

Séries temporelles univariées

M1 ECAP – TD1 – Année 2024/2025

TD1 : Processus stochastiques

Responsable d'enseignement : Benoît SÉVI
benoit.sevi@univ-nantes.fr

DAËRON Djayan, CROCHET Florian

Table of contents

1	Chargement des packages nécessaires	2
2	Exercice 1 : Stationnarité de processus ARMA	3
2.1	Équation 1	3
2.2	Équation 2	3
2.3	Équation 3	4
2.4	Équation 4	4
2.5	Équation 5	5
2.6	Équation 6	5
3	Exercice 2	6
3.1	Paramètres généraux	6
3.2	$AR(1) : Y_t = 0,65Y_{t-1} + \epsilon_t$	7
3.2.1	Coefficients	7
3.2.2	Simulation du processus	7
3.2.3	Représentations	7
3.3	$AR(1) : Y_t = -0,65Y_{t-1} + \epsilon_t$	10
3.3.1	Coefficients	10
3.3.2	Simulation du processus	10
3.3.3	Représentations	10
3.4	$AR(2) : Y_t = 0,5Y_{t-1} - 0,4Y_{t-2} + \epsilon_t$	13
3.4.1	Coefficients	13
3.4.2	Simulation du processus	13
3.4.3	Représentations	13
3.5	$MA(1) : Y_t = \epsilon_t - 0,8\epsilon_{t-1}$	16
3.5.1	Coefficients	16
3.5.2	Simulation du processus	16
3.5.3	Représentations	16
3.6	$MA(2) : Y_t = \epsilon_t + 0,5\epsilon_{t-1} + 0,4\epsilon_{t-2}$	19
3.6.1	Coefficients	19
3.6.2	Simulation du processus	19
3.6.3	Représentations	19
3.7	$ARMA(1, 1) : Y_t = 0,9Y_{t-1} + \epsilon_t + 0,8\epsilon_{t-1}$	22
3.7.1	Coefficients	22
3.7.2	Simulation du processus	22
3.7.3	Représentations	22

1 Chargement des packages nécessaires

```
library(tseries)
library(forecast) # utilisée
library(FinTS)
library(Metrics)
library(TSA)

library(ggplot2) # utilisée
library(purrr) # utilisée
```

2 Exercice 1 : Stationnarité de processus ARMA

Pour chaque processus ci-dessous, il est demandé d'écrire le processus sous la forme d'un polynôme avec l'opérateur retard L , puis d'établir l'équation caractéristique et enfin d'indiquer si le processus est stationnaire ou non.

2.1 Équation 1

$$\text{MA}(1) : Y_t = \eta_t + 0,8\eta_{t-1}$$

Réponse :

$$\begin{aligned} Y_t &= \eta_t + 0,8\eta_{t-1} \\ \Leftrightarrow Y_t &= \eta_t + 0,8L\eta_t \\ \Leftrightarrow Y_t &= (1 + 0,8L)\eta_t \end{aligned}$$

Nous effectuons le développement en introduisant l'opérateur retard L pour répondre à la consigne mais, dès le départ, nous pouvons conclure que le processus MA(1) est stationnaire au sens faible car c'est toujours le cas puisque la moyenne, la variance et la fonction d'autocovariance du processus sont constantes dans le temps.

2.2 Équation 2

$$\text{MA}(2) : Y_t = \eta_t + 0,6\eta_{t-1} - 0,3\eta_{t-2}$$

Réponse :

$$\begin{aligned} Y_t &= \eta_t + 0,6\eta_{t-1} - 0,3\eta_{t-2} \\ \Leftrightarrow Y_t &= \eta_t + 0,6L\eta_t - 0,3L^2\eta_t \\ \Leftrightarrow Y_t &= (1 + 0,6L - 0,3L^2)\eta_t \end{aligned}$$

Nous effectuons le développement en introduisant l'opérateur retard L pour répondre à la consigne mais, dès le départ, nous pouvons conclure que le processus MA(2) est stationnaire au sens faible car c'est toujours le cas puisque la moyenne, la variance et la fonction d'autocovariance du processus sont constantes dans le temps.

2.3 Équation 3

$$\text{AR}(1) : Y_t = 0,9Y_{t-1} + \eta_t$$

Réponse :

$$\begin{aligned} & Y_t = 0,9Y_{t-1} + \eta_t \\ \Leftrightarrow & Y_t - 0,9Y_{t-1} = \eta_t \\ \Leftrightarrow & Y_t - 0,9LY_t = \eta_t \\ \Leftrightarrow & (1 - 0,9L)Y_t = \eta_t \end{aligned}$$

Nous voyons directement que $\Phi = 0,9$, ce qui, en valeur absolue, est inférieur à 1. Par conséquent, le processus est stationnaire au sens faible. Cependant, nous allons tout de même écrire l'équation caractéristique et la résoudre :

$$z - 0,9 = 0$$

La racine est

$$z = 0,9$$

et comme $|0,9| < 1$, le processus est faiblement stationnaire.

2.4 Équation 4

$$\text{AR}(2) : Y_t = 0,9Y_{t-1} - 0,7Y_{t-2} + \eta_t$$

Réponse :

$$\begin{aligned} & Y_t = 0,9Y_{t-1} - 0,7Y_{t-2} + \eta_t \\ \Leftrightarrow & Y_t - 0,9Y_{t-1} + 0,7Y_{t-2} = \eta_t \\ \Leftrightarrow & Y_t - 0,9LY_t + 0,7L^2Y_t = \eta_t \\ \Leftrightarrow & (1 - 0,9L + 0,7L^2)Y_t = \eta_t \end{aligned}$$

La forme caractéristique de cette équation est la suivante :

$$z^2 - 0,9z + 0,7 = 0$$

Les racines sont

$$z = 0,45 \pm 0,705337i$$

et comme $\sqrt{0,45^2 + (\pm 0,705337)^2} \simeq |0,8| < 1$, le processus est faiblement stationnaire.

2.5 Équation 5

$$\text{ARMA}(1,1) : Y_t = 0,8Y_{t-1} + \eta_t - 0,7\eta_{t-1}$$

Réponse :

$$\begin{aligned} Y_t &= 0,8Y_{t-1} + \eta_t - 0,7\eta_{t-1} \\ \Leftrightarrow Y_t - 0,8Y_{t-1} &= \eta_t - 0,7\eta_{t-1} \\ \Leftrightarrow Y_t - 0,8LY_t &= \eta_t - 0,7L\eta_t \\ \Leftrightarrow (1 - 0,8L)Y_t &= MA + \eta_t \end{aligned}$$

Nous voyons directement que $\Phi = 0,8$, ce qui, en valeur absolue est inférieur à 1. Par conséquent, le processus est stationnaire au sens faible. Cependant, nous allons tout de même écrire l'équation caractéristique et la résoudre :

$$z - 0,8 = 0$$

La racine est

$$z = 0,8$$

et comme $|0,8| < 1$, le processus est faiblement stationnaire.

