

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{U_1} \right|_{U_2=0} \quad \text{primärer Kurzschlussleitwert} \quad (6-6)$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{U_2} \right|_{U_1=0} \quad \text{sekundärseitiger Kurzschlussleitwert} \quad (6-7)$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{U_2} \right|_{U_1=0} \quad \text{sekundärer Kurzschlussleitwert} \quad (6-8)$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{U_1} \right|_{U_2=0} \quad \text{primärseitiger Kurzschlussleitwert} \quad (6-9)$$

$$a) \quad Y = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_{GS}} & 0 \\ g_m & \frac{1}{r_o} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega C_{GS} & 0 \\ g_m & \frac{1}{r_o} \end{pmatrix}$$

nicht symmetrisch

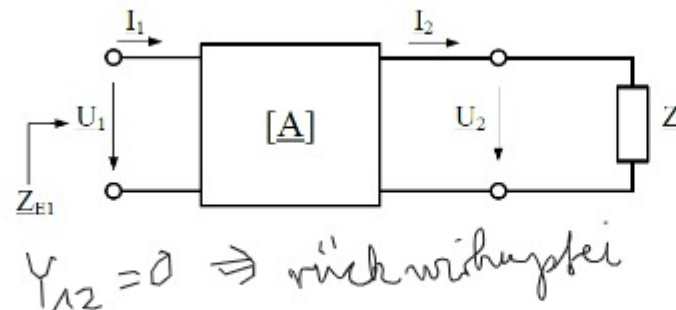
Wenn der Vierpol **symmetrisch** ist, d.h. wenn sich seine Eigenschaften bei Vertauschen des Eingangs mit dem Ausgang nicht ändern, gilt:

$$Y_{11} \neq Y_{22} \Rightarrow \text{nicht richtungssymmetrisch}$$

6.10.3 Rückwirkungsfreiheit

Bei Verstärkern oder allgemein bei Übertragungssystemen geht man häufig von *rückwirkungs-freien* Vierpolen aus. Die Ausgangsgrößen U_2 oder I_2 haben dann keinen Einfluss auf die Eingangsgrößen. Folgende Beziehungen sind dann äquivalent:

	Symmetrische Pfeilung und Kettenpfeilsystem	
	$Z_{12} = 0$	(6-77)
oder	$Y_{12} = 0$	
oder	$H_{12} = 0$	
oder	$\det \underline{A} = 0$	



Aufgabe 2

Kettenparameter Common-Source-Schaltung

Abbildung 3 zeigt das Kleinsignalkreisbild der Common-Source-Schaltung eines Föld-feldtransistors, der einzugs in eine Spannungsquelle mit Innenwiderstand R_G angeschlossen ist und am Ausgang durch einen kapazitiv gekoppelten Widerstand R_L belastet wird. Der Kondensator C_k dient dazu, Gleichanteile abzublenden (vgl. Schaltungstechnik I), darf aber bei folgenden Betrachtungen nicht vernachlässigt werden. In dieser Aufgabe soll die Übertragungsfunktion $E(j\omega) = U_2/U_1$ systematisch mithilfe der Vierpoltheorie berechnet werden.



Abbildung 3: Kleinsignalkreisbild einer belasteten Verstärkerschaltung.

Nehmen Sie zunächst an, dass die Kapazität C_{GS} zwischen Gate- und Drainanschluss des Föld-feldtransistors vernachlässigt, also durch einen Leerlauf ersetzt werden darf.

