isaralyon
Une école d'ingénieurs
au coeur de la vie

Mercredi 1er juin 2005 : **8h00-11h00**

1ère année ; 37ème promotion

MATHEMATIQUES
EXAMEN N°3

L. BISIAUX

Documents interdits - Calculatrice autorisée : Casio fx 92 ou TI 36XII
Le sujet comporte 3 exercices indépendants.
*La **clarté de la présentation** et la **qualité de la rédaction** entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

EXERCICE 1 : (2 points)

Un conducteur électrique parcouru par un courant d'intensité constante s'échauffe par effet Joule.
On admet que la température de ce conducteur (en degrés Celsius) s'écrit en fonction du temps (en secondes) sous la forme :

$$\theta(t) = 20\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right).$$

Déterminer le développement limité de la fonction θ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

2. En déduire la tangente (T) à la courbe représentative (C) de la fonction θ en son point d'abscisse nulle et préciser la position de la courbe (C) par rapport à sa tangente (T) au voisinage de ce point.

EXERCICE 2 : (4 points)

1. Représenter l'ensemble D des points M(x ; y) du plan xOy vérifiant : $\begin{cases} y \geq 0 \text{ et} \\ x^2 + y^2 \leq 9 \text{ si } x \leq 0 \text{ et} \\ x + y \leq 3 \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$

2. Calculer $I = \iint_D x \, dxdy$.

3. Représenter le domaine D' du plan défini par : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 3 \end{cases}$

4. Calculer $J = \iint_{D'} (x + y) dxdy$

EXERCICE 3 : (14 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire associée de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique B.

I- Inverse.

1) Quelle est l'image par f du vecteur $\vec{u}_1(0;1;-1)$?

2) Calculer, après en avoir justifié l'existence, l'inverse de la matrice A.

3) Quel vecteur de $\mathbf{R}^3$ a pour image le vecteur $\vec{v}_1(7;8;5)$ par f ?

4) f est-elle bijective ? Si oui, exprimer les coordonnées de l'antécédent d'un vecteur quelconque $\vec{q}(x; y; z)$ par f.

II- Résolution d'un système linéaire.

Utiliser la partie I- pour résoudre le système : $\begin{cases} -2x+y+3z & = & 0 \\ -3x+2y+3z & = & 0 \\ -x+y+2z & = & 1 \end{cases}$

III- Diagonalisation.

1) En remarquant que 1 est racine du polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, déterminer λ_1, λ_2, λ_3 les valeurs propres de f (dans l'ordre croissant).
2) a) Donner 3 vecteurs propres $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ associés respectivement à λ_1, λ_2, λ_3. Pour les 3 vecteurs, on choisira le représentant dont l'abscisse est égale à 1.

   b) Montrer que les 3 vecteurs précédents forment une base B'. Donner la matrice de passage P de la base canonique à la base de vecteurs propres puis la matrice D de f dans B'.

IV- Résolution d'un système différentiel linéaire.

1) Déduire de la partie III- la résolution du système :

$$\begin{cases} x'(t)=-2x(t)+y(t)+3z(t) \\ y'(t)=-3x(t)+2y(t)+3z(t) \\ z'(t)=-x(t)+y(t)+2z(t) \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables d'une variable réelle t.

2) Donner la solution particulière satisfaisant aux conditions $x(0) = 0$; $y(0) = 0$ et $z(0) = 3$.

V- Calcul de A^n.

1) Calculer A^2.
2) Utiliser la partie III- pour donner l'expression de A^n où n est un entier naturel.
3) En déduire $f \circ f \circ f(0;0;1)$.

Formulaire :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \qquad \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$