2.6 Équation 6

$$\text{ARMA}(3,2) : Y_t = 2,5Y_{t-1} - 0,5Y_{t-2} - Y_{t-3} + \eta_t + \eta_{t-1} + 2\eta_{t-2}$$

Réponse :

$$\begin{aligned} Y_t &= 2,5Y_{t-1} - 0,5Y_{t-2} - Y_{t-3} + \eta_t + \eta_{t-1} + 2\eta_{t-2} \\ \Leftrightarrow Y_t - 2,5Y_{t-1} + 0,5Y_{t-2} + Y_{t-3} &= \eta_t + \eta_{t-1} + 2\eta_{t-2} \\ \Leftrightarrow Y_t - 2,5LY_t + 0,5L^2Y_t + L^3Y_t &= \eta_t + L\eta_t + 2L^2\eta_t \\ \Leftrightarrow (1 - 2,5L + 0,5L^2 + L^3)Y_t &= MA + \eta_t \end{aligned}$$

La forme caractéristique de cette équation est la suivante :

$$z^3 - 2,5z^2 + 0,5z + 1 = 0$$

Les racines sont

$$z_1 = -0,5$$

$$z_2 = 1$$

$$z_3 = 2$$

et comme $|2| > 1$, c'est-à-dire qu'au moins l'une des racines de la forme caractéristique n'est pas inférieure à 1 en valeur absolue, le processus n'est pas faiblement stationnaire.

3 Exercice 2

3.1 Paramètres généraux

```
set.seed(983) # Graine pour assurer la reproductibilité  
  
T <- 1000 # Echantillon de 1000 observations  
Yt <- ts(numeric(T)) # Processus stochastique  
epsilon <- rnorm(T) # Bruit blanc ~ N(0,1)
```

Nous avons testé différentes graines aléatoires pour évaluer la robustesse de notre approche. Les résultats étaient similaires, confirmant la direction et l'intensité des coefficients d'autocorrélation. Certains coefficients variaient légèrement en termes de significativité selon la graine utilisée, suggérant une légère sensibilité aux variations aléatoires. Toutefois, ces écarts étant minimes, nous n'avons pas jugé pertinent de répéter l'exercice 2 avec plusieurs graines.

3.2 $AR(1) : Y_t = 0,65Y_{t-1} + \epsilon_t$

3.2.1 Coefficients

```
Y <- Yt  
Phi <- 0.65
```

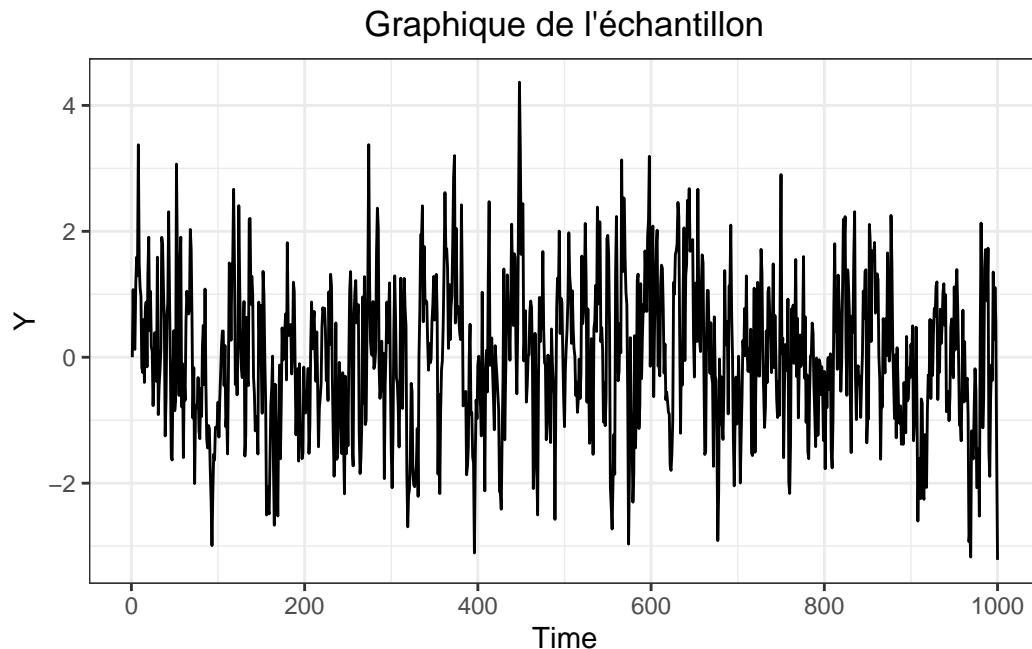
3.2.2 Simulation du processus

```
for (t in 2:T) {  
  Y[t] <- Phi * Y[t - 1] + epsilon[t]  
}
```

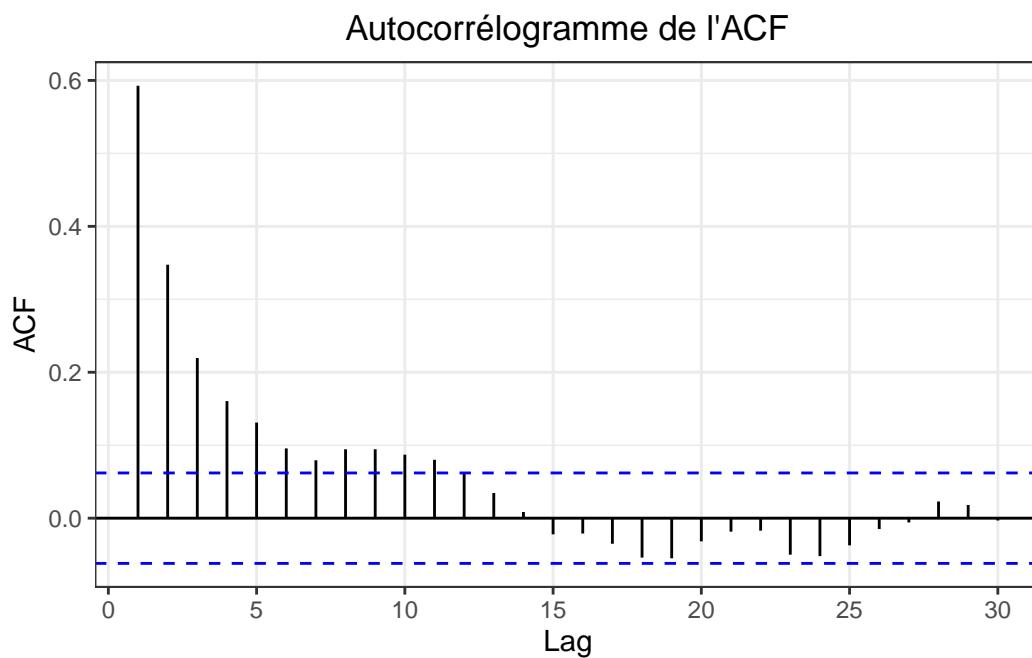
3.2.3 Représentations

```
# Représentations  
representations <- list(  
  list(fonction = autoplot, titre = "Graphique de l'échantillon"),  
  list(fonction = ggAcf, titre = "Autocorrélogramme de l'ACF"),  
  list(fonction = ggPacf, titre = "Autocorrélogramme partiel de la PACF"))  
)  
  
# Graphiques  
graphiques <- representations |>  
  map(  
    ~ .x$fonction(Y) +  
      ggtitle(.x$titre) +  
      theme_bw() +  
      theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))  
)
```

```
# Graphique de l'échantillon  
graphiques[[1]]
```

