Théorie du transport optimal

Racine Florian

November 27, 2022

Table des matières

Chapter 1

Cours

1.1 Introduction

1.1.1 Formulation du problème

Question 1

Quelle est la façon optimal de transporter un tas de sable dans un trou ?

Question 2

Comment constuire un chateau de sable d'une forme données à partir d'un tas de sable ?

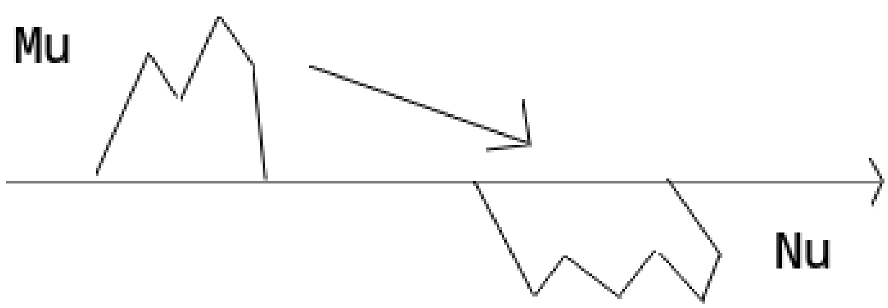

Figure 1.1: Transporter un tas de sable dans un trou

Note:-
Avec le même nombre de grain de sable et la même masse.

1.2 Modélisation

$\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$; $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Definition 1.2.1

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu[A]$ décrit quelle quantité de sable est dans A.

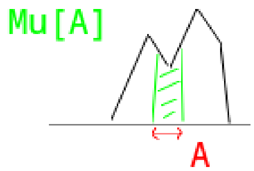

Figure 1.2: $\mu[A]$

Definition 1.2.2

Cout infinitésimal :

$$C : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} * \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & C(x, y) \end{array} \right.$$

Cout de transporter un grain de sable de x vers y.

Question 3

Comment transporter un tas de sable avec un cout global minimal ?

Definition 1.2.3

Un plan de transport entre les mesures μ et ν est une mesure de probabilité :
$\Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} * \mathbb{R})$ à pour marginale μ et ν.

Note:-

$\Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} * \mathbb{R})$ à pour marginal μ et ν

$\Leftrightarrow$ ∀A,B enssemble mesurable avec A$\subset \mathbb{R}$ et B $\subset \mathbb{R}$ $\begin{cases} \Pi[A \times \mathbb{R}] = \mu[A] \\ \Pi[\mathbb{R} \times B] = \mu[B] \end{cases}$

$\Leftrightarrow \forall \varphi \in C^0(\mathbb{R}), \Psi \in C^0(\mathbb{R}) : \displaystyle\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \varphi(x) + \Psi(y)\, d\Pi(x, y) = \int \varphi(x)\, d\mu(x)$

Note:-

On notera, $\Pi(\mu, \nu) = \{ \ \Pi \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) | \Pi$ a pour marginal, $\mu, \nu \ \}$
On remarquera que, $\Pi(\mu, \nu) \neq \emptyset$
$I[\Pi] = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} C(x, y)\, d\Pi(x, y)$ Le cout total assocé au plan de transport optimal.
On cherche, $\tau_c(\mu, \nu) = INF_{\Pi \in \Pi(\mu,\nu)}(I[\Pi])$

Definition 1.2.4

S'il existe $\Pi_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ tel que $I[\Pi_0] = \tau_c(\mu, \nu)$
Π_0 est appelé un **plan de transfert optimal**

Example 1.2.1 (Exemple trivial (Kotorovitch))

$a < b$
$c < d$
$C(x, y) = |x - y|^2$
$\mu = \frac{1}{2}(\delta_a + \delta_b)$
$\nu = \frac{1}{2}(\delta_c + \delta_d)$

Question 4

$\Pi(\mu, \nu) = ?$

Solution: $\Pi_\alpha = \frac{1}{2}(\alpha\delta_{(a,c)} + (1-\alpha)\delta_{(a,d)} + (1-\alpha)\delta_{(b,c)} + \alpha\delta_{(b,d)})$ $\boldsymbol{\Pi(\mu, \nu) = \{\Pi_\alpha | \alpha \in [0, 1]\}}$

Question 5

Calculer : $I[\Pi] \forall \Pi \in \Pi(\mu, \nu)$

Solution: $I[\Pi_\alpha] = \int_{\mathbb{R}^2} C(x, y)\, d\Pi_\alpha(x, y)$
$I[\Pi_\alpha] = \frac{1}{2}(\alpha C(a, c) + (1-\alpha)C(a, d) + (1-\alpha)C(b, c) + \alpha C(b, d))$
$I[\Pi_\alpha] = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) - \alpha(ac + bd) - (1-\alpha)(ad + cb)$

