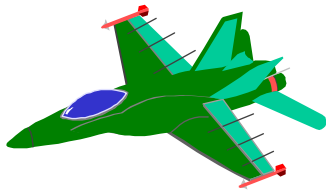


Mécanique des fluides



AVANT-PROPOS.....	3
INTRODUCTION.....	4
CHAPITRE I : OPERATEURS DIFFERENTIELS VECTORIELS.....	8
I.1. CHAMPS SCALAIRE ET VECTORIEL	8
I.1.1. <i>Champ scalaire</i>	8
I.1.2. <i>Champ vectoriel</i>	9
I.1.3. <i>Remarque</i>	9
I.2. LES SYSTEMES DE COORDONNEES COURANTS	9
I.2.1.1. En coordonnées cartésiennes.....	10
I.2.1.2. En coordonnées cylindriques.....	11
I.2.1.3. En coordonnées sphériques.....	11
I.3. OPERATEURS DIFFERENTIELS VECTORIELS	11
I.3.1. Opérateur gradient $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$	12
I.3.2. Opérateur nabla $\vec{\nabla}$	14
I.3.3. Opérateur divergence $\overrightarrow{\text{div}}\vec{A}$	14
I.3.4. Opérateur rotationnel $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$	17
I.3.5. Opérateur laplacien Δ	20
I.4. REMARQUES ET COMMENTAIRES	21
CHAPITRE II : LA STATIQUE DES FLUIDES	23
II.1. EXPRESSION DES FORCES AU SEIN D'UN FLUIDE	23
II.1.1. <i>Les forces de volume</i>	24
II.1.2. <i>Les forces de surface</i>	24
II.2. EQUATION FONDAMENTALE DE LA STATIQUE DES FLUIDES	25
II.2.1. <i>Equivalent volumique des forces de pression</i>	26
II.2.2. <i>Equation fondamentale de la statique des fluides</i>	26
II.3. APPLICATIONS ET EXEMPLES	27
II.3.1. <i>Théorème de Pascal (fluide incompressible)</i>	27
II.3.2. <i>Expérience du tonneau de Pascal</i>	29
II.3.3. <i>Château d'eau</i>	29
II.3.4. <i>Les mesures de pression</i>	33
II.3.4.1. Le baromètre à mercure.....	33
II.3.4.2. Le manomètre à colonne de liquide.....	34
II.3.5. <i>Application au calcul des forces de pression sur les parois (fluides incompressibles)</i>	35
II.4. THEOREME D'ARCHIMEDE	37
II.5. INFLUENCE DE LA TENSION SUPERFICIELLE	38
II.6. RAPPELS DE CE CHAPITRE.....	39
II.7. DISTRACTION	40
II.7.1. <i>Les machines à laver</i>	40
II.7.2. <i>Les terriers</i>	40
II.7.3. <i>la cavitation</i>	40
II.7.4. <i>Petite expérience</i>	41
EXERCICES DE STATIQUE DES FLUIDES	43
CHAPITRE III : CINEMATIQUE DES FLUIDES	58
III.1. DESCRIPTION CINEMATIQUE DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE.....	58
III.1.1. <i>Description cinématique eulérienne du mouvement d'un fluide</i>	59
III.1.2. <i>Expression générale du champ des accélérations</i>	59
III.1.3. <i>Dérivée particulière d'une grandeur</i>	60
III.2. CONSERVATION DE LA MASSE. DEBIT MASSIQUE	61
III.2.1. <i>Conservation de la masse</i>	61
III.2.2. <i>Vecteur densité de courant. Lignes de courant. Tube de courant.</i>	61
III.2.3. <i>Débit massique</i>	62
III.2.4. <i>Bilan de masse . Equation de continuité</i>	62
III.3. DIFFERENTS TYPES D'ECOULEMENTS	63

III.3.1. Ecoulement stationnaire ou permanent.....	63
III.3.2. Ecoulement incompressible.....	64
III.3.3. Ecoulement irrotationnel.....	64
III.3.4. Ecoulement stationnaire, incompressible, irrotationnel plan d'un fluide non visqueux.	65
III.3.4.1. Fonction potentielle des vitesses	65
III.3.4.2. Fonction courant.....	65
III.3.5. Ecoulement laminaire et écoulement turbulent.....	66
III.4. RAPPELS DE CE CHAPITRE	68
EXERCICES DE CINEMATIQUE DES FLUIDES	69
CHAPITRE IV DYNAMIQUE DES FLUIDES NON VISQUEUX	73
EQUATIONS D'EULER ET RELATIONS DE BERNOULLI.....	73
IV.1. EQUATION D'EULER.	73
IV.2. RELATION DE BERNOULLI.....	75
IV.3. APPLICATIONS	78
IV.3.1. L'effet Venturi (Giovanni Battista 1746-1822).....	78
IV.3.2. Formule de Torricelli (Evangelista 1608-1647).....	80
IV.3.3. Le tube de Pitot.....	82
IV.3.4. Petites illustrations.....	83
EXERCICES DE DYNAMIQUE DES FLUIDES PARFAITS.....	85

Avant-propos

Ce cours correspond sensiblement à l'enseignement de D.E.U.G. SM2 et MIAS 2. Il est accessible à tout étudiant ayant assimilé les bases mathématiques de première année de D.E.U.G. scientifique relatives aux calculs différentiel et intégral. Son but principal consiste à introduire les notions sur la mécanique des fluides parfaits (pas d'effet de viscosité). Des exemples de la vie de tous les jours illustrent ce cours, si vous en avez d'autres, ils seront les bienvenus. Pour aller plus loin, toute remarque ou commentaire sera utile, n'hésitez donc pas à les communiquer (lenoble@lpm.u-nancy.fr). Je tiens aussi à remercier Brigitte Dupin qui a participé à la rédaction de ce document.

MECANIQUE des FLUIDES

Pour gagner en F1, il faut être performant dans tous les domaines. Cependant, c'est l'aérodynamique qui fait la différence.

Alain Prost

Petit commentaire d'actualité : les soutiens financiers semblent être encore au-dessus de ceci !!!

Introduction

Si nous considérons notre monde, la Terre, nous vivons dans un environnement qui ne permet la vie que par l'existence des fluides. La respiration des animaux et des végétaux ou l'assimilation de l'eau, indispensable à toute forme de vie, nécessitent l'existence de fluides et de mouvements de ces derniers (atmosphère, rivières, fleuves et océans). Sans ces fluides, que seraient nos vacances à la mer ?

Le but de ce cours est d'utiliser les théorèmes généraux de la mécanique newtonienne et de les appliquer à la description macroscopique du mouvement des fluides (aucune considération quantique ou relativiste).

En plus de la **cinématique** et de la **dynamique** (abordées en mécanique du point), il faudra s'intéresser à la description d'un fluide au repos : la **statique des fluides**.

En premier lieu, il est nécessaire de décrire ce que nous allons appeler un fluide. On trouve souvent la définition suivante : « tout corps qui prend la forme du récipient qui le contient ».

Cette définition est bien évidemment trop vague et nous adopterons la définition suivante : « **Un fluide est un milieu continu qui se déforme tant que lui sont appliquées des forces de cisaillement, si faibles soient-elles** ».

Une remarque importante concernant cette définition est liée à l'absence de caractère cinétique de la déformation.

Nous pouvons d'ores et déjà séparer deux types de fluides :

- * Les **liquides** : existence d'une surface libre ou de discontinuité.
- * Les **gaz** : ils occupent tout le volume disponible.

La matière est constituée d'atomes dont la taille est de l'ordre de quelques dixièmes de nanomètres, dans ce qui suit, nous prendrons une taille égale à 3nm. Dans un gaz, dans les conditions normales de température et de pression, nous pouvons estimer que $6,02 \cdot 10^{23}$ molécules sont présentes dans 22,4 litres de gaz (gaz parfait). La distance moyenne entre deux atomes ou molécules est alors de l'ordre de $\left(\frac{22,4 \cdot 10^{-3}}{6,02 \cdot 10^{23}}\right)^{\frac{1}{3}}$ soit légèrement supérieure à 3nm. Si nous regardons le taux de remplissage, cela correspond à $\left(\frac{0,3}{3}\right)^3$ soit 10^{-3} . Dans ces conditions, le gaz est donc essentiellement composé de « vide »... On comprendra aisément qu'il est facile de rapprocher les molécules les unes des autres (voir la compressibilité dans ce qui suit).

Si nous raisonnons sur un liquide, de l'eau par exemple, dans 1g (correspondant à 1cm^3), nous pouvons estimer que $\frac{6,02 \cdot 10^{23}}{18 \text{ (masse molaire)}}$ molécules sont présentes. Le volume dont chaque molécule dispose est égal à $\frac{18}{6,02 \cdot 10^{23}}$, ce qui correspond à peu près à un cube de 0,3nm d'arrête. En d'autres termes, les molécules se touchent et il sera donc plus difficile de les rapprocher.

A l'échelle microscopique, ces molécules bougent continuellement les unes par rapport aux autres, c'est l'agitation thermique. A cette échelle, le milieu ne répond pas à la définition d'un fluide, il n'est pas continu (voir la définition d'une particule fluide dans ce qui suit).

Pour commencer, nous allons préciser quelques notions relatives aux fluides. Il est en effet important de définir certaines propriétés communes ainsi que d'autres qui permettront de les différencier. Ainsi pouvons-nous aborder les propriétés suivantes :

- **isotropie** : en un point du fluide, toutes les propriétés du fluide sont les mêmes dans toutes les directions de l'espace.
- **mobilité** : les fluides n'ont pas de forme propre. Si les conditions changent, le fluide s'adapte en se déformant. Le fluide n'a donc aucune mémoire des événements antérieurs.
- **compressibilité** : cette propriété caractérise la réponse du fluide à une variation de pression. On peut introduire le coefficient de compressibilité isotherme pour quantifier cela :

$$\kappa = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$$

Il est aisément concevable que la compressibilité des gaz est nettement supérieure à celle des liquides. Cependant, si cette dernière est faible, elle n'est pas nulle et il sera nécessaire d'en tenir compte dans certains cas.

- **viscosité** : quand une pierre tombe dans un liquide, outre la diminution de l'amplitude de l'onde due à la symétrie cylindrique de la propagation (diminution en $1/r$), on conçoit qu'une atténuation supplémentaire est liée aux caractéristiques du fluide. Ceci s'interprète en termes de diminution de l'énergie associée à l'onde qui a pour origine des frottements au sein du fluide. Plus les frottements sont importants, plus l'amortissement de l'onde est grand, plus on qualifie le fluide de visqueux.

Au moment de la rédaction de ce cours, un pétrolier (l'Erika) a coulé et déverse du pétrole au large des côtes bretonnes et vendéennes. Les journalistes, dans leur grand souci d'information, filment les nappes de pétrole à la dérive depuis des hélicoptères. L'effet de la viscosité est très clair en les observant. Dans l'eau, on observe d'une part des superpositions de vagues et d'autre part des embruns qui se superposent aux vagues. Ces deux mouvements ne sont pas transmis dans la nappe de pétrole de manière identique : les embruns disparaissent immédiatement et plus l'amplitude des vagues était petite dans l'eau plus ces vagues disparaissent rapidement.

- **fluide parfait** : On qualifie de parfait un fluide dans lequel les effets de la viscosité sont négligeables.

- **particule fluide** : Si, à l'échelle microscopique, les atomes ne répondent pas à la définition d'un fluide, nous définissons une « particule fluide » comme étant un système en équilibre thermodynamique local, infiniment petit devant le système global mais très grand devant les tailles moléculaires. Les particules fluides pourront ainsi être au repos alors que les molécules sont en mouvement.

Si cette particule fluide est définie comme infiniment petite, l'avantage se situe au niveau mathématique avec le calcul différentiel et intégral. Si elle est grande devant les tailles moléculaires, on pourra raisonner sur des grandeurs moyennes comme la masse volumique, la pression, la température ou la vitesse.

En examinant les propriétés que nous venons d'aborder, on se rend facilement compte que l'air enfermé dans un ballon en plastique et l'eau contenue dans un verre répondent bien à la définition du fluide. On admettra tout aussi facilement que les cailloux ou le verre qui contient l'eau ne sont pas des corps fluides. Mais le ballon qui contient l'air est-il fluide ? Si on augmente la quantité d'air, il se dilatera, donc se déformera... Citons le cas des peintures, des colles ou des bitumes, un temps fluides puis solides. Le sable qui s'écoule dans le sablier est-il fluide ? Il coule au niveau de l'étranglement donc est fluide, mais dans la partie inférieure, il fait un petit « tas » qui ne se déforme plus quand l'écoulement a cessé (sauf si on secoue le sablier), le sable n'est donc pas un fluide... Et le glacier sur lequel nous marchons avec nos crampons qui pourtant coule en permanence. A l'échelle temporelle de notre promenade, c'est un solide. En revanche, sur une année il répond à la définition du fluide.

Pour conclure sur cette partie, nous pouvons dire que si pour les gaz, le caractère fluide n'a aucun doute, il faut faire attention au niveau d'une certaine transition entre les liquides et les solides.

Dans ce cours, dédié au mouvement des fluides, nous allons utiliser certaines notions mathématiques de la théorie des champs. Ainsi la première partie concerne-t-elle la présentation de ces outils.

Chapitre I : opérateurs différentiels vectoriels

Dans de nombreux domaines de la physique, il est nécessaire de définir, à un instant donné, une grandeur en chaque point de l'espace. Nous pouvons donner quelques exemples : le champ et le potentiel électrostatiques, la masse volumique, le vecteur vitesse d'un écoulement, la masse volumique, l'énergie potentielle ou encore une force.

Dans ce qui suit, nous allons raisonner à un instant t donné, nous examinerons alors la grandeur qui nous intéresse. Le champ ainsi défini pourra être scalaire (masse volumique, énergie potentielle...) ou vectoriel (force, vitesse...). Certains opérateurs vectoriels différentiels seront introduits afin de caractériser, outre la grandeur, certaines dépendances avec les variables d'espace.

I.1. Champs scalaire et vectoriel

Pour commencer, nous allons définir un champ scalaire ou vectoriel à partir de notions que tout étudiant connaît.

I.1.1. Champ scalaire

Considérons le potentiel électrostatique V créé en un point M de coordonnées (x,y,z) par une charge ponctuelle q placée à l'origine O . Nous écrivons :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + k \quad \text{où } k \text{ est une constante déterminée arbitrairement.}$$

Ou encore $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + k$ si r représente la distance entre la charge et le point M .

En fait, à tout point M de l'espace, il est possible d'affecter une

grandeur locale scalaire $V(x,y,z)$. **L'ensemble des valeurs $V(x,y,z)$ constitue un champ scalaire.** En physique, nous définissons un grand nombre de telles fonctions : la température, l'énergie, la pression... Il sera souvent utile d'introduire les lignes ou les surfaces équipotentiels qui constituent des courbes ou des surfaces sur lesquelles la fonction prend toujours la même valeur.

I.1.2. Champ vectoriel

Considérons maintenant le champ électrostatique \vec{E} créé en un point M de coordonnées (x,y,z) par une charge ponctuelle q placée à l'origine O. Nous écrivons :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{x^2 + y^2 + z^2} \vec{u}_r \quad \text{où } \vec{u}_r \text{ est le vecteur unitaire dirigé selon } \overrightarrow{OM}.$$

Ou encore $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$ si r représente la distance entre la charge et le point M.

En fait, à tout point M de l'espace, il est possible d'affecter une grandeur locale vectorielle $\vec{E}(x,y,z)$. **L'ensemble de ces grandeurs $\vec{E}(x,y,z)$ constitue un champ vectoriel.** En mécanique des fluides, il sera primordial de caractériser le champ des vitesses relatif à un écoulement. Il sera aussi intéressant d'introduire la notion de lignes de champ qui sont tangentes au vecteur.

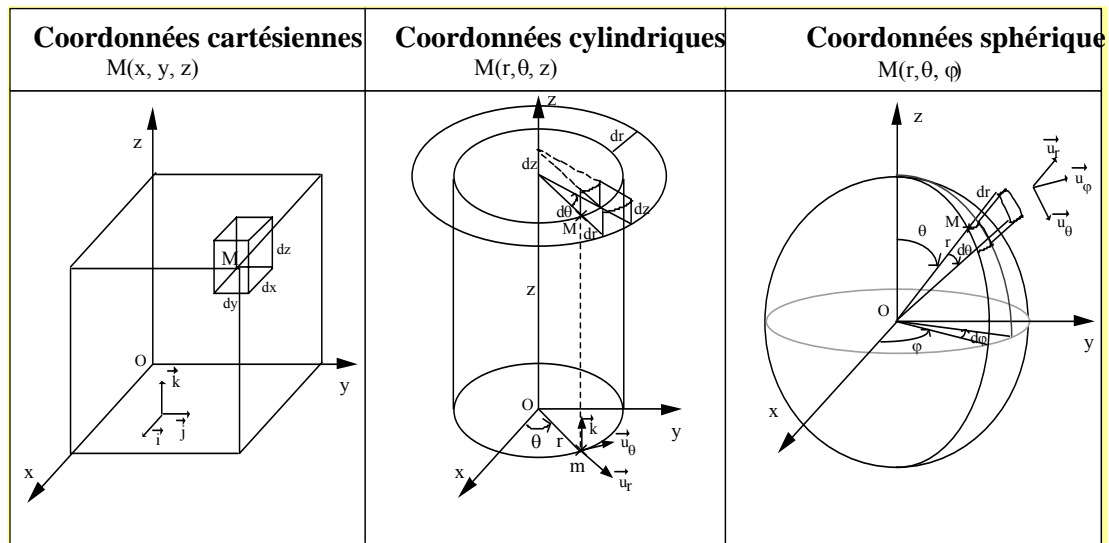
I.1.3. Remarque

Nous venons d'introduire la notion de champ : en chaque point de l'espace, nous caractérisons une grandeur (scalaire ou vectorielle). Nous ne nous sommes intéressés qu'à la dépendance de la grandeur avec la position, donc avec les variables d'espace. Ceci est toujours vrai dans le cas de l'électrostatique ou dans le cas d'un écoulement fluide **permanent (ou stationnaire)** mais ne le sera plus dans beaucoup d'autres domaines. En effet, nous aurons bien souvent à examiner la dépendance avec une variable supplémentaire, le temps.

I.2. Les systèmes de coordonnées courants

Pour repérer la position d'un point M dans l'espace à trois dimensions, il est nécessaire d'introduire trois axes non coplanaires. Le repérage peut alors être réalisé par l'introduction de (voir figure ci-dessous) :

- trois distances : coordonnées cartésiennes,
- deux distances et un angle : coordonnées cylindriques,
- une distance et deux angles : coordonnées sphériques.



Il est évident que le choix de la base de travail est déterminé en premier lieu par la symétrie du problème. Le calcul du champ électrostatique créé par une distribution de charge à symétrie sphérique sera mené en coordonnées sphériques, la détermination de ce champ engendré par un fil infini sera réalisée en coordonnées cylindriques. Enfin, le calcul du champ créé par plusieurs charges ponctuelles placées en différents points de l'espace sera plutôt effectué en coordonnées cartésiennes.

Dans ce qui suit, nous allons définir le vecteur position et le déplacement élémentaire dans les trois systèmes de coordonnées classiquement utilisés.

Le déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ est un vecteur qui traduit le déplacement du point M de coordonnées (α, β, γ) au point M' infiniment proche de M et de coordonnées $(\alpha+d\alpha, \beta+d\beta, \gamma+d\gamma)$.

1.2.1.1. En coordonnées cartésiennes,

nous écrivons : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Pour obtenir l'expression du déplacement élémentaire $d\vec{OM}$, nous pouvons, soit différentier \vec{OM} , soit raisonner géométriquement sur la figure : l'augmentation de x d'une quantité dx, se traduit par un déplacement d'une quantité dx selon le vecteur \vec{i} (raisonnement équivalent sur les axes y et z). La différenciation de \vec{OM} aboutit bien au même résultat qui semble évident :

$$d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

1.2.1.2. En coordonnées cylindriques,

nous écrivons : $\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{k}$. De la même manière qu'en coordonnées cartésiennes, les deux raisonnements pour obtenir le déplacement élémentaire restent valables :

nous allons du point M (r, θ , z) au point M'(r+dr, θ +d θ , z+dz). En augmentant r d'une quantité dr, on se déplace de dr suivant le vecteur \vec{u}_r . L'augmentation de θ de d θ se traduit par un déplacement sur l'arc de cercle de rd θ et selon le vecteur \vec{u}_θ . Enfin, le passage de z à z+dz est associé à un déplacement d'une quantité dz selon le vecteur \vec{k} .

Si nous différencions \vec{OM} , nous pouvons écrire :

$$d\vec{OM} = d(r\vec{u}_r + z\vec{k}) = dr\vec{u}_r + r d\vec{u}_r + dz\vec{k} \text{ or } d\vec{u}_r = \vec{u}_\theta d\theta \text{ et } d\vec{k} = \vec{0}$$

Nous pouvons donc écrire :

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$$

1.2.1.3. En coordonnées sphériques,

$\vec{OM} = r\vec{u}_r$ Pour obtenir le déplacement élémentaire, il n'est pas judicieux de différencier \vec{OM} . Il est beaucoup plus simple de raisonner sur la figure : nous allons d'un point M(r, θ , φ) au point M'(r+dr, θ +d θ , φ +d φ). L'augmentation de r d'une quantité dr se traduit par un déplacement de dr selon \vec{u}_r . Le passage de θ à θ +d θ est lié à un déplacement sur l'arc de cercle d'une quantité rd θ selon le vecteur \vec{u}_θ . Le point délicat est associé à l'augmentation de l'angle φ d'une quantité d φ : si M est sur « le sommet » de la sphère ($\theta=0$) il n'y a aucun déplacement, si M est dans le plan équatorial, le déplacement se fait sur l'arc de cercle. Dans les situations intermédiaires, pour savoir de quelle distance nous nous déplaçons, il faut projeter dans le plan équatorial, donc multiplier par sin θ . Le déplacement élémentaire peut donc s'écrire :

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{u}_\varphi$$

1.3. Opérateurs différentiels vectoriels

I.3.1. Opérateur gradient $\overrightarrow{grad}(f)$

On peut définir cet opérateur par la relation suivante : $df = \overrightarrow{grad}(f) \cdot d\vec{OM}$ où df est la différentielle de la fonction scalaire f et $d\vec{OM}$ représente le déplacement élémentaire.

