

---

# Lineare Algebra II

---

Inoffizieller Mitschrieb

Stand: 19. Juni 2018

*Vorlesung gehalten von:*

Prof. Dr. Amador Martín-Pizarro  
Abteilung für Angewandte Mathematik  
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

# 0. Recap

## Definition 0.1 – RING

Ein (kommutativer) Ring (mit Einselement) ist eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen  $+$ ,  $\cdot$ , derart, dass:

- $(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe
- $(R, \cdot)$  ist eine kommutative Halbgruppe
- die Distributivgesetze:  
 $a(x + y) = ax + ay$   
 $(x + y)z = xz + yz$

## Definition 0.2 – INTEGRITÄTSBEREICH

Ein Integritätsbereich ist ein Ring ohne Nullteiler. Also  $\forall x, y \in R : x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

## Definition 0.3 – KÖRPER

Ein Körper ist ein Ring der Art, dass

1.  $1 \neq 0$
2.  $\forall x \in K : x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} : xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

*Bemerkung:* Körper sind Integritätsbereiche.

## Definition 0.4 – CHARAKTERISTIK

Sei  $R$  ein nicht trivialer Ring ( $0 \neq 1$ ).  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow R, z \mapsto \begin{cases} \sum_{i=1}^n 1 & n \geq 0 \\ -\sum_{i=1}^n 1 & \text{ansonsten} \end{cases}$

Dann ist  $\varphi$  ein Ringhomomorphismus.

Für den Kern von  $\varphi$  ( $\text{Ker}(\varphi)$ ) gibt es zwei Möglichkeiten.

1.  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}, p = 0$
2.  $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ . Dann gibt es ein kleinstes echt positives Element  $p \in \text{Ker}(\varphi)$ .

$R$  hat dann Charakteristik  $p$  ( $\text{Char}(R) = p$ ). Falls  $R$  ein Integritätsbereich ist, dann ist  $p$  eine Primzahl.

### Beispiele:

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \dots, \bar{n}\}$  hat Charakteristik  $n$ .

Insbesondere enthält jeder Körper mit Charakteristik  $p$  eine "Kopie" von  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ :

$K$  hat Charakteristik  $p \Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{injectiv}} K$ .

Hier ist  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ein Körper:

$a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow$  es ist  $a$  mit  $p$  teilerfremd.  $1 = a \cdot b + p \cdot m \Rightarrow \bar{1} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ .

## Definition 0.5 – POLYNOMRING

Sei  $K$  ein Körper. Der Polynomring  $K[T]$  in einer Variable  $T$  über  $K$  ist die Menge formeller Summen der Form:

$$f = \sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i, n \in \mathbb{N}$$

Der Grad von  $f \in K[T]$  ist definiert als:

$$\text{Grad}(f) := \max\{m \mid m < n \wedge a_m \neq 0\}$$

$$\text{Grad}(0) := -1$$

Falls  $\text{Grad}(f) = n$  und  $n = 1$  heißt das Polynom normiert.

Die Summe und das Produkt von Polynomen sind definiert als:

$$\sum_{i=0}^n a_i T^i + \sum_{j=0}^m b_j T^j := \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) T^k$$

$$\sum_{i=0}^n a_i T^i \cdot \sum_{j=0}^m b_j T^j := \sum_{k=0}^{m+n} c_k T^k, c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

*Bemerkung:*  $K[T]$  ist ein Integritätsbereich.

### Korollar 0.6

Es seien  $f, g$  beide  $\neq 0$

$$\Rightarrow \text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \Rightarrow f \cdot g \neq 0$$

$$\text{Grad}(f + g) \leq \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$$

### Satz 0.7 – DIVISION MIT REST

Gegeben  $f, g \in K[T], \text{Grad}(g) > 0$ . Dann existieren eindeutige Polynome  $q, r$ , so dass  $f = gq + r$ , wobei  $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(g)$ .

**Beweis:** Eindeutigkeit: Angenommen  $f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r', q \neq q' \vee r \neq r'$ .

$$\Rightarrow g(q - q') = r' - r \Rightarrow \text{Grad}(r' - r) = \max(\text{Grad}(r'), \text{Grad}(r)) < \text{Grad}(g) = \text{Grad}(g(q - q')) \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

$$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r' \text{ Existenz: Induktion auf } \text{Grad}(f)$$

$$\text{Grad}(f) = 0 \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$$

$$\text{Grad}(f) = n + 1$$

$$\text{Grad}(f) < \text{Grad}(g) = m \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$$

$$\text{OBdA. } n + 1 = \text{Grad}(f) \geq \text{Grad}(g) = m > 0$$

$$f = a_{n+1} \cdot T^{n+1} + \hat{f}, \text{Grad}(\hat{f}) \leq n, a_{n+1} \neq 0$$

$$\text{Sei } f' = f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g \Rightarrow \text{Grad}(f') \leq n \text{ Ia: } f' = g \cdot q' + r', \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g)$$

$$f' = f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g \Rightarrow f = g(b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} + q') + r' \Rightarrow \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g) \quad \square$$

### Definition 0.8 – POLYNOM TEILT

$$f, g, q \in K[T], \text{Grad}(g) > 0$$

$$g \text{ teilt } f = g|_f \Leftrightarrow f = g \cdot q$$

### Definition 0.9 – NULLSTELLEN VON POLYNOMEN

$$f \in K[T] \text{ besitzt eine Nullstelle } \lambda \in K \text{ gdw. } (T - \lambda)|_f \Leftrightarrow f(\lambda) = 0.$$

$$f \text{ lässt sich dann schreiben als } f = (T - \lambda)q + r.$$

### Lemma 0.10

$$f \in K[t], f \neq 0, \text{Grad}(f) = n \Rightarrow f \text{ besitzt höchstens } n \text{ Nullstellen in } K.$$

**Beweis:**

$$n = 0 \Rightarrow f = a_0, a_0 \neq 0$$

$n > 0$  Falls  $f$  keine Nullstellen in  $K$  besitzt  $\Rightarrow$  ok!

Sonst, sei  $\lambda \in K$  eine Nullstelle von  $f$ .  $f = (T - \lambda) \cdot g$ ,  $\text{Grad}(g) = n - 1 < n$

I.A besitzt  $g$  höchstens  $n - 1$  Nullstellen. Jede Nullstelle von  $f$  ist entweder  $\lambda$  oder eine Nullstelle von  $g$ .  $\Rightarrow f$  hat höchstens  $n$  Nullstellen.

□

**Definition 0.11** – VIELFACHHEIT EINER NULLSTELLE

$f \in K[T]$ ,  $f \neq 0$ ,  $\lambda \in K$  Nullstelle von  $f \Rightarrow f = (T - \lambda)^{K_\lambda} \cdot g$ ,  $g(\lambda) \neq 0$ .  $K_\lambda$  ist die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda$  in  $f$ .

**Definition 0.12**

Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom über  $K$  positiven Grades eine Nullstelle besitzt.

**Beispiele** Ist  $\mathbb{R}$  algebraisch abgeschlossen? Nein:  $T^2 + 1$ .

Bem.:  $\mathbb{C}$  ist algebraisch abgeschlossen.

*Bemerkung:* Jeder algebraisch abgeschlossene Körper muss unendlich sein. Sei  $K = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ,  $f = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n) + 1$ .

**Lemma 0.13**

$K$  ist genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn jedes Polynom positiven Grades in lineare Faktoren zerfällt.

$$f = T(\lambda_1) \dots (T - \lambda_n).$$

**Beweis:**

$\Leftarrow$  trivial

$$\Rightarrow \text{Grad}(f) = n > 0 \Rightarrow f = (T - \lambda_1) \cdot g, \text{Grad}(g) \leq n - 1 < n \stackrel{\text{I.A.}}{\Rightarrow} f = c(T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

□

**Definition 0.14** – VEKTORRAUM

Vektorraum  $V$  über  $K$  ist eine abelsche Gruppe  $(V, +, 0_V)$  zusammen mit einer Verknüpfung  $K \times V \rightarrow V$   $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$  die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
2.  $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
3.  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
4.  $1_K v = v$

**Definition 0.15** – UNTERVEKTORRAUM

Ein Untervektorraum  $U \subset V$  ist eine Untergruppe, welche unter der Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

*Bemerkung:*  $\{U_i\}_{i \in I}$  Untervektorräume von  $V \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i$  ist Untervektorraum. Insb. gegeben  $M \subset V$  existiert  $\text{span}(M) = \langle M \rangle$  der kleinste Unterraum von  $V$ , der  $M$  enthält.

$$\text{span}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i, m_i \in M, \lambda_i \in K, n \in \mathbb{N}$$

$M$  ist ein Erzeugendensystem für  $\text{span}(M)$

Außerdem gilt:

$$\sum_{i \in I} U_i = \text{span}(\bigcup_{i \in I} U_i)$$

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \text{span}(M_1) \subset \text{span}(M_2)$$

### Definition 0.16 – LINEARE UNABHÄNGIGKEIT

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Dann gilt  $v_1, \dots, v_n$  sind linear unabhängig falls  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \sum \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .  $M \subset V$  ist linear unabhängig, falls jede endliche Teilmenge von  $M$  linear unabhängig ist. Äquivalent dazu ist:  $M$  ist linear unabhängig, falls kein Element von  $M$  sich als Linearkombination der anderen schreiben lässt.

### Definition 0.17 – BASIS

Sei  $B = \{v_1, \dots, v_n\}, v_i \in V$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent und definieren eine Basis:

1.  $B$  ist ein lineares unabhängiges Erzeugendensystem von  $V$
2. Jedes Element von  $V$  lässt sich eindeutig als Linearkombination der Elemente in  $B$  schreiben.
3.  $B$  ist ein minimales Erzeugendensystem.
4.  $B$  ist maximal linear unabhängig.

### Satz 0.18 – BASISERGÄNZUNGSSATZ

Sei  $M \subset V$  linear unabhängig, dann gilt  $\exists B \subset V$ , und  $B$  ist eine Basis welche  $M$  enthält. Insbesondere hat jeder Vektorraum eine Basis. "Je zwei Basen sind in Bijektion".

### Definition 0.19 – DIMENSION

$V$  ist endlichdimensional, falls  $V$  eine endliche Basis besitzt. Sonst ist  $V$  unendlichdimensional. Fall  $V$  endlichdimensional ist, ist die Dimension von  $V$  definiert durch:

$$\dim(V) = |B| \text{ mit } B \text{ beliebige Basis.}$$

### Satz 0.20 – BASISAUSWAHLSATZ

Sei  $M \subset V$  ein Erzeugendensystem von  $V$ , dann gilt  $\exists B \subset M$  mit  $B$  ist eine Basis von  $V$ .

### Lemma 0.21

Sei  $U \subset V$  ein Unterraum, dann gilt  $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(U) < \infty$

### Lemma 0.22

Die Dimension ist modular:  $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

### Definition 0.23 – DIREKTES PRODUKT VON VEKTORRÄUMEN

$$V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow V = U_1 + U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$V = \bigoplus_{i \in I} U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i \in I} U_i \text{ und die Familie ist transversal: } \{U_i\}_{i \in I} \rightarrow U_i \cap (\sum_{j \in I} U_j) = \{0\}$$

### Definition 0.24 – KOMPLEMENTÄR

Sei  $U \subset V$  ein Untervektorraum, dann gilt  $\exists \hat{U} \subset V : V = U \oplus \hat{U}$ .  
 $\hat{U}$  heißt dann Komplementär zu  $U$ .

### Beispiele

$K^2$  ist ein K-VR.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist eine Basis.

$$U = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), K^2 = U \oplus \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), K^2 = U \oplus \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

### Definition 0.25 – LINEARE ABBILDUNGEN

$F : V \rightarrow W$  ist linear, falls gilt:  $F(\lambda v + \mu u) = \lambda F(v) + \mu F(u)$

### Definition 0.26 – KERN UND BILD

$$\text{Ker}(F) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$$

$$\text{Im}(F) = \{w \in W \mid \exists v \in V : F(v) = w\}$$

$\text{Ker}(F)$  ist ein Untervektorraum von  $V$ ,  $\text{Im}(F)$  ist ein Untervektorraum von  $W$ .

### Lemma 0.27

Falls  $B$  eine Basis von  $V$  ist, ist  $F(B)$  ein Erzeugendensystem von  $\text{Im}(F)$ .  $F$  ist injektiv genau dann wenn  $\text{Ker}(F) = \{0\}$ .

### Lemma 0.28

$V$  endlichdimensional:  $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(F)) + \dim(\text{Im}(F))$ .

$$V/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(F).$$

*Bemerkung:*  $V, W$  endlichdimensional,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ ,  $V \cong K^n$ ,  $v_i \mapsto e_i$ .

### Definition 0.29 – MATRIX

Sei  $F : V \rightarrow W$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $\dim(W) = m$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ ,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  Basis von  $W$ .