- Bestimmen Sie die Admittanzmatrix $[Y_i]$ des Vierpols I. Ist der Vierpol symmetrisch, richtungssymmetrisch bzw. richtungslos?
- Wandeln Sie die Admittanzmatrix $[Y_i]$ in die Kettenmatrix $[A_i]$ des Vierpols I um. Welchen Vorteil besitzt die Kettenmatrix gegenüber der Admittanzmatrix in der gegebenen Schaltungs-konstellation?
- Vierpol II modifiziert die kapazitive Kopplung zur Schaltungsangabe. Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme des Skizze der Kettenmatrix $[A_k]$. Begründen Sie, warum für den Vierpol II keine Widerstandsmatrix $[Z_k]$ existiert.
- Bestimmen Sie die Kettenmatrix $[A]$ der Kettenschaltung von Vierpol I und II.
- Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion der Schaltung $E(j\omega) = U_2/U_1$ aus den Kettenparametern nach
$$E(j\omega) = \frac{1}{A_{11} + A_{12} \frac{1}{R_L} + A_{21} R_G + A_{22} \frac{1}{R_G}}$$
 berechnet werden kann, und bestimmen Sie hiermit $E(j\omega)$.
- Bestimmen Sie Y_{out} in Abhängigkeit der Kettenparameter und R_L .

Ein Vierpol ist *richtungssymmetrisch*, wenn unabhängig vom Abschluss Z der Widerstand am Aus- und Eingang gleich ist.

Mit (6-72) und (6-74) gilt dann:

$$Z_{E1} = Z_{E2} \Leftrightarrow \frac{A_{11}Z + A_{12}}{A_{21}Z + A_{22}} = \frac{A_{12} + A_{22}Z}{A_{11} + A_{21}Z} \quad (6-75)$$

Für alle Z gilt dies nur, wenn $A_{11} = A_{22}$. Demnach sind folgende Forderungen äquivalent zur Rich-tungssymmetrie des Vierpols:

	Symmetrische Pfeilung	Kettenpfeilsystem	
	$A_{11} = -A_{22}$	$A_{11} = A_{22}$	(6-76)
oder	$Z_{11} = Z_{22}$	$Z_{11} = -Z_{22}$	
oder	$Y_{11} = Y_{22}$	$Y_{11} = -Y_{22}$	
oder	$\det \underline{H} = 1$	$\det \underline{H} = -1$	

6.16 Anhang D: Umrechnung von Vierpolparametern

6.14 Anhang B: Matrizen einfacher, passiver Vierpole

Vierpol	$[\underline{A}]$
	$\begin{bmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$c) \quad \underline{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C_k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$-||- \quad Z_c = \frac{1}{j\omega C}$$

$$Y = \begin{pmatrix} Z_{GS} & 0 \\ g_m & \frac{1}{r_o} \end{pmatrix}$$



$$Z_{11} = \frac{U_1}{0} = +\infty \Rightarrow$$

Widerstandsmatrix existiert nicht

$$\underline{Z}_{11} = \left. \frac{U_1}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

primärer Leerlaufwiderstand

$$\underline{Z}_{12} = \left. \frac{U_1}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

sekundärseitiger Leerlaufkernwiderstand

$$\underline{Z}_{21} = \left. \frac{U_2}{I_1} \right|_{I_2=0}$$

primärseitiger Leerlaufkernwiderstand

$$\underline{Z}_{22} = \left. \frac{U_2}{I_2} \right|_{I_1=0}$$

sekundärer Leerlaufwiderstand

Wichtig!

oder	$\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$	$\underline{Y}_{11} = -\underline{Y}_{22}$
oder	$\det \underline{H} = 1$	$\det \underline{H} = -1$

6.16 Anhang D: Umrechnung von Vierpolparametern

	$[\underline{A}]$	$[\underline{Z}]$	$[\underline{Y}]$
$[\underline{A}]$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\underline{Z}_{21}} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \det \underline{Z} \\ 1 & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\underline{Y}_{21}} \begin{bmatrix} -\underline{Y}_{22} & -1 \\ -\det \underline{Y} & -\underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$
$[\underline{Z}]$	$\frac{1}{\underline{A}_{21}} \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \det \underline{A} \\ 1 & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \underline{Y}} \begin{bmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$
$[\underline{Y}]$	$\frac{1}{\underline{A}_{12}} \begin{bmatrix} \underline{A}_{22} & -\det \underline{A} \\ 1 & \underline{A}_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \underline{Z}} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{22} & -\underline{Z}_{12} \\ -\underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{bmatrix}$

$$\underline{Y}_A = \begin{pmatrix} Z_{GS} & G \\ g_m & \frac{1}{r_o} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A}_A = \frac{1}{g_m} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{r_o} & -1 \\ j\omega C_{GS} & -j\omega C_{GK} \end{pmatrix}$$