Pour déterminer les composantes de cet opérateur dans les trois systèmes de coordonnées, nous allons nous servir de cette définition. Prenons l'exemple des coordonnées cylindriques. Ecrivons les composantes de cet opérateur dans la base cylindrique: $\overrightarrow{grad}(f) = (G_r, G_\theta, G_z)$. Nous avons établi l'expression du déplacement élémentaire dans ce système de coordonnées : $d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{k}$. Reste à donner l'expression de la différentielle de la fonction f :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

L'identification permet de déterminer alors les composantes de cet

$$\text{opérateur : } \overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

De cette manière, il est possible de déterminer l'expression des composantes de cet opérateur dans les différents systèmes de coordonnées :

$$\text{Coordonnées cartésiennes : } \overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$\text{Coordonnées cylindriques : } \overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

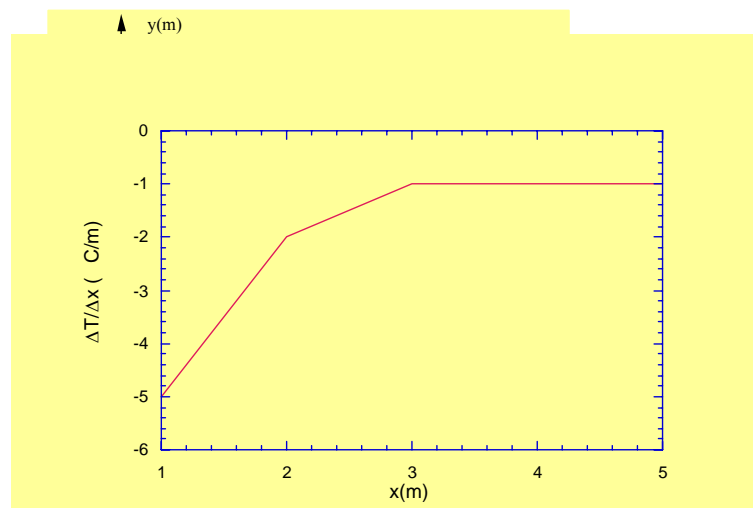
$$\text{Coordonnées sphériques : } \overrightarrow{grad}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$$

Remarques :

I. Cet opérateur ne s'applique qu'à un champ scalaire et retourne un champ vectoriel.

II. De l'égalité $df = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \cdot d\overrightarrow{OM}$, nous pouvons déduire que $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$ est perpendiculaire aux surfaces à f constant (surfaces équipotentielles) et dirigé dans le sens des f croissants. **Le gradient donne donc des informations sur la direction, sur le sens de la variation de la fonction f mais aussi sur l'importance de cette évolution.**

Nous pouvons illustrer l'intérêt du gradient d'une fonction en considérant l'évolution de la température dans une pièce en fonction de la distance au système de chauffage, une cheminée. La figure présentée ci-dessous indique la température (°C) à différents endroits de la pièce contenus dans un plan perpendiculaire à la cheminée. Il est évident que la température doit diminuer quand on s'éloigne de la cheminée et qu'elle doit légèrement augmenter quand on va vers le plafond.



Il est évident que la connaissance de la fonction scalaire température est importante. Cependant, rien dans cette liste de nombres ne permet de qualifier l'évolution sauf l'introduction du gradient. Prenons l'exemple de l'évolution de la température au niveau du sol. Représentons la composante selon l'axe des x de l'opérateur gradient ($\frac{\partial T}{\partial x}$ ou, dans notre cas $\frac{\Delta T}{\Delta x}$) :

Cette courbe nous donne donc des indications sur la variation de la température au niveau du sol. Si nous déterminons $\overrightarrow{\text{grad}}(T)$ en tout point

de la pièce, nous aurons alors la température et son évolution (sens et amplitude) à un instant donné. Rappelons en effet que le gradient ne donne aucune information quant à la dépendance temporelle.

I.3.2. Opérateur nabla $\vec{\nabla}$

Comme nous allons le voir cet opérateur n'est pas important en soi par contre, sa connaissance permet cependant de retrouver un certain nombre d'opérateurs très utiles en physique : la divergence, le rotationnel et le laplacien.

Pour introduire cet opérateur, nous allons écrire le gradient avec $\vec{\nabla}$:
 $\vec{\text{grad}}(f) = \vec{\nabla}f$.

Il est alors évident que pour avoir les composantes de cet opérateur dans les différents systèmes de coordonnées, il suffit de reprendre celles du gradient et d'enlever la fonction f .

I.3.3. Opérateur divergence $\text{div}\vec{A}$

On appelle $\text{div}\vec{A}$ le champ scalaire défini avec l'opérateur $\vec{\nabla}$ par :
 $\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$.

En coordonnées cartésiennes, le résultat est simple :

$$\text{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Dans les systèmes de coordonnées cylindriques et sphériques, il faut faire attention car les bases sont sensibles à l'opérateur $\vec{\nabla}$. Prenons l'exemple des coordonnées cylindriques :

$$\text{div}\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \left(\vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{k})$$

Développons cela :

$$\begin{aligned} \text{div}\vec{A} = & \left(\vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} \right) (A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{k}) + \left(\vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{k}) + \\ & \left(\vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) (A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{k}) \end{aligned}$$

Le premier terme donne : $\frac{\partial}{\partial r} A_r$

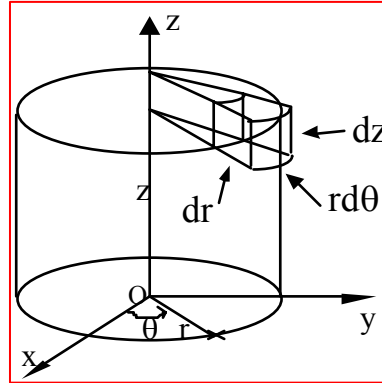
Le second terme est à considérer prudemment car $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} \right)$ agit sur les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ pour retourner respectivement les vecteurs \vec{u}_θ et $-\vec{u}_r$. Au final, ce second terme donne : $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta + \frac{A_r}{r}$

Enfin, le troisième terme donne : $\frac{\partial}{\partial z} A_z$

De plus, nous pouvons écrire : $\frac{\partial}{\partial r} A_r + \frac{A_r}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r}$

Une autre possibilité pour établir l'expression de la divergence dans les différents systèmes de coordonnées est liée à l'utilisation du théorème d'Ostrogradski-Green que nous admettrons sans démonstration :

$$\phi = \oint_S d\phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} \cdot d\tau.$$



Reprenons le volume élémentaire (voir figure ci-dessus) et regardons le flux $d\phi$ élémentaire d'un vecteur \vec{A} au niveau de ce cube. Nous pouvons le scinder en trois contributions : l'une liée à la face en regard avec l'axe z (désignée par l'indice r), l'une relative à la face avant (vers nous et désignée par θ) et la dernière concernant la face du dessous (désignée par z).

Ecrivons le vecteur $\vec{A} = A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_z \vec{k}$.

Il est évident que sur la face désignée par r, seule la composante A_r contribuera au flux de \vec{A} . Pour les faces désignées par θ et par z ne contribueront respectivement que les composantes A_θ et A_z .

Nous pouvons alors décomposer le flux élémentaire en séparant les trois contributions :

$$d\phi = d\phi_r + d\phi_\theta + d\phi_z$$

Pour chacune de ces contributions, nous pouvons encore séparer en ce qui « entre » et ce qui « sort ». Si nous raisonnons sur $d\phi_r$, nous pouvons dire qu'au niveau de la face située en r entre (indice e) : $d\phi_{re} = A_r r d\theta dz$ où $r d\theta dz$ correspond à la surface de cette face et qu'au niveau de la face située en $r+dr$ sort (indice s) $d\phi_{rs} = A_{r+dr} (r+dr) d\theta dz$. Nous pouvons aussi écrire que :

$$d\phi_r = d\phi_{rs} - d\phi_{re} = \frac{\partial d\phi_{re}}{\partial r} dr ; \quad \text{Cette dernière expression peut se}$$

comprendre en disant que le flux de sortie est égal au flux d'entrée plus la variation de ce flux quand on augmente r d'une quantité dr.

Nous arrivons alors à :

$$d\phi_r = d\phi_{rs} - d\phi_{re} = \frac{\partial d\phi_{re}}{\partial r} dr = \frac{\partial(A_r r d\theta dz)}{\partial r} dr = \frac{\partial(A_r r)}{\partial r} dr d\theta dz$$

Si nous raisonnons maintenant de la même manière sur la contribution désignée par θ , nous pouvons écrire :

$$d\phi_\theta = d\phi_{\theta s} - d\phi_{\theta e} = \frac{\partial d\phi_{\theta e}}{\partial \theta} d\theta = \frac{\partial(A_\theta r dr dz)}{\partial \theta} d\theta = \frac{\partial(A_\theta)}{\partial \theta} r dr d\theta dz$$

Enfin, pour la contribution désignée par z , nous arrivons à :

$$d\phi_z = d\phi_{zs} - d\phi_{ze} = \frac{\partial d\phi_{ze}}{\partial z} dz = \frac{\partial(A_z r dr d\theta)}{\partial z} dz = \frac{\partial(A_z)}{\partial z} r dr d\theta dz$$

Si nous écrivons à nouveau le théorème d'Ostrogradski-Green : $d\phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} \cdot d\tau$, à l'échelle locale il peut se formuler :

$$d\phi = d\phi_r + d\phi_\theta + d\phi_z = \text{div} \vec{A} d\tau.$$

Donc, en divisant par $d\tau = r dr d\theta dz$, nous obtenons l'expression de la divergence du champ de vecteurs \vec{A} en coordonnées cylindriques, à savoir :

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

L'expression de la divergence dans les différents systèmes de coordonnées est présentée dans la suite :

Coordonnées cartésiennes : $\text{div} \vec{A} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$

Coordonnées cylindriques : $\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

Coordonnées sphériques : $\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$

Il est clair qu'en coordonnées cartésiennes, il faut utiliser $\vec{\nabla}$. Avec les coordonnées sphériques, compte tenu des multiples implications de $\vec{\nabla}$ sur la base, il sera préférable d'utiliser le théorème d'Ostrogradski-Green. Dans le cas des coordonnées cylindriques, les deux possibilités sont à peu près équivalentes.

Remarques :

Cet opérateur ne s'applique qu'à un champ vectoriel et retourne un champ scalaire.

L'expression présentée ci-dessus ne permet pas véritablement de comprendre le nom donné à cet opérateur. Cependant, reprenons le théorème de Green – Ostrogradski : $\phi = \oint_S d\Phi = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div} \vec{A} \cdot d\tau$ où $d\Phi$

représente le flux de \vec{A} à travers la surface S , et raisonnons sur un point M placé au centre d'un cube, on peut alors concevoir les notions suivantes :

Si le flux de \vec{A} à travers S est positif, ceci traduit le fait que ce vecteur « a plus tendance à sortir » du cube et donc à diverger. Or, ceci implique que localement $\text{div} \vec{A}$ est positive. On peut dire que les lignes de champ sont « plutôt générées » dans le cube.

Au contraire, si le flux de \vec{A} est négatif, ceci pressent que \vec{A} « a plus tendance à entrer » dans le cube, donc à converger vers M . Or, si $d\Phi$ est négatif, $\text{div} \vec{A}$ l'est aussi. On peut dire que les lignes de champ sont « plutôt absorbées » par le cube.

Il faut bien comprendre qu'il s'agit vraiment d'une notion associée à l'« absorption » ou à la « création » de lignes de champ. En effet, cette analogie avec l'optique et les lentilles peut être trompeuse dans la mesure où un champ vectoriel présentant des lignes de courant non parallèles peut présenter une divergence nulle. Pour illustrer ce point, prenons l'exemple du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle. Ce champ électrostatique est radial (ligne de champ non parallèles) et pourtant, en un point M différent du point où se trouve la charge, la divergence est nulle. En fait, en traçant les lignes de champ, on peut avoir l'impression qu'il y en a plus qui sortent, mais en fait, la norme du champ a diminué quand on s'est éloigné de la charge. Globalement, on montre que ce qui rentre est égal à ce qui sort et la divergence est nulle. On retrouve la forme locale du théorème de Gauss ($\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ où ρ représente la densité de charges locale).

Dans le même ordre d'idée, un champ vectoriel présentant des lignes de champ parallèles entre elles peut être à divergence non nulle. En effet, si la direction du champ est toujours la même mais que la norme du champ varie, « ce qui rentre n'est pas égal à ce qui sort », donc la divergence sera différente de zéro.

I.3.4. Opérateur rotationnel $\vec{\text{rot}} \vec{A}$

Cet opérateur peut s'obtenir en utilisant nabla par : $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Il s'agit donc d'un champ vectoriel défini en coordonnées cartésiennes par

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

Dans le cas des coordonnées cylindriques et sphériques, les mêmes précautions, pour les mêmes raisons que dans le cas de la divergence, sont à prendre.

Pour obtenir les composantes de cet opérateur, nous pouvons utiliser

nabla en n'oubliant pas l'influence de nabla sur la base ou utiliser le théorème de Stokes.

Prenons le cas des coordonnées sphériques et établissons l'expression du rotationnel en dérivant la base :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \nabla \left[\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{array} \right] \wedge \vec{A} \left[\begin{array}{c} A_r \\ A_\theta \\ A_\varphi \end{array} \right],$$

sachant que nous travaillons dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$

Développons ce calcul :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} &= \left[\vec{u}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{u}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{u}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right] \wedge [A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\varphi \vec{u}_\varphi] \\ &= \vec{u}_r \wedge \frac{\partial}{\partial r} [A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\varphi \vec{u}_\varphi] \\ &+ \vec{u}_\theta \wedge \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\varphi \vec{u}_\varphi] \\ &+ \vec{u}_\varphi \wedge \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} [A_r \vec{u}_r + A_\theta \vec{u}_\theta + A_\varphi \vec{u}_\varphi] \end{aligned}$$

En rappelant que :

$$\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \theta} = \vec{u}_\theta$$

$$\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{u}_r$$

$$\frac{\partial \vec{u}_r}{\partial \varphi} = \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{u}_\theta}{\partial \varphi} = \cos \theta \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{u}_\varphi}{\partial \varphi} = -\sin \theta \vec{u}_r - \cos \theta \vec{u}_\theta$$

et que toutes les autres dérivées sont nulles, il vient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(-\frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} + A_\varphi \cos \theta \right) \\ -\frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r} \\ \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{A_\theta}{r} \end{vmatrix}$$

Ceci peut se simplifier pour trouver l'expression présentée dans le tableau récapitulatif.

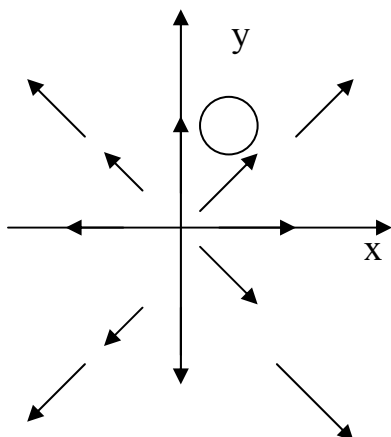
Cet opérateur ne s'applique qu'à un champ vectoriel et retourne donc un champ vectoriel.

Nous pouvons introduire (sans le démontrer) le théorème de Stokes - Ampère : $C_{irc} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} \cdot d\vec{S}$. La nullité de la circulation de \vec{A} sur un contour élémentaire donné engendre localement celle de $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$. Au contraire, si cette circulation est non nulle, traduisant un caractère « tournant » du champ de vecteurs \vec{A} , $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}$ est non nul.

Il est possible, à partir de la représentation du champ vectoriel, de savoir s'il est à rotationnel nul ou non. Entre 2 lignes de champ, on place une sphère et l'on regarde si le déplacement se fait avec ou sans rotation de la balle. Pour être plus clair, ceci est illustré sur la figure ci-dessous.

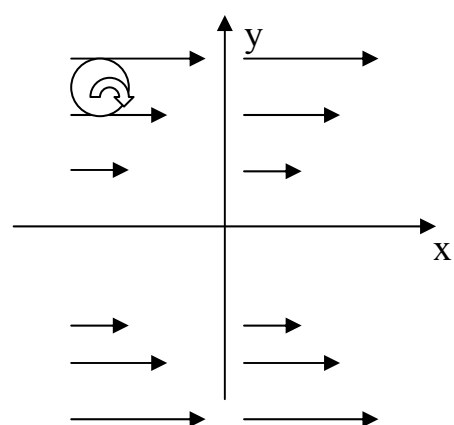
Champ vectoriel irrotationnel

$$\vec{A} = (x\vec{i} + y\vec{j}), \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{0}$$



Champ vectoriel rotationnel

$$\vec{A} = y\vec{i}, \quad \overrightarrow{\text{rot}}\vec{A} = \vec{k}$$



Une remarque fondamentale consiste à dire que le caractère rotationnel n'est pas lié à la courbure des lignes de champ. Il ne suffit pas que ces lignes de champ soient rectilignes pour que l'écoulement soit irrotationnel bien au contraire ! Cet opérateur nous donne donc des informations sur le caractère localement tourbillonnaire du champ vectoriel.

$$\text{Coordonnées cartésiennes : } \overrightarrow{rotA} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\text{Coordonnées cylindriques : } \overrightarrow{rotA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial (rA_\theta)}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

$$\text{Coordonnées sphériques : } \overrightarrow{rotA} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rA_\phi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

I.3.5. Opérateur laplacien Δ

Cet opérateur est du second ordre et peut s'appliquer aussi bien à un champ scalaire qu'à un champ vectoriel. Appliqué à un champ scalaire, il retourne un scalaire et alors qu'appliqué à un champ vectoriel, il retourne un vecteur.

- 1) le laplacien d'une fonction scalaire f (Δf) est défini par :

$$\Delta f = \text{div}[\overrightarrow{\text{grad}}(f)] = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

ou, en utilisant l'opérateur nabla :

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f$$

- 2) le laplacien d'un champ vectoriel \vec{A} ($\Delta \vec{A}$) est défini par :

$$\Delta \vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \overrightarrow{\text{rot}}[\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A})]$$

ou, en utilisant l'opérateur nabla :

$$\Delta \vec{A} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{A}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}^2 \vec{A}$$

ou encore, en coordonnées cartésiennes par :

I.4. Remarques et commentaires

A partir de l'opérateur nabla, il est possible comme nous l'avons vu, de définir un certain nombre d'opérateurs ($\overrightarrow{\text{grad}}$, div , $\overrightarrow{\text{rot}}$ et Δ). Il faut cependant être très prudent car l'opérateur nabla est un opérateur vectoriel différentiel qui peut agir sur la base du repère considéré. En coordonnées cartésiennes, le problème ne se pose pas car les vecteurs de la base sont fixes. En revanche, en coordonnées cylindriques, la deuxième composante de nabla ($\vec{u}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$) agit sur les vecteurs \vec{u}_r et \vec{u}_θ pour retourner respectivement les vecteurs \vec{u}_θ et $-\vec{u}_r$. En repérage sphérique, nabla agira aussi sur les vecteurs de la base. Ainsi, pour établir l'expression des opérateurs div et $\overrightarrow{\text{rot}}$ en coordonnées cylindriques, nous pourrions faire les produits scalaire et vectoriel en tenant compte de l'effet de nabla sur la base. Une autre possibilité consiste à utiliser le théorème de Green - Ostrogradski pour obtenir l'expression de la divergence et le théorème de Stokes - Ampère pour le rotationnel. Dans le cas des coordonnées sphériques, il sera plus judicieux d'utiliser ces deux théorèmes compte tenu des nombreuses implications de nabla sur la base...

Variables d'espace et temporelle

Une autre remarque importante est que ces opérateurs vectoriels n'agissent que sur les variables d'espace. En aucun cas, ils sont sensibles à la variable temporelle. Ils donnent donc des informations sur un champ scalaire ou un champ vectoriel à un instant donné et non

sur l'évolution dans le temps.

L'indépendance des variables d'espace et temporelle permet d'écrire les égalités suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} [\overrightarrow{\text{grad}}(f(x, y, z, t))] = \overrightarrow{\text{grad}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (f(x, y, z, t)) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\text{div}(\overrightarrow{A(x, y, z, t)})] = \text{div} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{A(x, y, z, t)}) \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} [\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{A(x, y, z, t)})] = \overrightarrow{\text{rot}} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{A(x, y, z, t)}) \right]$$

Quelques relations importantes

* $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}A}) = 0$ ceci est évident en écrivant cette relation avec l'opérateur nabla : $\vec{\nabla}$

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}A}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = 0$$

Cette égalité implique que si la divergence d'un champ vectoriel \vec{B} est égale à 0, nous pourrions mettre \vec{B} sous la forme $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}A}$. Par exemple, en électromagnétisme la divergence du champ magnétique est égale à 0 et nous définissons alors un potentiel vecteur \vec{A} tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}A}$. En mécanique des fluides, si la divergence du champ des vitesses est nulle, on pourra qualifier l'écoulement d'incompressible.

* $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}f}) = \vec{0}$ en utilisant l'opérateur nabla, cette égalité est elle aussi évidente :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}f}) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} f$$

Cette égalité implique que si le rotationnel d'un champ vectoriel \vec{A} est nul, il est possible de l'exprimer sous la forme : $\vec{A} = \overrightarrow{\text{grad}f}$. En électrostatique, $\overrightarrow{\text{rot}E} = \vec{0}$ et nous définissons un potentiel scalaire V tel que $\vec{E} = \overrightarrow{\text{grad}}(-V)$. En mécanique des fluides, si le rotationnel du champ des vitesses est nul, on parle d'écoulement irrotationnel et l'on introduit la fonction scalaire potentielle des vitesses ϕ définie par $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}(-\phi)$.

Chapitre II : La statique des fluides

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas des fluides en équilibre dans un référentiel \mathcal{R} . Ceci implique que les particules fluides ont une vitesse nulle dans \mathcal{R} et par conséquent qu'il n'y a aucun mouvement des particules fluides les unes par rapport aux autres.

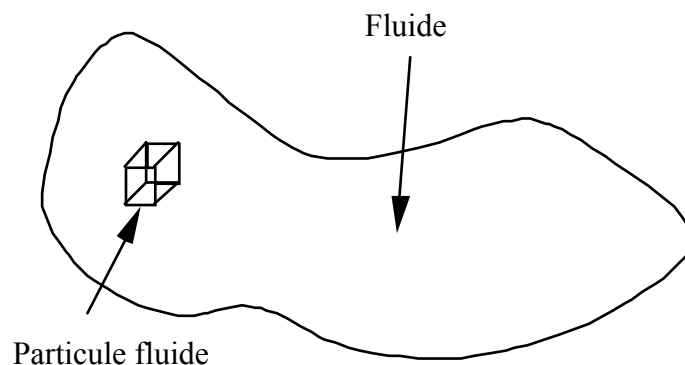
Si les mouvements relatifs sont inexistants, aucun effet de viscosité n'est à introduire. La conséquence de cette remarque est fondamentale :

Les lois de la statique des fluides s'appliquent aussi bien aux fluides parfaits qu'aux fluides visqueux. Pour expliquer ceci, nous pouvons dire que les fluides visqueux seront plus lents pour atteindre la forme d'équilibre, mais y arriveront.

II.1. Expression des forces au sein d'un fluide

Notre but consistant à appliquer les lois de Newton au fluide, la première étape que nous devons aborder est de caractériser les forces qui s'exercent sur la particule fluide.

Considérons un fluide en équilibre contenu dans un récipient. Intéressons-nous plus particulièrement à un volume élémentaire $d\tau$ délimité fictivement par une surface fermée.



Il est d'usage d'introduire les forces de volume (à longue distance) le plus souvent gravitationnelles et les forces de surface (à courte distance).

II.1.1. Les forces de volume

Le cas le plus courant concerne les forces gravitationnelles, mais on peut aussi avoir à considérer les forces d'inertie ou les forces électromagnétiques.

Soit $d\vec{F}_V$ la force de volume qui s'exerce sur l'élément de volume, nous pouvons écrire :

$$d\vec{F}_V = \vec{f}_V d\tau = \vec{f}_{mv} dm = \rho \vec{f}_{mv} d\tau$$

où : \vec{f}_v représente la densité volumique de force de volume.

\vec{f}_{mv} représente la densité massique de force de volume.

ρ est la masse volumique du fluide au point considéré.

Par intégration, nous pouvons calculer la force de volume qui s'exerce sur tout le fluide contenu à l'intérieur du volume :

$$\vec{F}_v = \iiint_V d\vec{F}_V = \iiint_V \vec{f}_v d\tau$$

Dans le cas des forces de pesanteur, $\vec{f}_V = \rho \vec{g}$ où \vec{g} représente l'accélération de la pesanteur.

Dans le cas des forces électromagnétiques : $\vec{f}_v = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$

Où ρ représente la densité locale de charge

\vec{E} , le champ électrostatique

\vec{j} , le vecteur densité du courant

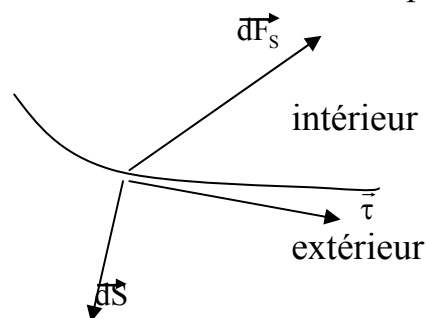
\vec{B} , le champ magnétique

II.1.2. Les forces de surface

Intéressons-nous maintenant aux forces de surface qui s'exercent sur la particule fluide. Il s'agit donc des forces exercées par le fluide extérieur donc par les particules fluides qui entourent l'élément de volume $d\tau$. La force élémentaire de surface peut s'écrire :

$$d\vec{F}_s = \vec{f}_s dS$$

où \vec{f}_s représente la contrainte exercée par le fluide extérieur.



