Théorie du transport optimal

RACINE Florian

November 27, 2022

Théorie du transport optimal

Table des matières

1 Introduction

1.1 Formulation du problème

- Quelle est la façon optimal de transporter un tas de sable dans un trou ?
- Comment constuire un chateau de sable d'une forme données à partir d'un tas de sable ?

2 Modélisation

$\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$; $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Définition : $\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \nu[A]$ décrit quelle quantité de sable est dans A.

Définition : Cout Infinitesimal

$$C : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{R} * \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ (x, y) & \longmapsto & C(x, y) \end{array} \right.$$

Cout de transporter un grain de sable de x vers y.

Problème : Comment transporter un tas de sable avec un cout global minimal ?

Définition : Un plan de transport entre les mesures μ et ν est une mesure de probabilité : $\Pi \in \mathcal{P}(\mathcal{R} * \mathcal{R})$ à pour marginale μ et ν.

Rappel : $\Pi \in \mathcal{P}(\mathcal{R} * \mathcal{R})$ à pour marginal μ et ν

$\Leftrightarrow$ $\forall$A,B enssemble mesurable avec A$\subset \mathcal{R}$ et B $\subset \mathcal{R}$ $\left\{ \begin{array}{l} \Pi[A \times \mathcal{R}] = \mu[A] \\ \Pi[\mathcal{R} \times B] = \mu[B] \end{array} \right.$