On a besion de ces formules.

θ , a , b réels

- $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ (*)
- $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$ (**)
- $\sin(a+b)=\cos(a)\sin(b)+\cos(b)\sin(a)$ (□)
- $\tan(a)=\dfrac{\sin(a)}{\cos(a)}$ (△)

* $\cos(\beta)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$

-

On calcule

$$\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{1-\tan^2(\beta/2)}{1+\tan^2(\beta/2)}=\frac{1-\dfrac{\sin^2(\beta/2)}{\cos^2(\beta/2)}}{1+\dfrac{\sin^2(\beta/2)}{\cos^2(\beta/2)}} \quad \text{par } (\triangle)$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\cos^2(\beta/2)-\sin^2(\beta/2)}{\cos^2(\beta/2)}\right)}{\left(\dfrac{\cos^2(\beta/2)+\sin^2(\beta/2)}{\cos^2(\beta/2)}\right)}=\frac{\cos^2(\beta/2)-\sin^2(\beta/2)}{\cos^2(\beta/2)}\times\frac{\cos^2(\beta/2)}{\cos^2(\beta/2)+\sin^2(\beta/2)}$$

$=\cos^2(\beta/2)-\sin^2(\beta/2)$ par (*)

$=\cos(\beta/2)\cos(\beta/2)-\sin(\beta/2)\sin(\beta/2)$

$=\cos(\beta/2+\beta/2)=\cos(\beta)$ par (**)

* $\sin(\beta)=\dfrac{2t}{1+t^2}$

-

On calcule

$$\frac{2t}{1+t^2}=\frac{2\dfrac{\sin(\beta/2)}{\cos(\beta/2)}}{\left(\dfrac{\cos^2(\beta/2)+\sin^2(\beta/2)}{\cos^2(\beta/2)}\right)} \quad \text{On utilise le calcul précédent.}$$

$=\dfrac{2\sin(\beta/2)}{\cos(\beta/2)}\times\dfrac{\cos^2(\beta/2)}{1}$ par (*)

$=2\sin(\beta/2)\times\cos(\beta/2)=\sin(\beta/2)\cos(\beta/2)+\sin(\beta/2)\cos(\beta/2)$

$=\sin(\beta/2+\beta/2)$ par (□)

$=\sin(\beta)$

Attention : lorsque vous posez $t=\tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right)$; il faut s'assurer que $\dfrac{\beta}{2}\neq\dfrac{\pi}{2}[\pi]$ car tan n'est pas définie en ces points.

Pour passer de $t=\tan\left(\dfrac{\beta}{2}\right)$ à $\beta=\ldots$.

Comment faites vous ?