

---

# Lineare Algebra II

---

Inoffizieller Mitschrieb

Stand: 15. Mai 2018

*Vorlesung gehalten von:*

Prof. Dr. Amador Martín-Pizarro  
Abteilung für Angewandte Mathematik  
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

# 0. Recap

## Definition 0.1 – RING

Ein (kommutativer) Ring (mit Einselement) ist eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen  $+$ ,  $\cdot$ , derart, dass:

- $(R, +)$  ist eine abelsche Gruppe
- $(R, \cdot)$  ist eine kommutative Halbgruppe
- die Distributivgesetze:  
 $a(x + y) = ax + ay$   
 $(x + y)z = xz + yz$

## Definition 0.2 – INTEGRITÄTSBEREICH

Ein Integritätsbereich ist ein Ring ohne Nullteiler. Also  $\forall x, y \in R : x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

## Definition 0.3 – KÖRPER

Ein Körper ist ein Ring der Art, dass

1.  $1 \neq 0$
2.  $\forall x \in K : x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} : xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

*Bemerkung:* Körper sind Integritätsbereiche.

## Definition 0.4 – CHARAKTERISTIK

Sei  $R$  ein nicht trivialer Ring ( $0 \neq 1$ ).  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow R, z \mapsto \begin{cases} \sum_{i=1}^n 1 & n \geq 0 \\ -\sum_{i=1}^n 1 & \text{ansonsten} \end{cases}$

Dann ist  $\varphi$  ein Ringhomomorphismus.

Für den Kern von  $\varphi$  ( $\text{Ker}(\varphi)$ ) gibt es zwei Möglichkeiten.

1.  $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}, p = 0$
2.  $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$ . Dann gibt es ein kleinstes echt positives Element  $p \in \text{Ker}(\varphi)$ .

$R$  hat dann Charakteristik  $p$  ( $\text{Char}(R) = p$ ). Falls  $R$  ein Integritätsbereich ist, dann ist  $p$  eine Primzahl.

### Beispiele:

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \dots, \bar{n}\}$  hat Charakteristik  $n$ .

Insbesondere enthält jeder Körper mit Charakteristik  $p$  eine "Kopie" von  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ :

$K$  hat Charakteristik  $p \Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{injectiv}} K$ .

Hier ist  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  ein Körper:

$a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow$  es ist  $a$  mit  $p$  teilerfremd.  $1 = a \cdot b + p \cdot m \Rightarrow \bar{1} = \bar{a} \cdot \bar{b}$ .

## Definition 0.5 – POLYNOMRING

Sei  $K$  ein Körper. Der Polynomring  $K[T]$  in einer Variable  $T$  über  $K$  ist die Menge formeller Summen der Form:

$$f = \sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i, n \in \mathbb{N}$$

Der Grad von  $f \in K[T]$  ist definiert als:

$$\text{Grad}(f) := \max\{m \mid m < n \wedge a_m \neq 0\}$$

$$\text{Grad}(0) := -1$$

Falls  $\text{Grad}(f) = n$  und  $n = 1$  heißt das Polynom normiert.

Die Summe und das Produkt von Polynomen sind definiert als:

$$\sum_{i=0}^n a_i T^i + \sum_{j=0}^m b_j T^j := \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) T^k$$

$$\sum_{i=0}^n a_i T^i \cdot \sum_{j=0}^m b_j T^j := \sum_{k=0}^{m+n} c_k T^k, c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

*Bemerkung:*  $K[T]$  ist ein Integritätsbereich.

### Korollar 0.6

Es seien  $f, g$  beide  $\neq 0$

$$\Rightarrow \text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \Rightarrow f \cdot g \neq 0$$

$$\text{Grad}(f + g) \leq \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$$

### Satz 0.7 – DIVISION MIT REST

Gegeben  $f, g \in K[T], \text{Grad}(g) > 0$ . Dann existieren eindeutige Polynome  $q, r$ , so dass  $f = gq + r$ , wobei  $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(g)$ .

