

Théorie du transport optimal

Racine Florian

November 30, 2022

Table des matières

Chapter 1

Cours

Page 2

1.1	Introduction	2
	Formulation du problème — 2	
1.2	Modélisation	2
1.3	La formulation du problème de transfert optimal de Monge	4
1.4	La dualité de Kantorovitch	6
	La théorie — 6 • Application(s) — 8	

Chapter 2

TD

Page 10

2.1	TD1	10
-----	-----	----

Chapter 1

Cours

1.1 Introduction

1.1.1 Formulation du problème

Question 1

Quelle est la façon optimal de transporter un tas de sable dans un trou ?

Question 2

Comment construire un chateau de sable d'une forme données à partir d'un tas de sable ?

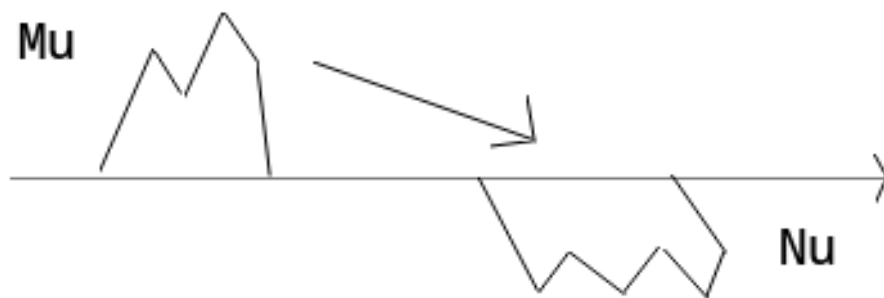


Figure 1.1: Transporter un tas de sable dans un trou

Note:-

Avec le même nombre de grain de sable et la même masse.

1.2 Modélisation

$$\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Definition 1.2.1

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu[A]$ décrit quelle quantité de sable est dans A .

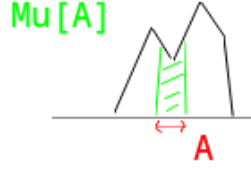


Figure 1.2: $\mu[A]$

Definition 1.2.2

Cout infinitésimal :

$$C : \begin{cases} \mathbb{R} * \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto C(x, y) \end{cases}$$

Cout de transporter un grain de sable de x vers y .

Question 3

Comment transporter un tas de sable avec un cout global minimal ?

Definition 1.2.3

Un plan de transport entre les mesures μ et ν est une mesure de probabilité : $\Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} * \mathbb{R})$ à pour marginale μ et ν .

Note:-

$\Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} * \mathbb{R})$ à pour marginal μ et ν

$$\Leftrightarrow \forall A, B \text{ ensemble mesurable avec } A \subset \mathbb{R} \text{ et } B \subset \mathbb{R} \begin{cases} \Pi[A \times \mathbb{R}] = \mu[A] \\ \Pi[\mathbb{R} \times B] = \nu[B] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in C^0(\mathbb{R}), \Psi \in C^0(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \varphi(x) + \Psi(y) d\Pi(x, y) = \int \varphi(x) d\mu(x)$$

Note:-

On notera, $\Pi(\mu, \nu) = \{ \Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) | \Pi \text{ a pour marginal, } \mu, \nu \}$

On remarquera que, $\Pi(\mu, \nu) \neq \emptyset$

$$I[\Pi] = \int_{\mathbb{R}^2} C(x, y) d\Pi(x, y) \text{ Le cout total associé au plan de transport optimal.}$$

On cherche, $\tau_c(\mu, \nu) = \inf_{\Pi \in \Pi(\mu, \nu)} (I[\Pi])$

Definition 1.2.4

S'il existe $\Pi_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tel que $I[\Pi_0] = \tau_c(\mu, \nu)$