Dans le cas général, $d\vec{F}_s$ a une composante normale et une composante tangentielle à dS .

Cependant, dans le cadre des fluides parfaits, la composante tangentielle peut être négligée (effet des frottements négligeable dans cette hypothèse). De plus, dans le cadre de la statique des fluides, où les particules fluides n'ont pas de mouvement les unes par rapport aux autres, les effets de viscosité n'ont pas de raison d'être ...

La composante normale qui, elle, est toujours présente, est appelée : **Pression** du fluide.

Avec les conventions d'orientation de l'élément de surface, toujours dirigé vers l'extérieur, il est possible d'écrire : $d\vec{F}_s = -P d\vec{S}$.

La détermination de la force de surface qui s'exerce sur la surface S limitant le volume V s'obtient par intégration :

$$\vec{F}_s = \iint_S d\vec{F}_s = \iint_S -P d\vec{S}$$

II.2. Equation fondamentale de la statique des fluides

Nous avons maintenant caractérisé les forces s'exerçant sur la particule fluide et nous allons appliquer les lois de Newton au cas d'un fluide en équilibre ou au cas d'une particule fluide en équilibre dans le repère \mathcal{R} .

La condition d'équilibre peut être traduite par le fait que la résultante des forces extérieures qui s'appliquent sur le système considéré est nulle.

En d'autres termes, les forces de volume et les forces de surface se compensent. Nous pouvons donc écrire :

* $\vec{F}_s + \vec{F}_v = \vec{0}$ pour un fluide de volume V délimité par une surface S .

ou encore :

$\iint_S -P d\vec{S} + \iiint_V \vec{f}_v d\tau = \vec{0}$ (forme globale de la statique des fluides).

Pour obtenir une expression indépendante du volume arbitraire V et

de sa surface limitante S, le plus simple consiste à transformer l'intégrale de surface (forces de pression) en intégrale de volume, ce que nous allons réaliser dans le paragraphe suivant.

II.2.1. Equivalent volumique des forces de pression

Utilisons une astuce mathématique : on multiplie l'égalité par un vecteur \vec{A} quelconque mais constant et non nul

$$\vec{A} \cdot \vec{F}_s = \vec{A} \cdot \iint_S -P \cdot \vec{dS} = - \iint_S P \vec{A} \cdot \vec{dS}$$

Utilisons le théorème d'Ostrogradski $\iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div } \vec{B} \, d\tau$:

Nous arrivons alors à :

$$\vec{A} \cdot \vec{F}_s = - \iiint_V \text{div}(P\vec{A}) \, d\tau \text{ or } \text{div}(P\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}P} \cdot \vec{A} + \underbrace{P \text{div} \vec{A}}_0$$

$$\text{Donc : } \vec{A} \cdot \vec{F}_s = \vec{A} \cdot \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}P} \, d\tau$$

En simplifiant par \vec{A} , on arrive à :

$\vec{F}_s = - \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}P} \, d\tau$ qui représente l'équivalent volumique des forces de surface.

II.2.2. Equation fondamentale de la statique des fluides

Nous pouvons maintenant appliquer la deuxième loi de Newton au cas du fluide ou à celui de la particule fluide, en équilibre dans le référentiel \mathcal{R} .

Pour l'ensemble du fluide nous pouvons écrire : $\vec{F}_v + \vec{F}_s = \vec{0}$

$$\Rightarrow \iiint_V \vec{f}_v \, d\tau = \iiint_V \overrightarrow{\text{grad}P} \, d\tau$$

Cette égalité est vraie quelle que soit le volume V, nous pouvons donc écrire que localement :

$$\vec{f}_v = \overrightarrow{\text{grad}P}$$

Equation fondamentale de la statique des fluides

Prenons un exemple pour illustrer l'importance de cette relation.

Considérons la terre et son atmosphère gazeuse qui, bien évidemment, répond à la définition d'un fluide. Sans faire une grosse erreur, nous le qualifierons de parfait et nous ne nous intéresserons qu'au caractère statique donc sans tenir compte d'éventuel mouvement (les vents par exemple). Soit une particule fluide de l'atmosphère appartenant au référentiel lié à la terre que nous supposerons galiléen. Prenons une base cartésienne dont l'axe z représente la verticale ascendante, les axes x et y représentent le plan horizontal. Cette particule fluide n'est soumise qu'à son poids. Nous pouvons alors écrire l'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$\vec{f}_v = \rho \vec{g} = \overrightarrow{\text{grad}P}$$

C'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{array} \right.$$

Donc la pression ne dépend ni de x ni de y. Les plans horizontaux sont des plans isobares. Par contre, nous pouvons déduire que :

$$dP = -\rho g dz$$

En assimilant l'atmosphère à un gaz parfait de température constante et d'équation d'état $PV = nRT = \frac{m}{M} RT$, c'est-à-dire $\rho = \frac{MP}{RT}$, nous arrivons à

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dz$$

$$\text{Après intégration : } P = P_0 e^{-\frac{Mg}{RT}(z-z_0)}$$

II.3. Applications et exemples

L'utilisation de l'équation fondamentale de la statique des fluides permet de résoudre de nombreux problèmes de la vie de tous les jours. En voici un certain nombre.

II.3.1. Théorème de Pascal (fluide incompressible)

Reprenons l'équation fondamentale de la statique des fluides et appliquons-la au cas d'un fluide incompressible n'étant soumis qu'à son poids :

$$\vec{f}_v = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{k} = \overrightarrow{\text{grad}P}$$

Ceci entraîne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{array} \right.$$

Donc : $dP = -\rho g dz$ et en considérant que ρ et g sont constants, l'intégration entre deux points A et B mène à

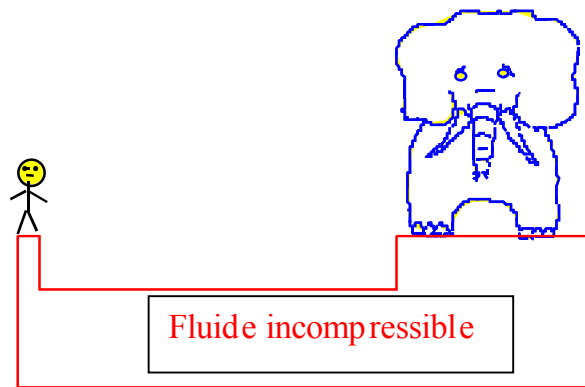
$$P_B - P_A = -\rho g (z_B - z_A).$$

La remarque fondamentale est que la différence de pressions $P_B - P_A$ ne dépend que de la hauteur qui sépare les points A et B. Ceci entraîne le théorème de Pascal.

Théorème de Pascal : Toute variation de pression en un point d'un fluide incompressible en équilibre se transmet intégralement en tout point du fluide.

L'application la plus courante pour ce théorème se trouve dans le cadre des machines hydrauliques. Nous venons de voir, si les hypothèses sont vérifiées, que la pression se transmet en tout point du fluide. Qu'en est-il d'une force ?

Considérons un récipient (voir la figure ci-dessous) dont les orifices sont des pistons cylindriques dont les diamètres sont égaux à $0,1\text{m}^2$ et 10m^2 . Si nous plaçons un homme de 80Kg sur le petit piston, la pression qui va augmenter d'une quantité égale à : $\Delta P = \frac{80 \times 9,8}{0,1} \approx 8000\text{Pa}$. En appliquant le théorème de Pascal, nous disons que cette variation de pression se transmet jusqu'à l'autre piston. La force résultante est alors égale à : $F = 8000 \times 10 = 80000\text{N}$. Ayant l'habitude de raisonner en masse, cela correspond à 8 tonnes, ce qui doit coïncider au poids de l'animal représenté.



Les freins des voitures fonctionnent suivant le même principe : quand on appuie sur la pédale de frein, on comprime le « liquide de frein » (fluide incompressible) sur une canalisation de petit diamètre, la variation de pression est transmise dans toute la canalisation de frein et arrive sur des pistons plus gros qui sont solidaires des plaquettes de frein. La présence d'une bulle d'air (fluide compressible) sera à l'origine d'un gros problème ! Un autre dispositif est présent pour « aider » le freinage : une pompe à vide (pompe d'assistance des freins) permet de faciliter la compression du liquide de frein.

II.3.2. Expérience du tonneau de Pascal

Considérons maintenant un tonneau en bois rempli d'eau et muni sur la partie supérieure d'un tube de petit diamètre en verre qui débouche à l'air. Entre le point A, au niveau de la surface libre du liquide dans le tube, et le point B au fond du tonneau, la différence de pression est égale à ρgh . Pascal dans le milieu du 17^{ème} siècle a montré que lorsqu'on rajoute de l'eau dans le tube, le tonneau éclate et que la raison de cet éclatement n'est pas liée à la quantité d'eau rajoutée mais la hauteur à laquelle arrive le liquide dans le tube.

II.3.3. Château d'eau

Une autre application de la vie de tous les jours concerne le dispositif que l'homme a adopté pour avoir l'eau courante à la maison. Il est clair que chaque maison pourrait avoir son propre système de pompage de l'eau dans la rivière ou une nappe phréatique. Déjà pour d'évidentes raisons, il est plus raisonnable de regrouper des maisons par quartier voire par village ou même par canton. Nous adoptons ainsi un gros système de

pompage et une centrale d'épuration pour donner à l'eau des caractéristiques respectant certaines normes. Ensuite, pour que l'eau coule quand nous ouvrons notre robinet, il faut que la pression dans la canalisation soit supérieure à la pression atmosphérique (plus elle sera grande, plus le débit sera important). Pour réaliser cela, nous construisons des châteaux d'eau au sommet de la colline voisine. Un système de pompage permet à l'eau de monter et la différence d'altitude entre le haut du château d'eau et le robinet est à l'origine de l'écoulement de l'eau. Pour des immeubles très hauts, il faudra cependant ajouter un système supplémentaire pour que l'eau puisse arriver en haut.

II.3.4. Relation fondamentale de l'hydrostatique dans un référentiel non galiléen \mathcal{R}'

Dans ce cas, nous considérons le cas d'un fluide qui est immobile dans un repère qui n'est pas galiléen, il faut donc ajouter aux forces extérieures qui s'exercent sur la particule fluide les forces d'inertie.

Rappelons l'expression des accélérations d'entraînement et de Coriolis ainsi que les densités volumiques de forces d'inertie qui en découlent.

* soit \vec{a}_e l'accélération d'entraînement et \vec{f}_{ie} la force d'inertie d'entraînement :

$$\vec{f}_{ie} = -\rho \vec{a}_e = -\rho \left[\left(\frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} \right]$$

où

- \mathcal{R} représente le référentiel galiléen.

- O et O' sont les origines des repères \mathcal{R} (référentiel fixe) et \mathcal{R}' (repère mobile).

- $\vec{\Omega}$ représente le vecteur rotation instantané de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} .

* soit \vec{a}_c l'accélération de Coriolis et \vec{f}_{ic} la force d'inertie de Coriolis:

$$\vec{f}_{ic} = -\rho \vec{a}_c = -\rho 2\vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r$$

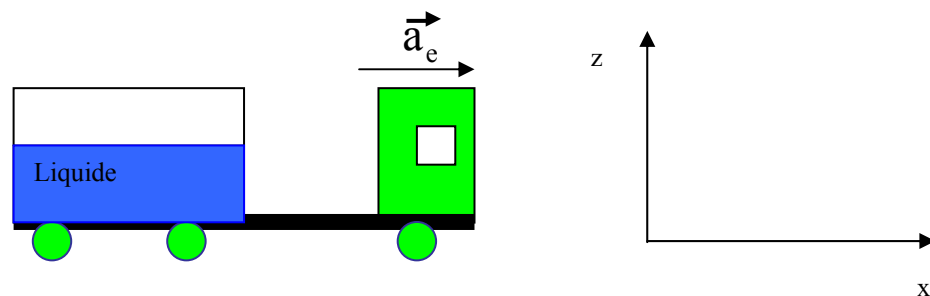
où :

\vec{v}_r représente la vitesse relative (vitesse de la particule fluide dans le repère \mathcal{R}').

Nous étudions le cas de l'équilibre de la particule fluide dans le repère \mathcal{R}' , la vitesse relative \vec{v}_r est donc nulle. Par conséquent, la force d'inertie de Coriolis \vec{f}_{ic} sera toujours nulle dans le cadre de la statique des fluides.

Ayant introduit les forces d'inertie, nous pouvons écrire : $\overrightarrow{\text{grad}P} = \vec{f}_v + \vec{f}_{ie}$

Prenons un exemple : un liquide est contenu dans une cuve placée sur la remorque d'un camion, dont l'accélération par rapport à la route (référentiel supposé galiléen) est constante et nous désirons connaître l'équation des surfaces isobares.



Si nous travaillons dans le référentiel lié à la cuve (référentiel non galiléen), nous devons considérer que deux forces s'appliquent sur la particule fluide, les forces de pesanteur et la force d'inertie d'entraînement. Nous écrivons alors :

$\overrightarrow{\text{grad}P} = -\rho g \vec{k} - \rho a_e \vec{i}$. Où \vec{i} et \vec{k} sont les vecteurs unitaires des axes x et z.

Projetons cette égalité vectorielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = -\rho a_e \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases}$$

Or la différentielle de la fonction pression peut être écrite :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial y} dy}_0 + \frac{\partial P}{\partial z} dz$$

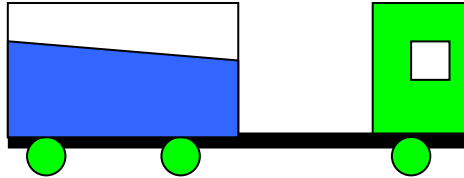
C'est-à-dire : $dP = -\rho g dz - \rho a_e dx$

Si nous voulons l'équation des isobares, il suffit d'écrire que sur ces surfaces, la pression est constante, donc que :

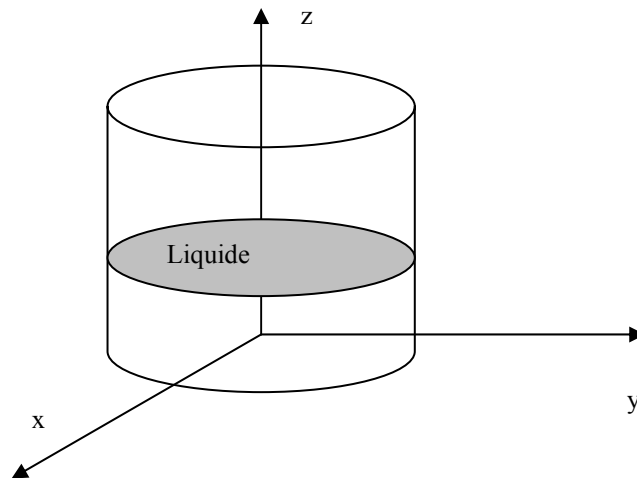
$$dP = 0. \text{ Il vient donc } \frac{dz}{dx} = -\frac{a_e}{g}$$

Comme a_e et g sont constants, la pente de la courbe $z=f(x)$ est constante, il s'agit donc d'une droite.

Par intégration, nous arrivons à : $z = -\frac{ae}{g}x + K$ où K est une constante.



Prenons un second exemple : un liquide en équilibre dans un cylindre en rotation autour de son axe de symétrie avec une vitesse de rotation constante. Pour des raisons évidentes, nous allons travailler en coordonnées cylindriques (base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_k)$).



Dans ce cas, la force d'inertie d'entraînement s'écrit :

$$\vec{f}_{ie} = -\rho \vec{a}_e = \rho \omega^2 \vec{u}_r$$

Ecrivons la relation fondamentale de la statique des fluides dans le référentiel lié au cylindre :

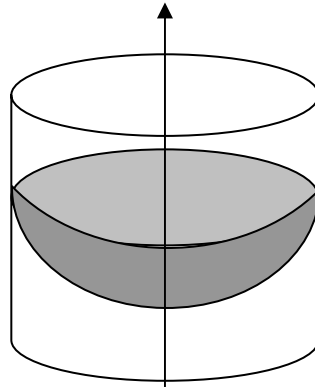
$$\vec{\text{grad}} P = -\rho g \vec{k} + \rho \omega^2 \vec{u}_r.$$

Il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \rho \omega^2 \vec{u}_r \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \quad \text{D'où } dP = +\rho \omega^2 dr - \rho g dz$$

Pour avoir l'équation des isobares, écrivons que la pression est constante, donc que $dP=0$. Et nous arrivons à : $g dz = r\omega^2 dr$. Après intégration, nous arrivons à :

$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + K$ où K est une constante. Il s'agit de l'équation d'une parabole et si nous ajoutons la symétrie par rapport à l'axe z , nous obtenons un parabolôïde de révolution.



Contrairement au cas précédent (la cuve sur le camion), nous n'obtenons pas une droite. L'explication tiens simplement au fait dans le cas de l'accélération linéaire constante, toutes les particules fluides subissent la même accélération d'entraînement alors que dans le cas du cylindre, plus les particules fluides sont éloignées de l'axe de rotation, plus la force d'inertie d'entraînement est grande.

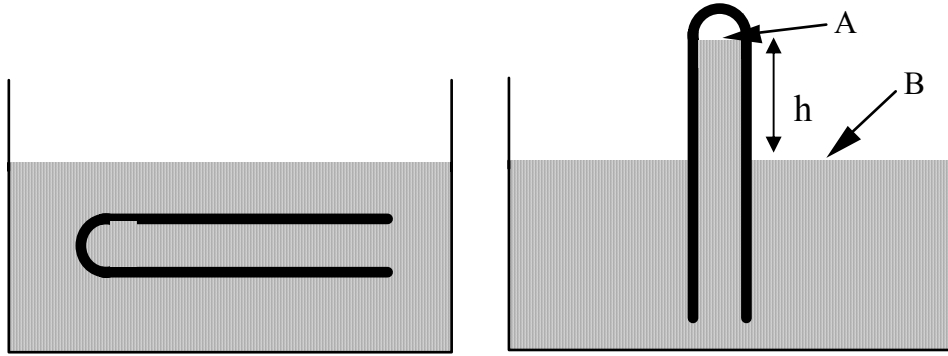
II.3.4. Les mesures de pression

Nous avons précédemment défini la pression comme directement liée à la force de surface qu'exerce le fluide extérieur sur la particule fluide considérée. Dans de nombreux cas, il sera intéressant de connaître cette grandeur (prévision météorologique ou calcul de structure pour réaliser des cuves). Nous allons étudier deux possibilités extrêmement simples pour déterminer cette pression.

II.3.4.1. Le baromètre à mercure

Cette application a pour origine une expérience réalisée par Torricelli en 1647. Considérons une cuve contenant du mercure. Plaçons dans cette cuve un tube en verre (schéma a) puis nous relevons la partie fermée du tube. Nous observons que le mercure monte jusqu'à une certaine hauteur

dans le tube et pas au-delà.



A l'échelle de cette expérience, le référentiel lié à la terre peut bien évidemment être considéré comme galiléen. Seules les forces de pesanteur s'exerce sur la particule fluide de mercure. Si nous appliquons le théorème de Pascal, nous pouvons écrire que

$$P_B = P_A + \rho gh$$

où P_B est la pression atmosphérique recherchée et P_A est la pression de vapeur saturante du mercure. En fait, P_A est très petit devant la pression atmosphérique et peut être négligée. Nous pouvons donc écrire :

$$P_B = \rho gh$$

Connaissant ρ et g , la mesure de h nous donnera P_B . La hauteur de mercure correspondant à une atmosphère est égale à 760 mm de Hg.

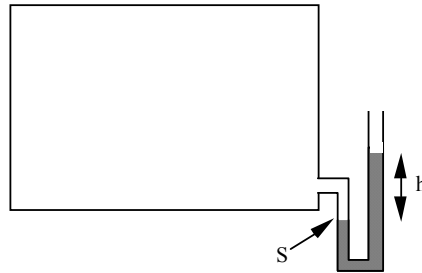
Remarque : si nous prenions de l'eau à la place du mercure, la hauteur de la colonne de fluide devrait être multipliée par la densité du mercure (13,6). Le baromètre ainsi réalisé ne serait pas très pratique puisque sa hauteur serait supérieure à 10m ! Ceci aurait été réalisé par Pascal en 1653. L'utilisation du conditionnel dans la phrase précédente peut être justifiée par une remarque que Pascal n'a pas mentionnée dans ses écrits et qui semble importante : lorsqu'on relève le tube d'eau, quand le liquide atteint une hauteur égale à 10,33m, la pression est alors égale à la tension de vapeur saturante de l'eau. Dès que le tube dépasse cette hauteur, le liquide doit bouillir. Il semblerait que Pascal ait pensé cette expérience mais qu'elle ne fût pas réalisée à cette époque.

II.3.4.2. Le manomètre à colonne de liquide

Intéressons-nous maintenant à la détermination de la pression à l'intérieur d'une enceinte contenant par exemple un gaz (figure ci-

dessous). Branchons un tube en U sur la cuve. Ce tube est ouvert et débouche à la pression atmosphérique. Si nous voulons déterminer la pression dans la cuve, nous devons commencer par la détermination de la pression au niveau de la séparation entre le fluide dans le tube en U et le fluide contenu dans l'enceinte.

$$P_S = P_{\text{atm}} + \rho gh$$



Si les dimensions de la cuve ne sont pas trop grandes, nous pouvons considérer que la pression est homogène au sein du gaz et qu'elle est donc égale à P_S .

Nous définissons la pression effective comme étant égale à la pression dans l'enceinte moins la pression extérieure (la pression atmosphérique dans notre cas).

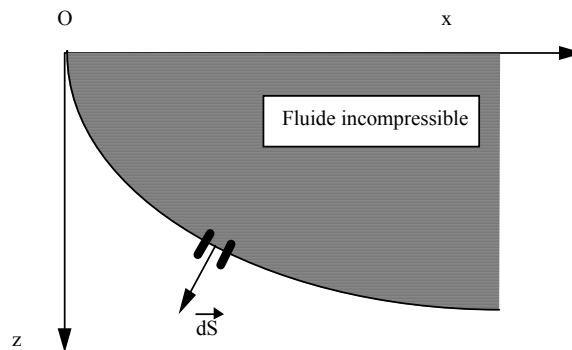
$$P_{\text{eff}} = P_{\text{enceinte}} - P_{\text{extérieure}}$$

L'intérêt de l'introduction est évident si nous désirons connaître les forces qui vont s'exercer « effectivement » sur les parois de la cuve.

II.3.5. Application au calcul des forces de pression sur les parois (fluides incompressibles)

Nous venons de mentionner les problèmes de forces exercées sur des parois. Il est en effet intéressant de pouvoir estimer les efforts que vont supporter toute paroi soumise à des forces de pression, comme par exemple des barrages.

Notre but est donc de déterminer la force qu'exerce un fluide sur une paroi. Raisonnons sur un élément de surface dS de cette paroi. Cet élément est soumis à deux forces (voir figure ci-dessous), l'une provenant du fluide intérieur (int) et l'autre provenant de l'extérieur (ext).



