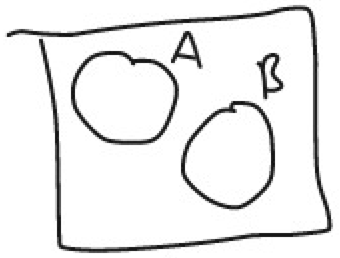
3. **Elementare Eigenschaften signierter Maße.** Es sei μ ein signiertes Maß oder ein Inhalt auf einem Ereignisraum $(\Omega, \mathcal{A})$. Beweisen Sie für $A, B, C \in \mathcal{A}$:

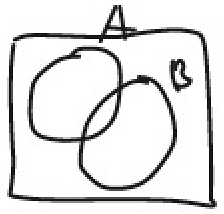
(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(b) $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(B \setminus A) + \mu(A)$,

(c) $\mu(A \setminus B) + \mu(B) = \mu(A)$, falls $B \subseteq A$,

(d) $\mu(A \cup B \cup C) + \mu(A \cap B) + \mu(B \cap C) + \mu(C \cap A) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) + \mu(A \cap B \cap C)$.





$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$\uparrow$ σ-Algebra

$\mu: \mathcal{A} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ ist Inhalt, falls

1) $\mu(\emptyset) = 0$

2) $\forall A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$: $\mu(A \dot\cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

a) Zu zeigen: $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

Beweis:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \dot\cup B \setminus A) \overset{2)}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

NR.:

$$\mu(B) = \mu(B \cap \Omega) = \mu(B \cap (A \cup A^c)) = \mu((B \cap A) \cup (B \cap A^c)) = \mu((A \cap B) \cup B \setminus A) \overset{2)}{=} \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$$

$$\Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$$

d) Zu zeigen: $\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$

Beweis:

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu((A \cup B) \cup C)$$

$$\overset{a)}{=} \mu(A \cup B) + \mu(C) - \mu((A \cup B) \cap C)$$

$$= \mu(A \cup B) + \mu(C) - \mu((A \cap C) \cup (B \cap C))$$

$$\overset{a)}{=} \mu(A \cup B) + \mu(C) - \left[\mu(A \cap C) + \mu(B \cap C) - \mu((A \cap C) \cap (B \cap C))\right]$$

$$\overset{a)}{=} \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) + \mu(C) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C)$$

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{E}\subseteq\mathcal{A} \\ \text{und } \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}}} \mathcal{A}$ = kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält

1. **Erzeugte σ-Algebren.** Es sei $\Omega = \{1,2,3,4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$. Beweisen Sie $\sigma(\mathcal{E},\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$. Geben Sie auch alle Elemente von $\sigma(\{\{1,2\}\},\Omega)$ an.

Zu zeigen: $\mathcal{P}(\Omega) \overset{!}{=} \sigma(\mathcal{E})$

„$\supseteq$" klar

„$\subseteq$" $\mathcal{P}(\Omega) = \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\}$

$\{1\} = \underbrace{\{1,2\}}_{\in\mathcal{E}\subseteq\sigma(\mathcal{E})} \cap \underbrace{\{1,3\}}_{\mathcal{E}\subseteq\sigma(\mathcal{E})} \in \sigma(\mathcal{E})$ $\sigma(\mathcal{E})$ $\cap$-stabil

$\{4\} = (\{1,2\}\cup\{1,3\})^c \in \sigma(\mathcal{E})$

$\{2\} = \{1,2\}\setminus\{1\} \in \sigma(\mathcal{E})$

$\{2\} = \{1,2\} \cap \underbrace{\{1,3\}^c}_{=\{2,4\}}$

$\{3\} = \{1,3\} \cap \{1,2\}^c \in \sigma(\mathcal{E})$

$\Omega \in \sigma(\mathcal{E})$ wegen (1)

$\emptyset = \Omega^c \in \sigma(\mathcal{E})$

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist σ-Algebra, falls

1) $\Omega \in \mathcal{A}$

2) $\forall A \in \mathcal{A}: A^c \in \mathcal{A}$ (^{c}-stabil)

3) $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}: \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ ($\bigcap_\infty$-stabil)