Der Vorteil der Kettenmatrix:
Die Gesamtkettenmatrix einer Reihenschaltung von zwei Vierpolen ist das Produkt der Kettenmatrizen der einzelnen Vierpole

$$\begin{aligned} \underline{A}_{ges} &= \underline{A}_1 \cdot \underline{A}_2 = \\ &= \frac{1}{g_m} \begin{pmatrix} -\frac{1}{r_o} & -1 \\ j\omega C_{GS} & -j\omega C_{GK} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{j\omega C_{GK}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{g_m} \begin{pmatrix} -\frac{1}{r_o} & -\frac{1}{j\omega C_{GK} r_o} - 1 \\ j\omega C_{GS} & -\frac{C_{GS}}{r_o C_{GK}} - j\omega C_{GS} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

6.9 Zusammenschaltung von Vierpolen

6.9.1 Serienschaltung (Kettenschaltung) von Teilvierpolen

In Abbildung 6-6 ist die Kettenschaltung von n Teilvierpolen zu sehen. Da wir die Kettendarstellung der Vierpole verwenden, wählt man eine unsymmetrische Bepfeilung.

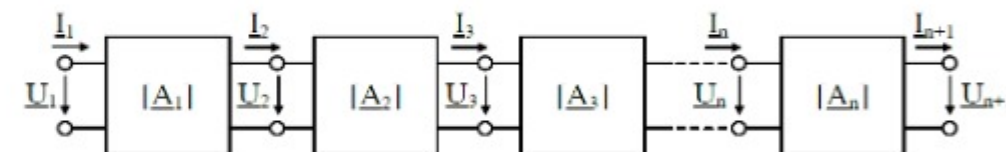


Abbildung 6-6: Kettenschaltung von n Teilvierpolen

Die Größen am Ausgang des Vierpols 2 berechnen sich aus dem Produkt der Kettenmatrizen:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = [\underline{A}_1] \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = [\underline{A}_2] \begin{pmatrix} \underline{U}_3 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix} \quad (6-41)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{I}_1 \end{pmatrix} = \underbrace{[\underline{A}_1][\underline{A}_2]}_{\underline{A}_{ges}} \begin{pmatrix} \underline{U}_3 \\ \underline{I}_3 \end{pmatrix}$$

\underline{A}_{ges}

d) Bestimmen Sie die Kettenmatrix $[A]$ der Kettenschaltung von Vierpol I und II.

e) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion der Schaltung $F(j\omega) = U_2/U_0$ aus den Kettenparametern nach

$$F(j\omega) = \frac{1}{A_{11} + A_{12} \frac{1}{R_L} + A_{21} R_{in} + A_{22} \frac{R_{in}}{R_L}}$$

berechnet werden kann, und bestimmen Sie hiermit $F(j\omega)$.

f) Bestimmen Sie Y_{out} in Abhängigkeit der Kettenparameter und R_L .

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = R_L \cdot I_2 \Rightarrow I_2 = \frac{U_2}{R_L}$$

$$U_1 = U_0 - I_1 R_{in} \Rightarrow I_1 = \frac{U_0 - U_1}{R_{in}}$$

$$\text{I)} \quad U_1 = A_{11} \cdot U_2 + A_{12} \cdot \frac{U_2}{R_L} = \left(A_{11} + \frac{A_{12}}{R_L} \right) \cdot U_2$$

$$\text{II)} \quad \frac{U_0 - U_1}{R_{in}} = A_{21} \cdot U_2 + A_{22} \cdot \frac{U_2}{R_L} = \left(A_{21} + \frac{A_{22}}{R_L} \right) \cdot U_2$$

