F. BILLY
Mathématiques

S1 - Examen 1 - 20/11/2007
CORRECTION

Exercice 1 - Lignes de niveau / Courbes coordonnées :

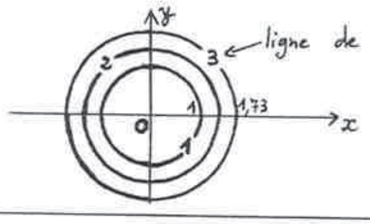
1°) Définitions : (Fonction de deux variables)

* Lignes de niveau : k étant une constante, la ligne de niveau « k » est l'ensemble des points (x, y) tels que $f(x, y) = k$.

* Courbes coordonnées : ce sont les sections du graphe par les plans parallèles au plan (yOz) (donc d'équations $x = x_0$) ou au plan (xOz) (donc d'équations $y = y_0$).
Rmq : ce sont les courbes représentatives des fonctions partielles.

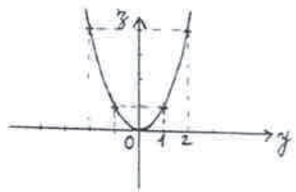
2°) $z = f(x, y) = x^2 + y^2 \rightarrow$ paraboloïde de révolution.

a/ Les lignes de niveau sont les courbes d'équations $x^2 + y^2 = k$: ce sont donc des cercles centrés sur O, de rayons $\sqrt{k}$.
On les représente graphiquement par leur projection sur le plan (xOy) :

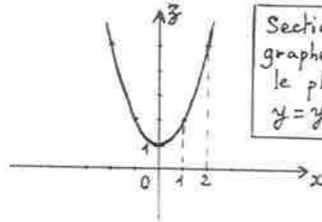


b/ Les courbes coordonnées sont les courbes d'équations $z = x^2 + y_0^2 = x^2 + cte$ ou $z = y^2 + x_0^2 = y^2 + cte$: ce sont donc des paraboles d'axe (Oz).

Dans le plan (yOz) (d'équation $x = 0$) :



Dans le plan d'équation $y = 1$:



Exercice 2 - Calcul d'une différentielle :

1°) Calcul direct :

$$y = \frac{a+x}{(b+x)^n} = (a+x)(b+x)^{-n}$$

on a donc :

$$y' = (b+x)^{-n} + (a+x) \times (-n)(b+x)^{-n-1}$$
$$= (b+x)^{-n} - n(a+x)(b+x)^{-n-1}$$
$$= (b+x)^{-n}\left[1 - n(a+x)(b+x)^{-1}\right]$$
$$= \frac{1}{(b+x)^n}\left(1 - \frac{n(a+x)}{b+x}\right)$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(b+x)^n} \times \frac{b+x-an-nx}{b+x}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{dy = \frac{(1-n)x - an + b}{(b+x)^{n+1}}\, dx}$$

2°) Différentielle logarithmique :

on a : $\ln y = \ln(a+x) - n\ln(b+x)$

• on dérive : $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{a+x} - n\dfrac{1}{b+x}$

$\Leftrightarrow y' = \dfrac{a+x}{(b+x)^n}\left(\dfrac{1}{a+x} - \dfrac{n}{b+x}\right)$

• on différencie : $\dfrac{dy}{dx} = (b+x)^{-n} - n(a+x)(b+x)^{-n-1}$

$= (b+x)^{-n-1}\left[(b+x) - n(a+x)\right]$

$= \dfrac{b+x-an-nx}{(b+x)^{n+1}}$

d'où : $\boxed{dy = \dfrac{(1-n)x - an + b}{(b+x)^{n+1}}\,dx}$.

Exercice 3 - Forme différentielle :

$$\omega = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{P}dx + \underbrace{y\,\frac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2}}_{Q}dy$$

1°) * $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{-x \times 2y}{(x^2+y^2)^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

* $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = y\,\dfrac{-2x(x^2+y^2) - (1-x^2-y^2)\times 2x}{(x^2+y^2)^2} = y\,\dfrac{-2x(\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+1-\cancel{x^2}-\cancel{y^2})}{(x^2+y^2)^2}$

$= -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Conclusion : $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, donc ω est une forme exacte.

