Lineare Algebra II

Inoffizieller Mitschrieb

Stand: 17. Mai 2018

Vorlesung gehalten von:

Prof. Dr. Amador Martín-Pizarro
Abteilung für Angewandte Mathematik
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

0. Recap

Definition 0.1 – Ring

Ein (kommutativer) Ring (mit Einselement) ist eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen $+, \cdot$, derart, dass:

- $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(R, \cdot)$ ist eine kommutative Halbgruppe
- die Dsitributivgesetze:
  $a(x + y) = ax + ay$
  $(x + y)z = xz + yz)$

Definition 0.2 – Integritätsbereich

Ein Integritätsbereich ist ein Ring ohne Nullteiler. Also $\forall x, y \in R : x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

Definition 0.3 – Körper

Ein Körper ist ein Ring der Art, dass

1. $1 \neq 0$
2. $\forall x \in K : x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} : xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

Bemerkung: Körper sind Integritätsbereiche.

Definition 0.4 – Charakteristik

Sei R ein nicht trivialer Ring ($0 \neq 1$). $\varphi : \mathbb{Z} \to R, z \mapsto \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 1 & n >= 0 \\ -\sum_{i=1}^{n} 1 & \text{ansonsten} \end{cases}$
Dann ist φ ein Ringhomomorphismus.
Für den Kern von φ ($\mathrm{Ker}(\varphi)$) gibt es zwei Möglichkeiten.

1. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}, p = 0$
2. $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$. Dann gibt es ein kleinstes echt positives Element $p \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

R hat dann Charakteristik p ($\mathrm{Char}(R) = p$). Falls R ein Integritaetsbereich ist, dann ist p eine Primzahl.
Beispiele:
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \dots, \bar{n}\}$ hat Charakteristik n.
Insbesondere enthält jeder Körper mit Charakteristik p eine "Kopie" von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$:
k hat Charakteristik p $\Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \overset{injectiv}{\leftrightarrow} K$.
Hier ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper:
$a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow$ es ist a mit p teilerfremd. $1 = a \cdot b + p \cdot m \Rightarrow \bar{1} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

Definition 0.5 – Polynomring

Sei K ein Körper. Der Polynomring $K[T]$ in einer Variable R über K ist die Menge formeller Summen der Form:
$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot T^i, n \in \mathbb{N}$

Der Grad von $f \in K[T]$ ist definiert als:
$\text{Grad}(f) := max(m|m < n \wedge a_m \neq 0)$
$\text{Grad}(0) := -1$
Falls $Grad(f) = n$ und $n = 1$ heißt das Polynom normiert.
Die Summe und das Produkt von Polynomen sind definiert als:
$\sum_{i=0}^{n} a_i T^i + \sum_{j=0}^{m} b_j T^j := \sum_{k=0}^{max(m,n)} (a_k b_k) T^k$
$\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j T^j := \sum_{k=0}^{m+j} = c_K T^k, c_k = \sum_i +j = k a_i b_j$

Bemerkung: $K[T]$ ist ein Integritätsbereich.

Korollar 0.6

Es seien f, g beide $\neq 0$
$\Rightarrow \text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \Rightarrow f \cdot g \neq 0$
$\text{Grad}(f + g) \leq max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$

Satz 0.7 – Division mit Rest

Gegeben $f, g \in K[T], \text{Grad}(g) > 0$. Dann existieren eindeutige Polynome q, r, so dass $f = g\dot{q} + r$, wobei $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(g)$.

Beweis: Eindeutigkeit: Angenommen $f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r', q \neq q' \vee r \neq r'$.
$\Rightarrow g(q-q') = r'-r \Rightarrow \text{Grad}(r'-r) = max(\text{Grad}(r'), \text{Grad}(r)) < \text{Grad}(g) = \text{Grad}(g(q-q')) \Rightarrow$ Widerspruch
$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r'$ Existenz: Induktion auf $\text{Grad}(f)$
$\text{Grad}(f) = 0 \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$
$\text{Grad}(f) = n + 1$
$\text{Grad}(f) < \text{Grad}(g) = m \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$
OBdA. $n + 1 = \text{Grad}(f) \geq \text{Grad}(g) = m > 0$
$f = a_{n+1} \cdot T^{n+1} + \hat{f}, \text{Grad}(\hat{f}) \leq n, a_{n+1} \neq 0$
Sei $f' = f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g \Rightarrow \text{Grad}(f') \leq n$ Ia: $f' = g \cdot q' + r', \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g)$
$f' = f - b - b^{-1} a_{n+1} Tn + 1 - m \cdot g \Rightarrow f = g(b_n^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} + q') + r' \Rightarrow \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g)$ □

Definition 0.8 – Polynom Teilt

$f, g, q \in K[T]$, $\text{Grad}(g) > 0$
g teilt $f = g|_f \Leftrightarrow f = g \cdot q$

Definition 0.9 – Nullstellen von Polynomen

$f \in K[T]$ besizt eine Nullstelle $\lambda \in K$ gdw. $(T - \lambda)|_f \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$.
f lässt sich dann schreiben als $f = (T - \lambda)q + r$.

Lemma 0.10

$f \in K[t], f \neq 0, \text{Grad}(f) = n \Rightarrow$ f besitzt höchstens n Nullstellen in k.

Beweis:

$n = 0 \Rightarrow f = a_0, a_0 \neq 0$

$n > 0$ Falls f keine Nullstellen in K besitzt $\Rightarrow$ ok!
Sonst, sei $\lambda \in K$ eine Nullstelle von f. $f = (T - \lambda) \cdot g, \text{Grad}(g) = n - 1 < n$
I.A besitzt g höchstens n - 1 Nullstellen. Jede Nullstelle von f ist entweder λ oder eine Nullstelle von g. $\Rightarrow$ f hat höchstens n Nullstellen.

□

Definition 0.11 – Vielfachheit einer Nullstelle

$f \in K[T], f \neq 0, \lambda \in K$ Nullstelle von f $\Rightarrow f = (T - \lambda)^{K_\lambda} \cdot g, g(\lambda \neq 0$. K_λ ist die Vielfacheit der Nullstelle λ in f.

Definition 0.12

Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom über K positiven Grades eine Nullstelle besitzt.

Beispiele Ist $\mathbb{R}$ algebraisch abgeschlossen? Nein: $T^2 + 1$.
Bem.: $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.
Bemerkung: Jeder algebraisch abgeschlossene Körper muss unendlich sein. Sei $K = \{\lambda_1, \dots \lambda_n\}, f = (T - \lambda), \dots, (T - \lambda_n) + 1$.

Lemma 0.13

K ist genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn jedes Polynom positiven Grades in lineare Faktoren zerfällt.
$f = T(\lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$.

