année d'études : 2013-2014

Date : 26/11/2013

11174

Une école d'ingénieurs au coeur de la vie

36796

VIGNOLI Etienne

20

TB+

Exercice 1

1. Soit D le domaine de définition de f.

f est dérivable en un point $x_0 \in D$, si et seulement si :

0,5 $$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\,\varepsilon(x-x_0)}$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x-x_0) = 0$

2. La définition de la continuité d'une fonction en un point x_0 est : $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Il faut donc calculer la limite de l'expression de $f(x)$ de la question 1.

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$ 0,5

0,5 $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x_0)(x-x_0) = 0$ car $f'(x_0)$ est une constante et $\lim\limits_{x \to x_0}(x-x_0) = 0$

0,5 $\lim\limits_{x \to x_0} (x-x_0)\,\varepsilon(x-x_0) = 0$ car $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x-x_0) = 0$

0,5 $\boxed{\text{donc } \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{Donc } f \text{ est continue en } x_0}$

Exercice 2

1. Le volume V est égal à :

$$L \times l \times h = (a-2x) \times (a-2x) \times x$$

donc $V(x) = x(a-2x)^2$ 0,5
$= x(a^2 - 4ax + 4x^2)$
$= 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$ 0,5

$\boxed{D_V = [0 ; a]}$

2. $V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$

V est dérivable car c'est une somme de fonctions continues.

$V'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2$ 0,5

$V'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 8ax + a^2 \geq 0$

Il faut calculer le discriminant.

$\Delta = (-8a)^2 - 4 \times 12 \times a^2$
$= 64a^2 - 48a^2 = 16a^2$ 0,5

$\Delta > 0$ d'où 2 solutions :

$x_1 = \dfrac{8a - \sqrt{16a^2}}{24} = \dfrac{8a - 4a}{24} = \dfrac{1}{6}a$ 0,5

et $x_2 = \dfrac{8a + 4a}{24} = \dfrac{1}{2}a$ 0,5

Vu un trinôme de la forme $ax^2 + bx + c = 0$
$a = 12$ donc $a > 0$ d'où :

x	0		$\frac{1}{6}a$		$\frac{1}{2}a$		a
$V'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$V(x)$	0	↗	$V(\frac{1}{6}a)$	↘	$V(\frac{1}{2})^a$	↗	$V(a)$

3. D'après le tableau de variation, le volume de la boite est maximal pour $\boxed{x_m = \frac{1}{6} a}$ 0,5

4. $V\left(\frac{1}{6}a\right) = 4 \times \left(\frac{1}{6}a\right)^3 - 4a \times \left(\frac{1}{6}a\right)^2 + a^2 \times \frac{1}{6} a$

0,5 $= \frac{4}{216}a^3 - \frac{4}{36}a^3 + \frac{1}{6}a^3 = \frac{2}{27}a^3$

L'ensemble de départ est : $[\cancel{0}; a]$

L'ensemble d'arrivée est : $[0; \frac{2}{27}a^3]$ 0,5

avec $V(x) = 4x^3 - 4ax^2 + a^2 x$

Exercice 3

1. $f(x,y) = x^2 e^{xy}$

f existe si $x^2 e^{xy} > 0$ car $x^2 > 0$ et $e^x > 0$

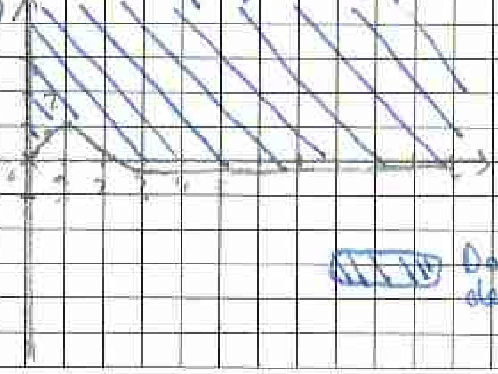
$\iff \ln(x^2 e^{xy}) > \ln 0$

$\iff \ln x^2 + \ln(e^{xy}) > 1$ car $\ln 0 = 1$

$\iff 2\ln x + xy > 1$

$\boxed{\iff y > \frac{1 - 2\ln x}{x}}$ avec $x > 0$

Le domaine de la fonction est le demi plan défini par la droite Δ d'équation $y = \frac{1-2\ln x}{x}$ et au-dessus de cette droite car l'origine n'appartient pas au domaine ($0 > 0$ impossible), avec $x > 0$ (à droite de (Oy)).



