ISARA-Lyon - 1A - P43 F. BILLY
Semestre 2 - Examen n° 2 bis - 1h30 15/06/2011

Mathématiques

*Aucun document n'est autorisé. Seules les calculettes figurant sur la liste sont admises dans la salle d'examen. Les exercices proposés sont indépendants ; le barème est donné **à titre purement indicatif**. Les **résultats** doivent être **obligatoirement encadrés**. S'il y a lieu, les calculs littéraux et les applications numériques seront clairement différenciés. La **clarté de la présentation**, la **cohérence du raisonnement** ainsi que la **qualité de la rédaction** entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

Exercice 1 - Question de cours : famille libre dans $\mathbb{R}^3$ (4,5 points)

Soit $\mathcal{B} = (\vec{e1}, \vec{e2}, \vec{e3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Rappelez les coordonnées (évidemment exprimées dans $\mathcal{B}$) des vecteurs $\vec{e1}$, $\vec{e2}$ et $\vec{e3}$.
2. **Définissez** ce qu'est, dans $\mathbb{R}^3$, une famille libre de vecteurs.
3. On donne, dans la base canonique :
   $\vec{u}\,(1;2;3)$; $\vec{v}\,(1;0;-2)$; $\vec{w}\,(2;4;6)$
   a) En utilisant la méthode classique, déterminez si $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une famille libre.
   b) Pouvait-on prévoir ce résultat ? Expliquez...

Exercice 2 - Algèbre linéaire (9 points)

On donne la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et f l'application linéaire associée (de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$).
$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$.

1. Déterminer l'image par f du vecteur $\vec{u}(0;1;-1)$.
2. Calculer, après en avoir justifié l'existence, l'inverse de la matrice A.
3. Déterminer le vecteur de $\mathbb{R}^3$ dont l'image par f est le vecteur $\vec{v}(7;8;5)$.
4. Utiliser ce qui précède pour résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Exercice 3 - Endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ (7,5 points)

Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :
$g(x;y) = (2x - 7y\,;\, 4x + 3y)$

$\mathbb{R}^2$ est muni :

- de sa base canonique $\mathfrak{B}_1 = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$.
- de la base $\mathfrak{B}_2 = (\vec{u_1}, \vec{u_2})$ avec $\vec{u_1} = (1;3)_{\mathfrak{B}_1}$ et $\vec{u_2} = (2;5)_{\mathfrak{B}_1}$.

T.S.V.P. --→

1. Donner la matrice $M = M_{\mathfrak{B}_1}(g)$ et la matrice de passage P de la $\mathfrak{B}_1$ dans la base $\mathfrak{B}_2$.
2. Calculer $M' = M_{\mathfrak{B}_2}(g)$.
3. Soit $\vec{v} = (4; -3)_{\mathfrak{B}_1}$.
    a) Expliciter précisément les deux méthodes qui permettent de trouver les coordonnées du vecteur $g(\vec{v})$ dans la base $\mathfrak{B}_2$.
    b) Appliquer une de ces méthodes et conclure sur $(g(\vec{v}))_{\mathfrak{B}_2}$.

Mathématiques

Aucun document n'est autorisé. Seules les calculettes figurant sur la liste sont admises dans la salle d'examen.
Les exercices proposés sont indépendants ; le barème est donné ***à titre purement indicatif****.*
Les ***résultats*** *doivent être* ***obligatoirement encadrés****. S'il y a lieu, les calculs littéraux et les applications numériques seront clairement différenciés.*
La ***clarté de la présentation****, la* ***cohérence du raisonnement*** *ainsi que la* ***qualité de la rédaction*** *entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

Un formulaire est fourni en Annexe, à la fin du sujet.

Exercice 1 - Calcul d'une intégrale double (6,5 points)

On donne l'intégrale suivante :

$$V = \int\int_{\mathcal{D}} x\, y^2\, dx\, dy$$

avec $\mathcal{D}$ le domaine défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que } y^2 \leqslant 2\,p\,x \text{ et } x \leqslant p \ (p > 0)\}$$

1. Effectuer le tracé du domaine $\mathcal{D}$ (on pourra choisir par exemple $p = 3$).
2. Expliciter succinctement les deux méthodes utilisables pour le calcul de V.
3. Mettre en oeuvre **une de ces deux méthodes** et montrer ainsi que $V = \dfrac{8\sqrt{2}\,p^5}{21}$.