Π_0 est appelé un **plan de transfert optimal**

Exemple 1.2.1 (Exemple trivial (Kotorovitch))

$$a < b$$

$$c < d$$

$$C(x, y) = |x - y|^2$$

$$\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_b)$$

$$\nu = \frac{1}{2}(\delta_c + \delta_d)$$

Question 4

$$\Pi(\mu, \nu) = ?$$

Solution: $\Pi_\alpha = \frac{1}{2}(\alpha\delta_{(a,c)} + (1-\alpha)\delta_{(a,d)} + (1-\alpha)\delta_{(b,c)} + \alpha\delta_{(b,d)})$ $\Pi(\mu, \nu) = \{\Pi_\alpha | \alpha \in [0, 1]\}$

Question 5

Calculer : $I[\Pi] \forall \Pi \in \Pi(\mu, \nu)$

Solution: $I[\Pi_\alpha] = \int_{\mathbb{R}^2} C(x, y) d\Pi_\alpha(x, y)$

$$I[\Pi_\alpha] = \frac{1}{2}(\alpha C(a, c) + (1-\alpha)C(a, d) + (1-\alpha)C(b, c) + \alpha C(b, d))$$

$$I[\Pi_\alpha] = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \alpha(ac + bd) - (1-\alpha)(ad + cb)$$

Question 6

Trouver : $\tau_c(\mu, \nu)$

Solution: $P(\alpha) = \frac{\partial I[\Pi_\alpha]}{\partial \alpha} \implies P(\alpha) = -ac - bd + ad + cb; \implies P(\alpha) = (d-c)(a-b) < 0$

Donc, $I[\Pi_\alpha]$ atteint son min en $\alpha = 1$

$$\Pi_0 = \Pi_{\alpha=1}$$

Donc, $a \rightarrow c$ et, $b \rightarrow d$

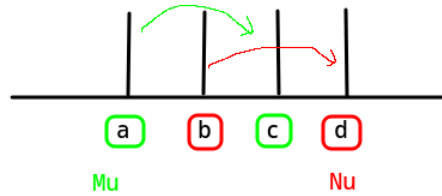


Figure 1.3: Solution

1.3 La formulation du problème de transfert optimal de Monge

Note:-

On autorise pas le fait de couper les masses. A chaque x est associé une unique y .
On dit que T envoie μ sur ν et on note : $T\#\mu = \nu$

Proposition 1.3.1

$$\forall A \subset \mathbb{R} \text{ partie mesurable : } \nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$$

\Leftrightarrow

Proposition 1.3.2

$$\begin{aligned} \forall \varphi \text{ continue} : \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) d\nu(y) &= \int_{\mathbb{R}} (\varphi \circ T)(x) d\mu(x) \\ \tau_c^M(\mu, \nu) &= \inf_{T: \mu \# T = \nu} I[T] \\ I(T) &= \int_{\mathbb{R}} C(x, T(x)) d\mu(x) \end{aligned}$$

Note:-

Solution de cout optimal d'après Kantorovitch \leq Solution de cout optimal d'après Monge
Dans le première exemple ils coïncident.

Note:-

Kantorovitch définit un problème linéaire en Π .
Monge définit un problème non linéaire en T .

Note:-

Problème de Kantorovitch admet toujours une solution Π_0 .
Problème de Monge n'admet pas toujours de solution n'y même d'application qui envoi μ sur ν .

Exemple 1.3.1

$$\begin{cases} \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ \nu = \delta_a \end{cases}$$

Kantorovitch : $\Pi(\mu, \nu) = \{\mu \otimes \delta_a\}$

Monge : Quelles sont les T tel que $T\#\mu = \nu$?

Il en existe une seule:

$$\forall x | T : \begin{cases} x & \longrightarrow & a \\ \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\tau_c^M(\mu, \nu) = \tau_c(\mu, \nu)$$

D'une part :

$$\tau_c^M(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(T(x), x) d\mu(x)$$

$$\tau_c^M(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(0, x) d\mu(x)$$

D'autre part :

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, y) d\Pi(x, y)$$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, y) d(\mu \otimes \delta_a)(x, y)$$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, y) d\mu(x) d\delta_a$$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, 0) d\mu(x)$$

Exemple 1.3.2

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \\ \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{y_i} \end{cases}$$

Les plans de transports Π entre μ et ν peuvent être représenté par des matrices bistochastiques de tailles n .

$$0 \leq \Pi_{i,j} \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^n \Pi_{i,j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^n \Pi_{i,j} = 1$$

Note:-

On note \mathcal{B}_n l'ensemble des matrices bistochastiques.

