Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

Du weißt bereits: Zwei Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, falls die Gleichung

$$\underline{\hspace{8cm}} \tag{1}$$

gilt.

Problem: Schießt ein Fußballer F mit links, geht der Ball mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ in's Tor. Schießt F mit rechts, geht der Ball auch mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ in's Tor. Sind nun die Ereignisse L="Schuss mit links" und T="Schuss in's Tor" stochastisch unabhängig?

Lösungsversuch: Wir müssen überprüfen, ob die Gleichung

$$\underline{\hspace{8cm}} \tag{2}$$

gilt. Das in (2) auftauchende $\underline{\hspace{1.5cm}}$ können wir allerdings nicht berechnen.

Wir brauchen also Werkzeuge, um die stochatische Unabhängigkeit auf andere Weise zu prüfen.

Satz 1. *Ist*

$$P_A\left(B\right) = P\left(B\right) \tag{3}$$

, so sind A und B stochastisch unabhängig.

Beweis. Die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit in Gleichung (3) eingesetzt ergibt:

$$\underline{\hspace{8cm}} \tag{4}$$

Gleichung (4) auf beiden Seiten mit $\underline{\hspace{1.5cm}}$ multipliziert ergibt:

$$\underline{\hspace{8cm}}$$

Also sind A und B stochastisch unabhängig. □

2.Lösungsversuch: Wir versuchen Satz 1 zu verwenden. Also müssen wir prüfen, ob die Gleichung

$$\underline{\hspace{8cm}}$$

gilt.

$$P_L\left(T\right) = \underline{\hspace{1.5cm}}$$

$$
\begin{aligned}
P(T) &= \underline{\hspace{5cm}} && \text{(1.Pfadregel)}\\
&= \underline{\hspace{5cm}} && \text{(2.Pfadregel)}\\
&= \underline{\hspace{5cm}} && \text{(aus der Angabe)}\\
&= \underline{\hspace{5cm}} && \text{(Distributivgesetz)}\\
&= \underline{\hspace{1cm}}
\end{aligned}
$$

Also sind L und T stochastisch ________________________ .

Wir wollen noch ein anderes Werkzeug lernen, mit dem man stochastische Unabhängigkeit nachweisen kann.

Satz 2. *Ist*

$$P_A(B) = P_{\overline{A}}(B) \tag{5}$$

, so sind A und B stochastisch unabhängig.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
P(B) &= \underline{\hspace{5cm}} && \text{(1.Pfadregel)}\\
&= \underline{\hspace{5cm}} && \text{(2.Pfadregel)}\\
&= \underline{\hspace{5cm}} && \text{(wegen(5))}\\
&= \underline{\hspace{5cm}} && \text{(Distributivgesetz)}\\
&= \underline{\hspace{1cm}}
\end{aligned}
$$

Also ist $P(B) =$ ______. Damit folgt mit Satz ______, dass A und B stochastisch unabhängig sind.

□

3.Lösungsversuch: Wir versuchen nun Satz ______ zu verwenden.

$$\underline{\hspace{2cm}} = \frac{1}{3} = \underline{\hspace{2cm}}$$

. Also sind nach Satz ______ A und B stochastisch ________________________.