Schémas :

Schéma simplifié :

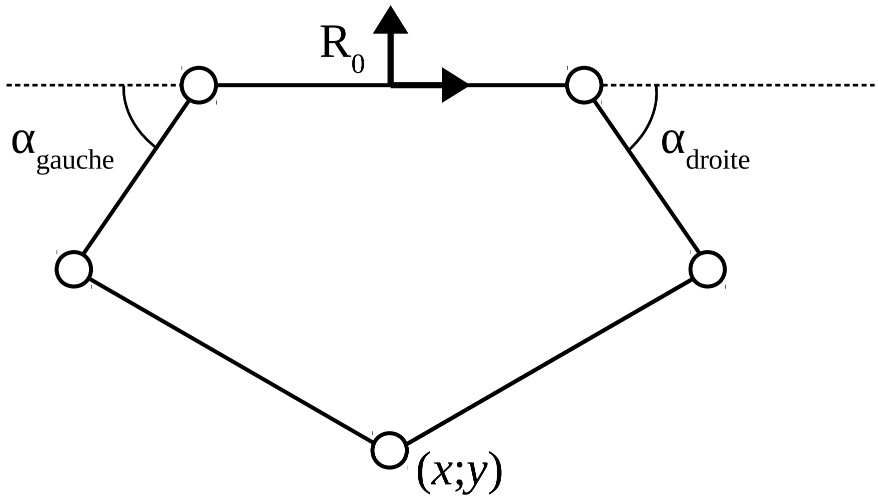


Schéma détaillé (repères + projections) :

