ISARA-Lyon / 1A / 40$^{\text{ème}}$ promotion
S1 / Examen 1

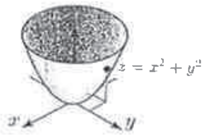
F. BILLY
20/11/2007 (8h à 11h)

Mathématiques

*Aucun document n'est autorisé. Seules les calculettes figurant sur la liste sont admises dans la salle d'examen. Les exercices proposés sont indépendants ; le barème est donné **à titre purement indicatif**. Les **résultats** doivent être **obligatoirement encadrés**. S'il y a lieu, les calculs littéraux et les applications numériques seront clairement différenciés. **La clarté de la présentation**, la **cohérence du raisonnement** ainsi que la **qualité de la rédaction** entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

Exercice 1 - Lignes de niveau / Courbes coordonnées (3 points)

1. Définir, pour une fonction de deux variables, ce que sont :
   - les lignes de niveau.
   - les courbes coordonnées.
2. On considère la fonction $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Le graphe est donné ci-dessous, il s'agit d'un paraboloïde de révolution.



Dans le cas de cette fonction f :

a) Donner les équations et la nature des lignes de niveau.
En représenter graphiquement quelques-unes (**en deux dimensions**, dans un plan à préciser).

b) Même question pour les courbes coordonnées.

Exercice 2 - Calcul d'une différentielle (2,5 points)

Soit la fonction $y(x)$ telle que : $y = \dfrac{a+x}{(b+x)^n}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$
(a, b et n sont évidemment des constantes).

Calculer la différentielle dy :

1. par un calcul direct.
2. en utilisant la différentielle logarithmique (on explicitera TOUTES les étapes de calcul).

Exercice 3 - Forme différentielle (4 points)

On considère :

- la forme différentielle $\omega(x, y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}dx + y\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}dy$.
- dans un repère orthonormé, les points $A(1; 0)$, $B(1; 1)$ et $C(0; 1)$.

1. Montrer que ω est une forme exacte.
2. Déterminer l'ensemble des primitives de ω.

T.S.V.P. --→

3. On désigne par :
   - $[AB]$ le segment $[AB]$ parcouru de A vers B (idem pour $[BC]$ et $[CA]$).
   - (T) le contour du triangle ABC, parcouru dans le sens trigonométrique.

   a) Calculer $\int_{[AB]} \omega$, $\int_{[BC]} \omega$ et $\int_{[CA]} \omega$.

   b) En déduire la valeur de $\int_{(T)} \omega$. Conclure à propos du résultat obtenu.

Exercice 4 - Détermination de domaine (2 points)

Soit la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$:

$$f(x,y) = \frac{1}{(x+y+1)(xy+1)}.$$

1. Déterminer son domaine de définition (en concluant par une phrase décrivant ce domaine).
2. Le représenter graphiquement.

Exercice 5 - Calcul d'un gradient (2 points)

Soit $g(x,y,z) = xyz\, sin(xy)$.
Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{grad}\, g$.

Exercice 6 - Calcul d'extremum et boîte de raviolis (3,5 points)

On veut produire une boîte de conserve (cylindre de révolution) **de volume donné** V avec le **minimum de métal**, pour réduire au maximum les coûts de fabrication. On suppose qu'il n'y a aucun déchet de métal et que l'épaisseur de la feuille de métal est constante partout (elle est la même pour le cylindre et pour les 2 couvercles). Dans ces conditions, on cherche donc à **minimiser la surface** de métal utilisée.
On note :

- h la hauteur du cylindre.
- r le rayon de sa base.

1. Exprimer la surface totale de la boîte, notée S_T, en fonction de r et V.
2. V étant constant, déterminer r pour que la boîte soit la plus économique à fabriquer (on donnera le tableau de variations approprié).
3. Dans les conditions de la question 2, en déduire le rapport $\alpha = h/r$.
4. Au supermarché du coin, on peut trouver des boîtes de raviolis cylindriques telles que :
   - $h = 11,8$ cm
   - $r = 5$ cm.

   Le fabricant a-t-il optimisé les dimensions de manière à ce que ces boîtes lui reviennent le moins cher possible ? Quelles hypothèses peut-on peut-être remettre en cause ? Expliquer...

Exercice 7 - Bijection réciproque (3 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2e^x+1}{e^x+1}$.

1. Donner l'ensemble de définition D_f.
2. Déterminer deux sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$ pour que f constitue une bijection entre A et B (on cherchera à résoudre l'équation $y = f(x)$, l'inconnue étant x).
3. Définir la bijection réciproque f^{-1}.