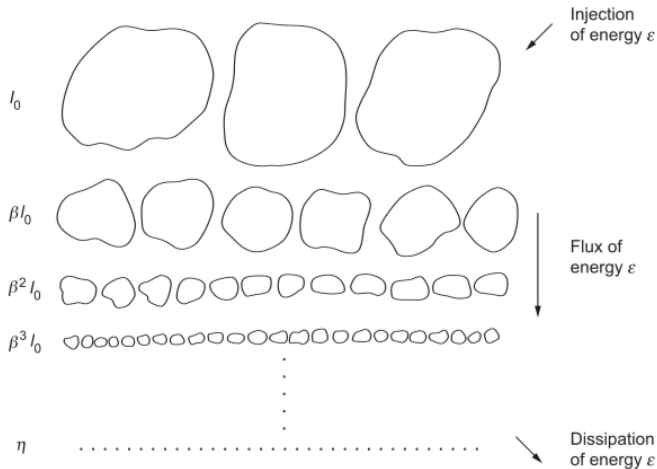


Turbulenzmodelle

Universität Oldenburg
Sommersemester 2016
11. Juni 2016

- 1 Direct Numerical Simulation
- 2 Reynold-Averaged Navier-Stokes Equation
- 3 Schließungs Problem der Turbulenz
- 4 Transport Energy Equation
- 5 Turbulenz-Modelle
- 6 k - ϵ Model
- 7 Einsatz in der Ozeanographie

- 1 Direct Numerical Simulation
- 2 Reynold-Averaged Navier-Stokes Equation
- 3 Schließungs Problem der Turbulenz
- 4 Transport Energy Equation
- 5 Turbulenz-Modelle
- 6 k - ϵ Model
- 7 Einsatz in der Ozeanographie



Die größten Wirbel in der Strömung haben den größten Anteil an dem Transport von Bewegung und Energie. Die größte Skala wird also durch

$$L \quad (1)$$

festgelegt. Die Größe der kleinsten Skala wird durch die Viskosität definiert. (Kinetische Energie wird in Wärme dissipiert)

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \quad (2)$$

ϵ - Dissipationsrate

ν - Viskosität

$$\epsilon \sim \frac{U^3}{L} \quad (3)$$

$$\eta = \frac{\nu^3 * L}{U^3} \quad (4)$$

Für 1D gilt also:

$$\frac{L}{\eta} = Re^{3/4} \quad (5)$$

aktueller Stand: 8000 * 8000 * 8000

de Bruyn Kops, S.M., 2015. Classical scaling and intermittency in strongly stratified Boussinesq turbulence. Journal of Fluid Mechanics 775, 436–463. doi:10.1017/jfm.2015.274

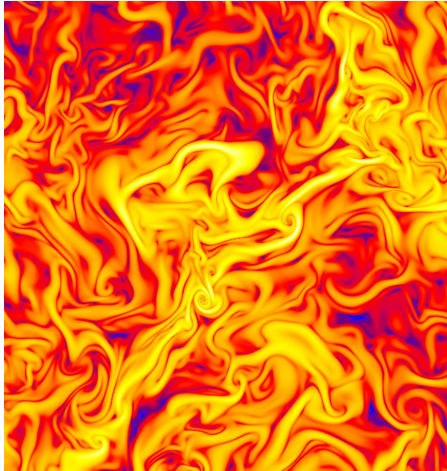


Abbildung: DNS Simulation

- 1 Direct Numerical Simulation
- 2 Reynold-Averaged Navier-Stokes Equation
- 3 Schließungs Problem der Turbulenz
- 4 Transport Energy Equation
- 5 Turbulenz-Modelle
- 6 k - ϵ Model
- 7 Einsatz in der Ozeanographie

$$\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i \quad (6)$$

$$\sum_{j=x,y,z} u_j \partial_j = u_j \partial_j \quad (7)$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations

NSE:

$$\partial_t u_i + \partial_j u_j u_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \partial_j^2 u_i \quad (8)$$

gemittelte Gleichung:

$$\partial_t \bar{u}_i + \partial_j \bar{u}_j \bar{u}_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{p} + \nu \partial_j^2 \bar{u}_i \quad (9)$$

Reynolds-Zerlegung:

$$u = \bar{u} + u' \quad (10)$$

Einsetzen:

$$\partial_t \bar{u}_i + \partial_t \overline{u'_i} + \partial_j (\bar{u}_i * \bar{u}_j + \overline{\bar{u}_i * u'_j} + \overline{u'_i * \bar{u}_j} + \overline{u'_i * u'_j}) \quad (11)$$

$$= -\frac{1}{\rho} * \partial_i * (\bar{p} + \overline{p'}) + \nu * \partial_j^2 (\bar{u}_i + \overline{u'_i}) \quad (12)$$

