$\Omega = \{1,2,3,4\}$
$\mathcal{E} = \{\{1,3\},\{1,2\}\}$
nicht $\cap$-stabil

$\mu(\Omega) = 1$

6. **Unabhängigkeit von $\cap$-stabilen Mengensystemen.** Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{A}$ durchschnittsstabile Mengensysteme mit $\Omega \in \mathcal{E}_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir nennen $\mathcal{E}_1, \ldots \mathcal{E}_n$ (voneinander) unabhängig bzgl. μ, wenn gilt:

$$(*) \qquad \forall A_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{E}_n : \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Zeigen Sie:

(a) Sind die Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \ldots \mathcal{E}_n$ von oben (voneinander) unabhängig bzgl. μ, so auch $\sigma(\mathcal{E}_1), \ldots, \sigma(\mathcal{E}_n)$.

$n = 3$:

Satz 1.38 (Dynkin-Lemma, auch Π-Λ-Theorem genannt) *Es sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein durchschnittsstabiles Mengensystem und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Dynkin-System über Ω. Dann gilt:*
Aus $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ folgt $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$.

Sei $A_2 \in \mathcal{E}_2$ und $A_3 \in \mathcal{E}_3$ fest.

$$\mathcal{D}_1 := \{A_1 \in \mathcal{A} \mid \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3)\}$$

Beh.: $\mathcal{D}_1$ ist Dynkin-System, d.h.

1) $\Omega \in \mathcal{D}_1$
2) $\forall A_1 \in \mathcal{D}_1 : A_1^c \in \mathcal{D}_1$ $\quad$ ^{c}-stabil
3) $\forall (A_1^i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_1$ mit $A_1^i \cap A_1^j = \emptyset$ für $i \neq j$: $\dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} (A_1^i) \in \mathcal{D}_1$ $\quad$ $\dot{\cup}_\infty$-stabil

zu 1) $\mu(\underset{\in \mathcal{E}_1}{\Omega} \cap \underset{\in \mathcal{E}_2}{A_2} \cap \underset{\in \mathcal{E}_3}{A_3}) \overset{(*)}{=} \mu(\Omega) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{D}_1$ ✓

da $\Omega \in \mathcal{E}_i$ $\forall i$

zu 2) Sei $A_1 \in \mathcal{D}_1$, d.h. $\mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3)$

$\mu(\Omega) = \mu(A_1 \dot{\cup} A_1^c) = \mu(A_1) + \mu(A_1^c)$
$\Rightarrow \boxed{\mu(A_1^c) = \mu(\Omega) - \mu(A_1)}$

$$\begin{aligned}
\mu(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) &= \mu(A_2 \cap A_3) - \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \\
&= \mu(\Omega \cap A_2 \cap A_3) - \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3) \\
&\overset{1)}{=} \mu(\Omega) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3) - \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3) \\
&= \mu(A_2) \cdot \mu(A_3) \underbrace{[\mu(\Omega) - \mu(A_1)]}_{= \mu(A_1^c)} \\
&= \mu(A_1^c) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3) \Rightarrow A_1^c \in \mathcal{D}_1 \\
&\Rightarrow \mathcal{D}_1 \ {}^c\text{-stabil}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu(A_2 \cap A_3) &= \mu(\Omega \cap A_2 \cap A_3) = \mu((A_1 \dot{\cup} A_1^c) \cap A_2 \cap A_3) \\
&= \mu((A_1 \cap A_2 \cap A_3) \dot{\cup} (A_1^c \cap A_2 \cap A_3)) \\
&= \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \mu(A_1^c \cap A_2 \cap A_3)
\end{aligned}$$
$\Rightarrow \mu(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) = \mu(A_2 \cap A_3) - \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

zu 3) Sei $(A_1^i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{D}_1$ mit $A_1^i \cap A_1^j = \emptyset$ $\forall i \neq j$.
d.h. $\mu(A_1^i \cap A_2 \cap A_3) = \mu(A_1^i) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3)$

$$\begin{aligned}
\mu\left(\left(\dot{\bigcup_{i \in \mathbb{N}}} A_1^i\right) \cap A_2 \cap A_3\right) &= \mu((A_1^1 \cap A_2 \cap A_3) \dot{\cup} (A_1^2 \cap A_2 \cap A_3) \dot{\cup} \ldots) \\
&= \mu\left(\dot{\bigcup_{i \in \mathbb{N}}} (A_1^i \cap A_2 \cap A_3)\right) \\
&\overset{\sigma\text{-Additivität von } \mu}{=} \mu(A_1^1 \cap A_2 \cap A_3) + \mu(A_1^2 \cap A_2 \cap A_3) + \ldots \\
&= \mu(A_1^1) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3) + \mu(A_1^2) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3) + \ldots \\
&= \mu(A_2) \cdot \mu(A_3) \cdot [\mu(A_1^1) + \mu(A_1^2) + \ldots] \\
&\overset{\sigma\text{-Additivität von Maß } \mu}{=} \mu\left(\dot{\bigcup_{i \in \mathbb{N}}} A_1^i\right) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3) \quad \Rightarrow \dot{\bigcup_{i \in \mathbb{N}}} A_1^i \in \mathcal{D}_1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{D}_1 = \{A_1 \in \mathcal{A} \mid \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3)\}$$

ist Dynkin-System.

