Aufgabe 102.

Beweisen Sie diese Summenformel mittels vollständiger Induktion:

$$\forall n \in N: \underbrace{\overbrace{2+4+6+8+\ldots+2n}^{LS} = \overbrace{n(n+1)}^{RS}}_{=:A(n)}$$

Zu zeigen: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n)$

Vollständige Induktion:

$$(\forall n \in \mathbb{N}: A(n)) \Leftrightarrow \underbrace{A(1)}_{\text{Induktionsanfang}} \underbrace{\wedge}_{\text{und}} (\forall n \in \mathbb{N}: \underbrace{A(n)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} \Rightarrow A(n+1))$$

Induktionsanfang $n=1$:

$$\left.\begin{array}{l} LS = 2 \\ RS = 1\cdot(1+1) = 1\cdot 2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A(1) \text{ gilt}$$

Noch z.z.: $\forall n \in \mathbb{N}: A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $A(n)$, d.h. $2+4+\ldots+2n = n\cdot(n+1)$.

Induktionsschritt: z.z.: $A(n+1)$, d.h. $\underbrace{2+4+\ldots+2\cdot(n+1)}_{LS} = \underbrace{(n+1)\cdot(n+1+1)}_{RS}$

$$LS = 2+4+\ldots+2n+2(n+1) =$$

$$\stackrel{\text{Induktionsvoraus.}}{=} n\cdot(n+1) + 2(n+1) =$$

$$= (n+1)\cdot(n+2) = RS \checkmark$$