$K^n \cong V \xrightarrow{F} W \cong K^m$ . Dadurch wird durch  $F$  und die beiden Basen eine Abbildung von  $K^n$  nach  $K^m$  definiert. Diese Abbildung kann durch eine Matrix  $A$  dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

$$F(v_1), \dots, F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ist die } m \times n \text{ Matrix } A.$$

### Definition 0.30 – RANG EINER MATRIX

$$\text{Rg}(A) = \dim(\text{span}(\text{Spaltenvektoren})) = \dim(\text{span}(\text{Zeilenvektoren}))$$

$F : V \rightarrow W$  linear.  $\text{Rg}(F) = \text{Rg}(A) = \dim(\text{Im}(F))$ , mit  $A$  eine beliebige darstellende Matrix von  $F$ .

### Satz 0.31 – NORMALFORM

Es seien  $V, W$  endlichdimensional. Dann existieren Basen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ ,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ , so dass

die darstellende Matrix von  $F$  der Form 
$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
 ist.

**Beweis:** Sei  $U = \text{Ker}(F)$  und  $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $U$ . Sei  $U'$  ein Komplement von  $U$  in  $V \Rightarrow V = U \oplus U'$ . Sei  $\{v_1, \dots, v_r\}$  eine Basis von  $U'$ .  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V$ .  $\text{Im}(F)$  hat  $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$  als Basis.

$\sum_{i=1}^n \lambda_i F(v_i) = 0 \Rightarrow F(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in U \wedge \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in U' \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Ergänze  $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$  zu einer Basis  $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ .  $F(v_1), \dots, F(v_r), F(v_{r+1}), \dots, F(v_n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

□

### Definition 0.32 – INVERTIERBARKEIT VON MATRIZEN

$A \in M_{n \times n}(K)$  ist invertierbar, falls es eine Matrix  $B \in M_{n \times n}(K)$  gibt, so dass  $A \cdot B = B \cdot A = Id_n$ .  $B$  wird dann als  $A^{-1}$  bezeichnet.

$GL(n, K) = GL_n(K) = \{A \in M_{n \times n}(K) \mid A \text{ invertierbar}\}$  ist eine Gruppe.

$A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$  (Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie regulär ist).

*Bemerkung:* Sei  $A$  regulär. Dann besitzt ein Gleichungssystem der Form  $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  die eindeutige

Lösung,  $A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ .

*Bemerkung:*  $A$  ist regulär genau dann, wenn  $A$  sich durch elementare Zeilenoperationen in  $Id_n$  überführen lässt.

$E_{i,j}$  sei die Matrix, die an der Stelle  $ij$  1 ist, ansonsten 0.

Elementare Zeilenoperationen sind:

Multiplikation der Zeile  $i$  mit  $\lambda$ :  $Id_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ .

Addieren von  $\lambda$  mal der  $i$ -ten Zeile zur  $j$ -ten:  $Id_n + \lambda E_{i,j}$ .

Vertauschung der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile:  $Id_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{j,i} + E_{i,j}$

*Bemerkung:* Das Inverse einer Matrix lässt sich durch Nutzen dieser elementaren Zeilenoperationen nach z.B. dem Gauß-Jordan Verfahren errechnen:

$$\left( A \mid Id_n \right) \xrightarrow{\text{Zeilenoperationen}} \left( Id_n \mid A^{-1} \right)$$

Die linke Hälfte der Ergebnis-Matrix enthält dann  $A^{-1}$ , denn:

$$B_m \dots B_2 B_1 A = Id_n \Rightarrow B_m \dots B_1 = A^{-1}$$

### Definition 0.33 – ÜBERGANGSMATRIZEN

Es sei  $\dim(V) = n$  und  $\{v_1, \dots, v_n\}, \{v'_1, \dots, v'_n\}$  Basen von  $V$ . Weiterhin sei  $F : V \rightarrow V, v_i \mapsto v'_i$ . Dann gilt:

$$v'_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} v_j \text{ und die darstellende Matrix } S \text{ von } F, S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \text{ ist regulär.}$$

### Definition 0.34

Zwei  $(m \times n)$  Matrizen  $A, A'$  sind äquivalent, falls es reguläre Matrizen  $T \in GL_m(K), S \in GL_n(K)$  gibt, so dass  $A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$ .

$A, A' \in M_{n \times n}(K)$  sind ähnlich, falls es  $S \in GL_n(K)$  gibt, so dass  $A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$ .

*Bemerkung:* Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf  $M_{n \times n}(K)$ .

### Definition 0.35 – DETERMINANTE

$\det : K^n \rightarrow K$  ist eine multilineare alternierende Abbildung der Art, dass  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

$A \in M_{n \times n}(K)$

$A = (a_1 | a_2 | \dots | a_n) \Rightarrow \det(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det(A)$ .

$A = (a_{ij}), \det(a_{ij}) = \sum \text{sign}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^n a_{\pi(i)i}$  mit  $\text{sign}(\pi) = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \pi} \text{ bzw. Anzahl von Faktoren von } \pi \text{ als Produkt von Transpositionen.}$

Eigenschaften von Determinanten:

1.  $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$
2.  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$
3.  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
4.  $\det(A^T) = \det(A)$

*Bemerkung:*  $\text{Id}_n + (-\text{Id}_n)$  ist nicht invertierbar, also  $\exists A, B : \det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

### Satz 0.36 – LAPLACESCHER ENTWICKLUNGSSATZ

Sei  $j_0$  ein Spaltenindex

$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{j_0 i})$  wobei  $A_{j_0 i}$  die Matrix ohne Zeile  $j_0$  und Spalte  $i$  ist.

### Satz 0.37 – CRAMERSCHE REGEL

$$(a_1 | \dots | a_n) = A, A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ Falls } A \text{ regulär ist, gibt es eine einzige Lösung zum System: } \lambda_j = \frac{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}$$

### Definition 0.38 – DETERMINANTE EINES HOMOMORPHISMUS

Sei  $F : V \rightarrow V$ .  $\det(F) = \det(A)$  wobei  $A$  eine Darstellungsmatrix von  $F$  bezgl. einer Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

### Definition 0.39 – ADJUNTE MATRIX

Sei  $A$  eine  $n \times n$  Matrix, dann ist die Adjunte von  $A$

$\text{adj}(A) = (\gamma_{ij})$  mit  $\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$



*Bemerkung:* Sei  $c_i$  die  $j$ -te Zeile von  $\text{adj}(A)$ . Sei weiterhin  $a_i$  die  $i$ -te Spalte von  $A$ .

$$\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{jn} \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+n} a_{ki} \det(A_{jk}) \stackrel{\text{Laplacescher Entw. Satz}}{=} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n) =$$

$$\begin{cases} \det(A) & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Angenommen  $A$  ist regulär.

$$\text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot \text{Id}_n \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A) \cdot A} = \text{Id}_n = A^{-1} \cdot A \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = A^{-1} \Rightarrow A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \text{Id}_n$$

# 1. Diagonalisierbarkeit

Sei  $V$  ein Vektorraum,  $\{U_i\}_{i=1}^k$  Unterräume von  $V$ .

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i=1}^n U_i \wedge U_i \cap (\sum_{j=1}^k U_j) = 0$$

Äquivalent dazu ist, dass jeder Vektor  $v \in V$  sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren  $\cup_{j=i}^k B_j$  schreiben lässt, wobei  $B_j$  eine Basis von  $U_i$  ist.

## Definition 1.1 – EIGENWERTE UND -VEKTOREN

Ein Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  besitzt einen Eigenvektor, falls es ein  $v \in V \setminus \{0\}$ , so dass  $F(v) = \lambda \cdot v$  für ein  $\lambda \in K$ . Falls  $F(v) = \lambda v$  ist  $\lambda$  eindeutig bestimmt durch  $F$  und  $v$ .  $\lambda$  ist dann ein Eigenwert von  $F$ .

## Definition 1.2 – EIGENRÄUME

$\lambda \in K, FV \rightarrow V$  Endomorphismus.

$V(\lambda) = \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$ , der Eigenraum zu  $\lambda$  ist ein UVR.

*Bemerkung:*  $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $F$  gdw,  $\dim(V(\lambda)) \geq 1$ .

*Bemerkung:* Falls  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Eigenwerte von  $F \Rightarrow V(\lambda_i) \cap \sum_{j=1, j \neq i}^k V(\lambda_j) = \{0\}$

## Definition 1.3 – DIAGONALISIERBARKEIT

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum.  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus. Bzw. eine Matrix  $A : K^n \rightarrow K^n$ .

$F$  ist diagonalisierbar, falls  $V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$ ,  $\lambda$  verschiedene Eigenwerte von  $F$ .

Äquivalent dazu, wenn  $V$  eine basis von Eigenwerten von  $F$  besitzt. Äquivalent dazu, wenn  $F$  bezüglich

einer Basis von  $V$  die Darstellungsmatrix  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  hat.

Äquivalent dazu, für Matrizen:  $A$  ist diagonalisierbar gdw. es eine reguläre Matrix  $S$  gibt, sodaß  $S^{-1}AS =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

## Satz 1.4

$$A \in M_{n \times n}(K), \lambda \in K$$

$\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A$  gdw.  $\lambda Id_n - A$  nicht regulär ist.  $\Leftrightarrow \det(\lambda \cdot Id_n - A) = 0$

## Definition 1.5 – CHARAKTERISTISCHES POLYNOM

Das charakteristische Polynom einer Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  ist  $\chi_A(T) = \det(T \cdot Id_n - A)$

*Bemerkung:*  $\lambda$  ist ein eigenwert von  $A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

**Beispiel**  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(T) = T^2 + 1 = \det\left(\begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix}\right)$$

*Bemerkung:*  $A$  und  $A'$  ähnlich,  $A' = s^{-1}AS \Rightarrow \chi_A(T) = \chi_{A'}(T)$ . Insbesondere können wir über das charakteristische Polynom eines Endomorphismus reden.

$$A \in M_{n \times n}(K), \chi_A(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \dots + b_0 \text{ wobei } b_0 = (-1)^n \det(A), b_{n-1} = -\text{Tr}(A) = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

### Korollar 1.6

Ein Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  mit  $\dim(V) = n < \infty$  kann höchstens  $n$  viele Eigenwerte besitzen.

### Korollar 1.7

$F : V \rightarrow V$  mit  $\dim(V) = n < \infty$  mit verschiedenen Eigenwerten  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ist diagonalisierbar, gdw.  $n = \sum_{i=1}^k d_i, d_i = \dim(V(\lambda_i))$ .  $d_i$  heißt geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$ .

**Beweis:**

$\Rightarrow$

$F$  ist diag. gdw.  $V$  eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, welche aus  $\cup_{i=1}^n B_i$  besteht,  $|B_i| = d_i = \dim(V(\lambda_i))$ ,  $n = |B| = \sum_{i=1}^k |B_i|$

$\Leftarrow$

$n = \sum d_i \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^k (V(\lambda_i))) = n \Rightarrow V = \sum_{i=1}^k (V(\lambda_i))$  da die Eigenräume transversal sind, und ein Vektorraum nur einen UVR der dimension  $\dim(V)$  hat, sich selbst.  $\square$

### Definition 1.8 – ALGEBRAISCHE VIELFACHHEIT

Es seien  $F : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus,  $\dim(V) = n < \infty$ ,  $\lambda \in K$  Eigenwert  $\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$ .

Dann gilt  $\chi_F(T) = (T - \lambda)^K G(T)$ ,  $G(\lambda) \neq 0$ .  $k$  ist die algebraische Vielfachheit von  $\lambda$ , bzw.  $\text{ord}_\lambda(F)$ .

*Bemerkung:*  $\text{ord}_\lambda(F) \geq \dim(V(\lambda))$

**Beweis:** Sei  $v_1, \dots, v_k$  eine Basis von  $V(\lambda)$ . Wir erweitern sie zu einer Basis  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  von  $V$ . Die Darstellungsmatrix  $M$  von  $F$  bzw.  $B$  ist dann

$\{F(v_1), \dots, F(v_k), F(v_{k+1}), \dots, F(v_n)\}$ .

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda & C_2 \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

Wobei  $C_2 \in \text{Mat}_{n-k \times k}(K)$ .

$$\chi_F(T) = \det(TId_n - M) = (T - \lambda)^k \cdot \det(TId_{n-k} - C_1)$$

$\Rightarrow \text{ord}_\lambda(F) \geq k$ . Wobei  $\det(TId_{n-k} - C_1) = 0$  sein kann.  $\square$

### Lemma 1.9

Sei  $V$  endlichdimensional,  $F : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus,  $U$  ein  $F$ -invarianter Unterraum ( $F(U) \subset U$ ).