Soit $\Pi \in \mathcal{B}_n : I[\Pi] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C(x_i, y_i) \Pi_{i,j}$

$\tau_c(\mu, \nu) = \inf_{\Pi \in \mathcal{B}_n} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Pi_{i,j} C(x_i, y_i) \right\}$

Il s'agit d'un problème linéaire de minimisation sur un ensemble convexe.

Proposition 1.3.3 Ensemble convexe

\mathcal{B}_n est convexe $\Leftrightarrow A, B \in \mathcal{B}_n$ alors $\forall \theta \in [0, 1] \theta A + (1 - \theta)B \in \mathcal{B}_n$

Definition 1.3.1: Points extrémaux

L'ensemble des points extrémaux de E convexe est l'ensemble des $e \in E$ tel que :

si $e = \theta e_1 + (1 - \theta)e_2$ avec $\theta \in [0, 1], e_1 \in E, e_2 \in E$

Alors $\theta = 0$ ou $\theta = 1$

Théoreme 1.3.1 Théorème de Choquet

F est linéaire sur un domaine K convexe et compact, alors F admet au moins un minimum. Parmi les minimums de F au moins l'un d'eux est un extréma de K.

Théoreme 1.3.2 Théorème de Birkhoff

\mathcal{B}_n est convexe et compact.

\mathcal{B}_n admet n points extrémaux qui sont les matrices de permutations

Ainsi, le min pour le problème de Kantorovitch est atteint pour $\begin{cases} \Pi_{i,j} = 1 & \text{si } j = \sigma(i) \\ \Pi_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1.4 La dualité de Kantorovitch

1.4.1 La théorie

Théoreme 1.4.1 Dualité de Kantorovitch

$\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n); \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$

C semi continue inférieurement (par exemple C continue)

Note:-

Pour $\Pi \in \Pi(\mu, \nu), I[\Pi] = \int C(x, y) d\Pi(x, y)$

Soit $(\varphi, \psi) \in \phi_c$

$$J(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) d\nu(y)$$

$\phi_c = \{(\varphi, \psi) \in (C^0(\mathbb{R}^n))^2 \text{ tq } \varphi(x) + \psi(y) \leq C(x, y) \text{ presque partout} \}$

Alors, $\inf_{\Pi \in \Pi(\mu, \nu)} I[\Pi] = \sup_{(\varphi, \psi) \in \phi_c} J(\varphi, \psi)$

Note:-

Interprétation :

1. On embauche un transporteur.
2. Il achète de la masse située en x au prix $\varphi(x)$.
3. Il vous débarasse au prix $\int \varphi(x) d\mu(x)$
4. Il vous revend de la masse en y au prix $\psi(y)$
5. On rachète ν au prix $\int \psi(y) d\nu(y)$

On embauche le transporteur sous la condition : $\varphi(x) + \psi(y) \leq C(x, y)$

Proof: D'une part :

Soit $(\varphi, \psi) \in \phi_c$

Soit $\Pi \in \Pi(\mu, \nu) | I[\Pi] = \tau(\mu, \nu)$

$$J(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) d\nu(y) \leq \int C(x, y) d\Pi(x, y) = I[\Pi] = \tau(\mu, \nu) = INF_{\Pi} I[\Pi]$$

Ainsi, $J(\varphi, \psi) \leq INF_{\Pi} I[\Pi]$

D'autre part :

☺

Definition 1.4.1: Les fonction C-concaves (relatif au coût)

Soit, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$

On définit sa fonction C-conjugée par :

$$\varphi^c : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ y & \longmapsto & INF_{x \in \mathbb{R}^n} (C(x, y) - \varphi(x)) \end{cases}$$