Beweis:

$\Leftarrow$ trivial

$\Rightarrow$ $\text{Grad}(f) = n > 0 \Rightarrow f = (T - \lambda_1) \cdot g, \text{Grad}(g) \leq n - 1 < n \overset{I.A.}{\Rightarrow} f = c(T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$

□

Definition 0.14 – Vektorraum

Vektorraum V über K ist eine abelsche Gruppe $(V, +, 0_V)$ zusammen mit einer Verknüpfung $K \times V \to V$ $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
2. $\lambda(\mu\Big(\Big)\Big) = (\lambda\mu)v$
3. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
4. $1_k v = v$

Definition 0.15 – Unterverktorraum

Ein Untervektorraum $U \subset V$ ist eine Untergruppe, welche unter der Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

Bemerkung: $\{U_i\}_{i\in I}$ Untervektorräume von V $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i$ ist Untervektorraum. Insb. gebenen $M \subset V$ existiert span$(M) =< M >=$ der kleinste Unterraum von V, der M enthält.
span$(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i$, $m_i \in M, \lambda_i \in K, n \in \mathbb{N}$
M ist ein Erzeugendensystem für span(M)
Außerdem gilt:
$\sum_{i\in I} U_i = \text{span}(\bigcup_{i\in I} U_i)$
$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \text{span}(M_1) \subset \text{span}(M_2)$

Definition 0.16 – Lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über K. Dann gilt $v_1, \dots v_n$ sind linear unabhängig falls $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \sum \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ $M \subset V$ ist linear unabhängig, falls jede endliche Teilmenge von M linear unabhängig ist. Äquivalent dazu ist: M ist linear unabhängig, falls kein Element von M sich als Linearkombination der anderen schreiben lässt.

Definition 0.17 – Basis

Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}, v_i \in V$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent und definieren eine Basis:

1. B ist ein lineare unabhängiges Erzeugendensystem von V
2. Jedes Element von V lässt sich eindeutig als Linearkombination der Elemente in B schreiben.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem.
4. B ist maximal lineare unabhängig.

Satz 0.18 – Basisergänzungssatz

Sei $M \subset V$ lineare unabhängig, dann gilt $\exists B \subset V$, und B ist eine Basis welche M entält. Insbesondere hat jeder Vektorraum eine Basis. "Je zwei Basen sind in Bijektion".

Definition 0.19 – Dimension

V ist endlichdimensional, falls V eine endliche Basis besitzt. Sonst ist V unendlichdimensional. Fall V endlichdimensional ist, ist die Dimension von V definert durch:
$dim(V) = |B|$ mit B beliebeige Basis.

Satz 0.20 – Basisauswahlsatz

Sei $M \subset V$ ein Erzeugendensystem von V, dann gilt $\exists B \subset M$ mit B ist eine Basis von V.

Lemma 0.21

Sei $U \subset V$ ein Unterraum, dann gilt $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(U) < \infty$

Lemma 0.22

Die Dimension ist modular: $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

Definition 0.23 – Direktes Produkt von Vektorräumen

$V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow V = U_1 + U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \{0\}$
$V = \oplus_{i\in I} U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i\in I} U_i$ und die Familie ist transversal: $\{U_i\}_{i\in I} \to U_i \cap (\sum_{j\in I} U_j) = \{0\}$

Definition 0.24 – Komplementär

Sei $U \subset V$ ein Unterverktorraum, dann gilt $\exists \hat{U} \subset V : V = U \oplus \hat{U}$.
$\hat{U}$ heißt dann Komplementär zu U.

Beispiele

K^2 ist ein K-VR. $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ist eine Basis.

$U = \text{span}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix})$. $K^2 = U \oplus \text{span}(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$. $K^2 = U \oplus \text{span}(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Definition 0.25 – Lineare Abbildungen

$F : V \to W$ ist linear, falls gilt: $F(\lambda v + \mu u) = \lambda F(v) + \mu F(u)$

Definition 0.26 – Kern und Bild

$\text{Ker}(F) = \{v \in V \ F(v) = 0\}$
$\text{Im}(F) = \{w \in W | \exists v \in V : F(V) = w\}$
$\text{Ker}(F)$ ist ein Untervektorraum von V, $\text{Im}(F)$ ist ein Untervektorraum von W.

Lemma 0.27

Falls B eine Basis von V ist, ist $F(B)$ ein Erzeugendensystem von $Im(F)$. F ist injektiv genau dann wenn $\text{Ker}(F) = \{0\}$.

Lemma 0.28

V endlichdimensional: $dim(V) = dim(Ker(F)) + dim(Im(F))$.
$V/Ker(f) \cong \text{Im}(F)$.

Bemerkung: V, W endlichdimensional, $\{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V $V \cong K^n$, $v_i \mapsto e_i$.

Definition 0.29 – Matrix

Sei $F : V \to W, dim(V) = n, dim(W) = m, \{v_1, \ldots, v_n\}$ Basis von V, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ Basis von W.
$K^n \cong V \xrightarrow{F} W \cong K^m$. Dadurch wird durch F und die beiden Basen eine Abbildung von K^n nach K^m definiert. Diese Diese Abbildung kann durch eine Matrix A dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} \mapsto A\Big(\lambda_1, \vdots \lambda_n\Big)$$

$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$
$F(v_1), \ldots, F(v_n)$

$\begin{pmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm}\end{pmatrix}$ ist die mxn Matrix A.

Definition 0.30 – Rang einer Matrix

$Rg(A) = \dim(\text{span}(\text{Spaltenvektoren})) = \dim(\text{span}(\text{Zeilenvektoren}))$
$F : V \to W$ linear. $Rg(F) = Rg(A) = dim(\text{Im}(F))$, mit A eine beliebige darstellende Matrix von F.

Satz 0.31 – Normalform

Es seien V, W endlichdimensional. Dann existieren Basen $\{v_1, \ldots v_n\}$ von V, $\{w_1, \ldots, w_n\}$ von W, so dass die darstellende Matrix von F der Form $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ist.

Beweis: Sei $U = \text{Ker}(F)$ und $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis von U. Sei U' ein Komplement von U in V $\Rightarrow V = U \oplus U'$. Sei $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis von U'. $B = \{v_1, \dots v_n\}$ ist eine Basis von V. $\text{Im}(F)$ hat $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$ als Basis.
$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i F(v_i) = 0 \Rightarrow F(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) \in U \wedge \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) \in U' \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots \lambda_n = 0$. Ergänze $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$ zu einer Basis $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ von W. $F(v_1), \dots, F(v_r), F(v_{r+1}), \dots, F(v_n)$
$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ □

Definition 0.32 – Invertierbarkeit von Matrizen

$A \in M_{n\times n}(K)$ ist invertierbar, fall es eine Matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ gibt, so dass $A \cdot B = B \cdot A = Id_n$. B wird dann als A^{-1} bezeichnet.
$GL(n, k) = Gl_n(K) = \{A \in M_{n\times n}(K)\text{invertierbar}\}$ ist eine Gruppe.
$A \in GL_k(n) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$ (Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie regulär ist).

Bemerkung: Sei A regulär. Dann besitz ein Gleichungssystem der Form $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ die Eindeutige Lösung, $A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.
Bemerkung: A ist regulär genau dann wenn A sich durch elementare Zeilenoperationen in Id_n überführen lässt.
$E_{i,j}$ sei Die Matrix, die an der Stelle ij 1 ist, ansonsten 0.
Elementare Zeilenoperationen sind:
Multiplikation der Zeile i mit λ: $\text{Id}_n + (\lambda - 1)E_{i,j}$.
Addieren von λ mal der iten Zeilten zur jten: $Id_n + \lambda E_{i,j}$.
Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile: $Id_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{j,i} + E_{i,j}$

Bemerkung: Das inverse einer Matrix lässt sich durch nutzen dieser elementaren Zeilenoperationen nach z.B. dem Gauß-Jordan Verfahren errechnen:
$\left(A \mid Id_n \right) \overset{Zeilenoperationen}{\rightarrow} \left(Id_n \mid A^{-1} \right)$
Die linke Hälfte der Ergebnis Matrix enthält dann A^{-1}, denn:
$B_m \dots B_2 B_1 A = Id_n \Rightarrow B_m \dots B_1 = A^{-1}$

Definition 0.33 – Übergangsmatrizen

Es sei $dim(V) = n$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$, $\{v'_1, \ldots, v'_n\}$ Basen von V. Weiterhin sei $F : V \to V, v_i \mapsto v'_i$. Dann gilt:

$v'_i = \sum_{ij} s_{ij} v_j$ und die darstellende Matrix S von F, $S = \begin{pmatrix} s_{11} & \ldots & s_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \ldots & s_{nm} \end{pmatrix}$ ist regulär.

