# Théorie du transport optimal

Racine Florian

November 29, 2022

# Table des matières

# Chapter 1

# Cours

## 1.1 Introduction

### 1.1.1 Formulation du problème

**Question 1**

Quelle est la façon optimal de transporter un tas de sable dans un trou ?

**Question 2**

Comment constuire un chateau de sable d'une forme données à partir d'un tas de sable ?

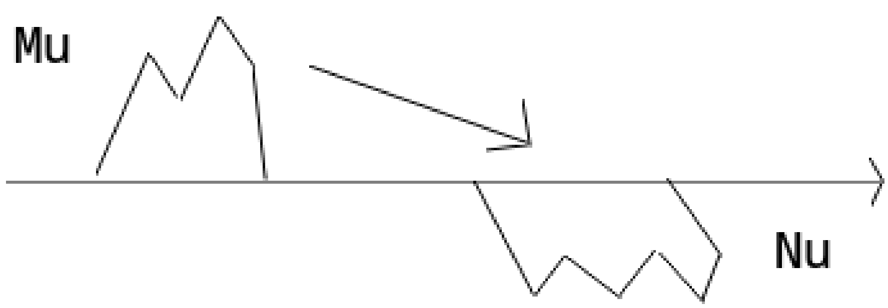


Figure 1.1: Transporter un tas de sable dans un trou

**Note:-**

Avec le même nombre de grain de sable et la même masse.

## 1.2 Modélisation

$\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ ; $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

**Definition 1.2.1**

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu[A]$ décrit quelle quantité de sable est dans A.

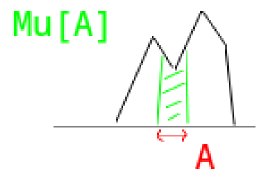


Figure 1.2: $\mu[A]$

**Definition 1.2.2**

Cout infinitésimal :

$$C : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} * \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & C(x, y) \end{array} \right.$$

Cout de transporter un grain de sable de x vers y.

**Question 3**

Comment transporter un tas de sable avec un cout global minimal ?

**Definition 1.2.3**

Un plan de transport entre les mesures $\mu$ et $\nu$ est une mesure de probabilité :
$\Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} * \mathbb{R})$ à pour marginale $\mu$ et $\nu$.

**Note:-**

$\Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} * \mathbb{R})$ à pour marginal $\mu$ et $\nu$

$\Leftrightarrow$ ∀A,B enssemble mesurable avec A⊂ $\mathbb{R}$ et B ⊂ $\mathbb{R}$ $\begin{cases} \Pi[A \times \mathbb{R}] = \mu[A] \\ \Pi[\mathbb{R} \times B] = \mu[B] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall \varphi \in C^0(\mathbb{R}), \Psi \in C^0(\mathbb{R}) : \displaystyle\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \varphi(x) + \Psi(y)\, d\Pi(x, y) = \int \varphi(x)\, d\mu(x)$

**Note:-**

On notera, $\Pi(\mu, \nu) = \{\ \Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) | \Pi$ a pour marginal, $\mu, \nu\ \}$
On remarquera que, $\Pi(\mu, \nu) \neq \emptyset$
$I[\Pi] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} C(x, y)\, d\Pi(x, y)$ Le cout total assocé au plan de transport optimal.
On cherche, $\tau_c(\mu, \nu) = INF_{\Pi \in \Pi(\mu,\nu)}(I[\Pi])$

**Definition 1.2.4**

S'il existe $\Pi_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tel que $I[\Pi_0] = \tau_c(\mu, \nu)$
$\Pi_0$ est appelé un **plan de transfert optimal**

**Example 1.2.1** (Exemple trivial (Kotorovitch))

$a < b$
$c < d$
$C(x, y) = |x - y|^2$
$\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_b)$
$\nu = \frac{1}{2}(\delta_c + \delta_d)$

**Question 4**

$\Pi(\mu, \nu) =?$

***Solution:*** $\Pi_\alpha = \frac{1}{2}(\alpha\delta_{(a,c)} + (1-\alpha)\delta_{(a,d)} + (1-\alpha)\delta_{(b,c)} + \alpha\delta_{(b,d)})$ $\boldsymbol{\Pi(\mu, \nu) = \{\Pi_\alpha | \alpha \in [0,1]\}}$