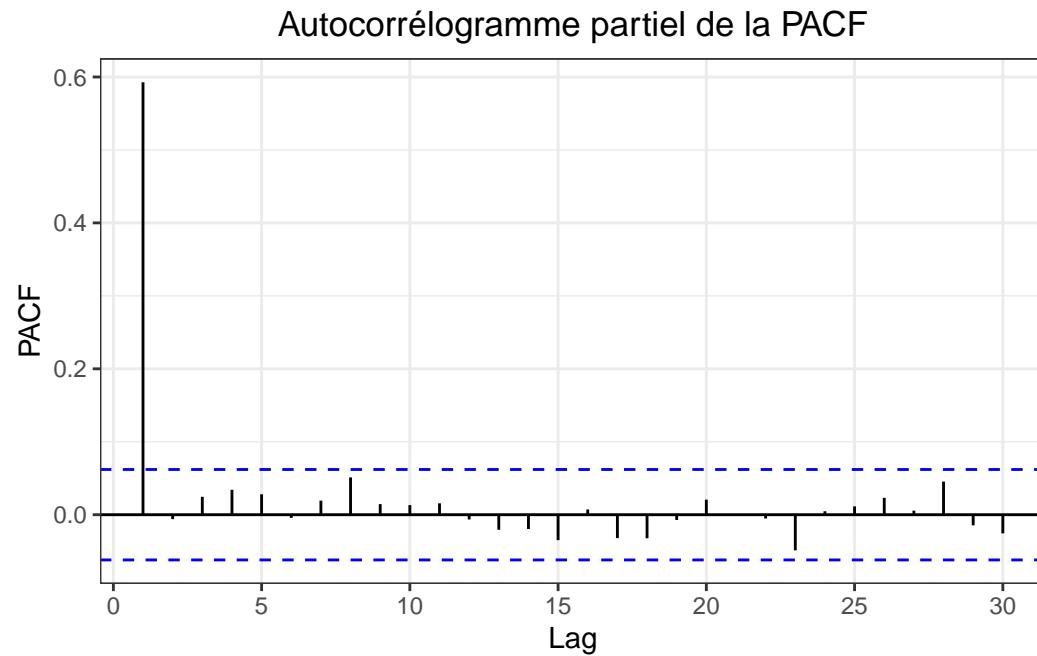


```
# Affichage de l'ACF  
graphiques[[2]]
```



Le coefficient d'autocorrélation est positif et décroît exponentiellement vers 0.
Il reste significativement différent de zéro sur quelques retards avant de se stabiliser dans l'intervalle de confiance.

```
# Affichage de la PACF  
graphiques[[3]]
```



Le coefficient d'autocorrélation est positif.

Il est significativement différent de zéro uniquement pour le premier retard, mais ne l'est plus à partir du deuxième retard.

Ces représentations sont donc conformes avec ce qui est attendu.

3.3 $AR(1) : Y_t = -0,65Y_{t-1} + \epsilon_t$

3.3.1 Coefficients

```
Y <- Yt  
Phi <- -0.65
```

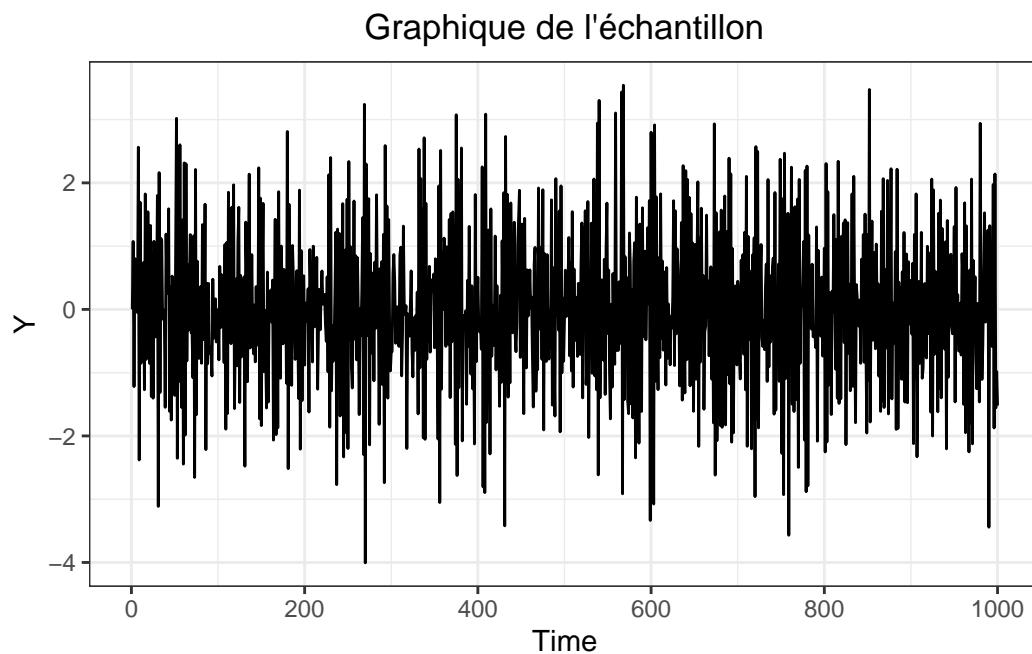
3.3.2 Simulation du processus

```
for (t in 2:T) {  
  Y[t] <- Phi * Y[t - 1] + epsilon[t]  
}
```

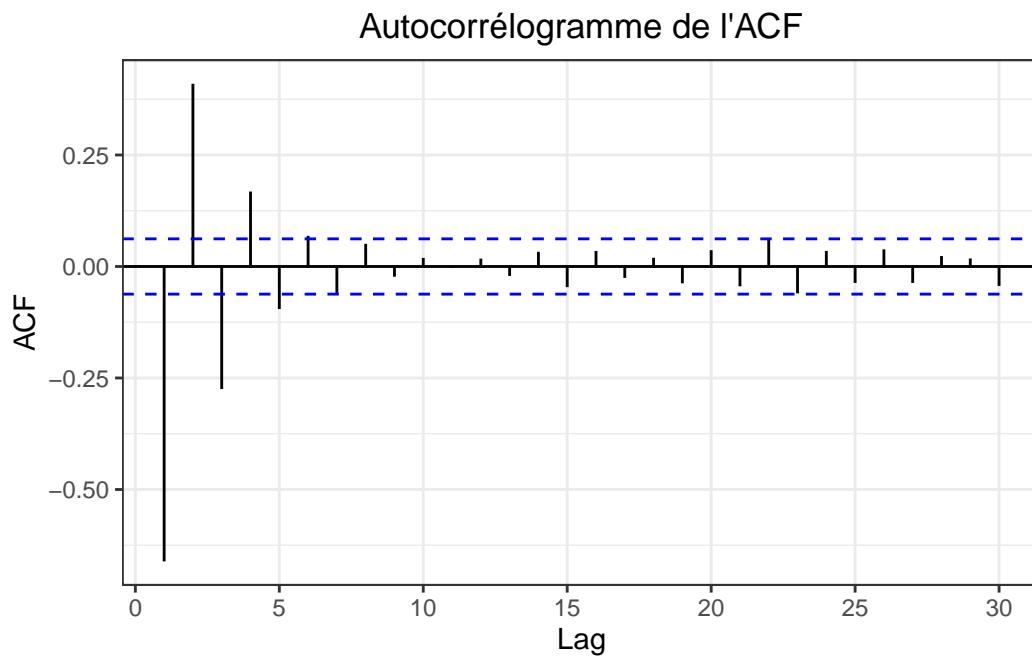
3.3.3 Représentations

```
# Fonctions à afficher  
representations <- list(  
  list(fonction = autoplot, titre = "Graphique de l'échantillon"),  
  list(fonction = ggAcf, titre = "Autocorrélogramme de l'ACF"),  
  list(fonction = ggPacf, titre = "Autocorrélogramme partiel de la PACF"))  
)  
  
# Affichage  
graphiques <- representations |>  
  map(  
    ~ .x$fonction(Y) +  
      ggtitle(.x$titre) +  
      theme_bw() +  
      theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))  
)
```

```
# Graphique de l'échantillon  
graphiques[[1]]
```