Pour :
$x = 0$, $y = 0$
$x = 1$, $y = 1$
$x = 3$, $y = -0,4$
$x = 6$, $y = -0,43$
$x = 18$, $y = -0,36$

Domaine de f

0,5 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x e^{xy} + x^2 \times y e^{xy} = e^{xy}(2x + x^2 y)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \times x e^{xy} = x^3 e^{xy}$ 0,5

2. $g(x,y,z) = \sin^2 x + \cos^2 y + xyz$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 2 \times \cos x \sin x + 0 + yz = 2 \sin x \cos x + yz$ 0,5

$\frac{\partial g}{\partial y} = 0 + 2 \times (-\sin y) \times \cos y + xz = xz - 2 \sin y \cos y$ 0,5

$\frac{\partial g}{\partial z} = xy$ 0,5

g existe si :

- $\sin^2 x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$
- $\cos^2 y \geqslant 0 \Leftrightarrow y \geqslant 0$

$D_f = \mathbb{R}^3$

Ainsi, le domaine de g est le volume délimité par (Ox) et (Oy), à valeurs positives dans x et y, et contenant toutes les valeurs de z pour x et y positifs. Le volume contient les axes (Ox), (Oy) et (Oz) ; z peut être positif ou négatif : c'est un parallélépipède rectangle.

isaralyon
Une école d'ingénieurs au coeur de la vie

Année d'études : 2013-2014

Examen de : Mathématiques

Date : 26/11/2013

Nom : VIGNOLI

Prénom : Etienne

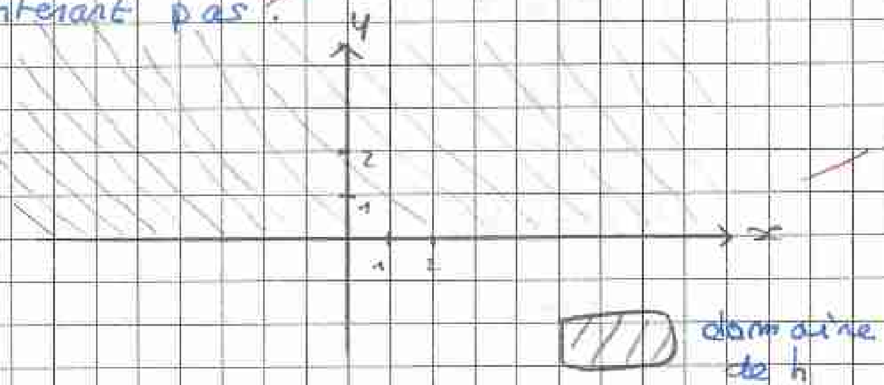
---

3. $h(x, y) = \frac{x^2}{2\sqrt{y}}$

h existe si $2\sqrt{y} > 0 \Leftrightarrow y > 0$

donc le domaine de h est le demi plan délimité par (0x), supérieur à (0x) et ne le contenant pas.

0,5



$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{2x \times 2\sqrt{y}}{(2\sqrt{y})^2} = \frac{4x\sqrt{y}}{4y} = \frac{x\sqrt{y}}{y}$ 0,5

$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{x^2 \times \frac{2}{2\sqrt{y}}}{(2\sqrt{y})^2} = \frac{x^2 \frac{1}{\sqrt{y}}}{4y} = -\frac{x^2}{4y\sqrt{y}} = \cancel{\frac{x^2}{y\sqrt{2y}}}$

Exercice 4

1. $\omega_1(x,y) = 2x\, e^{(x^2-y)}\, dx - 2e^{(x^2-y)}\, dy$

$P(x,y) = 2x\, e^{(x^2-y)}$

et $Q(x,y) = -2e^{(x^2-y)}$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x \times (-1) \times e^{(x^2-y)} = -2x\, e^{x^2-y}$ 0,5

$\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2 \times 2x \times e^{(x^2-y)} = -4x\, e^{(x^2-y)}$ 0,5

$\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ donc ω_1 n'est pas une forme exacte.

