ISARA - 1A - 41$^{\text{ème}}$ promotion
S1 - Examen 2

F. BILLY
27/01/2009 (8h à 11h)

Mathématiques

Aucun document n'est autorisé. Seules les calculettes figurant sur la liste sont admises dans la salle d'examen.
Les exercices proposés sont indépendants ; le barème est donné ***à titre purement indicatif****.*
Les ***résultats*** *doivent être* ***obligatoirement encadrés****. S'il y a lieu, les calculs littéraux et les applications numériques seront clairement différenciés.*
La ***clarté de la présentation****, la* ***cohérence du raisonnement*** *ainsi que la* ***qualité de la rédaction*** *entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

Exercice 1 - Imparité de la fonction arctan (2 points)

Démontrer que "**arctan**" est une fonction impaire.
Indication : c'est la même démonstration que pour arcsin.

Exercice 2 - Equation différentielle, et d'une ! (3 points)

On considère, sur $]0;+\infty[$, l'équation différentielle suivante :

$$x\,y' - 2y = \ln(x) \qquad \textit{(E1)}$$

1. Effectuer le bilan de cette équation différentielle.
2. Résoudre *(E1)*.
3. Déterminer, parmi les solutions de *(E1)*, la fonction f vérifiant $f(1) = 0$.

Exercice 3 - Application réciproque (5 points)

Soit f la fonction telle que :

$$f(x) = x\ln(x)$$

1. Etudier succinctement les variations de f : ensemble de définition, parité, limites aux bornes, dérivée, tableau de variations.
2. En déduire que f réalise une bijection de $[\frac{1}{e};+\infty[$ sur un intervalle J que l'on explicitera.
3. **Sans expliciter** f^{-1}, que dire de sa dérivabilité ?
   Que peut-on en déduire graphiquement ? (penser à la (aux) tangente(s) au(x) point(s) particulier(s)...)
4. a) Calculer $f^{-1}(0)$, puis $(f^{-1})'(0)$.
   b) Calculer $f(e)$ et $f(e^2)$.
   c) En déduire $(f^{-1})'(e)$ et $(f^{-1})'(2e^2)$.
5. Tracer dans un même repère orthonormé les courbes représentatives de f et f^{-1}.

T.S.V.P. →

Exercice 4 - Equation différentielle, et de deux !! (3,5 points)

On donne l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2y' + y = 2\,e^{-x} \qquad (E2)$$

1. Effectuer le bilan de *(E2)*.
2. Déterminer les solutions de *(E2)*.
3. Préciser la solution y_0 qui vérifie les conditions initiales suivantes :
   $$\begin{cases} y_0(0) &= 3 \\ y_0'(0) &= 1 \end{cases}$$

Exercice 5 - Décomposition en éléments simples & intégration (4 points)

On cherche à calculer l'intégrale suivante :

$$J = \int_0^1 \frac{2x\,dx}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

1. On considère le polynôme $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.
   Donner la (ou les) racine(s) de B, en déduire la factorisation au maximum de $B(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit la fraction rationnelle $P(x) = \frac{2x}{B(x)}$.
   Effectuer la décomposition de P en éléments simples.
3. Déterminer $\int P(x)\,dx$, c'est-à-dire l'ensemble des primitives de P.
4. En déduire la valeur de J.

Exercice 6 - Trigonométrie hyperbolique (2,5 points)

De façon analogue à la trigonométrie classique (circulaire), on peut développer une trigonométrie hyperbolique. Dans toute cette partie, a et b sont des réels quelconques.

1. En s'appuyant sur la définition des fonctions "cosh" et "sinh", calculer :
   a) $\cosh^2(a) + \sinh^2(a)$
   b) $\cosh^2(a) - \sinh^2(a)$
2. Calculer $\cosh(a).\cosh(b)$, $\sinh(a).\sinh(b)$, $\cosh(a).\sinh(b)$ et $\sinh(a).\cosh(b)$.
   Exprimer ces résultats en fonction de $\cosh(a+b)$, $\cosh(a-b)$, $\sinh(a+b)$ et $\sinh(a-b)$.

Exercice 7 - Intégration... un peu plus dure ! (BONUS)

On considère l'intégrale suivante :

$$K = \int_0^1 \frac{x\,dx}{2x^3 + 2x^2 + x + 1} = \int_0^1 g(x)\,dx$$

1. Décomposer $g(x)$ en éléments simples.
2. A l'aide d'un changement de variable à déterminer, donner $\int g(x)\,dx$.
3. Calculer la valeur de K.