PARTIE 2 CORRIGES DES EXERCICES

EXERCICE 1

- si
$$L(X) = B(5; 0.1) P(X = 3) = 0.0081$$

- si
$$L(X) = B (15; 0.09) P(X < 4) = 0.9601$$

- si L(X) = B (20; 0.07)
$$P(X > 5) = 0.0019$$

- si
$$L(X) = B(30; 0.08) P(X \le 6) = 0.9918$$

- si L(X) = B (40; 0.06)
$$P(X \ge 7) = 0.0091$$

- si
$$L(X) = B(7; 0.2)$$
 par récurrence

on calcule d'abord à l'aide de la formule
$$P(X = 0) = \frac{7!}{0!(7-0)!} 0.2^{0}0.8^{7} = 0.2097$$

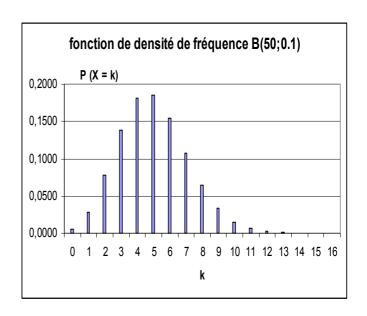
puis par récurrence
$$P(X = 1) = 0.2097 \frac{0.2}{0.8} \frac{7}{1} = 0.3670$$

et encore par récurrence
$$P(X = 2) = 0.3670 \frac{0.2}{0.8} \frac{6}{2} = 0.2753$$

EXERCICE 2

Représenter la fonction de densité de fréquence de la variable X telle que L(X) = B(50 ; 0.1) Que remarquez-vous ? Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de la variable.

хi	P (X=xi) = pi	xi*pi	xi²*pi
0	0,0052	0,0000	0,0000
1	0,0286	0,0286	0,0286
2	0,0779	0,1559	0,3118
3	0,1386	0,4157	1,2471
4	0,1809	0,7236	2,8945
5	0,1849	0,9246	4,6231
6	0,1541	0,9246	5,5477
7	0,1076	0,7534	5,2738
8	0,0643	0,5142	4,1138
9	0,0333	0,3000	2,6997
10	0,0152	0,1518	1,5183
11	0,0061	0,0675	0,7423
12	0,0022	0,0266	0,3190
13	0,0007	0,0094	0,1216
14	0,0002	0,0030	0,0414
15	0,0001	0,0008	0,0127
16	0,0000	0,0002	0,0035
		E(X) = 5	$E(X^2) = 29.5$

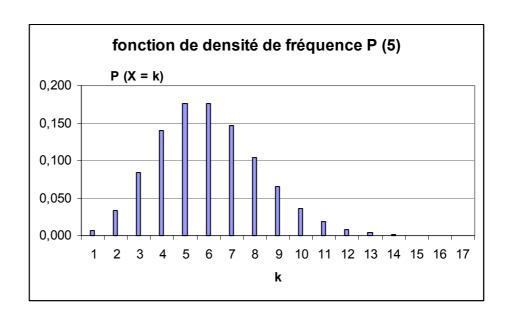


$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 4.5$$

$$\sigma(X) = 2.121$$

On remarque que cette distribution s'apparent à une distribution de Poisson de paramètre 5.

	P (X=xi) =
Хİ	pi
0	0,0067
1	0,0337
2	0,0842
3	0,1404
4	0,1755
5	0,1755
6	0,1462
7	0,1044
8	0,0653
9	0,0363
10	0,0181
11	0,0082
12	0,0034
13	0,0013
14	0,0005
15	0,0002
16	0,0000



Une enquête a montré que sur 200 flacons d'un même produit pharmaceutique, 50 ne pouvaient être utilisés au-delà de 4 mois après leur livraison. Ces 200 flacons sont rangés de façon aléatoire sur une étagère . Trois personne achètent chacune 1 flacon dès le premier jour de livraison.

Identifier la variable aléatoire, sa loi et les paramètres de la loi.

