1. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie

(a) (3P)

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty}(-a_n).$$

Wir zeigen zunächst:

Satz 1

$$\inf M = -\sup(-M)$$

Beweis: Sei $S\in\mathbb{R}$

$$S = \inf M \iff$$

$$\underbrace{\forall x\in M: x\geq S}_{S \text{ untere Schranke}} \wedge \underbrace{\forall \varepsilon>0\ \exists y\in M: S+\varepsilon>y}_{S+\varepsilon \text{ keine untere Schranke}} \iff$$

$$\forall x\in M: -x\leq -S \wedge \forall\varepsilon>0\ \exists y\in M: -S-\varepsilon<-y \iff$$

$$\underbrace{\forall x\in -M: x\leq -S}_{-S \text{ ist obere Schranke von } -M} \wedge \underbrace{\forall\varepsilon>0\ \exists y\in -M: -S-\varepsilon<y}_{-S-\varepsilon \text{ ist keine obere Schranke von } -M} \iff$$

$$\iff -S = \sup(-M)$$

$M\subseteq\mathbb{R}$ beschränkt

$$S = \sup M :\iff$$

$$\underbrace{\forall x\in M: x\leq S}_{S \text{ obere Schranke}} \wedge \underbrace{\forall\varepsilon>0\ \exists y\in M: S-\varepsilon<y}_{S-\varepsilon \text{ ist keine obere Schranke}}$$

$$\sup[0,7[= 7$$

$$\sup\{0,7\} = 7$$

$$S = \inf M :\iff$$

$$\forall x\in M: x\geq S \wedge \forall\varepsilon>0\ \exists y\in M: S+\varepsilon>y$$

1. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie

(a) (3P)

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\limsup_{n\to\infty}(-a_n).$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \overset{\text{Def.}}{=} \lim_{n\to\infty}\inf\{a_k \mid k\geq n\} \overset{\text{Satz 1}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} -\sup\{-a_k \mid k\geq n\}$$

$$= (-1)\cdot\lim_{n\to\infty}\sup\{-a_k \mid k\geq n\}$$

$$= (-1)\cdot\limsup_{n\to\infty}(-a_n)$$

(b) (3P)

$$\limsup(a_n+b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(c) (4P) Geben Sie beschränkte Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ an, für welche in (b) die Gleichheit nicht gilt.

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} := \left((-1)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sup\{(-1)^k \mid k\geq n\} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\sup\{-1,1\}}_{=1} = 1$$

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}\sup\{(-1)^k+(-1)^{k+1} \mid k\geq n\} = \lim_{n\to\infty}\underbrace{\sup\{0\}}_{=0} = 0 < 2 = 1+1 = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

Satz 2 $A,B\subseteq\mathbb{R}$ beschränkt

$$\sup(A+B) \leq \sup A + \sup B$$

Beweis: Da $\sup(A+B)$ kleinste obere Schranke von $A+B$, so ist nur zeigen, dass $\sup A + \sup B$ ist obere Schranke von $A+B$,

d.h. zu zeigen: $\forall x\in A+B: \ x\leq \sup A + \sup B$

Sei $x\in A+B$. $\Rightarrow$ Wir finden $a\in A$ und $b\in B$ sodass $a+b=x$

$$x = a+b \underset{\substack{\sup A \text{ ist} \\ \text{obere Schranke von } A}}{\leq} \sup A + b \underset{\substack{\sup B \text{ ist} \\ \text{obere Schranke von } B}}{\leq} \sup A + \sup B$$

$$\Rightarrow \limsup_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty}\sup\{a_k+b_k \mid k\geq n\} \leq \lim_{n\to\infty}\sup\left(\{a_k \mid k\geq n\}+\{b_k \mid k\geq n\}\right)$$

$A\subseteq B$

$\sup A \leq \sup B$

und

$\{a_k+b_k \mid k\geq n\} \subseteq \{a_k \mid k\geq n\} + \{b_k \mid k\geq n\}$

$$\underset{\text{Satz 2}}{\leq} \lim_{n\to\infty}\left(\sup\{a_k \mid k\geq n\} + \sup\{b_k \mid k\geq n\}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sup\{a_k \mid k\geq n\} + \lim_{n\to\infty}\sup\{b_k \mid k\geq n\}$$

$a_n\to a$

$b_n\to b$

$a_n+b_n\to a+b$

$$= \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$$

miro

4. (10P) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass M genau dann eine Lebesgue-Nullmenge ist, wenn es eine Folge $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Quadern gibt, so dass $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(Q_j) < \infty$ und jedes $x \in M$ in unendlich vielen Q_j liegt.

