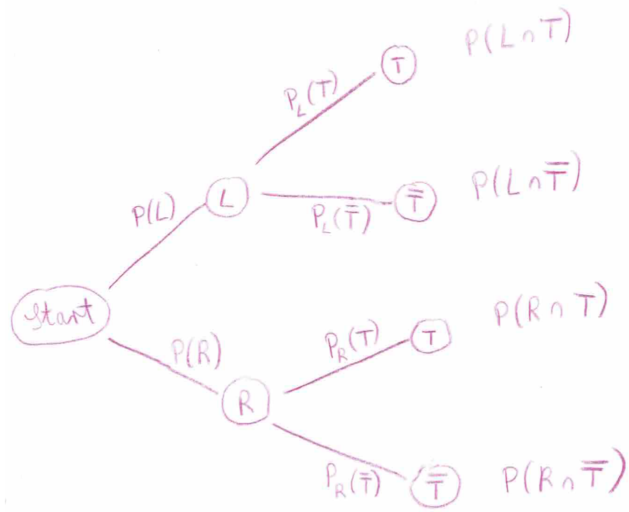
Bedingte Wahrscheinlichkeit

Wir bezeichnen die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fußballer F mit links bzw. mit rechts schießt, mit $P(L)$ bzw. mit $P(R)$. Ein Schuss von F geht dann mit der Wahrscheinlichkeit $P(T)$ in's Tor bzw. mit der Wahrscheinlichkeit $P\left(\overline{T}\right)$ nicht in's Tor.

Die *bedingte Wahrscheinlichkeit*, dass der Ball in's Tor geht, unter der Bedingung, dass F mit links geschossen hat, bezeichnen wir mit $P_L(T)$. Mit diesen Definitionen erhalten wir das folgende Baumdiagramm:



Nach der 1.Pfadregel ist

$$P(L\cap T) = P(L)\cdot P_L(T) \tag{1}$$

Aufgabe 1: Was ergibt sich mit der 1.Pfadregel für $P\left(L\cap\overline{T}\right)$, $P(R\cap T)$ und $P\left(R\cap\overline{T}\right)$?

Lösung:

$$\begin{aligned}
P\left(L\cap\overline{T}\right) &= P(L)\cdot P_L\left(\overline{T}\right)\\
P(R\cap T) &= P(R)\cdot P_R(T)\\
P\left(R\cap\overline{T}\right) &= P(R)\cdot P_R\left(\overline{T}\right)
\end{aligned}$$

Gleichung (1) nach $P_L(T)$ aufgelöst, ergibt:

$$P_L\left(\overline{T}\right) = \frac{P\left(L\cap\overline{T}\right)}{P(L)} P_R(T) \qquad = \frac{P(R\cap T)}{P(R)} P_R\left(\overline{T}\right) = \frac{P\left(R\cap\overline{T}\right)}{P(R)}$$

Mit der 2.Pfadregel ergibt sich:

$$P(T) \overset{\text{2.Pfadregel}}{=} P(L \cap T) + P(R \cap T) \overset{\text{1.Pfadregel}}{=} P(L) \cdot P_L(T) + P(R) \cdot P_R(T)$$

Aufgabe 3: Was ergibt sich mit der 2.Pfadregel für $P\left(\overline{T}\right)$?
Lösung:

$$P\left(\overline{T}\right) \overset{\text{2.Pfadregel}}{=} P\left(L \cap \overline{T}\right) + P\left(R \cap \overline{T}\right) \overset{\text{1.Pfadregel}}{=} P(L) \cdot P_L\left(\overline{T}\right) + P(R) \cdot P_R\left(\overline{T}\right)$$

Aufgabe 4: Sei nun $P(L) = 0,8$, $P_L(T) = 0,7$ und $P_R(T) = 0,4$ gegeben. Berechnen Sie $P(T)$ und $P_T(L)$!
Lösung:

$$\begin{aligned} P(T) &= P(L \cap T) + P(R \cap T) \\ &= P(L) \cdot P_L(T) + P(R) \cdot P_R(T) \\ &= 0,8 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,4 \\ &= 0,42 + 0,08 \\ &= 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_T(L) &= \frac{P(L \cap T)}{P(T)} \\ &= \frac{P(L) \cdot P_L(T)}{P(T)} \\ &= \frac{0,8 \cdot 0,7}{0,5} = \frac{0,42}{0,5} = \frac{42}{50} = \frac{84}{100} = 84\% \end{aligned}$$