Nous pouvons écrire ces deux forces élémentaires :

$$d\vec{F}_{\text{int}} = P_{\text{int}} \vec{dS}$$

$$d\vec{F}_{\text{ext}} = -P_{\text{ext}} \vec{dS}$$

Pour convention, \vec{dS} est orienté vers l'extérieur. De plus, le théorème de Pascal permet d'écrire $P_{\text{int}} = P_{\text{ext}} + \rho g z$. La résultante des forces qui s'exercent sur l'élément dS est donc égale à :

$$d\vec{F} = d\vec{F}_{\text{int}} + d\vec{F}_{\text{ext}} = \rho g z \vec{dS}$$

La force totale qui s'exerce sur la paroi s'obtient alors par intégration :

$$\vec{F}_{\text{paroi}} = \iint_{\text{paroi}} \rho g z \vec{dS}$$

Une simplification du calcul de cette intégrale consisterait la réaliser en norme et non en vecteur. Pour cela, il faut se placer dans le cas où toutes les forces auraient la même direction, le cas des parois planes.

Dans ce cas, le problème est simplifié car \vec{dS} toujours la même direction et il en va de même pour $d\vec{F}$.

On peut alors écrire : $dF = \rho g z dS$ et par intégration :

$F = \iint_S \rho g z dS$. En supposant ρ et g constants et en introduisant G , le centre de gravité de la paroi, nous arrivons à $F = \rho g z_G S$

Ceci constitue un théorème que l'on peut énoncer comme suit :

La force exercée sur une paroi plane par un fluide

incompressible en équilibre est égale au poids d'une colonne de fluide ayant pour base la surface de la paroi immergée et pour hauteur la profondeur du centre de gravité de la paroi immergée.

L'erreur souvent commise est liée à la position du centre de gravité : il s'agit de la **profondeur** du centre de gravité

II.4. Théorème d'Archimède

Démonstration

Considérons un fluide en équilibre dans un référentiel galiléen. Par l'esprit, découpons un volume V , délimité par une surface S (voir figure ci-dessous).

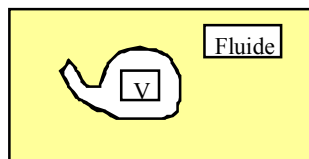
La condition d'équilibre nous permet d'écrire :

$\vec{F}_s = -\vec{F}_v = - \iiint_V \rho \vec{g} d\tau$ Supposons l'accélération de la pesanteur constante d'où

$$\vec{F}_s = \vec{g} \iiint_V \rho d\tau = -m\vec{g}$$

Donc, les forces de surface qui s'exercent sur le volume V sont égales au poids du fluide.

Maintenant si ce n'est pas du fluide de volume V mais un solide de même volume (voir figure ci-dessous), la surface S reste la même et les forces de surface exercées par le fluide extérieur restent les mêmes et sont appelées « Poussée d'Archimède ».



Enoncé : Tout corps totalement immergé dans un fluide en équilibre est soumis à une force opposée au poids de fluide déplacé.

Attention, il faut vérifier que le fluide est en équilibre en présence et en l'absence de solide immergé.

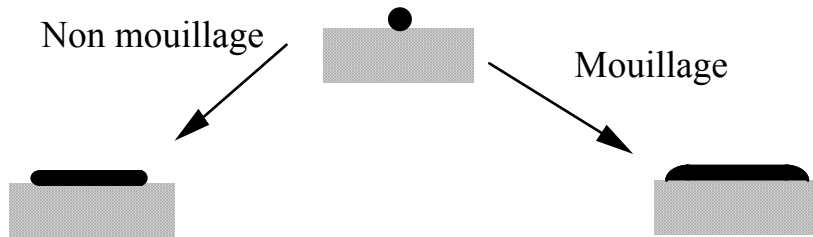


Exemple : deux récipients dont l'un des deux est percé en son fond. On y met une demi-sphère de masse volumique inférieure à celle du liquide. On remplit les cristallisoirs.

Dans le second cas, le théorème d'Archimède ne peut pas s'appliquer car en l'absence de la demi-sphère, le fluide s'écoule. Il n'est donc pas en équilibre. Ce genre de dispositifs est utilisé dans le mécanisme de chasses d'eau pour les toilettes.

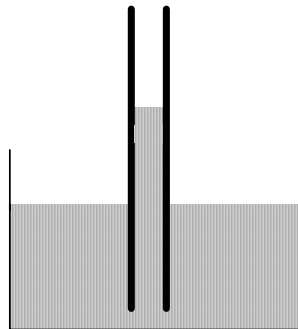
II.5. Influence de la tension superficielle

Dans cette partie, nous n'aborderons que de manière descriptive l'influence des phénomènes de surface. Ceci n'intervient que dans le cas des liquides et peut s'interpréter de la manière suivante : si le fluide est liquide, c'est en raison d'interactions moléculaires relativement fortes. Si ce n'était pas le cas, il serait gazeux... Les molécules ont donc tendance à s'attirer et l'énergie minimale d'un atome ou d'une molécule correspond à un environnement complet. En surface, un atome a alors une énergie qui est supérieure à celle qu'il aurait s'il était au sein du liquide. En d'autres termes, créer de la surface nécessite d'apporter de l'énergie. Le système a donc tendance à être dans la configuration où sa surface est minimale. Jusqu'à présent, nous avons raisonné sur le fluide et dans de nombreux cas, nous aurons à considérer le contenant de ce fluide. Prenons l'exemple d'une goutte de liquide soumise aux forces de pesanteur et posée sur un support. Plus elle est petite, moins le poids est important et plus elle se rapprochera de la symétrie sphérique. Au fur et à mesure qu'elle grossit, le poids devient de plus en plus important et a tendance à écraser la goutte (voir figure ci-dessous). En outre, l'évolution va dépendre de l'affinité des molécules composant le liquide pour les molécules du support. Si les liaisons chimiques permettent de diminuer l'énergie, on parlera de mouillage.



Considérons maintenant une cuve remplie d'un liquide dans laquelle on place un tube ouvert (voir figure ci-dessous).

Si les liaisons entre le liquide et les parois du tube sont énergétiquement favorables *i.e.* si les molécules du fluide sont satisfaites d'être en contact avec celles qui composent la paroi du tube, le liquide aura tendance à monter dans le tube, c'est l'ascension capillaire (cas de l'eau dans un tube en verre). Si les molécules composant le fluide préfèrent s'entourer de leur consœur, le niveau du liquide aura tendance à descendre dans le tube (cas du mercure dans un tube en verre). C'est cette même explication qui est à l'origine de la forme des ménisques pour tout tube.



II.6. Rappels de ce chapitre

- 1) Définition d'un fluide
- 2) L'équation fondamentale de la statique des fluides :

$$\overrightarrow{\text{grad } P} = \vec{f}_v$$

- 3) Théorème de Pascal.
- 4) Théorème d'Archimède.

II.7. Distraction

Dans cette partie, nous allons aborder quelques faits de la vie de tous les jours et quelques expériences démonstratives et faciles à réaliser.

II.7.1. Les machines à laver

Nous avons vu (partie II.3.4.) que la force d'inertie d'entraînement dans le cas de la rotation pure est égale à $\vec{f}_{ie} = -\rho \vec{a}_e = \rho \omega^2 \vec{u}_r$; elle est radiale, ne dépend pas du sens de rotation ($\omega > 0$ ou < 0) et est proportionnelle à la distance. C'est cette force d'inertie qui est à l'origine de l'essorage du linge dans les machines à laver. Quand vous regardez les caractéristiques d'une machine à laver, vous trouverez toujours la vitesse de rotation (exprimée en nombre de tours par minute). A vitesse de rotation maximale équivalente, vous trouverez différents prix (du simple au double). En fait, ce qui importe, c'est la force qui permettra à l'eau de s'extraire du linge et donc le produit $r\omega^2$ et non seulement ω . Si on mesure le diamètre du tambour de la machine à laver chère, on se rendra compte qu'il est plus grand que celui de la machine à laver bon marché. La différence de prix se justifie alors par un moteur plus puissant et le système assurant la stabilité adaptée...

II.7.2. Les terriers

La nature fait si bien les choses que les lapins et les taupes ont bien compris la mécanique des fluides. En effet, ils construisent leurs terriers de telle manière qu'il y ait toujours régénération d'oxygène pour leur permettre de respirer. Comment font-ils ? Simplement, ils s'arrangent pour que deux entrées soient à des altitudes différentes. La différence de hauteur, donc de pression, assurera un courant d'air.

II.7.3. la cavitation

Intéressons-nous à un bateau à moteur. Quand l'hélice tourne à grande vitesse, des bulles de gaz sont formées dans l'eau. Ces bulles ne proviennent pas des gaz d'échappement mais d'une dépression. En effet, l'hélice a pour but de pousser l'eau vers l'arrière, elle crée donc une dépression en aval. Quand la pression deviendra inférieure à la pression de vapeur saturante de l'eau, cette dernière se mettra à bouillir.

II.7.4. Petite expérience

Prenons du papier d'aluminium, coupons en quelques morceaux (qq cm^2) froissons-les fortement en leur donnant une forme allongée. Les morceaux doivent être fortement froissés, écrasés avec un rouleau à tarte par exemple. Mettez ces morceaux dans une bouteille en plastique (d'eau gazeuse). Certains morceaux doivent couler, la masse volumique de l'aluminium étant plus élevée que celle de l'eau. D'autres doivent être en position horizontale, ils ont emprisonné beaucoup d'air malgré le froissement. Enfin, certains morceaux doivent être en position verticale, ils ont emprisonné suffisamment d'air pour flotter mais pas assez pour être en position horizontale.

Dans la suite, nous ne nous intéresserons qu'à ce dernier type de morceaux. Si nous comprimons la bouteille, nous observons que certains d'entre eux coulent et plus nous la comprimons, plus le nombre de morceaux qui coulent est important. Quand on relâche la bouteille, ils remontent (au moins un certain nombre d'entre eux). Comment expliquer cela ? Il s'agit de la poussée d'Archimède qui dépend du volume de fluide déplacé et donc du volume des morceaux d'aluminium. L'air emprisonné dans ces morceaux lors du froissement est compressible (pas l'aluminium ni l'eau compte tenu des pressions mises en jeu). Donc, quand nous comprimons la bouteille, nous comprimons l'air qui est au-dessus de l'eau et cette variation de pression se transmet dans l'eau et dans les bulles d'air emprisonnées. Il en résulte une diminution du volume des morceaux d'aluminium, donc une diminution de la poussée d'Archimède et les morceaux coulent. Quand on relâche la bouteille, les bulles peuvent reprendre leur forme initiale entraînant la remontée des morceaux d'aluminium. Tous les morceaux doivent-ils remonter ? Pas forcément, deux raisons à cela. La première est liée au fait que de l'air peut s'échapper définitivement des morceaux d'aluminium. L'autre est liée à l'évolution de la pression avec l'altitude. Comme l'indique le théorème de Pascal, plus nous descendons dans l'eau, plus la pression augmente. Il existe donc une profondeur qui correspondra à la pression exercée quand on comprimera la bouteille. Si cette profondeur est atteinte, le morceau ne

remontera plus.

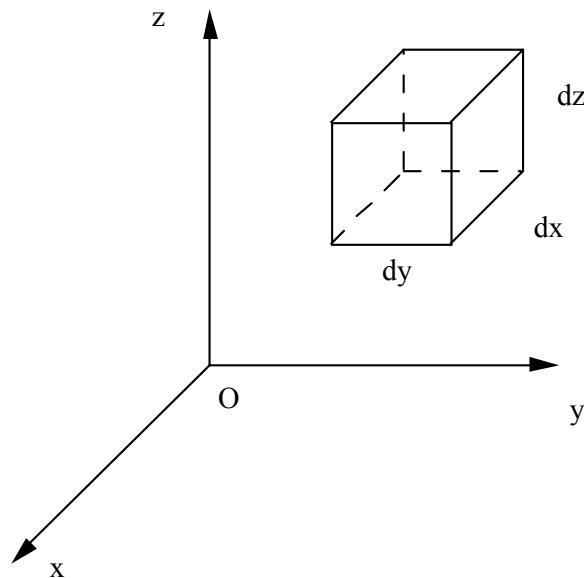
Exercices de statique des fluides

Exo 1 :

Equation fondamentale de la statique des fluides (CAPESA, AGREG).

Afin d'établir l'équation fondamentale de l'hydrostatique, étudier l'équilibre d'un bloc fluide infiniment petit, parallélépipédique de cotés dx , dy et dz , parallèles aux axes d'un référentiel galiléen. Appeler f_x , f_y et f_z les densités de force de volume.

Correction :



On considère un repère orthonormé direct (Oxyz) muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le référentiel est galiléen et le système étudié est la particule fluide. Si nous faisons le bilan des forces, l'énoncé donne les composantes des forces de volume selon les trois axes. Dans ce qui suit, nous allons écrire que puisque le bloc fluide est en équilibre, la résultante des forces est nulle. Raisonnons sur l'axe des x : la face « de derrière (située en x) » est soumise à une force de pression qui est égale à :

$$d\vec{F}_{Sx} = -P_x d\vec{S} = P_x dS \vec{i}$$

la face « de devant (située en $x+dx$) » est soumise à une force de pression qui est égale à :

$$d\vec{F}_{S(x+dx)} = -P_{x+dx} d\vec{S} = -P_{x+dx} dS \vec{i}$$

Or, nous pouvons écrire :

$$P_{x+dx} = P_x + \frac{\partial P}{\partial x} dx \text{ et } dS = dydz$$

La résultante des forces de pression qui s'exercent sur la particule fluide sur l'axe des x est donc égale à :

$$\vec{dF}_{S(x+dx)} + \vec{dF}_{Sx} = -\frac{\partial P}{\partial x} dx dydz \vec{i} = -\frac{\partial P}{\partial x} d\tau \vec{i}$$

La résultante des forces volume qui s'exercent sur la particule fluide sur l'axe des x est égale à : $\vec{dF}_{vx} = \vec{f}_x d\tau$

$$\text{Or : } \vec{dF}_{Sx} + \vec{dF}_{vx} = \vec{0}, \text{ nous arrivons donc à } -\frac{\partial P}{\partial x} + f_x = 0$$

En raisonnant sur les deux autres axes, nous aboutissons à :

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + f_y = 0 \text{ et } -\frac{\partial P}{\partial z} + f_z = 0$$

Ces trois équations correspondent à $\vec{f} = \overrightarrow{\text{grad}P}$ qui représente la relation fondamentale de la statique des fluides.

Exo 2 :

Equation fondamentale de la statique des fluides dans un référentiel non galiléen.

Un liquide se trouve dans un réservoir cubique d'arête $a = 2\text{m}$. Le réservoir est à moitié rempli et il subit une accélération linéaire constante de valeur $a = 2\vec{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$.

1) Donner l'inclinaison que prend ce liquide dans le réservoir. Préciser l'équation de la ligne isobare de surface ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

2) Le réservoir est soumis à une accélération toujours dans les mêmes conditions de direction et de sens, mais dont le module augmente. Lorsque la surface libre du liquide fait un angle de 30° sur l'horizontale, quelle est l'accélération du réservoir ? Quelle valeur maximale ne devra pas dépasser l'accélération pour éviter tout risque de débordement ?

3) Le réservoir est maintenant rempli à ras bord. Il est soumis à une accélération constante : $a = 1,4 \vec{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$. De l'eau se déverse. Quand tout déversement a cessé, on arrête le mouvement. Quel volume de liquide peut-on alors soutirer du réservoir ?

Correction :

1) On suppose que le référentiel terrestre est galiléen et l'on s'intéresse à la particule fluide. Dans le référentiel lié à la cuve, le système étudié est soumis

* à son poids dont la densité est égale à $\rho \vec{g} = -\rho g \vec{k}$ en prenant un axe z qui est la verticale ascendante

* à la force d'inertie d'entraînement dont la densité est égale à $-\rho \vec{a}_e = -\rho a \vec{j}$ où \vec{j} est le vecteur unitaire de l'axe selon lequel le déplacement est effectué.

Nous appliquons maintenant la relation fondamentale de la statique des fluides :

$$\vec{\text{grad}}P = -\rho(g\vec{k} + a\vec{j})$$

En projetant, ceci peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho a \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{pmatrix}$$

Nous cherchons les isobares, courbes à P constant. Nous pouvons donc écrire $dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz$

D'où : $\frac{dz}{dy} = -\frac{a}{g} = \text{constante}$, il s'agit donc de l'équation d'une droite de pente $-a/g$. Pour avoir l'équation de l'isobare de surface, il faut identifier la constante d'intégration : $z = -\frac{a}{g}y + K$. Pour cela, nous pouvons

intégrer la courbe $z=f(y)$ et dire que l'aire sous la courbe est égale à la moitié de la surface du réservoir (l'énoncé précise que le réservoir est à moitié rempli. Une solution plus simple consiste à dire que l'isobare de surface passe par le point de coordonnée (1,1). Nous arrivons alors à l'équation :

$$z = -\frac{a}{g}y + (1 + \frac{a}{g})$$

2) Pour un angle $\theta=30^\circ$, nous pouvons écrire $\tan\theta = \frac{a}{g}$. Ce qui donne $a=5,67\text{m/s}^2$

3) l'équation de la surface libre est : $z = -\frac{a}{g}y + K = -1,7y + K$

Pour identifier K, il suffit de dire que la surface libre passe par le point de coordonnées (0,2) et d'intégrer la fonction $z=f(y)$ et de multiplier par la longueur selon l'axe des x. On arrive à un volume égal à $52/7=7,4\text{m}^3$.

Exo 3 :

Equation fondamentale de la statique des fluides dans un référentiel non galiléen.

Un flacon cylindrique ouvert, de hauteur $H = 40$ cm et de diamètre $2R = 10$ cm, contient de l'eau jusqu'à une hauteur $h = 10$ cm. On fait tourner le flacon autour de son axe avec la vitesse angulaire ω .

1) Quelle est l'équation caractérisant la surface libre du liquide ? Pour quelle valeur de ω le centre du fond du récipient est-il découvert ?

2) Quelle est la valeur de ω que l'on peut atteindre sans renverser de l'eau ?

3) Déterminer la pression qui règne en tout point du liquide. Préciser la pression effective que subit le fond du récipient, ses valeurs minimale et maximale.

Correction :

1) Supposons le référentiel terrestre galiléen et étudions la particule fluide qui est soumise :

III. à son poids $\rho \vec{g} = -\rho g \vec{k}$ en prenant un axe z qui est la verticale ascendante

IV. et à la force d'inertie d'entraînement

$$\begin{aligned}\vec{F}_{ie} &= -\rho \vec{a}_e \\ &= -\rho \left[\left(\frac{d^2 \vec{OO'}}{dt^2} \right)_{\mathcal{R}} + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{O'M} \right] = -\rho (\vec{\Omega} \wedge \vec{\Omega} \wedge \vec{OM}) = \rho \omega^2 \vec{u}_r\end{aligned}$$

Nous arrivons donc à : $\vec{\text{grad}} P = -\rho g \vec{k} + \rho \omega^2 \vec{u}_r$.

Il vient :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \rho \omega^2 \vec{u}_r \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \end{cases} \quad \text{D'où } dP = +\rho \omega^2 dr - \rho g dz$$

Pour avoir l'équation des isobares, écrivons que $dP=0$. Et nous arrivons :

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + K \quad \text{où } K \text{ est une constante qu'il faut identifier.}$$

Pour cela, nous savons que le volume de fluide V est égale à $\pi R^2 h$ (voir l'énoncé) et égal à $\iiint r dr d\theta dz$

Nous pouvons déjà intégrer par rapport à θ et écrire :

$$V = 2\pi \iint r dr dz = \pi R^2 K + 2\pi \int_0^R \left(\int_0^{z(r)} dz \right) r dr$$

$$= \pi R^2 K + 2\pi \int_0^R r^3 \frac{\omega^2}{2g} dr =$$

$$\text{Il vient alors : } K = h - \frac{\omega^2}{4g} R^2$$

$$\text{L'équation du paraboloïde : } z = h + \frac{\omega^2}{2g} \left(r^2 - \frac{R^2}{2} \right)$$

Le fond du récipient sera découvert quand $z=0$ donc pour $\omega = \frac{2}{R} \sqrt{gh} = 40 \text{ rad/s}$

2) du liquide quittera le récipient quand, au niveau des bords, $z(r=R)=h$. Donc pour $\omega = \frac{2}{R} \sqrt{g(H-h)} = 79 \text{ rad/s}$.

En fait, on peut remarquer un problème : l'eau coulera avant que le fond soit découvert !

3) on peut écrire : $P = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} - \rho g z + K$ et il faut identifier la constante K

Ecrivons alors qu'au sommet du paraboloïde, la pression est égale à la pression atmosphérique P_a . On trouve finalement :

$$P(r,z) = \frac{\rho r^2 \omega^2}{2} + \rho g \left(h - \frac{\omega^2 R^2}{4g} - z \right) + P_a$$

La pression effective P_{eff} qui est égale à $P - P_a$ est alors minimale pour $r=0$ et maximale pour $r=R$.

$$P_{\text{min}} = \rho g \left(h - \frac{\omega^2 R^2}{4g} \right) \text{ et } P_{\text{max}} = \rho g \left(h + \frac{\omega^2 R^2}{4g} \right)$$

Exo 4

Equilibre de liquides

On observe 3 liquides incompressibles, non miscibles entre eux, dans un tube en U. La surface de séparation entre le liquide L_1 et le liquide L_2 , est parfaitement discernable, et donc repérable. Les deux liquides L_2 , et L_3 identiquement translucides, ont une surface de séparation difficilement discernable.

1) Donner la cote de cette dernière surface. Exprimer le résultat en fonction de ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 (les masses volumiques) et de h_1 et h_3 les cotes facilement repérables.

2) Déterminer l'épaisseur de la tranche de liquide 3 pour que la surface de séparation entre 2 et 3 soit au même niveau que la surface libre du liquide 1.

Exo 5

Mesures de pressions

Une large cuve parallélépipédique ($H = 4\text{m}$) contient un acide ($\rho = 1,4 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$). La cuve est remplie aux $3/4$. A $1/4H$ du fond, elle présente une prise reliée à un tube en U grâce à un tuyau souple. Le tube, ouvert, contient du mercure ($\rho_0 = 13,6 \text{ kg/m}^3$).

1) Situer le niveau S de séparation entre l'acide et le mercure dans le manomètre, si on observe une dénivellation de mercure de : $\Delta h = 28 \text{ cm}$. La cuve est ouverte.

2) Donner la valeur de Δh si on déplace le niveau S au niveau de la prise noté B.

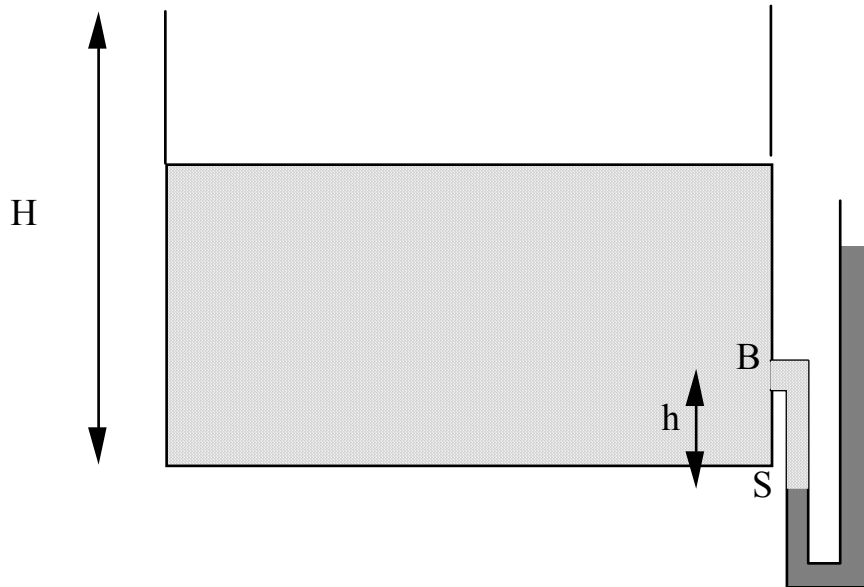
3) La cuve est maintenant fermée. Au dessus de l'acide, on place un gaz inerte. Quelle est la pression effective du gaz si $\Delta h = 30 \text{ cm}$ avec S au niveau de B.