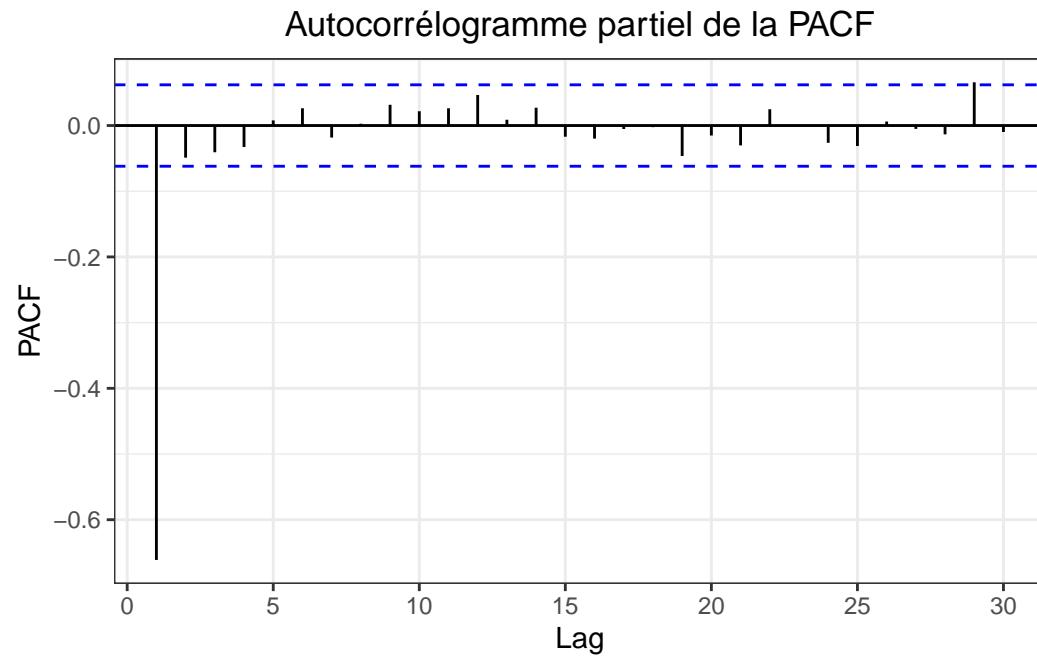
```
# Affichage de l'ACF  
graphiques[[2]]
```



Le coefficient d'autocorrélation alterne entre valeurs négatives et positives, tout en décroissant exponentiellement vers 0.

Il reste significativement différent de zéro sur quelques retards avant de se stabiliser dans l'intervalle de confiance.

```
# Affichage de la PACF  
graphiques[[3]]
```



Le coefficient d'autocorrélation est négatif.

Il est significativement différent de zéro uniquement pour le premier retard, mais ne l'est plus à partir du deuxième retard.

Ces représentations sont donc conformes avec ce qui est attendu.

3.4 $AR(2) : Y_t = 0,5Y_{t-1} - 0,4Y_{t-2} + \epsilon_t$

3.4.1 Coefficients

```
Y <- Yt
Phi1 <- -0.5
Phi2 <- -0.4
```

3.4.2 Simulation du processus

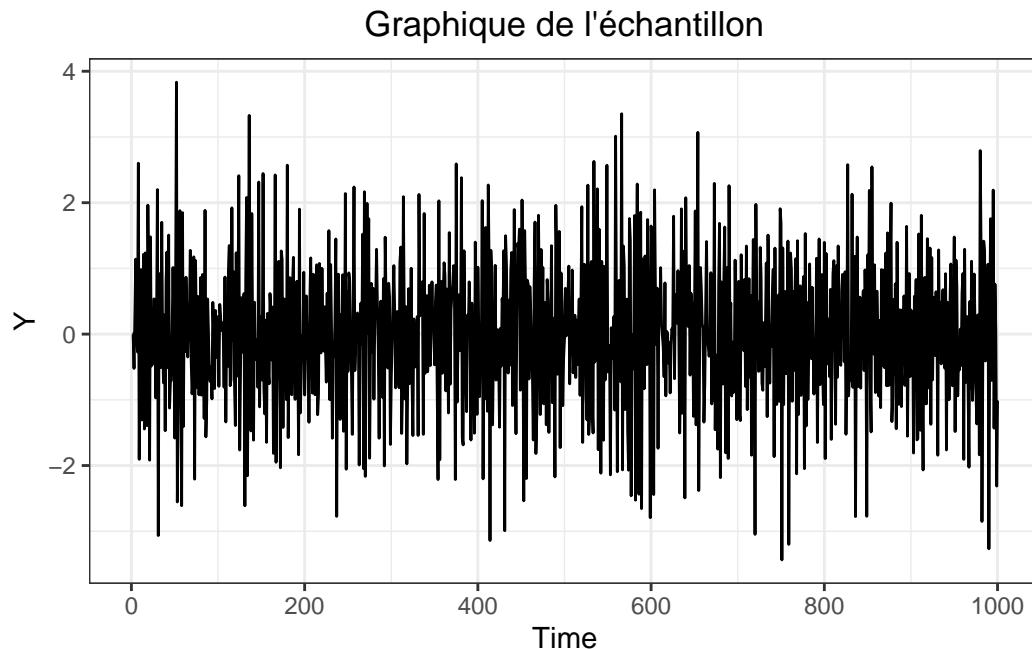
```
for (t in 3:T) {
  Y[t] <- Phi1 * Y[t - 1] + Phi2 * Y[t - 2] + epsilon[t]
}
```