Definition 0.34

Zwei (mxn) Matrizen A, A' sind äquivalent, falls es reglare matrizen $T \in GL_m(K), s \in GL_n(K)$ gibt, so dass $A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$.
$A, A' \in M_{n \times n}(K)$ sind ähnlich, fall es $S \in GL_n(K)$ gibt, so dass $A' = s^{-1} \cdot A \cdot S$.

Bemerkung: Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $M_{n \times n}(K)$.

Definition 0.35 – Determinante

$detK^n \to K$ ist eine multilineare alternierende Abildung der Art, dass $det(e_1, \ldots, e_n) = 1$.
$A \in M_{n \times n}(K)$
$A = (a_1|a_2| \ldots |a)n) \Rightarrow det(a_1, a_2, \ldots, a_n) = det(A)$.
$A = (a_ij), det(a_ij) = \sum sign(\pi) \cdot \Pi_{i=1}^n a_{\pi(i)i}$ mit $sign(\pi) = -1^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \pi}$ bzw. Anzahl von Faktoren von π als Produkt von Transpositionen.

Eigenschaften von Determinanten:

1. $det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$

2. A ist genau dann invertierbar, wenn $det(A) \neq 0$

3. $\det(A^-1) = det(A)^{-1}$

4. $\det(A^T) = \det(A)$

Bemerkung: $Id_n + (-\operatorname{Id}_n)$ ist nicht invertierbar, also $\exists A, B : det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Satz 0.36 – Laplacescher entwicklkungssats

Sei j_0 ein Spaltenindex
$det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_o} det(A_{j_0 i})$ wobei $A_{j_0 i}$ die Matrix ohne Zeile j_0 und Spalte i ist.

Satz 0.37 – Cramersche Regel

$(a_1| \ldots |a_n) = A, A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Falls A regul—'ar ist, gibt es eine einzige LÓsung zum System: $\lambda_j = \frac{det(a_1, \ldots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \ldots, a_n}{det(A)}$

Definition 0.38 – Determinante eines Homomorphismus

Sei $F : V \to V$. $det(F) = det(A)$ woei A eine Darstellungmatrix von F bezgl. einer Baiss $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Definition 0.39 – Adjunte Matrix

Sei A eine $n \times n$ Matrix, dann ist die Adjunte von A
$\operatorname{adj}(A) = (\gamma_{ij})$ mit $\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}$

Bemerkung: Sei c_i die j-te Zeile von adj(A). Sei weiterhing a_i die i-te Spalte von A.
$\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{jn} \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+n} a_{ki} \det(A_{jk}) \overset{\text{Laplacescher Entw. Satz}}{=} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n) =$
$\begin{cases} \det(A) & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$
Angenommen A ist regulär.
$adj(A) \cdot A = det(A) \cdot Id_n \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A) \cdot A} = \text{Id}_n = A^{-1} \cdot A \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = A^{-1} \Rightarrow A \cdot \text{adj}(A) = det(A) Id_n$

0.1 Diagonalisiserbarkeit

Sei V ein Vektorraum, $\{U_i\}_{i=1}^{k}$ Unterräume von V.
$V = \oplus_{i=1}^{k} U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i=1}^{n} U_i \wedge U_i \bigcap (\sum_{j=1}^{k} U_i) = 0$
Äquivalent dazu ist, dass jeder Vektor $v \in V$ sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren $\cup_{j=i}^{k} B_j$ schreiben lässt, woebi B_j eine Basis von U_i ist.

Definition 0.40 – Eigenwerte und -vektoren

Ein Endomorphismus $F : V \to V$ besitzt einen Eigenvektor, falls es ein $v \in V \setminus \{0\}$, so dass $F(V)\lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in K$. Falls $F(v) = \lambda v$ ist λ eindeutig bestimmt durch F und v. λ ist dann ein Eigenwert von F.

Definition 0.41 – Eigenräume

$\lambda \in K, FV \to V$ Endomorphismus.
$V(\lambda) = \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$, der Eigeneraum zu λ is ein UVR.

Bemerkung: λ ist ein Eigenwet von F gdw, $dim(V(\lambda)) \geq 1$.
Bemerkung: Falls $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von F $\Rightarrow V(\lambda_i) \cap \sum_{j=1, j \neq i}^{k} V(\lambda_j) = \{0\}$

Definition 0.42 – Diagonalisiserbarkeit

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. $F : V \to V$ Endomorphismus. Bzw. eine Matrix $A : K^n \to K^n$.
F ist diagonalisierbar, falls $V = \oplus_{i=1}^{k} V('lb), \lambda$ verschiedene Eigenwerte von F.
Äquivalent dazu, wenn V eine basis von Eigenwerten von F besitzt. Äquivalent dazu, wenn F bezüglich einer Basis von V die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ hat.
Äquivalentz dazu, für Matrizen: A ist diagonalisierbar gdw.es eine reguläre Matrix S gibt, sodaß $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Satz 0.43

$A \in M_{n \times n}(K), \lambda \in K$
λ ist ein Eigenwert von A gdw. $\lambda Id_n - A$ nicht regulär ist. $\Leftrightarrow det(\lambda \cdot Id_n - A) = 0$

Definition 0.44 – Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in M_{nxn}(K)$ ist $\chi_{A(T)} = det(T \cdot Id_n - A)$

Bemerkung: λ ist ein eigenwert von A $\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

Beispiel $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{A(T)} = T^2 + 1 = \det(\begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix})$

Bemerkung: A und A' ähnlich, $A' = s^{-1}AS \Rightarrow \chi_A(T) = \xi_{A'}(T)$. Insebsondere können wir über das charakteritische Polynom eines Endomorphismus reden.
$A \in M_{nxn}(K), \chi_A(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \cdots + b_o$ wobei $b_0 = (-1)^n det(A), b_n - 1 = -Tr(A) = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$

Korollar 0.45

Ein Endomorphismus $F : V \to V$ mit $\dim(V) = n < \infty$ kann höchstens n viele Eigenwerte besizten.

Korollar 0.46

$F : V \to V$ mit $\dim(V) = n < \infty$ mit verschiedenen Eigenwerten $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist diagonalisierbar, gdw. $n = \sum_{i=1}^k d_i, d_i = \dim(V(\lambda_i))$. d_i heißt geometrische Vielfachheit von λ_i.