Quelle est la probabilité pour que :

- 1. 2 de ces 3 personnes aient un flacon utilisable 4 mois après ?
- 2. les 3 personnes achètent un flacon non utilisable 4 mois après ?

X: nombre de flacons non utilisables après 4 mois (ou nombre de personnes ayants un flacon non utilisable)

- 1. Quand 2 personnes sur 3 ont un flacon utilisable c'est que 1 personne sur les 3 en a un non utilisable. On calcule $P(X = 1) = \frac{3!}{1!(3-1)!} 0.25^1 0.75^2 = 0.4219$
- 2. Pour 3 personnes qui ont un flacon non utilisable on calcule

$$P(X = 3) = \frac{3!}{3!(3-3)!} \cdot 0.25^3 \cdot 0.75^0 = 0.0156$$

Autre méthode:

X: nombre de flacons utilisables après 4 mois (ou nombre de personnes ayants un flacon utilisable)

1. Pour 2 personnes sur 3 qui ont un flacon utilisable on calcule

$$P(X = 2) = \frac{3!}{2!(3-2)!} 0.75^2 0.25^1 = 0.4219$$

2. Quand 3 personnes ont un flacon non utilisable c'est que personne n'a de flacons utilisables on calcule $P(X = 0) = \frac{3!}{0!(3-0)!} 0.75^{0}0.25^{3} = 0.0156$

EXERCICE 4

Une chaîne de fabrication produit 40000 fours dont 36000 sont bons, ne nécessitant donc aucune modification. Le service de contrôle-qualité qui ne connaît pas ces chiffres, prélève un échantillon aléatoire de 10 fours pour estimer la qualité de l'ensemble de la fabrication. Identifier la variable aléatoire, sa loi et les paramètres de la loi.

Calculer les probabilités pour que l'on obtienne au contrôle:

- 1. 5 fours défectueux.
- 2. au moins 7 bons fours,
- 3. au plus 4 fours défectueux,
- 4. plus de 8 bons fours,
- 5. moins de 6 fours défectueux.

X: nombre de fours défectueux

```
X = 0, 1, 2, ..., 10.

n = 10   p = 4000 / 40000 = 0.1

L(X) = B(10, 0.1) (voir Tables)
```

- 1. P(X = 5) = 0.0015
- 2. $P(X \le 3) = P(X \le 4) = 0.9872$ (au plus 3 fours défectueux ou moins de 4 fours défectueux)
- 3. $P(X \le 4) = P(X \le 5) = 0.9984$
- 4. $P(X < 2) = P(X \le 1) = 0.7361$ (moins de 2 fours défectueux ou au plus 1 four défectueux)
- 5. P(X < 6) = 0.9999

<u>Autre méthode</u> (moins pratique si vous n'avez pas la table, il faut calculer P(X = 0) puis faire par récurrence tous les calculs jusqu'à P(X = 10) et cumuler les probabilités individuelles.)

X: nombre de fours non défectueux

- 1. P(X = 5) = 0.0015
- 2. $P(X \ge 7) = 1 P(X < 7) = 0.9872$ ou (P(X = 7) + ... + P(X = 10))
- 3. $P(X \ge 6) = P(X > 5) = 0.9984$ (au moins 6 bons fours ou plus de 5 bons fours)
- 4. P(X > 8) = 0.7361 ou (P(X = 9) + P(X = 10))
- 5. $P(X > 4) = P(X \ge 5) = 1 P(X < 5) = 0.9999$ (plus de 4 bons fours ou au moins 5 bons fours)

EXERCICE 5

- si
$$L(X) = P(0.7) P(X = 3) = 0.0284$$

- si
$$L(X) = P(3.5) P(X < 4) = 0.5366$$

- si
$$L(X) = P(8.5) P(X > 5) = 0.8504$$

- si
$$L(X) = P(10) P(X \le 6) = 0.1301$$

- si
$$L(X) = P(14) P(X \ge 7) = 0.9858$$

- si
$$L(X) = P(10.5)$$
 par récurrence.