3.4.3 Représentations

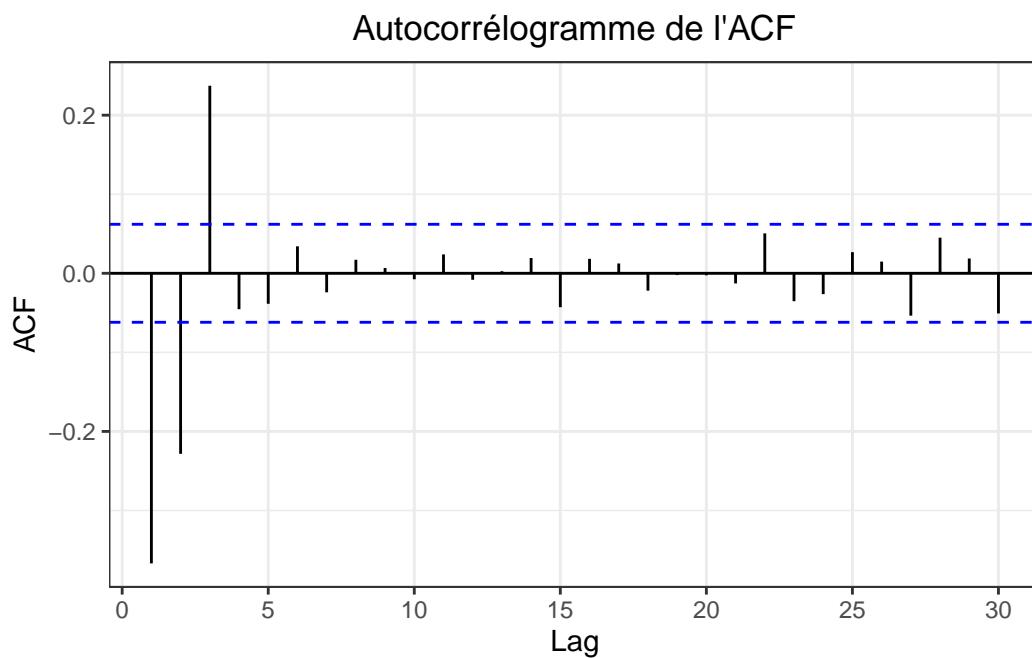
```
# Fonctions à afficher
representations <- list(
  list(fonction = autoplot, titre = "Graphique de l'échantillon"),
  list(fonction = ggAcf, titre = "Autocorréogramme de l'ACF"),
  list(fonction = ggPacf, titre = "Autocorréogramme partiel de la PACF")
)

# Affichage
graphiques <- representations |>
  map(
    ~ .x$fonction(Y) +
      ggtitle(.x$titre) +
      theme_bw() +
      theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))
  )
```

```
# Graphique de l'échantillon  
graphiques[[1]]
```

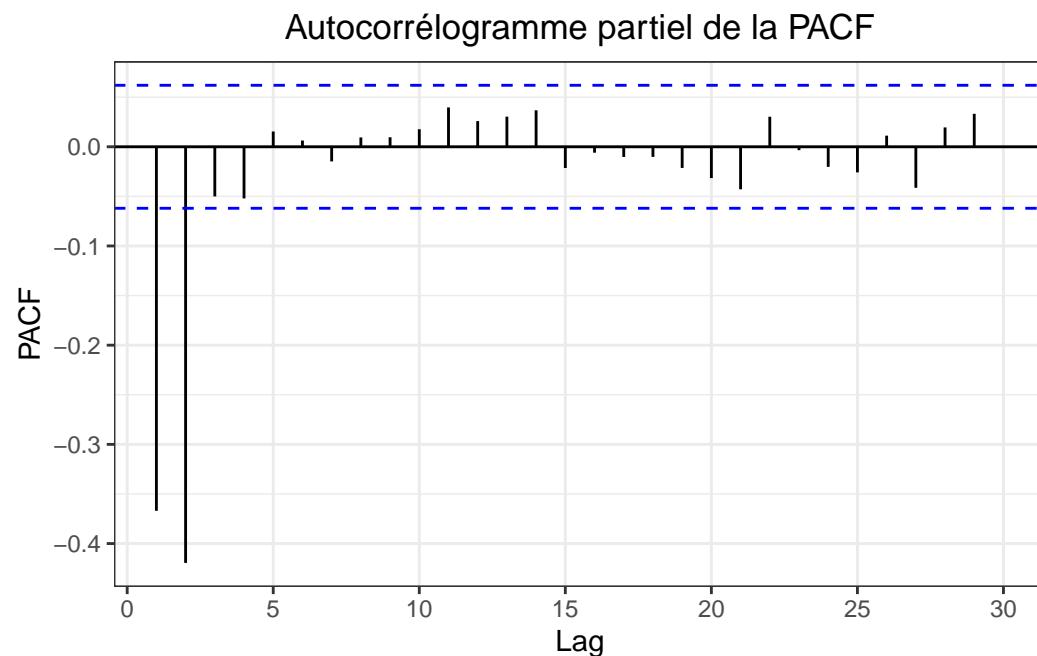


```
# Affichage de l'ACF  
graphiques[[2]]
```



Le coefficient d'autocorrélation décroît exponentiellement vers 0.
Il reste significativement différent de zéro sur trois retards avant de se stabiliser dans l'intervalle de confiance.

```
# Affichage de la PACF  
graphiques[[3]]
```



Le coefficient d'autocorrélation est négatif.

Il est significativement différent de zéro jusqu'au deuxième retard, mais ne l'est plus à partir du troisième retard.

Ces représentations sont donc conformes avec ce qui est attendu.

3.5 $MA(1) : Y_t = \epsilon_t - 0,8\epsilon_{t-1}$

3.5.1 Coefficients

```
Y <- Yt  
phi <- -0.8
```

3.5.2 Simulation du processus

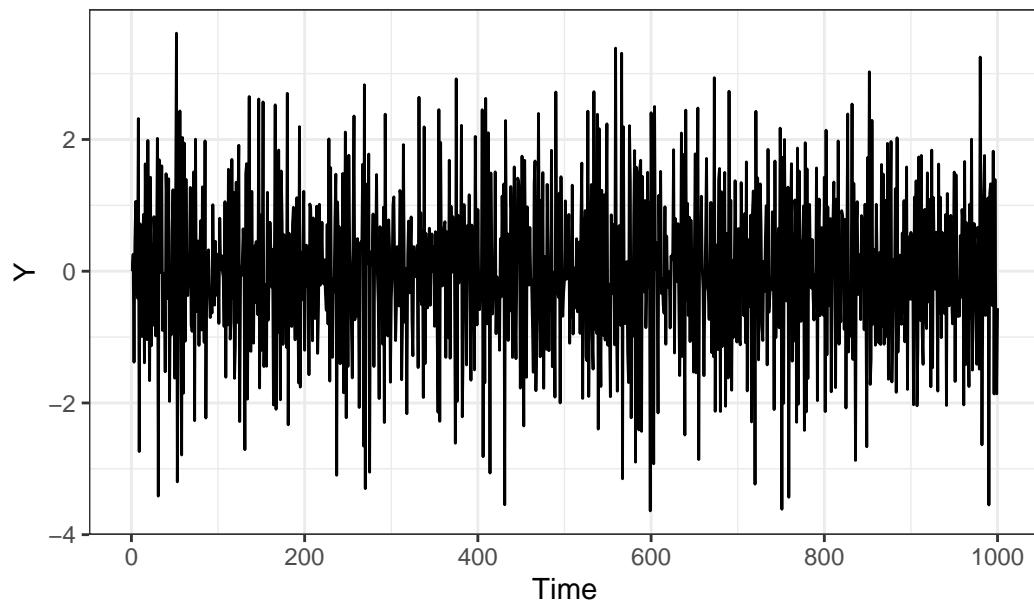
```
for (t in 2:T) {  
  Y[t] <- epsilon[t] + phi * epsilon[t - 1]  
}
```