**Beweis:** Eindeutigkeit: Angenommen  $f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r', q \neq q' \vee r \neq r'$ .

$$\Rightarrow g(q - q') = r' - r \Rightarrow \text{Grad}(r' - r) = \max(\text{Grad}(r'), \text{Grad}(r)) < \text{Grad}(g) = \text{Grad}(g(q - q')) \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

$$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r' \text{ Existenz: Induktion auf } \text{Grad}(f)$$

$$\text{Grad}(f) = 0 \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$$

$$\text{Grad}(f) = n + 1$$

$$\text{Grad}(f) < \text{Grad}(g) = m \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$$

$$\text{OBdA. } n + 1 = \text{Grad}(f) \geq \text{Grad}(g) = m > 0$$

$$f = a_{n+1} \cdot T^{n+1} + \hat{f}, \text{Grad}(\hat{f}) \leq n, a_{n+1} \neq 0$$

$$\text{Sei } f' = f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g \Rightarrow \text{Grad}(f') \leq n \text{ Ia: } f' = g \cdot q' + r', \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g)$$

$$f' = f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g \Rightarrow f = g(b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} + q') + r' \Rightarrow \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g) \quad \square$$

### Definition 0.8 – POLYNOM TEILT

$$f, g, q \in K[T], \text{Grad}(g) > 0$$

$$g \text{ teilt } f = g|_f \Leftrightarrow f = g \cdot q$$

### Definition 0.9 – NULLSTELLEN VON POLYNOMEN

$$f \in K[T] \text{ besitzt eine Nullstelle } \lambda \in K \text{ gdw. } (T - \lambda)|_f \Leftrightarrow f(\lambda) = 0.$$

$$f \text{ lässt sich dann schreiben als } f = (T - \lambda)q + r.$$

### Lemma 0.10

$$f \in K[t], f \neq 0, \text{Grad}(f) = n \Rightarrow f \text{ besitzt höchstens } n \text{ Nullstellen in } K.$$

**Beweis:**

$$n = 0 \Rightarrow f = a_0, a_0 \neq 0$$

$n > 0$  Falls  $f$  keine Nullstellen in  $K$  besitzt  $\Rightarrow$  ok!

Sonst, sei  $\lambda \in K$  eine Nullstelle von  $f$ .  $f = (T - \lambda) \cdot g$ ,  $\text{Grad}(g) = n - 1 < n$

I.A besitzt  $g$  höchstens  $n - 1$  Nullstellen. Jede Nullstelle von  $f$  ist entweder  $\lambda$  oder eine Nullstelle von  $g$ .  $\Rightarrow f$  hat höchstens  $n$  Nullstellen.

□

**Definition 0.11** – VIELFACHHEIT EINER NULLSTELLE

$f \in K[T]$ ,  $f \neq 0$ ,  $\lambda \in K$  Nullstelle von  $f \Rightarrow f = (T - \lambda)^{K_\lambda} \cdot g$ ,  $g(\lambda) \neq 0$ .  $K_\lambda$  ist die Vielfachheit der Nullstelle  $\lambda$  in  $f$ .

**Definition 0.12**

Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom über  $K$  positiven Grades eine Nullstelle besitzt.

**Beispiele** Ist  $\mathbb{R}$  algebraisch abgeschlossen? Nein:  $T^2 + 1$ .

Bem.:  $\mathbb{C}$  ist algebraisch abgeschlossen.

*Bemerkung:* Jeder algebraisch abgeschlossene Körper muss unendlich sein. Sei  $K = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ,  $f = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n) + 1$ .

**Lemma 0.13**

$K$  ist genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn jedes Polynom positiven Grades in lineare Faktoren zerfällt.

$$f = T(\lambda_1) \dots (T - \lambda_n).$$

**Beweis:**

$\Leftarrow$  trivial

$$\Rightarrow \text{Grad}(f) = n > 0 \Rightarrow f = (T - \lambda_1) \cdot g, \text{Grad}(g) \leq n - 1 < n \stackrel{\text{I.A.}}{\Rightarrow} f = c(T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

□

**Definition 0.14** – VEKTORRAUM

Vektorraum  $V$  über  $K$  ist eine abelsche Gruppe  $(V, +, 0_V)$  zusammen mit einer Verknüpfung  $K \times V \rightarrow V$   $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$  die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1.  $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
2.  $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
3.  $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
4.  $1_K v = v$

**Definition 0.15** – UNTERVEKTORRAUM

Ein Untervektorraum  $U \subset V$  ist eine Untergruppe, welche unter der Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

*Bemerkung:*  $\{U_i\}_{i \in I}$  Untervektorräume von  $V \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i$  ist Untervektorraum. Insb. gegeben  $M \subset V$  existiert  $\text{span}(M) = \langle M \rangle$  der kleinste Unterraum von  $V$ , der  $M$  enthält.

$$\text{span}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i, m_i \in M, \lambda_i \in K, n \in \mathbb{N}$$

$M$  ist ein Erzeugendensystem für  $\text{span}(M)$

Außerdem gilt:

$$\sum_{i \in I} U_i = \text{span}(\bigcup_{i \in I} U_i)$$

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \text{span}(M_1) \subset \text{span}(M_2)$$

### Definition 0.16 – LINEARE UNABHÄNGIGKEIT

Sei  $V$  ein Vektorraum über  $K$ . Dann gilt  $v_1, \dots, v_n$  sind linear unabhängig falls  $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \sum \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ .  $M \subset V$  ist linear unabhängig, falls jede endliche Teilmenge von  $M$  linear unabhängig ist. Äquivalent dazu ist:  $M$  ist linear unabhängig, falls kein Element von  $M$  sich als Linearkombination der anderen schreiben lässt.