**Question 5**

Calculer : $I[\Pi] \forall \Pi \in \Pi(\mu, \nu)$

***Solution:*** $I[\Pi_\alpha] = \int_{\mathbb{R}^2} C(x, y)\, d\Pi_\alpha(x, y)$
$I[\Pi_\alpha] = \frac{1}{2}(\alpha C(a, c) + (1-\alpha)C(a, d) + (1-\alpha)C(b, c) + \alpha C(b, d))$
$I[\Pi_\alpha] = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \alpha(ac + bd) - (1-\alpha)(ad + cb)$

**Question 6**

Trouver : $\tau_c(\mu, \nu)$

***Solution:*** $P(\alpha) = \frac{\partial I[\Pi_\alpha]}{\partial \alpha} \implies P(\alpha) = -ac - bd + ad + cb; \implies P(\alpha) = (d - c)(a - b) < 0$
Donc, $I[\Pi_\alpha]$ atteint son min en $\alpha = 1$
$\Pi_0 = \Pi_{\alpha=1}$
Donc, $a \longrightarrow c$ et, $b \longrightarrow d$

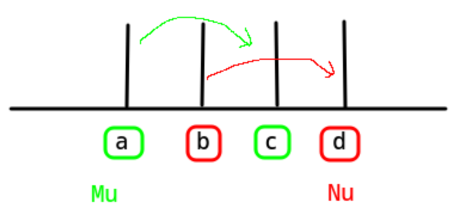


Figure 1.3: Solution

## 1.3 La formulation du problème de transfert optimal de Monge

**Note:-**
On autorise pas le fait de couper les masses. A chaque x est associé une unique y.
On dit que T envoie $\mu$ sur $\nu$ et on note : $T\#\mu = \nu$

**Proposition 1.3.1**
$\forall A \subset \mathbb{R}$ partie mesurable : $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$

$\Leftrightarrow$

**Proposition 1.3.2**

$\forall \varphi$ continue : $\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}} (\varphi o T)(x)\, d\mu(x)$

$\tau_c^M(\mu,\nu) = INF_{TtqT\#f=\nu} I[T]$

$I(T) = \int_{\mathbb{R}} C(x, T(x))\, d\mu(x)$

**Note:-**

Solution de cout optimal d'après Kantorovitch $\leq$ Solution de cout optimal d'après Monge
Dans le première exemple ils coincident.

**Note:-**

Kantorovitch définit un problème linéare en $\Pi$.
Monge définit un problème non linéare en T.

**Note:-**

Problème de kantorovitch admet toujours une solution $\Pi_0$.
Problème de Monge n'admet pas toujours de solution n'y même d'application qui envoi $\mu$ sur $\nu$.

**Example 1.3.1**

$\begin{cases} \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ \nu = \delta_a \end{cases}$

**Kantorovitch :** $\Pi(\mu,\nu) = \{\mu \otimes \delta_a\}$
**Monge :** Quelles sont les T tel que $T\#\mu = \nu$ ?
Il en existe une seule:

$$\forall x | T : \left| \begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & a \\ \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$\tau_c^M(\mu,\nu) = \tau_c(\mu,\nu)$
D'une part :

$\tau_c^M(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(T(x), x)\, d\mu(x)$

$\tau_c^M(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(0, x)\, d\mu(x)$

D'autre part :

$\tau_c(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x,y)\, d\Pi(x,y)$

$\tau_c(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x,y)\, d(\mu \otimes \delta_a)(x,y)$

$\tau_c(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x,y)\, d\mu(x) d\delta_a$

$\tau_c(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x,0)\, d\mu(x)$

**Example 1.3.2**

$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{x_i} \\ \nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \delta_{y_i} \end{cases}$

Les plans de transports $\Pi$ entre $\mu$ et $\nu$ peuvent être représenté par des matrices bistochastiques de tailles n.

$0 \leq \Pi_{i,j} \leq 1$

$\sum_{i=1}^{n} \Pi_{i,j} = 1$

$\sum_{j=1}^{n} \Pi_{i,j} = 1$

**Note:-**

On note $\mathcal{B}_n$ l'enssemble des matrices bisctochastiques.