2°) ω est exacte, donc $\exists$ une fonction f telle que :

$\| \; df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

L'unicité de la différentielle permet d'écrire immédiatement :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = P = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2x}{x^2+y^2} & (1) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = Q = y\,\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2} & (2) \end{cases}$$

• on intègre (1) / x :

$f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + k(y)$ (3)

• on dérive (3) / y :

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2y}{x^2+y^2} + k'(y) = \dfrac{y}{x^2+y^2} + k'(y)$

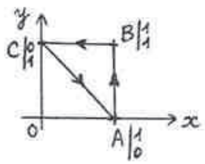
de (2), on déduit : $k'(y) = y\,\dfrac{1-x^2-y^2}{x^2+y^2} - \dfrac{y}{x^2+y^2}$

$\Leftrightarrow k'(y) = y\,\dfrac{1-x^2-y^2-1}{x^2+y^2} = -y$.

d'où : $\| \; k(y) = -\dfrac{1}{2}y^2 + C$.

Conclusion : (en réinjectant dans (3))
les primitives de ω sont les fonctions définies par :
$f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - \dfrac{1}{2}y^2 + C$. $(C \in \mathbb{R})$

3°)



a) ω est une forme exacte, donc :

- $\int_{\widehat{AB}} \omega = f(B) - f(A) = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + C - C$
  $= \underline{\frac{1}{2}(\ln 2 - 1)}$.
- $\int_{\widehat{BC}} \omega = f(C) - f(B) = -\frac{1}{2} + C - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} - C$
  $= \underline{-\frac{1}{2} \ln 2}$.
- $\int_{\widehat{CA}} \omega = f(C) - f(A) = C + \frac{1}{2} - C = \underline{\frac{1}{2}}$.

b) $\int_{(T)} \omega = \int_{\widehat{AB}} \omega + \int_{\widehat{BC}} \omega + \int_{\widehat{CA}} \omega$

$= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{0}}$.

Le résultat obtenu est cohérent (et était prévisible !) puisque l'intégrale curviligne d'une forme différentielle exacte est nulle sur une courbe fermée.

Exercice 4 - Détermination de domaine :

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x;y) \longmapsto \frac{1}{(x+y+1)(xy+1)}$$

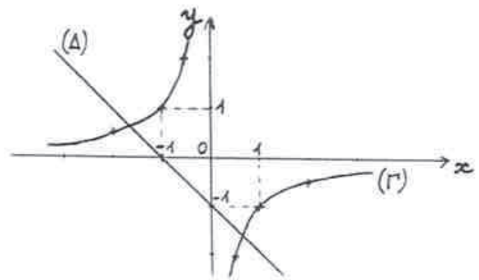
1°) $M\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \in \mathcal{D}_f$ si $\begin{cases} x + y + 1 \neq 0 \\ xy + 1 \neq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y \neq -x - 1 \\ y \neq -\frac{1}{x} \end{cases}$

- Soit (Δ) la droite d'équation $y = -x - 1$.
- Soit (Γ) la courbe (hyperbole) d'équation $y = -\frac{1}{x}$.

$\boxed{\text{Le domaine } \mathcal{D}_f \text{ est le plan privé de } (\Delta) \text{ et de } (\Gamma).}$

2°) Représentation graphique :



Exercice 5 - Calcul d'un gradient :

$$g(x,y,z) = xyz \sin(xy)$$

* Coordonnées de $\overrightarrow{\text{grad}}\, g$:

- $\frac{\partial g}{\partial x} = yz \sin(xy) + xyz \times y \cos(xy)$
  $= yz \left(\sin(xy) + xy \cos(xy) \right)$.

- $\dfrac{\partial g}{\partial y} = xz \sin(xy) + xyz \cdot x \cos(xy)$
  $= xz\left(\sin(xy) + xy\cos(xy)\right)$.

- $\dfrac{\partial g}{\partial z} = xy \sin(xy)$.

D'où : $\boxed{\overrightarrow{\text{grad}}\, g = \begin{pmatrix} yz\left(\sin(xy) + xy\cos(xy)\right) \\ xz\left(\sin(xy) + xy\cos(xy)\right) \\ xy\sin(xy) \end{pmatrix}}$.

Exercice 6 - Calcul d'extrémum et boîte de raviolis :

On note :
- V le volume du cylindre.
- h sa hauteur.
- r le rayon de sa base.

1°) $S_T = S_{cylindre} + 2\, S_{couvercle}$

soit : $S_T = 2\pi r h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$ (1)

or : $V = \pi r^2 h \iff h = \dfrac{V}{\pi r^2}$ (2)

(1) devient donc : $S_T = 2\pi r\left(\dfrac{V}{\pi r^2} + r\right)$

$= \dfrac{2V}{r} + 2\pi r^2$

Conclusion : $\boxed{S_T = 2\left(\dfrac{V}{r} + \pi r^2\right)}$.

2°) V étant constant, on cherche r pour que S_T soit minimal.