### Definition 0.17 – BASIS

Sei  $B = \{v_1, \dots, v_n\}, v_i \in V$ . Die folgenden Aussagen sind äquivalent und definieren eine Basis:

1.  $B$  ist ein lineares unabhängiges Erzeugendensystem von  $V$
2. Jedes Element von  $V$  lässt sich eindeutig als Linearkombination der Elemente in  $B$  schreiben.
3.  $B$  ist ein minimales Erzeugendensystem.
4.  $B$  ist maximal linear unabhängig.

### Satz 0.18 – BASISERGÄNZUNGSSATZ

Sei  $M \subset V$  linear unabhängig, dann gilt  $\exists B \subset V$ , und  $B$  ist eine Basis welche  $M$  enthält. Insbesondere hat jeder Vektorraum eine Basis. "Je zwei Basen sind in Bijektion".

### Definition 0.19 – DIMENSION

$V$  ist endlichdimensional, falls  $V$  eine endliche Basis besitzt. Sonst ist  $V$  unendlichdimensional. Fall  $V$  endlichdimensional ist, ist die Dimension von  $V$  definiert durch:

$$\dim(V) = |B| \text{ mit } B \text{ beliebige Basis.}$$

### Satz 0.20 – BASISAUSWAHLSATZ

Sei  $M \subset V$  ein Erzeugendensystem von  $V$ , dann gilt  $\exists B \subset M$  mit  $B$  ist eine Basis von  $V$ .

### Lemma 0.21

Sei  $U \subset V$  ein Unterraum, dann gilt  $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(U) < \infty$

### Lemma 0.22

Die Dimension ist modular:  $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

### Definition 0.23 – DIREKTES PRODUKT VON VEKTORRÄUMEN

$$V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow V = U_1 + U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$V = \bigoplus_{i \in I} U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i \in I} U_i \text{ und die Familie ist transversal: } \{U_i\}_{i \in I} \rightarrow U_i \cap (\sum_{j \in I} U_j) = \{0\}$$

### Definition 0.24 – KOMPLEMENTÄR

Sei  $U \subset V$  ein Untervektorraum, dann gilt  $\exists \hat{U} \subset V : V = U \oplus \hat{U}$ .  
 $\hat{U}$  heißt dann Komplementär zu  $U$ .

### Beispiele

$K^2$  ist ein K-VR.  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ist eine Basis.

$$U = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), K^2 = U \oplus \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), K^2 = U \oplus \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

### Definition 0.25 – LINEARE ABBILDUNGEN

$F : V \rightarrow W$  ist linear, falls gilt:  $F(\lambda v + \mu u) = \lambda F(v) + \mu F(u)$

### Definition 0.26 – KERN UND BILD

$$\text{Ker}(F) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$$

$$\text{Im}(F) = \{w \in W \mid \exists v \in V : F(v) = w\}$$

$\text{Ker}(F)$  ist ein Untervektorraum von  $V$ ,  $\text{Im}(F)$  ist ein Untervektorraum von  $W$ .

### Lemma 0.27

Falls  $B$  eine Basis von  $V$  ist, ist  $F(B)$  ein Erzeugendensystem von  $\text{Im}(F)$ .  $F$  ist injektiv genau dann wenn  $\text{Ker}(F) = \{0\}$ .

### Lemma 0.28

$V$  endlichdimensional:  $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(F)) + \dim(\text{Im}(F))$ .

$$V/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(F).$$

*Bemerkung:*  $V, W$  endlichdimensional,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ ,  $V \cong K^n$ ,  $v_i \mapsto e_i$ .

### Definition 0.29 – MATRIX

Sei  $F : V \rightarrow W$ ,  $\dim(V) = n$ ,  $\dim(W) = m$ ,  $\{v_1, \dots, v_n\}$  Basis von  $V$ ,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  Basis von  $W$ .

