Florian Börgel

Turbulenzmodelle

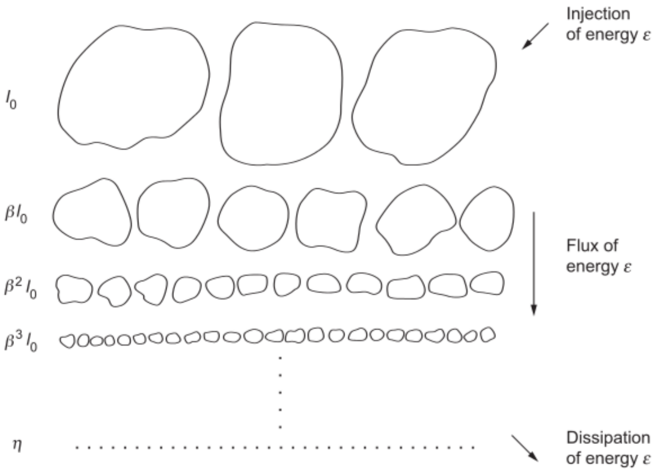
Universität Oldenburg
Sommersemester 2016
8. Juni 2016

Gliederung

1. Direct Numerical Simulation
2. Reynold-Averaged Navier-Stokes Equation
3. Schließungs Problem der Turbulenz
4. Transport Energy Equation
5. Turbulenz-Modelle
6. k-ϵ Model
7. Einsatz in der Ozeanographie

Inhaltsverzeichnis

DNS



Injection
of energy ε
l_0
βl_0
$\beta^2 l_0$
$\beta^3 l_0$
Flux of
energy ε
η
Dissipation
of energy ε

DNS

Die größten Wirbel in der Strömung haben den größten Anteil an dem Transport von Bewegung und Energie. Die größte Skala wird also durch

$$L \tag{1}$$

festgelegt. Die Größe der kleinsten Skala wird durch die Viskosität definiert. (Kinetische Energie wird in Wärme dissipiert)

$$\eta = (\frac{\nu^3}{\epsilon})^{1/4} \tag{2}$$

ϵ - Dissipationsrate
ν - Viskosität

Turbulente Längenskalen

$$\epsilon \sim \frac{U^3}{L} \tag{3}$$

$$\eta = \frac{\nu^3 * L}{U^3} \tag{4}$$

Für $1D$ gilt also:

$$\frac{L}{\eta} = Re^{3/4} \tag{5}$$

aktueller Stand: $8000 * 8000 * 8000$

de Bruyn Kops, S.M., 2015. Classical scaling and intermittency in strongly stratified Boussinesq turbulence. Journal of Fluid Mechanics 775, 436–463. doi:10.1017/jfm.2015.274

Inhaltsverzeichnis

Vereinfachungen

$$\frac{\partial}{\partial t} = \partial_t, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \partial_x, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i \tag{6}$$

$$\sum_{j=x,y,z} u_j \partial_j = u_j \partial_j \tag{7}$$

Reynolds-Averaged Navier-Stokes Equations

NSE:

$$\partial_t u_i + \partial_j u_j u_i = -\frac{1}{\rho}\partial_i p + \nu \partial_j^2 u_i \tag{8}$$

gemittelte Gleichung:

$$\partial_t \overline{u_i} + \partial_j \overline{u_j u_i} = -\frac{1}{\rho}\partial_i \overline{p} + \nu \partial_j^2 \overline{u_i} \tag{9}$$

Reynolds-Zerlegung:

$$u = \overline{u} + u' \tag{10}$$

Einsetzen:

$$\partial_t \overline{\bar{u_i}} + \partial_t \overline{u_i^{'}} + \partial_j (\overline{\bar{u_i} * \bar{u_j}} + \overline{\bar{u_i} * u_j^{'}} + \overline{u_i^{'} * \bar{u_j}} + \overline{u_i^{'} * u_j^{'}}) \tag{11}$$

$$= -\frac{1}{\rho} * \partial_i * (\overline{\bar{p} + p^{'}}) + \nu * \partial_j^2 (\overline{\bar{u_i} + u_i^{'}}) \tag{12}$$

Es gilt $\overline{u^{'}}, \overline{p^{'}} = 0$, daher:

$$\partial_t \bar{u_i} + \partial_j (\overline{u_i u_j} + \overline{u_i^{'} u_j{'}}) = -\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{p} + \nu * \partial_j^2 \bar{u_i} \tag{13}$$

$$\partial_t u_i + \partial_j (\overline{u_i^{'} u_j^{'}}) = -\frac{1}{\rho} \partial_i \bar{p} + \partial_j (\nu \partial_j \bar{u_i} - \overline{u_i^{'} u_j{'}}) \tag{14}$$

$\tau_{ij,turb} = -\rho \overline{u_i^{'} u_j{'}}$ = Reynold-Stress-Tensor

Inhaltsverzeichnis

Wie kann man den Reynold-Stress-Term beschreiben? Auch als Transport-Gleichung?