Question 6

Trouver : $\tau_c(\mu, \nu)$

Solution: $P(\alpha) = \frac{\partial I[\Pi_\alpha]}{\partial \alpha} \implies P(\alpha) = -ac - bd + ad + cb; \implies P(\alpha) = (d - c)(a - b) < 0$
Donc, $I[\Pi_\alpha]$ atteint son min en $\alpha = 1$
$\Pi_0 = \Pi_{\alpha=1}$
Donc, $a \longrightarrow c$ et, $b \longrightarrow d$

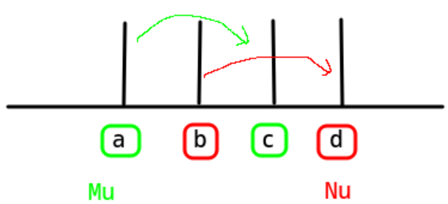

Figure 1.3: Solution

1.3 La formulation du problème de transfert optimal de Monge

Note:-
On autorise pas le fait de couper les masses. A chaque x est associé une unique y.
On dit que T envoie μ sur ν et on note : $T\#\mu = \nu$

Proposition 1.3.1
$\forall A \subset \mathbb{R}$ partie mesurable : $\nu(A) = \mu(T^{-1}(A))$

$\Leftrightarrow$

Proposition 1.3.2

$\forall \varphi$ continue : $\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}} (\varphi o T)(x)\, d\mu(x)$

$\tau_c^M(\mu,\nu) = INF_{TtqT\#f=\nu} I[T]$

$I(T) = \int_{\mathbb{R}} C(x, T(x))\, d\mu(x)$

Note:-

Solution de cout optimal d'après Kantorovitch $\leq$ Solution de cout optimal d'après Monge
Dans le première exemple ils coincident.

Note:-

Kantorovitch définit un problème linéare en Π.
Monge définit un problème non linéare en T.

Note:-

Problème de kantorovitch admet toujours une solution Π_0.
Problème de Monge n'admet pas toujours de solution n'y même d'application qui envoi μ sur ν.

Example 1.3.1

$\begin{cases} \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \\ \nu = \delta_a \end{cases}$

Kantorovitch : $\Pi(\mu,\nu) = \{\mu \otimes \delta_a\}$
Monge : Quelles sont les T tel que $T\#\mu = \nu$?
Il en existe une seule:

$$\forall x | T : \left| \begin{array}{ccc} x & \longrightarrow & a \\ \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$\tau_c^M(\mu,\nu) = \tau_c(\mu,\nu)$
D'une part :

$\tau_c^M(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(T(x), x)\, d\mu(x)$

$\tau_c^M(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(0, x)\, d\mu(x)$ D'autre part :

$\tau_c(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x,y)\, d\Pi(x,y)$

$\tau_c(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x,y)\, d(\mu \otimes \delta_a)(x,y)$

$\tau_c(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x,y)\, d\mu(x) d\delta_a$

$\tau_c(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}} C(x,0)\, d\mu(x)$

Example 1.3.2

$\begin{cases} \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{x_i} \\ \nu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{y_i} \end{cases}$

Les plans de transporte Π entre μ et ν peuvent être représenté par des matrices bistochastiques de tailles n.

$0 \leq \Pi_{i,j} \leq 1$
$\sum_{i=1}^n \Pi_{i,j} = 1$
$\sum_{j=1}^n \Pi_{i,j} = 1$

Note:-

On note $\mathcal{B}_n$ l'enssemble des matrices bisctochastiques.

Soit $\Pi \in \mathcal{B}_n$: $I[\Pi] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C(x_i, y_i)\Pi_{i,j}$
$\tau_c(\mu, \nu) = INF_{\Pi \in \mathcal{B}_n}\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Pi_{i,j} C(x_i, y_i)$
Il s'agit d'un problème linéaire de minimisation sur un enssemble convexe.

Proposition 1.3.3 Enssemble convexe

$\mathcal{B}_n$ est convexe $\Leftrightarrow A, B \in \mathcal{B}_n$ alors $\forall \theta \in [0,1] | \theta A + (1-\theta)B \in \mathcal{B}_n$

Definition 1.3.1: Points extremaux

L'enssemble des points extremaux de E convexe est l'enssemble des $e \in E$ tel que :
si $e = \theta e_1 + (1-\theta)e_2$ avec $\theta \in [0,1], e_1 \in E, e_2 \in E$
Alors $\theta = 0$ ou $\theta = 1$

Theorem 1.3.1 Théorème de Choquet

F est linéaire sur un domaine K convexe et compact, alors F admet au moin un minimum. Parmi les minimums de F au moin l'un d'eux est un extrema de K.