3.5.3 Représentations

```
# Fonctions à afficher  
representations <- list(  
  list(fonction = autoplot, titre = "Graphique de l'échantillon"),  
  list(fonction = ggAcf, titre = "Autocorrélogramme de l'ACF"),  
  list(fonction = ggPacf, titre = "Autocorrélogramme partiel de la PACF")  
)  
  
# Affichage  
graphiques <- representations |>  
  map(  
    ~ .x$fonction(Y) +  
    ggtitle(.x$titre) +  
    theme_bw() +  
    theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))  
)
```

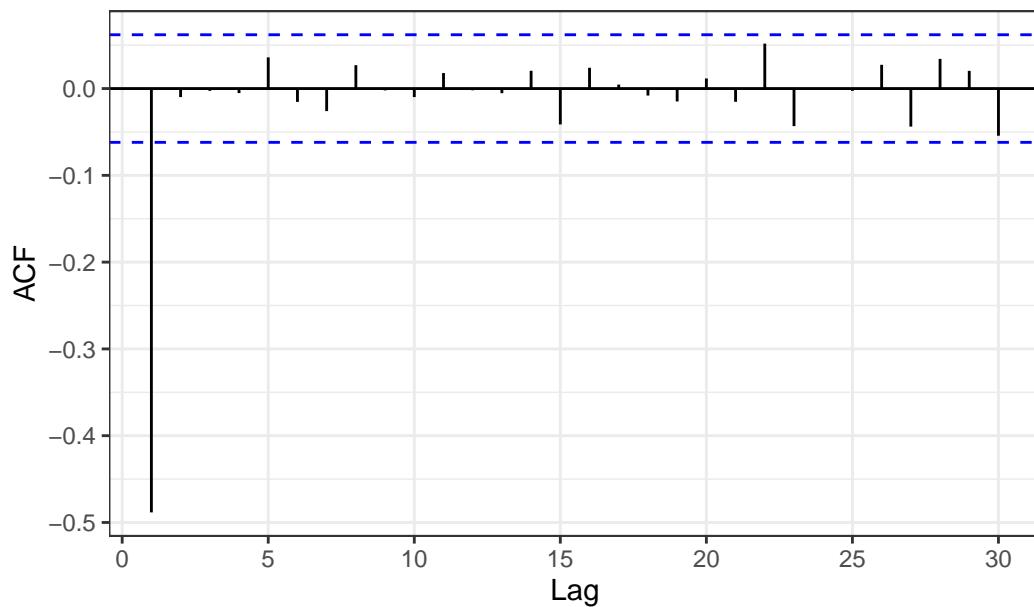
```
# Graphique de l'échantillon  
graphiques[[1]]
```

Graphique de l'échantillon



```
# Affichage de l'ACF  
graphiques[[2]]
```

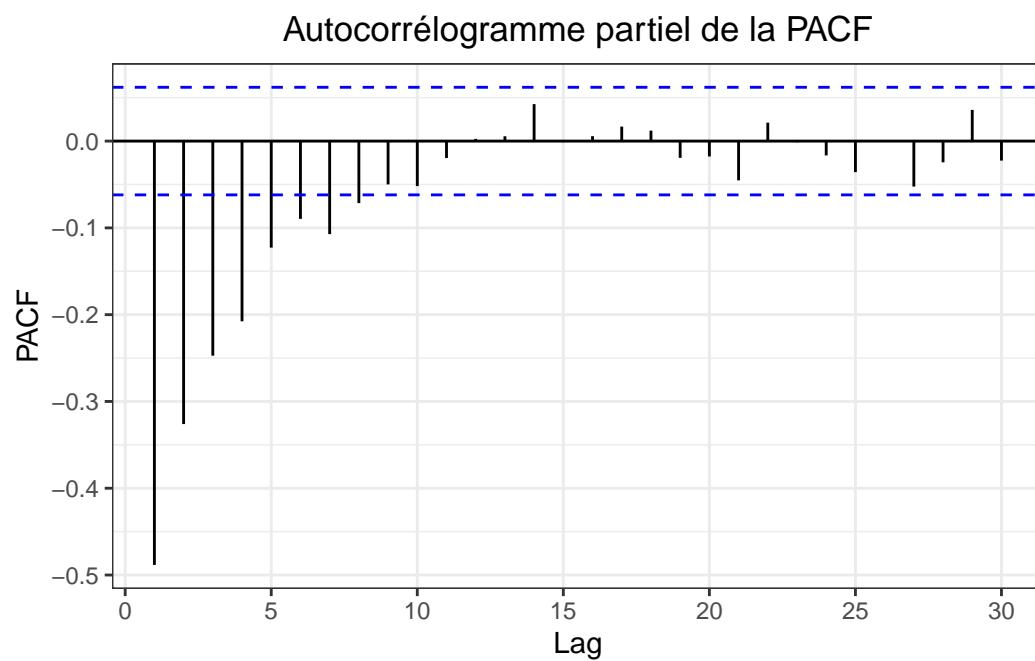
Autocorrélogramme de l'ACF



Le coefficient d'autocorrélation est négatif.

Il est significativement différent de zéro pour le retard 1 et reste dans l'intervalle de confiance ensuite.

```
# Affichage de la PACF  
graphiques[[3]]
```



Le coefficient d'autocorrélation est négatif.

Il est significativement différent de zéro et décroît exponentiellement vers 0 sur quelques retards.

Ces représentations sont donc conformes avec ce qui est attendu.

3.6 $MA(2) : Y_t = \epsilon_t + 0,5\epsilon_{t-1} + 0,4\epsilon_{t-2}$

3.6.1 Coefficients

```
Y <- Yt
phi1 <- 0.5
phi2 <- 0.4
```

3.6.2 Simulation du processus

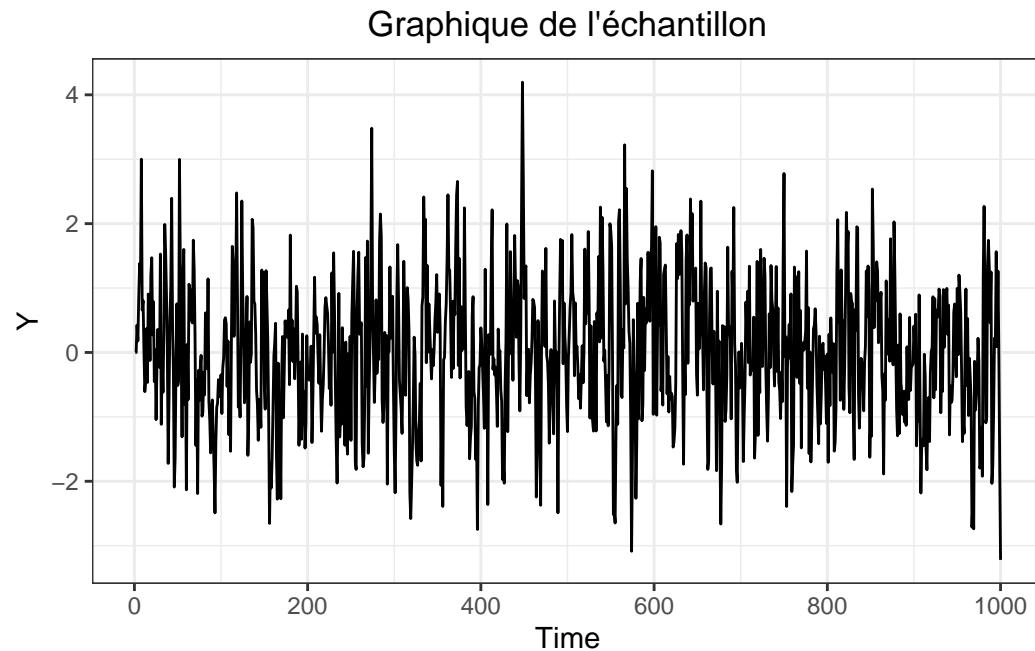
```
for (t in 3:T) {
  Y[t] <- epsilon[t] + phi1 * epsilon[t - 1] + phi2 * epsilon[t - 2]
}
```

