Considérons l'équation différentielle

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x)-1)^m (y(x)-2)^m \cdot \frac{x}{x^2+1} \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Ici, $m \in \mathbb{N}$ est un nombre impair quelconque. Les points x_0, y_0 sont dans $\mathbb{R}$.

$x_0 = 0$

a) En choisissant des conditions initiales appropriées y_0, représenter l'ensemble des solutions maximales de l'équation différentielle.

b) Dans le cas $m = 3$, si possible, expliciter les valeurs de α, β, T_- et T_+.

c) Confirmer ses résultats à l'aide d'un programme informatique. Ici, on utilisera $m = 3$.

$x_0 = 3$

Lemme des bouts

Article Discussion — Lire Modifier Modifier le code Voir l'historique Outils

Cet article est orphelin. Moins de trois articles lui sont liés. (mars 2021)

En mathématiques, et plus précisément en analyse, le lemme des bouts (ou lemme de sortie des compacts, ou théorème d'explosion en temps fini) permet de reconnaître les solutions maximales d'une équation différentielle. C'est une réciproque partielle au fait que toute solution globale est maximale.

Énoncé du lemme [modifier | modifier le code]

Soit $f : J \times U \to \mathbb{R}^n$ une fonction qui satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et $x :]t_-, t_+[\subset J \to U$ une solution de l'équation $x' = f(t, x)$. La solution est maximale à droite si et seulement si

- soit $t_+ = \sup J$;
- soit $t_+ < \sup J$ et, lorsque $t \to t_+$, $x(t)$ sort définitivement de tout compact de U.

De même dans le passé (solutions maximales à gauche)[1].

$m = 1$:

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)\cdot(y-2)\cdot\frac{x}{x^2+1} \quad | \cdot dx \quad | : \frac{1}{(y-1)(y-2)}$$

$$\frac{1}{(y-1)\cdot(y-2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{B}{y-2}$$

$$\frac{1}{(y-1)\cdot(y-2)}\cdot dy = \frac{x}{x^2+1}\,dx \quad | \int$$

$$1 = A\cdot(y-2) + B\cdot(y-1)$$

$$\int \frac{1}{(y-1)\cdot(y-2)}\,dy = \int \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(|f(x)|) + C$$

Für $y = 2$:

$$1 = B$$

$$\int \frac{1}{y-2} - \frac{1}{y-1}\,dy = \frac{1}{2}\cdot\ln(x^2+1) + C$$

Für $y = 1$:

$$1 = A\cdot(-1)$$

$$\Rightarrow A = -1$$

$$\ln(|y-2|) - \ln(|y-1|) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$\int f\cdot g\,dx \neq \int f\,dx \cdot \int g\,dx$$

$y(0) = y_0$

1. Cas $\infty > y_0 > 2$:

$$\ln(y-2) - \ln(y-1) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$\Rightarrow C = \ln\left(\frac{y_0-2}{y_0-1}\right)$$

$$\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$$\ln\left(\frac{y-2}{y-1}\right) = \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + C \quad | e$$

$$a\cdot\ln(b) = \ln(b^a)$$

$$\frac{y-2}{y-1} = \sqrt{x^2+1}\cdot\underbrace{\frac{y_0-2}{y_0-1}}_{=:D}$$

$$e^{a+b} = e^a\cdot e^b$$

$$y\cdot(1 - \sqrt{x^2+1}\cdot D) = 2 - \sqrt{x^2+1}\cdot D \qquad 0 < D < 1$$

$y_0 > 2$

$$y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{2-\sqrt{x^2+1}\cdot D}{1-\sqrt{x^2+1}\cdot D} = \frac{2-\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{y_0-2}{y_0-1}}{1-\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{y_0-2}{y_0-1}}$$

$$1 - \sqrt{x^2+1}\cdot D \overset{!}{=} 0 \quad |$$

$$\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{D} \quad |()^2$$

$$x^2 + 1 = \frac{1}{D^2} \quad |-1$$

$$x^2 = \underbrace{\frac{1}{D^2} - 1}_{<0} \qquad 0 < D < 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 1 = \beta \qquad T^+ = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 1 = \alpha \qquad T^- = -\infty$$

2. Cas $1 < y_0 < 2$:

$$\ln(|y-2|) - \ln(|y-1|) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C =$$

$$\ln(2-y) - \ln(y-1) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln\left(\frac{2-y_0}{y_0-1}\right) \qquad y(0) = y_0$$

