Une école d'ingénieurs au coeur de la vie

Mardi 29 mai 2007 : 8h00-1

$1^{ère}$ année ; $39^{ème}$ promotion

MATHEMATIQUES
EXAMEN N°3

L. BISIAUX

Documents interdits - Calculatrice autorisée : Casio fx 92 ou TI 36XII

Le sujet comporte 4 exercices indépendants.

*La **clarté de la présentation** et la **qualité de la rédaction** entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

EXERCICE 1 : (3,5 points)

1. Tracer le domaine D du plan xOy défini par $y \leq x^2$, $x \leq 2$, $y \geq 1$.

2. Calculer $I = \iint_D (x+y)dxdy$.

EXERCICE 2 : (3,5 points)

Donner, en rappelant les règles utilisées, les développements limités au voisinage de x_0 à l'ordre n de chacune fonctions suivantes

1. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ — $x_0 = 0$, $n = 7$
2. $f(x) = e^{\cos x}$ — $x_0 = 0$, $n = 4$

EXERCICE 3 : (7 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application linéaire associée de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ muni de sa base canonique B.

I- Inverse.

1) Calculer, après en avoir justifié l'existence, l'inverse de la matrice A.

2) Quel vecteur de $\mathbf{R}^3$ a pour image le vecteur $\vec{u}(1;1;1)$ par f ?

II- Diagonalisation.

1) En remarquant que 1 est racine du polynôme caractéristique $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$, déterminer λ_1, λ_2, λ_3 les valeurs propres de f (dans l'ordre croissant).

2) Donner 3 vecteurs propres associés $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ à coordonnées entières, puis la matrice de passage P de l base canonique à la base de vecteurs propres B'.

3) Donner la matrice D de f dans la base B'.

III- Résolution d'un système différentiel.

Déduire de la partie II- la résolution du système :

$$\begin{cases} x'(t) = z(t) \\ y'(t) = x(t) \\ z'(t) = 7x(t) - 6y(t) \end{cases}$$

où x, y et z désignent des fonctions dérivables d'une variable réelle t.

EXERCICE 4 : (6 points)

Dans cet exercice, on étudie les suites définies par : $u_{n+1} = au_n + bv_n$, $v_{n+1} = v_n$ avec u_0 et v_0 les premiers termes réels et un réel non nul et différent de 1. Pour cela on considérera la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui fait passer du vecteur colonn $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ au vecteur colonne $U_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$. On a alors $U_{n+1}=A\times U_n$

1) Montrer que les valeurs propres de A sont : $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = 1$, puis calculer des vecteurs propres associés $\vec{u}$ ($\vec{v}$ les plus simples possibles.
2) Donner la matrice de passage P de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ à la base de vecteurs propres puis calculer P^{-1} après ε avoir justifié l'existence.
3) Donner la matrice diagonalisée D puis en déduire A^n en fonction de n.
4) Montrer que pour tout entier n, $U_n = A^n \times U_0$.
5) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
6) Dans cette question, on suppose que $|a| < 1$. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Formulaire :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+x^{2n-1}\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-2}}{(2n-2)!}+x^{2n-2}\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n x^n}{n}+x^n\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x) \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0.$$