

Théorie du transport optimal

Racine Florian

November 28, 2022

Table des matières

Chapter 1	Cours	Page 2
1.1	Introduction Formulation du problème — 2	2
1.2	Modélisation	2
1.3	La formulation du problème de transfert optimal de Monge	4
1.4	La dualité de Kantorovitch La théorie — 6 • Application(s) — 7	6
Chapter 2	TD	Page 9
2.1	TD1	9

Chapter 1

Cours

1.1 Introduction

1.1.1 Formulation du problème

Question 1

Quelle est la façon optimal de transporter un tas de sable dans un trou ?

Question 2

Comment construire un chateau de sable d'une forme données à partir d'un tas de sable ?



Figure 1.1: Transporter un tas de sable dans un trou

Note:-

Avec le même nombre de grain de sable et la même masse.

1.2 Modélisation

$$\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) ; \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$$

Definition 1.2.1

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu[A]$ décrit quelle quantité de sable est dans A .

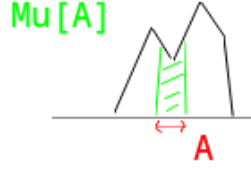


Figure 1.2: $\mu[A]$

Definition 1.2.2

Cout infinitésimal :

$$C : \begin{cases} \mathbb{R} * \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto C(x, y) \end{cases}$$

Cout de transporter un grain de sable de x vers y .

Question 3

Comment transporter un tas de sable avec un cout global minimal ?

Definition 1.2.3

Un plan de transport entre les mesures μ et ν est une mesure de probabilité : $\Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} * \mathbb{R})$ à pour marginale μ et ν .

Note:-

$\Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} * \mathbb{R})$ à pour marginal μ et ν

$$\Leftrightarrow \forall A, B \text{ ensemble mesurable avec } A \subset \mathbb{R} \text{ et } B \subset \mathbb{R} \begin{cases} \Pi[A \times \mathbb{R}] = \mu[A] \\ \Pi[\mathbb{R} \times B] = \nu[B] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in C^0(\mathbb{R}), \Psi \in C^0(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \varphi(x) + \Psi(y) d\Pi(x, y) = \int \varphi(x) d\mu(x)$$

Note:-

On notera, $\Pi(\mu, \nu) = \{ \Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) | \Pi \text{ a pour marginal, } \mu, \nu \}$

On remarquera que, $\Pi(\mu, \nu) \neq \emptyset$

$$I[\Pi] = \int_{\mathbb{R}^2} C(x, y) d\Pi(x, y) \text{ Le cout total associé au plan de transport optimal.}$$

On cherche, $\tau_c(\mu, \nu) = \inf_{\Pi \in \Pi(\mu, \nu)} (I[\Pi])$

Definition 1.2.4

S'il existe $\Pi_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tel que $I[\Pi_0] = \tau_c(\mu, \nu)$
 Π_0 est appelé un **plan de transfert optimal**

Example 1.2.1 (Exemple trivial (Kotorovitch))

$$\begin{aligned}
a &< b \\
c &< d \\
C(x, y) &= |x - y|^2 \\
\mu &= \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_b) \\
\nu &= \frac{1}{2}(\delta_c + \delta_d)
\end{aligned}$$

Question 4

$$\Pi(\mu, \nu) = ?$$

Solution: $\Pi_\alpha = \frac{1}{2}(\alpha\delta_{(a,c)} + (1-\alpha)\delta_{(a,d)} + (1-\alpha)\delta_{(b,c)} + \alpha\delta_{(b,d)})$ $\Pi(\mu, \nu) = \{\Pi_\alpha \mid \alpha \in [0, 1]\}$

Question 5

Calculer : $I[\Pi] \forall \Pi \in \Pi(\mu, \nu)$

Solution: $I[\Pi_\alpha] = \int_{\mathbb{R}^2} C(x, y) d\Pi_\alpha(x, y)$
 $I[\Pi_\alpha] = \frac{1}{2}(\alpha C(a, c) + (1-\alpha)C(a, d) + (1-\alpha)C(b, c) + \alpha C(b, d))$
 $I[\Pi_\alpha] = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \alpha(ac + bd) - (1-\alpha)(ad + cb)$

Question 6

Trouver : $\tau_c(\mu, \nu)$

Solution: $P(\alpha) = \frac{\partial I[\Pi_\alpha]}{\partial \alpha} \implies P(\alpha) = -ac - bd + ad + cb; \implies P(\alpha) = (d-c)(a-b) < 0$
Donc, $I[\Pi_\alpha]$ atteint son min en $\alpha = 1$
 $\Pi_0 = \Pi_{\alpha=1}$
Donc, $a \rightarrow c$ et, $b \rightarrow d$