on calcule d'abord avec la formule de définition $P(X = 0) = e^{-10.5} \frac{10.5^0}{0!} = 0.0000275$ puis par récurrence P(X = 1) = 0.0000275 * 10.5 / 1 = 0.000289et encore par récurrence P(X = 2) = 0.000289 * 10.5 / 2 = 0.00152

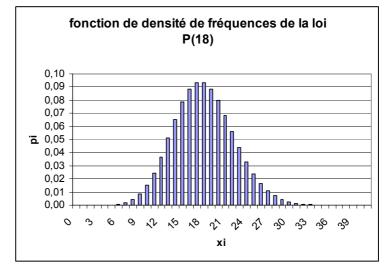
EXERCICE 6Représenter la fonction de densité de fréquence de la variable X telle que L(X) = P(18).
Que remarquez-vous ? Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart-type de la variable.

хi	P (X=xi) =	xi*pi	xi²*pi	хi	P (X=xi) =	xi*pi	xi²*pi
	pi				pi		
0	0,0000	0,0000	0,0000	21	0,0684	1,4365	30,1659
1	0,0000	0,0000	0,0000	22	0,0560	1,2313	27,0878
2	0,0000	0,0000	0,0000	23	0,0438	1,0074	23,1701
3	0,0000	0,0000	0,0001	24	0,0328	0,7884	18,9215
4	0,0001	0,0003	0,0011	25	0,0237	0,5913	14,7824
5	0,0002	0,0012	0,0060	26	0,0164	0,4257	11,0691
6	0,0007	0,0043	0,0259	27	0,0109	0,2947	7,9580
7	0,0019	0,0130	0,0907	28	0,0070	0,1965	5,5018
8	0,0042	0,0333	0,2664	29	0,0044	0,1263	3,6632
9	0,0083	0,0749	0,6743	30	0,0026	0,0784	2,3521
10	0,0150	0,1499	1,4985	31	0,0015	0,0470	1,4583
11	0,0245	0,2697	2,9671	32	0,0009	0,0273	0,8741
12	0,0368	0,4414	5,2966	33	0,0005	0,0154	0,5070
13	0,0509	0,6621	8,6069	34	0,0002	0,0084	0,2849
14	0,0655	0,9167	12,8340	35	0,0001	0,0044	0,1553
15	0,0786	1,1786	17,6795	36	0,0001	0,0023	0,0821
16	0,0884	1,4144	22,6298	37	0,0000	0,0011	0,0422
17	0,0936	1,5912	27,0496	38	0,0000	0,0006	0,0211
18	0,0936	1,6848	30,3255	39	0,0000	0,0003	0,0103
19	0,0887	1,6848	32,0103	40	0,0000	0,0001	0,0049
20	0,0798	1,5961	31,9216	41	0,0000	0,0001	0,0022
		-		total	1,0000	18,00	342,00

$$E(X) = 18$$

 $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 342 - 18^2 = 18$

 $\sigma(X) = 4.24$



Cette distribution de rapproche de la loi de Gauss N(18; 4.24)

EXERCICE 7

Une chaîne de fabrication produit 20000 ampoules dont 1000 ont leur filament brisé, ne pouvant donc pas être vendues. Le service de contrôle-qualité qui ne connaît pas ces chiffres, prélève un échantillon aléatoire de 100 ampoules pour estimer la qualité de l'ensemble de la fabrication.

Identifier la variable aléatoire, sa loi et les paramètres de la loi.

Calculer les probabilités pour que l'on obtienne au contrôle :

- 1. 4 ampoules non conformes,
- 2. au moins 7 ampoules non conformes.
- 3. au plus 10 ampoules non conformes,
- 4. plus de 12 ampoules non conformes,
- 5. moins de 5% des ampoules non conformes.