Beweis:
$\Rightarrow$
F ist diag. gdw. V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, welche aus $\cup_{i=1}^n B_i$ besteht, $|B_I| = di = dim(V\lambda_i)$, $n = |B| = \sum_{i=1}^k |B_i|$
$\Leftarrow$
$n = \sum d_i \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^k (V(\lambda_i))) = n \Rightarrow V = \sum_{i=1}^k (V(lb_i)$ da die Eigenräume tranversal sind, und ein Vektorraum nur einen UVR der dimension dim(V) hat, sich selbst. □

Definition 0.47 – Algebraische Vielfachheit

Es seien $F : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$, $\lambda \in K$ Eigenwert $\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$.
Dann gilt $\chi_F(T) = (T - \lambda)^K G(T)$, $G(\lambda) \neq 0$. k ist die algebraische Vielfachheit von λ, bzw. $\text{ord}_\lambda(F)$.

Bemerkung: $\text{ord}_\lambda(F) \geq \dim(V(\lambda))$

Beweis: Sei $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von $V(\lambda)$. Wir erweitern sie zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_k, v_{K+1}, \ldots, v_n\}$ von V. Die Darstellungsmatrix M von F bzwg. B ist dann
$\{F(v_1), \ldots, F(v_k), F(v_{k+1}), F(v_n)\}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda & C_2 \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

Wobei $C_2 \in Mat_{n-k\times k}(K)$.
$\chi_F(T) = det(TId_n - M) = (T - \lambda)^k \cdot \det(TId_{n-k} \cdot C_1)$
$\Rightarrow \text{ord}_\lambda(F) \geq K$. Wobei $\det(TId_{n-k} \cdot C_1) = 0$ sein kann. □

Lemma 0.48

Sei V endlichdimensional, $F : V \to V$ ein Endomorphismus, U ein F-Invarianter Unterraum $(F(U) \subset U)$. $F' : V/U \to V/U$ ist eine lineare Abbildung, $\bar{V} \mapsto F(\bar{V})$. F' ist woldefiniert, linear und es gilt $\chi_F(T) = \xi_{F|_U}(T) \cdot \xi_{F'}(T)$

Beweis:

F' ist wohldefiniert;

$\bar{v_1} = \bar{v} \overset{zZ}{\Rightarrow} F'(v_1) = F(v)$ $\bar{v_1} = \bar{v} \Rightarrow v_1 = v + (v_1 - v), v_1 - v \in U$

$\Rightarrow F(v_1) = F(v) + F(v_1 - v), F(v_1 - v) \in U \Rightarrow F(\bar{v_1}) = F(\bar{v})$

Restklassen sind linear und F ist linear $\Rightarrow F'$ ist linear.

Sei $\{u_1, \dots, u_k\}$ eine Basis von U. erweitert zu $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ sei sie eine Basis von V.

Bemerkung: $\{\bar{v_{k+1}}, \dots, \bar{v_n}\}$ ist eine Basis von V/U. Bew. Einfach.

Darstellungsmatrix H von F bzgl. B:

$$\begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{pmatrix} & & & \\ A & & & C_2 \\ & & & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & C_1 \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix} \text{mit } A, C_1, C_2 \text{ Matrizen.}$$

$\chi_F(T) = det(TId_n - H) = \det(TId_n - \begin{pmatrix} A & C_2 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix})$

$= \det(\begin{pmatrix} T_i d_k - A & -C_2 \\ 0 & T_I d_{n-k} - C_1 \end{pmatrix}) = \det(T_i d_k - A) \cot det(T_E n - k - C_1)$

A ist die Darstellungsmatrix von $F|_U$ bezüglich $\{u_1, \dots, u_k\} \Rightarrow det(TId_k - A) = \chi_{F|_U}(T)$

C_1 ist die Darstellungmatrixvon F' bzg. $\{\bar{v_{k+1}}, \dots, \bar{v_n}\}$.

$\Rightarrow \det(T \operatorname{Id}_{n-k} - C_1) = \chi_{F'}(T)$ $\square$

Satz 0.49

Sei K ein Körper, $dim(V) < \infty, F : V \to V$ ein Endomorphismus so gilt:

F Diagonalisierbar gdw $\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \dots (T - \lambda_n)^{k_n}$ in Linearfaktoren zerfällt, wobei für jeden Faktor $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $T - \lambda_i$ gilt $\operatorname{ord}_{lb_i}(F) = \dim(V(\lambda_i))$.

Beweis:

$\Rightarrow$

Sei $b = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren. Seien $\lambda_1, \dots \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte. Ordne nun B um so dass

$v_1, \dots, v_{d_1} \in V(\lambda_i), v_{d_1+1}, \dots v_{d_1+d_2} \in V(\lambda_2), \dots, v_{d_1+\dots+d_{r-1}}, \dots v_{d_1+\dots+d_r} \in V(\lambda_r)$ mit $d_i = dim(V(\lambda_i))$.

Die Darstellungsmatrix von F bzgl. B:

$(F(v_1), \dots, F(v_{d_1}), \dots F(v_r)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_r & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Wobei d_i viele λ_i auf der Diagonale sind

$\chi_F(T) = det(T \operatorname{Id}_n - A) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots T(-\lambda_r)^{d_t}$ $((T - \lambda_2)^{d_2} \dots T(-\lambda_r)^{d_t})(\lambda_1) \neq 0 \Rightarrow d_i = \operatorname{ord}_{\lambda_I}(F)$, da die λ_i verschieden sind.

$\Leftarrow$

$\chi_F(T) = (T - \lambda_i)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r}$

F ist diag $\Leftrightarrow n = dim(V) = \sum d_i$ $\square$

Definition 0.50

Eine Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ ist trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist:
$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$

Satz 0.51

$F : V \to V$ ist trigonalisierbar? gdw. $\chi_F(t)$ in Linearfaktoren zerfällt $\chi_F(T) = (T - \lambda_1)\dots(T - \lambda_n)$.

Beweis: $\Rightarrow$ F hat Darstellungsmatrix:
$\begin{pmatrix} a_1 1 & & \\ & a)21 & X \\ & \ddots & \\ 0 & a_{nn} & \end{pmatrix}$
$\chi_F(T) = det(T \cdot Id_n - A) = \Pi_{i=1}^n (T - a_{ii}) \Leftarrow$ Induktion über $n = dim(V)$
$n = 1 \Rightarrow$ Jede 1×1 Matrix ist in oberer Dreiecksform.
$n \geq 2$ $\chi_F(t) = (T - \lambda_1)\dots(T_{\lambda_n})$. λ_1 ist ein Eigenwert $\Rightarrow \exists v_1 \in V\{0\} : F(v_1 0 + \lambda_1 v_1$. $U = \text{span}(v_1) \subset V$ ist F-invariant. Nach Lemma ... gilt $T - \lambda_1)\Pi_{i=2}^n(T - \lambda_n) = xi_F(T) = \chi_{F\_U} \cdot \xi_{F'}, \xi_{F|_U} = (T - \lambda_1)$ $K[T]$ ist ein Integritätsbereich $\Rightarrow \Xi_{F'}(T) = \pi_{i=2}^n(T - \lambda_i), \dim(V/U) < \dim(V)$.
Nach Ia gibt ese eine Basis$\exists(\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ von V/U derart, dass F' bzgl. dieser Basis Darstellungsmatrix
$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\mu_{ij})$ Behauptung: Seien $v_i \in V, \bar{v_i} = \bar{v}_i, 2 \leq i \leq n, \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V.
Bew. Übungsaufgabe.
Frage: Wie sieht die Darstellungmatrix von F bzgl $\{v_1, \dots v_n\}$ aus?
$\sum_{2\leq i\leq j} \mu_{ij}\bar{v_i} = F'(v_j) = F(\bar{v}_j)$
$\sum_{2\leq i\leq j} \mu_{ij}\bar{v_i} = \sum_{2\leq i\leq j} \mu_{ij} v_i \Rightarrow \exists \mu_{ij} \in K / F(v_j) = \mu_{ij} v_1 + \sum_{2\leq i\leq j} \mu_{ij} v_j = \sum_{1\leq i\leq j} \mu_{ij} v_j$
$F(v_1)F(v_2), \dots, F(v_n)$
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_{12} & \lambda_2 & X & \ddots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ □

Korollar 0.52

Jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes über einen algebraisch abgeschlossenen Körper (z.B. $\mathbb{C}$) ist trigonalisierbar.

