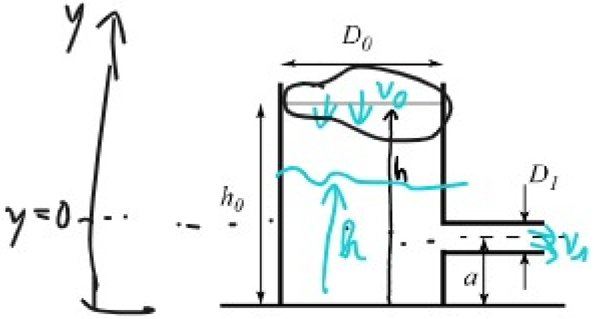
$A = \pi \cdot r^2$

Aufgabe 5 Hydrodynamik (8 Punkte)

An einem mit Wasser bis zur Höhe h_0 gefüllten Zylinder mit Durchmesser D_0 ist seitlich auf Höhe a ein Rohr mit Durchmesser D_1 angebracht.



a) (3 P) Bestimmen Sie unter Vernachlässigung von Reibung die Geschwindigkeit v_1, mit der das Wasser ausströmt, sowie die Geschwindigkeit v_0, mit der der Wasserpegel im Zylinder sinkt. Vernachlässigen Sie Geschwindigkeitsunterschiede innerhalb des Ausflussrohres.

b) (5 P) Bestimmen Sie den Zeitpunkt zu dem der Wasserpegel die Oberkante des Ausflussrohres erreicht, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ der Ausfluss geöffnet wird. Leiten Sie dazu eine Differentialgleichung der Form $\mathrm{d}t = -c\mathrm{d}h/\sqrt{h}$ her, wobei c eine zu bestimmende Größe ist. Die Gleichung kann über Integration gelöst werden.

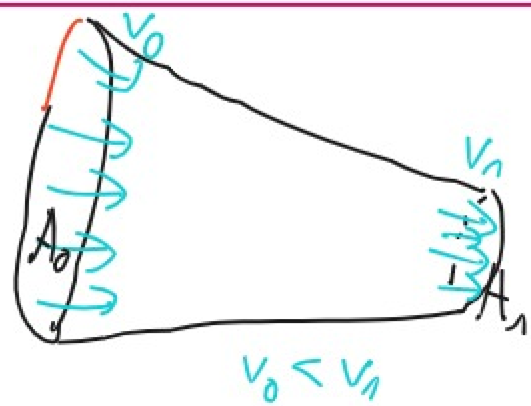
$$v_0 \cdot A_0 = v_1 \cdot A_1$$

$$v_0 \cdot \left(\frac{D_0}{2}\right)^2 \cdot \pi = v_1 \cdot \left(\frac{D_1}{2}\right)^2 \cdot \pi \quad \Big|$$

$$v_0 \cdot \frac{D_0^2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{\pi} = v_1 \cdot \frac{D_1^2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{\pi} \quad | : \pi / \cdot 4$$

$$v_0 \cdot D_0^2 = v_1 \cdot D_1^2$$

$$v_1 = v_0 \cdot \frac{D_0^2}{D_1^2} = v_0 \cdot \left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2$$



$$A_0 \cdot v_0 = A_1 \cdot v_1$$

Kontinuitätsgleichung

- Der Gesamtdruck im Querschnitt 1 ist gleich dem Gesamtdruck im Querschnitt 2 plus der Summe aller Gesamtdruckverluste minus der Summe aller Gesamtdruckerhöhung durch Pumpen oder Lüfter auf dem Weg von 1 nach 2 längs eines Stromfadens.

