Satz von der majorisierten Konvergenz

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Sei $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge messbarer Funktionen, die μ-fast sicher gegen eine Funktion $f: X \to \mathbb{R}$ konvergiert. Sei ferner $g \in \mathcal{L}^1$, $g \geq 0$ gegeben (d.h. $\int_X g(x)\, d\mu(x) < \infty$), und es existiere ein $N \in \mathbb{N}$ sodass $\forall n \geq N: |f_n| \leq g$. Dann nennt man g integrierbare Majorante und es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x) = \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

Aufgabe Sei $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Sei $f_n(x) := \mathbb{1}_{]0,\infty[}(x) \cdot \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)^n \cdot x^{n\alpha}$

Berechne $\lim\limits_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x)\, d\lambda(x)$.

Behauptung 1: $\forall x > 0: \sin(x) \leq x$

Beweis der Behauptung: Sei also $x > 0$. $\sin(x) = \int_0^x \sin'(t)\, dt = \int_0^x \cos(t)\, dt \leq \int_0^x 1\, dt \leq x$. Damit ist Behauptung 1 bewiesen.

Behauptung 2: $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert λ-fast sicher gegen $f\equiv 0$.

Beweis von Behauptung 2:

Sei $0<x<1$.

$$|f_n(x)| = \underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right|^n}_{\le 1} \cdot \underbrace{\left(x^\alpha\right)^n}_{\xrightarrow[\text{da } x<1]{n\to\infty} 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Sei $x>1$.

$$|f_n(x)| = \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\cdot x^\alpha\right)^n \underset{\text{Behauptung 1}}{\le} \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^\alpha\right)^n$$

$$= \underbrace{\left(x^{\alpha-\frac{1}{2}}\right)^n}_{<1, \text{ da } x>1 \text{ und } \alpha-\frac{1}{2}<0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Damit ist Behauptung 2 bewiesen.

Behauptung 3: Sei $N\in\mathbb{N}$ so groß, dass $N\cdot(\alpha-\frac{1}{2})<$

Sei $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \mathbb{1}_{]0,1[}(x)+\mathbb{1}_{]1,\infty[}(x)\cdot x^{N(\alpha-\frac{1}{2})}$

Dann ist $g\in\mathcal{L}^1$ und $\forall n\ge N$: $|f_n|\le g$, d.h. g ist integrierbare Majorante.

Beweis von Behauptung 3:

Sei $0<x<1$, $n\in\mathbb{N}$. $|f_n(x)| \le \underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right|^n}_{\le 1} \cdot \underbrace{x^{n\alpha}}_{\le 1, \text{ da } x<1} \le 1 = g(x)$ ✓

Sei $x > 1$. Sei $n \geq N$.

$$|f_n(x)| = \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot x^{\alpha}\right)^n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Behauptung } 1}}{\leq} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{\alpha}\right)^n =$$

$$= \underbrace{\left(x^{\alpha - \frac{1}{2}}\right)}_{<1, \text{ da } \alpha - \frac{1}{2} < 0 \text{ und } x > 1}^n \underset{\substack{\uparrow \\ n \geq N}}{\leq} \left(x^{\alpha - \frac{1}{2}}\right)^N = x^{(\alpha - \frac{1}{2}) \cdot N} = g(x) \checkmark$$

Noch zu zeigen: $g \in \mathcal{L}^1$.

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) \, d\lambda(x) = \int_0^1 1 \, d\lambda(x) + \int_1^{\infty} x^{(\alpha - \frac{1}{2}) \cdot N} \, d\lambda(x)$$

$$= 1 + \left(\frac{1}{(\alpha - \frac{1}{2}) \cdot N + 1} x^{\overbrace{(\alpha - \frac{1}{2}) N + 1}^{< 0}}\right)\Bigg|_1^{\infty} = 1 + (-1) \cdot \frac{1}{(\alpha - \frac{1}{2}) \cdot N + 1}$$

$< \infty$ Damit ist Behauptung 3 bewiesen und g ist eine integrierbare Majorante.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, d\lambda(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Majorisierte Kgz}}}{=} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{f(x)}_{=0} \, d\lambda(x) = \underline{\underline{0}}$$