On dit que φ est C-concave si $\exists \psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tq $\forall x \in \mathbb{R}^n, \varphi(x) = \psi^c(x)$

Lemme 1.4.1

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \varphi(x) + \varphi^c(y) \leq C(x, y)$
2. $\varphi^c = \varphi^{ccc}$
3. $\varphi = \varphi^{cc} \Leftrightarrow \varphi$ est C-concave

Proof: 1. Par définition, $\forall y, \varphi^c(y) = INF_{x \in \mathbb{R}^n} (C(x, y) - \varphi(x)) \leq C(x, y) - \varphi(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$

Ainsi, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \varphi(x) + \varphi^c(y) \leq C(x, y)$

2. Par définition, $\varphi^{cc}(y) = INF_{x \in \mathbb{R}^n} (C(x, y) - \varphi^c(x)) \geq \varphi(y)$

En effet comme démontré ci-dessus, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \varphi(y) \leq C(x, y) - \varphi^c(x)$

\Rightarrow D'une part, $\varphi^c(x) = INF_y (C(x, y) - \varphi(y)) \geq INF_y (C(x, y) - \varphi^{cc}(y)) = \varphi^{ccc}(x)$

Ainsi, $\varphi^c(x) \geq \varphi^{ccc}(x)$

\Rightarrow Et d'autre part, $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} (C(x, y) - \varphi^c(x)) \leq C(x, y) - \varphi^c(x) \forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$
Donc, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \varphi^c(x) \leq C(x, y) - \varphi^{cc}(x)$
Donc, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \varphi^c(x) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} (C(x, y) - \varphi^{cc}(x)) = \varphi^{ccc}(x)$
Ainsi, $\varphi^c(x) \leq \varphi^{ccc}(x)$

Ce qui montre bien que, $\varphi^c(x) = \varphi^{ccc}(x)$

3. \Rightarrow Si φ est C-concave alors $\exists \psi | \varphi = \psi^c$
Donc, $\varphi^{cc} = \psi^{ccc} = \psi^c = \varphi$
 \Leftarrow Si $\varphi = \varphi^{cc}$, alors $\varphi = (\varphi^c)^c$ Donc φ est C-concave.

⊖

Théoreme 1.4.2

La dualité de Kantorovitch peut être restreinte à des couples de fonction C-conjuguées.
 $SUP_{(\varphi, \psi) \in (C(\mathbb{R}^n)^2)} J(\varphi, \psi) = MAX_{(\psi^c, \psi)} J(\psi^c, \psi)$

Proof: On montre que le sup est un max.

⊖

Corollaire 1.4.1 Les plans de transferts optimaux sont caractérisés par leur support

Si (φ, ψ) est un maximiseur pour le problème de Kantorovitch dual, alors
 $\Pi \in \Pi(\mu, \nu)$ est un minimiseur pour le problème de Kantorovitch primal si et seulement si Π est concentrée sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \varphi(x) + \psi(y) = C(x, y)\}$

1.4.2 Application(s)

Proposition 1.4.1 On considère un objet indexé par j présent en quantité ν_j .

(type(j), quantité(j)) = (j, ν_j)

On considère un consommateur indexé par i présent en quantité μ_i .

(type(i), quantité(i)) = (i, μ_i)

Utilité de l'objet j pour l'agent i .

Hypothèse L'utilité est transférable.

L'objet j a une utilité nette $U_{r,j} - P_j$.

Pour un système de prix P_j , l'agent i choisit l'objet j_p qui maximise $U_{ij} - P_j$.