Exercice 2 - Positions relatives de deux courbes autour de l'origine (12,5 points)

On considère les fonctions f et g définies respectivement par :

$$f(x) = x\sqrt{1 - \frac{2}{3}x^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \arctan(x)$$

1. a) Donner l'ensemble de définition de f.
   b) Idem pour la fonction g.
2. On se propose d'abord de déterminer le développement limité de g, en $x = 0$ et à l'ordre 5.
   a) Avec l'aide du formulaire, donner le développement limité, en $x = 0$ et à l'ordre 4, de la fonction g'.
   b) En déduire le DL de g recherché.
3. On se propose à présent de déterminer le développement limité de f, également en $x = 0$ et à l'ordre 5.
   a) Donner le développement limité de $h : x \mapsto \sqrt{1 - \frac{2}{3}x^2}$, en $x = 0$ et à l'ordre 4.
   b) En déduire le DL de f recherché.

T.S.V.P. $\dashrightarrow$

4. Etudions enfin les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, courbes représentatives respectives de f et g.
   a) Calculer, en $x = 0$ et à l'ordre 5, le développement limité de "$f - g$".
   b) En utilisant la même méthode que pour déterminer la position relative d'une courbe par rapport à sa tangente, donner une fonction équivalente à "$f - g$" autour de 0.
   c) En déduire, autour de l'origine, les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 3 - Encore une intégrale double ! ! (5 points)

On souhaite déterminer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe d'équation $y = x^2 + 1$, la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. On appelle $\mathcal{D}$ cette partie de plan.

1. Représenter graphiquement $\mathcal{D}$.
2. Déterminer cette aire en utilisant une intégrale double, c'est-à-dire en calculant

$$\mathcal{A} = \int\int_{\mathcal{D}} dx\, dy$$

3. Expliquer comment on peut retrouver ce résultat à l'aide d'une intégrale simple.
   Effectuer le calcul.

ANNEXE : Formulaire

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$
- $(\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
- $\arctan(0) = 0$

ISARA-Lyon - 1A - P43 F. BILLY
Semestre 2 - Examen n° 2 - 1h30 01/06/2011

Mathématiques

*Aucun document n'est autorisé. Seules les calculettes figurant sur la liste sont admises dans la salle d'examen. Les exercices proposés sont indépendants ; le barème est donné **à titre purement indicatif**.*
*Les **résultats** doivent être **obligatoirement encadrés**. S'il y a lieu, les calculs littéraux et les applications numériques seront clairement différenciés.*
*La **clarté de la présentation**, la **cohérence du raisonnement** ainsi que la **qualité de la rédaction** entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

Exercice 1 - Question de cours (4 points)

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$; soit M sa matrice associée dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e1}, \vec{e2}, \vec{e3})$.

1. a) Donnez la définition d'une application linéaire.
   b) Comment appelle-t-on une telle application de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$?
2. On a :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

   a) On considère le vecteur $\vec{u_1} = \vec{e_1} + \vec{e_3}$.
   Donnez, dans la base $\mathcal{B}$, les coordonnées de $f(\vec{u_1})$.
   b) Déterminez l'image par f du vecteur $\vec{v} = 2\vec{u_1} + \vec{e_2}$.

Exercice 2 - Base propre d'une application linéaire (8 points)

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.
Dans la base canonique $\mathcal{B} = (\vec{e1}, \vec{e2})$, sa matrice associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

1. Détermination des valeurs propres de f :
   a) Calculez $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2)$, où I_2 est la matrice identité.
   b) En déduire les valeurs propres de f, c'est-à-dire les valeurs de λ annulant $P(\lambda)$.
2. Détermination d'une base propre :
   Par définition, les vecteurs propres $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ vérifient matriciellement l'égalité suivante :

$$A.X = \lambda X \quad (*)$$

   a) Déduire de la question **1** et de $(*)$ les 2 systèmes (S_1) et (S_2) à résoudre pour trouver les vecteurs propres de f.
   b) Résolvez (S_1) et (S_2).
   Concluez en donnant les coordonnées de $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$, vecteurs propres de f (on les choisira évidemment les plus simples possibles).