On dérive : ($\forall r \neq 0$) $S'_T(r) = \dfrac{dS_T}{dr} = 2\left(-\dfrac{V}{r^2} + 2\pi r\right)$

* Signe de S'_T :

- $S'_T(r) = 0 \iff -\dfrac{V}{r^2} + 2\pi r = 0$
  $\iff \dfrac{V}{r^2} = 2\pi r$
  $\iff r^3 = \dfrac{V}{2\pi}$
  $\iff \boxed{r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}}$.

- $S'_T(r) > 0 \iff \dfrac{V}{r^2} < 2\pi r$
  $\iff r > \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$.

* D'où le tableau de variations de S_T :

r	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		
S'_T		$-$	0	$+$	
S_T		$\searrow$	$S_T\left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\right)$	$\nearrow$	

$\underbrace{}_{\text{Minimum absolu}}$

3°) On se place dans le cas où S_T est minimal, c'est-à-dire quand $r^3 = \dfrac{V}{2\pi}$. (3)

MATHS - S1 - Exam. 1
Suite Correction

On pose : $\alpha = \frac{h}{r}$

- d'après (2) : $\alpha = \frac{V}{\pi r^3}$
- en utilisant (3) : $\alpha = \frac{V \times 2\pi}{\pi \times V}$

d'où : $\boxed{\alpha = 2}$.

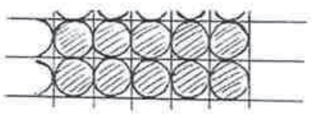
4°) * Concernant les boîtes de raviolis, on a :

$$\alpha = \frac{11,8}{5} = 2,36 .$$

A priori, le fabricant ne semble pas avoir optimisé les dimensions de ses boîtes ... ce qui semble peu probable !

* Il faut très certainement remettre en cause nos hypothèses, en particulier le fait qu'il n'y ait « aucun déchet de métal ». En effet, les couvercles étant découpés dans une plaque métallique, il y a nécessairement des chutes inutilisables.

- En quadrillant la plaque comme ci-dessous, puis en découpant le couvercle à l'intérieur de chaque carré, le problème est beaucoup plus réaliste.



La surface totale de métal utilisé est alors :
$S_T = 2\pi r h + 2(2r)^2 = 2\left(\frac{V}{r} + 4r^2\right)$.
Dans ces conditions, S_T est minimal pour $r = \sqrt[3]{\frac{V}{8}}$, et on trouve : $\alpha = \frac{8}{\pi} \simeq 2,55$.

MATHS - S1 - Exam. 1
Suite Correction

On se rapproche du rapport $\alpha = 2,36$ mesuré !

- En utilisant un réseau d'hexagones réguliers tracés sur la plaque (chaque couvercle étant tangent intérieurement à un hexagone), on aurait $\alpha \simeq 2,21$. Cette solution est celle qui engendre la perte minimale de métal.

* Pour retrouver exactement la valeur α mesurée, il faudrait, d'une part, avoir connaissance de la méthode employée pour découper les couvercles et, d'autre part, prendre en compte les soudures, les ondulations de la tôle sur le cylindre, etc ...

Exercice 7 - Bijection réciproque :

$$f(x) = \frac{2e^x + 1}{e^x + 1}$$

1°) $x \in \mathcal{D}_f$ ssi $e^x + 1 \neq 0$
$\Leftrightarrow e^x \neq -1$ (1)

or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x > 0$: (1) est ainsi toujours vérifiée.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_f = \mathbb{R}}$.

2°) * f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{2e^x(e^x+1) - (2e^x+1)e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{2e^{2x} + 2e^x - 2e^{2x} - e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$$

donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

* Limites aux bornes de $\mathcal{D}f$:

• en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^x + 1 = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x + 1 = 1 \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1}.$$

• en $+\infty$:

$$f(x) = \frac{e^x\left(2+\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{2+\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \frac{1}{e^x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{e^x} = 1 \end{array}\right\} \text{donc } \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2}.$$

* Tableau de variations :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	1 ↗	2

* f est définie, continue (en tant que composée de fonctions continues) et strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

De plus :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \end{cases}$$

Donc, d'après le théorème de la bijection :

$\boxed{f \text{ constitue une bijection de } A = \mathbb{R} \text{ vers } B =]1;2[\text{ ; elle admet donc une bijection réciproque de B vers A.}}$

3°) $y = \dfrac{2e^x+1}{e^x+1}$ $\iff y e^x + y = 2e^x + 1$

$\iff e^x(y-2) = 1-y$

$\iff e^x = \dfrac{1-y}{y-2}$

$\iff \boxed{x = \ln\left(\dfrac{1-y}{y-2}\right)}$.

Conclusion : la bijection réciproque de f est définie par

$$\boxed{\begin{array}{rcl} f^{-1} :]1;2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1-x}{x-2}\right) \end{array}}$$