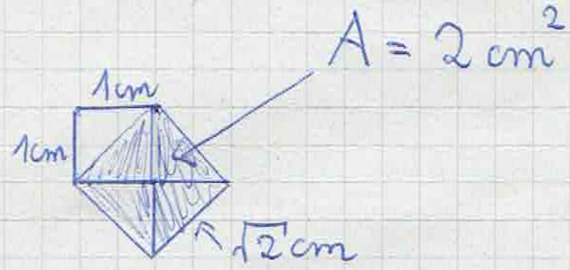

Wir wollen $\sqrt{2}$ als Dezimalbruch schreiben:

$$\sqrt{2} = \underline{1}\,,\,\underline{4}\;\underline{1}\;\underline{4}$$

$1 = 1^2 < (\sqrt{2})^2 = 2 < 2^2 = 4 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2$

$1{,}96 = 1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2 = 2{,}25 \Rightarrow 1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$

$1{,}9881 = 1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2 = 2{,}0164 \Rightarrow 1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$

Frage: Ist $\sqrt{2}$ ein endliche oder ein unendlich periodischer Dezimalbruch?

Antwort: Nein!

Satz: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Beweis:

Angenommen $\sqrt{2}$ wäre eine rationale Zahl.

Dann finden wir teilerfremde natürliche Zahlen p und q, sodass

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad |(\;)^2$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

Da p und q teilerfremd sind, so sind auch p^2 und q^2 teilerfremd, d.h. $\frac{p^2}{q^2}$ ist ein vollständig gekürzter Bruch.

Da $1{,}4 < \sqrt{2} = \frac{p}{q} < 1{,}5$, so ist

$q > 1$.

$\Rightarrow q^2 > 1 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2}$ ist keine natürliche Zahl.

Widerspruch zu $\frac{p^2}{q^2} = 2$

$\Rightarrow$ Annahme, dass $\sqrt{2}$ rational ist, war falsch

$\Rightarrow \sqrt{2}$ nicht rational

q.e.d.

$\sqrt{2}$ ist eine unendliche, nicht-periodische Dezimalzahl.
Solche Zahlen nennt man irrationale Zahlen.

Zwischen zwei Zahlen liegen sowohl unendliche viele rationale sowie irrationale Zahlen.
Die rationalen und die irrationalen Zahlen bilden zusammen die Menge der reellen Zahlen.