrète ou continue. A chacune des valeurs que peut prendre cette variable est associée :
- une probabilité si cette variable est discrète,
- une densité de probabilité si cette variable est continue.

Selon qu'il s'agit d'une variable discrète ou d'une variable continue, on a les représentations graphiques qui associent les probabilités individuelles (ou les densité de probabilité) à la fonction de répartition correspondante.

$E(X)$: espérance mathématique
$V(X)$: variance $\quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2$

$Y = bX + a \quad E(Y) = b\,E(X) + a \quad V(Y) = b^2\,V(X)$

$Z = X + Y \quad E(Z) = E(X) + E(Y) \quad V(Z) = V(X) + V(Y)$ si X et Y sont indépendantes.

II : Lois associées à une variable discrète

1°) loi Binomiale $L(X) = (B(n\,;p)$

C'est une loi à 2 paramètres : n et p. C'est la loi d'une variable aléatoire discrète X pouvant prendre les valeurs entières k = 1, 2, ..…..,n avec les probabilités individuelles :

$$P(X = k) = C_n^k\, p^k\, q^{n-k} \text{ avec } q = 1 - p \qquad E(X) = np \quad V(X) = npq$$

$P(X<k) + P(X\geq k) = 1$

On peut utiliser la récurrence pour déterminer les valeurs de pi.

2°) loi de Poisson $L(X) = P(m)$ ou $P(\lambda)$

C'est une loi à 1 paramètre : m. C'est la loi d'une variable aléatoire discrète X pouvant prendre les valeurs entières k = 1, 2, …....,∞ avec les probabilités individuelles :

$P(X = k) = e^{-m}\,(m^k / k\,!) \qquad E(X) = V(X) = m = np$

Il s'agit de la limite de la loi Binomiale quand $n \to \infty$, $p \to 0$ et $np \to m$

$P(X<k) + P(X\geq k) = 1$

On peut utiliser la récurrence pour déterminer les valeurs de pi.

III : Lois associées à une variable continue

1°) loi Normale L (X) = N(μ, σ_X)

C'est une loi à 2 paramètres : μ et σ_X $\mu = E(X)$ $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

La loi normale, ou loi de Gauss ou de Laplace-Gauss, correspond à la situation suivante :
"Si une grandeur X résulte de l'influence d'un grand nombre de facteurs indépendants agissant sous forme additive, de façon telle que chaque cause partielle ait une variance faible par rapport à la variance résultante, les mesures de cette grandeur sont distribuées suivant la loi normale" et la courbe représentative de f(x) est une courbe "en cloche", symétrique par rapport à la moyenne.

La loi normale est la loi d'une variable X continue variant de $-\infty$ à $+\infty$ dont la densité de probabilité f(x) est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\Pi}} e^{\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma x}\right)^2\right)}$$

F(X) est la fonction de répartition, $F(X) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = P(X<x)$

$P(X<x) + P(X\geq x) = 1$

☞ **Loi Normale centrée réduite L (T) = N (0, 1) avec T = variable centrée réduite**
$t_i = (x_i - \mu) / \sigma x$

$P(T< t_\alpha) = \alpha$ $P(T\geq t_\alpha) = 1 - \alpha = P(T < t_{1-\alpha})$ $-t_\alpha = t_{1-\alpha}$

2°) loi du Khi-deux ($X^2(\nu)$) (Loi de Pearson)

C'est la loi d'une variable aléatoire continue $X^2(\nu)$,somme des carrés de ν variables normales centrées réduites indépendantes ti.
Dans le cas d'un échantillon de ν observations indépendantes d'une grandeur X qui suit une loi Normale, la quantité Σt_i^2 suit une loi du X^2 à ν ddl (degré de liberté).

$$P(X^2(\nu)< X^2_{(1-\alpha)}(\nu)) = 1 - \alpha$$

3°) loi de Student (S (ν))

C'est la loi d'une variable aléatoire continue T définie comme étant le rapport entre une variable normale réduite et $(X^2 / \nu)^{1/2}$.
C'est, dans le cadre de ce cours, pour un échantillon de n observations indépendantes d'une grandeur X qui suit une loi Normale L (X) = N(μ, σ_X), la loi de la fonction des observations :

$$t(\nu) = (m - \mu) / (\sigma x / \sqrt{n}) \quad \text{où } \nu = n - 1 \quad \text{et } \sigma^2 x = SCE / (n-1)$$

C'est une loi symétrique centrée sur 0.

$P(T < t_{\alpha}(\nu)) = \alpha$ $\quad P(T \geq t_{\alpha}(\nu)) = 1 - \alpha = P(T < t_{1-\alpha}(\nu))$ $\quad -t_{\alpha}(\nu) = t_{1-\alpha}(\nu)$

4°) loi de Fisher - Snedecor ($F(\nu_1 ; \nu_2)$)

C'est la loi d'une variable aléatoire continue F définie comme étant le rapport de 2 variables X^2 indépendantes, chacune étant divisée par son ddl.
C'est, dans le cadre de ce cours, pour 2 échantillons indépendants de n_1 et n_2 observations indépendantes provenant de loi Normale de même variance, la loi de la fonction des observations :

$F(\nu_1 ; \nu_2) = \sigma^2_1 x / \sigma^2_2 x$ où $\nu_1 = n_1 - 1$ et $\nu_2 = n_2 - 1$
et $\sigma^2_1 x = SCE_1 / (n_1-1)$ et $\sigma^2_2 x = SCE_2 / (n_2-1)$

$P(F(\nu_1 ; \nu_2) < F_{(1-\alpha)}(\nu_1 ; \nu_2)) = 1 - \alpha$

IV Les approximations