2. ⓐ $\omega_2(x,y) = y^2 \cos x\, dx + 2y \sin x\, dy$

$P(x,y) = y^2 \cos x$ et $Q(x,y) = 2y \sin x$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y \cos x$ 0,5 et $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2y \times \cos x$ 0,5

donc $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ donc ω_2 est une forme exacte.

ⓑ $\begin{cases} \dfrac{\partial f_2}{\partial x} = y^2 \cos x & (1) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = 2y \sin x & (2) \end{cases}$ 0,25 / 0,25

Il faut intégrer $\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ par rapport à x.

0,25 $f(x,y) = y^2 \sin x + \varphi(y)$ (3)

Il faut dériver (3) par rapport à y :

$\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = 2y \sin x + \varphi'(y)$ (4) 0,25

De (2) et (4), on en déduit que $\varphi'(y) = 0$ 0,25

Donc, en intégrant $\varphi'(y)$, on a $\varphi(y) = C$ 0,25

Donc : $\boxed{f_2(x,y) = y^2 \sin x + C}$ 0,5

ⓒ $f_2\left(\frac{\pi}{2} ; 2\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2^2 \sin \frac{\pi}{2} + C = 0$

0,5 $\Leftrightarrow C = -4 \sin \frac{\pi}{2} = -4$

donc $\boxed{g_2(x,y) = y^2 \sin x - 4}$

0,25

L'ensemble de départ est $\mathbb{R}^2$ ainsi que celui d'arrivée.

$g_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Exercice 5

1. $f(x) = (2x^2 + x)\sqrt{x}$

f est dérivable comme produit de fonctions continues.

$f'(x) = (4x+1)\sqrt{x} + \frac{(2x^2+x)}{2\sqrt{x}}$ 0,5

$= 4x\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{(2x^2+x)\sqrt{x}}{2x}$

$= \frac{8x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2}$ 0,5

$= \frac{\sqrt{x}}{2}(10x+3)$ 0,5

donc $\boxed{g(x) = 10x + 3}$

2. $df = f'(x)\,dx = \boxed{\frac{\sqrt{x}}{2}(10x+3)\,dx}$ 0,25

3. $\ln f(x) = \ln(2x^2+x) + \ln\sqrt{x}$ 0,5

car $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

0,25 $\boxed{\frac{df}{f} = \left(\frac{4x+1}{2x^2+x} + \frac{1}{2x}\right)} dx$

⚠ à ne pas confondre avec $\frac{f'}{f}$

4. $\frac{df}{f} = \frac{df}{dx_4} = \frac{4x+1}{2x^2+x} + \frac{1}{2x}$

0,5 $df = \left(\frac{4x+1}{2x^2+x} + \frac{1}{2x}\right) \times (2x^2+x)\sqrt{x}\ dx$

$= \left((4x+1)\sqrt{x} + \frac{(2x^2+x)\sqrt{x}}{2x}\right) dx$

$= \left(\sqrt{x} + 4x\sqrt{x} + \frac{2x^2\sqrt{x} + x\sqrt{x}}{2x}\right) dx$

$= \left(\frac{2\sqrt{x} + 8x\sqrt{x} + 2x\sqrt{x} + \sqrt{x}}{2}\right) dx$

0,5 $= \left(\frac{10x\sqrt{x} + 3\sqrt{x}}{2}\right) dx$

0,5 $\boxed{= \frac{\sqrt{x}}{2}(10x+3)\ dx}$

Exercice 6

1. $A = l \times l$ 0,5 donc $A(t) = l(t) \times l(t) = l^2(t)$

La vitesse d'accroissement de A est :

$\frac{dA}{dt} = 2 \times l'(t) \times l(t) = \boxed{2\frac{dl}{dt}\ l(t)}$ 1

2. Applications numériques:

a) $\frac{dA}{dt} = 2 \times 0{,}01 \times 10 \boxed{= 0{,}2\ m^2/s}$ 0,5

b) $\frac{dA}{dt} = 2 \times 0{,}01 \times 100 \boxed{= 2\ m^2/s}$ 0,5

8/8