Soit $\Pi \in \mathcal{B}_n$ : $I[\Pi] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} C(x_i, y_i)\Pi_{i,j}$
$\tau_c(\mu,\nu) = INF_{\Pi \in \mathcal{B}_n} \{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \Pi_{i,j} C(x_i, y_i) \}$
Il s'agit d'un problème linéaire de minimisation sur un enssemble convexe.

**Proposition 1.3.3** Enssemble convexe

$\mathcal{B}_n$ est convexe $\Leftrightarrow A, B \in \mathcal{B}_n$ alors $\forall \theta \in [0,1] | \theta A + (1-\theta)B \in \mathcal{B}_n$

**Definition 1.3.1: Points extremaux**

L'enssemble des points extremaux de E convexe est l'enssemble des $e \in E$ tel que :
si $e = \theta e_1 + (1-\theta)e_2$ avec $\theta \in [0,1], e_1 \in E, e_2 \in E$
Alors $\theta = 0$ ou $\theta = 1$

**Theorem 1.3.1** Théorème de Choquet

F est linéaire sur un domaine K convexe et compact, alors F admet au moin un minimum. Parmi les minimums de F au moin l'un d'eux est un extrema de K.

**Theorem 1.3.2** Théorème de Birkhoff

$\mathcal{B}_n$ est convexe et compact.
$\mathcal{B}_n$ admet n points extremaux qui sont les matrices de permutations
Ainsi, le min pour le problème de Kantorovitch est atteint pour $\begin{cases} \Pi_{i,j} = 1 | sij = \sigma(i) \\ \Pi_{i,j} = 0 | sinon \end{cases}$

## 1.4 La dualité de Kantorovitch

### 1.4.1 La théorie

**Theorem 1.4.1** Dualité de Kantorovitch

$\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$
$\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$
C semi continue inférieurement ( par exemple C continue) Soit $(\varphi, \psi) \in \phi_c$
$I(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\, d\nu(y)$
$\phi_c = \{(\varphi, \psi) \in C^0$ tq $\varphi(x) + \psi(y) \geq C(x,y)$ presque partout $\}$ Alors, $INF_{\Pi \in \Pi(\mu)} I[\Pi] = SUP_{\varphi,\psi} J(\varphi, \psi)$

**Note:-**

Interprétation :
On embauche un transporteur.
Il achète de la masse située en x au pris $\varphi(x)$.
Il vous débarasse au prix $\int \varphi(x)\, d\mu(x)$
Il vous revend de la masse en y au prix $\psi(y)$

On rachète $\nu$ au prix $\int \psi(y)\, d\nu(y)$

***Proof:*** Soit $(\varphi, \psi) \in \phi_c$
Soit $\Pi \in \Pi(\mu, \nu) | I[\Pi]) \tau(\mu, \nu)$

$$J(\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y)\, d\nu(y)$$

$\geq \int C(x, y)\, d\Pi(x, y) = INF_{\Pi} I[\Pi] = \tau(\mu, \nu)$
Ainsi, $J(\varphi, \psi) \geq INF_{\Pi} I[Pi]$

😄

**Definition 1.4.1: Les fonction C concaves**

Soit, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
On définit sa fonction C-conjuguée par :

$$\varphi^c : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup -\infty \\ x & \longmapsto & a \end{array} \right.$$

**Lenma 1.4.1**
lemme

**Theorem 1.4.2**
La dualité de Kantorovitch peut être restreinte à des couples de fonction C-conjuguées.
$SUP_{(\varphi,\ \psi) \in (C(\mathbb{R}^n)^2} J(\varphi, \psi) = MAX_{(\psi^c, \psi)} J(\psi^c, \psi)$

***Proof:*** On montre que le sup est un max. 😄

**Corollary 1.4.1** Les plans de transferts optimals sont caractérisés par leur support
Si $(\varphi, \psi)$ est un maximiseur pour le problème de Kantorovitch dual, alors
$\Pi \in \Pi(\mu, \nu)$ est un minimiseur pour le problème de Kantorovitch primal si et seulement si $\Pi$ est concentrée sur $\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n | \varphi(x) + \psi(y) = C(x, y)\}$

