isara
Une école d'ingénieurs
au coeur de la vie

Jeudi 2 mars 2006 : **8 h 00 – 11 h 0**

1ère année ; 38ème promotion

MATHEMATIQUES

EXAMEN N°2

L. BISIAUX

Documents interdits - Calculatrice interdite

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

*La **clarté de la présentation** et la **qualité de la rédaction** entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

EXERCICE 1 : *(4,5 points)*

1) Calculer $I = \int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$; **2)** Linéariser $\cos^5 x$ puis calculer $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx$.

EXERCICE 2 : *(4 points)*

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;0]$ par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$.

1) Donner le développement limité de $\sqrt{1+u}$ en 0 à l'ordre 2.
2) Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 2. Que peut-on en déduire ?
3) Calculer $\frac{f(x)}{x}$. En déduire, en posant $u = \frac{1}{x^2}$, que la courbe représentative (C) de f admet une asymptote oblique (D) dont on donnera une équation. On précisera la position relative de (C) et (D) au voisinage de $-\infty$.

EXERCICE 3 : *(6 points)*

1) **a)** Décomposer en éléments simples : $f(x) = \frac{2x+1}{(x-2)^2}$. En déduire $I = \int f(x)dx$

b) Calculer $J = \int \frac{dx}{x^2-4x+7}$ puis $K = \int \frac{(x+3)}{x^2-4x+7}dx$.

2) On cherche à calculer $L = \int F(x)dx$ où $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{3x^3-8x^2+2x+19}{x^4-8x^3+27x^2-44x+28}$.

a) Développer et réduire $(x-2)^2(x^2-4x+7)$.

b) Décomposer F(x) en éléments simples.

c) En déduire le calcul de $L = \int F(x)dx$.

EXERCICE 4 : *(5,5 points)*

Soient $f : z \mapsto z' = \frac{2z-i}{z+1-i}$ et $F : M(z) \mapsto M'(z')$. f est définie sur $\mathbf{C} - \{ z_A \}$ avec $z_A = -1+i$.

1) On pose z = x + iy où x et y sont réels.

a) Déterminer Re(z') et Im(z') en fonction de x et y.

b) Déterminer et construire l'ensemble *E* des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

c) Déterminer et construire l'ensemble *G* des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.

2) Soit B, le point d'affixe $z_B = \frac{i}{2}$ et C le point d'affixe $z_C = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$.

a) Vérifier que B appartient à *E* et à *G* et que C appartient à *G*. Placer B et C sur la figure.

b) Ecrire $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$ sous forme trigonométrique ou exponentielle.

c) En déduire la nature du triangle ABC.

Formulaire :

$\operatorname{Arctan}'x = \frac{1}{1+x^2}$; $\operatorname{Arcsin}'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\operatorname{Arccos}'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\operatorname{Argsh}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $\operatorname{Argch}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; $\operatorname{Argth}'x = \frac{1}{1-x^2}$

$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.