MINI-PROJET MINES PARISTECH – OPTIMISATION

MINES ParisTech
`http://campus.mines-paristech.fr` *2020-2021*

Ce mini-projet, à effectuer en binôme au sein du même groupe de PC, fera l'objet d'un rapport incluant notamment équations et graphiques obtenus par des simulations sous Python. La forme de ce rapport est laissée libre (pdf, notebook, version papier...).

Au blé d'or

On s'intéresse dans ce sujet à la gestion d'une boulangerie, qui veut planifier ses achats de matière première et la quantité de fabrication de ses baguettes et viennoiseries. Cette boulangerie réalise sur place des baguettes, des pains au chocolat et des croissants.

On se fournit en m matières premières pour fabriquer p produits. On note r_i $(i = 1, \dots, m)$ la quantité commandée de la matière première i et q_j la quantité fabriquée du produit j. Pour produire une unité du produit j $(j = 1, \dots, p)$, on suppose que l'on a besoin d'une quantité a_{ij} de la matière première i. En définissant la matrice $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{mp}(\mathbb{R})$, $r = (r_i) \in \mathbb{R}^m$ et $q = (q_j) \in \mathbb{R}^p$, ceci se traduit par la relation

$$r \geq Aq \tag{1}$$

Enfin, on note d_j la demande pour le produit $j = 1, \dots, m$, v_j son prix de vente et c_i le coût unitaire d'achat de la matière première i. On cherche alors à maximiser les revenus de la boulangerie, qui s'expriment comme

$$v^T \min\{q, d\} - c^T r \tag{2}$$

où $v = (v_j) \in \mathbb{R}^p$, $d = (d_j) \in \mathbb{R}^p$, $c = (c_i) \in \mathbb{R}^m$ et le min s'entend comme le minimum composante par composante cad $\min\{q, d\} = (\min\{q_i, d_i\})_{1 \leq i \leq p}$.

1 Etude du problème d'optimisation

1. Interpréter le coût (2) et en particulier le terme $\min\{q, d\}$.
2. Quelle difficulté présente ce dernier terme dans le cadre d'un algorithme d'optimisation ?
3. En lieu et place de (2), on se propose plutôt de maximiser la fonction
$$v^T h(q, d) - c^T r \tag{3}$$
où $h : \mathbb{R}^{2p} \to \mathbb{R}^p$ a pour i^{me} composante
$$h_i(q, d) = \frac{q_i e^{-\alpha q_i} + d_i e^{-\alpha d_i}}{e^{-\alpha q_i} + e^{-\alpha d_i}} \tag{4}$$
avec $\alpha > 0$ une constante donnée. Justifier que, pour $\alpha \gg 1$, h est une bonne approximation de la fonction min. Quel intérêt a-t-on à considérer ce problème approché plutôt que le problème originel ?
4. On s'intéresse au problème approché. Formuler le problème d'optimisation à résoudre sous la forme
$$\min_{c(z) \leq 0} f(z) \tag{5}$$
On précisera les variables de décision z, leur nombre n, les contraintes c ainsi que la fonction objectif f à minimiser.

2 Etude et résolution numérique

5. Quelles méthodes de résolution peuvent être envisagées pour ce problème ?
6. On s'intéresse à $p = 3$ produits (baguettes de pain, pains au chocolat et croissants) et à $m = 5$ ingrédients (levure, farine, sucre, beurre et chocolat). Développer un algorithme de résolution pour les valeurs numériques suivantes

$$\alpha = 0.1\,, \quad c = 1 \cdot 10^{-3} \times \begin{pmatrix} 30 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}\,, \quad v = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.5 \\ 1.1 \end{pmatrix}\,, \quad d = \begin{pmatrix} 400 \\ 67 \\ 33 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{pmatrix} 3.5 & 2 & 1 \\ 250 & 80 & 25 \\ 0 & 8 & 3 \\ 0 & 40 & 10 \\ 0 & 8.5 & 0 \end{pmatrix} \tag{6}$$

   où c est en euro/g, v en euro et A en g/unité. En utilisant des conditions initiales nulles. Les résultats obtenus sont-ils conformes à votre intuition ?
7. On considère maintenant le fait la demande est mal connue. On considère K scénarios possibles, correspondant à K valeurs possibles d^k de d, auxquels on attribue une probabilité π^k de réalisation. On souhaite maximiser l'espérance du coût .
   (a) Formuler l'écriture de cette variante du problème d'optimisation.
   (b) Modifier votre algorithme précédent pour résoudre ce problème numériquement avec les mêmes valeurs que précédemment et $K = 3$ scénarios de demande

$$d^1 = \begin{pmatrix} 400 \\ 67 \\ 33 \end{pmatrix}\,, \quad d^2 = \begin{pmatrix} 500 \\ 80 \\ 53 \end{pmatrix}\,, \quad d^3 = \begin{pmatrix} 300 \\ 60 \\ 43 \end{pmatrix}\,, \tag{7}$$

   de probabilité $\pi^1 = 0.5$, $\pi^2 = 0.3$ et $\pi^3 = 0.2$. Commenter les résultats obtenus.
8. On suppose que l'on ne connaît pas la demande au moment où l'on passe la commande des matières premières, mais qu'elle est en revanche précisément connue lorsque l'on décide de la quantité de produits à fabriquer. On se propose donc d'adopter une stratégie en deux temps. On choisit tout d'abord la quantité de matière première à commander à l'aide de l'algorithme développé à la question précédente. Puis, à quantité de matière première fixe et à demande d connue, on décide de la quantité de produit à fabriquer en minimisant

$$\|q - d\|^2 - v^T h(q, d) \tag{8}$$

   avec les contraintes correspondantes.
   (a) Interpréter le premier terme dans le coût (8).
   (b) Modifier votre algorithme précédent pour inclure cette seconde étape. Comparer, dans le cas où la demande effectivement réalisée est $d = d^3$, la quantité de produit fabriquée avec celle qui était planifiée.

3 Etude du problème non-régularisé

On considère maintenant le problème non-approché initial.

9. Proposer une méthode de résolution adaptée au problème initial.
10. Implémenter cette méthode sur l'étude de cas de la question 6 et comparer les résultats obtenus.