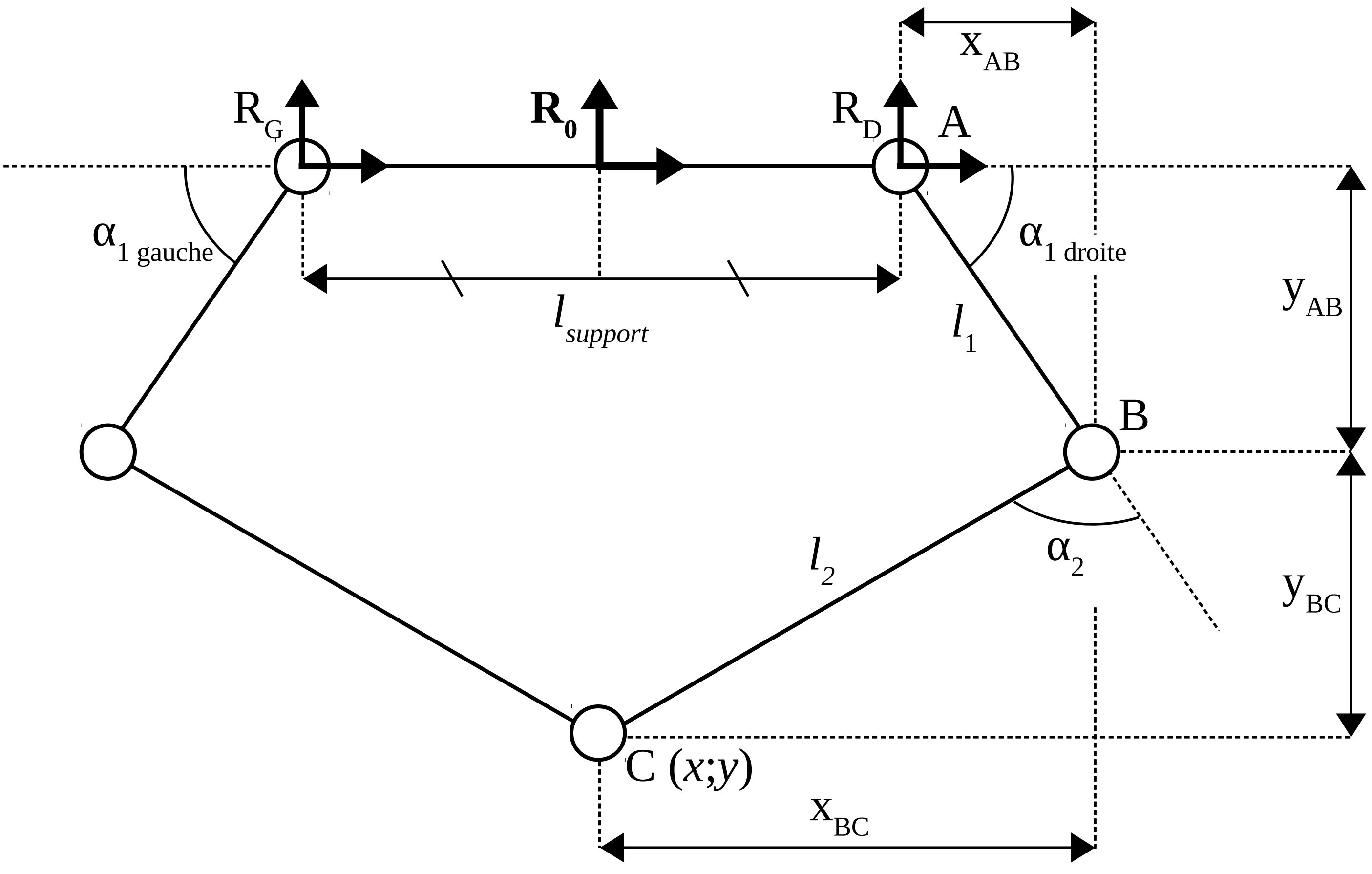


Schéma détaillé (repères) :