"$\Leftarrow$" Zu zeigen: M Lebesgue-Nullmenge

$$\lambda^n(M) \overset{!}{=} 0$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \text{ in unendlich vielen } Q_j\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall n \in \mathbb{N}\ \exists j \geq n : x \in Q_j\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} Q_j$$

Nach Voraussetzung gilt $M \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=n}^{\infty} Q_j$

$$\Rightarrow \lambda^n(M) \leq \lambda^n\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{j=n}^{\infty} Q_j}_{=:A_n}\Big) = \lim_{n\to\infty} \lambda^n\Big(\bigcup_{j=n}^{\infty} Q_j\Big) \leq \lim_{n\to\infty} \lambda^n(Q_n) + \lambda^n(Q_{n+1}) + \dots = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=n}^{\infty} \lambda^n(Q_j) = 0$$

σ-Subadditivität von Maß λ^n

$A \subseteq B$
$\lambda^n(A) \leq \lambda^n(B)$
Monotonie von Maß λ^n

$A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \dots$

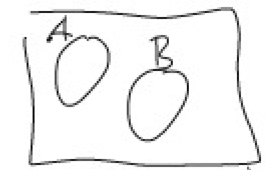
$A_n \overset{n\to\infty}{\downarrow} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu\big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\big)$

Stetigkeit von Maß λ^n von oben

$A_1 = Q_1 \cup Q_2 \cup \dots$
$A_2 = Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4$
$A_3 =$

$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(Q_j) < \infty$



$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
$\leq \mu(A) + \mu(B)$

Satz 3
$(a_k)_{k \geq 0} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}$
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < \infty$
$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=n}^{\infty} a_k}_{\text{Schwanz der Reihe}} = 0$

4. (10P) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass M genau dann eine Lebesgue-Nullmenge ist, wenn es eine Folge $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Quadern gibt, so dass $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(Q_j) < \infty$ und jedes $x \in M$ in unendlich vielen Q_j liegt.

Schw[illegible] Reihe

4. (10P) Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass M genau dann eine Lebesgue Nullmenge ist, wenn es eine Folge $(Q_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Quadern gibt, so dass $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^n(Q_j) < \infty$ und jedes $x \in M$ in unendlich vielen Q_j liegt.

Geometrische Summenformel

$\forall q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$

$$\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{1}{1-q}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j < \infty$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^j - \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$= 2 - 1 = 1$$

"$\Rightarrow$" Sei also M Lebesgue-Nullmenge, d.h.

$$\lambda^n(M) = 0.$$

4.6 Satz. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann sind äquivalent.

(a) $A \in \mathcal{L}^n$.

(b) Zu jedem $j \in \mathbb{N}$ gibt es $F_j, G_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, so dass $F_j \subseteq A \subseteq G_j$ und $\lambda_n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j}$. Dabei kann G_j als abzählbare Vereinigung von Quadern und F_j als abzählbarer Durchschnitt von Figuren gewählt werden.

(c) Es gibt $F, G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ mit $F \subseteq A \subseteq G$ und $\lambda_n(G \setminus F) = 0$.

Im Fall (c) gilt $\lambda_n(A) = \lambda_n(F) = \lambda_n(G)$.

Wegen Satz 4.6.b) finden wir $F_j, G_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ sodass

$$F_j \subseteq M \subseteq G_j \text{ und } \lambda^n(G_j \setminus F_j) < \frac{1}{j^2}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = \infty$$

wobei G_j abzählbare Vereinigung von disjunkten Quadern, d.h.

$$G_j = \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} Q_{j,k}$$

$$\lambda^n(G_j \setminus F_j) \underset{G_j \supseteq M \supseteq F_j}{=} \lambda^n(G_j) - \underbrace{\lambda^n(F_j)}_{=0} \underset{F_j \subseteq M}{=} \lambda^n(G_j)$$

$$F_j \subseteq M \Rightarrow \lambda^n(F_j) \leq \lambda^n(M) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^n(F_j) = 0$$

$$A \subseteq B$$

$$\lambda^n(B \setminus A) = \lambda^n(B) - \lambda^n(A)$$

$$\frac{1}{j^2} > \lambda^n(G_j \setminus F_j) = \lambda^n(G_j) = \lambda^n\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} Q_{j,k}\right) \overset{\sigma\text{-Additivität von } \lambda^n}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(Q_{j,k})$$

Es ist $\{Q_{j,k} \mid j,k \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar (da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar) und $\forall x \in M$ gilt's unendlich viele $(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sodass $x \in Q_{j,k}$

und

$$\sum_{(j,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}} \lambda^n(Q_{j,k}) = \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n(Q_{j,k})}_{< \frac{1}{j^2}} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$$

$\blacksquare$

miro