Lemma 0.53

Sei V endlichdimensional úber ienen Körper K.
$v \in V\backslash\{0\} \exists r \in \mathbb{N} : F^r(v) = sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$ a_i ist eindeutig bestimmt. Insb. ist $U = Span(v, F(v)m \dots, F^{r-1}(v))$ ist F inviariant, hat Basis $v, F(V), \dots, F^{r-1}(v))$
$F \uparrow U$ hat Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 \dots a_0 1 0 \dots \vdots 1 0 a_n \end{pmatrix}$ $\chi_{F\uparrow U}(T) = T^r - a_{r-1}T^{r-1} - \dots - a_0$.

Beweis: $n = \dim(V)$. $\{v, F(v), \dots, F^n(v)\}$ sind lin.abh. Sei r die kleinste natÚrlich Zahl, so dass $\{v, F(v), \dots, F^r(v)\}$ lin. abh sind. Dann sind $\{v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)\}$ linear unabhängig. $\overset{\text{Ausstauschprinzip von r}}{\Rightarrow}$ $F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$ wobei a_i eindeutig bestimmt sind.
$U = \text{span}(v_1, \dots, F^{r-1}(v))$ ist F-invariant. Sei $u \in U, u = \sum_0^{r-1} \mu_i F^i(v)$
$F(u) = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v)$
$= \sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F(i + 1(v) + \mu_{i-1} F^r(v)$ Wobei $F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$.
Beide teile der Summe $\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F(i + 1(v) + \mu_{i-1} F^r(v)$ liegen eindeutig in U, also liegt auch die Summe in

U.
$\{v_1, \dots, F^{r-1}(v)\}$ ist eine Basis von U.
$F(v_1), \dots F(F^{3-1}(v))$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_0 1 & 0 & \vdots 0 & 1 & a_{r-1} \end{pmatrix}$
$\chi_{F|U}(T) = det(TId_r - A) = det(\begin{pmatrix} T & 0 & \dots & -a_0 - 1 & T & -\vdots 0 & -1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$
Laplacsche Entwicklung nach der letzten Spalte: $= (-1)^{r+1}(-a_0) det(\begin{pmatrix} -1 & T \\ 0-1 & \ddots \end{pmatrix}) + (-1)^{r+2}(-a_1) \det(\begin{pmatrix} & T \\ 0-1 & \ddots \end{pmatrix}) +$

$\dots + (-1)^{2r}(T - a_r) \det(\begin{pmatrix} T & \\ -1 & T \\ & -1T \end{pmatrix}) = (-1)^r a_0 (-1)^r + (-1)^{r+1} a_1 T (-1)^{r+1} + \dots + (-1)^{2r}(T - a_1)T^{r-1} =$
$-a_0 - a_1 T - \dots - a_{r-1} T^{r-1} + T^r$ □

Notation:
$P(T) \in K[T], P(T) + \sum_{i=0}^m a_i T^i$, $F : V \to V$ Endomorphismus.
$P(f) : V \to V, v \mapsto \sum_{i=0}^m a_i F^i(v)$
Mit dieser Notation haben wir, dass im vorigen Lemma $\chi_{F|_u}(F) = F^r(v) - \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v) = 0$

Satz 0.54 – Caloy - Hamilton

$F : v \to V$ Homomorphismus
$\chi_F(F)$ ist der 0 Endomorphismus auf V.

Beweis: z.Z. ist dass $\forall v \in V : \chi_F(F)(v) = 0$
$v = 0 \Rightarrow \chi_F(F)(v) = 0$
Ansosnten $v \neq 0$:
$\exists r : U ==$ span$(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v))$ ist F-invariant.
U - F-invariant $\Rightarrow \chi_f = \xi_{F|_U} \cdot \xi_{F'} = \xi_{F'} \cdot \xi_{F|_U}$, $F' : v/U \to V/U, \bar{w} \mapsto F(\bar{w})$.
Aufgabe:
$R(T) = P \cdot Q$
$R(F) = P \circ (Q(F))$ $\chi_F(F)(v) = \xi_{F'} \circ (\xi_{F|_U}(v))$, wobei $\xi_{F|_U}(v) = 0$, also $\xi_F F(v) = 0$. □

Korollar 0.55

$A \in M_{n \times n}(K)$
$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i \Rightarrow A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot A^i = 0$

Satz 0.56

V endlichdimensionaler Vr, $FV \to V$ Endormophismus, Dann existiert genau ein normiertes Plynom kleinsten Grades, m_f, derart, dass $\forall P \in K[T] : m_F|_P \Leftrightarrow P(\tau) = 0$ Insbesondere gilt $m_F(F) = 0$. Das Polynom m_F heißt das Minimalpolynom von F.

Satz 0.57

$F : V \to V$ Endormorphismus, Dann existiert genau ein normiertes Polynom derart, dass $\forall P \in K[T]$ $m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$. Das Polynom $m_F(T)$ heißt das Minimalpolynom von F.

Beweis: Sei $\mathcal{F} = \{P[T]\ textnormmiert | P(F) = 0$als Endomorphis..
Caley - Hamilton: $Xi_F(T) \in \mathcal{F} \neq \emptyset$ Sei $m - F(T) \in \mathcal{F}$ Polynom kleinsten Grades.
Zu zeigen: $\forall P \in K[T] | m_F |_P | leftrightarrow P(F) = 0$

$\Rightarrow$
$m_F|_P \Rightarrow \exists Q \in K[T] : P = Q \cdot m_F$
$P(F) = Q(F) \circ m_F(F), m_F(F) = 0$
$P(F) = 0$
$\Leftarrow$
Sei $P \in K[T], P(F) = 0$. Division mit Rest $\Rightarrow \exists q, r \in K[T] : P = Qm_F + r, \mathrm{Grad}(r) < \mathrm{Grad}(m_F)$
$0 = P(F) = Q(F) \circ m_F(F) + r(F) = r(F) = 0$
$\Rightarrow r(F) = 0$ als Endomorphismus, $\Rightarrow r = 0$. (sonst $\frac{1}{a_{\mathrm{Grad}(T)}} \cdot r(T) \in \mathcal{F}$
Eindeutigkeit:
Angenommen (m'_F würde auch die Bedingungen erfüllen
$m'_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0 \forall P \in K[T]$
$\Leftrightarrow M_F|_{m'_F} \wedge m'_F|_{m_F}$
$m_F = Qm'_F \wedge m'_F = Hm_F$
zu Zeigen $Q = H = 1$. Sowohl m_F, m'_F beide normiert, $\Rightarrow Q, H$ sind normiert.
$m_F = Q \cdot m'_F = QHm_F \wedge K[T]$ Integritätsbereich
$\Rightarrow 1 = QH$
$\mathrm{Grad}(GH) = \mathrm{Grad}(G)\,\mathrm{Grad}(H) = \mathrm{Grad}(1) = 0 \wedge G, H$ normiert
$\Rightarrow G = H = 1 \Rightarrow m_F = m'_F$. $\square$

Frage
$A \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m|_A =$
$\chi_A(T) = T^2 m_A|_{T^2} \Rightarrow m_A = \begin{cases} T \\ T^2 \end{cases} \quad m_A(A) = 0 \Rightarrow m_A \neq T \Rightarrow m_A = T^2$

Lemma 0.58

gegeben $F : V \to V$, V endlich dimensional, F Endormorphismus, dann haben χ_F und m_F dieselben Nullstellen in K.