$K^n \cong V \xrightarrow{F} W \cong K^m$ . Dadurch wird durch  $F$  und die beiden Basen eine Abbildung von  $K^n$  nach  $K^m$  definiert. Diese Abbildung kann durch eine Matrix  $A$  dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

$$F(v_1), \dots, F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ist die } m \times n \text{ Matrix } A.$$

### Definition 0.30 – RANG EINER MATRIX

$$\text{Rg}(A) = \dim(\text{span}(\text{Spaltenvektoren})) = \dim(\text{span}(\text{Zeilenvektoren}))$$

$F : V \rightarrow W$  linear.  $\text{Rg}(F) = \text{Rg}(A) = \dim(\text{Im}(F))$ , mit  $A$  eine beliebige darstellende Matrix von  $F$ .

### Satz 0.31 – NORMALFORM

Es seien  $V, W$  endlichdimensional. Dann existieren Basen  $\{v_1, \dots, v_n\}$  von  $V$ ,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ , so dass

die darstellende Matrix von  $F$  der Form 
$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$
 ist.

**Beweis:** Sei  $U = \text{Ker}(F)$  und  $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$  eine Basis von  $U$ . Sei  $U'$  ein Komplement von  $U$  in  $V \Rightarrow V = U \oplus U'$ . Sei  $\{v_1, \dots, v_r\}$  eine Basis von  $U'$ .  $B = \{v_1, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V$ .  $\text{Im}(F)$  hat  $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$  als Basis.

$\sum_{i=1}^n \lambda_i F(v_i) = 0 \Rightarrow F(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in U \wedge \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in U' \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Ergänze  $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$  zu einer Basis  $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$  von  $W$ .  $F(v_1), \dots, F(v_r), F(v_{r+1}), \dots, F(v_n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

□

### Definition 0.32 – INVERTIERBARKEIT VON MATRIZEN

$A \in M_{n \times n}(K)$  ist invertierbar, falls es eine Matrix  $B \in M_{n \times n}(K)$  gibt, so dass  $A \cdot B = B \cdot A = Id_n$ .  $B$  wird dann als  $A^{-1}$  bezeichnet.

$GL(n, K) = GL_n(K) = \{A \in M_{n \times n}(K) \mid A \text{ invertierbar}\}$  ist eine Gruppe.

$A \in GL_n(K) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$  (Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie regulär ist).

**Bemerkung:** Sei  $A$  regulär. Dann besitzt ein Gleichungssystem der Form  $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$  die eindeutige

Lösung,  $A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ .

**Bemerkung:**  $A$  ist regulär genau dann wenn  $A$  sich durch elementare Zeilenoperationen in  $Id_n$  überführen lässt.

$E_{i,j}$  sei die Matrix, die an der Stelle  $ij$  1 ist, ansonsten 0.

Elementare Zeilenoperationen sind:

Multiplikation der Zeile  $i$  mit  $\lambda$ :  $Id_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$ .

Addieren von  $\lambda$  mal der  $i$ -ten Zeile zur  $j$ -ten:  $Id_n + \lambda E_{i,j}$ .

Vertauschung der  $i$ -ten und  $j$ -ten Zeile:  $Id_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{j,i} + E_{i,j}$

**Bemerkung:** Das Inverse einer Matrix lässt sich durch Nutzen dieser elementaren Zeilenoperationen nach z.B. dem Gauß-Jordan Verfahren errechnen:

$$\left( A \mid Id_n \right) \xrightarrow{\text{Zeilenoperationen}} \left( Id_n \mid A^{-1} \right)$$

Die linke Hälfte der Ergebnis-Matrix enthält dann  $A^{-1}$ , denn:

$$B_m \dots B_2 B_1 A = Id_n \Rightarrow B_m \dots B_1 = A^{-1}$$

### Definition 0.33 – ÜBERGANGSMATRIZEN

Es sei  $\dim(V) = n$  und  $\{v_1, \dots, v_n\}, \{v'_1, \dots, v'_n\}$  Basen von  $V$ . Weiterhin sei  $F : V \rightarrow V, v_i \mapsto v'_i$ . Dann gilt:

$$v'_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} v_j \text{ und die darstellende Matrix } S \text{ von } F, S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \text{ ist regulär.}$$

### Definition 0.34

Zwei  $(m \times n)$  Matrizen  $A, A'$  sind äquivalent, falls es reguläre Matrizen  $T \in GL_m(K), S \in GL_n(K)$  gibt, so dass  $A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$ .

$A, A' \in M_{n \times n}(K)$  sind ähnlich, falls es  $S \in GL_n(K)$  gibt, so dass  $A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$ .

*Bemerkung:* Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf  $M_{n \times n}(K)$ .

### Definition 0.35 – DETERMINANTE

$\det : K^n \rightarrow K$  ist eine multilineare alternierende Abbildung der Art, dass  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

$A \in M_{n \times n}(K)$

$A = (a_1 | a_2 | \dots | a_n) \Rightarrow \det(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det(A)$ .

