ISARA-Lyon - 1A - 41$^{\text{ème}}$ promotion
Examen S2

F. BILLY
26/05/2009 (8h à 11h)

Mathématiques

Aucun document n'est autorisé. Seules les calculettes figurant sur la liste sont admises dans la salle d'examen.
*Les exercices proposés sont indépendants ; le barème est donné **à titre purement indicatif**.*
***Les résultats** doivent être **obligatoirement encadrés**. S'il y a lieu, les calculs littéraux et les applications numériques seront clairement différenciés.*
***La clarté de la présentation**, la **cohérence du raisonnement** ainsi que la **qualité de la rédaction** entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

Un formulaire est fourni en Annexe, à la fin du sujet.

Exercice 1 - Polynôme d'une variable complexe (3 points)

Soit un réel u tel que $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$.
On considère l'équation suivante de la variable $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + (4\cos u)\, z + 4\cos(2u) + 2 = 0 \qquad (E)$$

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées indépendamment.

1. a) Déterminer les valeurs de u pour lesquelles les solutions de *(E)* sont réelles.
   b) Représenter cet ensemble sur le cercle trigonométrique.
2. On suppose $u = \frac{\pi}{6}$.
   a) Résoudre *(E)*.
   b) Les solutions sont-elles conjuguées ? Etait-ce prévisible ?
   c) Exprimer ces solutions sous forme exponentielle.
   d) Représenter celles-ci dans le plan complexe.

Exercice 2 - Calcul d'un volume à l'aide d'une intégrale double (4 points)

$\mathcal{D}$ est le domaine défini par :

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \geqslant 0\,,\ y \geqslant 0 \text{ et } x + y \leqslant 1\}$$

Il s'agit de calculer le volume V limité à la base par $\mathcal{D}$, et au sommet par la surface d'équation $z = f(x, y) = y\, e^{-x}$.

1. Effectuer le tracé de $\mathcal{D}$ dans un repère orthonormé.
2. Calculer $V = \iint\limits_{\mathcal{D}} f(x, y)\, dx\, dy$ en utilisant successivement les deux méthodes suivantes :
   a) en découpant V en "tranches" d'épaisseur dx.
   b) en découpant V en "tranches" d'épaisseur dy.

Exercice 3 - Système linéaire 3 × 3 (3,5 points)

On donne le système *(S)* suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ 6x - y + 5z = 2 \end{cases}$$

T.S.V.P. --→

1. Résoudre *(S)* à l'aide des matrices.
2. Retrouver le résultat par une résolution classique (par combinaisons linéaires).

Exercice 4 - Etude locale d'une fonction (9,5 points)

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $\mathcal{D}_E = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = e^{-x} \cos x$.
Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f.

Les parties A et B sont totalement indépendantes.

A - Première partie - Etude des variations de f

1. Donner $f'(x)$ sous la forme $g(x) \times (\cos x + \sin x)$, g étant une fonction à déterminer.
2. On admet qu'il existe une unique valeur α annulant f' sur $\mathcal{D}_E$.
   En s'aidant du cercle trigonométrique ou des graphes de $\cos x$ et $\sin x$, déterminer α.
3. Donner le signe de $f'(x)$ sur $\mathcal{D}_E$.
4. Dresser le tableau de variations **complet** de f sur $\mathcal{D}_E$.

B - Deuxième partie - Développement limité de f autour de $x = 0$

1. A l'aide de la formule de Taylor-MacLaurin, déterminer le développement limité de f au voisinage de zéro, à l'ordre 3.
2. Retrouver ce résultat en utilisant les développements limités usuels.
3. En déduire :
   a) l'équation de la droite $(\mathcal{T})$, tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 0.
   b) la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{T})$ au voisinage de 0.

C - Troisième partie - Courbes et intégrales

1. Représenter dans un repère orthonormé (unité graphique : 4 cm) la courbe $(\mathcal{C})$ et la droite $(\mathcal{T})$.
2. Soit g la fonction telle que $g(x)$ soit l'expression de la partie régulière du DL déterminé dans la partie B. Soit (Γ) sa courbe représentative.
   Etudier succinctement, sur $\mathcal{D}_E$, les variations de g (dérivée, valeur aux bornes, tableau de variations) et effectuer le tracé de (Γ) **sur le graphe de la question précédente.**
3. Soit I l'intégrale suivante :
$$I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x)\,dx$$
   Montrer, en utilisant 2 intégrations par parties successives, que $I = \cosh(\pi/2)$.
4. Soit K l'intégrale suivante :
$$K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} g(x)\,dx$$
   Calculer K.
5. Déterminer l'erreur relative commise, exprimée en %, en approximant I par K.
   Cette erreur vous paraît-elle importante ? Expliquer...

<u>ANNEXE</u> : Formulaire de trigonométrie

- $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$
- $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$