$$p_{ges,1} + \Delta p_P = p_{ges,2} + \Delta p_V$$

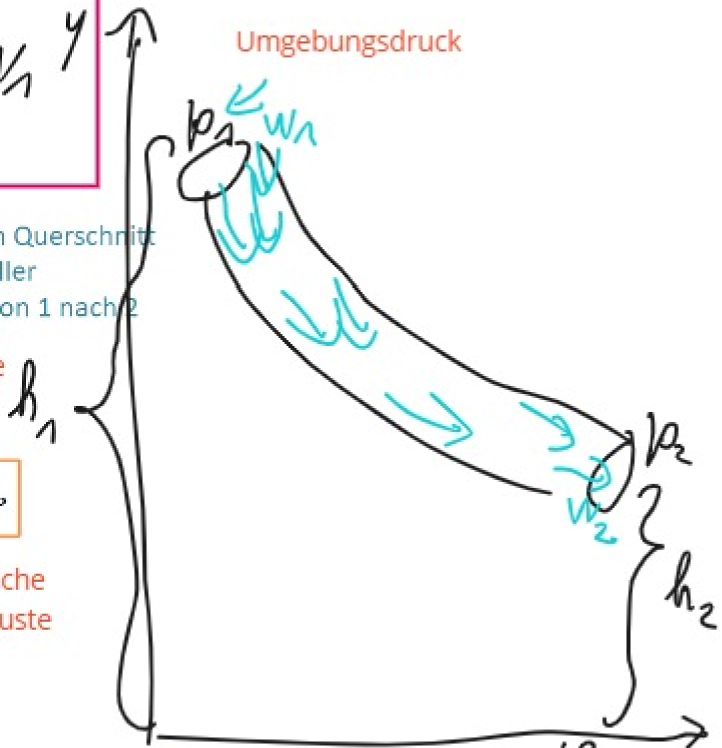
$$\boldsymbol{p_{ges,1} = p_{ges,2} + \Delta p_V - \Delta p_P}$$

Druck von der Pumpe

$$\boxed{\boldsymbol{p_1 + \underbrace{\frac{\varrho}{2} \cdot w_1^2}_{\text{Bewegungsdruck}} + \underbrace{\varrho \cdot g \cdot h_1}_{\text{Höhendruck}} = p_2 + \frac{\varrho}{2} \cdot w_2^2 + \varrho \cdot g \cdot h_2 + \Delta p_V - \Delta p_P}}$$

irgendwelche Druckverluste

Bernoulli-Gleichung



$$\cancel{p_u} + \frac{\varrho_w}{2} \cdot v_0^2 + \varrho_w \cdot g \cdot (h - a) = \cancel{p_u} + \frac{\varrho_w}{2} \cdot \left(v_0 \cdot \left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2\right)^2 + 0$$

Umgebungsdruck

$$v_0 = \frac{dh}{dt} = \dot{h}(t)$$

miro

gsdruck

$$V_0 = \frac{dh}{dt} = \dot{h}(t)$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

$$\frac{\rho_w}{2} \cdot (\dot{h}(t))^2 + \rho_w \cdot g \cdot (h(t) - a) = \frac{\rho_w}{2} \cdot (\dot{h}(t))^2 \cdot \left(\frac{D_0}{D_1}\right)^4$$

$$\frac{\cancel{\rho_w}}{2} \cdot (\dot{h}(t))^2 - \frac{\cancel{\rho_w}}{2} \cdot (\dot{h}(t))^2 \cdot \left(\frac{D_0}{D_1}\right)^4 = -\cancel{\rho_w} \cdot g \cdot (h(t) - a) \quad | : \rho_w \quad | \cdot 2$$

$$(\dot{h}(t))^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{D_0}{D_1}\right)^4\right) = -2 \cdot g \cdot (h(t) - a)$$

$$(\dot{h}(t))^2 = -\frac{2 \cdot g}{1 - \left(\frac{D_0}{D_1}\right)^4} (h(t) - a) \quad =: B > 0$$

$$z(t) := h(t) - a$$

$$\dot{z}(t) = \dot{h}(t)$$

$$(\dot{z}(t))^2 = B \cdot \underbrace{z(t)}_{>0}$$

$$\dot{z}(t) = -\sqrt{B \cdot z(t)}$$

$$\dot{z}(t) = -\sqrt{B} \cdot \sqrt{z(t)} \quad |$$

$$\frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{z(t)}} = -\sqrt{B} \quad | \int \; dt$$

$$\int \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{z(t)}} \, dt = \int -\sqrt{B} \, dt$$