Beweis: $m_F|_{\chi_F} \Rightarrow \xi_F = Qm_F \Rightarrow \forall \lambda \in K$, falls $m_F(\lambda) = 0 \Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$
Sei $\lambda \in K$"$\chi_F(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von F $\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : F(v) = \lambda v$. Sei $m_F(T) = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i T^i$. $0 = m_F(F)(v) = (F^d + \sum c_i F^I)(v) = F^d(v) + \sum c_i F^i(v) = \lambda^d v + \sum c_i \lambda^i v = (\lambda^d + \sum c_i \lambda^i)v = m_F(\lambda)v \Rightarrow m_F(\lambda) = 0$, da $v \neq 0$. $\square$

Satz 0.59

$F : V \to V$, V endlichdimensional, F endomorphismus ist diagonalisierbar gw. $m|_F$ in lauter paarweise veschiedene Linearfaktoren zerfällt.

Beweis:
$\Rightarrow$ sei F diagonalisierbar. Dann gilt $\chi_F(T) = \pi_{i=1}^k (T\lambda_i)^{d_i}$, mit λ_i Eigenwerte von F. Ausserdem ist $V = \oplus_i V(\lambda_i)$. Sei $v \in V$ bel. Dann gilt $V = \sum_{i=1}^k V_i$ wobei $v_i \in V(\lambda_I)$.
Setze $P(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)$. z.Z. ist $P(T) = m_F(T)$.
$P(F)(v) = \pi_{i=1}^k (F - \lambda_i)(v)$
$= \pi_{i=1}^k (F - \lambda_i)(\sum_{j=1}^k v_j)$
$= \sum_{j=1}^k (\pi_{i=0}^k (F - \lambda_i)(v_j))$
$= \sum_{j=1}^k (F - \lambda_1 Id) \circ \cdots \circ (F - \lambda_{j-1} Id) \circ (F - \lambda_{j+1} Id) \circ \cdots \circ (F - \lambda_k Id) \circ (F - \lambda_j Id)$
$= 0$, da $v_j \in V(\lambda_j)$.

v war beliebei $\Rightarrow P(F) = 0 \in \text{End}(V)$.
Also $m_F|_P \Rightarrow P(T) = Q(T) \cdot m_F(T)$
Aber $m_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{S_i}$, $S_i \geq 1$ und $P(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i) = Q(T)\pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{S_i}$
$\Rightarrow S_i = 1$ für $i = 1, \ldots, k$, sonst wäre der Grad der rechten Seite größ als der Grad der linken.
$\Rightarrow m_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)$.
$\Leftarrow$
Sei $m_F(T) = (T - \lambda_1) \circ \cdots \circ (T - \lambda_k)$, $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$
z.Z. F ist diagonalisierbar. Es genügt zu Zeigen, dass $V = \oplus_i V(\lambda_i)$. Beweis durch Induktion:
Sonderfälle:

1. Sei $\dim(V) = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1) \Rightarrow \lambda_1$ ist Eigenwert von F. Sei v der Eigenvektor zu λ_1 dann folgt $V = \text{span}(v) = V(\lambda_1)$
2. Sei $\dim(V) = n \geq 2$ aber $k = 1$. $\Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1)$. Nach Def von m_F gilt $m_F(F) = 0 \Rightarrow F - \lambda_1 = 0 \in \text{End}(V)$. Für alle $v \in V$ gilt $(F - \lambda_1)(v) = 0 \Rightarrow F(v) = \lambda_1 v \Rightarrow V = V(\lambda_1)$

Induktionsanahme: Der Satz gilt für den Fall $\dim(V) < n, n \in \mathbb{N}$. Also sei $\dim(V) = n \geq 2, k \geq 2$.
Zunächst zeigen wir: Behauptung (1): $V = \text{Ker}(F - \lambda_1 Id) \oplus \text{Im}(F - \lambda_1 Id)$. Idee: Zeige dass $\text{Ker}(F - \lambda_1 Id) = V(\lambda_1), \text{Im}(F - \lambda_1 Id) = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_K)$
Bew.:
Sei $R(T) = \Pi_{i=2}^k (T - \lambda_i) \Rightarrow m_F(T) = R(T)(T - \lambda_1)$.
Division mit Rest: $\exists Q(T), r \in K$, so dass:
$R(T) = Q(T)(T - \lambda_1) + r$
$0 \neq R(\lambda_1) = 0 + r \Rightarrow r \neq 0 \in K$
Sei $v \in V$ bel, $R(F)(v) = Q(F)(F - \lambda_1)(v) r \cdot v$
$\Rightarrow v = \underbrace{\frac{1}{r} R(F)}_{\in \text{Ker}(F - \lambda_1)} + \underbrace{(F - \lambda_1) \cdot (-\frac{1}{r} Q(F)(V))}_{\in \text{Im}(F - \lambda_1)}$
$(F - \lambda_1)(R(F)(v) = m_F(F) v = 0 \Rightarrow \frac{1}{r} R(F) \in \text{Ker}(F - \lambda_1)$
$\Rightarrow V = \text{Ker}(F - \lambda_1) + \text{Im}(F - \lambda_1)$.
Zu zeigen ist nun noch, dass die Summe direkt ist. $\Leftrightarrow \text{Ker}(F - \lambda_1) \cap \text{Im}(F - \lambda_1) = \{0\}$.
Sei $v \in \text{Ker}(F - \lambda_1) \cap \text{Im}(F - \lambda_1) \Rightarrow v = (F - \lambda_1)(w), w \in V$
$R(f)(v) = Q(F)(F - \lambda Id)(v) + r \cdot v$
$m_F(F) = (R(F) \cdot (F - \lambda_1))(w) = Q(f)\underbrace{(f \lambda_1 Id) v}_{=0} + rv \Rightarrow rv = 0, r \neq 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow V = \text{Ker}(F - \lambda_1 Id) \oplus (\text{Im}(F - \lambda_1 Id)$
Setze $W = \text{Im}(F - \lambda_1)$ (W ist UVR von V mit $\dim(W) < \dim(V)$.
Behauptung (2): W ist F-invariant:
Set $v \in W$ beliebeig $\Rightarrow v = (F - \lambda_1)(w), w \in V \Rightarrow F(v) = F \circ (F - \lambda_1)(w) = (F - \lambda_1) \circ (\underbrace{F(w)}_{\in V}) \in W$
Setze $F' = F|_W \in End(W)$.
Beh. (3): $m_{F'}(T) = \Pi_{i=2}^k (T - \lambda_i)$ $(= R(T))$.
Sei $v \in W$ bel. $\Rightarrow v = (F - \lambda_1)(w), w \in V$
$\Rightarrow R(F')(v) = \underbrace{(R(F) \circ (F - \lambda_1))}_{m_F(F)=0}(w)$
$\Rightarrow R(F') = 0 \in \text{End}(W)$
$\Rightarrow m_{F'}|_R$
$\Rightarrow R(T) = H(T) \cdot m_{F'}(T)$
Es gilt auch $0 = \underbrace{m_{F'}(F')}_{=0} \circ (F - \lambda_1)(v)$
$\Rightarrow m_{F'} \circ (F - \lambda_1) = 0 \in \text{End}(V)$
$\Rightarrow m_F(T)|_{m_{F'}(T) \cdot (T - \lambda_1)} \Rightarrow m_{F'(T)}(T - \lambda_1 = Q(T) \cdot (m_F(T))$
$= Q(T)R(T)(T - \lambda_1)$