3.6.3 Représentations

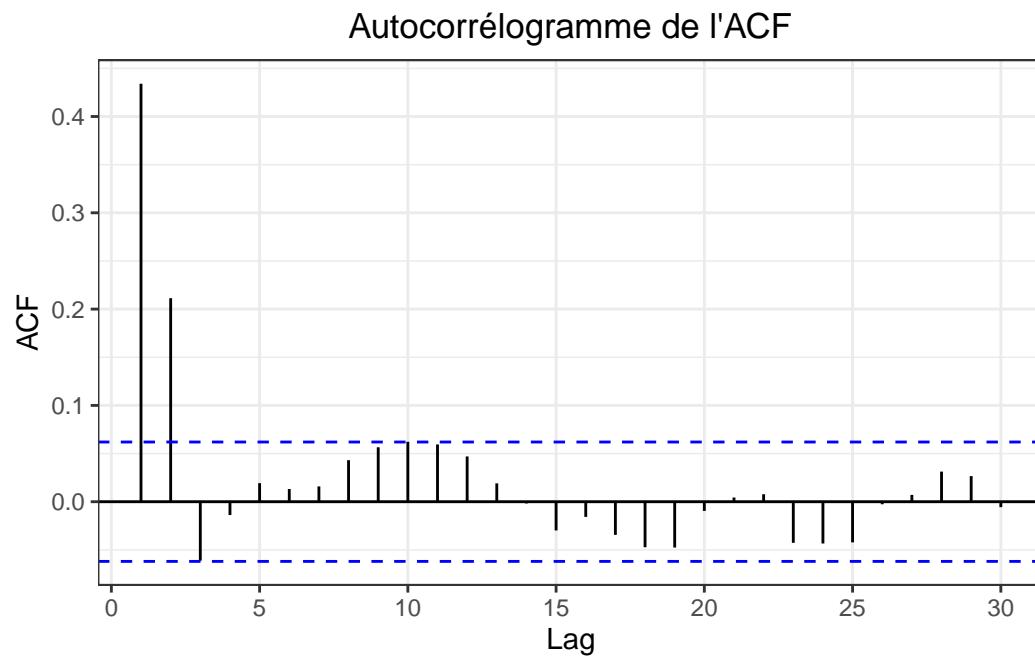
```
# Fonctions à afficher
representations <- list(
  list(fonction = autoplot, titre = "Graphique de l'échantillon"),
  list(fonction = ggAcf, titre = "Autocorrélogramme de l'ACF"),
  list(fonction = ggPacf, titre = "Autocorrélogramme partiel de la PACF")
)

# Affichage
graphiques <- representations |>
  map(
    ~ .x$fonction(Y) +
      ggtitle(.x$titre) +
      theme_bw() +
      theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))
  )
```

```
# Graphique de l'échantillon  
graphiques[[1]]
```

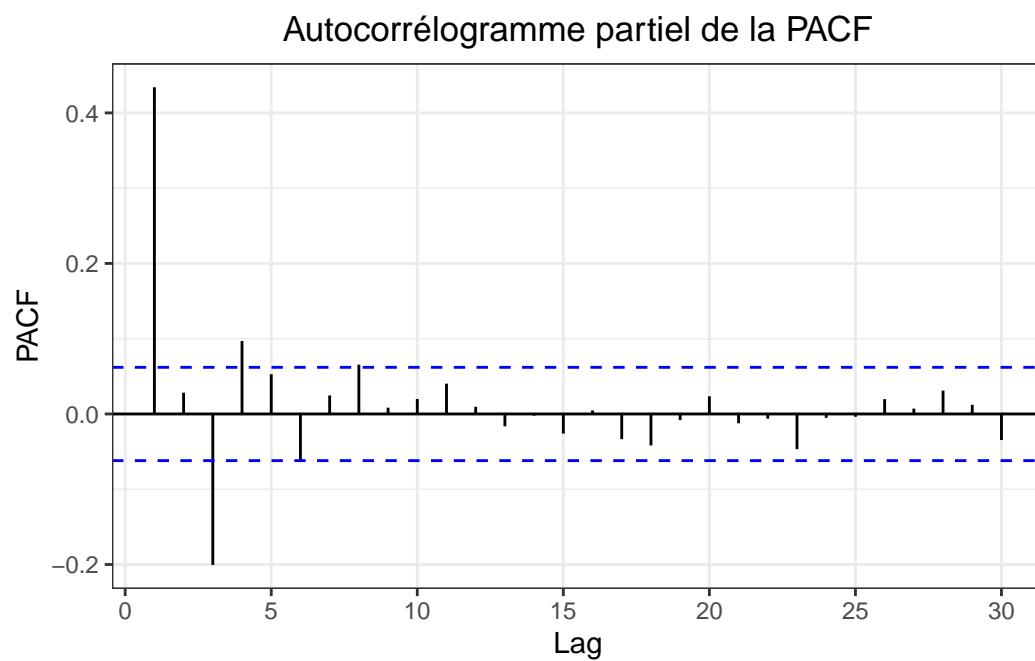


```
# Affichage de l'ACF  
graphiques[[2]]
```



Le coefficient d'autocorrélation est positif.
Il est significativement différent de zéro jusqu'au retard 2 et reste dans l'intervalle de confiance ensuite.

```
# Affichage de la PACF  
graphiques[[3]]
```



Le coefficient d'autocorrélation décroît exponentiellement vers 0.

Ces représentations sont donc conformes avec ce qui est attendu.