3. Cas $-\infty < y_0 < 1$:

$$\ln(|y-2|) - \ln(|y-1|) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$$

$$\ln(2-y) - \ln(1-y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \ln\left(\frac{2-y_0}{1-y_0}\right)$$

miro

$n=3$:

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^3 \cdot (y-2)^3 \cdot \frac{x}{x^2+1}$$

Cas de $y_0 < 2$

$T_- = -\infty$ $\quad T_{+\infty} = +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} y(x) = 1 = \alpha$ $\quad \lim_{x \to +\infty} y(x) = 1 = \beta$

Cas $y_0 > 2$:

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)^3 \cdot (y-2)^3 \cdot \frac{x}{x^2+1}$$

```
# pfd.py
from sympy import *

y = symbols('y')
expr = 1 / ((y-1)**3*(y-2)**3)

print("Mathematical expression : {}".format(expr))

# use sympy.apart() method
pd = apart(expr)

print("After Partial Decomposition : {}".format(pd))
```

```
D:\Math\Université\Bachelor\Info\Modélisation\Méthodes\Devoirs\python pfd.py
Mathematical expression : 1/((y - 2)**3*(y - 1)**3)
After Partial Decomposition : -6/(y - 1) - 3/(y - 1)**2 - 1/(y - 1)**3 + 6/(y - 2) - 3/(y - 2)**2 + (y - 2)**(-3)
```

$$\frac{1}{(y-1)^3 \cdot (y-2)^3}\, dy = \frac{x}{x^2+1}\, dx \quad \Big| \int$$

$$\int \frac{1}{(y-1)^3 \cdot (y-2)^3}\, dy = \int \frac{x}{x^2+1}\, dx$$

$$\int \underbrace{\frac{A}{y-1}}_{-6} + \underbrace{\frac{B}{(y-1)^2}}_{-3} + \underbrace{\frac{C}{(y-1)^3}}_{-1} + \underbrace{\frac{D}{(y-2)}}_{6} + \underbrace{\frac{E}{(y-2)^2}}_{-3} + \underbrace{\frac{F}{(y-2)^3}}_{1}\, dy = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C = g$$

$y(0) = y_0$

$$-6\ln(y-1) + 3\cdot\frac{1}{y-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(y-1)^2} + 6\cdot\ln(y-2) + 3\frac{1}{y-2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(y-2)^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + g(y_0)$$

$y \to +\infty$: 0 $\quad$ $x \to t^+ \in \mathbb{R}$ $\quad$ $y \to t^+ \infty$: 0

$$\in g(y)$$

$$6\cdot(\ln(y-2) - \ln(y-1)) =$$

$$= 6\cdot\ln\left(\frac{y-2}{y-1}\right) \xrightarrow{y \to \infty} 0$$

$y \to \infty$

$$\int \frac{1}{(y-1)^2}\, dy = -\frac{1}{y-1}$$

loi de la chaine

$$\left(-\frac{1}{y-1}\right)' = \left(-(y-1)^{-1}\right)' = (-1)\cdot(-1)\cdot(y-1)^{-2} = \frac{1}{(y-1)^2}$$

$$\int \frac{1}{(y-1)^3}\, dy = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(y-1)^2}$$

$y-2$

$$0 = \frac{1}{2}\cdot\ln(t^{+2}+1) + g(y_0) \quad \Big|$$

$$-2g(y_0) = \ln(t^{+2}+1) \quad \Big| e^{(\,)}$$

$$e^{-2g(y_0)} = t^{+2} + 1$$

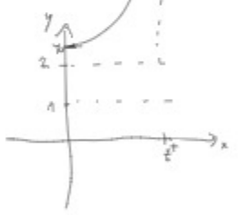
$$t^+ = \sqrt{\underbrace{e^{-2g(y_0)}}_{<1} - 1}$$ $= n'existe\ pas$ $\quad <0$

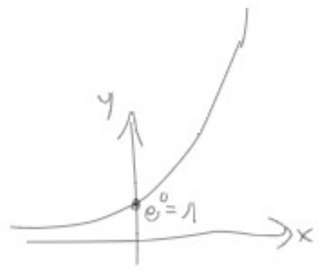
$g(y_0) \geq 0$ $\quad y_0 > 2$

Tu dois la démontrer

$x < 0 \Rightarrow e^x < 1$

$t^+ = \infty$





miro