Aufgabe T1:
Finden Sie ein Polynom p dritten Grades, das die Bedingungen

$$p(1) = 3,\ p(-1) = -1,\ p'(-1) = -6 \text{ und } p''(-1) = 4$$

erfüllt.

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$p''(x) = 6ax + 2b$$

$p(1)=3$ I) $a+b+c+d=3$
$p(-1)=-1$ II) $-a+b-c+d=-1$
$p'(-1)=-6$ III) $3a-2b+c=-6$
$p''(-1)=4$ IV) $-6a+2b=4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 0 & -6 \\ -6 & 2 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -3 & -15 \\ 0 & 8 & 6 & 6 & 22 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -10 \\ 0 & 0 & 6 & -2 & 14 \end{array}\right)$$
$$\downarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -10 \\ -16 \end{pmatrix}$$

aus IV) $4d = -16 \Rightarrow d = -4$

III) $-2c + 2d = -2c - 8 = -10 \quad | +8$
$-2c = -2 \quad | : (-2)$
$c = 1$

II) $b + d = b - 4 = 1 \quad | +4$
$\Rightarrow b = 5$

I) $a + 5 + 1 - 4 = 3$
$\Rightarrow a = 1$

$$\boxed{p(x) = x^3 + 5x^2 + x - 4}$$

miro

Aufgabe T2:
Eine Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erfüllt für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$2h(x) + h(1-x) = x^2 . \quad (*)$$

Bestimmen Sie $h(x)$.

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ansatz: $h(x) = ax^2 + bx + c$

in $(*)$: $2\cdot(ax^2 + bx + c) + a\cdot(1-x)^2 + b\cdot(1-x) + c = x^2$

$$2ax^2 + 2bx + 2c + \underbrace{a\cdot(1-2x+x^2)}_{= a - 2ax + ax^2} + b - bx + c = x^2$$

$$3a\cdot x^2 + (b-2a)\cdot x + a - b + 3c = x^2 \quad | -x^2$$

$$\underbrace{(3a-1)}_{=0!}\cdot x^2 + (b-2a)x + (a-b+3c) = 0$$

Koeffizientenvergleich:

I) $3a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

II) $b - 2a = 0 \Rightarrow b - \frac{2}{3} = 0 \Rightarrow b = \frac{2}{3}$

III) $a - b + 3c = 0 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + 3c = 0$

$-\frac{1}{3} + 3c = 0 \Rightarrow 3c = \frac{1}{3} \Rightarrow c = \frac{1}{9}$

$$\Rightarrow \boxed{h(x) = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9}}$$

miro

Aufgabe T3: Matrizen und Vektoren

Berechnen Sie für die neun Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $x_1, x_2 \in \{0, 1, 2\}$ und die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

das Produkt $y = Ax$ und zeichnen Sie die entsprechenden Vektoren in ein Koordinatensystem ein.
Wie kann man die Abbildung $x \mapsto Ax$ geometrisch beschreiben?
Finden Sie anschaulich die 2×2-Matrix B, die umgekehrt den Vektor y auf den Vektor x abbildet, d.h. $x = By$.

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

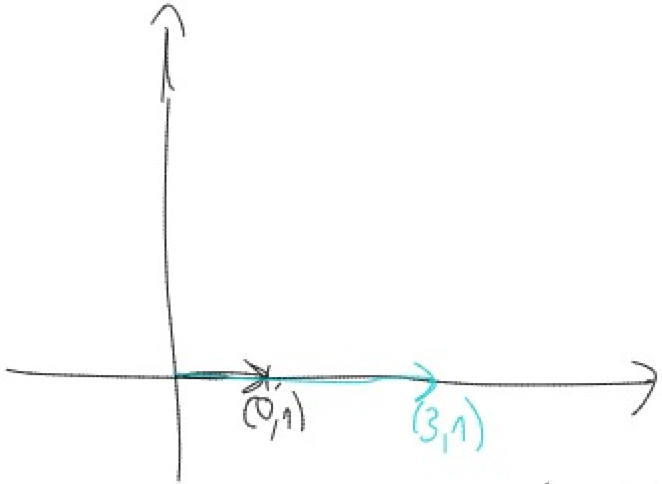
$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$$



$$A \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 3 \cdot 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 + 2 \cdot 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix} \longrightarrow B \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$B = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Aufgabe T4: Eine Klein(sch)e Gruppe

Wir betrachten die Menge $M = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ mit der Verknüpfung $\odot : M \times M \to M$, die durch die folgende Verknüpfungstafel gegeben ist:

$\odot$	α	β	γ	δ
α	γ	δ	α	β
β	δ	γ	β	α
γ	α	β	γ	δ
δ	β	α	δ	γ

Zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um eine Gruppe handelt. Welches ist das neutrale Element? Ist die Gruppe abelsch?

Zusatz: Wie müsste man allgemein bei einer (eventuell viel größeren) Verknüpfungstafel vorgehen? Welche Eigenschaft ist am mühsamsten nachzuprüfen?

Definition [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Gruppe [Bearbeiten | Quelltext bearbeiten]

Eine Gruppe ist ein Paar $(G, *)$ bestehend aus einer Menge G und einer inneren zweistelligen Verknüpfung $*$ auf G. Dabei erfüllt die (in Infixnotation geschriebene) Abbildung

$$*: \begin{cases} G \times G & \to & G \\ (a, b) & \mapsto & a * b \end{cases}$$

die folgenden, Gruppenaxiome genannten, Forderungen:[3]

- Für alle Gruppenelemente a, b und c gilt: (Assoziativität)
  $(a * b) * c = a * (b * c)$.[4]
- Es gibt ein (einziges) neutrales Element $e \in G$, mit dem für alle Gruppenelemente $a \in G$ gilt: (Existenz des neutralen Elements)
  $a * e = e * a = a$.[5]
- Zu jedem Gruppenelement $a \in G$ existiert ein (einziges) inverses Element (Existenz des inversen Elements)
  $a^{-1} \in G$ mit $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.[6]

$(M, \odot)$ abelsch, falls
$\forall a, b \in M: a \odot b = b \odot a$

$e = \gamma$

$(M, \odot)$ abelsch, da
Verknüpfungstafel symmetrisch

$\alpha \odot \alpha = e \Rightarrow \alpha^{-1} = \alpha$
$\beta \odot \beta = e \Rightarrow \beta^{-1} = \beta$
$\gamma \odot \gamma = e \Rightarrow \gamma^{-1} = \gamma$
$\delta \odot \delta = e \Rightarrow \delta^{-1} = \delta$

$\Rightarrow$ Inverse existieren

miro