$F' : V/U \rightarrow V/U$  ist eine lineare Abbildung,  $\bar{v} \mapsto F(\bar{v})$ .  $F'$  ist wohldefiniert, linear und es gilt  $\chi_F(T) =$

$$\xi_{F|_U}(T) \cdot \xi_{F'}(T)$$

**Beweis:**

$F'$  ist wohldefiniert;

$$\bar{v}_1 = \bar{v} \stackrel{ZZ}{\Rightarrow} F'(v_1) = F(v) \quad \bar{v}_1 = \bar{v} \Rightarrow v_1 = v + (v_1 - v), v_1 - v \in U$$

$$\Rightarrow F(v_1) = F(v) + F(v_1 - v), F(v_1 - v) \in U \Rightarrow F(\bar{v}_1) = F(\bar{v})$$

Restklassen sind linear und  $F$  ist linear  $\Rightarrow F'$  ist linear.

Sei  $\{u_1, \dots, u_k\}$  eine Basis von  $U$ . erweitert zu  $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  sei sie eine Basis von  $V$ .

*Bemerkung:*  $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V/U$ . Bew. Einfach.

Darstellungsmatrix  $H$  von  $F$  bzgl.  $B$ :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & A & & C_2 \\ & & & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & C_1 \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix} \text{ mit } A, C_1, C_2 \text{ Matrizen.}$$

$$\chi_F(T) = \det(T \text{Id}_n - H) = \det(T \text{Id}_n - \begin{pmatrix} A & C_2 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix})$$

$$= \det \begin{pmatrix} T_i d_k - A & -C_2 \\ 0 & T_I d_{n-k} - C_1 \end{pmatrix} = \det(T_i d_k - A) \det(T_I d_{n-k} - C_1)$$

A ist die Darstellungsmatrix von  $F|_U$  bezüglich  $\{u_1, \dots, u_k\} \Rightarrow \det(T \text{Id}_k - A) = \chi_{F|_U}(T)$

$C_1$  ist die Darstellungsmatrix von  $F'$  bzgl.  $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ .

$$\Rightarrow \det(T \text{Id}_{n-k} - C_1) = \chi_{F'}(T)$$

□

### Satz 1.10

Sei  $K$  ein Körper,  $\dim(V) < \infty$ ,  $F: V \rightarrow V$  ein Endomorphismus so gilt:

$F$  Diagonalisierbar gdw  $\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \dots (T - \lambda_n)^{k_n}$  in Linearfaktoren zerfällt, wobei für jeden Faktor  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$   $T - \lambda_i$  gilt  $\text{ord}_{\lambda_i}(F) = \dim(V(\lambda_i))$ .

### Beweis:

$\Rightarrow$

Sei  $b = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von Eigenvektoren. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die verschiedenen Eigenwerte. Ordne nun  $B$  um so dass

$v_1, \dots, v_{d_1} \in V(\lambda_1), v_{d_1+1}, \dots, v_{d_1+d_2} \in V(\lambda_2), \dots, v_{d_1+\dots+d_{r-1}}, \dots, v_{d_1+\dots+d_r} \in V(\lambda_r)$  mit  $d_i = \dim(V(\lambda_i))$ .

Die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $B$ :

$$\begin{pmatrix} F(v_1), \dots, F(v_{d_1}), \dots, F(v_r) \\ \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_r \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Wobei  $d_i$  viele  $\lambda_i$  auf der Diagonale sind

$\chi_F(T) = \det(T \text{Id}_n - A) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r} ((T - \lambda_2)^{d_2} \dots (T - \lambda_r)^{d_r})(\lambda_1) \neq 0 \Rightarrow d_i = \text{ord}_{\lambda_i}(F)$ , da die  $\lambda_i$  verschieden sind.

$\Leftarrow$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r}$$

$$F \text{ ist diag} \Leftrightarrow n = \dim(V) = \sum d_i$$

□

### Definition 1.11

Eine Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  ist trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

### Satz 1.12

$F : V \rightarrow V$  ist trigonalisierbar? gdw.  $\chi_F(t)$  in Linearfaktoren zerfällt  $\chi_F(T) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$ .

**Beweis:**  $\Rightarrow F$  hat Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\chi_F(T) = \det(T \cdot Id_n - A) = \prod_{i=1}^n (T - a_{ii}) \Leftarrow \text{Induktion über } n = \dim(V)$$

$n = 1 \Rightarrow$  Jede  $1 \times 1$  Matrix ist in oberer Dreiecksform.

$n \geq 2$   $\chi_F(t) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$ .  $\lambda_1$  ist ein Eigenwert  $\Rightarrow \exists v_1 \in V \setminus \{0\} : F(v_1) = \lambda_1 v_1$ .  $U = \text{span}(v_1) \subset V$  ist  $F$ -invariant. Nach Lemma ... gilt  $(T - \lambda_1) \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i) = \chi_{F|_U}(T) = \chi_{F|_U} \cdot \xi_{F|_U} = (T - \lambda_1) K[T]$  ist ein Integritätsbereich  $\Rightarrow \exists_{F'}(T) = \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i)$ ,  $\dim(V/U) < \dim(V)$ .

Nach Ia gibt es eine Basis  $\exists(\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$  von  $V/U$  derart, dass  $F'$  bzgl. dieser Basis Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & & X \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\mu_{ij}) \text{ Behauptung: Seien } v_i \in V, \bar{v}_i = v_i + U, 2 \leq i \leq n, \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ ist eine Basis von } V.$$

Bew. Übungsaufgabe.

Frage: Wie sieht die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  aus?

$$\sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} \bar{v}_i = F'(v_j) = F(v_j)$$

$$\sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} \bar{v}_i = \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_i \Rightarrow \exists \mu_{ij} \in K/F(v_j) = \mu_{ij} v_1 + \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j = \sum_{1 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j$$

$$F(v_1)F(v_2), \dots, F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_{12} & \lambda_2 & X & \ddots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

### Korollar 1.13

Jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes über einem algebraisch abgeschlossenen Körper (z.B.  $\mathbb{C}$ ) ist trigonalisierbar.

### Lemma 1.14

Sei  $V$  endlichdimensional über einem Körper  $K$ .

$v \in V \setminus \{0\} \exists r \in \mathbb{N} : F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$   $a_i$  ist eindeutig bestimmt. Insb. ist  $U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v))$

ist  $F$  invariant, hat Basis  $v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)$

$F \upharpoonright U$  hat Darstellungsmatrix  $\begin{pmatrix} 0 & \dots & a_0 & 1 & 0 & \dots & 10a_n \end{pmatrix}$   $\chi_{F \upharpoonright U}(T) = T^r - a_{r-1}T^{r-1} - \dots - a_0$ .

**Beweis:**  $n = \dim(V)$ .  $\{v, F(v), \dots, F^n(v)\}$  sind lin. abh. Sei  $r$  die kleinste natürliche Zahl, so dass  $\{v, F(v), \dots, F^r(v)\}$  lin. abh. sind. Dann sind  $\{v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)\}$  linear unabhängig.  $\xRightarrow{\text{Austauschprinzip von } r} F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$

wobei  $a_i$  eindeutig bestimmt sind.

$U = \text{span}(v_1, \dots, F^{r-1}(v))$  ist  $F$ -invariant. Sei  $u \in U, u = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^i(v)$

$$F(u) = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v)$$

$$= \sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F^{i+1}(v) + \mu_{r-1} F^r(v) \text{ Wobei } F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v).$$

Beide Teile der Summe  $\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F^{i+1}(v) + \mu_{r-1} F^r(v)$  liegen eindeutig in  $U$ , also liegt auch die Summe in  $U$ .

$\{v_1, \dots, F^{r-1}(v)\}$  ist eine Basis von  $U$ .

$$F(v_1), \dots, F(F^{r-1}(v))$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_0 & 1 & 0 & \dots & 1 & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{F|_U}(T) = \det(T Id_r - A) = \det \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & -a_0 - 1 & T & \dots & 0 & -1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Laplacsche Entwicklung nach der letzten Spalte:} &= (-1)^{r+1}(-a_0)\det\left(\begin{pmatrix} -1 & T \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}\right) + (-1)^{r+2}(-a_1)\det\left(\begin{pmatrix} & T \\ 0 & -1 & \ddots \end{pmatrix}\right) + \\ &\dots + (-1)^{2r}(T-a_r)\det\left(\begin{pmatrix} T & & \\ -1 & T & \\ & & -1T \end{pmatrix}\right) = (-1)^r a_0(-1)^r + (-1)^{r+1} a_1 T(-1)^{r+1} + \dots + (-1)^{2r}(T-a_1)T^{r-1} = \\ &-a_0 - a_1 T - \dots - a_{r-1} T^{r-1} + T^r \quad \square \end{aligned}$$

Notation:

$P(T) \in K[T], P(T) + \sum_{i=0}^m a_i T^i, F: V \rightarrow V$  Endomorphismus.

$P(f): V \rightarrow V, v \mapsto \sum_{i=0}^m a_i F^i(v)$

Mit dieser Notation haben wir, dass im vorigen Lemma  $\chi_{F|_U}(F) = F^r(v) - \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v) = 0$

**Satz 1.15** – CALOY - HAMILTON

$F: v \rightarrow V$  Homomorphismus

$\chi_F(F)$  ist der 0 Endomorphismus auf  $V$ .

**Beweis:** z.Z. ist dass  $\forall v \in V: \chi_F(F)(v) = 0$

$v = 0 \Rightarrow \chi_F(F)(v) = 0$

Ansonsten  $v \neq 0$ :

$\exists r: U := \text{span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v))$  ist  $F$ -invariant.

$U$  -  $F$ -invariant  $\Rightarrow \chi_f = \xi_{F|_U} \cdot \xi_{F'} = \xi_{F'} \cdot \xi_{F|_U}, F': v/U \rightarrow V/U, \bar{w} \mapsto F(\bar{w})$ .

Aufgabe:

$R(T) = P \cdot Q$

$R(F) = P \circ (Q(F)) \chi_F(F)(v) = \xi_{F'} \circ (\xi_{F|_U}(v)),$  wobei  $\xi_{F|_U}(v) = 0$ , also  $\xi_F F(v) = 0$ .  $\square$

**Korollar 1.16**

$A \in M_{n \times n}(K)$

$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i \Rightarrow A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot A^i = 0$

**Satz 1.17**

$V$  endlichdimensionaler  $Vr, FV \rightarrow V$  Endormorphismus, Dann existiert genau ein normiertes Polynom kleinsten Grades,  $m_f$ , derart, dass  $\forall P \in K[T]: m_F|_P \Leftrightarrow P(\tau) = 0$  Insbesondere gilt  $m_F(F) = 0$ . Das Polynom  $m_F$  heißt das Minimalpolynom von  $F$ .

**Satz 1.18**

$F: V \rightarrow V$  Endormorphismus, Dann existiert genau ein normiertes Polynom derart, dass  $\forall P \in K[T] m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$ . Das Polynom  $m_F(T)$  heißt das Minimalpolynom von  $F$ .

**Beweis:** Sei  $\mathcal{F} = \{P[T] \text{ textnormmiert} | P(F) = 0\}$  als Endomorphis..

Caley - Hamilton:  $\chi_F(T) \in \mathcal{F} \neq \emptyset$  Sei  $m - F(T) \in \mathcal{F}$  Polynom kleinsten Grades.

Zu zeigen:  $\forall P \in K[T] | m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$

$\Rightarrow$

$m_F|_P \Rightarrow \exists Q \in K[T]: P = Q \cdot m_F$

$P(F) = Q(F) \circ m_F(F), m_F(F) = 0$

$P(F) = 0$

$\Leftarrow$

Sei  $P \in K[T], P(F) = 0$ . Division mit Rest  $\Rightarrow \exists q, r \in K[T]: P = Qm_F + r, \text{Grad}(r) < \text{Grad}(m_F)$

$$0 = P(F) = Q(F) \circ m_F(F) + r(F) = r(F) = 0$$

$$\Rightarrow r(F) = 0 \text{ als Endomorphismus, } \Rightarrow r = 0. \text{ (sonst } \frac{1}{a_{\text{Grad}(T)}} \cdot r(T) \in \mathcal{F}$$

Eindeutigkeit:

Angenommen  $(m'_F)$  würde auch die Bedingungen erfüllen

$$m'_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0 \forall P \in K[T]$$

$$\Leftrightarrow M_F|_{m'_F} \wedge m'_F|_{m_F}$$

$$m_F = Qm'_F \wedge m'_F = Hm_F$$

zu Zeigen  $Q = H = 1$ . Sowohl  $m_F, m'_F$  beide normiert,  $\Rightarrow Q, H$  sind normiert.

$$m_F = Q \cdot m'_F = QHm_F \wedge K[T] \text{ Integritätsbereich}$$

$$\Rightarrow 1 = QH$$

$$\text{Grad}(GH) = \text{Grad}(G) \text{Grad}(H) = \text{Grad}(1) = 0 \wedge G, H \text{ normiert}$$

$$\Rightarrow G = H = 1 \Rightarrow m_F = m'_F.$$

□

Frage

$$A \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m|_A =$$

$$\chi_A(T) = T^2 m_A|_{T^2} \Rightarrow m_A = \begin{cases} T \\ T^2 \end{cases} \quad m_A(A) = 0 \Rightarrow m_A \neq T \Rightarrow m_A = T^2$$

### Lemma 1.19

gegeben  $F : V \rightarrow V$ ,  $V$  endlich dimensional,  $F$  Endomorphismus, dann haben  $\chi_F$  und  $m_F$  dieselben Nullstellen in  $K$ .

