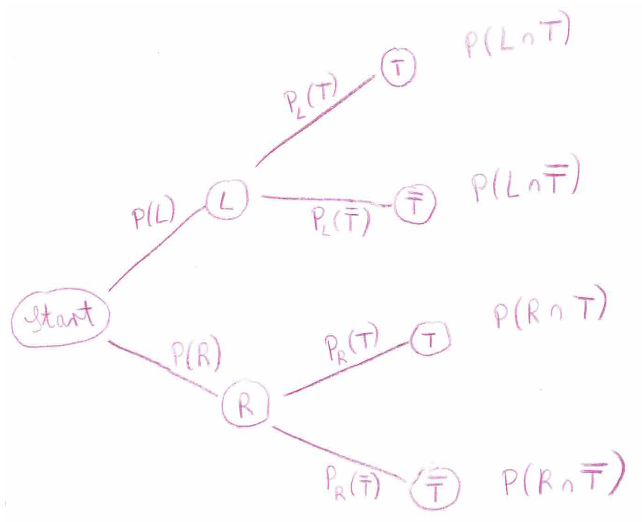
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fußballer F mit links bzw. mit rechts schießt, mit $P(L)$ bzw. mit $P(R)$. Ein Schuss von F geht dann mit der Wahrscheinlichkeit $P(T)$ in's Tor bzw. mit der Wahrscheinlichkeit $P\left(\overline{T}\right)$ nicht in's Tor.

Die *bedingte Wahrscheinlichkeit*, dass der Ball in's Tor geht, unter der Bedingung, dass F mit links geschossen hat, bezeichnen wir mit $P_L(T)$. Mit diesen Definitionen erhalten wir das folgende Baumdiagramm:



Nach der 1.Pfadregel ist

$$P(L \cap T) = P(L) \cdot P_L(T) \tag{1}$$

Aufgabe 1: Was ergibt sich mit der 1.Pfadregel für $P\left(L \cap \overline{T}\right)$, $P(R \cap T)$ und $P\left(R \cap \overline{T}\right)$?

Lösung:

$$P\left(L \cap \overline{T}\right) = P(L) \cdot P_L\left(\overline{T}\right)$$
$$P(R \cap T) = P(R) \cdot P_R(T)$$
$$P\left(R \cap \overline{T}\right) = P(R) \cdot P_R\left(\overline{T}\right)$$

Gleichung (1) nach $P_L(T)$ aufgelöst, ergibt:

$$P_L(T) = \frac{P(L \cap T)}{P(L)}$$

Aufgabe 2: Was ergibt sich für $P_L\left(\overline{T}\right)$, $P_R\left(T\right)$ und $P_R\left(\overline{T}\right)$?
Lösung:

$$\begin{aligned} P_L\left(\overline{T}\right) &= \frac{P\left(L\cap\overline{T}\right)}{P\left(L\right)} \\ P_R\left(T\right) &= \frac{P\left(R\cap T\right)}{P\left(R\right)} \\ P_R\left(\overline{T}\right) &= \frac{P\left(R\cap\overline{T}\right)}{P\left(R\right)} \end{aligned}$$

Mit der 2.Pfadregel ergibt sich:

$$P\left(T\right) \overset{\text{2.Pfadregel}}{=} P\left(L\cap T\right)+P\left(R\cap T\right) \overset{\text{1.Pfadregel}}{=} P\left(L\right)\cdot P_L\left(T\right)+P\left(R\right)\cdot P_R\left(T\right)$$

Aufgabe 3: Was ergibt sich mit der 2.Pfadregel für $P\left(\overline{T}\right)$?
Lösung:

$$P\left(\overline{T}\right) \overset{\text{2.Pfadregel}}{=} P\left(L\cap\overline{T}\right)+P\left(R\cap\overline{T}\right) \overset{\text{1.Pfadregel}}{=} P\left(L\right)\cdot P_L\left(\overline{T}\right)+P\left(R\right)\cdot P_R\left(\overline{T}\right)$$

Aufgabe 4: Sei nun $P\left(L\right)=0,8$, $P_L\left(T\right)=0,7$ und $P_R\left(T\right)=0,4$ gegeben. Berechnen Sie $P\left(T\right)$ und $P_T\left(L\right)$!
Lösung:

$$\begin{aligned} P\left(T\right) &= P\left(L\cap T\right)+P\left(R\cap T\right) \\ &= P\left(L\right)\cdot P_L\left(T\right)+P\left(R\right)\cdot P_R\left(T\right) \\ &= 0,8\cdot 0,7+0,2\cdot 0,4 \\ &= 0,42+0,08 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_T\left(L\right) &= \frac{P\left(L\cap T\right)}{P\left(T\right)} \\ &= \frac{P\left(L\right)\cdot P_L\left(T\right)}{P\left(T\right)} \\ &= \frac{0,8\cdot 0,7}{0,5} = \frac{0,42}{0,5} = \frac{42}{50} = \frac{84}{100} = 84\% \end{aligned}$$