Bemerkung:

Es gilt auch $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}: \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, denn

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \overset{(A^c)^c = A}{=} \Big(\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)^c\Big)^c \overset{\text{De Morgan}}{=} \Big(\underbrace{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{A_n^c}_{\in\mathcal{A},\text{ da }\mathcal{A}\ ^c\text{-stabil}}}_{\in\mathcal{A},\text{ da }\mathcal{A}\ \bigcap_\infty\text{-stabil}}\Big)^c \in \mathcal{A}$$

da $\mathcal{A}$ ^{c}-stabil

Es gilt auch $\forall A,B \in \mathcal{A}: A\setminus B \in \mathcal{A}$

$$A\setminus B = A \cap \underbrace{B^c}_{\in\mathcal{A},\text{ da }^c\text{-stabil}} \cap\, \Omega \cap \Omega \cap \ldots \in \mathcal{A}$$

$\bigcap_\infty$-stabil

1. **Erzeugte σ-Algebren.** Es sei $\Omega = \{1,2,3,4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1,2\},\{1,3\}\}$. Beweisen Sie $\sigma(\mathcal{E},\Omega) = \mathcal{P}(\Omega)$. Geben Sie auch alle Elemente von $\sigma(\{\{1,2\}\},\Omega)$ an.

$$\sigma(\{\{1,2\}\}) = \{\{1,2\},\{3,4\},\emptyset,\Omega\}$$

$A \subseteq \Omega$

$\{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$ ist immer σ-Algebra

Satz von Vitali: Es kein Maß

$$\delta : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$$

sodass $\forall a<b$: $\delta([a,b]) = b-a$, d.h. sodass $\delta(\emptyset)=0$, $\delta\left(\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \delta(A_n)$

Aber es gibt Maß

Lebesgue-Maß $\to \delta : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$

mit $\delta([a,b]) = b-a$

Borelsche σ-Algebra

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$

4. **Erzeugendensysteme für $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.** Es sei $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass folgende Mengensysteme alle die Borelsche σ Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugen:

(a) $\mathcal{E}_1 = \{]a,b[\mid a,b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}, a < b\}$ sei die Menge der offenen Intervalle. $\sigma(\mathcal{E}_1) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$

(b) $\mathcal{E}_2 = \{[a,b]\mid a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ sei die Menge der kompakten Intervalle.

(c) $\mathcal{E}_3 = \{]-\infty,a]\mid a \in \mathbb{R}\}$ sei die Menge der linksseitig unendlichen abgeschlossenen Intervalle.

(d) $\mathcal{E}_4 = \{]-\infty,a]\mid a \in \mathbb{Q}\}$ sei die Menge der linksseitig unendlichen abgeschlossenen Intervalle mit rationalem Endpunkt.

(e) $\mathcal{E}_5 = \{]a,b[\cap \mathbb{R}\mid a,b \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\}$

A offen $:\Leftrightarrow$

$\forall x \in A: x$ innerer Punkt von A $\Leftrightarrow$

$\forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0 : \underbrace{]x-\varepsilon, x+\varepsilon[}_{= B_\varepsilon(x)} \subseteq A$

$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \\ \text{Es gilt:} \\ \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) \Leftrightarrow \mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2) \\ \qquad\qquad\qquad \wedge\ \mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1) \end{array}}$

$\mathcal{E} := \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ offen}\}$

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{E})$

a) Zu zeigen: $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E})$

$\mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ ist klar, da sogar $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}$

Noch zu zeigen: $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$

Sei $A \in \mathcal{E}$, d.h. A offen.

Für alle $x \in A$ finden wir $\varepsilon_x > 0$ sodass $]x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x[\subseteq A$

$$A = \bigcup_{x \in A} \underbrace{]x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x[}_{\in \sigma(\mathcal{E}_1)} = \bigcup_{x \in A \cap \mathbb{Q}} \underbrace{]x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x[}_{\in \sigma(\mathcal{E}_1)} \in \sigma(\mathcal{E}_1)$$

$\cup_\omega$-stabil

$\mathbb{Q}$ abzählbar

$\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$, d.h. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

$A \neq A \cap \mathbb{Q}$