Aufgabe 12

Beweisen Sie, dass die folgenden Sprachen L_i die kontextfreie Pumping Eigenschaft nicht haben:

$$L_1 = \{a^n b^{2n} c^{3n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$
$$L_2 = \{a^n b^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$$
$$L_3 = \{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$$
$$L_4 = \{a^m \mid \exists n \in \mathbb{N}_0 : n = m^2\}$$
$$L_5 = \{a^p \mid p \text{ Primzahl}\}$$

L hat nicht kontextfreie Pumping-Eigenschaft :⇔ $\forall n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ $\exists w \in L$ mit $|w| \geq n$ sodass $\forall$ Zerlegungen $w = xyzuv$ mit 1) $|yzu| \leq n$ 2) $|yu| \geq 1$ $\exists i \in \mathbb{N}_0$ sodass $xy^izu^iv \notin L$

L hat kontextfreie Pumping-Eigenschaft :⇔ $\exists n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ sodass $\forall w \in L$ mit $|w| \geq n$ $\exists$ Zerlegung $w = xyzuv$ mit
1) $|yzu| \leq n$
2) $|yu| \geq 1$
3) $\forall i \in \mathbb{N}_0$: $xy^izu^iv \in L$

$n = 1$

$w = abbccc$

$x = a$, $y = b$, $z = u = δ$, $v = bccc$

$i = 0$

$abccc \notin L$

Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$.

Wähle $w := a^n b^{2n} c^{3n} \in L$ $\quad |w| = 6n \geq n$ ✓

Sei $w = xyzuv$ eine Zerlegung von w mit 1) $|yzu| \leq n$ und 2) $|yu| \geq 1$

Wähle $i = 0$.

$xy^izu^iv = xzv \notin L$, da mindestens ein Buchstabe (also mindestens ein a) gegenüber w gelöscht wird. Damit $xzv \in L$, müssten doppelt so viele b und dreimal so viele c wie a gelöscht werden. Aber dann müsste b^{2n} Teilwort von yzu sein. Widerspruch zu $|b^{2n}| = 2n > n \geq |yzu|$. ↯

$$aa\underbrace{\underbrace{bb}_{y}\underbrace{b}_{z}\underbrace{b\,c}_{u}}_{yzu}ccccc$$

yzu überdeckt alle b's

AACBCBb

AACCbBB

L_2:
$S \to S_1 b$
$S_1 \to AS_1CB$
$S_1 \to δ$
$Bδ \to aδ$
$Ba \to aB$
$BC \to CB$
$Bb \to bB$
$AC \to CAa$
$aC \to Ca$
$δC \to δ$
$Ab \to ab$
$Aa \to aA$

Aufgabe 9

Geben Sie jeweils allgemeine Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$L_1 := \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_2 := \{a^{n^2} b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_3 := \{\mathrm{bin}(n) \cdot a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_4 := \{\mathrm{bin}(n)\$\mathrm{bin}(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_5 := \{\mathrm{bin}(n)\$\mathrm{bin}(m)\$\{\mathrm{bin}(n+m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

$n = 3$

AAACCC

L_1:
$S \to ASC$
$S \to δ$
$δC \to δ$
$AC \to CAa$
$aC \to Ca$
$Aa \to aA$
$Aδ \to aδ$

aaaa

$S \to AACC \to ACAaC \to CAaAaC \to aAaAC \to aAaCAa \to aaACaA \to aaCAaa \to CaaaaA \to aaaa$ ✓

Aufgabe 9

Geben Sie jeweils allgemeine Grammatiken an, die die Sprachen L_i erzeugen:

$$L_1 := \{a^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_2 := \{a^{n^2} b a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_3 := \{\mathrm{bin}(n) \cdot a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_4 := \{\mathrm{bin}(n)\$\mathrm{bin}(n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$L_5 := \{\mathrm{bin}(n)\$\mathrm{bin}(m)\$\{\mathrm{bin}(n+m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

0
1
10
11
100
101
110
111
1000

L_3:
$S \to 0S_1$
$S_1 \to δ$
$S_1 \to AS_1$
$0A \to 1a$
$1A \to G0a$
$δG \to δ1$
$0G \to 1$
$1G \to G0$
$aA \to Aa$

11aaa

$S \to 0S_1 \to 0AAA \to 1aAA \to 1AAa \to G0aAa \to G0Aaa \to 10Aaa \to 11aaa$ ✓

L_3: $S \to 0S_1\$0C$
$S_1 \to ACS_1$
$S_1 \to \varepsilon$
$CA \to AC$
$C\$ \to \$C$
$C0 \to 0C$
$Cδ \to Aδ$
$0A \to 1$
$1A \to A0$
$δA \to 1$
$\$A \to 1$

0ACAC\$0C

0AA\$0AAA

miro