$$\text{I in II)} \quad \frac{U_0 - \left(A_{11} + \frac{A_{12}}{R_L} \right) U_2}{R_{in}} = \left(A_{21} + \frac{A_{22}}{R_L} \right) \cdot U_2 \quad | : U_2$$

$$\frac{U_0}{R_{in} U_2} - \frac{A_{11} + \frac{A_{12}}{R_L}}{R_{in}} = A_{21} + \frac{A_{22}}{R_L}$$

$$\frac{U_0}{U_2} = \left(A_{21} + \frac{A_{22}}{R_L} + \frac{A_{11} + \frac{A_{12}}{R_L}}{R_{in}} \right) \cdot R_{in} \quad || \cdot 1$$

$$\frac{U_2}{U_0} = \frac{1}{A_{21} R_{in} + A_{22} \frac{R_{in}}{R_L} + A_{11} + \frac{A_{12}}{R_L}}$$

d) Bestimmen Sie die Kettenmatrix $[A]$ der Kettenschaltung von Vierpol I und II.

e) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion der Schaltung $F(j\omega) = U_2/U_0$ aus den Kettenparametern nach

$$F(j\omega) = \frac{1}{A_{11} + A_{12} \frac{1}{R_L} + A_{21} R_{in} + A_{22} \frac{R_{in}}{R_L}}$$

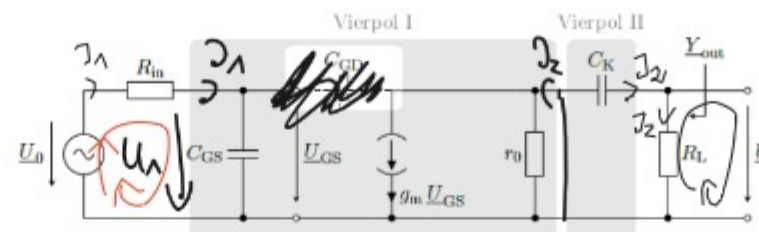
berechnet werden kann, und bestimmen Sie hiermit $F(j\omega)$.

f) Bestimmen Sie Y_{out} in Abhängigkeit der Kettenparameter und R_L .

6.3 Vierpolgleichungen in der Kettenform

Aus den Impedanzgleichungen lässt sich auch die Kettenmatrixform ableiten. Ziel der Umformung ist, dass auf der linken Seite U_1 und I_1 , nämlich der Strom und die Spannung am Eingang stehen:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (6-22)$$



$$\begin{aligned} \sum U &= 0 \\ -U_0 + I_1 R_{in} + U_1 &= 0 \\ \Rightarrow U_1 &= U_0 - I_1 R_{in} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum U &= 0 \\ -I_2 R_L + U_2 &= 0 \end{aligned}$$

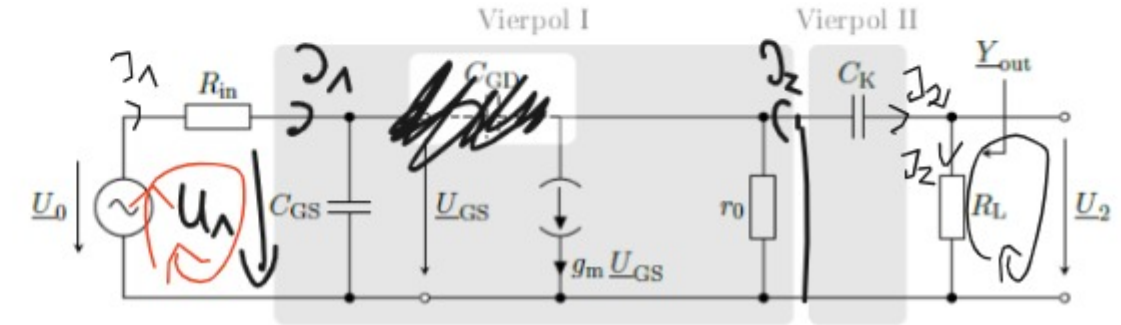
berechnet werden kann, und bestimmen Sie hiermit $\underline{F}(j\omega)$.
 f) Bestimmen Sie \underline{Y}_{out} in Abhängigkeit der Kettenparameter und R_L .