$\Rightarrow m_{F'}(T) = Q(T) \cdot R(T) = Q(T)H(T)m_{F'}(T)$
$\Rightarrow Q(T) = H(T) = 1$, ansonsten wäre der Grad links und rechts verschieden
$R(T) = m_{F'}(T)$

$\overset{\text{IA}}{\Rightarrow} W = \oplus_{i=2}^{k} W(\lambda_i)$, mit $W(\lambda_i)$ Eigenraum von F' zu λ_i.
$\Rightarrow V = V(\lambda_1) \oplus_{i=2}^{k} W(\lambda_i)$
z.Z. $W(\lambda_i) = V(\lambda_i)$. Dann gilt $V = \oplus_{i=1}^{k}(V(\lambda_i))$.
Es gilt $W(\lambda_i) = \{w \in W : F'(W) = \lambda_I w\}$
$\subseteq \{v \in V : F(v)\ \lambda_i v\} = V(\lambda_i)$
Sei $i > 1, v \in V(\lambda_i)$. $\Rightarrow F(v) = \lambda_i v$. Setze $w = \frac{1}{\lambda_i - l_1} v \in V(\lambda_i)$. $\Rightarrow F(w) - \lambda_1 w = v \Rightarrow v \in Im(F - \lambda_1) = W$.
$\Rightarrow v \in \oplus_{j=2}^{k}(W(\lambda_j) \Rightarrow v \in W(\lambda_i)$, da $v = \sum \alpha_j w_j$ für $w_j \in W(\lambda_j), \alpha_j \in K$ Aber die Summe der $V(\lambda_J)$ ist direkt und $v \in V(\lambda_i)$, damit kann nur α_i nicht 0 sein, damit ist $v = \alpha_i w_i \Rightarrow w \in W(\lambda_i)$

□

Bemerkung: $A \in Mat_{n \times n}(K) : A^2 = Id_n \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar.

$$A^2 = Id_n \Rightarrow (T^{-}1)(A) = 0 \Rightarrow m_F|_{T^2-1} m_A = \begin{cases} T^2 - 1 = (T-1)(T+1) \\ T - 1 \\ T + 1 \end{cases}$$

Jordansche Normalform

Lemma 0.60

$F : V \to V$ Endomorphismus, $U \subset V$, dann ist U F-invariant gdw. $U(F - \lambda Id$-invariant ist $\forall \lambda \in K$.

Beweis: Übungsblatt 4 □

Beispiel

$F : V \to V, F \neq 0$ Endomorphismus, derart, dass $F^m = 0$ als Endomorphismus und $m > 0$ minimal (F ist nilpotent). $F^{m-1} \neq 0 \Rightarrow v \in V : F^{m-1}(v) \neq 0$. $\{v, F(v), \ldots, F^{m-1}(v)\}$ ist linear unabhängig. Ergänze sie zu einer Basis B von V. $B = \{v, F(v), \ldots, F^{m-1}(v), \cdots v_n$.
$F^{m-1}(v), \ldots F(v), v, \ldots v_n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & \vdots & 0 & \\ 0 & \ldots & & * \end{pmatrix}$$

Definition 0.61 – Hauptraum

Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $F : V \to V$, V endlichdimens..
$V(\lambda) = \text{Ker}(F - \lambda)$ Eigenraum von F bzgl λ.
$\text{Ker}(F - \lambda) \subset \ker(F - \lambda)^2 \subset \ldots$
$\cup_{n \in \mathbb{N}} \ker(F - \lambda)^n$ ist der Hauptraum von F bzgl. λ.
Bemerkung: V_λ ist ein Unterraum und V_λ ist F-invariant, da V_λ $(F - \lambda)$-invariant ist.
Bemerkung: Falls $\text{Ker}(F - \lambda) = V(\lambda) = 0$ ist $\cup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(F - \lambda)^n = 0$.

Lemma 0.62

Seien $\lambda_1 \ldots \lambda_k$ verschiedene Elemente aus K. $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j=1 j \neq i}^{k} V_{\lambda_j} = \{0\}$.

Beweis: $V_{\lambda_j} = (F - \lambda_j)$ invariant $\Rightarrow V_{\lambda_j}$ ist F-invariant $\Rightarrow (F - \lambda_i$ invariant.

Wir wollen zuerst zeigen, dass $F - \lambda_i \uparrow V_{\lambda_j}$ ein Automorphismus ist falls $i \neq j$.

$\Rightarrow$ es genügt zu zeigen, dass $F - \lambda_i$ injektiv auf V_{λ_j} ist.

Sei $w \in V_{\lambda_j} \setminus \{0\} \Rightarrow m \in \mathbb{N}$ kleinstmöglich, $F - \lambda_J)^m(w) = 0 \Rightarrow (F - \lambda_j)^{m-1}(w) \neq 0 \Rightarrow ((F - \lambda_j)^{m-1}((\lambda_i - \lambda_j)(w)) \neq 0$

Sei $0 \neq (F - \lambda)j)^{m-1}(F(w) - \lambda_j w - (F(w) - \lambda_i w)) \Rightarrow (F - \lambda_i)^m(w) + (F - \lambda_j)^{m-1} \circ (F - \lambda_i)(w) \Rightarrow (F - \lambda_i)(w) \neq 0$.

Insebsondere is jede Potez $F - \lambda_i^k$ ein Automorphismus von V_{λ_j}. $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j=1, j\neq i}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$ $v \in V_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}$
$v = \sum_{j \neq i} v_j \in V_{\lambda_j} \Rightarrow existsm_j$ kleinstes $F(-\lambda_J)^{m_j}(v_j) = 0$

$(F - \lambda_i)^{m_i} \circ \cdots \circ (F - \lambda_{i-1}^m i - 1 \circ (F - \lambda_{i-1}^{m_{i+1}} \ldots (F - \lambda_k)^{m_k}$ ist eine Automorphismus von V_{λ_i}. Sie dieser automorph. H. $H(v) = \sum_{j \neq i}(H(v_j) = \sum_{j \neq i}(F - \lambda 1)^{m_1} \circ \cdots \circ (F - \lambda_j)^{m_j}(v_j), F - \lambda_j)^{m_j}(v_j) = 0 \Rightarrow H(v) = 0 \Rightarrow v = 0$. □

Lemma 0.63

Sei $\lambda \in K$. $\dim(V_\lambda) = ord_\lambda(\chi_F)$. Ferner hat $F \uparrow V_\lambda$ hat Matrixdarstellung der der Form $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

Beweis: Sei $k = \text{ord}_\lambda(\chi_F(T))$. $\chi_F(T) = (T - \lambda)^k \cdot G(T)$ wobei $G(\lambda) \neq 0$.