**Beweis:**  $m_F|_{\chi_F} \Rightarrow \xi_F = Qm_F \Rightarrow \forall \lambda \in K$ , falls  $m_F(\lambda) = 0 \Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$

Sei  $\lambda \in K$   $\chi_F(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$  ist ein Eigenwert von  $F \Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : F(v) = \lambda v$ . Sei  $m_F(T) = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i T^i$ .  $0 = m_F(F)(v) = (F^d + \sum c_i F^i)(v) = F^d(v) + \sum c_i F^i(v) = \lambda^d v + \sum c_i \lambda^i v = (\lambda^d + \sum c_i \lambda^i) v = m_F(\lambda) v \Rightarrow m_F(\lambda) = 0$ , da  $v \neq 0$ . □

### Satz 1.20

$F : V \rightarrow V$ ,  $V$  endlichdimensional,  $F$  endomorphismus ist diagonalisierbar g.w.  $m|_F$  in lauter paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

**Beweis:**

$\Rightarrow$  sei  $F$  diagonalisierbar. Dann gilt  $\chi_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$ , mit  $\lambda_i$  Eigenwerte von  $F$ . Ausserdem ist  $V = \bigoplus_i V(\lambda_i)$ . Sei  $v \in V$  bel. Dann gilt  $V = \sum_{i=1}^k V_i$  wobei  $v_i \in V(\lambda_i)$ .

Setze  $P(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)$ . z.Z. ist  $P(T) = m_F(T)$ .

$$P(F)(v) = \pi_{i=1}^k (F - \lambda_i)(v)$$

$$= \pi_{i=1}^k (F - \lambda_i)(\sum_{j=1}^k v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^k (\pi_{i=1}^k (F - \lambda_i)(v_j))$$

$$= \sum_{j=1}^k (F - \lambda_1 Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_{j-1} Id) \circ (F - \lambda_{j+1} Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_k Id) \circ (F - \lambda_j Id)$$

$$= 0, \text{ da } v_j \in V(\lambda_j).$$

$v$  war beliebig  $\Rightarrow P(F) = 0 \in \text{End}(V)$ .

$$\text{Also } m_F|_P \Rightarrow P(T) = Q(T) \cdot m_F(T)$$

$$\text{Aber } m_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{S_i}, S_i \geq 1 \text{ und } P(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i) = Q(T) \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{S_i}$$

$\Rightarrow S_i = 1$  für  $i = 1, \dots, k$ , sonst wäre der Grad der rechten Seite gröÙ als der Grad der linken.

$$\Rightarrow m_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i).$$

$\Leftarrow$

Sei  $m_F(T) = (T - \lambda_1) \circ \dots \circ (T - \lambda_k)$ ,  $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$

z.Z.  $F$  ist diagonalisierbar. Es genügt zu Zeigen, dass  $V = \bigoplus_i V(\lambda_i)$ . Beweis durch Induktion:

Sonderfälle:

1. Sei  $\dim(V) = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1) \Rightarrow \lambda_1$  ist Eigenwert von  $F$ . Sei  $v$  der Eigenvektor zu  $\lambda_1$  dann folgt  $V = \text{span}(v) = V(\lambda_1)$
2. Sei  $\dim(V) = n \geq 2$  aber  $k = 1. \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1)$ . Nach Def von  $m_F$  gilt  $m_F(F) = 0 \Rightarrow F - \lambda_1 = 0 \in \text{End}(V)$ . Für alle  $v \in V$  gilt  $(F - \lambda_1)(v) = 0 \Rightarrow F(v) = \lambda_1 v \Rightarrow V = V(\lambda_1)$

Induktionsannahme: Der Satz gilt für den Fall  $\dim(V) < n, n \in \mathbb{N}$ . Also sei  $\dim(V) = n \geq 2, k \geq 2$ .

Zunächst zeigen wir: Behauptung (1):  $V = \text{Ker}(F - \lambda_1 Id) \oplus \text{Im}(F - \lambda_1 Id)$ . Idee: Zeige dass  $\text{Ker}(F - \lambda_1 Id) = V(\lambda_1), \text{Im}(F - \lambda_1 Id) = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_K)$

Bew.:

Sei  $R(T) = \prod_{i=2}^k (T - \lambda_i) \Rightarrow m_F(T) = R(T)(T - \lambda_1)$ .

Division mit Rest:  $\exists Q(T), r \in K$ , so dass:

$$R(T) = Q(T)(T - \lambda_1) + r$$

$$0 \neq R(\lambda_1) = 0 + r \Rightarrow r \neq 0 \in K$$

Sei  $v \in V$  bel,  $R(F)(v) = Q(F)(F - \lambda_1)(v)r \cdot v$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\frac{1}{r}R(F)}_{\in \text{Ker}(F - \lambda_1)} + \underbrace{(F - \lambda_1) \cdot (-\frac{1}{r}Q(F)(V))}_{\in \text{Im}(F - \lambda_1)}$$

$$(F - \lambda_1)(R(F)(v)) = m_F(F)v = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}R(F) \in \text{Ker}(F - \lambda_1)$$

$$\Rightarrow V = \text{Ker}(F - \lambda_1) + \text{Im}(F - \lambda_1).$$

Zu zeigen ist nun noch, dass die Summe direkt ist.  $\Leftrightarrow \text{Ker}(F - \lambda_1) \cap \text{Im}(F - \lambda_1) = \{0\}$ .

Sei  $v \in \text{Ker}(F - \lambda_1) \cap \text{Im}(F - \lambda_1) \Rightarrow v = (F - \lambda_1)(w), w \in V$

$$R(f)(v) = Q(F)(F - \lambda Id)(v) + r \cdot v$$

$$m_F(F) = (R(F) \cdot (F - \lambda_1))(w) = Q(f)(\underbrace{f\lambda_1 Id}_=0)v + rv \Rightarrow rv = 0, r \neq 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow V = \text{Ker}(F - \lambda_1 Id) \oplus (\text{Im}(F - \lambda_1 Id))$$

Setze  $W = \text{Im}(F - \lambda_1)$  ( $W$  ist UVR von  $V$  mit  $\dim(W) < \dim(V)$ ).

Behauptung (2):  $W$  ist  $F$ -invariant:

$$\text{Set } v \in W \text{ beliebig} \Rightarrow v = (F - \lambda_1)(w), w \in V \Rightarrow F(v) = F \circ (F - \lambda_1)(w) = (F - \lambda_1) \circ (F(w)) \in W$$

Setze  $F' = F|_W \in \text{End}(W)$ .

Beh. (3):  $m_{F'}(T) = \prod_{i=2}^k (T - \lambda_i) (= R(T))$ .

Sei  $v \in W$  bel.  $\Rightarrow v = (F - \lambda_1)(w), w \in V$

$$\Rightarrow R(F')(v) = (R(F) \circ (F - \lambda_1))(w)$$

$$\Rightarrow R(F') = 0 \in \text{End}(W)$$

$$\Rightarrow m_{F'}|_R$$

$$\Rightarrow R(T) = H(T) \cdot m_{F'}(T)$$

Es gilt auch  $0 = m_{F'}(F') \circ (F - \lambda_1)(v)$

$$\Rightarrow m_{F'} \circ (F - \lambda_1) = 0 \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow m_F(T)|_{m_{F'}(T) \cdot (T - \lambda_1)} \Rightarrow m_{F'}(T)(T - \lambda_1 = Q(T) \cdot (m_F(T))$$

$$= Q(T)R(T)(T - \lambda_1)$$

$$\Rightarrow m_{F'}(T) = Q(T) \cdot R(T) = Q(T)H(T)m_{F'}(T)$$

$$\Rightarrow Q(T) = H(T) = 1, \text{ ansonsten wäre der Grad links und rechts verschieden}$$

$$R(T) = m_{F'}(T)$$

$$\stackrel{\text{IA}}{\Rightarrow} W = \bigoplus_{i=2}^k W(\lambda_i), \text{ mit } W(\lambda_i) \text{ Eigenraum von } F' \text{ zu } \lambda_i.$$

$$\Rightarrow V = V(\lambda_1) \oplus_{i=2}^k W(\lambda_i)$$



z.Z.  $W(\lambda_i) = V(\lambda_i)$ . Dann gilt  $V = \bigoplus_{i=1}^k (V(\lambda_i))$ .

Es gilt  $W(\lambda_i) = \{w \in W : F'(W) = \lambda_i w\}$

$\subseteq \{v \in V : F(v) = \lambda_i v\} = V(\lambda_i)$

Sei  $i > 1$ ,  $v \in V(\lambda_i)$ .  $\Rightarrow F(v) = \lambda_i v$ . Setze  $w = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_1} v \in V(\lambda_i)$ .  $\Rightarrow F(w) - \lambda_1 w = v \Rightarrow v \in \text{Im}(F - \lambda_1) = W$ .  
 $\Rightarrow v \in \bigoplus_{j=2}^k (W(\lambda_j)) \Rightarrow v \in W(\lambda_i)$ , da  $v = \sum \alpha_j w_j$  für  $w_j \in W(\lambda_j)$ ,  $\alpha_j \in K$ . Aber die Summe der  $V(\lambda_j)$  ist direkt und  $v \in V(\lambda_i)$ , damit kann nur  $\alpha_i$  nicht 0 sein, damit ist  $v = \alpha_i w_i \Rightarrow w \in W(\lambda_i)$

□

*Bemerkung:*  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K) : A^2 = Id_n \Rightarrow A$  ist diagonalisierbar.

$$A^2 = Id_n \Rightarrow (T^{-1})(A) = 0 \Rightarrow m_F|_{T^2-1} m_A = \begin{cases} T^2 - 1 = (T-1)(T+1) \\ T-1 \\ T+1 \end{cases}$$

## Jordansche Normalform

### Lemma 1.21

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus,  $U \subset V$ , dann ist  $U$   $F$ -invariant gdw.  $U(F - \lambda Id)$ -invariant ist  $\forall \lambda \in K$ .

**Beweis:** Übungsblatt 4

□

### Beispiel

$F : V \rightarrow V$ ,  $F \neq 0$  Endomorphismus, derart, dass  $F^m = 0$  als Endomorphismus und  $m > 0$  minimal ( $F$  ist nilpotent).  $F^{m-1} \neq 0 \Rightarrow v \in V : F^{m-1}(v) \neq 0$ .  $\{v, F(v), \dots, F^{m-1}(v)\}$  ist linear unabhängig. Ergänze sie zu einer Basis  $B$  von  $V$ .  $B = \{v, F(v), \dots, F^{m-1}(v), \dots, v_n\}$ .

$F^{m-1}(v), \dots, F(v), v, \dots, v_n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & * \\ 0 & \vdots & 0 & & \\ 0 & \dots & & & * \end{pmatrix}$$

### Definition 1.22 – HAUPTTRAUM

Sei  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $F : V \rightarrow V$ ,  $V$  endlichdimens..

$V(\lambda) = \text{Ker}(F - \lambda)$  Eigenraum von  $F$  bzgl.  $\lambda$ .

$\text{Ker}(F - \lambda) \subset \text{Ker}(F - \lambda)^2 \subset \dots$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(F - \lambda)^n$  ist der Hauptraum von  $F$  bzgl.  $\lambda$ .

*Bemerkung:*  $V_\lambda$  ist ein Unterraum und  $V_\lambda$  ist  $F$ -invariant, da  $V_\lambda$   $(F - \lambda)$ -invariant ist.

*Bemerkung:* Falls  $\text{Ker}(F - \lambda) = V(\lambda) = 0$  ist  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(F - \lambda)^n = 0$ .

### Lemma 1.23

Seien  $\lambda_1 \dots \lambda_k$  verschiedene Elemente aus  $K$ .  $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j=1, j \neq i}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$ .

**Beweis:**  $V_{\lambda_j} = (F - \lambda_j)$  invariant  $\Rightarrow V_{\lambda_j}$  ist  $F$ -invariant  $\Rightarrow (F - \lambda_i)$  invariant.

Wir wollen zuerst zeigen, dass  $F - \lambda_i \upharpoonright V_{\lambda_j}$  ein Automorphismus ist falls  $i \neq j$ .

$\Rightarrow$  es genügt zu zeigen, dass  $F - \lambda_i$  injektiv auf  $V_{\lambda_j}$  ist.