$A = (a_{ij}), \det(a_{ij}) = \sum \text{sign}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^n a_{\pi(i)i}$  mit  $\text{sign}(\pi) = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \pi} \text{ bzw. Anzahl von Faktoren von } \pi \text{ als Produkt von Transpositionen.}$

Eigenschaften von Determinanten:

1.  $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$
2.  $A$  ist genau dann invertierbar, wenn  $\det(A) \neq 0$
3.  $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
4.  $\det(A^T) = \det(A)$

*Bemerkung:*  $\text{Id}_n + (-\text{Id}_n)$  ist nicht invertierbar, also  $\exists A, B : \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

### Satz 0.36 – LAPLACESCHER ENTWICKLUNGSSATZ

Sei  $j_0$  ein Spaltenindex

$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{j_0 i})$  wobei  $A_{j_0 i}$  die Matrix ohne Zeile  $j_0$  und Spalte  $i$  ist.

### Satz 0.37 – CRAMERSCHE REGEL

$$(a_1 | \dots | a_n) = A, A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ Falls } A \text{ regulär ist, gibt es eine einzige Lösung zum System: } \lambda_j = \frac{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}$$

### Definition 0.38 – DETERMINANTE EINES HOMOMORPHISMUS

Sei  $F : V \rightarrow V$ .  $\det(F) = \det(A)$  wobei  $A$  eine Darstellungsmatrix von  $F$  bezgl. einer Basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$ .

### Definition 0.39 – ADJUNTE MATRIX

Sei  $A$  eine  $n \times n$  Matrix, dann ist die Adjunte von  $A$

$\text{adj}(A) = (\gamma_{ij})$  mit  $\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$



*Bemerkung:* Sei  $c_i$  die  $j$ -te Zeile von  $\text{adj}(A)$ . Sei weiterhin  $a_i$  die  $i$ -te Spalte von  $A$ .

$$\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{jn} \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+n} a_{ki} \det(A_{jk}) \stackrel{\text{Laplacescher Entw. Satz}}{=} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n) =$$

$$\begin{cases} \det(A) & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Angenommen  $A$  ist regulär.

$$\text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot \text{Id}_n \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A) \cdot A} = \text{Id}_n = A^{-1} \cdot A \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = A^{-1} \Rightarrow A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \text{Id}_n$$

## 0.1 Diagonalisierbarkeit

Sei  $V$  ein Vektorraum,  $\{U_i\}_{i=1}^k$  Unterräume von  $V$ .

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i=1}^n U_i \cap (\sum_{j=1}^k U_j) = 0$$

Äquivalent dazu ist, dass jeder Vektor  $v \in V$  sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren  $\cup_{j=1}^k B_j$  schreiben lässt, wobei  $B_j$  eine Basis von  $U_j$  ist.

### Definition 0.40 – EIGENWERTE UND -VEKTOREN

Ein Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  besitzt einen Eigenvektor, falls es ein  $v \in V \setminus \{0\}$ , so dass  $F(v) = \lambda \cdot v$  für ein  $\lambda \in K$ . Falls  $F(v) = \lambda v$  ist  $\lambda$  eindeutig bestimmt durch  $F$  und  $v$ .  $\lambda$  ist dann ein Eigenwert von  $F$ .

### Definition 0.41 – EIGENRÄUME

$\lambda \in K, FV \rightarrow V$  Endomorphismus.

$V(\lambda) = \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$ , der Eigenraum zu  $\lambda$  ist ein UVR.

*Bemerkung:*  $\lambda$  ist ein Eigenwert von  $F$  gdw.  $\dim(V(\lambda)) \geq 1$ .

*Bemerkung:* Falls  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  verschiedene Eigenwerte von  $F \Rightarrow V(\lambda_i) \cap \sum_{j=1, j \neq i}^k V(\lambda_j) = \{0\}$

### Definition 0.42 – DIAGONALISIERBARKEIT

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler Vektorraum.  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus. Bzw. eine Matrix  $A : K^n \rightarrow K^n$ .

$F$  ist diagonalisierbar, falls  $V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$ ,  $\lambda$  verschiedene Eigenwerte von  $F$ .

Äquivalent dazu, wenn  $V$  eine basis von Eigenwerten von  $F$  besitzt. Äquivalent dazu, wenn  $F$  bezüglich

einer Basis von  $V$  die Darstellungsmatrix  $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$  hat.