$\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{D}_1$ ist klar wegen $(*)$.
und $\mathcal{E}_1$ $\cap$-stabil

$\overset{\text{Dynkin-Lemma}}{\Longrightarrow} \delta(\mathcal{E}_1) \subseteq \mathcal{D}_1$

$\Rightarrow \forall A_1 \in \delta(\mathcal{E}_1)$ $\forall A_2 \in \mathcal{E}_2$ $\forall A_3 \in \mathcal{E}_3$: $\quad (**)$
$\mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3)$

Sei $A_1 \in \delta(\mathcal{E}_1)$ $A_3 \in \mathcal{E}_3$ fest.

$$\mathcal{D}_2 := \{A_2 \in \mathcal{A} \mid \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3)\}$$

Man zeigt analog:
$\mathcal{D}_2$ ist Dynkin-System und
$\mathcal{E}_2$ ist $\cap$-stabil und $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{D}_2$ wegen $(**)$

$\overset{\text{Dynkin-Lemma}}{\Longrightarrow} \delta(\mathcal{E}_2) \subseteq \mathcal{D}_2 \Rightarrow \forall A_1 \in \delta(\mathcal{E}_1)$ $\forall A_2 \in \delta(\mathcal{E}_2)$
$\forall A_3 \in \mathcal{E}_3$:
$\mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3)$

Satz 1.38 (Dynkin-Lemma, auch Π-Λ-Theorem genannt) *Es sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein durchschnittsstabiles Mengensystem und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Dynkin-System über Ω. Dann gilt:*
Aus $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D}$ folgt $\sigma(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{D}$.

Sei $A_1 \in \sigma(\mathcal{E}_1)$, $A_2 \in \sigma(\mathcal{E}_2)$ fest.

$$\mathcal{D}_3 := \{A_3 \in \mathcal{A} \mid \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \mu(A_3)\}$$

$\overset{\text{usw.}}{\Longrightarrow}$ Behauptung.

Für allgemeinen Fall $n \in \mathbb{N}$
mit Induktion!

6. **Unabhängigkeit von $\cap$-stabilen Mengensystemen.** Es seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n \subseteq \mathcal{A}$ durchschnittsstabile Mengensysteme mit $\Omega \in \mathcal{E}_i$ für $i = 1, \dots, n$. Wir nennen $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ (voneinander) unabhängig bzgl. μ, wenn gilt:

$$\forall A_1 \in \mathcal{E}_1, \dots, A_n \in \mathcal{E}_n : \mu\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mu(A_i).$$

Zeigen Sie:

(a) Sind die Mengensysteme $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ von oben (voneinander) unabhängig bzgl. μ, so auch $\sigma(\mathcal{E}_1), \dots, \sigma(\mathcal{E}_n)$.

(b) Zeigen Sie an einem Gegenbeispiel, dass die Aussage von oben falsch werden kann, wenn wir auf die Voraussetzung "$\Omega \in \mathcal{E}_i$ für $i = 1, \dots, n$" oben verzichtet hätten. Versehen Sie dazu $\Omega = \{1, 2\}$ mit einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsmaß und betrachten Sie $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \{\{1\}\}$ und $\mathcal{E}_3 = \{\emptyset\}$.

$\Omega = \{1,2\}$

Sei $\mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$

$\mu(\{2\}) = \frac{1}{2}$

$\sigma(\mathcal{E}_1) = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \emptyset\} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\sigma(\mathcal{E}_2) = \mathcal{P}(\Omega)$

$\sigma(\mathcal{E}_3) = \{\emptyset, \{1,2\}\}$

$$\mu(\underbrace{\{1\}}_{\in \sigma(\mathcal{E}_1)} \cap \underbrace{\{2\}}_{\in \sigma(\mathcal{E}_2)} \cap \underbrace{\{1,2\}}_{\in \sigma(\mathcal{E}_3)}) = \mu(\emptyset \cap \{1,2\}) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$\mu(\{1\}) \cdot \mu(\{2\}) \cdot \mu(\{1,2\}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} \neq 0$$

4. **Erzeugendensysteme für $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.** Es sei $\Omega = \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass folgende Mengensysteme alle die Borelsche σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ erzeugen:

(a) $\mathcal{E}_1 = \{]a,b[\mid a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, a < b\}$ sei die Menge der offenen Intervalle.

(b) $\mathcal{E}_2 = \{[a,b] \mid a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ sei die Menge der kompakten Intervalle.

(c) $\mathcal{E}_3 = \{]-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$ sei die Menge der linksseitig unendlichen abgeschlossenen Intervalle.

$$\boxed{\begin{array}{c} \sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_2) \\ \Updownarrow \\ \mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_2) \text{ und} \\ \mathcal{E}_2 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1) \end{array}}$$

c) $\mathcal{E} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ offen}\}$ $\qquad \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$

Zu zeigen: $\sigma(\mathcal{E}_3) = \sigma(\mathcal{E})$, d.h.

1) $\mathcal{E}_3 \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ und

2) $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$

zu 1) Sei $]-\infty, a] \in \mathcal{E}_3$

$$]-\infty, a] = (\underbrace{]a, +\infty[}_{\in \mathcal{E}\text{, da }]a,+\infty[\text{ offen}})^c \in \sigma(\mathcal{E})$$

zu 2) Sei $A \in \mathcal{E}$, d.h. A offen.

$\forall x \in A$ finden wir $\varepsilon_x > 0$ sodass $]x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x[\subseteq A$

$$A = \bigcup_{x \in A \cap \mathbb{Q}}]x - \varepsilon_x, x + \frac{\varepsilon_x}{2}]$$

$$= \bigcup_{x \in A \cap \mathbb{Q}}]-\infty, x + \frac{\varepsilon_x}{2}] \setminus]-\infty, x - \varepsilon_x] \underbrace{\in}_{\sigma(\mathcal{E}_3) \text{ ist } \cup_\infty\text{-stabil}} \sigma(\mathcal{E}_3)$$

miro