

Turbulenzmodelle

Universität Oldenburg
Sommersemester 2016
30. Mai 2016

- 1 Direct Numerical Simulation
- 2 Reynold-Averaged Navier-Stokes Equation
- 3 Schließungsproblem der Turbulenz
- 4 Transport Energy Equation
- 5 k - ϵ Model
- 6 Schließungs Problem der Turbulenz

Die größten Wirbel in der Strömung haben den größten Anteil an dem Transport von Bewegung und Energie. Die größte Skala wird also durch

$$L \quad (1)$$

festgelegt. Die Größe der kleinsten Skala wird durch die Viskosität definiert. (Kinetische Energie wird in Wärme dissipiert)

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4} \quad (2)$$

ϵ - Dissipationsrate

ν - Viskosität

$$\epsilon \sim \frac{U^3}{L} \quad (3)$$

$$\eta = \frac{\nu^3 * L}{U^3} \quad (4)$$

Für 1D gilt also:

$$\frac{L}{\eta} = Re^{3/4} \quad (5)$$

(de Bruyn Kops: 8000*8000*8000)

Schließungsproblem der Turbulenz

Vereinfachungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i \quad (6)$$

$$\sum_{j=x,y,z} u_j \partial_j = u_j \partial_j \quad (7)$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations (RANS)

$$\partial_t u_i + \partial_j u_j u_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \partial_j^2 u_i \quad (8)$$

gemittelte equation:

$$\partial_t \bar{u}_i + \partial_j \bar{u}_j \bar{u}_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{p} + \nu \partial_j^2 \bar{u}_i \quad (9)$$

Reynolds Decomposition

$$u = \bar{u} + u' \quad (10)$$

Einsetzen:

$$\partial_t \bar{u}_i + \partial_t \bar{u}'_i + \partial_j (\bar{u}_i * \bar{u}_j + \bar{u}_i * u'_j + u'_i * \bar{u}_j + \overline{u'_i * u'_j}) \quad (11)$$

$$= -\frac{1}{\rho} * \partial_i * (\bar{p} + p') + \nu * \partial_j^2 (\bar{u}_i + \overline{u'_i}) \quad (12)$$

Es gilt $\overline{u'}, \overline{p'} = 0$, daher:

$$\partial_t \bar{u}_i + \partial_j (\bar{u}_i \bar{u}_j + \overline{u'_i u'_j}) = -\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{p} + \nu * \partial_j^2 \bar{u}_i \quad (13)$$

$$\partial_t u_i + \partial_j (\overline{u'_i u'_j}) = -\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{p} + \partial_j (\nu \partial_j \bar{u}_i - \overline{u'_i u'_j}) \quad (14)$$

$$\tau_{ij,turb} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \text{Reynold-Stress-Tensor}$$

Wie kann man den Reynold-Stress-Term beschreiben? Auch als Transport-Gleichung?

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{u'_i u'_j} + u_k \partial_k \overline{u'_i u'_j} = & \\ & - \overline{u'_j u'_k} \partial_k \bar{u}_i - \overline{u'_j u'_k} \partial_k \bar{u}_j - \partial_k \overline{u'_i u'_j} u'_k \\ & - \frac{1}{\rho} (\partial_i \overline{u'_j p'} + \partial_j \overline{u'_i p'}) + \frac{1}{\rho} (\overline{p' \partial_i u'_j} + \overline{p' \partial_j u'_i}) + \nu (\partial_k^2 \overline{u'_j u'_i} - 2 \overline{\partial_k u'_i \partial_k u'_j}) \end{aligned}$$

Umformen:

$$\begin{aligned} \partial_t \overline{u'_i u'_j} + u_k \partial_k \overline{u'_i u'_j} = & \\ & - \overline{u'_j u'_k} \partial_k \bar{u}_i - \overline{u'_j u'_k} \partial_k \bar{u}_j - 2\nu \overline{\partial_k u'_i \partial_k u'_j} \\ & + \frac{\overline{p'}}{\rho} (\partial_i \overline{u'_j} + \partial_j \overline{u'_i}) + \partial_k (\nu \partial_k \overline{u'_j u'_i} - \overline{u'_i u'_j} u'_k - \frac{1}{\rho} (\partial_i \overline{u'_j p'} + \partial_j \overline{u'_i p'})) \end{aligned}$$

Mit dieser Transportgleichung, kann nun die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie aufgestellt werden.

Diese ist definiert als: $\bar{k} = \frac{1}{2} \overline{u_j'^2}$ Setzt man nun in der Transport-Gleichung: $i = j$ erhält man:

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{k} + \bar{u}_k \partial_k \bar{k} = & -\overline{u_j' u_k'} \partial_k \bar{u}_j - \overline{u_j' u_k'} \partial_k \bar{u}_j - 2\nu \overline{\partial_k u_j' \partial_k u_j'} \\ & + \overline{\frac{p'}{\rho} (\partial_j u_j' + \partial_j u_j')} + \partial_k (\nu \partial_k \bar{k} - \overline{k u_k'} - \frac{1}{\rho} (\partial_j \overline{u_j' p'} + \partial_j \overline{u_j' p'})) \end{aligned}$$

$$\partial_t \bar{k} + \overline{u_k} \partial_k \bar{k} = -$$

Turbulenz Modelle:

Die bisherigen Gleichungen sind nicht geschlossen. Deshalb wird der Reynold-Stress-Tensor modelliert.

$$\overline{u'_i u'_j} = \nu_t (\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j) - \frac{2}{3} \bar{k} \delta_{ij}$$

ν_t ist die Wirbelviskosität (Analog zur Idee vom molekularen shear stress)

Turbulenz Modelle

Es gibt verschiedene Modelle um das Problem zu lösen.

Prandtl mixing-length: $\nu_t = l_m^2 \overline{S_{ij}}$

TKE Modelle: e.g Prandtl-Kolmogorov: $\nu_t = C_\mu l_{pk} \sqrt{k}$

k- ϵ -Modell $\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$

Prandtl mixing-length:

$$\nu_t = l_m^2 \overline{S_{ij}}, \quad \overline{S_{ij}} = \frac{1}{2}(\partial_i \overline{u_j} + \partial_j \overline{u_i}) \quad (15)$$

- Based on dimensional analysis
- Empirical methods for determining l_m
- Assumption $l_m = \text{const.}$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (16)$$

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!
Haben Sie Fragen?

