isara lyon
Une école d'ingénieurs au coeur de la vie

Lundi 22 novembre2004 : **13h00-16h00**

1ère année ; 37ème promotion

MATHEMATIQUES

EXAMEN N°1

L. BISIAUX

Documents interdits - Calculatrice interdite

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

La ***clarté de la présentation*** *et la* ***qualité de la rédaction*** *entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

EXERCICE 1 : (4 points)

Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle : $xy'+2y = \dfrac{2}{1+x^2}$ avec la condition initiale $y(1) = \ln(2)$.

EXERCICE 2 : (5 points)

Supposons dans la chute des corps que la résistance de l'air n'est pas négligeable. Si elle est proportionnelle à la vitesse , on aura $R=kv$ où k dépend de la forme du corps. Le principe fondamental de la dynamique donne alors $P-kv=ma$ donc $mg - kv = m\dfrac{dv}{dt}$.

1) Résoudre cette équation différentielle, c'est à dire exprimer $v(t)$ sachant qu'à l'instant $t=0$ la vitesse est nulle. Que se passe t-il lorsque t est grand ($t \to +\infty$). Interpréter.

2) Sachant que $v = \dfrac{dx}{dt}$, en déduire l'espace parcouru $x(t)$ avec la condition initiale $x=0$ quand $t=0$.

EXERCICE 3 : (5 points)

La forme $\omega(x,y) = (x^2y + y^2 + 2xy)dx + (x^2 + x)(x+2y)dy$ n'est pas une différentielle totale exacte. Trouver alors une fonction $\alpha(x)$ telle que $\alpha(x)\omega(x,y)$ soit une forme exacte. Intégrer la nouvelle forme obtenue. (α est appelé facteur intégrant)

EXERCICE 4 : (6 points)

Le but de l'exercice est la résolution de l'équation différentielle (E) : $x(x^2+1)y'-2y = x^3(x-1)^2e^{-x}$ où y représente une fonction de x dérivable sur $]0;+\infty[$.

1) a) Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout x de $]0;+\infty[$, $\dfrac{2}{x(x^2+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

b) En déduire une primitive sur $]0;+\infty[$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x(x^2+1)}$.

2) Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle $x(x^2+1)y'-2y = 0$.

3) On se propose de déterminer une fonction g dérivable sur $]0;+\infty[$ telle que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}g(x)$ soit une solution particulière de (E).

a) Montrer que, pour qu'il en soit ainsi, on doit avoir $g'(x) = (x-1)^2e^{-x}$.

b) Déterminer les réels α,β,γ tels que la fonction $x \mapsto (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{-x}$ soit une primitive sur $]0;+\infty[$ de $g'(x)$.

c) En déduire une solution particulière de l'équation (E) puis les solutions générales de cette équation.