3.7 ARMA(1,1) : $Y_t = 0,9Y_{t-1} + \epsilon_t + 0,8\epsilon_{t-1}$

3.7.1 Coefficients

```
Y <- Yt
Phi <- 0.9
phi <- 0.8
```

3.7.2 Simulation du processus

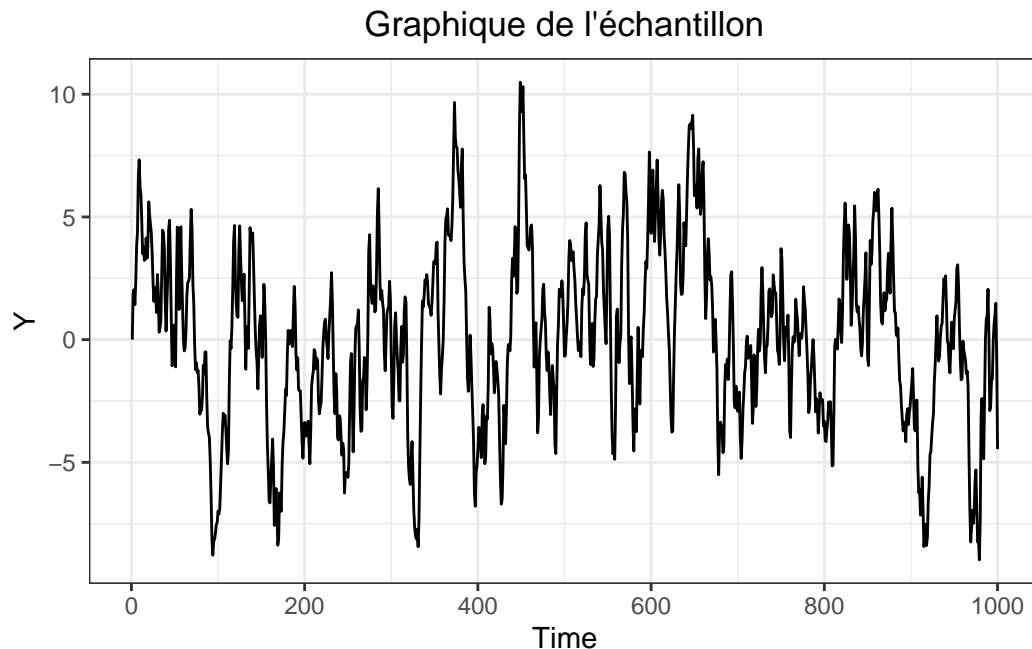
```
for (t in 2:T) {
  Y[t] <- Phi * Y[t - 1] + epsilon[t] + phi * epsilon[t - 1]
}
```

3.7.3 Représentations

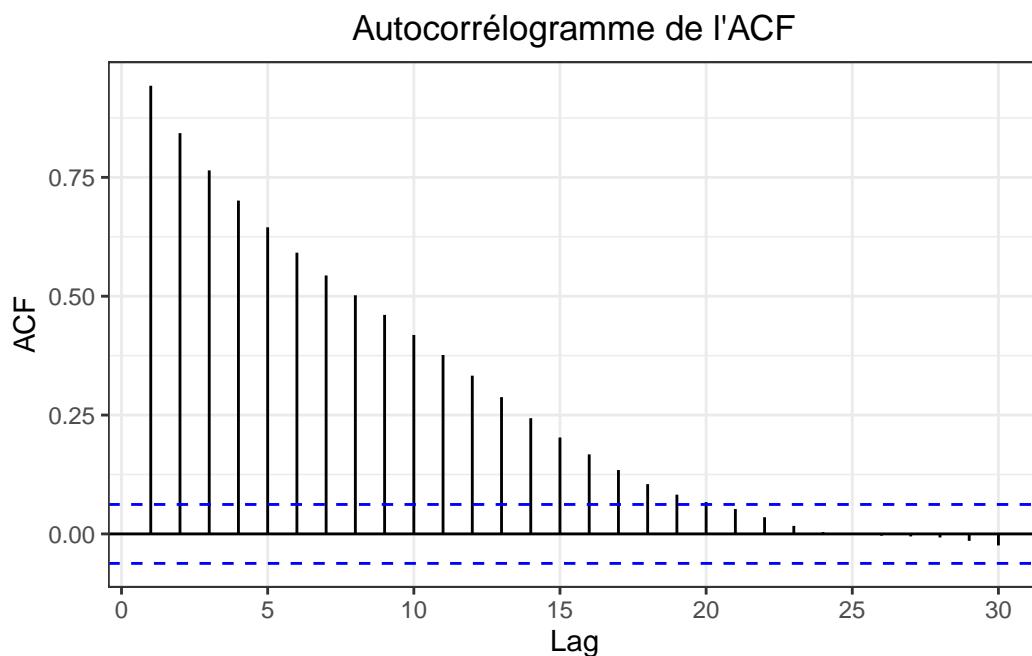
```
# Fonctions à afficher
representations <- list(
  list(fonction = autoplot, titre = "Graphique de l'échantillon"),
  list(fonction = ggAcf, titre = "Autocorrélogramme de l'ACF"),
  list(fonction = ggPacf, titre = "Autocorrélogramme partiel de la PACF")
)

# Affichage
graphiques <- representations |>
  map(
    ~ .x$fonction(Y) +
      ggtitle(.x$titre) +
      theme_bw() +
      theme(plot.title = element_text(hjust = 0.5))
  )
```

```
# Graphique de l'échantillon  
graphiques[[1]]
```



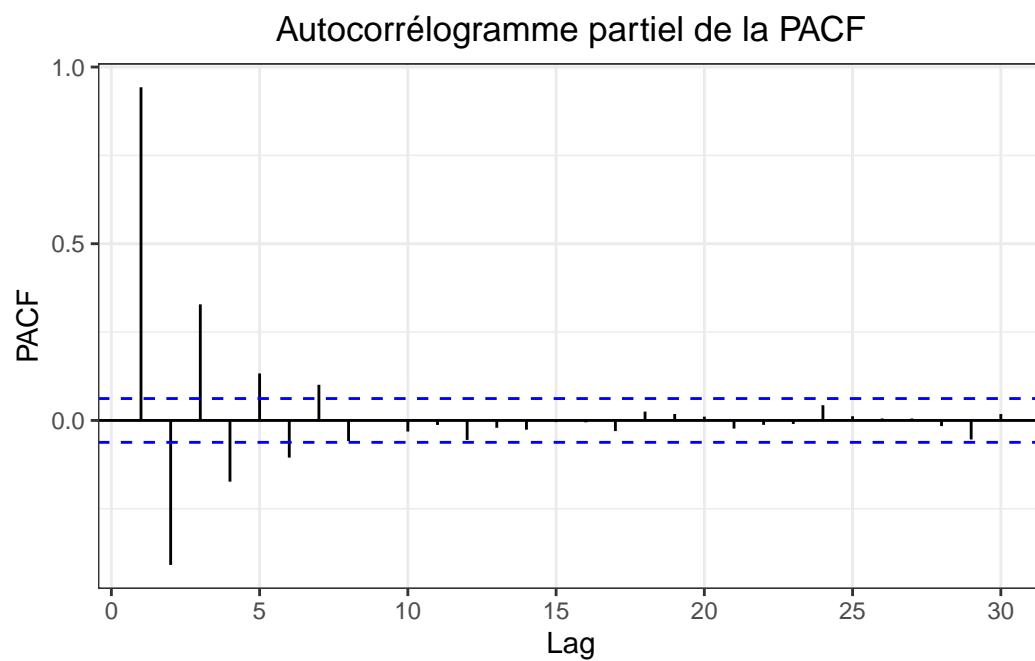
```
# Affichage de l'ACF  
graphiques[[2]]
```



Le coefficient d'autocorrélation est positif.

Il est significativement différent de zéro et décroît de façon exponentielle sur plusieurs retards avant de se stabiliser dans l'intervalle de confiance.

```
# Affichage de la PACF  
graphiques[[3]]
```



Le coefficient d'autocorrélation est significativement différent de zéro et décroît de façon exponentielle sur quelques retards avant de se stabiliser dans l'intervalle de confiance.

Ces représentations sont donc conformes avec ce qui est attendu.