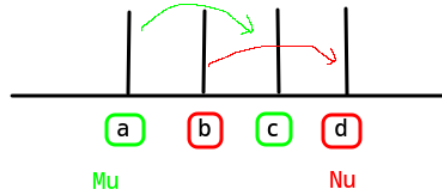


Figure 1.3: Solution

1.3 La formulation du problème de transfert optimal de Monge

Note:-

On autorise pas le fait de couper les masses. A chaque x est associé une unique y .
On dit que T envoie μ sur ν et on note : $T\# \mu = \nu$

Proposition 1.3.1

$\forall A \subset \mathbb{R}$ partie mesurable : $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$

\Leftrightarrow

Proposition 1.3.2

$$\begin{aligned} \forall \varphi \text{ continue} : \int_{\mathbb{R}} \varphi(y) d\nu(y) &= \int_{\mathbb{R}} (\varphi \circ T)(x) d\mu(x) \\ \tau_c^M(\mu, \nu) &= \inf_{T: \mu \rightarrow \nu} I[T] \\ I(T) &= \int_{\mathbb{R}} C(x, T(x)) d\mu(x) \end{aligned}$$

Note:-

Solution de cout optimal d'après Kantorovitch \leq Solution de cout optimal d'après Monge
Dans le première exemple ils coïncident.

Note:-

Kantorovitch définit un problème linéaire en Π .
Monge définit un problème non linéaire en T .

Note:-

Problème de Kantorovitch admet toujours une solution Π_0 .
Problème de Monge n'admet pas toujours de solution n'y même d'application qui envoi μ sur ν .

Example 1.3.1

$$\begin{cases} \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ \nu = \delta_a \end{cases}$$

Kantorovitch : $\Pi(\mu, \nu) = \{\mu \otimes \delta_a\}$

Monge : Quelles sont les T tel que $T\#\mu = \nu$?

Il en existe une seule:

$$\forall x | T : \begin{cases} x & \longrightarrow & a \\ \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\tau_c^M(\mu, \nu) = \tau_c(\mu, \nu)$$

D'une part :

$$\tau_c^M(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(T(x), x) d\mu(x)$$

$$\tau_c^M(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(0, x) d\mu(x)$$

D'autre part :

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, y) d\Pi(x, y)$$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, y) d(\mu \otimes \delta_a)(x, y)$$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, y) d\mu(x) d\delta_a$$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x, 0) d\mu(x)$$

Example 1.3.2

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \\ \nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{y_i} \end{cases}$$

Les plans de transports Π entre μ et ν peuvent être représenté par des matrices bistochastiques de tailles n .

$$0 \leq \Pi_{i,j} \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^n \Pi_{i,j} = 1$$

$$\sum_{j=1}^n \Pi_{i,j} = 1$$

Note:-

On note \mathcal{B}_n l'ensemble des matrices bistochastiques.

Soit $\Pi \in \mathcal{B}_n : I[\Pi] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C(x_i, y_i) \Pi_{i,j}$

$$\tau_c(\mu, \nu) = \inf_{\Pi \in \mathcal{B}_n} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Pi_{i,j} C(x_i, y_i) \right\}$$

Il s'agit d'un problème linéaire de minimisation sur un ensemble convexe.

Proposition 1.3.3 Ensemble convexe

\mathcal{B}_n est convexe $\Leftrightarrow A, B \in \mathcal{B}_n$ alors $\forall \theta \in [0, 1] \theta A + (1 - \theta)B \in \mathcal{B}_n$

Definition 1.3.1: Points extrémaux

L'ensemble des points extrémaux de E convexe est l'ensemble des $e \in E$ tel que :

si $e = \theta e_1 + (1 - \theta)e_2$ avec $\theta \in [0, 1], e_1 \in E, e_2 \in E$

Alors $\theta = 0$ ou $\theta = 1$

Theorem 1.3.1 Théorème de Choquet

F est linéaire sur un domaine K convexe et compact, alors F admet au moins un minimum. Parmi les minimums de F au moins l'un d'eux est un extréma de K.

Theorem 1.3.2 Théorème de Birkhoff

\mathcal{B}_n est convexe et compact.

\mathcal{B}_n admet n points extrémaux qui sont les matrices de permutations

Ainsi, le min pour le problème de Kantorovitch est atteint pour $\begin{cases} \Pi_{i,j} = 1 & \text{si } ij = \sigma(i) \\ \Pi_{i,j} = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1.4 La dualité de Kantorovitch

1.4.1 La théorie

Theorem 1.4.1 Dualité de Kantorovitch

$$\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

$$\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$$

C semi continue inférieurement (par exemple C continue) Soit $(\varphi, \psi) \in \phi_c$

$$I(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) d\nu(y)$$

$\phi_c = \{(\varphi, \psi) \in C^0 \text{ tq } \varphi(x) + \psi(y) \geq C(x, y) \text{ presque partout} \}$ Alors, $\inf_{\Pi \in \Pi(\mu)} I[\Pi] = \sup_{\varphi, \psi} J(\varphi, \psi)$

Note:-

Interprétation :

On embauche un transporteur.