- d) Bestimmen Sie die Kettenmatrix \underline{A} der Kettenschaltung von Vierpol I und II.
 e) Zeigen Sie, dass die Übertragungsfunktion der Schaltung $\underline{F}(j\omega) = \underline{U}_2/\underline{U}_0$ aus den Kettenparametern nach

$$\underline{F}(j\omega) = \frac{1}{\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12} \frac{1}{R_L} + \underline{A}_{21} R_{in} + \underline{A}_{22} \frac{R_{in}}{R_L}}$$

berechnet werden kann, und bestimmen Sie hiermit $\underline{F}(j\omega)$.

- f) Bestimmen Sie \underline{Y}_{out} in Abhängigkeit der Kettenparameter und R_L .



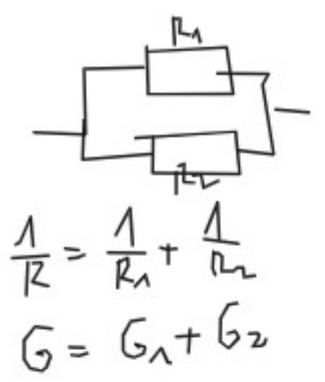
4)
$$\underline{Y}_{out} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_2 \cdot \underline{R}_L} = \underline{\underline{\frac{1}{R_L}}}$$

$$\sum U = 0$$

$$U_2 - I_2 \cdot R_L = 0$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_L$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{I_2}{G_3} - U_1 &= 0 \\
 \Rightarrow U_1 &= -\frac{I_2}{G_3} \\
 U_{12} = \frac{I_2}{U_1} &= \frac{I_2}{-\frac{I_2}{G_3}} = -G_3
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 Y_{11} &= \frac{I_1}{U_1} \Big|_{U_2=0} & Y_{22} &= \frac{I_2}{U_2} \Big|_{U_1=0} & Y_{12} &= \frac{I_1}{U_2} \Big|_{U_1=0} & Y_{21} &= \frac{I_2}{U_1} \Big|_{U_2=0} \\
 Y_{11} &= \frac{I_1}{U_1} = \frac{I_1}{\frac{I_1}{G}} = G & & & & & & \\
 Y_{21} &= -\infty & & & & & &
 \end{aligned}$$

$$0 = -\frac{I_1}{G_3} - U_2 = 0 \Rightarrow U_2 = -\frac{I_1}{G_3} \Rightarrow \frac{I_1}{U_2} = \frac{I_1}{-\frac{I_1}{G_3}} = -G_3$$

Aufgabe 5

Vierpolschaltungen

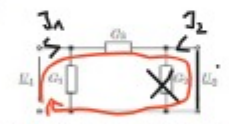


Abbildung 4: Zu untersuchende Schaltung

Bestimmungsgleichungen der Leitwertparameter eines Vierpols $[Y]$:

- a) Zeichnen Sie die Ströme I_1 und I_2 des Vierpols für eine asymmetrische Pfeilung in Abb. 8 ein.
- b) Wie ist die Zusammenhang zwischen $[Z]$, $[U]$ und $[Y]$?
- c) Geben Sie die Y-Parameter des Vierpols aus Abb. 8 in Abhängigkeit von G_1 , G_2 und G_3 an.
- d) Geben Sie die Widerstandsmatrix $[Z]$ in Abhängigkeit von $[Y]$ an.
- e) Wie sind zwei Vierpole $[Y_a]$ und $[Y_b]$ miteinander verschaltet, wenn für den resultierenden Vierpol in Leitwertform $[Y_{ges}]$ gilt: $[Y_{ges}] = [Y_a] + [Y_b]$?

