ISARA - 1A - 41$^{\text{ème}}$ promotion
S1 - Examen 1

F. BILLY
12/11/2008 (8h à 11h)

Mathématiques

Aucun document n'est autorisé. Seules les calculettes figurant sur la liste sont admises dans la salle d'examen.
*Les exercices proposés sont indépendants; le barème est donné **à titre purement indicatif**.*
*Les **résultats** doivent être **obligatoirement encadrés**. S'il y a lieu, les calculs littéraux et les applications numériques seront clairement différenciés.*
*La **clarté de la présentation**, la **cohérence du raisonnement** ainsi que la **qualité de la rédaction** entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

Exercice 1 - Détermination d'un facteur intégrant (5 points)

Soit la forme différentielle suivante :

$$\begin{aligned}\omega_1(x,y) &= (x^2y + y^2 + 2xy)\,dx \;+\; (x^2 + x)(x + 2y)\,dy \\ &= P\,dx \;+\; Q\,dy\end{aligned}$$

1. Montrer que ω_1 n'est pas une forme exacte.
2. Trouver **une** fonction $\alpha(x)$ telle que $\omega_2(x,y) = \alpha(x) \times \omega_1(x,y) = R\,dx \;+\; S\,dy$ soit une forme exacte.
3. Vérifier l'exactitude de ω_2, par la méthode habituelle, avec le facteur intégrant (fonction α) ainsi déterminé.
4. Donner les dérivées partielles (simplifiées au maximum) d'une fonction f vérifiant $\omega_2 = df$.

Exercice 2 - Approximation d'une variation par la différentielle (4 points)

En physique, l'inductance d'une bobine s'exprime, en henrys, par :

$$L = \frac{4\pi N^2\,S}{l.10^9}$$

où N est le nombre de spires, S est la section de la bobine **(en cm^2)** et l est la longueur de celle-ci **(en cm)**.

1. Exprimer ΔL, variation vraie de l'inductance de la bobine lorque l varie de dl.
2. Calculer la différentielle dL.
3. Donner numériquement ΔL et dL lorsque $N = 1000$, $S = 1000$, $l = 50$ et $dl = 1$ cm.
4. Calculer, en %, l'erreur relative $\dfrac{|\Delta L - dL|}{|\Delta L|}$.
   Que peut-on dire de l'approximation de ΔL par la différentielle ?
5. Refaire le calcul de dL et ΔL, puis de l'erreur relative, pour $dl = 0,5$ cm.
   Conclure.

T.S.V.P. --→

Exercice 3 - Calcul d'une vitesse d'accroissement (2 points)

Dans un hexagone régulier (donc construit à partir de triangles exclusivement équilatéraux) de côté l, les côtés s'allongent à la vitesse v_c.

1. Calculer l'aire de l'hexagone, notée $\mathcal{A}_H$, en fonction de l.
2. Donner la différentielle $d\mathcal{A}_H$ en fonction de dl.
3. En utilisant un changement de variable **à expliciter**, exprimer littéralement, en fonction de l et v_c, la vitesse d'accroissement de l'aire de l'hexagone.
4. Calculer numériquement cette vitesse, au moment où $l = 1\,m$ et pour $v_c = 2\,cm.s^{-1}$.
   Le résultat sera exprimé en m^2/h (on en donnera une valeur exacte, puis une valeur approchée).

Exercice 4 - Etude de fonction (5 points)

On considère la fonction f d'une variable réelle x définie par :

$$f(x) = \ln(x^2 - 4x + \tfrac{9}{2})$$

1. Donner son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2. Transformer l'expression $f(x)$ en utilisant la forme canonique.
   Cette expression transformée sera utilisée par la suite, **le cas échéant** (par exemple pour la détermination des limites...).
3. Etudier les variations de f (limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$, dérivée, tableau, représentation graphique).
4. On appelle α le minimum absolu de f sur $\mathcal{D}_f$.
   a) Donner la valeur de α.
   b) $f : \mathcal{D}_f \to [\alpha, +\infty[$ est-elle injective ? surjective ? bijective ?
      Justifier chaque réponse.
5. Donner un intervalle $I(\subset \mathcal{D}_f)$ sur lequel f est une bijection.

Exercice 5 - Système d'équations aux dérivées partielles et tracé de domaine (4 points)

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^2 \\[2mm] \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{3}{3x-7} + 4xy \end{cases}$$

1. Déterminer l'ensemble des fonctions $f(x, y)$ qui vérifient ce système.
   (penser à tester les fonctions-solutions avec les équations du système ! !)
2. Parmi ces fonctions, on considère la fonction g définie par $g(x, y) = x^2y^2 + y\ln(3x - 7)$.
   a) Déterminer son domaine de définition (en concluant par une phrase décrivant ce domaine).
   b) Représenter graphiquement ce domaine.