4) On fait couler de l'acide, ce qui provoque une détente adiabatique quasi-statique du gaz, d'équation d'état : $PV^\gamma = \text{Cte}$. Quelle est la dénivellation Δh correspondante, si on suppose S au niveau de B, et la pression du gaz dans l'enceinte égale à la pression atmosphérique ? (Hypothèses : liquide indilatable, $g = 10 \text{ m/s}^2$, $\gamma = 1,4$).

5) La cuve est à nouveau remplie aux $3/4$. Quelle est la dénivellation correspondante si le manomètre indique $P = -7600 \text{ Pa}$ avec S au niveau de B ?

6) La cuve contient maintenant deux liquides différents non miscibles entre eux. La densité du premier est égale au double de celle du deuxième. Le liquide 1 est donc sous le liquide 2, et il occupe la moitié inférieure de la cuve. Le niveau de S est celui du fond de la cuve. On mesure une pression effective du gaz dans la cuve : $P_{\text{eff}} = +10800 \text{ Pa}$, et $\Delta h = 30 \text{ cm}$. Quelles sont les masses volumiques des deux liquides ?

Correction :



1) Supposons le référentiel terrestre galiléen et étudions la particule.

Nous pouvons écrire d'après le théorème de Pascal que :

$$P_S = P_B + \rho_a gh = P_0 + \rho_{Hg} g \Delta h \text{ et que } P_B = P_0 + \rho_a g \frac{H}{2}$$

$$\text{On en tire : } h = \frac{\rho_{Hg}}{\rho_a} \Delta h - \frac{H}{2} = 7,2 \text{ m}$$

$$2) h=0 \text{ donc } \Delta h = \frac{H}{2} \frac{\rho_a}{\rho_{Hg}} = 0,2 \text{ m}$$

3) La pression effective

$$P_{\text{eff}} = P - P_0 = g(\rho_{Hg} \Delta h - \rho_a \frac{H}{2}) = 12800 \text{ Pa}$$

4) $PV^\gamma = \text{constante}$. On peut donc écrire :

$$(P_{\text{eff}} + P_a) \left(S \frac{H}{4} \right)^\gamma = P_0 (S z)^\gamma \text{ où } z \text{ représente la nouvelle cote de la}$$

surface libre du liquide. L'application numérique donne $z = 1,09 \text{ m}$

$$\text{d'où } \Delta h = \frac{\rho_a}{\rho_{Hg}} \left(\frac{3}{4} H - z \right) = 19,6 \text{ cm}$$

$$5) P_a + P_{\text{eff}} + \rho_a g \frac{H}{2} = P_0 + \rho_{Hg} g \Delta h \text{ d'où } \Delta h = 0,15 \text{ m.}$$

$$6) P_S = P_{\text{gaz}} + \rho_1 g \frac{H}{2} + \rho_2 g \frac{H}{4} = P_a + \rho_{Hg} g \Delta h$$

$$7) \text{ Donc : } \rho_1 + 2\rho_2 = 3000 \text{ Kg/m}^3$$

$$\text{D'où } \rho_1 = 1200 \text{ Kg/m}^3 \text{ et } \rho_2 = 600 \text{ Kg/m}^3$$

Exo 6

La stratosphère

Au-delà de 11 km d'altitude, on rencontre la stratosphère dans les régions tempérées du globe terrestre. Sa température est constante et égale à $-56,5^{\circ}\text{C}$. Quelle est la variation de pression en fonction de l'altitude dans cette couche standard assimilée à un gaz parfait ?

Correction :

L'équation d'état du gaz parfait s'écrit $PV=nRT$. Le nombre de moles est égal à $n = \frac{m}{M}$ où M est la masse molaire. La masse volumique s'exprime par : $\rho = \frac{MP}{RT}$. Ecrivons maintenant la relation fondamentale de la statique des fluides : $\overrightarrow{\text{grad}P} = \vec{r}_v = -\rho g \vec{k}$ où \vec{k} est le vecteur unitaire de la verticale ascendante. Nous arrivons à :

$$\frac{dP}{P} = -\frac{MP}{RT} dz$$

$$\text{donc à : } P(z) = P(z = 11\text{km}) \exp\left[-\frac{MP}{RT}(z - 11\text{km})\right]$$

Exo 7

La troposphère

Une bonne description de la troposphère consiste à supposer que l'air est un gaz parfait diatomique et qu'il y subit une détente adiabatique quasi-statique décrite par $PV^\gamma = \text{Cte}$.

1) Quelle est la variation de pression en fonction de l'altitude ? On suppose qu'à $z = 0$, $P = P_0$, $T = T_0$ et $\rho = \rho_0$.

2) Quelle est la variation de température en fonction de l'altitude ?

3) Montrer qu'avec un tel modèle, il existe une altitude pour laquelle : $P = T = 0$.

Correction :

Reprenons le même calcul pour arriver à $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$. Le problème consiste à exprimer ρ . Nous savons que $PV^\gamma = \text{Cte}$. Nous pouvons donc écrire que $PV^\gamma = P_0 V_0^\gamma$. Or $\rho = \frac{m}{V}$ D'où $\rho = \rho_0 \left(\frac{P}{P_0}\right)^\gamma$

Si nous reprenons le calcul, nous arrivons à : $\int_{P_0}^P P^{-\frac{1}{\gamma}} dP = -\rho_0 g P_0^{-\frac{1}{\gamma}} \int_0^z dz$

Et finalement à : $P = P_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \rho_0 g \frac{z}{P_0} \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

2) Nous pouvons écrire : $\frac{T}{T_0} = \frac{PV}{P_0 V_0}$ ou $\frac{V}{V_0} = \frac{P_0}{P}$ donc
 $T = T_0 \left[1 - \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{P_0} z \right]$

3) $P=0$ et $T=0$ d'où $\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\rho_0 g}{P_0} z = 1$ Ceci donne : $z = \frac{\gamma P_0}{(\gamma-1)\rho_0 g} = 27500\text{km}$

Exo 8

La troposphère (CAPESA 2000)

On peut considérer que dans une zone de l'atmosphère terrestre d'environ 10 km d'épaisseur, la température décroît avec l'altitude z selon une loi affine : $T = T_0(1-kz)$ où T_0 et k sont des constantes positives. Le champ de pesanteur reste pratiquement constant et l'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M . L'indice 0 (P_0 , ρ_0 et T_0) est relatif aux grandeurs au sol ($z = 0$). On posera $\alpha = \frac{Mg}{kRT_0} > 1$ où R est

la constante universelle des gaz parfaits.

5 Exprimer la pression P à l'altitude z en fonction de P_0 , k , α et z .

6 Calculer la pression dans une station de sport d'hiver à l'altitude $z=1500\text{m}$, sachant que $M=29\text{ g/mole}$, $T_0=293\text{K}$, $R=8,32\text{J/mole}^{-1}\text{K}^{-1}$, $g=9,81\text{m/s}^2$, $P_0=10^5\text{Pa}$ et $k=2,2 \times 10^{-5}\text{m}^{-1}$.

7 En déduire qualitativement comment varie la température d'ébullition de l'eau avec l'altitude et préciser l'intérêt d'un autocuiseur dans ces conditions.

Exo 9

La montgolfière

Nous allons considérer que l'atmosphère terrestre (gaz parfait de masse molaire $M_{\text{air}}=30\text{g.mol}^{-1}$ (pour simplifier les calculs), incompressible et à température constante $T=300\text{K}$) est en équilibre dans le référentiel lié à la Terre supposé galiléen. L'accélération de la pesanteur \vec{g} est supposé uniforme et verticale (l'axe Oz représente la verticale ascendante et pour les applications numériques, nous prendrons $g=10\text{m.s}^{-2}$). La pression au niveau du sol ($z=0$) est désignée par P_0 et est égale à 10^5Pa .

- 5 La loi des gaz parfaits permet d'écrire $\rho_{\text{air}} = \frac{M_{\text{air}} P}{RT}$. Où R est la constante des gaz parfaits ($R=8,3\text{J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$) Etablissez l'expression de la pression en fonction de l'altitude z .
- 6 Nous décidons de nous envoler en ballon. Pour cela, nous disposons d'une montgolfière, assimilée à une sphère dont le diamètre est voisin de 10m, remplie d'hélium à la température ambiante. Les données importantes sont sa masse (M_{mont}) qui est égale à 600Kg et son volume (V) qui est égal à 600m^3 . Calculez la force ascensionnelle qui s'exerce sur la montgolfière au départ en considérant qu'au niveau du sol $\rho_{\text{air}}=1,2\text{Kg.m}^{-3}$.
- 7 Calculez l'altitude maximale atteinte z_1 (application numérique avec $\ln(1,2)\approx 0,2$).

Exo 10

La poussée d'Archimède

Pour le transport du bois en troncs, on utilise le flottage libre sur les lacs ou les fleuves.

1) On observe que les troncs de mélèze flottent en étant enfoncés aux $2/3$. Quelle est la densité par rapport à l'eau de ce bois mi-dur ?

2) Quel est l'enfoncement dans l'eau des troncs de sapins, bois tendre tel que : $d/\text{eau} = 0,55$.

Hypothèse : les troncs flottants sont supposés parfaitement cylindriques, de rayons R et de longueur L .

Exo 11: la poussée d'Archimède

Une sphère pleine homogène de rayon R et de masse volumique ρ_s peut flotter dans un liquide de masse volumique ρ_L . Soit X la partie de diamètre vertical immergée. On pose : $\alpha = \rho_s / \rho_L$.

1) Pour quelles valeurs de α y a-t-il immersion totale et demi-immersion ?

2) Montrer que l'équilibre de la sphère se traduit par une relation de la forme :

$b - X = c / X^2$. Donner b et c en fonction de R et de α .

3) La sphère est en équilibre avec $0 < X < 2R$. On l'enfonce légèrement et on l'abandonne. Quel est son mouvement ?

Exo 12

Les forces sur des parois

Une porte d'écluse, verticale, plane, rectangulaire, de largeur L et de hauteur H subit l'action de l'eau d'un canal sur l'une de ses faces sur une hauteur H_0 .

Calculer la force pressante qu'exerce l'eau sur cette porte d'écluse.

Exo 13

Les forces sur des parois

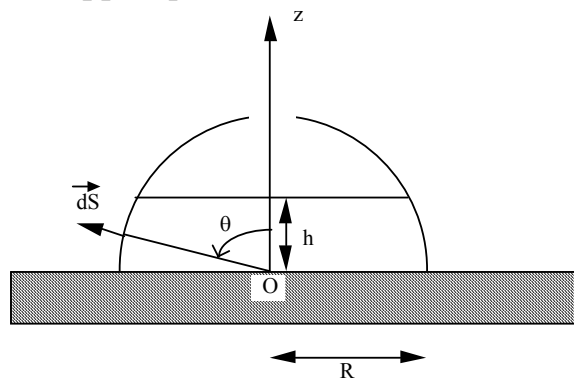
Un bassin contenant de l'eau, de masse volumique ρ constante est fermé par une paroi verticale carrée de côté a . Au fond de cette paroi se trouve une vanne carrée de côté $a/2$. L'eau affleure le rebord supérieur de la paroi.

- 5 Quel est le rapport des forces pesantes sur la paroi et sur la vanne ?
- 6 Afin d'éviter les déséquilibres de contraintes subies par les matériaux, on désire que la paroi et la vanne subissent le même effort de pression. Ceci peut être réalisé en ajustant la largeur de la vanne, toutes les autres dimensions restant les mêmes. Quel est le rapport L/a ?

Exo 14

Les forces sur des parois

Dans un référentiel galiléen, considérons une demi-sphère de masse M , creuse de rayon intérieur R et percée d'un trou sur son sommet. Cette demi-sphère est placée sur un plan horizontal lisse (voir figure) de telle manière à ce que le liquide qu'elle est susceptible de contenir ne pourra s'échapper que si elle se soulève.



Nous allons maintenant introduire par le trou de l'eau dans cette demi-sphère jusqu'à une hauteur h .

- 1) A partir de l'équation fondamentale de la statique des fluides, calculez la pression P qui règne en tout point du liquide en considérant qu'au niveau de la surface libre, la pression est égale à P_0 .
- 2) Déterminez alors la force résultante qui s'exerce sur la demi-sphère. On n'oubliera pas que l'extérieur exerce aussi une force et que cette dernière permet de simplifier le calcul.
- 3) Pour quelle hauteur de liquide (h), la demi-sphère se soulèvera-t-elle ?

Exo 15 : Les forces sur des parois

Considérons un sas « pseudo-horizontal » de sous-marin ayant la forme

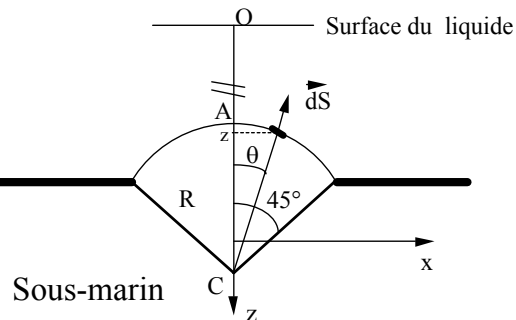
d'une calotte sphérique de rayon $R = 0,5 \text{ m}$ et d'ouverture égale à 45° . Le haut du sas (A) est placé à une profondeur égale à 1000 m . L'eau est supposée incompressible de masse volumique ρ égale à 10^3 kg m^{-3} . L'intérieur du sous-marin est à la pression atmosphérique.

Calculez la force qui s'exerce sur un élément dS du sas situé à la cote z .

- 3) Par des considérations de symétrie, déterminez la direction de la force résultante (on pourra introduire l'angle θ présenté sur la figure).
- 4) Par intégration, déduisez la force qui s'exerce sur le sas, calculez-la.
- 5) Supposons maintenant que le sas est un disque horizontal de $0,5 \text{ m}$ de rayon toujours situé à 1000 m de profondeur. Calculez la force qui s'exerce dans ce cas.
- 6) A quoi attribuez-vous la différence avec le calcul mené dans le cas du sas sphérique ?



Le Griffon : Marine Nationale



Exo 17

Un tube en U en rotation

On considère un fluide parfait, homogène et incompressible (masse volumique ρ), en équilibre dans un tube en U ouvert et vertical (selon Oz)(voir figure). Ce tube est animé d'un mouvement de rotation caractérisé par le vecteur $\vec{\Omega} = \omega \vec{k}$ où ω est constant et \vec{k} représente le vecteur unitaire de l'axe Oz. La partie horizontale du tube a une longueur D et la longueur totale du fluide est égale à $L = D + 2h$. Les surfaces libres sont supposées planes. La distance entre l'axe de rotation et le bras le plus proche est désignée par a . La section du tube (désignée par s) est suffisamment petite pour que l'on puisse considérer que \sqrt{s} et s sont négligeables devant h et L .

La position du liquide est repérée par la cote z sur la branche du tube

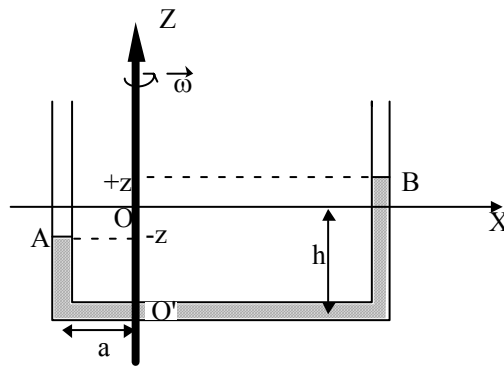
la plus éloignée de Oz. Quand le tube est immobile dans le référentiel du laboratoire (supposé galiléen), $z = 0$. Dans tout le problème, on considérera que le liquide occupe les deux branches du tube. On travaillera dans le référentiel non galiléen r dans lequel le liquide est immobile.

1) Compte tenu de la symétrie du problème, quel système de coordonnées faut-il adopter ?

2) Ecrire l'équation fondamentale de la statique des fluides dans le référentiel adapté.

3) Etablir l'expression de la pression $P(r,z)$ en fonction de la pression en O' et des données du problème.

4) En égalant les pressions en A et en B, déduire l'expression de ω^2 en fonction de z .



Exo 18

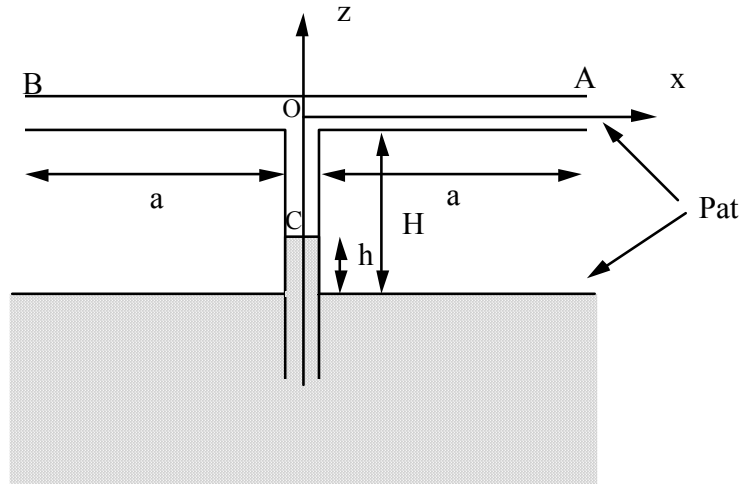
Le tourniquet

On considère une canalisation en T (voir figures) admettant un axe de symétrie Oz. Celle-ci est constituée de trois tubes minces et la partie verticale est plongée dans une grande cuve fixe remplie avec un fluide parfait et incompressible (masse volumique ρ_{liq}). Les deux tubes horizontaux OA et OB, identiques de longueur a et de section constante, sont distants de H de la surface libre du fluide. L'ensemble tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire ω constante par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Dans tout le problème, on utilisera le référentiel lié au tube (Oxyz).

Partie A : statique

La canalisation en T contient de l'air (figure 1) et le niveau du liquide s'élève d'une hauteur h ($h < H$). l'air est alors en équilibre relatif dans la canalisation.

- 1) Déterminer la pression $P(r)$ en tout point M du tube horizontal situé à une distance r de O. On assimilera l'air à un gaz parfait de masse volumique $\rho_{air} = \frac{MP}{RT}$. On suppose qu'en A, la pression est égale à la pression atmosphérique (P_{at}).
- 2) Montrer que la montée au fluide dans le tube vertical est logique. Calculer cette hauteur h . On supposera que la pression en C est égale à celle qui règne en O.



Chapitre III : Cinématique des fluides

III.1. Description cinématique du mouvement d'un fluide

Dans cette partie, nous nous intéressons à la caractérisation du mouvement des particules fluides indépendamment de ce qui provoque ou modifie ce mouvement. Nous allons alors déterminer la vitesse, l'accélération des particules fluides.

Pour décrire le mouvement d'un système, nous avons deux possibilités :

- La description lagrangienne (Louis Joseph Lagrange 1736-1813) qui consiste à étudier les vecteurs position, vitesse et accélération et éventuellement la trajectoire du système étudié en fonction du temps. Cette description est particulièrement bien adaptée pour décrire le mouvement d'un point ou d'un solide indéformable. En revanche, compte tenu du nombre de particules fluides, cette voie est quasiment inenvisageable.
- La description eulérienne (Léonard Euler 1703-1783) qui consiste à définir les champs vectoriels en fonction du temps. On s'intéresse alors à caractériser, à chaque instant et en chaque point de l'espace, la vitesse et l'accélération des particules fluides. Ceci revient à filmer le système.

Pour donner une image plus ou moins rigoureuse, intéressons-nous au transport des troncs d'arbre sur une rivière, au Canada par exemple. La description lagrangienne consiste à prendre chaque tronc à regarder sa position en fonction du temps et à définir ses vecteurs vitesse et accélération toujours en fonction du temps. La description eulérienne photographie la rivière à différents instants et pour chacun de ces instants on définit les champs des vitesses et des accélérations. Nous ne nous intéressons pas du tout à un tronc donné mais à ce qui se passe en un point de l'espace. Notons qu'avec cette description « globale », nous pourrions introduire la concentration en tronc ou d'autres champ scalaire...

III.1.1. Description cinématique eulérienne du mouvement d'un fluide

Comme nous venons de le voir, la description eulérienne, contrairement à la description lagrangienne ne s'intéresse pas à une particule et à ce qu'elle devient mais décrit ce qui se passe dans l'espace considéré en fonction du temps. Nous ne définirons donc pas les vecteurs position vitesse et accélération d'une particule ($\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ et $\vec{a}(t)$) mais nous introduirons les vecteurs vitesse et accélération relatifs à un point de l'espace défini par sa position \vec{r} et nous examinerons leur évolution dans le temps. Nous noterons alors ces vecteurs :

$\vec{v}(\vec{r}, t)$ et $\vec{a}(\vec{r}, t)$ ou $\vec{v}(x, y, z, t)$ et $\vec{a}(x, y, z, t)$.

Il est important de noter qu'avec ces considérations, les variables d'espace (x, y, z) et la variable temporelle (t) sont indépendantes.

On s'intéresse donc au champ des vitesses du fluide et donc à la vitesse d'une particule P lorsqu'elle occupe, à l'instant t , la position du point A du référentiel \mathcal{R} . On note $\vec{v}(A, t)$ ou $\vec{v}(\vec{r}, t)$ avec $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$.

III.1.2. Expression générale du champ des accélérations

On reprend le taux de variation de la vitesse de la particule P entre les instants t et $t' = t + dt$

à l'instant t , la particule fluide P est en A et sa vitesse est $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

à l'instant $t + dt$, P est en A' et sa vitesse est $\vec{v}'(\vec{r}', t + dt)$.

Si nous suivons la particule fluide entre ces deux instants, nous pouvons écrire les coordonnées de \vec{r}' :

$$\begin{cases} x' = x + v_x dt \\ y' = y + v_y dt \\ z' = z + v_z dt \end{cases}$$

Nous pouvons alors définir l'accélération de la particule fluide qui se trouve à l'instant t en A comme étant égale à :

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}(x', y', z', t') - \vec{v}(x, y, z, t)}{dt}$$

$$\text{ou } \vec{a} = \frac{\vec{v}(x + v_x dt, y + v_y dt, z + v_z dt, t + dt) - \vec{v}(x, y, z, t)}{dt}$$

qui peut se mettre sous la forme :

$$\vec{a} = \frac{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} dz + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt}{dt}$$

Comme nous suivons la particule fluide sur l'intervalle de temps dt ,

$$\begin{cases} dx = v_x dt \\ dy = v_y dt \\ dz = v_z dt \end{cases} \text{ alors } \vec{a} = \frac{\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} v_x dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v_y dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} v_z dt + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} dt}{dt}$$

$$\text{Ce qui mène à : } \vec{a} = v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$$

En introduisant l'opérateur nabla ($\vec{\nabla}$), nous arrivons à :

$$\vec{a} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \quad \text{où } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \text{ représente l'accélération dite locale}$$

$$\text{et } (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \text{ traduit l'accélération dite convective}$$

Nous admettons sans démonstration que l'accélération convective peut se mettre sous la forme : $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$

Nous définissons alors le vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ tel que $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v}$

III.1.3. Dérivée particulaire d'une grandeur

Soit une fonction ρ qui peut représenter la masse volumique du fluide. C'est une fonction des variables d'Euler (x, y, z, t) que nous noterons $\rho(\vec{r}, t)$ ou $\rho(x, y, z, t)$.

Nous définissons couramment :

* La dérivée partielle $\frac{\partial \rho}{\partial x}$ qui a un sens mathématique précis (taux de variation de la fonction ρ , toutes les autres variables restant constantes)

$$\text{* La différentielle totale } d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial x} dx + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy + \frac{\partial \rho}{\partial z} dz + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt$$

Ceci exprime la variation de la fonction ρ quand les 4 variables sont incrémentées d'une quantité infinitésimale.