Lösung mit Seperation der Variablen

$$y'(t) = f(t) \cdot g(y(t))$$

$$\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t) \quad | \int \; dt$$

$$\int \frac{y'(t)}{g(y(t))} \, dt = \int f(t) \, dt$$

$$z(0) = h(0) - a$$

miro

Kettenregel

$$\big(f(g(x))\big)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$\Big(\big(x^7+10\big)^{100}\Big)' = 100 \cdot (x^7+10)^{99} \cdot 7x^6$$

$$\sqrt{z(t)}$$

$$\int \frac{\dot{z}(t)}{\sqrt{z(t)}}\, d$$

$$2 \cdot \sqrt{}$$

$$(x^5+10)^{100} \cdot x^4 \quad \underset{(\;)'}{\overset{\int dx}{\rightleftarrows}} \quad \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{101} \cdot (x^5+10)^{101} + C$$

Kettenregel

$$(y(x))^{500} \cdot y'(x) \quad \underset{(\;)'}{\overset{\int dx}{\rightleftarrows}} \quad \frac{1}{501} \cdot y(x)^{501} + C$$

$$f(y(x)) \cdot y'(x) \quad \underset{(\;)'}{\overset{\int dx}{\rightleftarrows}} \quad F(y(x)) + C$$

$$y(t)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{y(t)}} \cdot \dot{y}(t) \quad \underset{(\;)'}{\overset{\int dt}{\rightleftarrows}} \quad 2 \cdot y(t)^{\frac{1}{2}} + C$$

miro

$$2\cdot\sqrt{z(t)} = -\sqrt{B}\cdot t + C$$

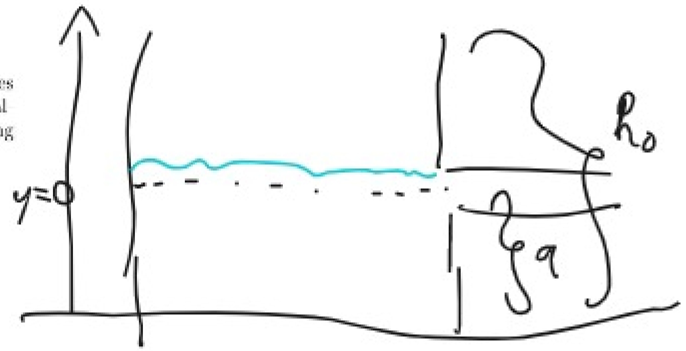
$$z(0) = h(0) - a$$
$$= h_0 - a$$
$$\Rightarrow$$
$$C = 2\cdot\sqrt{h_0 - a}$$

$$z(t) = \frac{\left(-\sqrt{B}\cdot t + C\right)^2}{4}$$

$$h(t) = z(t) + a = \frac{\left(-\sqrt{\frac{2\cdot g}{\left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2 - 1}}\cdot t + \overbrace{2\cdot\sqrt{h_0 - a}}^{=C}\right)^2}{4} + a$$

C

b) (5 P) Bestimmen Sie den Zeitpunkt zu dem der Wasserpege. die Oberkante des Ausflussrohres erreicht, wenn zum Zeitpunkt $t = 0$ der Ausfluss geöffnet wird. Leiten Sie dazu eine Differential gleichung der Form $dt = -c dh/\sqrt{h}$ her, wobei c eine zu bestimmende Größe ist. Die Gleichung kann über Integration gelöst werden.



$$\cancel{a} + \frac{D_1}{2} \overset{!}{=} \frac{C - \sqrt{B}\cdot t}{4} + \cancel{a}$$

$$t = \frac{2D_1 - C}{-\sqrt{B}} = \frac{2\cdot D_1 - 2\cdot\sqrt{h_0 - a}}{-\sqrt{\frac{2g}{\left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2 - 1}}}$$

$$v_0(t) = \dot{h}(t) = \dot{z}(t) = \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\left(-\sqrt{B}\cdot t + C\right)\cdot(-1)\cdot\sqrt{B}$$

$$v_0(0) = \frac{1}{2}\cdot C\cdot(-1)\cdot\sqrt{B} = \cancel{\frac{1}{2}\cdot 2}\cdot\sqrt{h_0 - a}\cdot(-1)\cdot\sqrt{\left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2 - 1}$$

Bei Teilaufgabe a) war das gesucht!!!

$$v_1(0) = v_0(0)\cdot\left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2 = \sqrt{h_0 - a}\cdot(-1)\cdot\sqrt{\left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2 - 1}\cdot\left(\frac{D_0}{D_1}\right)^2$$

miro