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \overline{u_i' u_j'} + u_a \partial_a \overline{u_i' u_j'} = \\
&- \overline{u_j' u_a'} \partial_a \bar{u}_i - \overline{u_j' u_a'} \partial_a \overline{u_j} - \partial_a \overline{u_i' u_j' u_a'} \\
&- \frac{1}{\rho}(\partial_i \overline{u_j' p'} + \partial_j \overline{u_i' p'}) + \frac{1}{\rho}(\overline{p' \partial_i u_j'} + \overline{p' \partial_j u_i'}) + \nu(\partial_a^2 \overline{u_j' u_i'} - 2\overline{\partial_a u_i' \partial_a u_j'})
\end{aligned}
$$

Umformen:

$$
\begin{aligned}
&\partial_t \overline{u_i' u_j'} + u_a \partial_a \overline{u_i' u_j'} = \\
&- \overline{u_j' u_a'} \partial_a \bar{u}_i - \overline{u_i' u_a'} \partial_a \overline{u_j} - 2\nu \overline{\partial_a u_i' \partial_a u_j'} \\
&+ \overline{\frac{p'}{\rho}(\partial_i u_j' + \partial_j u_i')} + \partial_a(\nu \partial_a \overline{u_j' u_i'} - \overline{u_i' u_j' u_a'} - \frac{1}{\rho}(\partial_i \overline{u_j' p'} + \partial_j \overline{u_i' p'}))
\end{aligned}
$$

Inhaltsverzeichnis

Mit dieser Transportgleichung, kann nun die Transportgleichung für die turbulente kinetische Energie aufgestellt werden.
Diese ist definiert als: $\overline{k} = \frac{1}{2}\overline{u_j'^2}$ Setzt man nun in der Transport-Gleichung: i = j erhält man:

$$2\partial_t \overline{k} + 2\overline{u_a}\partial_a \overline{k} = -2\overline{u_j' u_a'}\partial_a \bar{u}_j - 2\nu\overline{\partial_a u_j' \partial_a u_j'}$$
$$+\overline{\frac{p'}{\rho}(\partial_j u_j' + \partial_j u_j')} + \partial_a(2\nu\partial_a \overline{k} - 2\overline{k u_a'} - \frac{2}{\rho}(\partial_j \overline{u_j' p'}))$$

$$\partial_i u_i = 0$$
$$\overline{\frac{p'}{\rho}(\partial_j u_j' + \partial_j u_j')} = 0$$

$$\underbrace{\partial_t \overline{k}}_{L} + \underbrace{\overline{u_k}\partial_k \overline{k}}_{C} = -\underbrace{\overline{u_j' u_a'}\partial_a \bar{u}_j}_{P} - \underbrace{\bar{\epsilon}}_{DS} - \underbrace{\partial_a\left(\nu \partial_a \overline{k} - \overline{k u_a'} - \frac{1}{\rho}\left(\partial_j \overline{u_j' p'}\right)\right)}_{TS}$$

Inhaltsverzeichnis

Turbulenz-Modelle

Die bisherigen Gleichungen sind nicht geschlossen. Deshalb wird der Reynold-Stress-Tensor modelliert.

$$\overline{u_i' u_j'} = \nu_t(\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j) - \frac{2}{3}\overline{k}\delta_{ij}$$

ν_t ist die Wirbelviskosität (Analog zur Idee vom molekularen shear stress)

Turbulenz-Modelle

Es gibt verschiedene Modelle um das Problem zu lösen. Hier Wirbelviskosität-Modelle

Prandtl mixing-length:	$\nu_t = l_m^2 \overline{S_{ij}}$	algebraisch
Prandtl-Kolmogorov:	$\nu_t = C_\mu l_{pk} \sqrt{k}$	1-Gleichungs-Modell
k-ϵ-Modell	$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$	2-Gleichungs-Modell

Prandtl mixing-length

:

$$\nu_t = l_m^2 \overline{S_{ij}}, \qquad \overline{S_{ij}} = \frac{1}{2}(\partial_i \overline{u_j} + \partial_j \overline{u_i}) \tag{15}$$

- Based on dimensional analysis
- Empirical methods for determining l_m
- Assumption $l_m = \text{const.}$

Inhaltsverzeichnis

Setzen wir diese Beziehung einmal ein:

$$P = -\overline{u_i' u_j'} \partial_j \overline{u_i}$$
$$P = (\nu_t(\partial_j \bar{u}_i + \partial_i \bar{u}_j) - \frac{2}{3}\overline{k}\delta_{ij})\partial_j \overline{u_i}$$
$$TS = \partial_a(\nu \partial_a \overline{k} - \overline{k u_a'} - \frac{1}{\rho}(\partial_j \overline{u_j' p'}))$$
$$TS = \partial_i(\frac{\nu_t}{Pr_k}\partial_i \overline{k})$$

k-ϵ-Modell

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$$

$$\partial_t \overline{k} + \overline{u_i} \partial_i \overline{k} = P_k - \overline{\epsilon} + \partial_i \left(\frac{\nu_t}{Pr_k} \partial_i \overline{k} \right)$$

$$\partial_t \overline{\epsilon} + \overline{u_i} \partial_i \overline{\epsilon} = \partial_i \left(\frac{\nu_t}{Pr_k} \partial_i \overline{k} \right) + \frac{\epsilon}{\overline{k}} \left(c_{\epsilon 1} P_k + c_{\epsilon 2} \overline{\epsilon} \right)$$

Inhaltsverzeichnis

Einsatz in der Ozeanographie

Wie werden dieses Ideen jetzt in der Ozeanographie eingesetzt?

> *'two-equation turbulence closure models have emerged as work horses for vertical turbulent fluxes' - Die Küste, 81 (2014, 72)*

$\Rightarrow$ k-ϵ Modell

Für die vertikalen turbulenten Strömungen gibt es bereits Schließungsmodelle. Bei horizontalen wird die Diffusion entweder ignoriert oder eine konstante horizontale Viskosität gewählt.

Ozeanmodellierung

GETM (General Estuarine Transport Model): 3D Transportmodell für Ozeane

Ozeanmodellierung

GETM (General Estuarine Transport Model): 3D Transportmodell für Ozeane

Kopplung mit $\Rightarrow$ GOTM (General Ocean Turbulence Modell)

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!
Haben Sie Fragen?