### 1.4.2 Appliquation(s)

**Proposition 1.4.1** On considère un objet indexé par j présent en quantité $\nu_j$.
(type(j), quantjté(j)) = (j, $\nu_j$)
On considère un consomateur indexé par i présent en quantité $\mu_i$.
(type(i), quantité(i)) = (i, $\mu_i$)
Utilité de l'objet j pour l'agent i.
**Hypothèse** L'utilité est tranférable.
L'objet j a une utilité nette $U_{r,j} - P$.
Pour un système de prix $P_j$, l'agent i choisit l'objet $j_p$ qui maximise $U_{ij} - P_j$.
Transfert optimal: sup $\sum_{ij} U_{ij} \Pi_{ij}$ sous la contrainte $\sum_j \Pi_{ij} = \mu_i$ ; $\sum_i \Pi_{ij} = \nu_j$

**Note:-**
**Explication :**
$\mu = \sum_i \mu_i \delta_{x_i}$
$\nu = \sum_j \nu_j \delta_{y_j}$
$C(i, j) = -u_{i,j}$

$I[\Pi] = -\sum_{ij} u_{ij}\Pi_{ij}$
**Utilité maximale :** $INF_{\Pi} I[\Pi] = SUP\{-\sum_i \varphi_i \mu_i - \sum_j \psi_j \nu j\}$
**Problème dual :** $(D) : INF_{P_j}\{\sum_j \nu_j P_j + \sum_i \mu_i MAX_j(\nu ij - Pj)\}$

**Definition 1.4.2: Prix d'équilibre**

Un système de prix qui satisfait (D) est un prix d'équilibre du problème. Un tel système de prix permet d'atteindre l'optimum global

# Chapter 2

# TD

## 2.1 TD1

**Exercice**

**Exercice 1.** On considère le coût $c(x, y) = |x - y|$. Dans chacun des cas, donner les solutions des problèmes de Monge et de Kantorovitch.
1. $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_3,$
2. $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \nu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1,$
3. $\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2, \quad \nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_3.$

***Solution:*** 1)
$0 \geq \alpha \geq \frac{1}{3}$
$0 \geq \beta \geq \frac{1}{3}$
$\frac{1}{6} \geq \alpha + \beta \geq \frac{1}{2}$
$\Pi_{\alpha,\beta} = \alpha\delta_{(0,-1)} + \beta\delta_{(0,2)} + (\alpha + \beta)\delta_{(0,3)}$
2)
Equivalent à l'exemple du cours.
3)

**Exercice**

**Exercice 2.** Soit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $T(x) = x + 1, S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $S(x) = 2x$ et $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $Z(x) = 2 - x$. On définit $\mu = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $\nu = \mathbb{1}_{[1,2]}$. A-t-on $T\#\mu = \nu$ ? $S\#\mu = \nu ? Z\#\mu = \nu$?

***Solution:*** Soit $\varphi \in C^0(\mathbb{R})$,
$$\int_{[0,1]} (\varphi o T)(x)\, d\mu(x) = \int_{[0,1]} \varphi(1 + x)\, dx = \int_{[1,2]} \varphi(y)\, dy = \int \varphi(y)\, d\nu(y)$$
$\Rightarrow T\#\mu = \nu$

$$\int_{[0,1]} (\varphi o S)(x)\, d\mu(x) = \int_{[0,1]} \varphi(2x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{[0,2]} \varphi(y)\, dy$$
$\Rightarrow S\#\mu = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]} \Rightarrow S\#\mu = \frac{1}{2}(\mu + \nu) \Rightarrow S\#\mu \neq \nu$

$$\int_{[0,1]} (\varphi o Z)(x)\, d\mu(x) = \int_{[0,1]} \varphi(2 - x)\, dx = \int_{[1,2]} \varphi(y)\, dy = \int \varphi(y)\, d\nu(y)$$
$\Rightarrow Z\#\mu = \nu$

**Exercice**

**Exercice 3.** (Non-unicité pour un coût convexe - Book shifting). On définit $\mu = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}$ et $\nu = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[1,3]}$ et le coût $c(x, y) = |x - y|$. Soit $T_1(x) = x + 1$ et

$$T_2(x) = \begin{cases} x + 2, \text{ si } x \in [0, 1], \\ x, \text{ si } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Montrer que $T_1$ et $T_2$ sont deux applications optimales.

