

# Théorie du transport optimal

Racine Florian

November 27, 2022

# Table des matières

## Chapter 1

**Introduction** \_\_\_\_\_ Page **2** \_\_\_\_\_

1.1 Formulation du problème \_\_\_\_\_ 2 \_\_\_\_\_

## Chapter 2

**Modélisation** \_\_\_\_\_ Page **3** \_\_\_\_\_

## Chapter 3

**La formulation du problème de transfert optimal de Monge** \_\_\_\_\_ Page **5** \_\_\_\_\_

# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 Formulation du problème

#### Question 1

Quelle est la façon optimal de transporter un tas de sable dans un trou ?

#### Question 2

Comment constuire un chateau de sable d'une forme données à partir d'un tas de sable ?

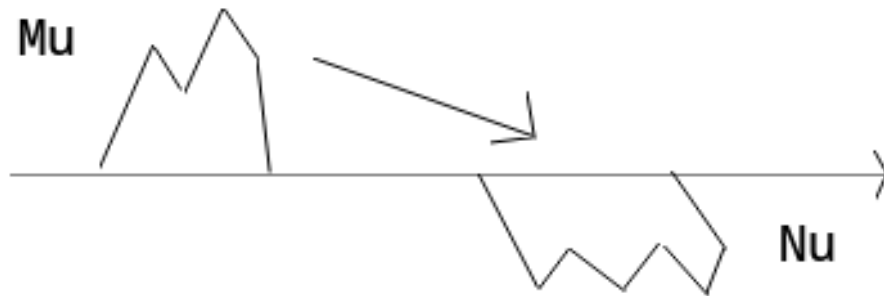


Figure 1.1: Transporter un tas de sable dans un trou

#### Note:-

Avec le même nombre de grain de sable et la même masse.

## Chapter 2

# Modélisation

$\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

### Definition 2.0.1

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu[A]$  décrit quelle quantité de sable est dans  $A$ .

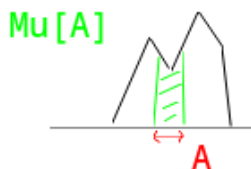


Figure 2.1:  $\mu[A]$

### Definition 2.0.2

Cout infinitésimal :

$$C : \begin{cases} \mathbb{R} * \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto C(x, y) \end{cases}$$

Cout de transporter un grain de sable de  $x$  vers  $y$ .

### Question 3

Comment transporter un tas de sable avec un cout global minimal ?

### Definition 2.0.3

Un plan de transport entre les mesures  $\mu$  et  $\nu$  est une mesure de probabilité :  $\Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} * \mathbb{R})$  à pour marginale  $\mu$  et  $\nu$ .

### Note:-

$\Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} * \mathbb{R})$  à pour marginal  $\mu$  et  $\nu$

$$\Leftrightarrow \forall A, B \text{ ensemble mesurable avec } A \subset \mathbb{R} \text{ et } B \subset \mathbb{R} \begin{cases} \Pi[A \times \mathbb{R}] = \mu[A] \\ \Pi[\mathbb{R} \times B] = \nu[B] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in C^0(\mathbb{R}), \Psi \in C^0(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \varphi(x) + \Psi(y) d\Pi(x, y) = \int \varphi(x) d\mu(x) + \int \Psi(y) d\nu(y)$$

**Note:-**

On notera,  $\Pi(\mu, \nu) = \{ \Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) | \Pi \text{ a pour marginal, } \mu, \nu \}$

On remarquera que,  $\Pi(\mu, \nu) \neq \emptyset$

$I[\Pi] = \int_{\mathbb{R}^2} C(x, y) d\Pi(x, y)$  Le cout total associé au plan de transport optimal.

On cherche,  $\tau_c(\mu, \nu) = \inf_{\Pi \in \Pi(\mu, \nu)} (I[\Pi])$

**Definition 2.0.4**

S'il existe  $\Pi_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  tel que  $I[\Pi_0] = \tau_c(\mu, \nu)$

$\Pi_0$  est appelé un **plan de transfert optimal**

**Example 2.0.1** (Exemple trivial (Kotorovitch))

$$a < b$$

$$c < d$$

$$C(x, y) = |x - y|^2$$

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_b)$$

$$\nu = \frac{1}{2}(\delta_c + \delta_d)$$

**Question 4**

$$\Pi(\mu, \nu) = ?$$

**Solution:**  $\Pi_\alpha = \frac{1}{2}(\alpha\delta_{(a,c)} + (1-\alpha)\delta_{(a,d)} + (1-\alpha)\delta_{(b,c)} + \alpha\delta_{(b,d)})$   $\Pi(\mu, \nu) = \{\Pi_\alpha | \alpha \in [0, 1]\}$

**Question 5**

Calculer :  $I[\Pi] \forall \Pi \in \Pi(\mu, \nu)$

**Solution:**  $I[\Pi_\alpha] = \int_{\mathbb{R}^2} C(x, y) d\Pi_\alpha(x, y)$

$$I[\Pi_\alpha] = \frac{1}{2}(\alpha C(a, c) + (1-\alpha)C(a, d) + (1-\alpha)C(b, c) + \alpha C(b, d))$$

$$I[\Pi_\alpha] = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \alpha(ac + bd) - (1-\alpha)(ad + cb)$$