Transfert optimal: $SUP_{\Pi} \sum_{ij} U_{ij} \Pi_{ij}$ sous la contrainte $\sum_j \Pi_{ij} = \mu_i ; \sum_i \Pi_{ij} = \nu_j$

Note:-

Explication :

$$\mu = \sum_i \mu_i \delta_{x_i}$$

$$\nu = \sum_j \nu_j \delta_{y_j}$$

$$C(i, j) = -u_{i,j}$$

$$I[\Pi] = -\sum_{ij} u_{ij} \Pi_{ij}$$

$$\text{Utilité maximale : } \inf_{\Pi} I[\Pi] = \sup_{\Pi} \{-\sum_i \varphi_i \mu_i - \sum_j \psi_j \nu_j\}$$

$$\text{Problème dual : (D) : } \inf_{P_j} \{\sum_j \nu_j P_j + \sum_i \mu_i \max_j (\nu_j - P_j)\}$$

Definition 1.4.2: Prix d'équilibre

Un système de prix qui satisfait (D) est un prix d'équilibre du problème. Un tel système de prix permet d'atteindre l'optimum global

Note:-

Pour le mar. 29 nov. 2022

Lire Guillaume Carlier, Teaching, Transfert Optimal (Chapitre 3 Matching equilibre)

Faire exercice 5, 6, 8 et 9.

Chapter 2

TD

2.1 TD1

Exercice

Exercice 1. On considère le coût $c(x, y) = |x - y|$. Dans chacun des cas, donner les solutions des problèmes de Monge et de Kantorovitch.

1. $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_3,$
2. $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \nu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1,$
3. $\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2, \quad \nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_3.$

Solution:

1. $0 \geq \alpha \geq \frac{1}{3}; 0 \geq \beta \geq \frac{1}{3}$
 $\frac{1}{6} \geq \alpha + \beta \geq \frac{1}{2}$
 $\Pi_{\alpha, \beta} = \alpha\delta_{(0, -1)} + \beta\delta_{(0, 2)} + (\alpha + \beta)\delta_{(0, 3)}$

2. Equivalent à l'exemple du cours.

Exercice

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(x) = x + 1$, $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $S(x) = 2x$ et $Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $Z(x) = 2 - x$. On définit $\mu = \mathbb{1}_{[0, 1]}$ et $\nu = \mathbb{1}_{[1, 2]}$. A-t-on $T\#\mu = \nu$? $S\#\mu = \nu$? $Z\#\mu = \nu$?

Solution: Soit $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$,

$$\int_{[0, 1]} (\varphi \circ T)(x) d\mu(x) = \int_{[0, 1]} \varphi(1 + x) dx = \int_{[1, 2]} \varphi(y) dy = \int \varphi(y) d\nu(y)$$

$\Rightarrow T\#\mu = \nu$

$$\int_{[0, 1]} (\varphi \circ S)(x) d\mu(x) = \int_{[0, 1]} \varphi(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{[0, 2]} \varphi(y) dy$$

$\Rightarrow S\#\mu = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0, 2]} \Rightarrow S\#\mu = \frac{1}{2}(\mu + \nu) \Rightarrow S\#\mu \neq \nu$

$$\int_{[0, 1]} (\varphi \circ Z)(x) d\mu(x) = \int_{[0, 1]} \varphi(2 - x) dx = \int_{[1, 2]} \varphi(y) dy = \int \varphi(y) d\nu(y)$$

$\Rightarrow Z\#\mu = \nu$

Exercice

Exercice 3. (Non-unicité pour un coût convexe - Book shifting). On définit $\mu = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0, 2]}$ et $\nu = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1, 3]}$ et le coût $c(x, y) = |x - y|$. Soit $T_1(x) = x + 1$ et

$$T_2(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \in [0, 1], \\ x, & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Montrer que T_1 et T_2 sont deux applications optimales.