Sei  $w \in V_{\lambda_j} \setminus \{0\} \Rightarrow m \in \mathbb{N}$  kleinstmöglich,  $(F - \lambda_j)^m(w) = 0 \Rightarrow (F - \lambda_j)^{m-1}(w) \neq 0 \Rightarrow ((F - \lambda_j)^{m-1}((\lambda_i - \lambda_j)(w))) \neq 0$

Sei  $0 \neq (F - \lambda_j)^{m-1}(F(w) - \lambda_j w - (F(w) - \lambda_i w)) \Rightarrow (F - \lambda_i)^m(w) + (F - \lambda_j)^{m-1} \circ (F - \lambda_i)(w) \Rightarrow$

$$(F - \lambda_i)(w) \neq 0.$$

Inbesondere ist jede Potenz  $F - \lambda_i^k$  ein Automorphismus von  $V_{\lambda_j}$ .  $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j=1, j \neq i}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$   $v \in V_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}$   
 $v = \sum_{j \neq i} v_j \in V_{\lambda_j} \Rightarrow \text{exists } m_j \text{ kleinstes } (F - \lambda_j)^{m_j}(v_j) = 0$   
 $(F - \lambda_i)^{m_i} \circ \dots \circ (F - \lambda_{i-1}^{m_{i-1}} - 1 \circ (F - \lambda_{i-1}^{m_{i-1}}) \dots (F - \lambda_k)^{m_k}$  ist eine Automorphismus von  $V_{\lambda_i}$ . Sie dieser  
 automorph. H.  $H(v) = \sum_{j \neq i} (H(v_j) = \sum_{j \neq i} (F - \lambda_1)^{m_1} \circ \dots \circ (F - \lambda_j)^{m_j}(v_j), (F - \lambda_j)^{m_j}(v_j) = 0 \Rightarrow H(v) =$   
 $0 \Rightarrow v = 0.$   $\square$

**Lemma 1.24**

Sei  $\lambda \in K$ .  $\dim(V_\lambda) = \text{ord}_\lambda(\chi_F)$ . Ferner hat  $F \upharpoonright V_\lambda$  hat Matrixdarstellung der der Form  $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

**Beweis:** Sei  $k = \text{ord}_\lambda(\chi_F(T))$ .  $\chi_F(T) = (T - \lambda)^k \cdot G(T)$  wobei  $G(\lambda) \neq 0$ .

Behauptung: es gibt einen F-invarianten Unterraum U von V der Dimension k so dass  $F \upharpoonright U$  hat Ma-

trixdarstellung  $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

Falls  $n = 0 \Rightarrow$  klar. OBdA. ist  $k \geq 1$ . Wir beweisen die Behauptung mit Induktion auf  $n = \dim(V)$ .

$$n = 1$$

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : F(v) = \lambda v$$

$$\Rightarrow V = \text{span}(v) = U$$

$$n \geq 2$$

$\Rightarrow \lambda$  ist ein Eigenwert

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} F(v) = \lambda v, U_0 = \text{span}(v) \Rightarrow \dim(U) = 1 \wedge \text{F-invariant} \Rightarrow \hat{F} : V/U_0 \rightarrow V/U_0, \bar{w} \mapsto F(\bar{w}), (T - \lambda)(T - \lambda)^{k-1} \cdot Q(T) = \chi_F(T) = \chi_{F \upharpoonright U}(T) \cdot \chi_{\hat{F}}(T)$$

$$\Rightarrow \chi_{\hat{F}}(T) = (T - \lambda)^{k-1} \cdot Q(T), Q(\lambda) \neq 0$$

Nach Ia. existiert ein  $\hat{F}$ -invarianter Unterraum  $\hat{U} \subset V/U_0$  der Dimension n-1, so dass die Matrixdarstellung von  $\hat{F}$  der Form  $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$  ist. Sei  $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$  eine Basis von  $\hat{U}$  so dass die Darstellungsmatrix von

$$\hat{F} \text{ bzgl. } \{v_2, \dots, v_k\}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Die Vektoren  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  sind linear unabhängig.  $U = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$  hat Dimension k. U ist F-invariant,  $F(\sum_{i=1}^k \mu_i v_i) = \sum \mu_i F(v_i) = \mu_i \lambda v_i + \sum_{i=2}^k \mu_i F(v_i) \in U$   
 $= \sum_{j \leq i} a_{ji} v_i$

Zu zeigen ist nun dass  $U = V_\lambda$ .  $U \subset V_\lambda : \chi_{F \upharpoonright U} = (T - \lambda)^k \xrightarrow{\text{Caley-Hamilton}} (F - \lambda)^k = 0$  auf U

$$\Rightarrow U \subseteq \text{Ker}(F - \lambda)^k$$

Falls  $U \subsetneq V_\lambda$

$$\Rightarrow \dim(V_\lambda) \geq 1.$$

$$(T - \lambda)^K \cdot G(T) = \chi_F(T) = \chi_{F \upharpoonright U}(T) \cdot \chi_{\hat{F}}(T) \Rightarrow \chi_{\text{hat } F}(T) = G(T) \text{ aber } G(\lambda) \neq 0.$$

$\lambda$  ist kein Eigenwert von  $\hat{F}$ .  $\Rightarrow$  der Hauptraum von  $\hat{F} : V/u \rightarrow V/u$  ist trivial.

Sei  $w \in V_\lambda$

$$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} : (F - \lambda)^s(w) = 0 \Rightarrow (F - \lambda)^s(\bar{w}) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{w} = 0 \Rightarrow w \in U.$$

$\square$

**Definition 1.25**

Ein Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  heißt nilpotent, falls es eine nat. Zahl  $m$  gibt, so dass  $F \circ \dots \circ F = F^m = 0$  auf  $V$  ist.

**Lemma 1.26**

Sei  $F : V \rightarrow V$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $F$  ist nilpotent

2.  $\forall v \in V \exists m_v \in \mathbb{N} F^{m_v}(v) = 0$

3. Es existiert eine Basis von  $V$ , so dass  $F$  Darstellungsmatrix  $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

4.  $\chi_F(T) = T^n$

**Beweis:**

$1 \Rightarrow 2$  trivial.

$2 \Rightarrow 3$  Induktion auf  $n = \dim(V)$ . Sei  $v \in V \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \exists m_v \in \mathbb{N}$  kleinstes  $F^{m_v}(v) = 0$

$\Rightarrow m_v \neq 0$

$\Rightarrow F^{m_v-1}(v) \neq 0$

$\Rightarrow U = \text{span}(F^{m_v-1}(v))$

Ferner

$F(F^{m_v-1}(v)) = 0$

$\Rightarrow$  Darstellungsmatrix bzgl.  $\{F^{m_v-1}(v)\}$  ist  $(0)$ .

$n \geq 2$

Sei  $v_1 \in V \setminus \{0\}$  so dass  $F(v_1) = 0$

$\Rightarrow U = \text{span}(v_1)$  ist  $F$ -invariant.

$\Rightarrow \hat{f} = \begin{matrix} V/U \\ \dim=n-1 \end{matrix} \rightarrow V/U$

nach I.A. existiert eine Basis  $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ , so dass die Darstellungsmatrix von  $\hat{F}$  die Form

$\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$  hat.

Die Familie  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist eine Familie von  $V$  und  $F$  hat Darstellungsmatrix:  $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$3 \Rightarrow 4$   $\chi_F(T) = \det(T \cdot Id_B - \begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}) = \det \begin{pmatrix} T & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & T \end{pmatrix} = T^n$

$4 \Rightarrow 1$  Caley-Hamilton:  $F^n = \chi_F(F) = 0$

□

**Satz 1.27 – JORDAN-CHARVALLERY**

Sei  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus,  $V$  endl. dim. Falls  $\chi_F(T)$  in Linearfaktoren zerfällt dann ist  $V = \bigoplus_i^k V_{\lambda_i}$  mit  $\lambda_i$  verschiedene Eigenwerte.  $F$  hat dann eine Blockmatrix als Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix} \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist  $F = G + H$  mit  $G$  ist diagonalisierbar und  $H$  ist nilpotent, und  $G \cdot H = H \cdot G$ .

**Beweis:**  $\chi_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$ ,  $\lambda_i$  verschieden.

$\dim(V) = \text{Grad}(\chi_F(T)) = n = \sum d_i = \sum \dim(V_{\lambda_i}) = \dim(V)$ .

$\dim(\sum_{i=1}^k V_{\lambda_i}) = \sum d_i = b = \dim(V)$  da die Haupträume transversal sind.

$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$

$V$  besitzt eine Basis  $B$ , welche aus der Vereinigung der Basen der  $V_{\lambda_i}$  besteht.  $F$  wird durch  $F \upharpoonright V_{\lambda_1}, \dots, F \upharpoonright V_{\lambda_k}$  bestimmt. Die einzelnen  $F \upharpoonright V_{\lambda_i}$  habe Matrixdarstellungen  $A_i =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Die Darstellungsmatrix von  $F$  ist dann

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

Sei  $G : V \rightarrow V$   $G \upharpoonright V_{\lambda_i} =$  Multiplikation mit  $\lambda_i$ .  $G$  hat diagonale Matrixdarstellung bzgl. der Basis  $B$ :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_k \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Setze  $H = F - G$ . Die Darstellungsmatrix von  $H$  bzgl.  $B$  ist

$$\begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H \text{ ist nilpotent.}$$

z. Zeigen  $GH = HG$

Beachte, dass jedes  $V_{\lambda_i}$   $G$ -invariant ist. Damit ist  $V_{\lambda_i}$   $H$ -invariant.

Es genügt zu zeigen, dass  $GH = HG$  auf  $V_{\lambda_i}$ . Sei  $w \in V_{\lambda_i}$ :  $H(G(w)) = H(\lambda_i w) = \lambda_i H(w) = G(H(w))$ .  $\square$

### Definition 1.28

$F : V \rightarrow V$ ,  $V$  endlichdimensional. Eine Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  ist  $F$ -adaptiert falls  $F(v_1) = 0, F(v_j) = \begin{cases} 0 \\ v_{j-1} \end{cases}$

**Bemerkung:**

Falls  $V$  eine  $F$ -adaptierte Basis hat ist  $F : V \rightarrow V$  nilpotent.

**Beweis:** Sei  $\{v_1, \dots, v_n\}$   $F$ -adaptiert. Es genügt zu zeigen dass  $F^n = 0$ .

$\sum_{j=1}^n \mu_j v_j = F^n(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j F^n(v_j)$

$\square$

$$\text{Notation } N_m = \begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}$$

$$N_1 = (0)$$

$$N_m^m = 0$$

### Definition 1.29

$F : V \rightarrow V$  nilpotent. Es existiert  $m \in \mathbb{N}$   $\text{Ker}(F) \subset \dots \subset \text{Ker}(F^m) = \text{Ker}(F^{m+1}) = \dots \subset V$ .  $m$  heißt der Index von  $F$ .  $V = \text{Ker}(F^m) \oplus F^m(V)$

### Satz 1.30

Sei  $F : V \rightarrow V$  und  $B$  eine  $F$ -adaptierte Basis von  $V$ . Dann hat  $F$  Matrixdarstellung der Form:

$$\begin{pmatrix} N_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{k_n} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^r k_j = n$$

$$\text{Index}(F) = \max\{k_j\}_{1 \leq j \leq n}$$

**Beweis:** Sei  $i_1 < \dots < i_r$  eine Aufzählung der Menge von Indices so dass  $\{j | F(v_j) = 0\}$

$$v_1, v_2, \dots, v_{i_1}, v_{i_1+1}, \dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

□

### Satz 1.31

Sei  $F : V \rightarrow V$  nilpotent mit Index  $K$ ,  $\dim(V) = n < \infty$ . Gegeben ein Unterraum  $U$  von  $V$  derart, dass  $U \cap \text{Ker}(F^{k-1}) = \{0\}$ . Dann lässt sich jede Basis von  $U$  zu einer  $F$ -adaptierten Basis von  $V$  ergänzen.

*Bemerkung:*  $\text{Ker}(F) \subsetneq \text{Ker}(F^2) \subsetneq \text{Ker}(F^{k-1}) \subsetneq \text{Ker}(F^k) = \dots = V$ .

$\text{Ker}(F^{k-1})$  hat ein Komplement  $U$  in  $\text{Ker}(F^k)$

**Beweis:** Induktion auf  $k$ :

$$k = 1$$

$F = 0$  als Endomorphismus.  $\Rightarrow$  Jede Basis ist  $F$ -adaptiert.

$$k \geq 2:$$

Sei  $V' = \text{Ker}(F^{k-1}) \subsetneq V$ . Sei weiterhin  $\{u_1, \dots, u_s\}$  eine Basis von  $U$ .  $U \cap V' = \{0\}$ .  $U + V' = U \oplus U \oplus V'$  hat eine Basis:  $\{u_1, \dots, u_s, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$ . Ergänze diese Basis zu einer Basis von  $V$ :

$$\{u_1, \dots, u_s, \dots, u_r, v_1, \dots, v_m\}.$$

Sei  $W = \text{span}(u, \dots, u_r)$ ,  $U \subset W$ ,  $W \cap V' = \{0\}$ .

