

Mathématiques

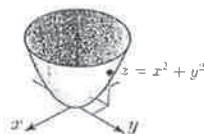
Aucun document n'est autorisé. Seules les calculatrices figurant sur la liste sont admises dans la salle d'examen. Les exercices proposés sont indépendants ; le barème est donné à titre purement indicatif.

Les résultats doivent être obligatoirement encadrés. S'il y a lieu, les calculs littéraux et les applications numériques seront clairement différenciés.

La clarté de la présentation, la cohérence du raisonnement ainsi que la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.

Exercice 1 - Lignes de niveau / Courbes coordonnées (3 points)

- Définir, pour une fonction de deux variables, ce que sont :
 - les lignes de niveau.
 - les courbes coordonnées.
- On considère la fonction $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Le graphe est donné ci-dessous, il s'agit d'un paraboloïde de révolution.



Dans le cas de cette fonction f :

- Donner les équations et la nature des lignes de niveau.
En représenter graphiquement quelques-unes (**en deux dimensions**, dans un plan à préciser).
- Même question pour les courbes coordonnées.

Exercice 2 - Calcul d'une différentielle (2,5 points)

Soit la fonction $y(x)$ telle que : $y = \frac{a+x}{(b+x)^n}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{Z}$
(a , b et n sont évidemment des constantes).

Calculer la différentielle dy :

- par un calcul direct.
- en utilisant la différentielle logarithmique (on explicitera TOUTES les étapes de calcul).

Exercice 3 - Forme différentielle (4 points)

On considère :

- la forme différentielle $\omega(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} dx + y \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} dy$.
- dans un repère orthonormé, les points $A(1; 0)$, $B(1; 1)$ et $C(0; 1)$.
 - Montrer que ω est une forme exacte.
 - Déterminer l'ensemble des primitives de ω .

T.S.V.P. --->

3. On désigne par :

- $[AB]$ le segment $[AB]$ parcouru de A vers B (idem pour $[BC]$ et $[CA]$).
- (T) le contour du triangle ABC , parcouru dans le sens trigonométrique.

a) Calculer $\int_{[AB]} \omega$, $\int_{[BC]} \omega$ et $\int_{[CA]} \omega$.

b) En déduire la valeur de $\int_{(T)} \omega$. Conclure à propos du résultat obtenu.

Exercice 4 - Détermination de domaine (2 points)

Soit la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} :

$$f(x, y) = \frac{1}{(x + y + 1)(xy + 1)}.$$

1. Déterminer son domaine de définition (en concluant par une phrase décrivant ce domaine).
2. Le représenter graphiquement.

Exercice 5 - Calcul d'un gradient (2 points)

Soit $g(x, y, z) = xyz \sin(xy)$.

Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{\text{grad}} g$.

Exercice 6 - Calcul d'extremum et boîte de raviolis (3,5 points)

On veut produire une boîte de conserve (cylindre de révolution) de volume donné V avec le **minimum de métal**, pour réduire au maximum les coûts de fabrication. On suppose qu'il n'y a aucun déchet de métal et que l'épaisseur de la feuille de métal est constante partout (elle est la même pour le cylindre et pour les 2 couvercles). Dans ces conditions, on cherche donc à **minimiser la surface** de métal utilisée.

On note :

- h la hauteur du cylindre.
- r le rayon de sa base.

1. Exprimer la surface totale de la boîte, notée S_T , en fonction de r et V .
2. V étant constant, déterminer r pour que la boîte soit la plus économique à fabriquer (on donnera le tableau de variations approprié).
3. Dans les conditions de la question 2, en déduire le rapport $\alpha = h/r$.
4. Au supermarché du coin, on peut trouver des boîtes de raviolis cylindriques telles que :
 - $h = 11,8$ cm
 - $r = 5$ cm.

Le fabricant a-t-il optimisé les dimensions de manière à ce que ces boîtes lui reviennent le moins cher possible ? Quelles hypothèses peut-on peut-être remettre en cause ? Expliquer...

Exercice 7 - Bijection réciproque (3 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$.

1. Donner l'ensemble de définition D_f .
2. Déterminer deux sous-ensembles A et B de \mathbb{R} pour que f constitue une bijection entre A et B (on cherchera à résoudre l'équation $y = f(x)$, l'inconnue étant x).
3. Définir la bijection réciproque f^{-1} .