* La dérivée totale

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ceci représente le taux de variation de ρ entre les deux points infiniment proches. En outre, si ces deux points sont les positions successives de la particule de fluide, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ et $\frac{dz}{dt}$ représentent les vitesses de cette particule (v_x , v_y et v_z).

$\frac{d\rho}{dt}$ est alors le taux de variation quand on suit la particule. On l'appelle aussi la dérivée particulaire que l'on notera dans la suite $\frac{D\rho}{Dt}$ pour signifier clairement qu'il s'agit de la dérivée d'une fonction des variables d'Euler (x, y, z, t).

De la même manière que pour l'accélération, nous pouvons écrire :

$$\frac{D\rho}{Dt} = v_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + v_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

L'accélération d'une particule de fluide est donc la dérivée particulaire de la vitesse

III.2. Conservation de la masse. Débit massique

III.2.1. Conservation de la masse

Rappel : La masse d'un système est une grandeur conservative (en l'absence de réaction nucléaire). La variation de masse dM d'un système ouvert peut alors s'écrire

$$dM = \delta M_{\text{reçue}} + \delta M_{\text{perdue}}$$

La variation de masse ne peut être attribuée qu'à la masse reçue ou perdue donc à un flux de matière qui a traversé la surface qui délimite le système, c'est ce que nous allons caractériser dans la suite.

III.2.2. Vecteur densité de courant. Lignes de courant. Tube de

courant.

ρ et \vec{v} sont des fonctions des variables d'Euler. Il en va donc de même pour la quantité de matière qui traverse un élément de surface par unité de temps \mathcal{J} .

Nous définissons alors le vecteur densité de courant :

$$\mathcal{J}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$$

Nous pouvons définir les lignes de courant : ce sont des courbes qui en chaque point de l'espace sont tangentes à $\mathcal{J} = \rho \vec{v}$. Nous saisissons l'analogie en description lagrangienne avec la trajectoire ; cependant, les lignes de courant sont différentes a priori des trajectoires des particules fluides. A un instant donné, les lignes de courant donnent une topographie des directions des vitesses. La trajectoire d'une particule donne, elle, la direction de la vitesse de cette particule au cours du temps.

Enfin, notons que les lignes de courant seront confondues avec la trajectoire dans le cas où les directions d'écoulement ne dépendent pas du temps.

Nous définissons aussi les tubes de courant : c'est l'ensemble des lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé. On peut noter que deux lignes de courant ne peuvent jamais se croiser.

Pour obtenir l'équation des lignes de courant, nous pouvons écrire :

$$\vec{v} \wedge d\vec{r} = \vec{0} \text{ (vecteurs colinéaires)}$$

III.2.3. Débit massique

Soit q_m le débit massique, il représente la masse qui traverse toute surface normale aux lignes de courant, pendant l'unité de temps.

Nous pouvons introduire le débit massique élémentaire

Pendant l'intervalle de temps dt , la quantité de matière qui traverse l'élément de surface dS est celle contenue dans le cylindre de base dS et de hauteur $\vec{v} \cdot \vec{n} dt = v_n dt$.

Le débit massique élémentaire

$$\delta q_m \text{ est égal à } \delta q_m = \frac{\delta m}{dt} = \frac{\rho v_n dt dS}{dt} = \rho v_n dS = \mathcal{J} \cdot \vec{n} dS = \mathcal{J} \cdot d\vec{S}$$

Le débit massique est alors l'intégrale sur la surface S :

$$q_m = \iint_S \mathcal{J} \cdot \vec{n} dS = \iint_S \mathcal{J} \cdot d\vec{S}$$

III.2.4. Bilan de masse . Equation de continuité

Soit un volume V délimité par une surface fictive S fixe. En exprimant le fait que toute la masse se conserve, le taux de sa variation pendant dt est compensé par le débit massique entrant ou sortant par S .

Ceci peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho d\tau + \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$$

On admet la commutativité de l'intégration sur les variables d'espace et la dérivée temporelle et l'on utilise le théorème d'Ostrogradski. On arrive alors à

$$\iiint_V \frac{d}{dt} (\rho d\tau) + \iiint_V \text{div } \vec{j} d\tau = 0$$

Ceci est vrai quel que soit le volume V délimité par une surface S , localement, nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$$

Ceci constitue l'équation locale de conservation de la masse. Si nous reprenons l'interprétation microscopique de l'opérateur divergence (voir chapitre sur les opérateurs différentiels), cette équation se comprend aisément : si $\text{div } \vec{j}$ est positive, les lignes de champs ont tendance à être créées dans l'élément de volume, la matière a donc *tendance à plus sortir du volume*. Ceci est cohérent avec le signe de $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ qui doit être négatif.

Le passage de $\frac{d}{dt}$ à $\frac{\partial}{\partial t}$ s'explique par le fait que l'intégrale de volume ne dépend que de la variable temporelle alors que ρ dépend outre de t des variables d'espace.

III.3. Différents types d'écoulements

Dans cette partie, nous allons examiner quelques écoulements particuliers.

III.3.1. Ecoulement stationnaire ou permanent

Les champs scalaires et vectoriels ne dépendent pas du temps.

Donc, nous pouvons écrire par exemple : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

Les lignes de courant sont alors des courbes fixes dans le référentiel d'observation et confondues avec la trajectoire des particules.

III.3.2. Ecoulement incompressible

Ces écoulements, aussi qualifiés d'isovolumes, sont définis par $\text{div} \vec{v} = 0$.

Il concerne principalement les liquides mais aussi les gaz si les variations de pression ne sont pas trop importantes. Ceci est généralement vérifié dans le cas des gaz pour des nombres de Mach inférieurs à l'unité, donc pour des écoulements subsoniques.

En faisant une analogie avec l'électromagnétisme pour lequel $\text{div} \vec{B} = 0$ permet de définir un potentiel vecteur \vec{A} tel que $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$, nous pouvons introduire dans le cas des écoulements incompressibles un vecteur \vec{A} tel que $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}$

Nous déterminerons ce champ vectoriel \vec{A} dans le cas des écoulements plans.

Une remarque importante concerne le fait que l'écoulement incompressible n'implique pas un fluide incompressible. En effet, l'équation de continuité peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\rho) \cdot \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ en écrivant } \text{div}(\rho \vec{v}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\rho) \cdot \vec{v} + \rho \cdot \text{div}(\vec{v})$$

qui ne permet en aucun cas de conclure sur la constance de la masse volumique... En revanche un fluide incompressible implique nécessairement un écoulement incompressible.

III.3.3. Ecoulement irrotationnel

Un écoulement irrotationnel est défini par $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$.

Comme en électrostatique où $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \vec{0}$ permet de définir un potentiel V , nous allons définir une fonction potentielle des vitesses ϕ telle que

$$\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$$

Les surfaces à ϕ constantes sont appelées équipotentielle et le

vecteur \vec{v} leur est normal car :

$$\vec{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{r} = - \vec{v} \cdot d\vec{r} = 0$$

Pour déterminer cette fonction potentielle des vitesses nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} V_x = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ V_y = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ V_z = - \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$

III.3.4. Ecoulement stationnaire, incompressible, irrotationnel plan d'un fluide non visqueux.

Cette hypothèse constitue très souvent une bonne approximation d'écoulements réels de liquides et de gaz.

III.3.4.1. Fonction potentielle des vitesses

- l'écoulement est irrotationnel : nous pouvons donc définir la fonction potentielle des vitesses telle que $\vec{v} = - \vec{\text{grad}}(\phi)$.

En coordonnées cartésiennes, nous pouvons écrire :

$$v_x = - \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v_y = - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

3) l'écoulement est permanent donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0} \text{ et } \text{div}(\vec{v}) = 0$$

III.3.4 2. Fonction courant

L'écoulement est incompressible, ce qui se traduit par $\text{div}(\vec{v}) = 0$.

Nous pouvons donc définir un « pseudo potentiel vecteur » \vec{A} telle que $\vec{v} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$ et nous allons maintenant utiliser le fait que l'écoulement est plan pour déterminer ce vecteur.

Considérons un contour plan fermé, dans le plan de l'écoulement, le flux de \vec{v} à travers la surface délimitée par le contour est évidemment nul.

$$\phi = \iint_S \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{\text{rot}} \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Si nous utilisons le théorème de Stokes-Ampère :

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = \iint_s \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{s}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\oint_c \vec{A} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Cette relation doit être vérifiée quelle que soit la surface dans le plan de l'écoulement. La seule solution est que le vecteur \vec{A} soit toujours perpendiculaire à l'élément de longueur $d\vec{\ell}$. \vec{A} est donc nécessairement perpendiculaire à l'écoulement et nous allons écrire :

$\vec{A} = -\psi \vec{k}$ où \vec{k} est le vecteur unitaire de la direction perpendiculaire à l'écoulement et ψ est appelée fonction courant.

Le choix du signe négatif est arbitraire.

Les lignes où ψ est constante sont appelées lignes de courant. Elles sont tangentes au vecteur vitesse et perpendiculaires aux lignes équipotentielles. Pour les déterminer, il suffit d'écrire

$$d\psi = 0 \text{ donc } \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0 \text{ d'où } v_y dx - v_x dy = 0$$

ou encore :

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y}$$

On peut enfin montrer que dans ces conditions : $\Delta\phi = 0$

III.3.5. Ecoulement laminaire et écoulement turbulent

Un écoulement est dit laminaire s'il est régulier dans le temps et dans l'espace. Il est dit turbulent si, au contraire, il n'est pas prévisible. Pour illustrer ceci nous pouvons prendre quelques exemples :

1) Vider une bouteille d'eau. Si on incline un peu la bouteille, l'eau s'écoule lentement, l'air prend la place de l'eau ; l'écoulement est laminaire. Si on incline plus la bouteille, l'eau s'écoule par saccades et l'écoulement n'est plus du tout prévisible ; on le qualifie alors de turbulent.

2) La fumée d'une cigarette. Examinons la combustion d'une cigarette qui se consume dans une pièce à l'abri des courants d'air. L'air chaud monte et entraîne les particules solides. Sur une dizaine de centimètres, la fumée forme un tube régulier, l'écoulement y est laminaire. Au-delà de cette distance, l'écoulement est

imprévisible donc turbulent.

3) Les cours d'eau. Imaginons une rivière après une période de fortes pluies. A l'écoulement turbulent sont associés des tourbillons, des vagues et des aspects totalement irréguliers dans le temps et dans l'espace. En période de sécheresse, la rivière reprend son caractère laminaire avec un écoulement paisible et parfaitement prévisible.

III.4. Rappels de ce chapitre

- 1) Description cinématique eulérienne (x, y, z, t)
- 2) Equation de continuité relative à la conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

- 3) Caractéristiques des différents écoulements

- stationnaire : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ et $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

- incompressible : $\text{div}(\vec{v}) = 0$ d'où $\vec{v} = \overrightarrow{\text{rot}(-\psi \vec{k})}$ pour un écoulement plan où ψ désigne la fonction courant et \vec{k} est le vecteur unitaire perpendiculaire à l'écoulement.

- irrotationnel $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ d'où $\vec{v} = - \overrightarrow{\text{grad}(\varphi)}$ avec φ la fonction potentielle des vitesses.

Exercices de cinématique des fluides

Exo 1

On considère les écoulements définis en coordonnées cartésiennes par les champs des vitesses : $\vec{V}_1 = (0, \alpha|x|, 0)$, $\vec{V}_2 = a(x, y, 0)$ et $\vec{V}_3 = a(-y, x, 0)$.

Dans chaque cas, représenter quelques lignes de courant, caractériser ces écoulements, justifier s'il y a lieu l'existence de la fonction courant et celle de la fonction potentielle des vitesses. Déterminer ces fonctions, si elles existent.

Exo 2

On considère l'écoulement plan d'un fluide incompressible défini par le champ de vitesse : $\vec{V} = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix}$ dans la base orthonormée (\vec{i}, \vec{j}) définissant le plan xoy. α et β sont des constantes réelles indépendantes du temps.

- 1) Caractériser cet écoulement.
- 2) A partir de l'équation de continuité, trouver une relation entre les constantes α et β . Déterminer le potentiel des vitesses $\phi(x, y)$ en fonction de la seule constante α .
- 3) Etablir les équations paramétriques $x(t)$ et $y(t)$ de la particule fluide qui était au point $M_0 (X_0, Y_0)$ à $t=0$. Justifier la démarche.
- 4) La fonction courant est désignée par $\psi(x, y)$. Etablir une relation entre les dérivées premières de ϕ et ψ par rapport à x et à y .
- 5) Déterminer $\psi(x, y)$ et tracer quelques lignes de courant.

Exo 3

Un écoulement fluide est défini par le champ de vitesses : $\vec{V} = (a, 2a, 0)$ dans un repère (O, x, y, z) avec a une constante positive.

- 1) Déterminer la nature et la direction de cet écoulement.
- 2) Déterminer l'expression de la fonction courant ainsi que l'équation des lignes de courant passant par l'origine

3) Déterminer le potentiel des vitesses et l'équation des lignes équipotentielles passant par l'origine.

4) Montrer que le gradient de la fonction courant est perpendiculaire à la vitesse.

Exo 4

Un écoulement fluide est défini par le champ de vitesses :

$\vec{v} = (ay, 0, 0)$ dans un repère (O, x, y, z) avec a une constante strictement positive.

1) Tracer les lignes de courant. Celles-ci présentent-elles une courbure ? L'écoulement est-il rotationnel ?

2) Pour expliquer ce paradoxe, considérons un motif de fluide carré de côté $2c$ dont le centre M est situé à un instant t en x . On appelle A et B les points situés au même instant en x et d'ordonnées respectives

$y+c$ et $y-c$.

Où se trouvent les points B , M et A à l'instant $t+\Delta t$? Dessiner alors la forme du motif. A l'instant $t = 0$, l'angle entre l'axe Oy et le segment BMA est nul. Exprimer la valeur de cet angle à l'instant $t + \Delta t$ (considérer le produit $a\Delta t$ comme un infiniment petit du premier ordre).

3) Répondre aux mêmes questions pour le segment CMD .

4) Le motif fluide se déforme-t-il au cours du mouvement ? L'écoulement est-il compressible ? Le fluide est-il compressible ? Le motif fluide subit-il une rotation ? Que traduit le caractère rotationnel d'un écoulement ?

Exo 5

Une conduite horizontale admet l'axe Ox comme axe de symétrie. Elle est constituée par trois tronçons. La partie AB (amont) a une section carrée de côté $2b$. Le champ des vitesses du liquide qui s'y écoule est $\vec{v}=a\vec{i}$. Un tronçon BC convergent selon lequel la hauteur diminue linéairement et la profondeur reste égale à $2b$. Enfin, une partie CD (aval) à section rectangulaire constante dans laquelle le champ des vitesses est $\vec{v}=2a\vec{i}$

1) En raisonnant sur la partie amont, donner le débit volumétrique dans cette conduite à partir des fonctions de courant extrêmes.

2) Montrer à partir des fonctions de courant précédentes comment évolue la section de la conduite.

3) Tracer les lignes de courant.

On supposera dans tout l'exercice que les lignes de courant sont toujours constituées de portions rectilignes.

Exo 6

Un écoulement est défini par le champs de vitesses : $\vec{v} = (-2y, 2x, 0)$ dans un repère (O, x, y, z) . ($a = \text{Cte}$ en m/s).

- 1) Déterminer la nature de l'écoulement.
- 2) Déterminer la fonction de courant et les équations des lignes de courant. Déterminer le module de v et le champ des accélérations.
- 3) Montrer que le champ des vitesses dérive d'un potentiel vecteur qui lui est perpendiculaire et dont le module est égal à la fonction courant.
- 4) Donner le champ de vitesses et le champ des accélérations en coordonnées cylindriques.

Exo 7

Un écoulement fluide est défini par le champ de vitesses :

$\vec{v} = (b, a \cos(pt), 0)$ dans un repère (O, x, y, z) avec $b > 0$, $c > 0$ et p non nul.

- 1) Déterminer la nature de cet écoulement.
- 2) Qu'en conclure au sujet de la masse volumique du fluide de cet écoulement ?
- 3) Déterminer l'expression de la fonction courant ainsi que l'équation des lignes de courant passant par un point (X_0, Y_0, Z_0) . Quelle est l'allure des lignes de courant ?
- 4) Déterminer le potentiel des vitesses et l'équation des lignes équipotentiels passant par ce même point (X_0, Y_0, Z_0) . Quelle est l'allure des lignes équipotentiels ?
- 5) Montrer que le gradient de la fonction courant est perpendiculaire à la vitesse. Le justifier d'un point de vue physique.

Exo 8

Le champ des vitesses d'un écoulement est donné en coordonnées cylindriques par : $\vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\theta \vec{e}_\theta$ quel que soit z .

- 1) Caractéristiques de l'écoulement :
Donner les équations caractéristiques de la nature de l'écoulement $(\text{div } \vec{v}, \text{rot } \vec{v})$. Dans le cas d'un écoulement isovolume irrotationnel, exprimer le potentiel des vitesses et la fonction courant. Toutefois, pour un tel écoulement, montrer qu'il est toujours possible de faire dériver la vitesse d'un potentiel vecteur directement lié à la fonction courant.

- 2) Application : écoulement vers un puits

Un puits rectiligne vertical absorbe un fluide de façon isotrope dans

l'espace sur une longueur : $h = 0,5\text{m}$. Le champ des vitesses de l'écoulement des fluides vers le puits est en coordonnées cylindriques : $\vec{v} = -v_r \vec{e}_r$.

a) Si le débit d'absorption du puits est $q_v = 10\pi \text{ l/s}$, exprimer v_r à la distance r de l'axe du puits. Donner les valeurs de la vitesse à 1cm, 10cm et 1m du puits.

b) Déterminer la nature de l'écoulement.

c) Déterminer le potentiel des vitesses.

d) Donner la fonction de courant et préciser la nature des lignes de courant. Donner le débit qui transite entre les lignes de courant C_1 confondue avec l'axe Ox ($x > 0$) et la ligne de courant C_2 , d'équation : $y = \sqrt{3} x$ ($x > 0, y > 0$).

Exo 9

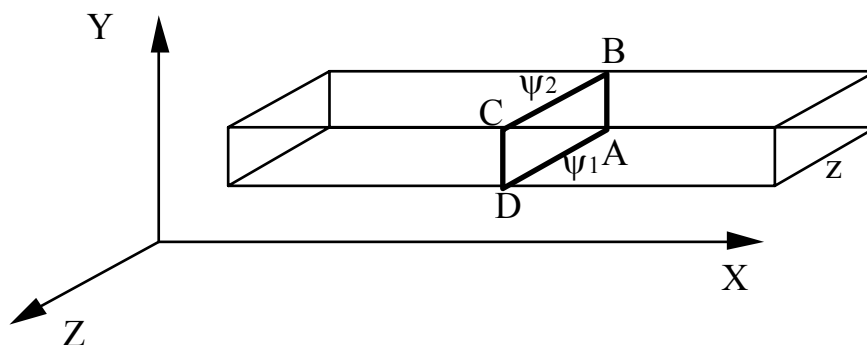
On considère l'écoulement isovolume et permanent dont les lignes de courant sont des courbes planes situées dans des plans parallèles au plan xoy sans aucune variation le long de l'axe Oz (voir figure).

1) Montrer que le champ des vitesses dérive d'un potentiel vecteur \vec{A} que l'on exprimera avec la fonction courant ψ .

2) On considère la tranche fluide rectangulaire ABCD (AB et CD sont dans des plans parallèles au plan xoy , BC et DA sont perpendiculaires à ces derniers et donc selon Oz).

Les fonctions courant sont désignées par ψ_1 sur DA et ψ_2 sur BC. Exprimer le débit volumétrique q_v en fonction des fonctions courant et de z ($BC = DA = z$).

On rappelle le théorème de Stokes : $\iint_S \vec{rot} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_{\text{boucle}} \vec{A} \cdot d\vec{l}$



Chapitre IV Dynamique des fluides non visqueux

Equations d'Euler et relations de Bernoulli

Dans la partie précédente, nous avons caractérisé le mouvement des fluides sans s'intéresser à ce qui créait ou modifiait ce mouvement. Le but de cette partie consiste à appliquer la relation fondamentale de la dynamique (deuxième loi de Newton) à la particule fluide dans la limite de la mécanique newtonienne. Une remarque préalable concerne les hypothèses que nous serons amenés à faire : elles sont nombreuses et la réponse à un problème nécessitera la vérification de chacune d'entre elles.

Nous établirons :

- * l'équation satisfaite par le champ des vitesses : l'équation d'Euler .
- * la déduction d'une relation énergétique : « relation de Bernoulli ».

IV.1. Equation d'Euler.

Nous prenons le même raisonnement que dans la partie « statique des fluides » pour caractériser les forces qui s'exercent sur la particule fluide de masse dm , de volume $d\tau$ et délimitée par une surface dS . La résultante des forces $d\vec{F}$ est la somme des forces de volume $d\vec{F}_v$ et des forces de surface $d\vec{F}_s$.

$$d\vec{F} = d\vec{F}_s + d\vec{F}_v$$

En introduisant l'équivalent volumique des forces de pression, nous pouvons écrire :

$$d\vec{F} = -\vec{\text{grad}}P d\tau + \vec{f}_v d\tau$$

En écrivant ceci, nous supposons que la contrainte tangentielle subie par la particule fluide est nulle, donc nous faisons l'hypothèse que **le fluide est parfait**.

et en rappelant que l'accélération en description cinématique eulérienne est égale à :

$$\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{v}$$

En écrivant maintenant que la résultante des forces extérieures est égale au produit de la masse par l'accélération, nous arrivons à :

$$dm \vec{a} = dm \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{v} \right] = \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{v} \right] \rho d\tau = (-\overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{f}_v) d\tau$$

En simplifiant par $d\tau$, on arrive à :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{v})\vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{f}_v$$

ou encore :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} \wedge \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}}P + \vec{f}_v$$

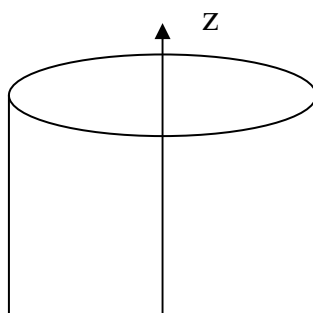
Ces deux équations portent respectivement les noms d'équations d'Euler et de Lamb

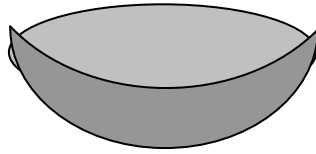
Exemple d'application

Nous pouvons reprendre un exercice qui peut être traité dans le cadre de la statique des fluides dans un référentiel non galiléen. Il s'agit d'un récipient cylindrique de rayon R contenant un fluide incompressible en rotation autour de son axe de révolution, la vitesse angulaire ω est constante.

Pour résoudre ce problème en statique des fluides, nous avons écrit que les particules fluides étaient en équilibre dans le référentiel lié au cylindre et nous avons ajouté aux forces de pesanteur la force d'inertie d'entraînement. Ici, nous allons raisonner dans le référentiel terrestre que nous supposons galiléen. Le but réside dans l'établissement des équations des isobares.

Le référentiel est donc défini, le système étudié est la particule fluide, faisons le bilan des forces de volume : les forces de pesanteur. Concernant maintenant la base de travail, il est évident que ce problème doit être résolu en coordonnées cylindriques.





Ecrivons et simplifions l'équation d'Euler

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = -\vec{\text{grad}} P + \vec{f}_v$$

Le mouvement est supposé permanent donc :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$$

la seule force à considérer est le poids dont la densité volumique est égale à $\rho \vec{g} = -\rho g \vec{k}$ (où \vec{k} est le vecteur unitaire de l'axe z)

Les considérations de symétrie permettent de dire que la vitesse des particules fluides n'est qu'orthoradiale donc : $\vec{v} = r \omega \vec{u}_\theta$ où r représente la distance entre la particule fluide et l'axe de rotation.