Solution: Vérifions que :

$$\begin{aligned}
 & T_1 \# \mu = \nu \\
 & \int_{[0,2]} (\varphi \circ T_1)(x) d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_{[0,2]} \varphi(x+1) dx = \frac{1}{2} \int_{[1,3]} \varphi(y) dy = \int \varphi(y) d\nu(y) \\
 & I(T_1) = \int_{\mathbb{R}} C(x, T_1(x)) d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_{[0,2]} |x - T_1(x)| dx = \frac{1}{2} \int_{[0,2]} 1 dx = 1 \\
 & T_2 \# \mu = \nu \\
 & \int_{[0,2]} (\varphi \circ T_2)(x) d\mu(x) = \frac{1}{2} \left(\int_{[0,1]} \varphi(x+2) dx + \int_{[1,2]} \varphi(x) dx \right) = \frac{1}{2} \left(\int_{[2,3]} \varphi(x) dx + \int_{[1,2]} \varphi(x) dx \right) = \frac{1}{2} \int_{[1,3]} \varphi(x) dx \\
 & I(T_2) = \int_{[0,2]} C(x, T_2(x)) d\mu(x) = \frac{1}{2} \int_{[0,1]} |x - T_2(x)| dx + 0 = \frac{1}{2} \int_{[0,1]} 2 dx = 1 \\
 & \text{De façon générale, } T \# \mu = \nu \text{ alors :} \\
 & I(T) = \frac{1}{2} \int_{[0,2]} |x - T(x)| dx \geq \frac{1}{2} \left| \int_{[0,2]} |x| dx - \int_{[0,2]} |T(x)| dx \right| = \frac{1}{2} |2 - 4| = 1
 \end{aligned}$$

Exercice

Exercice 4. (Non existence d'une application de transport). On prend μ la mesure uniforme sur $[0, 1]$ et ν la mesure uniforme sur $[-1, 1]$. On considère le coût $c(x, y) = (x^2 - y^2)^2$. 1. Pour tout entier n on définit l'application

$$T_n(x) = \begin{cases} 2x - \frac{k}{2n}, & \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right] \text{ si } k \text{ est pair,} \\ -2x + \frac{k+1}{2n}, & \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right] \text{ si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Montrer que $T_n \# \mu = \nu$ et montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 c(x, T_n(x)) d\mu(x) = 0.$$

2. En déduire qu'il n'existe pas d'application de transport qui soit optimale. 3. Construire un plan de transport optimal.

Exercice

Exercice 5. (Transport quadratique et translation). On considère le coût $c(x, y) = (x - y)^2$ sur \mathbb{R}^2 . Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la translation $\tau_a(x) = x - a$. Soit f et g deux fonctions continues. Le but est de montrer que

$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) = \mathcal{T}_c(f, g) + (b - a)^2 + 2(b - a)(m_g - m_f),$$

où

$$m_f = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx, \quad m_g = \int_{\mathbb{R}} x g(x) dx.$$

1. Soit T une application optimale qui envoie f sur g . On définit S par $S(x) = T(x - a) + b$. Montrer que $S \# (f \circ \tau_a) = g \circ \tau_b$.

2. Montrer que

$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \leq \int_{\mathbb{R}} |S(x) - x|^2 f(\tau_a(x)) dx$$

3. En déduire que

$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \leq \mathcal{T}_c(f, g) + (b - a)^2 + 2(b - a)(m_g - m_f),$$

4. De même montrer que

$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \geq \mathcal{T}_c(f, g) + (b - a)^2 + 2(b - a)(m_g - m_f),$$

et en déduire (1)

5. En déduire que $\mathcal{T}_c(\mathbb{1}_{[0,1]}, \mathbb{1}_{[1,2]}) = 1$.

Solution:

- Montrons que : $S\#(f \circ \tau_a) = g \circ \tau_b$
On sait que T est une application optimale de f vers g . Donc, : $T\#f = g$
Donc, $\forall \psi$ continue : $\int (\psi \circ T)(x) df(x) = \int \psi(x) dg(x)$
Et, $\tau^c(f, g) = \int_{\mathbb{R}} |x - T(x)|^2 df(x)$
D'autre part, $\forall \varphi$ continue : $\int (\varphi \circ S)(x) d(f \circ \tau_a)(x) = \int \varphi(T(x - a) + b) f(x - a) dx$
On pose, $u = x - a$
 $\int \varphi(T(u) + b) f(u) du = \int \varphi \circ \tau_{-b} \circ T(u) f(u) du = \int \varphi \circ \tau_{-b} \circ T(u) g(u) du = \int \varphi(u + b) g(u) du$
On pose, $z = u + b$
 $\int \varphi(z) g(z - b) dz = \int \varphi(z) g \circ \tau_b dz$
D'où : $S\#(f \circ \tau_a) = g \circ \tau_b$
- Montrons que : $\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \leq \int_{\mathbb{R}} |S(x) - x|^2 f(\tau_a(x)) dx$
 $\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) = \int_{\mathbb{R}} |T(x) - x|^2 f(\tau_a(x)) dx \leq \int_{\mathbb{R}} |S(x) - x|^2 f(\tau_a(x)) dx$
- Montrons que : $\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \leq \mathcal{T}_c(f, g) + (b - a)^2 + 2(b - a)(m_g - m_f)$,
 $\int_{\mathbb{R}} |S(x) - x|^2 f(x - a) dx = \int_{\mathbb{R}} |T(x - a) + b - x|^2 f(x - a) dx = \int_{\mathbb{R}} |T(y) + b - y - a|^2 f(y) dy$
 $= \int_{\mathbb{R}} |T(y) - y|^2 f(y) dy + \int_{\mathbb{R}} |b - a|^2 f(y) dy + \int_{\mathbb{R}} 2|T(y) - y| \times |b - a| f(y) dy$
 $= \mathcal{T}_c(f, g) + (b - a)^2 + 2(b - a)(m_g - m_f)$,
D'où, $\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \leq \mathcal{T}_c(f, g) + (b - a)^2 + 2(b - a)(m_g - m_f)$,
- $\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) = \int_{\mathbb{R}} |T(x) - x|^2 f(\tau_a(x)) dx$
On a, $\mathcal{T}_c(f, g) = \mathcal{T}_c((f \circ \tau_a) \circ \tau_{-a}, (g \circ \tau_b) \circ \tau_{-b}) \leq \mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) + (b - a)^2 + 2(a - b)(m_{g \circ \tau_a} - m_{f \circ \tau_b})$,
Avec, $m_{f \circ \tau_a} = \int_{\mathbb{R}} xf(x - a) dx = \int_{\mathbb{R}} (y + a)f(y) dy = a + m_f$
et, $m_{g \circ \tau_b} = \int_{\mathbb{R}} xg(x - b) dx = \int_{\mathbb{R}} (y + b)g(y) dy = b + m_g$
Donc, $\mathcal{T}_c(f, g) \leq \mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) + (b - a)^2 + 2(a - b)(b + m_g - a - m_f)$,
Donc, $\mathcal{T}_c(f, g) \leq \mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) + (b - a)^2 - 2(b - a)^2 + 2(a - b)(m_g - m_f)$,
D'où $\mathcal{T}_c(f, g) + (b - a)^2 + 2(b - a)(m_g - m_f) \leq \mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b)$
Ainsi, $\mathcal{T}_c(f, g) + (b - a)^2 + 2(b - a)(m_g - m_f) = \mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b)$
- Pour, $f = g = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $\tau_a = \tau_0$ et $\tau_b = \tau_1$
 $\tau_c(\mathbb{1}_{[0,1]}, \mathbb{1}_{[1,2]}) = \tau_c(\mathbb{1}_{[0,1]}, \mathbb{1}_{[0,1]}) + (1 - 0)^2 + 2(1 - 0)(m_g - m_f) = 1$

Exercice

Exercice 6. (Non unicité des potentiels de Kantorovitch). Montrer que si (φ, ψ) est une paire optimale de potentiel de Kantorovitch, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la paire $(\varphi + a, \psi - a)$ l'est aussi.

Exercice

Exercice 7. (Potentiels de Kantorovitch). Donner au moins une paire optimale de potentiel de Kantorovitch pour le book-shifting problem.

Exercice

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on considère le cout $c(x, y) = \Psi(|x - y|)$ avec

$$\Psi(z) = \begin{cases} 1 - z, & 0 \leq z \leq 1 \\ z - 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

On considère les mesures $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_2)$ et $\nu = \frac{1}{3}(\delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1)$. Calculer le coût global du transport optimal entre μ et ν , et donner l'ensemble des plans de transport optimaux.