Il achète de la masse située en x au prix $\varphi(x)$.

Il vous débarasse au prix $\int \varphi(x) d\mu(x)$

Il vous revend de la masse en y au prix $\psi(y)$

On rachète v au prix $\int \psi(y) dv(y)$

Proof: Soit $(\varphi, \psi) \in \phi_c$
Soit $\Pi \in \Pi(\mu, \nu) | I[\Pi] = \tau(\mu, \nu)$

$$J(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) dv(y)$$

$$\geq \int C(x, y) d\Pi(x, y) = INF_{\Pi} I[\Pi] = \tau(\mu, \nu)$$

Ainsi, $J(\varphi, \psi) \geq INF_{\Pi} I[\Pi]$

⊖

Definition 1.4.1: Les fonction C concaves

Soit, $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
On définit sa fonction C-conjuguée par :

$$\varphi^c : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R} \cup -\infty \\ x & \longmapsto a \end{cases}$$

Lenma 1.4.1

lemme

Theorem 1.4.2

La dualité de Kantorovitch peut être restreinte à des couples de fonction C-conjuguées.

$$SUP_{(\varphi, \psi) \in (C(\mathbb{R}^n)^2)} J(\varphi, \psi) = MAX_{(\psi^c, \psi)} J(\psi^c, \psi)$$

Proof: On montre que le sup est un max.

⊖

Corollary 1.4.1 Les plans de transferts optimaux sont caractérisés par leur support

Si (φ, ψ) est un maximiseur pour le problème de Kantorovitch dual, alors
 $\Pi \in \Pi(\mu, \nu)$ est un minimiseur pour le problème de Kantorovitch primal si et seulement si Π est concentrée sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \varphi(x) + \psi(y) = C(x, y)\}$

1.4.2 Application(s)

Proposition 1.4.1 On considère un objet indexé par j présent en quantité v_j .

(type(j), quantité(j)) = (j, v_j)

On considère un consommateur indexé par i présent en quantité μ_i .

(type(i), quantité(i)) = (i, μ_i)

Utilité de l'objet j pour l'agent i .

Hypothèse L'utilité est transférable.

L'objet j a une utilité nette $U_{r,j} - P_j$.

Pour un système de prix P_j , l'agent i choisit l'objet j_p qui maximise $U_{ij} - P_j$.

Transfert optimal: $\sup \sum_{ij} U_{ij} \Pi_{ij}$ sous la contrainte $\sum_j \Pi_{ij} = \mu_i ; \sum_i \Pi_{ij} = v_j$

Note:-

Explication :

$$\mu = \sum_i \mu_i \delta_{x_i}$$

$$\nu = \sum_j \nu_j \delta_{y_j}$$

$$C(i, j) = -u_{i,j}$$

$$I[\Pi] = - \sum_{ij} u_{ij} \Pi_{ij}$$

Utilité maximale : $INF_{\Pi} I[\Pi] = SUP \{ - \sum_i \varphi_i \mu_i - \sum_j \psi_j v_j \}$

Problème dual : $(D) : INF_{P_j} \{ \sum_j v_j P_j + \sum_i \mu_i MAX_j (v_{ij} - P_j) \}$

Definition 1.4.2: Prix d'équilibre

Un système de prix qui satisfait (D) est un prix d'équilibre du problème. Un tel système de prix permet d'atteindre l'optimum global

Chapter 2

TD

2.1 TD1

Exercice

Exercice 1. On considère le coût $c(x, y) = |x - y|$. Dans chacun des cas, donner les solutions des problèmes de Monge et de Kantorovitch.

1. $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_3,$
2. $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \nu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1,$
3. $\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2, \quad \nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_3.$

Solution: 1)

$$0 \geq \alpha \geq \frac{1}{3}$$

$$0 \geq \beta \geq \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6} \geq \alpha + \beta \geq \frac{1}{2}$$

$$\Pi_{\alpha, \beta} = \alpha\delta_{(0, -1)} + \beta\delta_{(0, 2)} + (\alpha + \beta)\delta_{(0, 3)}$$

2)

Equivalent à l'exemple du cours.

3)

Exercice

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(x) = x + 1$, $S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $S(x) = 2x$ et $Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $Z(x) = 2 - x$. On définit $\mu = \mathbb{1}_{[0, 1]}$ et $\nu = \mathbb{1}_{[1, 2]}$. A-t-on $T\#\mu = \nu$? $S\#\mu = \nu$? $Z\#\mu = \nu$?