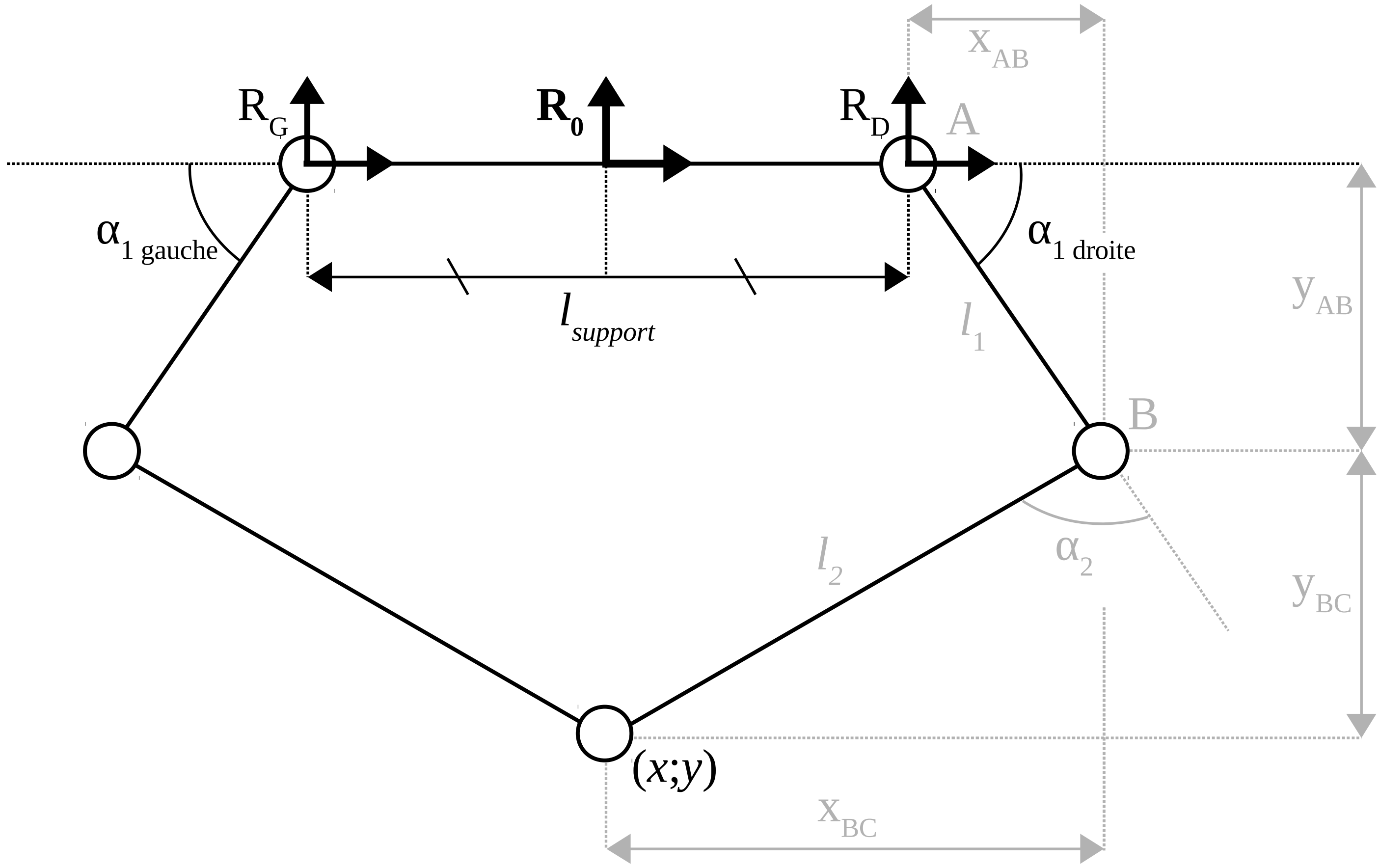
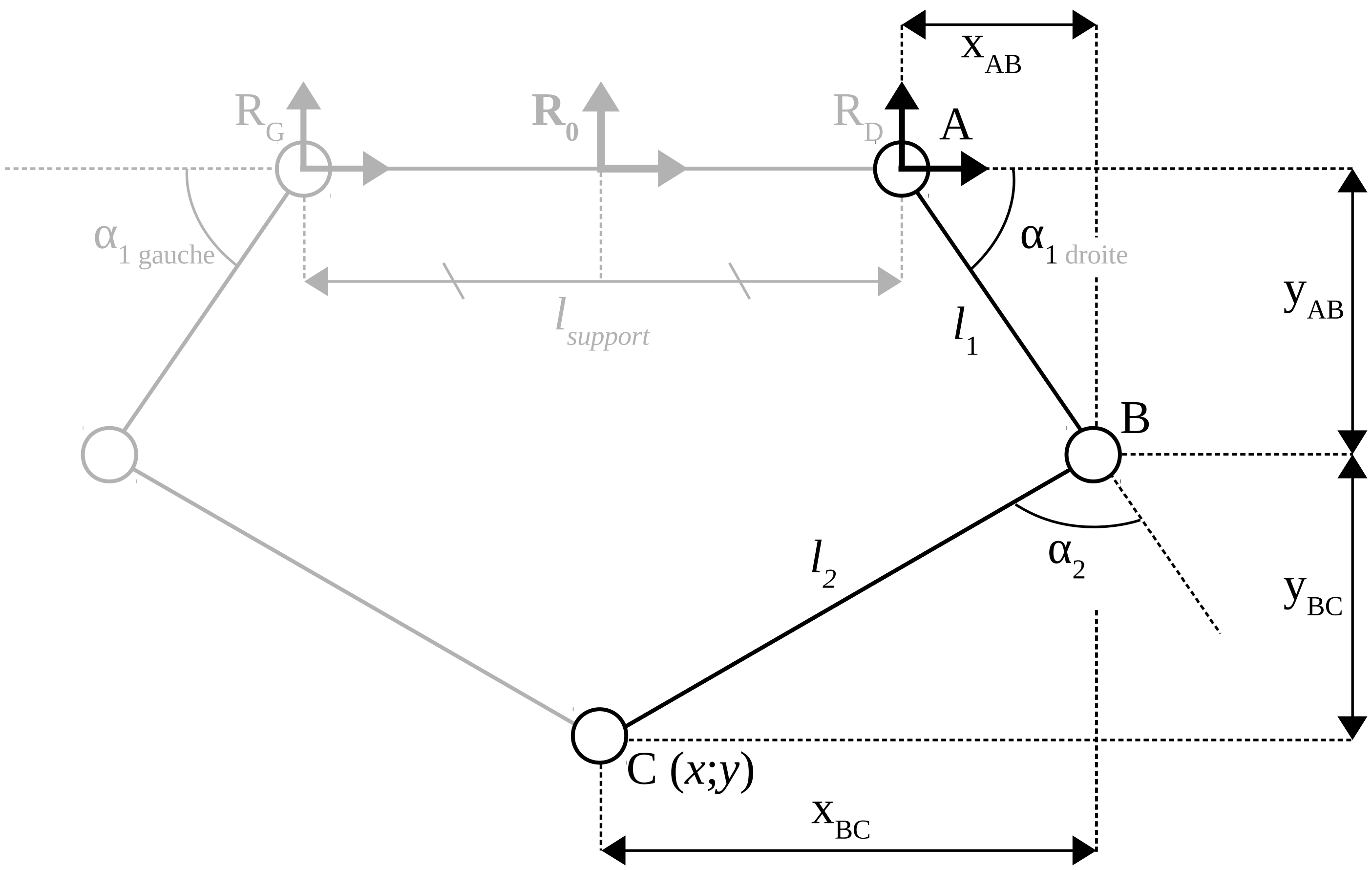