$F(W) \subset \text{Ker}(F^{k-1}) = V'$ , da  $F^k = 0$ .  $V'$  ist  $F$ -invariant und  $F \upharpoonright V'$  hat Index  $k - 1$ .

**Beh.:**  $\{0\} = F(W) \cap \text{Ker}(F^{k-2})$

Sei  $u \in F(W) \cap \text{Ker}(F^{k-2}) \Rightarrow F^{k-2}(u) = 0$ . es existiert  $w \in W : u = F(W)$

$$0 = F^{k-2}(u) = F^{k-1}(w)$$

$$\Rightarrow w \in \text{Ker}(F^{k-1} = V')$$

$$\Rightarrow w = 0$$

$$\Rightarrow u = F(w) = 0$$

**Beh.:**  $\{F(u_1), \dots, F(u_r)\}$  sind linear unabhängig. also eine Basis von  $F(W)$ .

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i F(u_i) = 0 = F(\sum_{i=1}^k \lambda_i F(u_i))$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \in \text{Ker}(F) \subset V'$$

$$\xRightarrow{W \cap V' = \{0\}} \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$$

Aus unserer Induktionsannahme:  $F(W)$  und  $F|_{V'} \Rightarrow$  Es existiert eine adaptierte Basis  $\{v'_1, \dots, v'_m\}$  welche  $\{F(u_1), \dots, F(u_r)\}$  ergänzt.

$F(u_j) = v'_{i_j}$  wobei  $i_1 < \dots < i_r$  (ansonsten sortiere  $u_j$  um).

$$v_1 = v'_1$$

$$v_2 = v'_2$$

$$\vdots$$

$$v_{i_1} = v'_{i_1}$$

$$v_{i_1+1} = u_1$$

$$v_{i_1+2} = v_{i_1+1}$$

$$v_{i_1+} = v_{i_1+1}$$

(Füge an den Stellen  $i_j$  den Vektor  $u_j$  ein).

$\rightarrow$  Basis von  $V$ .

Es genügt nun zu zeigen, dass diese Basis  $F$ -adaptiert ist.

$$\text{z.B. } F(v_{i_1+1}) = v'_{i_1} = F(u_1)$$

$$\Rightarrow u_1 - v_i \in \text{Ker}(F) \wedge u_1 - v_i \in V' \Rightarrow \text{Widerspruch.}$$

□

### Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} T-1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & T-2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & T-2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & T-3 \end{pmatrix} = (T-2) \det \begin{pmatrix} T-1 & 0 & -1 \\ 1 & T-2 & -1 \\ 1 & 0 & T-3 \end{pmatrix} = (T-2)^4 \Rightarrow 2 \text{ ist}$$

der einzige Eigenwert

$A - 2Id$  ist nilpotent.

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(A - 2Id) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$

$$\text{Ker}(A - 2Id) \subsetneq \text{Ker}((A - 2Id)^2), \dim(\text{Ker}(A - 2Id)) = 4$$

$$\text{Die Jordansche Normalform ist dann: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \text{ Da es nur einen Vektor in } \text{Ker}((A - 2Id)^2) \text{ gibt}$$

der nicht in  $\text{Ker}((A - 2Id))$  ist.

**Korollar 1.32**

Jeder Nilpotente Endomorphismus besitzt eine F-adaptierte Basis.

**Korollar 1.33**

Jeder nilpotente Endomorphismus lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix dar-

stellen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

**Korollar 1.34 – JORDANSCHER NORMALFORM**

Jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix folgender Form darstellen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & \lambda_1 & 0 & \\ & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_k & 1 \\ & & & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & & & \lambda_k & 1 \end{pmatrix}$$

## 2. Dualität

### Definition 2.1

Sei  $V$  ein  $K$ -Vektorraum. Der Dualraum  $V^*$  ist die Kollektion aller linearen Abbildungen von  $V \rightarrow K$

*Bemerkung:*  $V^*$  ist ein  $K$ -Vektorraum.  $F + G : V \rightarrow K, v \mapsto F(v) + G(v)$  ist linear,

$\lambda \in K, \lambda F : V \rightarrow K, v \mapsto \lambda F(v)$  ist auch linear

### Definition 2.2

Sei  $V$  endlichdimensional und wähle eine Basis  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$ . Die duale Basis  $B^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$

ist eine lineare Abbildung derart, dass  $b_i^*(b_j) = 1_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$

Insbesondere  $b_i^*(V) = b_i^*(\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j) = \lambda_i$

*Bemerkung:* Falls  $V$  endlichdimensional ist, dann ist  $B^*$  eine Basis von  $V^*$  und somit  $V \simeq V^*$ .

**Beweis:**  $b_1^*, \dots, b_n^*$  sind linear unabhängig.

1.)

$$\sum \lambda_i b_i^* = 0$$

$$\sum \lambda_i b_i^*(b_j) = 0, 1 \leq j \leq n \Rightarrow \lambda_i = 0$$

$\text{span}(b_1^*, \dots, b_n^*) = V^*$  Sei  $F : V \rightarrow K$  beliebig.  $F(b_i) = \lambda_i \in K$

$$F - \sum \lambda_i b_i^* \stackrel{!}{=} 0$$

$(F - \sum \lambda_i b_i^*)(b_j) = 0 = F(b_j) - \sum \lambda_i b_i^*(b_j)$  Insbesondere ist  $V \rightarrow V^*, b_i \mapsto b_i^*$  ein Isomorphismus.

Allerdings: Der Isomorphismus  $V \simeq V^*$  hängt von der Wahl der Basis  $B$  ab, ist also nicht kanonisch.  $\square$

### Lemma 2.3 – KANONISCHER MONOMORPHISMUS

$$V \rightarrow (V^*)^*, v \mapsto \varphi_V : V^* \rightarrow K, F \mapsto F(V)$$

**Beweis:**  $\varphi_V$  ist wohldefiniert.

$$\varphi_V(F + G) = (F + G)(v) = (F(V) + G(V))$$

zu zeigen:  $\varphi_V$  ist injektiv. (Übungsaufgabe).  $\square$

### Korollar 2.4

Falls  $V$  endlichdimensional ist sind  $V \simeq (V^*)^*$  kanonisch isomorph.

**Beweis:**  $\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(V^*)^* \Rightarrow \varphi : V \rightarrow (V^*)^*$  ist surjektiv also auch ein Isomorphismus.  $\square$

### Lemma 2.5

Sei  $V$  endlichdimensional. Wähle Basen  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  und  $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$  von  $V$ . Seien  $B^*$  und  $B'^*$  die entsprechenden dualen Basen in  $V^*$ . Wenn  $A$  die Transformationsmatrix von  $B$  nach  $B'$  ist, dann ist die Transformationsmatrix von  $B^*$  nach  $(B')^*$   $A^*-1$



**Beweis:** 
$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sei  $X$  die Transformationsmatrix von  $B^*$  nach  $(B')^*$ .

$$v_{B_1} : b_n \begin{pmatrix} b_1^* & \dots & b_n^* \end{pmatrix} = Id_n$$

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b_1^*)' & \dots & (b_n^*)' \end{pmatrix} = Id_n$$

$$Id_n = \begin{pmatrix} (b_1^*)' \\ \vdots \\ (b_n^*)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_1 & \dots & b'_n \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} (b_1^*)' \\ \vdots \\ (b_n^*)' \end{pmatrix} (A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix})^T = X \begin{pmatrix} (b_1^*)' \\ \vdots \\ (b_n^*)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} A^T = X Id_n A^T \Rightarrow$$

$$X = (A^*)^{-1}$$

□

### Definition 2.6

Sei  $F : V \rightarrow W$  eine lineare Abbildung. Definiere die duale Abbildung  $F^* : W^* \rightarrow V^* : \psi \mapsto \psi \circ F$ .

*Bemerkung:*  $F^*$  ist linear.

$$F^* (\psi_1 + \psi_2) = (\psi_1 + \psi_2) \circ F = \psi_1 \circ F + \psi_2 \circ F$$

$$U \xrightarrow{G} V \xrightarrow{F} W$$

$$W^* \xrightarrow{F^*} V^* \xrightarrow{G^*} U^*$$

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$$

**Beweis:**  $\psi \in W^*$

$$(F \circ G)^*(\psi) = \psi \circ F \circ G = F^*(\psi) \circ G = G^*(F^*(\psi))$$

□

Eigenschaften:

$$1. Id_V^* = Id_{V^*}$$

$$2. (F + G)^* = F^* + G^*$$

$$3. (F \circ G)^* = G^* \circ F^*$$

$$4. (\mu F)^* = \mu F^*$$

### Lemma 2.7

Falls  $F^* = 0$  dann ist  $F = 0$ . Falls  $V$  und  $W$  endlich sind,  $G : W^* \rightarrow V^*$  lineare Abbildung, dann gibt es  $F : V \rightarrow W$  so dass  $F^* = G$ .

**Beweis:**  $F=0$  Sei  $v \in V$  beliebig. Zu zeigen:  $F(v) = 0$

Definiere:

$$W^* \rightarrow K : \psi \mapsto \psi(F(v))$$

$$\text{Erinnerung: } W \leftrightarrow (W^*)^* : w \mapsto \psi_w : W^* \rightarrow K : \psi \mapsto \psi(w)$$

$$\varphi_{F(v)}(\psi) = \psi(F(v)) = F^*(\psi)(v) = 0$$

Abre  $\varphi$  ist ein Monomorphismus

$$\Rightarrow F(v) = 0 \Rightarrow F = 0.$$

□

### Definition 2.8

Die Operation  $*$  :  $Hom(V, W) \rightarrow Hom(W^*, V^*)$

Falls  $V, W$  endlichdim. sind.

$$\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$$

$$\dim(\text{Hom}(W^*, V^*)) = \dim(V^*) \cdot \dim(W^*) \text{ Also ist die Operation } * \text{ injektiv} \Rightarrow \text{surjektiv.}$$

*Bemerkung:*  $F : V \rightarrow W$ ,  $\dim(V) = n, \dim(W) = m$  hat die Darstellungsmatrix  $A$  bzgl. der Basis  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$  und  $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$  von  $W$ . Seien  $B^*$  und  $(B')^*$  die entsprechenden dualen Basen von  $V^*$  und  $W^*$ .

Dann hat  $F^*$  die Darstellungsmatrix  $A^T$  bezgl  $(B')^*$  und  $B^*$ .

**Beweis:**

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

$$F^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_m \end{pmatrix} \cdot F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

$$\text{Die Darstellungsmatrix von } F^* \text{ ist } F^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_m \end{pmatrix} \cdot A$$

$$F^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = (A^T \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix})^T \Rightarrow \text{die Darstellungsmatrix von } F^* \text{ ist } A^T. \quad \square$$

Alternativer Beweis:

**Beweis:**

$$F^*(c_k^*) = \sum_l \lambda_{lk} b_l^*$$

$$F(b_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} c_j$$

$$F^*(C_k^*)(b_i) = (\sum \lambda_{lk} b_l^*)(b_i) = \lambda_{ik}$$

$$= c_k^*(F(b_i)) = c_k^*(\sum a_{ji} c_j) = a_{ki}$$

$$\Rightarrow A^T \text{ ist die Darstellungsmatrix on } F^*. \quad \square$$

**Korollar 2.9**

$$\det(F^*) = \det(F).$$

**Lemma 2.10**

$$V = \oplus_{i=1}^n V_i \Rightarrow V^* \simeq \oplus_{i=1}^n V_i^*$$

Der Beweis ist trivial:  $V \rightarrow K$  ist eindeutig bestimmt durch  $F|_{V_1}, \dots, F|_{V_n}$ .

**Lemma 2.11**

$F : V \rightarrow W$  linear.

1.  $F$  injektiv  $\Leftrightarrow F^*$  surjektiv

2.  $F$  surjektiv  $\Leftrightarrow F^*$  inj

3.  $F$  Isom  $\Leftrightarrow F^*$  Isom.

**Beweis:**

1.  $F : V \rightarrow W$  injektiv. z. Zeigen  $F^* : W^* \rightarrow V^*$  surjektiv: Es existiert ein  $\Theta : W \rightarrow K : F^*(\Theta) = \psi \in V^*, \forall v \in V \Theta(F(v)) = \psi(v)$

$V \simeq \text{Im}(F) \subset W$ . Sei  $Z$  ein Komplement von  $\text{Im}(F)$  in  $W$ .  $W = \text{Im}(F) \oplus Z$ .  $\forall w \in W : w = w' + \hat{w}, w' = F(v), \hat{w} \in Z$ .

