ISARA-Lyon - 1A - P43 F. BILLY
Semestre 1 - Examen n° 2 01/02/2011 (8h30 à 11h30)

# Mathématiques

*Aucun document n'est autorisé. Seules les calculettes figurant sur la liste sont admises dans la salle d'examen.*
*Les exercices proposés sont indépendants ; le barème est donné **à titre purement indicatif**.*
*Les **résultats** doivent être **obligatoirement encadrés**. S'il y a lieu, les calculs littéraux et les applications numériques seront clairement différenciés.*
*La **clarté de la présentation**, la **cohérence du raisonnement** ainsi que la **qualité de la rédaction** entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

***Un formulaire est fourni en Annexe, à la fin du sujet.***

**Exercice 1 - Question de cours : valeur moyenne d'une fonction** (1,5 points)

1. Donner la définition de la valeur moyenne d'une fonction $f$.
2. On considère la fonction définie par $f(x) = e^{-2x}$.
   a) Calculer la valeur moyenne de $f$ sur $[0\,;\,10]$.
   b) Déterminer, en fonction de $n$, la valeur moyenne de $f$ sur l'intervalle $[n\,;\,n+1]$.

**Exercice 2 - Equation différentielle du 1^er ordre** (5,5 points)

On donne l'équation différentielle ***(E)*** suivante :

$$(1-x^2)\,y' - 2xy = 1$$

1. Effectuer le bilan de cette équation différentielle.
2. a) $\forall x \in ]-1;1[$, résoudre ***(E)***.
   b) Parmi les fonctions solutions, déterminer la solution unique $z$ telle que $z(0) = 1$.
   On fera en sorte d'exprimer $z(x)$ sous sa forme la plus simple possible.
3. En considérant maintenant $x \in ]-\infty;-1[$, résoudre de nouveau ***(E)***.
4. Comparer les solutions trouvées aux questions 2.a) et 3.
   Enoncer une conclusion finale à cet exercice.

**Exercice 3 - Un peu de physique... "spéciale dédicace" à JNG** (2 points)

En électricité, la **valeur efficace** d'un courant variable au cours du temps est, par définition, la moyenne quadratique (dite aussi "valeur RMS", de l'anglais *Root Mean Square*) de l'intensité, calculée sur une période T.
En régime sinusoïdal, on a ainsi :

$$I_{eff} = \sqrt{< I^2 >}$$

En appelant $I_{max}$ l'amplitude du signal, $\omega$ sa pulsation, $\Phi$ sa phase, $T$ sa période, et bien sûr la **variable t** qui désigne le temps, on a :

$$< I^2 > = \frac{1}{T}\int_0^T I_{max}^2\,\sin^2(\omega t + \Phi)\,dt$$

On rappelle que $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

T.S.V.P. --→

1. Calculer $< I^2 >$.
2. En déduire $I_{eff}$ en fonction de $I_{max}$.

**Exercice 4 - Intégration de fonctions hyperboliques** (4 points)

Soit la fonction $f$ définie comme suit :

$$f(x) = \frac{3\cosh^2(x)}{\cosh(x) - \sinh(x)}$$

1. a) Exprimer $f(x)$ en faisant apparaître la fonction exponentielle.
   On donnera la forme développée de cette expression.
   b) En déduire (en justifiant la réponse) l'ensemble de définition de $f$.
   c) Donner l'expression des primitives $F$ de $f$.
   d) Calculer :
   $$I = \int_0^1 f(x)\, dx$$
   On demande la valeur exacte de cette intégrale.
2. A partir du résultat du 1.c), exprimer $F(x)$ en faisant apparaître les fonctions cosh et sinh.

**Exercice 5 - Equation différentielle du second ordre** (3 points)

Après avoir effectué le bilan de l'équation différentielle suivante, résoudre celle-ci sur $\mathbb{R}$ :

$$y'' + 2y' + 2y = (x+1)e^{-x} \qquad (E)$$

**Exercice 6 - Décomposition en éléments simples & intégration** (4,5 points)

On cherche à calculer l'intégrale suivante :

$$K = \int_3^5 \frac{4x^3 - 8x^2 + 15x - 5}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2}\, dx$$

1. On considère le polynôme $B(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2 \quad (x \in \mathbb{R})$.
   Trouver deux racines évidentes de $B$, en déduire la factorisation au maximum de $B(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit la fraction rationnelle $P(x) = \dfrac{4x^3 - 8x^2 + 15x - 5}{x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2}$.
   a) Cette fraction rationnelle admet-elle une partie entière ? Justifier...
   b) Effectuer la décomposition de $P$ en éléments simples.
3. Donner l'ensemble des primitives de $P$.
4. En déduire la valeur de $K$.

---

**ANNEXE : Formulaire de trigonométrie**

- $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

---