T.S.V.P. --→

c) Soit $\mathcal{B}' = (\vec{u1}, \vec{u2})$ la base propre de f.
Donnez P, matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
Donnez A' (**en justifiant votre réponse**), matrice de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.

3. Que peut-on dire de A et A' ?

Exercice 3 - Système linéaire (8 points)

Soit le système *(S)* suivant :

$$\begin{cases} x + 3y + 5z = 7 \\ 2x + 4y + 8z = 16 \\ 3x + 4y + 5z = 6 \end{cases}$$

1. Donnez A, matrice des coefficients de *(S)*.
2. *(S)* est-il un système de Cramer (triplet solution unique) ?
   Justifiez.
3. Résolvez *(S)* à l'aide des matrices.
4. Retrouvez le résultat par une résolution classique (**obligatoirement** par combinaisons linéaires).

ISARA-Lyon - 1A - P43 F. BILLY
Semestre 2 - Examen n° 1 - 1h30 12/04/2011

Mathématiques

Aucun document n'est autorisé. Seules les calculettes figurant sur la liste sont admises dans la salle d'examen. Les exercices proposés sont indépendants ; le barème est donné ***à titre purement indicatif****.*
Les ***résultats*** *doivent être* ***obligatoirement encadrés****. S'il y a lieu, les calculs littéraux et les applications numériques seront clairement différenciés.*
La ***clarté de la présentation****, la* ***cohérence du raisonnement*** *ainsi que la* ***qualité de la rédaction*** *entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

Exercice 1 - Question de cours (3 points)

Retrouvez, à partir du développement limité de $x \mapsto (1+x)^\alpha$, le DL de $x \mapsto \ln(1+x)$, en $x = 0$ et à l'ordre 5.

Exercice 2 - Calcul d'un volume, puis des coordonnées d'un centre de gravité (8 points)

On considère le triangle ABC avec $A = (-1;0)$, $B = (1;0)$ et $C = (0;2)$.
Soit $\mathcal{D}$ la surface intérieure de ce triangle.
Soit la fonction f définie par $f(x,y) = y$ et V (voir figure 1) le volume limité à la base par le domaine $\mathcal{D}$ et au sommet par la surface d'équation $z = f(x,y)$, avec $(x,y) \in \mathcal{D}$. On a :

$$V = \int\int_{\mathcal{D}} y \, dx \, dy$$

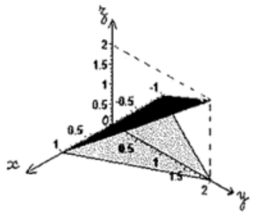

Figure 1

1. Représentez le domaine $\mathcal{D}$.
2. Détaillez la méthode à utiliser pour calculer V, puis, **le plus clairement possible**, expliquez pourquoi le choix de celle-ci s'impose.
3. Déterminez la valeur de V.
   Qu'en pensez-vous ?
4. a) En déduire les coordonnées de G, centre de gravité de $\mathcal{D}$.
   b) Le résultat obtenu vous rappelle-t-il une propriété bien connue du centre de gravité d'un triangle ? Si oui, énoncez cette propriété ; sinon, tentez d'improviser...

T.S.V.P. --→

Exercice 3 - Développement limité (6 points)

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$$

1. **Sans utiliser la formule de Taylor**, donner le DL de f en 0, à l'ordre 2.
2. Retrouver le résultat en utilisant la formule de Taylor.

Exercice 4 - Calcul d'un volume (rebelote !) (7 points)

$\mathcal{D}$ est le domaine défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant 1\}$$

Il s'agit de calculer le volume V limité à la base par $\mathcal{D}$, et au sommet par la surface d'équation $z = f(x, y) = y\,e^{-x}$.

1. Effectuer le tracé de $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé.
2. Calculer $V = \iint_{\mathcal{D}} f(x, y)\,dx\,dy$ en découpant ce volume en "tranches" d'épaisseur dx.