Schéma détaillé (projections) :



Constat : $\begin{Bmatrix} x = l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1+\alpha_2) \\ y = l_1 \sin\alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1+\alpha_2) \end{Bmatrix}$ => $x ; y = f(\alpha_1 ; \alpha_2)$ But : $\alpha_1 ; \alpha_2 = f(x ; y)$

<u>Développement mathématique :</u>

Changement de variable : $\begin{Bmatrix} x = l_1 \cos\alpha_1 + l_2 \cos(\alpha_1+\alpha_2) \\ y = l_1 \sin\alpha_1 + l_2 \sin(\alpha_1+\alpha_2) \end{Bmatrix}$ => $\begin{Bmatrix} x = a\cos\alpha + b\cos(\beta) \\ y = a\sin\alpha + b\sin(\beta) \end{Bmatrix}$

Mise au carré et addition : $\begin{Bmatrix} a^2\cos^2\alpha = (x - b\cos\beta)^2 \\ a^2\sin^2\alpha = (y - b\sin\beta)^2 \end{Bmatrix}$

=> $a^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = x^2 + y^2 + b^2(\cos^2\beta + \sin^2\beta) - 2b(x\cos\beta + y\sin\beta)$

=> $a^2 = x^2 + y^2 + b^2 - 2b(x\cos\beta + y\sin\beta)$ => $2b(x\cos\beta + y\sin\beta) = x^2 + y^2 + b^2 - a^2$

=> $x\cos\beta + y\sin\beta = \dfrac{x^2 + y^2 + b^2 - a^2}{2b} = K$

Remplacement de variables :

Si $t = \tan\dfrac{\beta}{2}$ alors $\cos\beta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ soit $x\cos\beta = \dfrac{x(1-t^2)}{1+t^2}$ et $\sin\beta = \dfrac{2t}{1+t^2}$ soit $y\sin\beta = \dfrac{y2t}{1+t^2}$.

Remplacement des valeurs :

$$x\cos\beta + y\sin\beta = \frac{x(1-t^2)}{1+t^2} + \frac{y2t}{1+t^2} = \frac{x(1-t^2) + y2t}{1+t^2} = K$$

$\dfrac{x(1-t^2) + y2t}{1+t^2} = K$ => $x(1-t^2) + y2t = Kt^2 + K$ => $(K+x)t^2 - 2yt + K - x = 0$

Détermination du discriminant du polynôme :

$(K+x)t^2 - 2yt + K - x = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (-2y)^2 - 4(K+x)(K-x)$

$= 4y^2 - 4(K^2 - x^2) = 4(x^2 + y^2 - K^2)$

Détermination des racines du polynôme :

$$t_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2y)-\sqrt{4(x^2+y^2-K^2)}}{2(K+x)} = \frac{2y-\sqrt{4}\sqrt{x^2+y^2-K^2}}{2(K+x)} = \frac{y-\sqrt{x^2+y^2-K^2}}{(K+x)}$$

$$t_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2-K^2}}{(K+x)}$$

Détermination de l'angle α :

$$\begin{Bmatrix} x = a\cos\alpha + b\cos(\beta) \\ y = a\sin\alpha + b\sin(\beta) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a\cos\alpha = x - b\cos(\beta) \\ a\sin\alpha = y - b\sin(\beta) \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = \arccos\left(\frac{x-b\cos(\beta)}{a}\right) \\ \alpha = \arcsin\left(\frac{y-b\sin(\beta)}{a}\right) \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{x-b\frac{1-t^2}{1+t^2}}{a}\right) \quad \text{ou} \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{y-b\frac{2t}{1+t^2}}{a}\right)$$

Détermination après simulation :

$$x_{gauche} = x + l_{demi-support} \qquad x_{droite} = x - l_{demi-support}$$

$$K_{gauche} = \frac{x_{gauche}^2 + y^2 + b^2 - a^2}{2b} \qquad K_{droite} = \frac{x_{droite}^2 + y^2 + b^2 - a^2}{2b}$$

$$t_{gauche} = \frac{y + \sqrt{x_{gauche}^2 + y^2 - K_{gauche}^2}}{(K_{gauche} + x_{gauche})} \qquad t_{droite} = \frac{y - \sqrt{x_{droite}^2 + y^2 - K_{droite}^2}}{(K_{droite} + x_{droite})}$$

$$\alpha_{gauche} = 180 - \arccos\left(\frac{x_{gauche} - b\frac{1-t_{gauche}^2}{1+t_{gauche}^2}}{a}\right) \qquad \alpha_{droite} = \arccos\left(\frac{x_{droite} - b\frac{1-t_{droite}^2}{1+t_{droite}^2}}{a}\right)$$

Démonstration de la positivité du discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4(x^2+y^2-K^2)$$

$$= 4\left(\frac{4b^2}{4b^2}(x^2+y^2) - \left(\frac{x^2+y^2+b^2-a^2}{2b}\right)^2\right)$$

$$= \frac{a^4+2a^2b^2+2a^2x^2+2a^2y^2-b^4+2b^2x^2+2b^2y^2-x^4-2x^2y^2-y^4}{b^2}$$

$$= \frac{(a^4+2a^2b^2+2a^2x^2+2a^2y^2+2b^2x^2+2b^2y^2)-(b^4+x^4+2x^2y^2+y^4)}{b^2}$$

$$= \frac{(a^2(a^2+2(b^2+x^2+y^2))+2b^2(x^2+y^2))-(b^4+x^4+2x^2y^2+y^4)}{b^2}$$