Äquivalent dazu, für Matrizen:  $A$  ist diagonalisierbar gdw. es eine reguläre Matrix  $S$  gibt, sodaß  $S^{-1}AS =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

### Satz 0.43

$$A \in M_{n \times n}(K), \lambda \in K$$

$\lambda$  ist ein Eigenwert von  $A$  gdw.  $\lambda \text{Id}_n - A$  nicht regulär ist.  $\Leftrightarrow \det(\lambda \cdot \text{Id}_n - A) = 0$

### Definition 0.44 – CHARAKTERISTISCHES POLYNOM

Das charakteristische Polynom einer Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  ist  $\chi_A(T) = \det(T \cdot \text{Id}_n - A)$

*Bemerkung:*  $\lambda$  ist ein eigenwert von  $A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

**Beispiel**  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_{A(T)} = T^2 + 1 = \det \begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix}$$

*Bemerkung:* A und A' ähnlich,  $A' = s^{-1}AS \Rightarrow \chi_A(T) = \chi_{A'}(T)$ . Insbesondere können wir über das charakteristische Polynom eines Endomorphismus reden.

$$A \in M_{n \times n}(K), \chi_A(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \dots + b_0 \text{ wobei } b_0 = (-1)^n \det(A), b_{n-1} = -\text{Tr}(A) = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

#### Korollar 0.45

Ein Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  mit  $\dim(V) = n < \infty$  kann höchstens n viele Eigenwerte besitzen.

#### Korollar 0.46

$F : V \rightarrow V$  mit  $\dim(V) = n < \infty$  mit verschiedenen Eigenwerten  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  ist diagonalisierbar, gdw.  $n = \sum_{i=1}^k d_i, d_i = \dim(V(\lambda_i))$ .  $d_i$  heißt geometrische Vielfachheit von  $\lambda_i$ .

**Beweis:**

$\Rightarrow$

F ist diag. gdw. V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, welche aus  $\cup_{i=1}^n B_i$  besteht,  $|B_i| = d_i = \dim(V(\lambda_i))$ ,  $n = |B| = \sum_{i=1}^k |B_i|$

$\Leftarrow$

$n = \sum d_i \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^k (V(\lambda_i))) = n \Rightarrow V = \sum_{i=1}^k (V(\lambda_i))$  da die Eigenräume transversal sind, und ein Vektorraum nur einen UVR der dimension  $\dim(V)$  hat, sich selbst.  $\square$

#### Definition 0.47 – ALGEBRAISCHE VIELFACHHEIT

Es seien  $F : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus,  $\dim(V) = n < \infty$ ,  $\lambda \in K$  Eigenwert  $\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$ .

Dann gilt  $\chi_F(T) = (T - \lambda)^K G(T)$ ,  $G(\lambda) \neq 0$ . k ist die algebraische Vielfachheit von  $\lambda$ , bzw.  $\text{ord}_\lambda(F)$ .

*Bemerkung:*  $\text{ord}_\lambda(F) \geq \dim(V(\lambda))$

**Beweis:** Sei  $v_1, \dots, v_k$  eine Basis von  $V(\lambda)$ . Wir erweitern sie zu einer Basis  $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  von V. Die Darstellungsmatrix M von F bzwg. B ist dann

$$\{F(v_1), \dots, F(v_k), F(v_{k+1}), \dots, F(v_n)\}.$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda & C_2 \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

Wobei  $C_2 \in \text{Mat}_{n-k \times k}(K)$ .

$$\chi_F(T) = \det(TId_n - M) = (T - \lambda)^k \cdot \det(TId_{n-k} - C_1)$$

$\Rightarrow \text{ord}_\lambda(F) \geq k$ . Wobei  $\det(TId_{n-k} - C_1) = 0$  sein kann.  $\square$

#### Lemma 0.48

Sei V endlichdimensional,  $F : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus, U ein F-Invarianter Unterraum ( $F(U) \subset U$ ).

$F' : V/U \rightarrow V/U$  ist eine lineare Abbildung,  $\bar{v} \mapsto F(\bar{v})$ .  $F'$  ist wohldefiniert, linear und es gilt  $\chi_F(T) = \xi_{F|_U}(T) \cdot \xi_{F'}(T)$

**Beweis:**

$F'$  ist wohldefiniert;

$$\bar{v}_1 = \bar{v} \stackrel{\mathbb{Z}}{\Rightarrow} F'(v_1) = F(v) \quad \bar{v}_1 = \bar{v} \Rightarrow v_1 = v + (v_1 - v), v_1 - v \in U \\ \Rightarrow F(v_1) = F(v) + F(v_1 - v), F(v_1 - v) \in U \Rightarrow F(\bar{v}_1) = F(\bar{v})$$

Restklassen sind linear und  $F$  ist linear  $\Rightarrow F'$  ist linear.

