insa lyon
Une école d'ingénieurs
au coeur de la vie

Mercredi 30 novembre 2005 : **16h15-19h15**

1ère année ; 38ème promotion

MATHEMATIQUES
EXAMEN N°1

L. BISIAUX

Documents interdits - Calculatrice interdite
Le sujet comporte 5 exercices indépendants.
*La **clarté de la présentation** et la **qualité de la rédaction** entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*
*Les résultats devront être **encadrés**. Tout résultat non encadré ne sera pas pris en compte.*

EXERCICE 1 : (4 points)

La forme $\omega(x,y) = y^2 dx + (x^2 - 2xy)dy$ n'est pas une différentielle totale exacte. Trouver alors une fonction $\alpha(x)$ telle que $\alpha(x)\omega(x,y)$ soit une forme exacte. Intégrer la nouvelle forme obtenue. (α est appelé facteur intégrant)

EXERCICE 2 : (3,5 points)

Soit l'équation différentielle (E) : $v' = 10 - 0{,}4v^2$ où v est une fonction de la variable t.

1. Démontrer que (E) peut s'écrire, pour tout $v \in [0;5[$: $\dfrac{v'}{25-v^2} = 0{,}4$
2. Déterminer deux réels a et b tels que pour tout $v \in [0;5[$: $\dfrac{1}{25-v^2} = \dfrac{a}{5+v} + \dfrac{b}{5-v}$
3. Intégrer l'équation différentielle (E). Déterminer la solution particulière $v : t \mapsto v(t)$, telle que $v(0) = 0$.

EXERCICE 3 : (4 points)

1. Déterminer les réels a, b et c tels que : $\dfrac{x^2-1}{x(1+x^2)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{bx+c}{1+x^2}$
2. Résoudre l'équation différentielle (E_1) : $x(1+x^2)y' - y(x^2-1) = 0$
3. En déduire la résolution de (E) : $x(1+x^2)y' - y(x^2-1) + 2x = 0$
4. Existe-t-il des solutions de (E) qui sont définies pour toutes les valeurs réelles de x ?

EXERCICE 4 : (3,5 points)

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' + \omega^2 y = a\sin(\omega t)$ où a et ω sont deux réels non nuls fixés, t un réel positif représentant le temps et y une fonction de la variable t.

1. Résoudre l'équation sans second membre.
2. Montrer que l'équation (E) admet une solution particulière $h : t \mapsto kt\cos(\omega t)$ où k est un réel à calculer.
3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) vérifiant les conditions initiales : $y(0) = 0$ et $y'(0) = -\dfrac{a}{2\omega}$.

EXERCICE 5 : (5 points)

1. Déterminer une primitive de la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^3} + \dfrac{1}{u}$
2. Soit l'équation différentielle : (E_1) : $r(1+\cos^2\theta)\sin\theta d\theta = \cos^3\theta dr$. (r est un nombre strictement positif)
   a) Poser $u = \cos\theta$. En déduire une équation différentielle (E_2) dans laquelle ne figure plus que u et r, puis intégrer (E_2), c'est-à-dire expliciter r en fonction de u.
   b) En déduire la résolution de (E_1), c'est-à-dire expliciter r en fonction de θ.
3. On considère l'équation (E) : $(x^2+y^2) - xyy' = 0$. Passer en coordonnées polaires, c'est-à-dire poser $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$ où x et y sont fonctions des deux variables r et θ. On calculera pour cela les différentielles totales dx et dy.
4. Résoudre (E).