X : nombre d'ampoules non conforme sur 100 ampoules

$$X = 0, 1, 2, \dots, 99, 100.$$

$$p = 1000 / 20000 = 0.05$$

L(X) = B(100; 0.05) approximée par une loi de poisson de paramètre m = np = 100*0.05 = 5L(X) = P(5)

- 1. P(X = 4) = 0.1755
- 2. $P(X \ge 7) = 1 P(X < 7) = 1 0.7622 = 0.2378$
- 3. $P(X \le 10) = P(X < 11) = 0.9863$
- 4. $P(X > 12) = 1 P(X \le 12) = 1 P(X \le 13) = 1 0.9980 = 0.0020$
- 5. P(X < 5) = 0.4405

EXERCICE 8

La commission hygiène et sécurité d'une usine a calculé qu'il y avait en moyenne 0.2 accident du travail par jour.

Identifier la variable aléatoire, sa loi et les paramètres de la loi.

Calculer la probabilité pour qu'il y ait :

- 1. 2 accidents dans le prochain jour,
- 2. plus de 2 accidents dans les 3 prochains jours,
- 3. moins de 3 accidents dans les 20 prochains jours de travail
- 1. X: nombre d'accidents pour 1 jour

$$X = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$L(X) = P(0.2)$$

$$P(X = 2) = 0.0164$$

2. Y: nombre d'accidents pour 3 jour (Y = 3*X)

$$Y = 0, 1, 2, \infty$$

$$L(Y) = P(0.6)$$

$$P(Y > 2) = 0.0231$$

3. Z: nombre d'accidents pour 20 jour (Z = 20*X)

$$Z = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$L(Z) = P(4)$$

$$P(Z < 3) = 0.2381$$

Soit T une variable aléatoire normale centrée réduite. Déterminer à l'aide de la table et d'un schéma, les probabilités suivantes :

$P(0 \land T \land 0,6)$	P(-1,.63 \langle T \langle - 0,91 \right)
P(1,23 \langle T \langle 2,34 \rangle	$P(T \ge 1,64)$
P(T < - 2,19)	$P(T \ge -2.31)$
P(-1,56 \langle T \langle 1,75 \rangle	$P(T \ge 0)$

t1	t2	P(T < t2)	$P(T \le t1)$	P(t1 < T < t2)
0	0.6	0.725	0.500	0.225
1.23	2.34	0.990	0.890	0.099
-2.19			0.014	
-1.56	1.75	0.959	0.059	0.900
-1.63	-0.91	0.181	0.051	0.129

t	$P(T \ge t)$
1.64	0.050
-2.31	0.989
0	0.500

EXERCICE 10
Déterminer t a

Determiner t avec la notatio	n t _p tel que :	
P(T < t) = 0.005	P(T > t) = 0.004	P(-t < T < +t) = 0.95
P(T < t) = 0.593	P(T > t) = 0.599	
P(T < t) = 0.5	P(T > t) = 0.6	
P(T < t) = 0.898	P(T > t) = 0.841	
P(T < t) = 0.182	P(T > t) = 0.187	
P(T < t) = 0.398	P(T > t) = 0.390	

p = P (T < tp)	tp
0,005	-2,576
0,593	0,235
0,5	0,000
0,898	1,270
0,182	-0,908
0,398	-0,259

P (T > tp)	p = P (T < tp)	tp
0.004	0,996	2,652
0.599	0,401	-0,251
0.6	0,4	-0,253
0.891	0,109	-1,232
0.187	0,813	0,889
0.390	0,61	0,279

Soit X une variable aléatoire normale observée sur une population de moyenne égale à 5000 et d'écart-type égal à 2000.

- 1. Que vaut la moyenne et l'écart-type de cette variable aléatoire centrée et réduite notée T?
- 2. Quelle est la valeur de la variable centrée et réduite t pour x = 7000?
- 3. Calculer P (T< 1) et P (X< 7000).
- 4. Calculer P (X < 6000) et P (X < 3000).

1°)
$$\bar{t} = 0$$
 $s_t = 1$

$$2^{\circ}$$
) t = $(7000 - 5000)/2000 = 1$

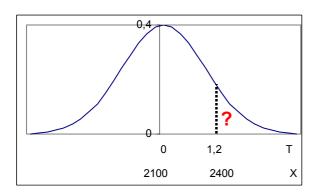
EXERCICE 12

Un fabricant de machines a pu établir que la demande pour son modèle suit une loi normale de moyenne 2100 unités par mois et un écart-type de 250.