Solution: $\int_{[0, 1]} (\varphi \circ S)(x) d\mu(x) = \int_{[0, 1]} \varphi(2x) dx = \frac{1}{2} \int_{[0, 2]} \varphi(y) dy$
 $\Rightarrow S\#\mu = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[0, 2]}$

$$\int_{[0, 1]} (\varphi \circ T)(x) d\mu(x) = \int_{[0, 1]} \varphi(1 + x) dx = \int_{[1, 2]} \varphi(y) dy = \int \varphi(y) d\nu(y)$$

$$\Rightarrow T\#\mu = \nu$$

Exercice

Exercice 3. (Non-unicité pour un coût convexe - Book shifting). On définit $\mu = \mathbb{1}_{[0, 2]}$ et $\nu = \mathbb{1}_{[1, 3]}$ et le coût $c(x, y) = |x - y|$. Soit $T_1(x) = x + 1$ et

$$T_2(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \in [0, 1], \\ x, & \text{si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Montrer que T_1 et T_2 sont deux applications optimales.

Solution: Vérifiez que :

$$T_1\#\mu = \nu$$

$$\begin{aligned}
T_2 \# \mu &= \nu \\
I(T_1) &= \int_{\mathbb{R}} C(x, T_1(x)) d\mu(x) = 1 \\
I(T_2) &= \int_{[0,2]} C(x, T_2(x)) d\mu(x) \\
I(T_2) &= \frac{1}{2} \int_{[0,1]} |x - T_2(x)| dx + 0 = 1 \\
I(T) &\geq \left| \int |x| d\mu(x) - \int |T(x)| d\mu(x) \right| \\
I(T) &= 1
\end{aligned}$$

Exercice

Exercice 4. (Non existence d'une application de transport). On prend μ la mesure uniforme sur $[0, 1]$ et ν la mesure uniforme sur $[-1, 1]$. On considère le coût $c(x, y) = (x^2 - y^2)^2$. 1. Pour tout entier n on définit l'application

$$T_n(x) = \begin{cases} 2x - \frac{k}{2n}, & \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right] \text{ si } k \text{ est pair,} \\ -2x + \frac{k+1}{2n}, & \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right] \text{ si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Montrer que $T_n \# \mu = \nu$ et montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 c(x, T_n(x)) d\mu(x) = 0.$$

2. En déduire qu'il n'existe pas d'application de transport qui soit optimale. 3. Construire un plan de transport optimal.

Exercice

Exercice 5. (Transport quadratique et translation). On considère le coût $c(x, y) = (x - y)^2$ sur \mathbb{R}^2 . Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit la translation $\tau_a(x) = x - a$. Soit f et g deux fonctions continues. Le but est de montrer que

$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) = \mathcal{T}_c(f, g) + (b - a)^2 + 2(b - a)(m_g - m_f),$$

où

$$m_f = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx, \quad m_g = \int_{\mathbb{R}} x g(x) dx.$$

1. Soit T une application optimale qui envoie f sur g . On définit S par $S(x) = T(x - a) + b$. Montrer que $S \# (f \circ \tau_a) = g \circ \tau_b$. 2. Montrer que

$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \leq \int_{\mathbb{R}} |S(x) - x|^2 f(\tau_a(x)) dx$$

3. En déduire que

$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \leq \mathcal{T}_c(f, g) + (b - a)^2 + 2(b - a)(m_g - m_f),$$

4. De même montrer que

$$\mathcal{T}_c(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \geq \mathcal{T}_c(f, g) + (b - a)^2 + 2(b - a)(m_g - m_f),$$

et en déduire (1) 5. En déduire que $\mathcal{T}_c(\mathbb{1}_{[0,1]}, \mathbb{1}_{[1,2]}) = 1$.

Exercice

Exercice 6. (Non unicité des potentiels de Kantorovitch). Montrer que si (φ, ψ) est une paire optimale de potentiel de Kantorovitch, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la paire $(\varphi + a, \psi - a)$ l'est aussi.

Exercice

Exercice 7. (Potentiels de Kantorovitch). Donner au moins une paire optimale de potentiel de Kantorovitch pour le book-shifting problem.

Exercice

Exercice 8. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on considère le coût $c(x, y) = \Psi(|x - y|)$ avec

$$\Psi(z) = \begin{cases} 1 - z, & 0 \leq z \leq 1 \\ z - 1, & z \geq 1. \end{cases}$$

On considère les mesures $\mu = \frac{1}{2} (\delta_{-1} + \delta_2)$ et $\nu = \frac{1}{3} (\delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1)$. Calculer le coût global du transport optimal entre μ et ν , et donner l'ensemble des plans de transport optimaux.