Solution: $0 \geq \alpha \geq \frac{1}{3}; 0 \geq \beta \geq \frac{1}{3}$

$$\frac{1}{6} \geq \alpha + \beta \geq \frac{1}{2}$$

$$\Pi_{\alpha,\beta} = \alpha\delta_{(-1,0)} + \beta\delta_{(-1,1)} + (\frac{1}{2} - \alpha - \beta)\delta_{(-1,-1)} + (\frac{1}{3} - \alpha)\delta_{(2,0)} + (\frac{1}{3} - \beta)\delta_{(2,1)} + (\alpha + \beta - \frac{1}{6})\delta_{(2,-1)}$$

$$I[\Pi_{\alpha\beta}] = \beta + \frac{1}{2} - \alpha - \beta + \frac{1}{3} - \alpha + 2\alpha + 2\beta - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + 2\beta$$

$$\Pi(\mu, \nu) = \{\Pi_{\alpha\beta=0} | \frac{1}{6} \geq \alpha \geq \frac{1}{3}\}$$

Exercice

Exercice 9. Soit $A \in M_{n,m}(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\sup_{Ax \leq b} c \cdot x = \inf_{\substack{y \geq 0 \\ {}^t A y = c}} b \cdot y$$

Notation: on dit que $x \geq 0$ si toutes ses composantes sont positives, et ${}^t A$ est la transposée de la matrice A . Pour $c \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on note $x \cdot c$ le produit scalaire entre c et x . Indice: S'inspirer de la preuve de la dualité de Kantorovitch.

Solution: $SUP_{Ax \leq b} \langle C, x \rangle = SUP_{x \in \mathbb{R}^n} \langle C, x \rangle + \begin{cases} 0 & \text{si } Ax \leq b \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$

$$\text{Or, } \begin{cases} 0 & \text{si } Ax \leq b \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} = INF_{y \geq 0} [-\langle Ax - b, y \rangle]$$

$$\text{Si } Ax \leq b$$

Toutes les composantes de $-(Ax - b)$ sont positives ou nulles. $\mathcal{L}y \geq 0$ (si toutes les composantes de y sont positives ou nulles) $\langle -(Ax - b), y \rangle \geq 0$ Pour $y = 0, \langle -(Ax - b), y \rangle = 0$

Si $Ax \leq b$ est faux

$$\exists i | (Ax - b)_i \geq 0$$

$$\text{On prend : } y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ n \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Exercice

Exercice 10. On définit pour $x \in \mathbb{R}$

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

Calculer $W_1(G_\sigma, \delta_0)$.

Exercice

Exercice 11 (Interpolation de McCann). Soient μ_0 et μ_1 des mesures à densité ρ_0 et ρ_1 par rapport à la mesure de Lebesgue. On considère le coût quadratique $c(x, y) = \|x - y\|_2^2$. Soit T l'application optimale de Monge. 1. Quel théorème garantit l'existence de T ? 2. On suppose que T est inversible. Montrer que T^{-1} envoie μ_1 sur μ_0 de façon optimale. 3. On définit pour $t \in [0, 1]$

$$T_t(x) = (1 - t)x + tT(x),$$

et

$$\mu_t = T_t \# \mu_0.$$

Montrer que $(T^{-1})_{1-t}$ envoie μ_1 sur μ_t . 4. Montrer que

$$W_2(\mu_0, \mu_t) \leq t W_2(\mu_0, \mu_1).$$

5. Montrer que

$$W_2(\mu_1, \mu_t) \leq (1-t)W_2(\mu_0, \mu_1).$$

6. Calculer $W_2(\mu_0, \mu_t)$. 7. On prend

$$\rho_0(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [-1, 0] \\ 1-x, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases} \quad \rho_1(x) = \begin{cases} 1, & x \in [3, 4], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Calculer la densité ρ_t de μ_t .