Sei  $\{u_1, \dots, u_k\}$  eine Basis von  $U$ . erweitert zu  $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$  sei sie eine Basis von  $V$ .

*Bemerkung:*  $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V/U$ . Bew. Einfach.

Darstellungsmatrix  $H$  von  $F$  bzgl.  $B$ :

$$\begin{matrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{matrix} \begin{pmatrix} & & & \\ & A & & C_2 \\ & & & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & C_1 \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix} \text{ mit } A, C_1, C_2 \text{ Matrizen.}$$

$$\chi_F(T) = \det(TId_n - H) = \det\left(TId_n - \begin{pmatrix} A & C_2 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\left(\begin{pmatrix} T_id_k - A & -C_2 \\ 0 & T_Id_{n-k} - C_1 \end{pmatrix}\right) = \det(T_id_k - A) \det(T_Id_{n-k} - C_1)$$

$A$  ist die Darstellungsmatrix von  $F|_U$  bezüglich  $\{u_1, \dots, u_k\} \Rightarrow \det(T_id_k - A) = \chi_{F|_U}(T)$

$C_1$  ist die Darstellungsmatrix von  $F'$  bzgl.  $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ .

$$\Rightarrow \det(TId_{n-k} - C_1) = \chi_{F'}(T)$$

□

**Satz 0.49**

Sei  $K$  ein Körper,  $\dim(V) < \infty$ ,  $F : V \rightarrow V$  ein Endomorphismus so gilt:

$F$  Diagonalisierbar gdw  $\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \dots (T - \lambda_n)^{k_n}$  in Linearfaktoren zerfällt, wobei für jeden Faktor  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$   $T - \lambda_i$  gilt  $\text{ord}_{\lambda_i}(F) = \dim(V(\lambda_i))$ .

**Beweis:**

$\Rightarrow$

Sei  $b = \{v_1, \dots, v_n\}$  eine Basis von Eigenvektoren. Seien  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  die verschiedenen Eigenwerte. Ordne nun  $B$  um so dass

$$v_1, \dots, v_{d_1} \in V(\lambda_1), v_{d_1+1}, \dots, v_{d_1+d_2} \in V(\lambda_2), \dots, v_{d_1+\dots+d_{r-1}}, \dots, v_{d_1+\dots+d_r} \in V(\lambda_r) \text{ mit } d_i = \dim(V(\lambda_i)).$$

Die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $B$ :

$$\begin{pmatrix} F(v_1), \dots, F(v_{d_1}), \dots, F(v_r) \\ \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_r \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Wobei  $d_i$  viele  $\lambda_i$  auf der Diagonale sind

$$\chi_F(T) = \det(TId_n - A) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r} ((T - \lambda_2)^{d_2} \dots (T - \lambda_r)^{d_r})(\lambda_1) \neq 0 \Rightarrow d_i = \text{ord}_{\lambda_i}(F), \text{ da die } \lambda_i \text{ verschieden sind.}$$

$\Leftarrow$

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r}$$

$$F \text{ ist diag} \Leftrightarrow n = \dim(V) = \sum d_i$$

□

**Definition 0.50**

Eine Matrix  $A \in M_{n \times n}(K)$  ist trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

**Satz 0.51**

$F : V \rightarrow V$  ist trigonalisierbar? gdw.  $\chi_F(t)$  in Linearfaktoren zerfällt  $\chi_F(T) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$ .

**Beweis:**  $\Rightarrow F$  hat Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & X \\ & & \ddots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\chi_F(T) = \det(T \cdot Id_n - A) = \prod_{i=1}^n (T - a_{ii}) \Leftarrow \text{Induktion über } n = \dim(V)$$

$n = 1 \Rightarrow$  Jede  $1 \times 1$  Matrix ist in oberer Dreiecksform.

$n \geq 2$   $\chi_F(t) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$ .  $\lambda_1$  ist ein Eigenwert  $\Rightarrow \exists v_1 \in V \setminus \{0\} : F(v_1) = \lambda_1 v_1$ .  $U = \text{span}(v_1) \subset V$  ist  $F$ -invariant. Nach Lemma ... gilt  $(T - \lambda_1) \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i) = \chi_{F|_U}(T) = \chi_{F|_U} \cdot \xi_{F|_U}$ ,  $\xi_{F|_U} = (T - \lambda_1) K[T]$  ist ein Integritätsbereich  $\Rightarrow \exists_{F'}(T) = \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i)$ ,  $\dim(V/U) < \dim(V)$ .