**Question 6**

Trouver :  $\tau_c(\mu, \nu)$

**Solution:**  $P(\alpha) = \frac{\partial I[\Pi_\alpha]}{\partial \alpha} \implies P(\alpha) = -ac - bd + ad + cb; \implies P(\alpha) = (d-c)(a-b) < 0$

Donc,  $I[\Pi_\alpha]$  atteint son min en  $\alpha = 1$

$$\Pi_0 = \Pi_{\alpha=1}$$

Donc,  $a \rightarrow c$  et,  $b \rightarrow d$

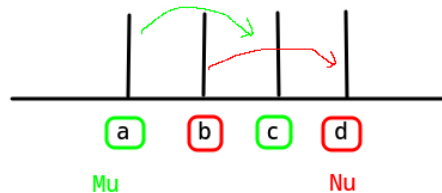


Figure 2.2: Solution

## Chapter 3

# La formulation du problème de transfert optimal de Monge

### Note:-

On autorise pas le fait de couper les masses. A chaque  $x$  est associé une unique  $y$ .  
On dit que  $T$  envoie  $\mu$  sur  $\nu$  et on note :  $T\#\mu = \nu$

### Proposition 3.0.1

$\forall A \subset \mathbb{R}$  partie mesurable :  $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$

$\Leftrightarrow$

### Proposition 3.0.2

$\forall \varphi$  continue :  $\int_{\mathbb{R}} \varphi(y) d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}} (\varphi \circ T)(x) d\mu(x)$   
 $\tau_c^M(\mu, \nu) = \inf_{T: T\#\mu = \nu} I[T]$   
 $I(T) = \int_{\mathbb{R}} C(x, T(x)) d\mu(x)$

### Note:-

Solution de cout optimal d'après Kantorovitch  $\leq$  Solution de cout optimal d'après Monge  
Dans le première exemple ils coïncident.

### Note:-

Kantorovitch définit un problème linéaire en  $\Pi$ .  
Monge définit un problème non linéaire en  $T$ .

### Note:-

Problème de Kantorovitch admet toujours une solution  $\Pi_0$ .  
Problème de Monge n'admet pas toujours de solution n'y même d'application qui envoie  $\mu$  sur  $\nu$ .

### Example 3.0.1

$$\begin{cases} \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ \nu = \delta_a \end{cases}$$

**Kantorovitch** :  $\Pi(\mu, \nu) = \{\mu \otimes \delta_a\}$

**Monge** : Quelles sont les  $T$  tel que  $T\#\mu = \nu$  ?

Il en existe une seule:

$$\forall x|T : \left| \begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & a \\ \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\tau_c^M(\mu, \nu) = \tau_c(\mu, \nu)$$

D'une part :

$$\tau_c^M(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(T(x), x) d\mu(x)$$

$$\tau_c^M(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(0, x) d\mu(x) \text{ D'autre part :}$$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, y) d\Pi(x, y)$$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, y) d(\mu \otimes \delta_a)(x, y)$$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, y) d\mu(x) d\delta_a$$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, 0) d\mu(x)$$

### Example 3.0.2

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \\ \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{y_i} \end{array} \right.$$

Les plans de transport  $\Pi$  entre  $\mu$  et  $\nu$  peuvent être représenté par des matrices bistochastiques de tailles  $n$ .

$$0 \leq \Pi_{i,j} \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^n \Pi_{i,j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^n \Pi_{i,j} = 1$$

#### Note:-

On note  $\mathcal{B}_n$  l'ensemble des matrices bistochastiques.

Soit  $\Pi \in \mathcal{B}_n : I[\Pi] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C(x_i, y_i) \Pi_{i,j}$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \inf_{\Pi \in \mathcal{B}_n} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Pi_{i,j} C(x_i, y_i) \right\}$$

Il s'agit d'un problème linéaire de minimisation sur un ensemble convexe.

### Proposition 3.0.3 Ensemble convexe

$\mathcal{B}_n$  est convexe  $\Leftrightarrow A, B \in \mathcal{B}_n$  alors  $\forall \theta \in [0, 1] \theta A + (1 - \theta)B \in \mathcal{B}_n$

### Definition 3.0.1: Points extremaux

L'ensemble des points extremaux de  $E$  convexe est l'ensemble des  $e \in E$  tel que :

si  $e = \theta e_1 + (1 - \theta)e_2$  avec  $\theta \in [0, 1], e_1 \in E, e_2 \in E$

Alors  $\theta = 0$  ou  $\theta = 1$

### Theorem 3.0.1 Théorème de Choquet

$F$  est linéaire sur un domaine  $K$  convexe et compact, alors  $F$  admet au moins un minimum. Parmi les minimums de  $F$  au moins l'un d'eux est un extrema de  $K$ .

**Theorem 3.0.2** Théorème de Birkhoff

$\mathcal{B}_n$  est convexe et compact.

$\mathcal{B}_n$  admet  $n$  points extrémaux qui sont les matrices de permutations

Ainsi, le min pour le problème de Kantorovitch est atteint pour  $\begin{cases} \Pi_{i,j} = 1 & | \text{ si } j = \sigma(i) \\ \Pi_{i,j} = 0 & | \text{ sinon} \end{cases}$