L'accélération peut donc s'écrire :

$$\rho (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \rho r \omega \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \omega \vec{u}_\theta) = -\rho r \omega^2 \vec{u}_r = -\vec{\text{grad}} P + \vec{f}_v$$

La projection sur \vec{u}_θ apporte le fait que la pression ne dépend pas de la variable θ , ce qui est évident !

Les projections sur \vec{u}_r et \vec{k} donnent :

$$-\rho r \omega^2 = -\frac{\partial P}{\partial r} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho g = 0$$

Ceci permet d'écrire la différentielle de la pression :

$$dP = (r \omega^2 dr - g dz) \rho$$

et donc de retrouver l'équation d'une parabole obtenue dans la partie « statique des fluides » pour les isobares :

$$z = \frac{1}{2} \frac{r^2 \omega^2}{g} + C \quad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

IV.2. Relation de Bernoulli

Reprenons l'équation d'Euler et simplifions-la en faisant quelques

hypothèses :

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \vec{f}_v$$

Rappelons aussi que pour établir cette équation nous avons supposé que le cadre de la mécanique newtonienne est applicable et que le fluide est parfait. Nous allons maintenant ajouter d'autres hypothèses

- écoulement permanent ($\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$).
- référentiel galiléen (pas de force d'inertie).
- fluide incompressible (ρ constante).
- seul le poids s'applique sur la particule fluide. Prenons un axe z orienté selon la verticale ascendante et écrivons alors que la densité volumique de force est égale à $-\rho g \vec{k}$.

L'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\rho \left[\vec{0} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) + \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} \right] = -\overrightarrow{\text{grad}} P - \rho g \vec{k}$$

ou

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \rho \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} + \overrightarrow{\text{grad}} P + \rho g \vec{k} = \vec{0}$$

Nous pouvons intégrer ρ dans le gradient puisque le fluide est incompressible. De plus, nous pouvons écrire que :

$$\rho g \vec{k} = \rho \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{g}z) = \overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z).$$

Nous arrivons alors à :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho v^2}{2}\right) + \overrightarrow{\text{grad}} P + \overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z\right)$$

ou encore à :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z\right) = \rho \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v}$$

Faisons encore une hypothèse : l'écoulement est irrotationnel. L'équation précédente se simplifie et en rappelant que : $df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{l}$ nous arrivons à :

$d\left(\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z\right) = 0$ et donc au fait que la quantité $\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z$ est constante.

Dans le cas où l'écoulement n'est pas irrotationnel, nous allons aussi simplifier l'équation en raisonnant le long d'une ligne de courant. Si nous multiplions les membres de gauche et de droite par le déplacement élémentaire $d\vec{l}$.

$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z\right) \cdot d\vec{l} = \rho \overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} \cdot d\vec{l}$$

Compte tenu du fait que nous sommes sur une ligne de courant, $d\vec{l}$

est un vecteur colinéaire au vecteur vitesse \vec{v} . Le terme $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} \wedge \vec{v} \cdot d\vec{l}$ est donc égal au vecteur nul. Nous arrivons donc au fait que la quantité $\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z$ est constante le long d'une ligne de courant (la valeur de la constante dépend de la ligne de courant).

Ce résultat très important en mécanique des fluides est désigné par « Relation de Bernoulli ». Si les hypothèses que nous allons rappeler sont vérifiées, la quantité $\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z$ est constante le long d'une ligne de courant.

Hypothèses :

- fluide parfait.
- écoulement permanent.
- référentiel galiléen.
- fluide incompressible.
- seul le poids s'applique sur la particule fluide.

Si l'écoulement est irrotationnel, cette quantité est constante partout dans le fluide.

Remarque : en conservant ces hypothèses et en annulant la vitesse, nous retrouvons la relation fondamentale de la statique des fluides.

Interprétation énergétique de la relation de Bernoulli

Nous avons écrit que la quantité $\frac{\rho v^2}{2} + P + \rho g z$ est constante. Si nous examinons les termes, nous avons une interprétation énergétique. En effet, le terme $\rho \frac{v^2}{2}$ correspond à de la densité d'énergie cinétique.

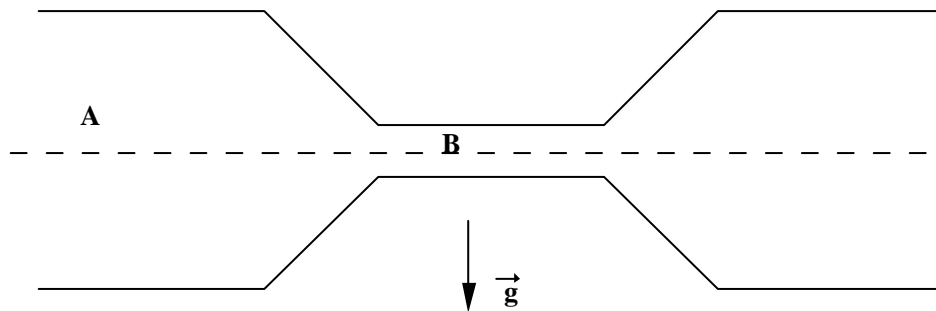
Le terme $\rho g z$ traduit de la densité d'énergie potentielle de pesanteur.

Enfin, le dernier terme P correspond à de la densité d'énergie associée aux forces de pression ou à de l'énergie cinétique interne (en langage thermodynamicien), souvenez-vous du travail des force de pression : $w = \int -P dV$

La relation de Bernoulli traduit donc la conservation de l'énergie mécanique. L'une des hypothèses est que le fluide est parfait et une autre hypothèse stipule que la particule fluide n'est soumise qu'aux forces de pesanteur, il n'y donc pas de force dissipative...

IV.3. Applications

Il n'est pas possible de traiter la dynamique des fluides parfaits sans aborder un certain nombre d'exemples parmi lesquels : l'effet Venturi, le tube de Pitot ou la formule de Torricelli.



IV.3.1. L'effet Venturi (Giovanni Battista 1746-1822)

Etudions l'écoulement d'un fluide dans une canalisation qui subit un rétrécissement (voir figure). Plus précisément, nous cherchons à exprimer la pression qui règne en B en fonction de celle qui existe en A. Au premier abord, il semblerait évident que la pression en B est supérieure à celle qui règne en A. Cette déduction provient du fait que en B toutes les molécules convergent pour passer le rétrécissement, d'où une augmentation de pression.

Comme souvent en mécanique des fluides, nous allons faire un certain nombre d'hypothèses qui permettront d'une part de simplifier le problème et d'autre part de pouvoir utiliser la relation de Bernoulli.

Nous allons supposer que le fluide qui s'écoule dans la canalisation est parfait, incompressible, seulement soumis aux forces de pesanteur et que l'écoulement est permanent dans le référentiel lié à la canalisation qui est supposé galiléen. Ces premières hypothèses permettent seulement d'utiliser la relation de Bernoulli.

Continuons la simplification du problème en supposant que perpendiculairement à l'axe de la canalisation, tous les champs, scalaires et vectoriels, sont constants. Ceci sera d'autant mieux vérifié que la section sera petite. En A et en B, nous désignerons respectivement par \vec{v}_A , S_A , P_A et par \vec{v}_B , S_B , P_B les vecteurs vitesses, les sections et les

pressions. De plus, nous ne nous intéressons pas du tout à la partie qui correspond au rétrécissement.

Nous pouvons maintenant appliquer la relation de Bernoulli entre les points A et B qui sont situés sur une même ligne de courant.

$$\frac{\rho v_A^2}{2} + P_A + \rho g z_A = \frac{\rho v_B^2}{2} + P_B + \rho g z_B$$

Or $z_A = z_B$, on arrive alors à :

$$\frac{1}{2} \rho v_A^2 + P_A = \frac{1}{2} \rho v_B^2 + P_B$$

ou encore à

$$P_B - P_A = \Delta P = \frac{1}{2} \rho (v_A^2 - v_B^2)$$

Nous pouvons écrire qu'en régime permanent, pendant un intervalle de temps dt , toute la matière qui passe en A est égale à celle qui passe en B. On peut donc écrire :

$$q_{mA} = \iint_{S_A} \vec{J}_A \cdot d\vec{S} = q_{mB} = \iint_{S_B} \vec{J}_B \cdot d\vec{S} \quad \text{avec } \vec{J} = \rho \vec{v} \text{ (vecteur densité de}$$

courant). Compte tenu des hypothèses, ρ constant et vecteur vitesse selon l'axe de la canalisation, donc colinéaire à $d\vec{S}$, nous arrivons à

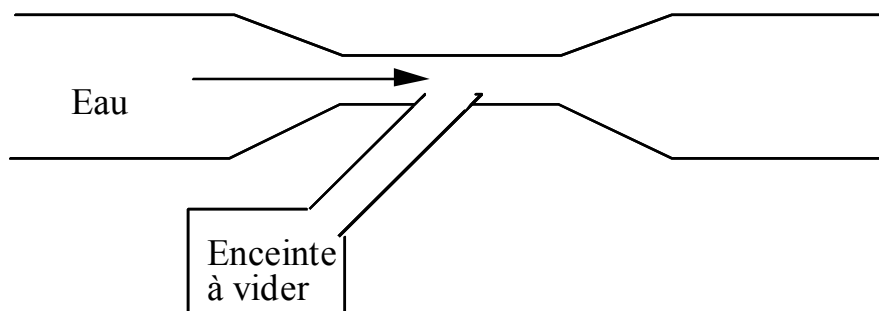
$$S_A v_A = S_B v_B \text{ que l'on peut considérer comme un résultat intuitif.}$$

On arrive alors au résultat suivant :

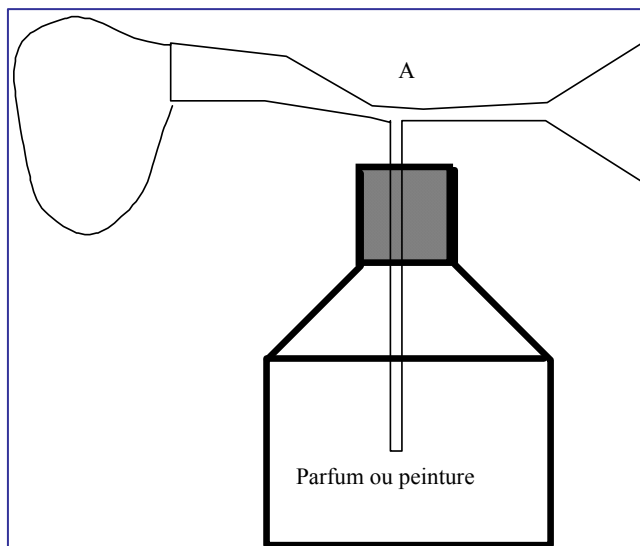
$$P_B - P_A = \frac{1}{2} \rho v_A^2 \left(1 - \frac{S_A}{S_B}\right)$$

La section en A étant supérieure à celle en B, nous arrivons au résultat qui peut paraître surprenant à savoir que la pression en B est inférieure à celle en A. La réduction de la section crée une dépression, c'est l'effet Venturi.

Les applications de cet effet sont nombreuses, nous pouvons citer la trompe à eau (voir figure ci-dessous) qui permet de faire un vide certes très limité mais qui est souvent utilisée en travaux pratiques de chimie.



Dans un autre ordre d'idées, l'effet Venturi est utilisé pour vous mesdames par le brumisateuse et pour vous messieurs, par le pistolet à peinture. Tous deux fonctionnent selon le principe présenté sur la figure ci-dessous. L'envoi d'un courant d'air, par la poire pour le brumisateuse et par un moteur pour le pistolet à peinture, va induire une diminution de la pression en A et donc une aspiration du liquide qui sera ensuite pulvérisé.

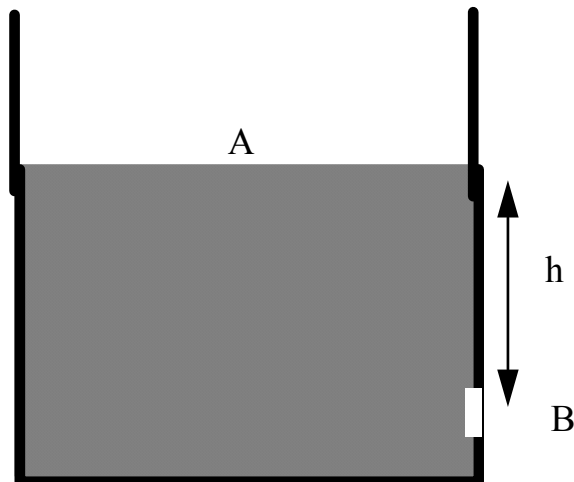


De nombreuses autres applications utilisent cet effet comme certains dispositifs pour mesurer des vitesses, l'aspiration des fluides dans les carburateurs ou encore dans les réacteurs pour augmenter la vitesse d'éjection des gaz et donc accroître la poussée.

IV.3.2. Formule de Torricelli (Evangelista 1608-1647)

Dans cette partie, il s'agit de déterminer la vitesse d'écoulement d'un fluide. Cette partie va notamment nous permettre de discuter toutes les hypothèses nécessaires à l'utilisation de la relation de Bernoulli.

Considérons une cuve ouverte et percée d'un trou en B contenant un liquide (voir la figure ci-dessous).



Supposons pour commencer que le référentiel terrestre est galiléen et que tous les points de la surface libre et du trou sont équivalents (mêmes vitesse, hauteur et pression). La particule fluide n'est soumise qu'à son poids. Pour utiliser la relation de Bernoulli, il faut maintenant supposer un écoulement permanent. Pour satisfaire cela, il faut que la hauteur h n'évolue pas trop vite ; il faut donc que la section du trou S_B soit bien plus petite que celle de la surface libre du fluide S_A . Il faut aussi que le fluide soit parfait et cette dernière hypothèse sera d'autant moins valable que la section du trou est petite en raison des effets de surface. En résumé, il faudra que S_B soit bien plus petite que celle de la surface libre du fluide S_A mais pas trop petite...

Pour appliquer maintenant la relation de Bernoulli, nous allons raisonner le long d'une ligne de courant passant par un point de la surface libre et par un point du trou.

Nous pouvons alors écrire :

$$\frac{\rho v_A^2}{2} + P_A + \rho g z_A = \frac{\rho v_B^2}{2} + P_B + \rho g z_B$$

Nous allons maintenant dire que la pression en A est égale à celle en B et égale à la pression atmosphérique. Ceci signifie que nous négligeons la variation de pression liée à l'atmosphère terrestre. En toute rigueur :

$P_B = P_A + \rho_{\text{air}} g h$ (statique des fluides). Compte tenu de la masse volumique de l'air, considérablement inférieure (800 fois) à celle du liquide contenu dans le récipient, cette hypothèse est tout à fait valable.

Comme dans l'exemple précédent, nous pouvons écrire que le débit de conserve donc que $S_A v_A = S_B v_B$

En introduisant $h = z_A - z_B$

Nous arrivons à :

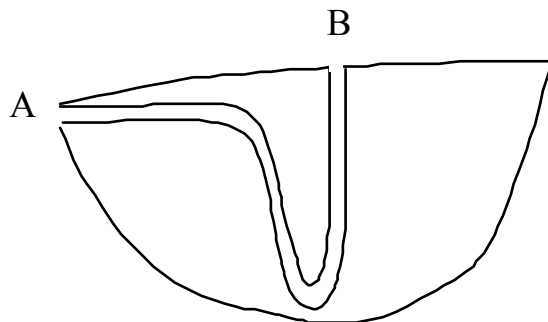
$$v_B^2 = \frac{2gh}{1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}}$$

En supposant que $S_B \ll S_A$ nous obtenons une équation connue sous le nom de « Formule de Torricelli » :

$$v_B = \sqrt{2gh}$$

Nous pouvons faire un commentaire en comparant cette dernière équation à celle obtenue en mécanique du point dans le cas de la chute libre sans vitesse initiale. L'énergie potentielle de pesanteur ($mgz + \text{constante}$) se transforme progressivement en énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2$. Nous arrivons alors à $v = \sqrt{2gh}$ qui est la même relation que la formule de Torricelli. Ceci est tout à fait logique compte tenu du modèle que nous avons utilisé...

IV.3.3. Le tube de Pitot



$$\frac{1}{2}\rho V_A^2 + P_A + \rho g z_A = \frac{1}{2}\rho V_B^2 + P_B + \rho g z_B$$

$$V_A = 0, \rho g (z_B - z_A) \text{ négligeable}$$

$$\Rightarrow V_B^2 = \frac{2}{\rho} (P_A - P_B)$$

$$\Rightarrow V_B = \sqrt{2 g \frac{\rho_2}{\rho} h}$$

Il est donc possible en connaissant les masses volumiques et en mesurant la hauteur h de déterminer la vitesse. Ceci peut être pratique pour déterminer des vitesses d'objets qui ne sont pas en contact avec le sol. Citons par l'exemple la vitesse des avions avec le problème que nous aurons accès à la vitesse de l'avion par rapport à l'air et non par rapport à la Terre.

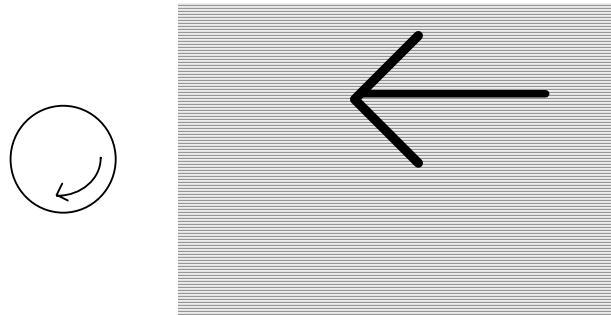
IV.3.4. Petites illustrations

- **Cheminée** : depuis quelques années, une nouvelle norme concerne les cheminées dont l'orifice doit absolument dépasser de 40 cm le faîte du toit. Pour expliquer cela, il suffit de reprendre la relation de Bernoulli, et de dire que plus la vitesse de l'air (le vent) au niveau de l'orifice est grande, plus la pression sera petite et permettra donc d'aspirer les gaz de combustion produits au niveau du foyer. Si l'ouverture de la cheminée est située 40 cm au-dessus du faîte du toit, elle verra toujours le vent.

- **l'ouragan qui arrache les toits** : la même explication explique l'implosion des maisons soumises aux ouragans. A l'intérieur du toit, la vitesse de l'air est quasiment nulle et à l'extérieur, elle a celle du vent. La relation de Bernoulli permet donc d'expliquer une force dirigées vers l'extérieur de la maison.

- **ne pas rester à proximité d'un train en mouvement** : Nous savons qu'il est dangereux de rester à proximité des rails quand un train arrive. C'est encore la relation de Bernoulli qui permet d'expliquer le phénomène d'aspiration. Dans son mouvement, le train entraîne des particules fluides (l'air) qui pourront alors avoir une grande vitesse, la pression dans cette région est donc plus petite.

- **Effet Magnus** : « couper », « lifter » une balle au ping-pong ou au tennis, ou encore les « coups francs de Platini » sont des phénomènes complètement admis mais seule des notions de mécanique des fluides permettent de l'interpréter. Sans faire aucun calcul, nous pouvons cependant expliquer en raisonnant sur le schéma présenté ci-dessous.



Il est clair la rotation de la balle va engendrer une dissymétrie de l'écoulement en forçant des particules fluides à passer en dessous de la balle. La vitesse des particules sera alors plus importante en dessous de la balle, la pression sera donc plus faible. La balle aura alors tendance à retomber plus rapidement sur le terrain (lift dans ce cas).

Exercices de dynamique des fluides parfaits

Exo 1

Soit un réservoir de section libre constante S contenant de l'eau. Cette eau peut s'écouler grâce à un siphon BCDE (tube cylindrique de section constante et de diamètre égal à 8 cm). L'extrémité E du tube débouche à l'air libre à une distance : $Z=7,2$ m sous le niveau de la surface libre de l'eau dans le réservoir. On suppose un écoulement permanent, et l'on néglige la vitesse d'abaissement du niveau de l'eau dans le réservoir par rapport à la vitesse de l'écoulement dans le tube.

Données : $P_{\text{atm}}=1020$ hPa. $\rho=10^3$ kg/m³. $g=10$ m/s².

$P_{\text{VS}} = 20$ hPa = pression de vapeur saturante de l'eau à la température de l'écoulement.

- 1) Quel est le débit volumétrique du siphon ?
- 2) A quelle hauteur au-dessus de la surface libre du réservoir devrait se situer le point le plus haut du siphon pour que se produise en ce lieu de la cavitation ?

Exo 2 (suite du précédent)

On suppose maintenant le réservoir précédent fermé. De l'air (que l'on assimile à un gaz parfait à température constante) à la pression atmosphérique est donc emprisonné dans la chambre de ce réservoir. L'espace libre a une hauteur h . On suppose que l'horizontale de référence est maintenant celle qui passe par la sortie E du tube. Z est donc la cote initiale de la surface libre dans le réservoir. Soit H la hauteur de liquide correspondant à la pression atmosphérique : $P_{\text{atm}} = \rho g H$. On suppose qu'il existe un amorçage du siphon pour permettre l'écoulement. On néglige la vitesse d'abaissement du niveau de l'eau dans le réservoir par rapport à la vitesse de l'écoulement dans le tube. On néglige la pression de vapeur saturante de l'eau. On donne : $H = 10$ m, $Z = 3$ m, $h = 20$ cm.

Donner l'abaissement $\Delta h = f(H, Z, h)$ du niveau de l'eau dans le réservoir lorsque l'écoulement cessera.

Exo 3

Lorsque le vent souffle à $25 \text{ m/s} = 90 \text{ km/h}$ au-dessus d'une maison, déterminer la force exercée sur le toit de surface égale à 250 m^2 et supposé horizontal.

Exo 4

Une pression absolue de $2.75 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ de l'eau dans une conduite au niveau de la rue, suffit-elle pour élever l'eau jusqu'au dernier étage d'un immeuble à 50 m au-dessus du sol ? Quelle doit être la hauteur maximale de cet immeuble ?

Exo 5

Un avion a une masse de $2,0 \cdot 10^6 \text{ kg}$, et de l'air passe sur la face inférieure de ses ailes à 100 m/s . Si celles-ci ont une aire de 1200 m^2 , à quelle vitesse l'air doit-il passer par-dessus leur surface supérieure pour que l'avion reste en l'air ?

Exo 6 :

Un moteur d'automobile à 4 cylindres a une cylindrée de 2000 cm^3 , ce qui correspond à la quantité d'air qui entre dans les 4 cylindres lors de chaque révolution. Si le moteur tourne à 1500 tr/mn , et que le venturi du carburateur a un rayon de 2.5 cm , déterminer :

- a) la vitesse du courant d'air entrant dans le venturi.
- b) la pression à l'intérieur de ce tube.

Exo 7

Dans un référentiel galiléen, on considère un réservoir de section constante contenant de l'eau (fluide supposé parfait et incompressible ($\rho = 10^3 \text{ kgm}^{-3}$), maintenue à une température constante. Cette eau peut s'écouler par une vanne placée à la base du réservoir sur sa face latérale. Dans tout cet exercice, l'indice 1 représente l'eau au niveau du robinet, alors que l'indice 2 représente la surface libre du liquide dans le réservoir.

Partie 1

Dans cette première partie, le réservoir est ouvert. La pression au-dessus du fluide est égale à la pression atmosphérique ($P_0=10^5\text{Pa}$), quelle que soit la quantité de liquide restant.

- 1) Peut-on utiliser la relation de Bernoulli ? Justifier la réponse.
- 2) En tenant compte de la vitesse d'abaissement du niveau de l'eau dans le réservoir, montrer que la vitesse de l'eau qui s'écoule au niveau de la vanne s'exprime par :

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - A_1^2/A_2^2}}$$

où : $h = y_2 - y_1$ tandis que A_1 et A_2 désignent les aires de la vanne et de la surface supérieure du réservoir. On désigne par $y'Oy$ l'axe vertical orienté dans le sens ascendant.