- 1. Si l'entreprise possède 2400 unités en stock pour le mois à venir quelle est la probabilité qu'elle ne puisse satisfaire à la demande ?
- 2. quel doit être le nombre d'unités à stocker par mois pour que l'entreprise ne soit pas en pénurie plus de 5% des cas.

X: nombre de demande pour un modèle L(X) = N (2100; 250)

1°)
P (X > 2400) = P (T >
$$\frac{2400 - 2100}{250}$$
) = P (T > 1.2) = 1 - P (T < 1.2) = **0.1151**

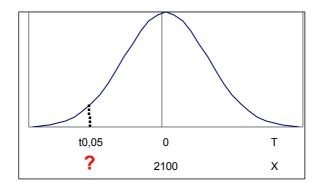


2°)

On cherche la valeur x telle que: P(X > x) = 0.95 ou bien P(X < x) = 0.05 t $_{0.05} = -1.645$ (table 2)

- 1.645 =
$$\frac{x - 2100}{250}$$
 d'où: x = -1.645*250 + 2100 = 1688.75

le nombre d'unités à stocker par mois pour que l'entreprise ne soit pas en pénurie plus de 5% des cas est égal à 1689.



EXERCICE 13

Une entreprise de TP précise qu'en général le temps moyen de construction d'un certain type de bâtiment est de 65 semaines avec un écart-type de 4 semaines. L'entreprise signe un contrat avec un client dans lequel elle propose un délai de réalisation des travaux qui a 90% de chance d'être respecté. Quel est ce délai si on suppose que cette variable est distribuée normalement?

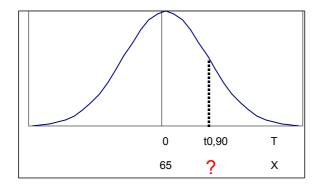
X: temps mis par une entreprise pour construire un type de bâtiment L(X) = N(65; 4)

On cherche x telle que P(X < x) = 0.9 donc P(T < t) = 0.9

 $t_{0.9} = 1.282$ (table 2)

$$1.282 = \frac{x - 65}{4}$$
 d'où x = $1.282*4 + 65 = 70.12$

un délai de moins de 70 semaines de réalisation des travaux a 90% de chance d'être respecté.



EXERCICE 14

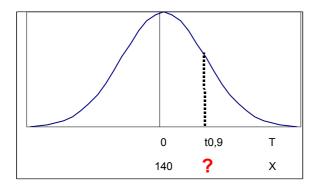
Le temps moyen pour compléter un QCM de 60 questions est estimé à 120 minutes avec un écart-type de 15 minutes. Pour le prochain examen il est question de modifier le temps de l'épreuve de telle sorte que 90% des étudiants puissent compléter le QCM. On suppose que le temps suit une loi normale, quelle doit être la durée maximale de l'épreuve?

X: temps mis par un individu pour compléter un QCM L(X) = N(120; 15)

On cherche x telle que $P(X \le x) = 0.9$ donc $P(T \le t) = 0.9$ t $_{0.9} = 1.282$ (table 2)

$$1.282 = \frac{x - 120}{15}$$
 d'où $x = 1.282*15 + 120 = 139.22$

Pour que 90% des individus puissent remplir le QCM la durée de l'épreuve doit être fixée à 140 minutes.



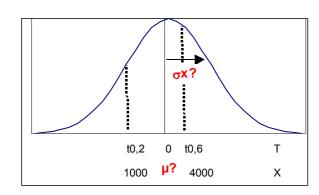
EXERCICE 15

Dans une municipalité, 20% des foyers ont des impôts locaux inférieurs à 1000F et 60% des foyers ont des impôts locaux inférieurs à 4000F. En supposant que cette variable suit une loi normale, que valent la moyenne et l'écart-type de la distribution?

