ISARA-Lyon / 1A / $40^{\text{ème}}$ promotion
S1 / Examen 2

F. BILLY
05/02/2008 (8h à 11h)

Mathématiques

Aucun document n'est autorisé. Seules les calculettes figurant sur la liste sont admises dans la salle d'examen.
*Les exercices proposés sont indépendants ; le barème est donné **à titre purement indicatif**.*
*Les **résultats** doivent être **obligatoirement encadrés**. S'il y a lieu, les calculs littéraux et les applications numériques seront clairement différenciés.*
***La clarté de la présentation**, la **cohérence du raisonnement** ainsi que la **qualité de la rédaction** entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

Exercice 1 - Trigonométrie hyperbolique : quelques calculs... (3 points)

On considère $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$a = \ln\left(\tan\left(\frac{b}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

(on ne cherchera pas à déterminer les valeurs interdites de b)

1. Montrer que $\cosh(a) = \dfrac{1}{\cos(b)}$.
2. De la même façon, calculer $\sinh(a)$ en fonction de b.
3. Déduire des questions précédentes la valeur de $\tanh(a)$ en fonction de b.

<u>NB</u> *:* quelques formules de trigonométrie sont fournies en Annexe.

Exercice 2 - Equation différentielle 1 (3,5 points)

Soit l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2y' + 2y = 2x - \sin x \qquad (E)$$

1. Préciser les caractéristiques de *(E)*.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ cette équation différentielle.

Exercice 3 - Equation différentielle 2 (2,5 points)

Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$x\,y' - 2y = \sqrt{x}$$

Exercice 4 - Equation différentielle 3 (3 points)

Soit ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts.
Déterminer la fonction y vérifiant :

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

T.S.V.P. --→

Exercice 5 - Eléments simples et intégration (5 points)

1. On considère le polynôme $B(x) = x^3 + 8 \quad (x \in \mathbb{R})$.
   Donner une racine évidente r de B, puis factoriser B au maximum sur $\mathbb{R}$ (on pourra, par exemple, effectuer la division euclidienne $B(x)/(x-r)$).
2. Soit la fraction rationnelle $P(x) = \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8} \quad (x \in \mathbb{R})$.
   Préciser la nature des éléments simples de P, puis effectuer la décomposition.
3. Calculer $I = \int P(x)\,dx$.
4. En déduire la valeur de $J = \int_{-1}^{1} \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,dx$.

Exercice 6 - Intégration de fonctions hyperboliques (2,5 points)

1. Calculer $I = \int \frac{\cosh(x)}{\cosh(x)+\sinh(x)}\,dx$.
2. Exprimer $\cosh(2x)$ et $\sinh(2x)$; en déduire une autre écriture de la primitive précédemment calculée.

Exercice 7 - Tangente à une ellipse (2,5 points)

Soit la fonction $z = f(x,y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (x-2)^2 + 3(y-7)^2$$

et l'ellipse Γ d'équation :

$$(x-2)^2 + 3(y-7)^2 = 1$$

1. Que représente Γ pour la fonction f ?
2. Vérifier que $A(\frac{5}{2}; \frac{13}{2}) \in \Gamma$.
3. Donner une équation de la tangente à Γ au point A.

ANNEXE : Formulaire de trigonométrie

- $\cos^2(x) = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$
- $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$
- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$