- 3) Calculer la vitesse d'abaissement de l'eau dans le réservoir.
- 4) Déterminer la valeur de $h(t)$ par intégration en supposant que $h = h_0$ à $t = 0$.
- 5) Donner l'expression analytique du temps nécessaire à la vidange du réservoir.

Partie 2

Le réservoir est maintenant fermé et rempli au 3/4 de sa hauteur. La pression du gaz situé au-dessus de l'eau est égale à la pression atmosphérique (P_0). A l'instant initial, on ouvre brutalement la vanne, le liquide s'écoule et l'on néglige la phase transitoire. De plus, on néglige dans cette partie la vitesse d'abaissement de l'eau dans le réservoir devant celle qu'a l'eau au niveau de la vanne.

- 1) Peut-on utiliser la relation de Bernoulli ? Justifier la réponse.
- 2) Calculer la vitesse d'éjection du liquide au niveau de la vanne dans les premiers instants de l'écoulement ($h \approx h_0$ et $P \approx P_0$).
- 3) L'écoulement du fluide engendre une dilatation du gaz. On constate que quand la pression du gaz est divisée par deux, l'écoulement s'arrête. Déterminer la hauteur d'eau restant h . Pour l'application numérique, on prendra $g=10\text{m.s}^{-2}$. Discuter ce résultat en fonction des données du problème.

Exo 8

- 1) Nous avons vu, dans les différentes applications du cours

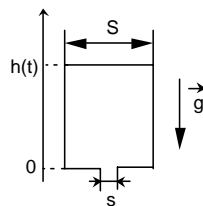
concernant la vidange des réservoirs, que l'on néglige souvent la vitesse de la surface libre du fluide devant celle du jet. Dans cette question, nous tenons compte du mouvement du fluide au niveau de cette surface libre. Déterminer alors la vitesse du fluide au niveau du jet. Retrouver la formule de Torricelli établie dans le cours. Le fluide est parfait, incompressible et l'on suppose la vitesse du fluide uniforme dans une section droite de jet.

2) A l'instant $t = 0$, ouvrons le robinet de vidange du récipient de section $S \gg s$. Etablir et tracer la fonction $h(t)$ où h est la hauteur d'eau dans le réservoir, comptée positivement à partir du fond.

3) Proposer un aménagement du dispositif précédent qui permette d'exploiter l'évolution de $h(t)$ pour des mesures de durée. Une telle horloge s'appelle un clepsydre.

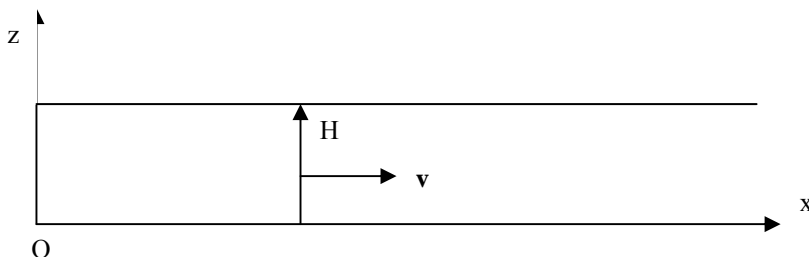
4) La forme du réservoir est de révolution autour de l'axe Oz , mais la section S diminue avec z suivant la loi : $S = S_0 \text{ Erreur !}$

Quel est l'avantage de ce dispositif par rapport au précédent pour la même application ?



Exo 9

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on étudie l'écoulement permanent et irrotationnel d'un fluide parfait incompressible (de masse volumique ρ) dans un canal horizontal, rectangulaire, rectiligne, de largeur constante L et d'axe Ox (voir figure). Au point d'abscisse x , on note H la hauteur et v la vitesse du fluide (H_0 et v_0 sont relatifs au point d'abscisse $x = 0$). v ne dépend pas de z . Au dessus du canal, la pression est constante.



1) H est constant. Peut-on utiliser la relation de Bernoulli ? Montrer que $E = H + V^2/2g$ est constant au niveau de la surface libre (dans cet exercice, E ne représente pas l'énergie massique).

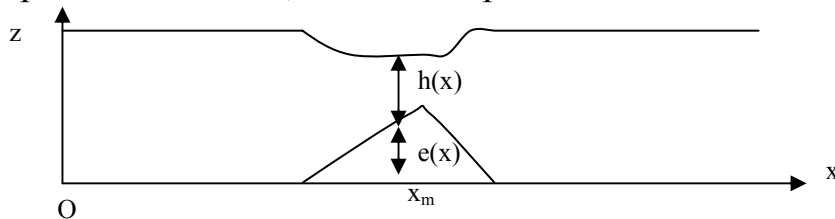
2) Montrer que le débit volumique (q_v) ne dépend pas de x . Calculer-le en fonction de g , E , L et H .

3) A l'aide de vannes, on peut modifier la hauteur d'eau dans le canal en conservant E constante. Calculer la hauteur critique H_c pour laquelle le débit q_v est maximal (en fonction de E et g).

4) On se place dans le cas d'un débit inférieur à q_{vmax} . A partir de l'étude de la fonction $q_v(H)$, montrer qu'il existe deux valeurs possibles de H (H_1 et H_2). Ces valeurs correspondent à deux types d'écoulement : l'un dit fluvial (faible vitesse v_1) et l'autre torrentiel (grande vitesse v_2), les identifier.

5) Montrer que $v_1 < \sqrt{gh_1}$ et que $v_2 > \sqrt{gh_2}$

6) Le fond du canal présente maintenant une bosse (voir figure), de hauteur $e(x)$, passant par une hauteur maximale e_m en $x=x_m$. On appelle $h(x)$ la hauteur d'eau au-dessus de la bosse. La vitesse est toujours selon Ox et uniforme sur une section perpendiculaire à Ox , mais elle dépend de x au niveau de la bosse.



7) A partir de la conservation du débit, déduire une relation entre $h(x)$ et $v(x)$ en fonction de H_0 et v_0 .

8) E étant toujours constant et en remplaçant H soigneusement, montrer que :

$$v \frac{dv}{dx} + g \left(\frac{dh}{dx} + \frac{de}{dx} \right) = 0$$

9) Vérifier alors que : $\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} (v^2 - gh) + g \frac{de}{dx} = 0$. Que devient cette équation en

$x=x_m$?

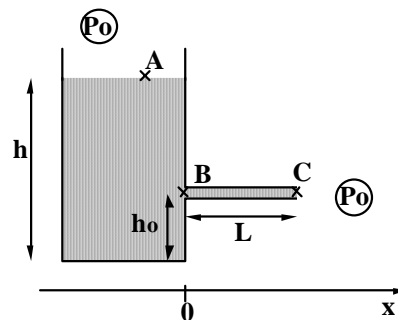
10) On définit le nombre de Froude par $Fr = \frac{v}{\sqrt{gh}}$ Quelle est la dimension de Fr ? que peut-on dire de Fr dans le cas des régimes fluvial et torrentiel ?

11) On se place dans le cas où $Fr < 1$. Montrer que v passe par un extremum en $x=x_m$. Préciser la nature de cet extremum.

12) Quelles sont les évolutions de $h(x)$ et de $z(x)=e(x)+h(x)$ avec x ? Représenter l'allure de la surface du canal au niveau du franchissement de la bosse.

13) Qualitativement, expliquer ce que l'on observerait dans le cas où $Fr > 1$.

Exo 10



Dans un référentiel galiléen, on considère une large cuve cylindrique ouverte de section constante S , pourvue d'un tuyau d'évacuation horizontal de petite section constante s et de longueur L . A l'instant initial, la cuve est remplie jusqu'à la cote h par rapport au fond de la cuve. Le tuyau est placé à la cote h_0 . Le fluide considéré est parfait et incompressible de masse volumique ρ . Tout le système est placé à la pression atmosphérique (surface libre de la grande cuve et sortie du tuyau).

1) A $t=0$, l'écoulement commence brutalement. Montrer, à partir de l'équation de continuité, que la vitesse d'écoulement dans le tuyau est constante (en considérant que $S \gg s$).

2) Appliquer la relation de Bernoulli entre les points A et B (on néglige la vitesse d'abaissement du fluide dans la cuve devant celle qu'a le fluide dans le tuyau), justifier l'utilisation de cette relation dans ce cas précis.

3) Ecrire et simplifier l'équation d'Euler dans le tuyau en la projetant sur l'axe des x (certains termes sont nuls). Déduire la pression au point C.

8 En se servant des résultats des questions 2 et 3, montrer que la vitesse $v(t)$ dans le tuyau peut se mettre sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre. Calculer cette vitesse dans le cas d'un régime permanent. Conclusion.

Exo 11

On considère une canalisation en T (voir figures) admettant un axe de symétrie Oz. Celle-ci est constituée de trois tubes minces et la partie verticale est plongée dans une grande cuve fixe remplie avec un fluide parfait et incompressible (masse volumique ρ_{liq}). Les deux tubes horizontaux OA et OB, identiques de longueur a et de section constante, sont distants de H de la surface libre du fluide. L'ensemble tourne autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire ω constante par rapport au référentiel terrestre supposé galiléen. Dans tout le problème, on utilisera le référentiel lié au tube (Oxyz).

Ce problème est composé de deux parties indépendantes (voir partie A dans la statique des fluides).

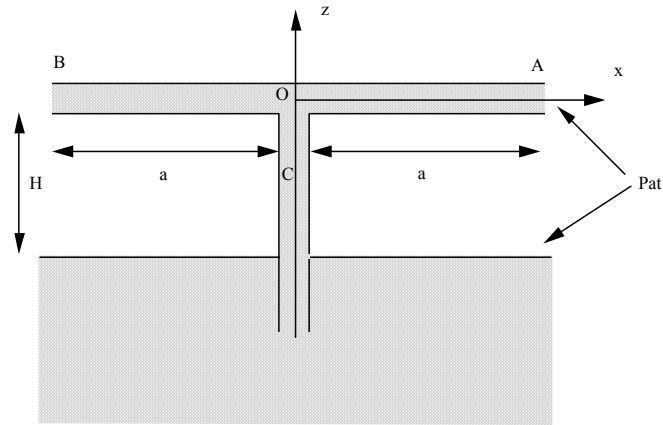
Partie B : dynamique

La canalisation en T est maintenant remplie d'eau (figure 2) et l'on conçoit que de l'eau peut s'écouler par les extrémités A et B de la canalisation.

Pour poursuivre le problème, certaines hypothèses doivent être faites :

- a) l'écoulement est permanent
- b) les lignes de courant sont rectilignes (verticales de C à O et horizontales de C à A et B (on néglige ce qui se passe au voisinage de O)).
- c) La pression en A (ou B) est égale à celle qui règne au niveau de la surface libre du liquide dans la cuve.
 - 1) Justifier les hypothèses a) et c).
 - 2) Il n'est pas possible d'appliquer la relation de Bernoulli établie dans le cours. Pourquoi ?
 - 7 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la particule fluide dans le référentiel lié à la canalisation en T (référentiel non galiléen).
 - 8 Montrer alors que la quantité $\frac{1}{2}\rho v_M^2 + P_M + \rho g z_M - \frac{\rho r_M^2 \omega_M^2}{2}$ est constante le long d'une ligne de courant.
 - 9 Appliquer ce résultat en A et en un point de la surface libre du liquide dans la cuve. Déterminer alors la vitesse en A.

- 10 Montrer que ce dispositif ne peut fonctionner que si la vitesse de rotation est supérieure à une valeur limite que l'on déterminera.



Exo 12

On considère une sphère de centre O et de rayon R immobile dans un référentiel galiléen. Cette sphère est placée dans l'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible (masse volumique ρ). Loin de la sphère, la pression est P_0 et la vitesse du fluide est notée \mathbf{v}_0 . On admet les composantes suivantes du vecteur vitesse exprimées en coordonnées

sphériques :
$$\vec{V} \begin{cases} v_r = v_0 \cos \theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3} \right) \\ v_\theta = -v_0 \sin \theta \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} \right) \end{cases}$$

- 1) Calculer la pression sur la surface de la sphère $P(R)$,
- 2). Justifier la démarche.
- 3) Calculer la force qu'exerce le fluide sur la sphère.
- 4) Discuter le résultat obtenu.

Exo 13

Etude des vents géostrophique et agéostrophique (CAPES blanc 2000)

I. Préambule

L'atmosphère terrestre est une couche gazeuse avoisinant les 1000 km d'épaisseur qui doit son existence aux forces gravitationnelles. On conçoit aisément que les variables dynamiques et thermodynamiques peuvent considérablement évoluer dans ce système.

I.1. Citer quelques variables dynamiques et thermodynamiques permettant de décrire l'atmosphère.

On pourrait supposer qu'un équilibre relatif est établi et que les particules fluides sont immobiles dans le référentiel terrestre.

I.2. Pour quelle raison ceci n'est-il pas vrai ?

I.3. Si nous considérons la figure 1, comment expliquer les mouvements de convection des masses d'air ?

I.4. Ce principe est un peu simpliste et la réalité est plutôt cohérente avec la figure 2. Les courants localisés vers l'équateur et les pôles sont appelés « cellules de Hadley » (1735). Comment peut-on expliquer l'existence de ces cellules ? La dernière cellule dont nous ne discuterons pas, entre la trentième et soixantième latitude a été introduite par Ferrel.

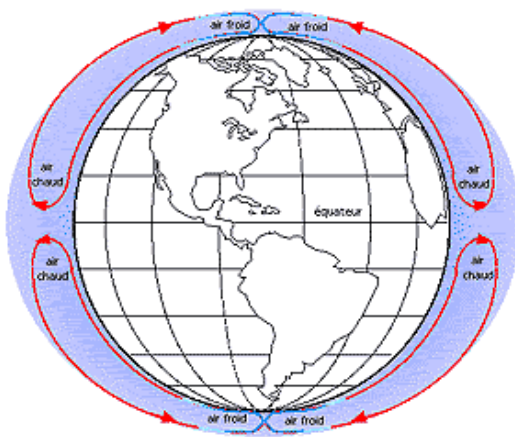


Figure 1 :

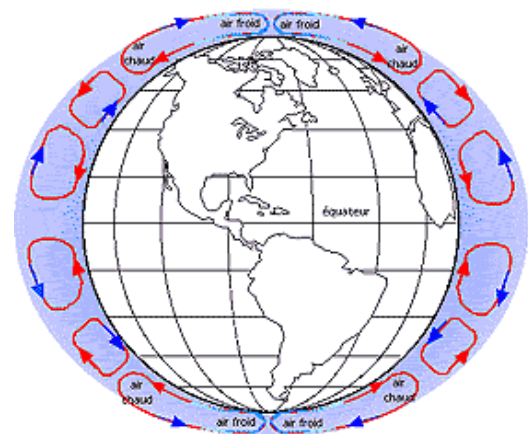


Figure 2

Maintenant que nous avons caractérisé des courants de masses d'air dans l'atmosphère, il est nécessaire de considérer les effets de la rotation de la terre autour de l'axe des pôles sur le mouvement des particules fluides. Les particules fluides sont soumises à leur poids et à la force d'inertie de Coriolis.

I.5. Pourquoi est-il nécessaire de tenir compte des forces d'inertie ?

I.6. Nous n'introduisons pas la force d'inertie d'entraînement. Pourquoi ?

Dans tout ce qui suit, nous allons travailler dans le référentiel terrestre qui est non galiléen.

I.7. Définir un référentiel galiléen.

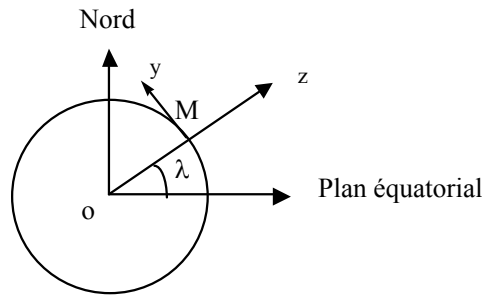


Figure 3

Soit M un point de la surface terrestre (figure 3) situé à une latitude λ , considérons le référentiel $R(Mxyz)$, de base $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ dont

les axes sont respectivement orientés vers l'Est, le Nord et la verticale ascendante.

La Terre tourne autour de l'axe de ses pôles avec une vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T}$ où $T=86164s$. L'air qui compose l'atmosphère est maintenant supposé parfait et incompressible de masse volumique $\rho=1,27kg/m^3$.

I.8. Déterminer l'accélération de Coriolis qui s'exerce sur une particule fluide ayant un vecteur vitesse $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ dans R. On constate que plus on s'éloigne de la Terre plus l'influence de la force de Coriolis est importante. Cette force a aussi une grande importance au niveau de la mer. Pourquoi ?

I.9. Ecrire l'équation d'Euler dans ce même référentiel R.

Si on examine les vitesses, on constate que verticalement, elle est de l'ordre de 50m/h et qu'horizontalement, elle avoisine les 50 km/h. En conséquence, dans toute la suite du problème, nous ne considérerons que les mouvements dans le plan horizontal (Mxy)

I.10. Montrer alors que la composante dans le plan Mxy de la force de Coriolis peut se mettre sous la forme suivante : $\vec{a}_c(Mxy) = \alpha \vec{k} \wedge \vec{v}$ où il faut exprimer α en fonction de la latitude λ et de la période T.

I.11. Il serait à nouveau envisageable que l'atmosphère terrestre soit en équilibre relatif. Comme chacun le sait, la réalité est toute différente avec l'existence d'anticyclones et de dépressions, de tempêtes voire d'ouragans. Quelles sont les origines de ces « perturbations » ?

I.12. Dans un anticyclone (au contraire de la dépression), l'air

descend dans la partie centrale et va vers l'extérieur au niveau du sol. A partir de l'expression de l'accélération de Coriolis, donner le sens de rotation de la masse d'air dans l'hémisphère nord.

II. Les vents géostrophiques

Pour simplifier, nous allons tout d'abord raisonner sur un écoulement permanent et supposer que le mouvement des particules fluides est rectiligne uniforme. Ce vent, de vitesse \vec{v}_g , est appelé « vent géostrophique ».

II.1. Exprimer les composantes v_x et v_y de \vec{v}_g en fonction de $\alpha, \rho, \frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial P}{\partial y}$.

II.2. Montrer que l'on peut écrire : $\vec{v}_g = \frac{\vec{k} \wedge \overrightarrow{\text{grad}P}}{\alpha \rho}$. En déduire la direction de \vec{v}_g par rapport aux isobares.

II.3. Déterminer le module de \vec{v}_g en fonction de α, ρ et de la composante de $\overrightarrow{\text{grad}P}$ dans le plan (Mxy).

II.4. Calculer le module de \vec{v}_g en considérant que $\lambda=30^\circ$ et deux lignes isobares séparées par 5 millibars sont distantes de 300km.

III. Les vents agéostrophiques

On suppose maintenant que le champ des vitesses est uniforme (toujours dans le plan Mxy), que les isobares restent équidistantes et qu'elles sont dirigées selon l'axe My. La distance entre les isobares peut évoluer en fonction du temps.

III.1. Projeter l'équation d'Euler, puis déterminer $\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2}$ en fonction de $\alpha, \rho, v_x, v_y, \frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial P}{\partial x})$

III.2. Nous allons maintenant décomposer le vecteur vitesse et écrire : $\vec{v} = \vec{v}_a + \vec{v}_g$ où \vec{v}_g et \vec{v}_a représentent respectivement les composantes géostrophique et agéostrophique. En supposant un régime très lentement variable (dévires secondes par rapport au temps négligeables), déterminer ces deux composantes en vous servant des résultats obtenus dans la partie II. Que peut-on dire de leur direction ?

III.3. La distance entre deux lignes isobares séparées par 5 millibars est de 300km à 14h (nous reprenons le cas de la question II.4.) et de 200km à 18h. Calculer les composantes géostrophique et agéostrophique à 18h et l'angle de rotation du vent entre 14 et 18h.

Correction :

I. Préambule

I.1. variables dynamiques : pression, masse volumique, vitesse...
thermodynamiques : température, degré d'humidité.

I.2. le soleil et son rayonnement

I.3. équateur, air chaud qui monte pôle air froid qui descend et pour conservation mouvement...

I.4. En fait, l'air se refroidit et se réchauffe beaucoup plus vite, il redescend et monte donc beaucoup plus tôt

I.5. A l'échelle de l'atmosphère terrestre (grande dimensions) et compte tenu des vitesses des vents, il n'est pas raisonnable de les négliger.

I.6. D'une part, elle est comprise dans le poids (poids = gravitation + entraînement). En outre, on pourrait la négliger : Coriolis varie comme ω et entraînement varie comme ω^2 avec ω est très petit ($<10^{-4}$ rad/s).

I.7. Définir un référentiel galiléen. Souvent dit en cours.

I.8. Déterminer l'accélération de Coriolis : $\vec{a}_c = \begin{pmatrix} 2\omega(v_z \cos \lambda - v_y \sin \lambda) \\ 2\omega v_x \sin \lambda \\ -2\omega v_x \cos \lambda \end{pmatrix}$.

On constate que plus on s'éloigne de la Terre plus l'influence de la force de Coriolis est importante : A la surface de la Terre, les forces de frottements (viscosité) sont importantes. Cette force a aussi une grande importance au niveau de la mer. Pourquoi ? De la même manière, la surface de la mer est relativement lisse donc beaucoup moins d'influence de la friction qu'avec des montagnes par exemple.

I.9. $\rho \left[\frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}(v^2) + \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}) \wedge \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right] = \rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}(P) - \rho \vec{a}_c$

I.10. $\vec{a}_c(M_{xy}) = \begin{pmatrix} -2\omega v_y \sin \lambda \\ 2\omega v_x \sin \lambda \end{pmatrix}$ donc $\alpha = \frac{4\pi \sin \lambda}{T}$

I.11. Quelles sont les origines de ces « perturbations » ? Les différences de températures. Le problème vient des masses d'air chaudes et froides. Les 1ères montent les 2èmes descendent et il y a un perpétuel ré-équilibre de l'atmosphère.

I.12. Il suffit de faire un dessin et de tracer quelques vecteurs vitesses et de regarder la force de Coriolis. Pour l'anticyclone dans l'hémisphère nord, l'enroulement est dans le sens des aiguilles d'une montre.

II. Les vents géostrophiques

II.1. On reprend l'équation d'Euler et écrit que l'accélération est nulle. Il

reste : $\rho \vec{g} - \overrightarrow{\text{grad}}P - \alpha \rho \vec{k} \wedge \vec{v} = \vec{0}$. On arrive alors à $\begin{pmatrix} v_x = -\frac{1}{\rho \alpha} \frac{\partial P}{\partial y} \\ v_y = \frac{1}{\rho \alpha} \frac{\partial P}{\partial x} \end{pmatrix}$

II.2. Montrer que l'on peut écrire : $\vec{v}_g = \frac{\vec{k} \wedge \overline{\text{grad}P}}{\alpha \rho}$. En déduire la direction de \vec{v}_g par rapport aux isobares. Il est parallèle aux lignes isobares.

II.3. $\|\vec{v}_g\| = \frac{\|\overline{\text{grad}P}\|}{\alpha \rho}$.

II.4. 65km/h

III. Les vents agéostrophiques

III.1. $\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) - \alpha^2 v_x \frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = \frac{\alpha}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \alpha^2 v_y$,

III.2. Régime permanent (quasiment) $v_x=0$ et $v_y=v_g$. Direction évidente. Nord pour v_g et ouest pour v_a .

III.3. $v_g=27\text{m/s}$ et $v_g=8,54\text{m/s}$. Le vent a donc tourné d'un angle $\tan\Theta=-8,57/27$. Donc, $\Theta=17^\circ$ vers le nord-ouest.