X: montant des impôts d'un foyer

$$L(X) = N(\mu; \sigma_x)$$

20% des fovers paient des impôts inférieurs à 1000F s'écrit : $P(X<1000) = 0.2 = P(T< t_{0.2})$ 60% des foyers paient des impôts inférieurs à 4000F s'écrit : $P(X<4000) = 0.6 = P (T < t_{0.6})$



On a donc 2 équations à 2 inconnues :

$$-0.8416 = \frac{1000 - \mu}{\sigma x}$$
 (1)
$$0.2533 = \frac{4000 - \mu}{\sigma x}$$
 (2)

$$0.2533 = \frac{4000 - \mu}{\sigma x} \quad (2)$$

On divise l'équation (1) par l'équation (2):

$$\frac{-0.8416}{0.2533} = \frac{1000 - \mu}{4000 - \mu}$$

 $-0.8416*(4000-\mu) = 0.2533*(1000-\mu)$ on en déduit $\mu = 3306$

On remplace dans l'équation (1) μ par sa valeur et on trouve $\sigma x = 2738$

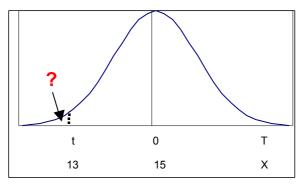
EXERCICE 16

Le temps moyen nécessaire à l'assemblage d'un appareil est de 15 minutes avec une variance de 0,81. En supposant que cette variable suive une loi normale,

- 1. quelle est la probabilité qu'un ouvrier assemble l'appareil en moins de 13 minutes?
- 2. dans 90% des cas, l'assemblage se fera en moins de combien de temps?
- 3. 50% des appareils sont assemblés en moins de combien de temps?

X: temps mis par un individu pour assembler un appareil L(X) = N(15; 0.9)

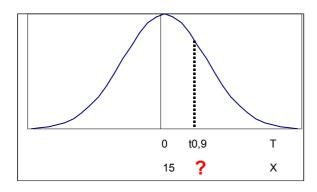
$$P(X<13) = P(T+2.2) = 0.0132$$



On cherche la valeur x tel que P(X < x) = 0.9 mais aussi P (T <t = 0.9) t $_{0.9}$ = 1.282 (table 2)

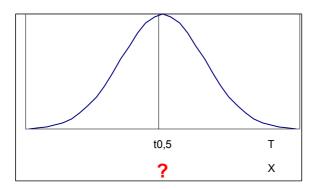
$$1.282 = \frac{x - 15}{0.9}$$
 d'où $x = 1.282*0.9 + 15 = 16.15$

Dans 90% des cas l'assemblage de l'appareil se fera en moins de 16 minutes.



3°)

La distribution de la variable étant celle d'une loi Normale, on a donc moyenne = médiane Dans 50% des cas l'assemblage de l'appareil se fera en moins de 15 minutes.



Dans une région de France, le revenu annuel familial est distribué normalement avec une moyenne de 174000F et un écart-type de 26000F. Afin de mettre sur le marché un nouveau produit, le service marketing d'une entreprise pense qu'il est nécessaire qu'au moins 80% des foyers disposent d'un revenu annuel d'au moins 150000F. Est-ce que la région correspond au marché visé?

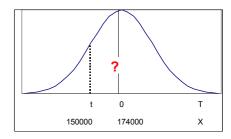
X: revenu annuel d'un foyer L(X) = N (174000; 26000)

Deux méthodes sont possibles pour répondre à cette question.

<u>Méthode 1:</u> On vérifie si plus de 80% des foyers ont un revenu supérieur à 150000F

$$P(X > 150000) = P(T > -0.923) = P(T < +0.923) = 0.8212$$

Il y a bien plus de 80% des foyers qui ont un revenu supérieur à 15000F.



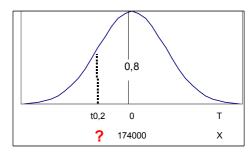
Méthode 2: On calcul le revenu au dessus duquel on trouve 80% des foyers.

$$t 0.80 = 0.8416$$

 $x = 0.8416* 26000 + 174000 = 195881.6$

80% des foyers ont un revenu supérieur à 195881F.