***Solution:*** Vérifiez que :
$T_1 \# \mu = \nu$

$$\int_{[0,2]} (\varphi o T_1)(x)\, d\mu(x) = \int_{[0,2]} \varphi(x+1)\, dx = \int_{[1,3]} \varphi(y)\, dy = \int \varphi(y)\, d\nu(y)$$

$$I(T_1) = \int_{\mathbb{R}} C(x, T_1(x))\, d\mu(x) = \tfrac{1}{2} \int_{[0,2]} |x - T_1(x)|\, dx = \tfrac{1}{2} \int_{[0,2]} 1\, dx = 1$$

$T_2 \# \mu = \nu$

$$I(T_2) = \int_{[0,2]} C(x, T_2(x))\, d\mu(x)$$

$$I(T_2) = \tfrac{1}{2} \int_{[0,1]} |x - T_2(x)|\, dx + 0 = 1$$

$$I(T) \geq \left| \int |x|\, d\mu(x) - \int |T(x)|\, d\mu(x) \right|$$

$I(T) = 1$

**Exercice**

**Exercice 4.** (Non existence d'une application de transport). On prend $\mu$ la mesure uniforme sur $[0,1]$ et $\nu$ la mesure uniforme sur $[-1,1]$. On considère le coût $c(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)^2$. 1. Pour tout entier $n$ on définit l'application

$$T_n(x) = \begin{cases} 2x - \frac{k}{2n}, & \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right] \text{ si } k \text{ est pair,} \\ -2x + \frac{k+1}{2n}, & \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right] \text{ si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Monter que $T_n \# \mu = \nu$ et montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 c\,(x, T_n(x))\, d\mu(x) = 0.$$

2. En déduire qu'il n'esxite pas d'application de transport qui soit optimale. 3. Construire un plan de transport optimal.

**Exercice**

**Exercice 5.** (Transport quadratique et translation). On considère le coût $c(x,y) = (x-y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$ Pour $a \in \mathbb{R}$, on définitit la translation $\tau_a(x) = x - a$. Soit $f$ et $g$ deux fonctions continues Le but est de montrer que

$$\mathcal{T}_c\,(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) = \mathcal{T}c(f,g) + (b-a)^2 + 2(b-a)\left(m_g - m_f\right),$$

où

$$m_f = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx, \quad m_g = \int_{\mathbb{R}} x g(x) dx.$$

1. Soit $T$ une application optimale qui envoie $f$ sur $g$. On définit $S$ par $S(x) = T(x-a) + b$. Montrer que $S\#\,(f \circ \tau_a) = g \circ \tau_b$. 2. Montrer que

$$\mathcal{T}_c\,(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \leqslant \int_{\mathbb{R}} |S(x) - x|^2 f\,(\tau_a(x))\Big)\, dx$$

3. En déduire que

$$\mathcal{T}_c\,(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \leqslant \mathcal{T}c(f,g) + (b-a)^2 + 2(b-a)\left(m_g - m_f\right),$$

4. De même montrer que

$$\mathcal{T}_c\,(f \circ \tau_a, g \circ \tau_b) \geqslant \mathcal{T}c(f,g) + (b-a)^2 + 2(b-a)\left(m_g - m_f\right),$$

et en déduire (1) 5. En déduire que $\mathcal{T}_c\left(\mathbb{1}_{[0,1]}, \mathbb{1}_{[1,2]}\right) = 1$.

Exercice

**Exercice 6.** (Non unicité des potentiels de Kantorovitch). Montrer que si $(\varphi, \psi)$ est une paire optimale de potentiel de Kantorovitch, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la paire $(\varphi + a, \psi - a)$ l'est aussi.

Exercice

**Exercice 7.** (Potentiels de Kantorovitch). Donner au moins une paire optimale de potentiel de Kantorovitch pour le book-shifting problem.

Exercice

**Exercice 8.** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on considère le coutt $c(x, y) = \Psi(|x - y|)$ avec

$$\Psi(z) = \begin{cases} 1 - z, & 0 \leqslant z \leqslant 1 \\ z - 1, & z \geqslant 1. \end{cases}$$

On considère les mesures $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_2)$ et $\nu = \frac{1}{3}(\delta_{-1} + \delta_0 + \delta_1)$. Calculer le coût global du transport optimal entre $\mu$ et $\nu$, et donner l'ensemble des plans de transport optimaux.