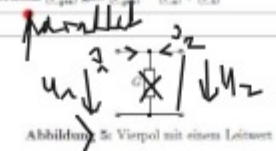


Abbildung 5: Vierpol mit einem Leitwert

- f) Welche ist die richtige $[Z]$ -Matrix zu dem Vierpol in Abb. 5? (machen Sie ein Kreuz innerhalb des Kreises, falsche Kreuze geben Punktabzug)

$[Z] = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ☐
 $[Z] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ☐
 $[Z] = \begin{bmatrix} \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ☒
 $[Z]$: nicht definiert ☒

$$\begin{aligned}
 b) [I] &= [Y] \cdot [U] \\
 \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$Y = \begin{pmatrix} G_1 + G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_2 + G_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \\
 G &= G_1 + G_2
 \end{aligned}$$

$$Z = \frac{1}{(G_1 + G_3) \cdot (G_2 + G_3) - G_3^2} \cdot \begin{pmatrix} G_2 + G_3 & G_3 \\ G_3 & G_1 + G_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

6.16 Anhang D: Umrechnung von Vierpolparametern

	$[A]$	$[Z]$	$[Y]$
$[A]$	$\begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \underline{A}_{12} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\underline{Z}_{21}} \begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \det \underline{Z} \\ 1 & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\underline{Y}_{21}} \begin{bmatrix} -\underline{Y}_{22} & -1 \\ -\det \underline{Y} & -\underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$
$[Z]$	$\frac{1}{\underline{A}_{21}} \begin{bmatrix} \underline{A}_{11} & \det \underline{A} \\ \underline{A}_{21} & \underline{A}_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\det \underline{Y}} \begin{bmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \end{bmatrix}$

Nichtlineare Schaltung

Gegeben ist die nichtlineare Schaltung in Abbildung 2 mit zwei baugleichen Dioden. Es gilt $R_1 = 2R_2$. Sperrende Dioden können als Leerlauf betrachtet werden.

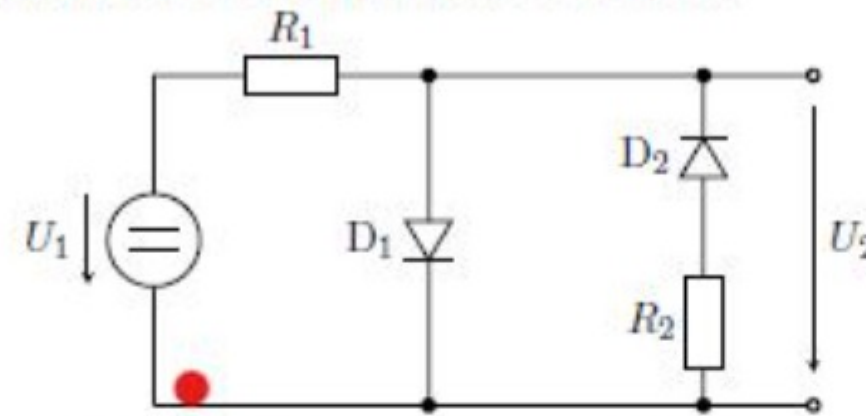


Abbildung 2: Schaltung mit Dioden

$$i_D = I_S \left(e^{\frac{u_D}{U_T}} - 1 \right)$$

- a) Geben Sie die aus der Vorlesung bekannte Diodengleichung an.

- b) Welches aus der Vorlesung bekannte Verfahren eignet sich zur Berechnung von U_2 ?

Newton-Raphson-Verfahren (NRV)

- c) Der Spannungsquelle U_1 wird nun eine sinusförmige Wechselspannung überlagert. Durch welches bekannte Verfahren können Sie berechnen, welche Harmonischen im Ausgangssignal $u_2(t)$ enthalten sind? Was ist in Bezug auf die Wechselspannungsamplitude zu beachten?

Fourieranalyse machen

Die Dioden können nun durch die vereinfachte Knickkennlinie beschrieben werden mit $U_K = 2 \text{ V}$.

- d) Skizzieren Sie die Übertragungsfunktion $U_2 = f(U_1)$ für $U_1 = -5 \text{ V}$ bis 5 V .