Theorem 1.3.2 Théorème de Birkhoff

$\mathcal{B}_n$ est convexe et compact.
$\mathcal{B}_n$ admet n points extremaux qui sont les matrices de permutations
Ainsi, le min pour le problème de Kantorovitch est atteint pour $\begin{cases} \Pi_{i,j} = 1 | sij = \sigma(i) \\ \Pi_{i,j} = 0 | sinon \end{cases}$

Chapter 2

TD

2.1 TD1

Exercice

Exercice 1. On considère le coût $c(x,y) = |x-y|$. Dans chacun des cas, donner les solutions des problèmes de Monge et de Kantorovitch.
1. $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_2 + \frac{1}{3}\delta_3,$
2. $\mu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \nu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1,$
3. $\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2, \quad \nu = \frac{1}{3}\delta_{-1} + \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_3.$

Solution: 1)

2)

3)

Exercice

Exercice 2. Soit $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $T(x) = x+1, S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $S(x) = 2x$ et $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $Z(x) = 2-x$. On définit $\mu = \mathbb{1}_{[0,1]}$ et $\nu = \mathbb{1}_{[1,2]}$. A-t-on $T\#\mu = \nu$? $S\#\mu = \nu$?$Z\#\mu = \nu$?

Exercice

Exercice 3. (Non-unicité pour un coût convexe - Book shifting). On définit $\mu = \mathbb{1}_{[0,2]}$ et $\nu = \mathbb{1}_{[1,3]}$ et le coût $c(x,y) = |x-y|$. Soit $T_1(x) = x+1$ et

$$T_2(x) = \begin{cases} x+2, \text{ si } x \in [0,1], \\ x, \text{ si } x \in (1,2]. \end{cases}$$

Montrer que T_1 et T_2 sont deux applications optimales.

Exercice

Exercice 4. (Non existence d'une application de transport). On prend μ la mesure uniforme sur $[0,1]$ et ν la mesure uniforme sur $[-1,1]$. On considère le coût $c(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)^2$. 1. Pour tout entier n on définit l'application

$$T_n(x) = \begin{cases} 2x - \frac{k}{2n}, & \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right] \text{ si } k \text{ est pair,} \\ -2x + \frac{k+1}{2n}, & \text{pour } x \in \left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right] \text{ si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Monter que $T_n\#\mu = \nu$ et montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 c\left(x, T_n(x)\right) d\mu(x) = 0.$$

2. En déduire qu'il n'esxite pas d'application de transport qui soit optimale. 3. Construire un plan de transport optimal.

Exercice

Exercice 5. (Transport quadratique et translation). On considère le coût $c(x,y)=(x-y)^2$ sur $\mathbb{R}^2$ Pour $a\in\mathbb{R}$, on définitit la translation $\tau_a(x)=x-a$. Soit f et g deux fonctions continues Le but est de montrer que

$$\mathcal{T}_c\left(f\circ\tau_a,g\circ\tau_b\right)=\mathcal{T}c(f,g)+(b-a)^2+2(b-a)\left(m_g-m_f\right),$$

où

$$m_f=\int_{\mathbb{R}} xf(x)dx,\quad m_g=\int_{\mathbb{R}} xg(x)dx.$$

1. Soit T une application optimale qui envoie f sur g. On définit S par $S(x)=T(x-a)+b$. Montrer que $S\#\left(f\circ\tau_a\right)=g\circ\tau_b$. 2. Montrer que

$$\mathcal{T}_c\left(f\circ\tau_a,g\circ\tau_b\right)\leqslant\int_{\mathbb{R}}|S(x)-x|^2 f\left(\tau_a(x)\right)\Big)dx$$

3. En déduire que

$$\mathcal{T}_c\left(f\circ\tau_a,g\circ\tau_b\right)\leqslant\mathcal{T}c(f,g)+(b-a)^2+2(b-a)\left(m_g-m_f\right),$$

4. De même montrer que

$$\mathcal{T}_c\left(f\circ\tau_a,g\circ\tau_b\right)\geqslant\mathcal{T}c(f,g)+(b-a)^2+2(b-a)\left(m_g-m_f\right),$$

et en déduire (1) 5. En déduire que $\mathcal{T}_c\left(\mathbb{1}_{[0,1]},\mathbb{1}_{[1,2]}\right)=1$.

Exercice

Exercice 6. (Non unicité des potentiels de Kantorovitch). Montrer que si (φ,ψ) est une paire optimale de potentiel de Kantorovitch, alors, pour tout $a\in\mathbb{R}$, la paire $(\varphi+a,\psi-a)$ l'est aussi.

Exercice

Exercice 7. (Potentiels de Kantorovitch). Donner au moins une paire optimale de potentiel de Kantorovitch pour le book-shifting problem.

Exercice

Exercice 8. Pour $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$, on considère le coutt $c(x,y)=\Psi(|x-y|)$ avec

$$\Psi(z)=\begin{cases}1-z, & 0\leqslant z\leqslant 1\\ z-1, & z\geqslant 1.\end{cases}$$

On considère les mesures $\mu=\frac{1}{2}\left(\delta_{-1}+\delta_2\right)$ et $\nu=\frac{1}{3}\left(\delta_{-1}+\delta_0+\delta_1\right)$. Calculer le coût global du transport optimal entre μ et ν, et donner l'ensemble des plans de transport optimaux.