

1<sup>ère</sup> année ; 39<sup>ème</sup> promotion

Mardi 30 janvier 2007 : 8 h 00 – 11 h 00

**MATHEMATIQUES**

**EXAMEN N°2**

L. BISIAUX

*Documents interdits - Calculatrice interdite - Le sujet comporte 4 exercices indépendants.*

*La clarté de la présentation et la qualité de la rédaction entreront pour une part importante dans l'évaluation de la copie.*

**EXERCICE 1 : (4 points)**

*Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il s'est retiré 0,5 point par réponse fautive. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro. On cochera l'énoncé les réponses exactes.*

On pose  $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2}$ .

1. La forme algébrique de  $z^2$  est :

☐  $2\sqrt{2}$

☐  $2\sqrt{2} - 2i\sqrt{2}$

☐  $2 + \sqrt{2} + i(2 - \sqrt{2})$

☐  $2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2.  $z^2$  s'écrit sous forme exponentielle :

☐  $4e^{i\frac{\pi}{4}}$

☐  $4e^{-i\frac{\pi}{4}}$

☐  $4e^{i\frac{3\pi}{4}}$

☐  $4e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

3.  $z$  s'écrit sous forme exponentielle :

☐  $2e^{i\frac{7\pi}{8}}$

☐  $2e^{i\frac{\pi}{8}}$

☐  $2e^{i\frac{5\pi}{8}}$

☐  $2e^{i\frac{3\pi}{8}}$

4.  $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$  et  $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$  sont les cosinus et sinus de :

☐  $\frac{7\pi}{8}$

☐  $\frac{5\pi}{8}$

☐  $\frac{3\pi}{8}$

☐  $\frac{\pi}{8}$

**EXERCICE 2 : (3 points)**

1) Déterminer les racines carrées de  $i$  sous forme algébrique.

2) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :  $z^2 + 2z + 1 - i = 0$

**EXERCICE 3 : (6 points)**

1. Développer  $(x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$

2. En déduire la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle  $\frac{1}{x^4 + 4}$

3. Calculer une primitive  $\int \frac{dx}{x^4 + 4}$  de  $x \mapsto \frac{1}{x^4 + 4}$

4. En déduire  $\int_0^M \frac{dx}{x^4 + 4}$  puis  $\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_0^M \frac{dx}{x^4 + 4}$

**EXERCICE 4 : (7 points)**

1) a) Linéariser  $\cos^4 x$

b) Calculer  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \, dx$ .

2) a) Calculer  $J = \int \frac{2x+3}{x^2-5x+6} dx$

b) Calculer  $K = \int \frac{(x+5)dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$

3) Calculer  $L = \int_2^3 \frac{x^3}{(x^2-1)^2} dx$  en procédant au changement de variable  $t = x^2$  puis en décomposant la fraction obtenue en éléments simples.

**Formulaire :**

$$\operatorname{Arctan}'x = \frac{1}{1+x^2} ; \operatorname{Arcsin}'x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} ; \operatorname{Arccos}'x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} ; \operatorname{Argsh}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} ; \operatorname{Argch}'x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} ; \operatorname{Argth}'x = \frac{1}{1-x^2}$$