La région correspond au marché visé.



EXERCICE 18

$$t_{0.95}(10) = 1.812$$
 $t_{0.95}(15) = 1.753$ $t_{0.90}(10) = 1.372$ $t_{0.99}(8) = 2.896$ $t_{0.95}(50) = t_{0.95} = 1.645$ $t_{0.001}(20) = -t_{0.999}(20) = -3.552$

$$X^{2}_{0.95}(10) = 18.32$$
 $X^{2}_{0.99}(10) = 23.2$ $X^{2}_{0.025}(18) = 8.23$ $X^{2}_{0.90}(32) = [t_{0.9} + \sqrt{2 * 32 - 1}]^{2} / 2 = (1.2816 + 7.937)^{2} / 2 = 42.494$

$$F_{0.975}(10; 20) = 2.77$$
 $F_{0.975}(20; 10) = 3.42$ $F_{0.995}(9; 15) \in [4.42; 4.67]$

EXERCICE 19

La banque nationale désire introduire sur le marché une nouvelle formule de bons de caisse. Elle propose des bons portant un intérêt de 3% l'an si le détenteur place ses capitaux pendant 3 mois. Si, à la fin du premier mois, le détenteur lève une option portant à 6 mois son placement, l'intérêt passera alors à 3.5% l'an. Il semblerait après une étude sommaire qu'il y ait 15% de chance pour que ce type de transformation soit opéré. Soixante entreprises viennent souscrire à ce type de placement en achetant chacune 1 bon.

Identifier la variable aléatoire, sa loi et les paramètres de la loi.

Calculer la probabilité pour qu'il y ait sur les 60 entreprises :

- 1. plus de 8 entreprises qui effectueront la transformation,
- 2. moins de 12 entreprises qui effectueront la transformation,
- 3. quel est le nombre de bons transformés que l'on a que 5% de chance de dépasser ?

X: nombre d'entreprises qui effectuent la transformation (ou le nombre de bons transformés) X = 0; 1; 2;59;60

L(X) = B (60; 0.15) que l'on peut approximer par une loi Normale L(X) = N (9; 2.766) En effet:

$$\left| \sqrt{0.15 / 0.85} - \sqrt{0.85 / 15 / \sqrt{60}} \right| = 0.253 \ (< 0.32)$$

 $np = E(X) = 9$ $\sigma(X) = \sqrt{npq} = 0.15$

- 1. P(X > 8) = P(T > (8-9)/2.776) = P(T > -0.36) = 0.6406
- 2. P(X < 12) = P(T < (12-9)/2.776) = P(T < 1.08) = 0.8599
- 3. P(X > x) = 0.05 équivaut à P(X < x) = 0.95 or $t_{0.95} = 1.645$ et donc x = 9 + 1.645*2.766 = 13.55 13 ou 14 bons

EXERCICE 20

L'observation microscopique de boîtes de Pétri contenant des quantités égales d'une solution a permis d'évaluer la valeur moyenne du nombre de bactéries par boîte égale à 2.

Identifier la variable aléatoire, sa loi et les paramètres de la loi.

Si l'étude porte sur l'observation de 10 boîtes:

- 1. calculer la probabilité pour qu'il y ait plus de 18 bactéries,
- 2. quel est le nombre de bactéries que l'on a que 5% de chance de dépasser ?

X: nombre de bactéries par boîte

$$X = 0; 1; 2; \dots \infty$$

E (X) = 2 L(X) = $\mathcal{P}(2)$

$$Y = 10X$$
 $L(Y) = \mathcal{P}(20)$ approximée par N (20; $\sqrt{20}$) donc $L(Y) = N$ (20; 4.472)

- 1. P(Y > 18) = P(T > ((18 20) / 4.472) = P(T > -0.45) = 0.6736
- 2. P(Y > y) = 0.05 ou P(Y < y) = 0.95 or t = 0.95 or t = 0.95 or t = 0.95 or t = 0.95 on a moins de 5% de chance de dépasser 28 bactéries par boîte.