$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \Rightarrow \log(a\cdot b) = \log(a)\cdot \log(b)$

32. Man verifiziere für alle $x, y > 0$ die Ungleichung

$$\frac{\log x + \log y}{2} \le \log\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

$\boxed{32}$ Sei $x, y > 0$.

$$\frac{\log(x)+\log(y)}{2} \le \log\left(\frac{x+y}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$0 \le \log\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{\log(x)+\log(y)}{2}$$

$$= \log\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}\cdot\log(x\cdot y)$$

$$= \log\left(\frac{x+y}{2}\right) - \log\left((x\cdot y)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$n\log(a) = \log(a^n)$

$\log(a) - \log(b) = \log\left(\frac{a}{b}\right)$

$$= \log\left(\frac{\frac{x+y}{2}}{(x\cdot y)^{\frac{1}{2}}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{x+y}{2}}{(x\cdot y)^{\frac{1}{2}}} \ge 1 \Leftrightarrow$$

$$x+y \ge \sqrt{x\cdot y}\cdot 2 \quad |\,(\;)^2 \Leftrightarrow$$

$$(x+y)^2 \ge (x\cdot y)\cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$x^2+2xy+y^2 \ge 4xy \Leftrightarrow$$

$$(x-y)^2 \ge 0$$

$\boxed{\binom{n}{k} \le \frac{n^k}{k!}}$

33. Man zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$n^n e^{-n+1} \le n! \le n^n e^{-n+1} n$$

erfüllt ist.

$\boxed{33}$ Z: $n^n e^{-n+1} \le n! \quad \forall n \in \mathbb{N}$

IA $n=1$: $1^1 \cdot e^{-0} = 1 \le 1! = 1$ ✓ $n^n e^{-n+1} \le n!$

IV Sei $n \in \mathbb{N}$ sd es gelte $n^n e^{-n+1} \le n!$

IS: $(n+1)! = (n+1)\cdot n! \overset{IV}{\ge} (n+1)\, n^n e^{-n+1}$

Noch z: $(n+1)\, n^n e^{-n+1} \ge (n+1)^{n+1} \cdot e^{-(n+1)+1} \quad |:(n+1)$

$$n^n e^{-n}\cdot e \ge (n+1)^n \cdot e^{-n} \quad |:e^{-n}$$

$$n^n \cdot e \ge (n+1)^n \quad |:n^n$$

$$e \ge \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \checkmark$$

Wir wissen: $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{n\to\infty}{\nearrow} e}$$

Kapital 1€ 1% Zinsen

1-mal im Jahr	$(100\% + 1\%)\cdot 1€$
2-mal im Jahr	$\left(100\% + \frac{1}{2}\%\right)^2 \cdot 1€$
3-mal	$\left(100\% + \frac{1}{3}\%\right)^3 \cdot 1€$
n-mal	$\left(100\% + \frac{1}{n}\%\right)^n \cdot 1€ \xrightarrow{n\to\infty} e$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $n! \le n^n e^{-n+1} \cdot n$

Induktion

IA $n=1$: $1! = 1$

$$\le 1^1 \cdot e^{-1+1}\cdot 1 = 1^1 \cdot e^0 \cdot 1 = 1 \checkmark$$

IV Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $n! \le n^n \cdot e^{-n+1}\cdot n$

IS: $(n+1)! = n!\cdot(n+1)$

$$\overset{IV}{\le} n^n \cdot e^{-n+1} \cdot n \cdot (n+1)$$

Noch z: $n^n \cdot e^{-\cancel{n}+1} \cdot n \cdot \cancel{(n+1)} \le (n+1)^{n+1} \cdot e^{-(\cancel{n}+1)+1} \cdot \cancel{(n+1)}$

$$n^{n+1}\cdot e \le (n+1)^{n+1}$$

$$e \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \overset{n\to\infty}{\searrow} e}$$