Florian Börgel

Turbulenzmodelle

Universität Oldenburg
Sommersemester 2016
2. Juni 2016

Gliederung

DNS Verfahren

Die größten Wirbel in der Strömung haben den größten Anteil an dem Transport von Bewegung und Energie. Die größte Skala wird also durch

$$L \tag{1}$$

festgelegt. Die Größe der kleinsten Skala wird durch die Viskosität definiert. (Kinetische Energie wird in Wärme dissipiert)

$$\eta = (\frac{\nu^3}{\epsilon})^{1/4} \tag{2}$$

ϵ - Dissipationsrate
ν - Viskosität

Turbulente Längenskalen

$$\epsilon \sim \frac{U^3}{L} \tag{3}$$

$$\eta = \frac{\nu^3 * L}{U^3} \tag{4}$$

Für $1D$ gilt also:

$$\frac{L}{\eta} = Re^{3/4} \tag{5}$$

(de Bruyn Kops: 8000*8000*8000)

Schließungsproblem der Turbulenz

Vereinfachungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i \tag{6}$$

$$\sum_{j=x,y,z} u_j \partial_j = u_j \partial_j \tag{7}$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations (RANS)

$$\partial_t u_i + \partial_j u_j u_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p + \nu \partial_j^2 u_i \tag{8}$$

gemitteltep equation:

$$\partial_t \overline{u_i} + \partial_j \overline{u_j u_i} = -\frac{1}{\rho}\partial_i \overline{p} + \nu \partial_j^2 \overline{u_i} \tag{9}$$

Reynolds Decomposition

$$u = \overline{u} + u' \tag{10}$$

Einsetzen:

$$\partial_t \overline{\bar{u_i}} + \partial_t \overline{u_i'} + \partial_j(\overline{\bar{u_i} * \bar{u_j}} + \overline{\bar{u_i} * u_j'} + \overline{u_i' * \bar{u_j}} + \overline{u_i' * u_j'}) \tag{11}$$

$$= -\frac{1}{\rho} * \partial_i * (\overline{\bar{p} + p'}) + \nu * \partial_j^2(\overline{\bar{u_i} + u_i'}) \tag{12}$$

Es gilt $\overline{u'}, \overline{p'} = 0$, daher:

$$\partial_t \bar{u}_i + \partial_j(\overline{u_i u_j} + \color{red}{\overline{u_i' u_j'}}) = -\frac{1}{\rho}\partial_i \bar{p} + \nu * \partial_j^2 \bar{u}_i \tag{13}$$

$$\partial_t u_i + \partial_j(\overline{u_i' u_j'}) = -\frac{1}{\rho}\partial_i \bar{p} + \partial_j(\nu \partial_j \bar{u}_i - \color{red}{\overline{u_i' u_j'}}) \tag{14}$$

$\tau_{ij,turb} = -\rho \overline{u_i' u_j'}$ = Reynold-Stress-Tensor

Wie kann man den Reynold-Stress-Term beschreiben? Auch als Transport-Gleichung?

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \overline{u_i' u_j'} + u_a \partial_a \overline{u_i' u_j'} = \\
&- \overline{u_j' u_a'} \partial_a \bar{u}_i - \overline{u_j' u_a'} \partial_a \overline{u_j} - \partial_a \overline{u_i' u_j' u_a'} \\
&- \frac{1}{\rho}(\partial_i \overline{u_j' p'} + \partial_j \overline{u_i' p'}) + \frac{1}{\rho}(\overline{p' \partial_i u_j'} + \overline{p' \partial_j u_i'}) + \nu(\partial_a^2 \overline{u_j' u_i'} - 2\overline{\partial_a u_i' \partial_a u_j'})
\end{aligned}
$$

Umformen:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \overline{u_i' u_j'} + u_a \partial_a \overline{u_i' u_j'} = \\
&- \overline{u_j' u_a'} \partial_a \bar{u}_i - \overline{u_i' u_a'} \partial_a \overline{u_j} - 2\nu \overline{\partial_a u_i' \partial_a u_j'} \\
&+ \overline{\frac{p'}{\rho}(\partial_i u_j' + \partial_j u_i')} + \partial_a(\nu \partial_a \overline{u_j' u_i'} - \overline{u_i' u_j' u_a'} - \frac{1}{\rho}(\partial_i \overline{u_j' p'} + \partial_j \overline{u_i' p'}))
\end{aligned}
$$

Mit dieser Transportgleichung, kann nun die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie aufgestellt werden.
Diese ist definiert als: $\overline{k} = \frac{1}{2}\overline{u_j'^2}$ Setzt man nun in der Transport-Gleichung: i = j erhält man:

$$2\partial_t \overline{k} + 2\overline{u_a}\partial_a \overline{k} = -2\overline{u_j' u_a'}\partial_a \bar{u}_j - 2\nu\overline{\partial_a u_j' \partial_a u_j'}$$

$$+\overline{\frac{p'}{\rho}(\partial_j u_j' + \partial_j u_j')} + \partial_a(2\nu\partial_a \overline{k} - 2\overline{k u_a'} - \frac{2}{\rho}(\partial_j \overline{u_j' p'}))$$

$$\partial_t \overline{k} + \overline{u_k} \partial_k \overline{k} = -\overline{u_j' u_a'} \partial_a \bar{u}_j - \bar{\epsilon} - \partial_a (\nu \partial_a \overline{k} - \overline{k u_a'} - \frac{1}{\rho} (\partial_j \overline{u_j' p'}))$$

Viele neue Unbekannte, aber immer noch keine Lösung.

Turbulenz Modelle:
Die bisherigen Gleichungen sind nicht geschlossen. Deshalb wird der Reynold-Stress-Tensor modelliert.

$$\overline{u_i' u_j'} = \nu_t(\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j) - \frac{2}{3}\overline{k}\delta_{ij}$$

ν_t ist die Wirbelviskosität (Analog zur Idee vom molekularen shear stress)

Turbulenz Modelle

Es gibt verschiedene Modelle um das Problem zu lösen. Hier Wirbelviskosität-Modelle

Prandtl mixing-length: $\nu_t = l_m^2 \overline{S_{ij}}$

TKE Modelle: e.g Prandtl-Kolmogorov: $\nu_t = C_\mu l_{pk} \sqrt{k}$

k-ϵ-Modell $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$

Prandtl mixing-length:

$$\nu_t = l_m^2 \overline{S_{ij}}, \qquad \overline{S_{ij}} = \frac{1}{2}(\partial_i \overline{u_j} + \partial_j \overline{u_i}) \tag{15}$$

- Based on dimensional analysis
- Empirical methods for determining l_m
- Assumption $l_m = \text{const.}$

k-ϵ-Modell

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$\partial_t \overline{k} + \overline{u_i} \partial_i \overline{k} = P_k - \overline{\epsilon} + \partial_i \left(\frac{\nu_t}{Pr_k} \partial_i \overline{k} \right)$$

$$\partial_t \overline{\epsilon} + \overline{u_i} \partial_i \overline{\epsilon} = \partial_i \left(\frac{\nu_t}{Pr_k} \partial_i \overline{k} \right) + \frac{\overline{\epsilon}}{\overline{k}} \left(c_{\epsilon 1} P_k + c_{\epsilon 2} \overline{\epsilon} \right)$$

Ende

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Haben Sie Fragen?