Definiere  $\Theta : W \rightarrow K : w = F(v) + \hat{w} \mapsto \psi(v)$ .  $\Theta$  ist wohldefiniert. Zu zeigen ist nun noch, dass  $\Theta$  linear ist:

$$\Theta(w_1 + w_2) = \Theta(F(v_1) + F(v_2) + \hat{w}_1 + \hat{w}_2) = \psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2) = \Theta(w_1) + \Theta(w_2)$$

$\Leftarrow$

$F^* : W^* \rightarrow V^*$  surjektiv. Zu zeigen  $F : V \rightarrow W$  ist injektiv.  $v \in V : F(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ .

Falls  $v \neq 0 \Rightarrow \exists \psi : V \rightarrow K : \psi(v) \neq 0$

$$\Rightarrow \exists \Theta : W \rightarrow K : F^*(\Theta) = \psi \Rightarrow \underbrace{\Theta(F(v))}_{=0} = \underbrace{\psi(v)}_{\neq 0}$$

2.  $\Rightarrow$

$F : V \rightarrow W$  surjektiv. Zu zeigen:  $F^* : W^* \leftrightarrow V^*$  injektiv.

Sei  $\Theta \in W^* : F^*(\Theta) = 0$  als lineare Abbildung.  $F^*(\Theta) = \Theta \circ F : V \rightarrow K$ . Zu zeigen:  $\forall w \in W : \Theta(w) = 0$ .

$w \in W : \exists v \in V : F(v) = w$ .  $F$  surjektiv  $\Theta(w) = \Theta(F(v)) = F^*(\Theta)(v)$ .

$\Leftarrow F^* : V^* \rightarrow W^*$  ist injektiv. z.Z.  $F$  ist surjektiv.

Sei  $Z$  ein Komplement von  $\text{Im}(F)$  in  $W : W = \text{Im}(F) \oplus Z$ . Zu zeigen ist nun, dass  $Z = \{0\}$ . Sonst sei  $B$  eine Basis von  $Z$ .  $G : W \rightarrow K$  linear derart, dass  $G|_{\text{Im}(F)} = 0$  und  $\forall b \in B : G(b) = 1$ .  $\Rightarrow G \in W^* \Rightarrow F^*(G) = G \circ F : V \rightarrow K$ . Sei  $v \in V : G \circ F(v) = G(F(v)) = 0$ .  $F^*(G)$  ist die triviale Abbildung  $\Rightarrow G = 0 \Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow Z = \{0\}$

□

# 3. Duale Paarungen

## Definition 3.1 – BILINEARITÄT

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume. Eine Abbildung  $\varphi : V \times W \rightarrow K$  ist bilinear wenn  $\varphi$  linear in jeder Koordinate ist.

1.  $\varphi(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \varphi(v, w_1) + \lambda_2 \varphi(v, w_2)$
2.  $\varphi(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, v) = \lambda_1 \varphi(w_1, v) + \lambda_2 \varphi(w_2, v)$

*Bemerkung:* Falls  $V, W$  endlichdimensional mit Basis  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  von  $V$ ,  $C = \{c_1, \dots, c_m\}$  von  $W$ , dann ist  $\varphi$  eindeutig bestimmt durch die  $(n \times m)$  Matrix  $A = \varphi(b_i, c_j)$ .

$$\varphi(v, w) = \varphi(\sum_{i \leq n} \lambda_i b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j) = \sum_{i \leq n} \lambda_i \varphi(b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j) = \sum_{i \leq n} \lambda_i \sum_{j \leq m} \mu_j \varphi(b_i, c_j) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

*Bemerkung:* Falls wir Basen  $B'$  von  $V$  und  $C'$  von  $W$  gewählt hätten, dann ist die Darstellungsmatrix von

$$\varphi : M(B, B')^T \cdot A \cdot M(C, C') \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = M(B, B') \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = M(C, C') \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_m \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) M(B, B')^T$$

## Korollar 3.2

Der Rang hängt nicht von der Auswahl der Basen ab. Somit ist der Rang von  $\varphi$  ( $\text{rg}(\varphi)$ ) wohldefiniert.

## Definition 3.3 – DUALES PAAR

Ein Tupel  $(V, W, \varphi)$  ist ein duales Paar, falls:

1.  $\dim(V) < \infty, \dim(W) < \infty$
2.  $\dim(V) = \dim(W)$
3.  $\varphi$  ist bilinear.
4.  $\text{rg}(\varphi) = \dim(V)$

*Bemerkung:* Falls  $\varphi : V \times W \rightarrow K$  bilinear ist, dann ist  $\varphi' : W \times V \rightarrow K : (w, v) \mapsto \varphi(v, w)$  auch bilinear. Wenn  $(V, W, \varphi)$  ein duales Paar ist, dann ist auch  $(W, V, \varphi')$  auch ein duales Paar.

## Lemma 3.4

Für gegebene  $V$  und  $W$  gilt:

$$\{\varphi : V \times W \rightarrow K\} \xrightarrow{\Phi} \{F : V \rightarrow W^*\}$$

$$\varphi : V \times W \rightarrow K \xrightarrow{\Phi} F_\varphi : V \rightarrow W^* : v \mapsto F_\varphi : W \rightarrow K : w \mapsto \varphi(v, w)$$

$$\varphi_F : V \times W \rightarrow K \xleftarrow{\Phi^{-1}} F : V \rightarrow W^* : (v, w) \mapsto F(v)(w)$$

Ferner gilt:  $(v, w, \varphi)$  ist ein duales Paar  $\Leftrightarrow F_\varphi : V \rightarrow W^*$  Isomorph.

Beobachtung:

$$\Phi^{-1} \cdot \Phi(\varphi)(v, w) = \Phi^{-1}(F_\varphi(v) : w \mapsto \varphi(v, w)) = \varphi(v, w)$$

**Beweis:**  $\Phi$  ist wohldefiniert:

1.  $F_\varphi(v) \in W^*$ , weil  $\varphi(v, -)$  linear in der zweiten Koordinate ist.

2.  $F_\varphi$  ist linear, weil  $\varphi$  in der ersten Koordinate linear ist.

$\Phi^{-1} \cdot \Phi = Id_X, \Phi \cdot \Phi^{-1} = Id_Y$  mit  $X$  linke,  $Y$  rechte Menge von  $\Phi$  (in der Definition oben).

Falls  $V, W$  endlichdimensional sind, mit Basen  $\{b_1, \dots, b_n\}, \{c_1, \dots, c_m\}$ .  $A_\varphi$  sei die Darstellungsmatrix bezüglich dieser Basen  $A_\varphi = (a_{ij}) = (\varphi(b_i, c_j))$

Sei  $\{c_1^*, \dots, c_m^*\}$  die duale Basis zu  $C$  in  $W^*$ .  $c_i^*(c_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \end{cases}$ .

Die Darstellungsmatrix von  $F_\varphi$  bezüglich  $B, C^*$   $(\lambda_{ij}) \in M_{m \times n}(K), F_\varphi(b_k) = \sum \lambda_{lk} c_l^* (\sum \lambda_{lk} c_l^*)(c_r) = \sum \lambda_{lk} c_l^*(c_r) = \lambda_{rk} = F_\varphi(b_k)(c_r) = \varphi(b_k, c_r)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots \\ \lambda_{21} & & \ddots \\ \vdots & & \end{pmatrix} = A_\varphi^T$$

$$\text{rg}(A_\varphi^T) = \text{rg}(A)$$

$$(V, W, \varphi) \text{ ist ein duales Paar} \Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W) = \dim(W^*) = \text{rg}(A_\varphi) = \text{rg}(A_\varphi^T)$$

$$\Leftrightarrow F_\varphi \text{ ist ein Isomorphismus.} \quad \square$$

### Korollar 3.5

Seien  $V, W$  endlichdimensional,  $\varphi : V \times W \rightarrow K$  eine Bilinearform. Dann ist  $(V, W, \varphi)$  ein duales Paar genau dann, wenn  $\varphi$  nicht ausgeartet ist.

$$\text{d.h. } \forall v \in V \varphi(v, w) = 0 \forall w \in W \Rightarrow v = 0 \wedge \forall w \in W \varphi(v, w) = 0 \forall v \in V \Rightarrow w = 0$$

**Beweis:**  $\Rightarrow$

1. Sei  $V \in V$  fest :  $\varphi(v, w) = 0 \forall w \in W \Rightarrow F_\varphi(V)(w) = 0 \Rightarrow (V, W, \varphi)$  ist ein duales Paar  $\Rightarrow v = 0$

2.  $(V, W, \varphi)$  duales Paar  $\Rightarrow (W, V, \varphi')$  auch dual  $\Rightarrow F_{\varphi'} : W \rightarrow V^*$  Isomorphismus  $\Rightarrow w \in W \varphi(v, w) = 0 \forall v \in V \Rightarrow F_\varphi(w) = 0 \Rightarrow w = 0$

$\Leftarrow$

Es genügt zu zeigen, dass  $F_\varphi : V \rightarrow W^*$  ein Isomorphismus ist.

a.)  $\Rightarrow F_\varphi$  ist ein Monomorphismus (injektiv).

Insbesondere ist  $\dim(V) \leq \dim(W^*) = \dim(W)$ . Es genügt zu zeigen, dass  $\dim(V) = \dim(W^*)$ , da  $F_\varphi$  injektiv ist.

$(W, V, \varphi')$  ist eine Bilinearform.

Aus b.) folgt  $\Rightarrow F_{\varphi'}$  injektiv  $\square$

### Beispiel:

$$(R^n, \langle, \rangle) \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \rangle = \sum x_i y_i$$

### Korollar 3.6

Sei  $(V, W, \varphi)$  ein duales Paar. Für jede Basis  $\{c_1, \dots, c_n\}$  aus  $W$  gibt es eine Basis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  aus  $V$ , welche dual zu  $\{c_1, \dots, c_n\}$  ist:  $\varphi(b_i, c_j) = S_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \end{cases}$

**Beweis:** Für  $\{c_1, \dots, c_n\}$  aus  $W$  eine Basis. Sei  $\{c_1^*, \dots, c_n^*\}$  die duale Basis aus  $W^*$ .

$F_\varphi : V \rightarrow W^*$  Iso. Sei  $b_i = F_\varphi^{-1}(c_i^*)$ .  $\{b_1, \dots, b_n\}$  ist dann eine Basis von  $V$ .

$$\varphi(b_i, c_j) = F_\varphi(b_i)(c_j) = c_j^*(b_i) = \delta_{ij}$$

□

### Definition 3.7

Sei  $(V, W, \varphi)$  ein duales Paar. Gegeben  $U \subset V$  UVR von  $V$ . Definiere  $U^\perp = \{w \in W : \forall u \in U : \varphi(u, w) = 0\}$ .  $U^\perp$  ist ein UVR von  $W$ .

### Beispiel:

$$(0)^\perp = W, W^\perp = \{0\}$$

*Bemerkung:*  $U \subset V, (U^\perp)^\perp = \{v \in V : \forall w \in U^\perp \varphi(v, w) = 0\} = U$

**Beweis:**  $U \subset (U^\perp)^\perp$  trivial.

Sei  $v \notin U$ . z.Z.  $v \notin (U^\perp)^\perp$ . es existiert  $G : V \rightarrow K : G|_U = 0, G(v) = 1$ .  $G \in V^* \simeq W$  (da  $F_\varphi$  ein Isomorphismus ist.  $\Rightarrow \exists w \in W : F_\varphi(w) = G$ . D.h.  $\forall z \in V : G(z) = \varphi'(z, w)$   $u \in U : 0 = G(u) = \varphi(u, w) \Rightarrow w \in U^\perp$  aber  $G(v) = 1 = \varphi(v, w) \Rightarrow v \notin (U^\perp)^\perp$  □

### Lemma 3.8

Sei  $(V, W, \varphi)$  ein duales Paar und  $U \subset V$  UVR. Dann ist  $(V/U, U^\perp, \bar{\varphi})$  ein duales Paar, wobei  $\bar{\varphi}(v+U, w) = \varphi(v, w)$ . Insbesondere gilt  $\dim(V/U) + \dim(U^\perp) = \dim(W)$

**Beweis:** Übungsaufgabe. □

### Definition 3.9 – ADJUNGIERTER ENDOMORPHISMUS

Sei  $(V, W, \varphi)$  ein duales Paar und  $G : W \rightarrow W$  ein Endomorphismus. Der adjungierte Endomorphismus  $G^T : V \rightarrow V$  und definiert als  $G^T = F_\varphi^{-1} \cdot G^* \cdot F_\varphi$

# 4. Euklidische Räume

## Definition 4.1 – SYMMETRISCHE BILINEARFORM

Eine Bilinearform  $\varphi : V \times V \rightarrow K$  ist symmetrisch, falls  $\varphi = \varphi' \Leftrightarrow \forall u, v \in V : \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

*Bemerkung:* Seien  $B, C$  Basen von  $V$  und  $A$  die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzgl.  $B$  und  $C$ . Dann gilt:  
 $\varphi$  ist symmetrisch  $\Leftrightarrow A = A^T$

### Beweis:

$\Rightarrow$

Siehe Übungsblattt

$\Leftarrow$

$$\varphi(u, v) = u^T \cdot A \cdot v = (A^T \cdot u)^T \cdot v = v^T \cdot ((A^T \cdot u)^T)^T = v^T \cdot A^T \cdot u = v^T \cdot A \cdot u = \varphi(v, u) \quad \square$$

*Bemerkung:* Wenn  $\varphi$  symmetrisch ist ist der Begriff der orthogonalität wohldefiniert und vor allem symmetrisch.

$$u \perp v \Leftrightarrow \varphi(u, v) = 0$$

$$v \perp u \Leftrightarrow \varphi(v, u) = 0$$

### Beispiel:

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i \text{ ist symmetrisch.}$$

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

## Definition 4.2 – QUADRATISCHE FORM

Sei  $\varphi : V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform. Die zugehörige quadratische Form ist:  $q : V \rightarrow K, v \mapsto \varphi(v, v)$

*Bemerkung:*  $\dim(V) = n$  Sei  $B = \{b_1, \dots, b_n\}$  eine Basis.