Es gilt $\overline{u'}, \overline{p'} = 0$, daher:

$$\partial_t \bar{u}_i + \partial_j (\overline{u_i u_j} + \overline{u'_i u'_j}) = -\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{p} + \nu * \partial_j^2 \bar{u}_i \quad (13)$$

$$\partial_t u_i + \partial_j (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{p} + \partial_j (\nu \partial_j \bar{u}_i - \overline{u'_i u'_j}) \quad (14)$$

$$\tau_{ij,turb} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \text{Reynold-Stress-Tensor}$$

- 1 Direct Numerical Simulation
- 2 Reynold-Averaged Navier-Stokes Equation
- 3 Schließungs Problem der Turbulenz**
- 4 Transport Energy Equation
- 5 Turbulenz-Modelle
- 6 k - ϵ Model
- 7 Einsatz in der Ozeanographie

Wie kann man den Reynold-Stress-Term beschreiben? Auch als Transport-Gleichung?

$$u_j - \bar{u}_j$$

Umformen:

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{u'_j u'_j} + u_a \partial_a \overline{u'_j u'_j} = \\ - \overline{u'_j u'_a} \partial_a \bar{u}_j - \overline{u'_j u'_a} \partial_a \bar{u}_j - 2\nu \overline{\partial_a u'_j \partial_a u'_j} \\ + \frac{\overline{p'}}{\rho} (\partial_i u'_j + \partial_j u'_i) + \partial_a (\nu \overline{\partial_a u'_j u'_i} - \overline{u'_j u'_i u'_a} - \frac{1}{\rho} (\partial_i \overline{u'_j p'} + \partial_j \overline{u'_i p'})) \end{aligned}$$

- 1 Direct Numerical Simulation
- 2 Reynold-Averaged Navier-Stokes Equation
- 3 Schließungs Problem der Turbulenz
- 4 Transport Energy Equation**
- 5 Turbulenz-Modelle
- 6 k - ϵ Model
- 7 Einsatz in der Ozeanographie

Mit dieser Transportgleichung, kann nun die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie aufgestellt werden.

Diese ist definiert als: $\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{u_j'^2}$ Setzt man nun in der Transport-Gleichung: $i = j$ erhält man:

$$2\partial_t \bar{k} + 2\bar{u}_a \partial_a \bar{k} = -2\overline{u_j' u_a'} \partial_a \bar{u}_j - 2\nu \overline{\partial_a u_j' \partial_a u_j'} \\ + \overline{\frac{p'}{\rho} (\partial_j u_j' + \partial_j u_j')} + \partial_a (2\nu \partial_a \bar{k} - 2\overline{k u_a'} - \frac{2}{\rho} (\partial_j \overline{u_j' p'}))$$

$$\partial_i u_i = 0$$

$$\overline{\frac{p'}{\rho} (\partial_j u_j' + \partial_j u_j')} = 0$$

$$\underbrace{\partial_t \bar{k}}_L + \underbrace{\bar{u}_k \partial_k \bar{k}}_C = - \underbrace{\overline{u'_j u'_a} \partial_a \bar{u}_j}_P - \underbrace{\bar{\epsilon}}_{DS} - \underbrace{\partial_a (\nu \partial_a \bar{k} - \overline{k u'_a} - \frac{1}{\rho} (\partial_j \overline{u'_j p'}))}_{TS}$$

L: Local change

C: convective change

P: Production

DS: dissipation

TS: Transport

- 1 Direct Numerical Simulation
- 2 Reynold-Averaged Navier-Stokes Equation
- 3 Schließungs Problem der Turbulenz
- 4 Transport Energy Equation
- 5 Turbulenz-Modelle**
- 6 k - ϵ Model
- 7 Einsatz in der Ozeanographie

Die bisherigen Gleichungen sind nicht geschlossen. Deshalb wird der Reynold-Stress-Tensor modelliert.

$$\overline{u_i' u_j'} = \nu_t (\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j) - \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij}$$

ν_t ist die Wirbelviskosität (Analog zur Idee vom molekularen shear stress)

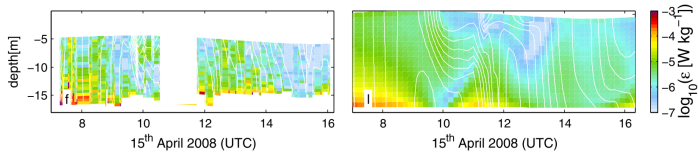


Abbildung: (links) Beobachtete und (rechts) simulierte vertikale Profile [2]

Es gibt verschiedene Modelle um das Problem zu lösen. Hier Wirbelviskosität-Modelle