Behauptung: es gibt einen F-invarianten Unterraum U von V der Dimension k so dass $F \uparrow U$ hat Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

Falls $n = 0 \Rightarrow$ klar. OBdA. ist $k \geq 1$. Wir beweisen die Begauptung mit Induktion auf $n = \dim(V)$.

$n = 1$

$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : F(v) = \lambda v$

$\Rightarrow V = \text{span}(v) = U$

$n \geq 2$

$\Rightarrow$ lambda is ein Eigenwert

$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} F(v) = \lambda v, U_0 = \text{span}(v) \Rightarrow \dim(U) = 1 \wedge$ F-invariant $\Rightarrow \hat{F} : V/U_0 \to V/U_0, \bar{W} \mapsto F(\bar{w}), (T - \lambda)(T - \lambda)^{k-1} \cdot Q(T) = \chi_F(T) = \underbrace{\chi_{F\uparrow U}(T)}_{=(T-\lambda)} \cdot \chi_{\hat{F}}(T)$

$\Rightarrow \chi_{\hat{F}}(T) = (T - \lambda)^{k-1} \cdot Q(T), Q(\lambda) \neq 0$

Nach Ia. existiert ein $\hat{F}$-invarianter Unterraum $\hat{U} \subset V/U_0$ der Dimension n-1, so dass die Matrixdartstellung von $\hat{F}$ der Form $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ ist. Sei $\bar{v_2}, \ldots, \bar{v_k}$ eine Basis von $\hat{U}$ so dass die Darstellungsmatrix von $\hat{F}$ bzgl. $\{v_2, \ldots, \bar{v}_k\}$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ sind linear unabhängig. $U = \text{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ hat Dimension k. U ist F-invariant, $F(\sum_{i=1}^k \mu_I v_i) = \sum \mu_i F(v_i) = \mu_i \lambda v_i + \sum_{i=2}^k \mu_i \underbrace{F(v_i)}_{=\sum_{j \leq i} a_{ji} v_i} \in U$

Zu zeigen ist nun dass $U = V_\lambda$. $U \subset V_\lambda : \chi_{F\uparrow U} = (T - \lambda)^k \overset{\text{Caley-Hamilton}}{\Rightarrow} (F - \lambda)^k = 0$ auf U

$\Rightarrow U \subseteq \text{Ker}(F - \lambda)^k$

Falls $U \subsetneq V_\lambda$

$\Rightarrow \dim(V_\lambda) \geq 1$.
$(T-\lambda)^K \cdot G(T) = \chi_F(T) = \chi_{F\uparrow U}(T) \cdot \chi_{\hat{F}}(T) \Rightarrow \chi_{hatF}(T) = G(T)$ aber $G(\lambda) \neq 0$.
λ ist kein Eigenwert von $\hat{F}$. $\Rightarrow$ der Hauptraum von $\hat{F} : V/u \to V/u$ ist trivial.
Sei $w \in V_\lambda$
$\Rightarrow \exists s \in N : (F-\lambda)^s(w) = 0 \Rightarrow (F-\lambda)^s(\bar{(}w)) = 0$
$\Rightarrow \bar{w} = 0 \Rightarrow w \in U$. □

Definition 0.64

Ein Endormorphismus $F : V \to V$ heißt bilpotent, falls es eine nat. Zahl m gibt, so dass $F \circ \cdots \circ F = F^m = 0$ auf V ist.

Lemma 0.65

Sei $F; V \to V$. Folgende Ausagen sind äquivalent:

1. F ist nilpotent
2. $\forall c \in V\ Exists m_v \in \mathbb{N} F^{m_v}(v) = 0$
3. Es existiert eine Basis von V, so dass F Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$
4. $\chi_F(T) = T^n$

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$ trivial.

$2 \Rightarrow 3$ Induktion auf $n = \dim(V)$. Sei $v \in V \setminus \{0\}$
$\Rightarrow \exists m_V \in \mathbb{N}$ kleinztest $F^{m_v}(v) = 0$
$\Rightarrow m_v \neq 0$
$\Rightarrow f_{m_v-1}(v) = neq0$
$\Rightarrow V = \text{span}(F^{m-1}(v))$
Ferner
$F(F^{m_v-1}(v)) = 0$
$\Rightarrow$ Darstellungsmatrix bzg. $\{F^{m_v-1}(v)\}$ ist (0).
$n \geq 2$
Sei $v_1 \in V \setminus \{0\}$ so dass $F(v_1) = 0$
$\Rightarrow U = \text{span}(v_1)$ ist F-invariant.
$\Rightarrow \hat{f} = \underbrace{V/U}_{\dim = n-1} \to V/U$
ach I.A. existiert eine Basis $\{\bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$, so dass die Darstellungsmatrix von $\hat{F}$ die Form $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ hat.

Die Familie $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ist eine Familie von V und F hat Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$3 \Rightarrow 4$ $\chi_F(T) = det(T \cdot Id_B - (\begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} T & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & T \end{pmatrix} = T^n$

$4 \Rightarrow 1$ Caley-Hamilton: $F^n = \chi_F(F) = 0$

$\square$

Satz 0.66 – JORDAN-CHARVALLERY

Sei $F : V \to V$ Endomorphismus, V endl. dim. Fakks $\chi_F(T)$ in Linearfaktoren zerfällt dann ist $V = \oplus_i^k V_{\lambda_i}$ mit λ_i verschiedene Eigenwerte. F hat dann eine Blockmatrix als Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix} \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Insbseondere ist $F = G + H$ mit G ist diagonalisierbar und H ist nilpotent, und $G \cdot H = H \cdot G$.

Beweis: $\chi_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$, λ_i verschieden.
$\dim(V) = \text{Grad}(\chi_F(T)) = n = \sum)i = 1_u^k nderset{=} \dim(V_{\lambda_i} d_i$.
$\dim(\sum_{i=1}^k V_{\lambda_I}) = \sum d_i = b = \dim(V)$ da die Haupträume transversal sind.
$\Rightarrow V = \oplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$
V besitzt eine Bais B, welche aus der Vereinigung der Basen der v_{λ_i} besteht. F wird durch $F \uparrow V_{\lambda_1}, \ldots, F \uparrow V_{\lambda_K}$ bestimmt. Die einzelnen $F \uparrow V_{\lambda_I}$ habe Matrixdarstellungen $A_I = \begin{pmatrix} \lambda_i & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_I \end{pmatrix}$ Die Darstellungsmatrix von F ist dann

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}.$$

Sei $G : V \to V$ $G \uparrow V_{\lambda_I} =$ Multiplkation mit λ_i. G hat diagonale Matrixdarstellung zgl. der Basis B :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Setze $H = F - G$. Die Darstellungsmatrix von H bzgl. B ist

$$\begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{H ist nilpotent.}$$

z. Zeigen $GH = HG$
Beachte, dass jedes V_{λ_i} G-invariant ist. Damit ist V_{λ_i} H-invariant.
Es genügt zu zeigen, dass $GH = HG$ auf V_{λ_i}. Sei $w \in V_{\lambda_i}$: $H(G(W)) = H(\lambda_i w) = \lambda_i H(w) = G(H(w))$. $\square$