$\varphi$  hat die Darstellungsmatrix  $A$  bzgl.  $B$ .

$$Q(v) = \varphi(v, v) = \varphi(\sum \lambda_i b_i, \sum \lambda_i b_i) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

## Korollar 4.3

Fallse  $\text{char}(K) \neq 2$ :

Jede symmetrische Lienarform is durch ihre quadratische Form eindeutig bestimmt.

$$q(u + v) = \varphi(u + v, u + v) = \varphi(u, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, u) + \varphi(v, v) = \varphi(u, u) + \varphi(v, v) + 2\varphi(u, v) = q(u) + q(v) + 2\varphi(u, v)$$

$$q(u - v) = \dots = q(u) + q(v) - 2\varphi(u, v)$$

$$\text{Insbesondere: } \varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}$$

## Definition 4.4 – BILINEARFORM DIFINIT

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform.

1. Wir sagen, dass  $\varphi$  positiv semidifinit ist, falls  $\varphi(u, u) \geq 0 \forall u \in V$ .

2. Falls  $\varphi(u, u) \leq 0 \forall u \in V$  ist  $\varphi$  negativ semidefinit
3.  $\varphi$  ist positiv definit, falls  $\varphi$  pos. semidefinit ist und  $\varphi(u, u) > 0 \forall u \in V \setminus \{0\}$
4.  $\varphi$  ist negativ definit, falls  $\varphi$  neg. semidefinit ist und  $\varphi(u, u) < 0 \forall u \in V \setminus \{0\}$
5. Ansonsten ist  $\varphi$  indefinit.

**Beispiel:**

1. Standard Skalarprodukt auf  $\mathbb{R}^n$  ist positiv definit
2.  $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_2$  Ist positiv semidefinit aber nicht pos. definit ( $\varphi((0, 1), (0, 1)) = 0$ ).
3.  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2$  ist indefinit.

*Bemerkung:*  $\varphi$  ist pos. (semi) definit  $\Leftrightarrow -\varphi$  ist neg. (semi) definit.

**Definition 4.5 – SKALARPRODUKT**

Ein Skalarprodukt auf einem endliche nVektorraum  $V$  ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.  
 $\varphi(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$

**Definition 4.6 – EUKLIDISCHER RAUM**

$V, \langle, \rangle$  ist ein euklidischer Raum, wenn  $V$  ein endlicher  $\mathbb{R}$ -Vr ist und  $\langle, \rangle$  ein Skalarprodukt.

**Definition 4.7 – NORM, NORMIERTER VEKTORRAUM**

Eine Norm auf einem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  ist eine Abbildung  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ , so dass:

1.  $\|v\| \geq 0$   
 $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2.  $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
3. Dreiecksungleichung:  
 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$(V, \|\cdot\|)$  ist ein normierter Vektorraum.

**Beispiel:**

1.  $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ , die euklidische Norm.
2.  $\|x\|_{\infty} = \max |x_i|$
3.  $\|x\|_{\infty} = \max(|x_i|)$

**Definition 4.8**

Sei  $(V, \langle, \rangle)$  ein euklidischer Raum und definiere  $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ . Die Abbildung ist wohldefiniert und induziert sie eine Norm auf  $V$ .



**Lemma 4.9 – CAUCHY-SCHWARZ UNGLEICHUNG**

$$\forall v, w \in V : | \langle v, w \rangle | \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

**Beweis:** Falls  $w = 0$  ist die Aussage trivial. ObdA. ist  $w \neq 0$ , also  $\|w\| > 0$ .

Sei  $\lambda \in \mathbb{R}$  beliebig.

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = \|v\|^2 + \lambda^2 \|w\|^2 - 2\lambda \langle v, w \rangle$$

$$\text{Insbesondere } 2\lambda \langle v, w \rangle \leq \lambda^2 \|w\|^2 + \|v\|^2.$$

Falls  $\lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \in \mathbb{R}$ :

$$2 \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2 + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \geq \|v\|^2 \Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$\Rightarrow | \langle v, w \rangle | \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

□

**Korollar 4.10**

$(V, \langle, \rangle)$  ist ein Euklidischer Raum:

$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \rightarrow \sqrt{\langle v, v \rangle}$  ist eine Norm.

**Beweis:**

1. Klar.

$$2. \|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$$

3. Es genügt zu zeigen, dass  $\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + 2 \langle u, v \rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$$

□

**Definition 4.11**

Sei  $(V, \langle, \rangle)$  ein euklidischer Raum.

$$-1 \leq \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \|u\|} < 1$$

$$= \cos(\Theta)$$

Mit  $\Theta \in (0, \pi]$  ist eindeutig bestimmt.  $\Theta$  ist der Winkel zwischen  $u$  und  $v$ .

*Bemerkung:*  $u \perp v \Leftrightarrow \langle uv \rangle = 0 \Leftrightarrow$  der Winkel  $\frac{\pi}{2}$  ist.

**Satz 4.12 – SATZ VON PYTHAGORAS**

Sei  $(V, \langle, \rangle)$  ein euklidischer Raum. Dann gilt:

$$v \perp w \Leftrightarrow \|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$$

**Beweis:**  $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle = \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle + 2 \langle v, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2 \langle v, w \rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 \Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0 \Leftrightarrow v \perp w$

□

**Definition 4.13 – ORTHOGONALES SYSTEM**

Sei  $\varphi : V \times V \rightarrow K$  eine symmetrische Bilinearform. Ein orthogonales System bezüglich  $\varphi$  ist eine Kollektion von Vektoren  $M$ , so dass:

$$0 \notin M, u, v \in M \wedge u \neq v : \varphi(u, v) = 0.$$

Ein Orthonormales System  $M$  ist eine Kollektion von Vektoren, so dass:

$$\varphi(u, v) = \begin{cases} 0 & u \neq v \\ 1 & u = v \end{cases}$$

*Bemerkung:* Dementsprechend definieren wir Orthogonalbasis und Orthonormalbasis (ONB).

**Beispiel:**

Standardbasis  $\{e_1, \dots, e_n\}$  in  $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$  mit dem Standardskalarprodukt.

**Satz 4.14**

Sei  $\text{char}(K) \neq 2$ . Jede symmetrische Bilinearform  $\varphi$  auf einem endlichdimensionalen  $K$ -VR  $V$  lässt sich bei einer geeigneten Basisauswahl durch eine Diagonalmatrix darstellen.

Ferner ist  $\varphi$  nicht ausartet  $\Leftrightarrow$  kein Eigenwert der Matrix ist null.

**Beweis:** Es genügt zu zeigen, dass  $(V, \varphi)$  eine Basis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  besitzt, welche aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht.

Dann ist die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzgl.  $\{b_1, \dots, b_n\}$ :

$\begin{pmatrix} \varphi(b_1, b_1) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \varphi(b_n, b_n) \end{pmatrix}$  Sei  $q : V \rightarrow K : v \mapsto \varphi(v, v)$  die zugehörige quadratische Form.

Falls  $q(v) = 0 \forall v \in V \Rightarrow \varphi(u, v) = 0 \forall u, v \in V$ . Dann besteht jede Basis von  $V$  aus paarweise orthogonalen Vektoren.

Sonst existiert  $b_1 \in V : q(b_1) \neq 0$ .

$F : V \rightarrow K, v \mapsto \varphi(v, b_1), F \neq 0, \text{Im}(F) = K$  als  $K$ -Vr.  $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(F)) = n - 1$ .

$\text{Ker}(F) = \{v \in V; \varphi(v, b_1) = 0\} = \{v \in V; v \perp b_1\} = \text{Span}(b_1)^\perp$ .

Nach Induktion auf der Dimension von  $V$  existiert eine Basis von  $b_2, \dots, b_n$  von  $\text{Ker}(F)$  welche aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht.

Die Basis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  ist eine Orthogonalbasis von  $V$ .

*Bemerkung:* Die Eigenwerte der Matrix hängen nicht von der Basis ab.

$\Rightarrow$  Eigenwerte sind  $\varphi(b_1, b_1), \dots, \varphi(b_n, b_n)$

$\Rightarrow$

Angenommen, dass  $\mu_j = \varphi(b_j, b_j) = 0$  wäre.

$\varphi(b_j, b_i) = \begin{cases} 0 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$   $\varphi(b_j, -) : V \rightarrow K$  ist die triviale Abbildung und  $b_j \neq 0$ .

$\Leftarrow$

Sei  $v \in V \setminus \{0\}$  beliebig. Zu zeigen:  $\varphi(v, -) : V \rightarrow K$  ist nicht trivial.

$v = \sum_{i=1}^n b_i \Rightarrow \exists i : \lambda_i \neq 0$

$\varphi(v, b_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(b_j, b_i) = \lambda \varphi(b_i, b_j) \neq 0$

□

**Korollar 4.15**

Sei  $\text{char}(K) \neq 2$ . Falls in  $K$  jedes Element ein Quadrat ist, dann lässt sich jede symmetrische Bilinearform

durch eine Matrix der Form  $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$  darstellen.

**Beweis:** Es existiert eine Orthogonalbasis  $\{b_1, \dots, b_n\}$  für  $\varphi : V \times V \rightarrow K$

$$c_i = \begin{cases} \frac{b_i}{\sqrt{\varphi(b_i, b_i)}} & \varphi(b_i, b_i) \neq 0 \\ b_i & \text{ansonsten} \end{cases}$$

OBdA. können wir annehmen, dass  $\{c_1, \dots, c_n\}$  ist so geordnet, dass:

$$\varphi(c_i, c_i) = 1, i \leq k$$

$$\varphi(c_j, c_j) = 0, j > k$$

Die Darstellungsmatrix von  $\varphi$  bzgl  $\{c_1, \dots, c_n\}$  ist dann:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

□

#### Satz 4.16 – SATZ VON SYLVESTER

Jede symmetrische Bilinearform  $\varphi$  auf einem endlichdimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum lässt sich bei geeigneter Basisauswahl durch eine Matrix der Form:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

darstellen, wobei die matrix  $p$  1er,  $q$  -1 er und  $r$  0er hat.

Ferner hängen die Zahlen  $p$ ,  $q$  und  $r$  nur von  $\varphi$  ab.

**Beweis:** Sei  $\{b_1, \dots, b_n\}$  eine Orthogonalbasis für  $\varphi$ .

$$c_i = \begin{cases} \frac{b_i}{\sqrt{\varphi(b_i, b_i)}} & \varphi(b_i, b_i) > 0 \\ \frac{b_i}{\sqrt{-\varphi(b_i, b_i)}} & \varphi(b_i, b_i) < 0 \\ 0 & \varphi(b_i, b_i) = 0 \end{cases}$$

Nach Umordnung der  $c_i$ 's ist die Darstellungsmatrix, dann

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

**Bemerkung:**  $\varphi|_{\text{span}(c_1, \dots, c_p) \times \text{span}(c_1, \dots, c_p)}$  ist positiv definit.

**Beweis:**  $\varphi(\sum_{i=1}^p \lambda_i c_i, \sum_{j=1}^p \lambda_j c_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \varphi(c_i, c_j) = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$

□

Sei  $U \subset V$  der grösste Unterraum von  $V$  derart, dass  $\varphi|_{U \times U}$  positiv definit ist.

$\text{span}(c_1, \dots, c_p) \subset U$ .

z. Zeigen:  $p = \dim(U)$

Ansonsten  $U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) \neq 0$ .

Sei  $0 \neq v \in U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n)$ .

$$v = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i c_i$$

$$0 \leq \varphi(v, v) = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i^2 \varphi(c_i, c_i) \leq 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow p = \dim(U)$$

$q, r$  bestimmen:

$\text{rg}(\varphi) = p + q$ , also ist  $q$  eindeutig bestimmt.  $r$  ist dann  $n - \text{rg}(\varphi)$

□

**Definition 4.17** – SIGNATUR

$$\text{Signatur}(\varphi) = p - q$$