Prandtl mixing-length: $\nu_t = l_m^2 \overline{S_{ij}}$ algebraisch

Prandtl-Kolmogorov: $\nu_t = C_\mu l_{pk} \sqrt{k}$ 1-Gleichungs-Modell

k- ϵ -Modell $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$ 2-Gleichungs-Modell

Prandtl mixing-length

:

$$\nu_t = l_m^2 \overline{S_{ij}}, \quad \overline{S_{ij}} = \frac{1}{2}(\partial_i \overline{u_j} + \partial_j \overline{u_i}) \quad (15)$$

- Based on dimensional analysis
- Empirical methods for determining l_m
- Assumption $l_m = \text{const.}$

- 1 Direct Numerical Simulation
- 2 Reynold-Averaged Navier-Stokes Equation
- 3 Schließungs Problem der Turbulenz
- 4 Transport Energy Equation
- 5 Turbulenz-Modelle
- 6 k- ϵ Model**
- 7 Einsatz in der Ozeanographie

Setzen wir diese Beziehung einmal ein:

$$P = (\nu_t(\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j) - \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij}) \partial_j \bar{u}_i$$
$$TS = \partial_i \left(\frac{\nu_t}{Pr_k} \partial_i \bar{k} \right)$$

3-Navierstokes-Gleichungen Kontinuitätsgleichung

$$\text{Energiekaskade : } \nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$k - \text{Gleichung : } \partial_t \bar{k} + \bar{u}_i \partial_i \bar{k} = P_k - \bar{\epsilon} + \partial_i \left(\frac{\nu_t}{Pr_k} \partial_i \bar{k} \right)$$

$$\epsilon - \text{Gleichung : } \partial_t \bar{\epsilon} + \bar{u}_i \partial_i \bar{\epsilon} = \partial_i \left(\frac{\nu_t}{Pr_k} \partial_i \bar{k} \right) + \frac{\epsilon}{k} (c_{\epsilon 1} P_k + c_{\epsilon 2} \bar{\epsilon})$$

U. Riemenschneider hat in Ihrem Paper gezeigt, dass das numerische Mischen die Turbulenzmodellierung stark beeinflusst, bzw. komplett ersetzen kann.

- Turbulenzmodelle werden auf das numerische Mischen kalibriert.
- Nur bei kleinen Gittern nicht wichtig.

- 1 Direct Numerical Simulation
- 2 Reynold-Averaged Navier-Stokes Equation
- 3 Schließungs Problem der Turbulenz
- 4 Transport Energy Equation
- 5 Turbulenz-Modelle
- 6 k - ϵ Model
- 7 Einsatz in der Ozeanographie

Wie werden diese Ideen jetzt in der Ozeanographie eingesetzt?

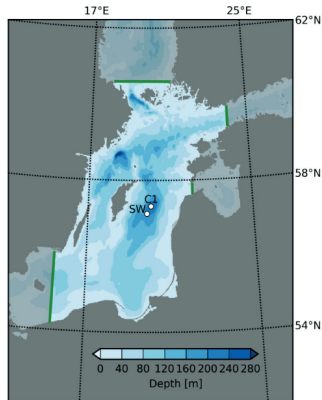
'two-equation turbulence closure models have emerged as work horses for vertical turbulent fluxes' - Die Küste, 81 (2014, 72)

⇒ k-ε Modell

Für die vertikalen turbulenten Strömungen gibt es bereits Schließungsmodelle. Bei horizontalen Strömungen ist es nicht so ausgeprägt. Hier wird die Diffusion entweder ignoriert oder eine konstante horizontale Viskosität gewählt. Ansätze sind jedoch vorhanden. LES-ähnlicher Ansatz:

$$A_h = c(\Delta x \Delta y) \sqrt{(\partial_x u)^2 * \frac{1}{2}(\partial_y u + \partial_x v)^2 + (\partial_y v)^2}$$

GETM (General Estuarine Transport Model): 3D Transportmodell für Ozeane



- Purkiani, K., J. Becherer, G. Floser, u. Gräwe, V. Mohrholz, H. M. Schuttelaars, and H. Burchard (2015), Numerical analysis of stratification and destratification processes in a tidally energetic inlet with an ebb tidal delta, J. Geophys. Res. Oceans, 120, 225–243, doi:10.1002/2014JC010325.
- Riemenschneider, U., Legg, S., 2007. Regional simulations of the Faroe Bank Channel overflow in a level model. Ocean Modelling 17, 93–122.
- de Bruyn Kops, S.M., 2015. Classical scaling and intermittency in strongly stratified Boussinesq turbulence. Journal of Fluid Mechanics 775, 436–463. doi:10.1017/jfm.2015.274
- H. Burchard, U. Gräwe, P. Holtermann, K. Klingbeil a. Lars Umlauf, Turbulence Closure Modelling in Coastal Waters, Die Küste, 81 (2014), 69–87

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!
Haben Sie Fragen?