Nach Ia gibt es eine Basis  $\exists(\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$  von  $V/U$  derart, dass  $F'$  bzgl. dieser Basis Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\mu_{ij})$$

Behauptung: Seien  $v_i \in V$ ,  $\bar{v}_i = \bar{v}_i$ ,  $2 \leq i \leq n$ ,  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist eine Basis von  $V$ .

Bew. Übungsaufgabe.

Frage: Wie sieht die Darstellungsmatrix von  $F$  bzgl.  $\{v_1, \dots, v_n\}$  aus?

$$\sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} \bar{v}_i = F'(v_j) = F(\bar{v}_j)$$

$$\sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} \bar{v}_i = \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_i \Rightarrow \exists \mu_{ij} \in K/F(v_j) = \mu_{ij} v_1 + \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j = \sum_{1 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j$$

$$F(v_1)F(v_2), \dots, F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_{12} & \lambda_2 & X & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

**Korollar 0.52**

Jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes über einen algebraisch abgeschlossenen Körper (z.B.  $\mathbb{C}$ ) ist trigonalisierbar.

**Lemma 0.53**

Sei  $V$  endlichdimensional über einem Körper  $K$ .

$v \in V \setminus \{0\} \exists r \in \mathbb{N} : F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$   $a_i$  ist eindeutig bestimmt. Insb. ist  $U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v))$

ist  $F$  invariant, hat Basis  $v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)$

$F \upharpoonright U$  hat Darstellungsmatrix  $\begin{pmatrix} 0 & \dots & a_0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 & a_n \end{pmatrix}$   $\chi_{F \upharpoonright U}(T) = T^r - a_{r-1}T^{r-1} - \dots - a_0$ .

**Beweis:**  $n = \dim(V)$ .  $\{v, F(v), \dots, F^n(v)\}$  sind lin.abh. Sei  $r$  die kleinste natürliche Zahl, so dass  $\{v, F(v), \dots, F^r(v)\}$  lin. abh sind. Dann sind  $\{v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)\}$  linear unabhängig.  $\xRightarrow{\text{Austauschprinzip von } r} F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$

wobei  $a_i$  eindeutig bestimmt sind.

$U = \text{span}(v_1, \dots, F^{r-1}(v))$  ist  $F$ -invariant. Sei  $u \in U$ ,  $u = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^i(v)$

$$F(u) = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v)$$

$$= \sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F^{i+1}(v) + \mu_{r-1} F^r(v) \text{ Wobei } F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v).$$

Beide teile der Summe  $\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F^{i+1}(v) + \mu_{r-1} F^r(v)$  liegen eindeutig in  $U$ , also liegt auch die Summe in

U.

$\{v_1, \dots, F^{r-1}(v)\}$  ist eine Basis von U.

$F(v_1), \dots, F(F^{r-1}(v))$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & \dots & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{F|U}(T) = \det(TId_r - A) = \det\begin{pmatrix} T & 0 & \dots & -a_0 - 1 & T & \dots & 0 & -1 & \dots & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

Laplacische Entwicklung nach der letzten Spalte:  $= (-1)^{r+1}(-a_0)\det\begin{pmatrix} -1 & T \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} + (-1)^{r+2}(-a_1)\det\begin{pmatrix} T & T \\ 0 & \ddots \end{pmatrix} +$

$$\dots + (-1)^{2r}(T - a_r)\det\begin{pmatrix} T & T \\ -1 & T \\ & -1T \end{pmatrix} = (-1)^r a_0 (-1)^r + (-1)^{r+1} a_1 T (-1)^{r+1} + \dots + (-1)^{2r} (T - a_1) T^{r-1} =$$

$$-a_0 - a_1 T - \dots - a_{r-1} T^{r-1} + T^r \quad \square$$

Notation:

$P(T) \in K[T], P(T) = \sum_{i=0}^m a_i T^i, F : V \rightarrow V$  Endomorphismus.

$P(f) : V \rightarrow V, v \mapsto \sum_{i=0}^m a_i F^i(v)$

Mit dieser Notation haben wir, dass im vorigen Lemma  $\chi_{F|_U}(F) = F^r(v) - \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v) = 0$

#### Satz 0.54 – CALOY - HAMILTON

$F : v \rightarrow V$  Homomorphismus

$\chi_F(F)$  ist der 0 Endomorphismus auf V.

**Beweis:** z.Z. ist dass  $\forall v \in V : \chi_F(F)(v) = 0$

$v = 0 \Rightarrow \chi_F(F)(v) = 0$

Ansonsten  $v \neq 0$ :

$\exists r : U = \text{span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v))$  ist F-invariant.

U - F-invariant  $\Rightarrow \chi_f = \xi_{F|_U} \cdot \xi_{F'} = \xi_{F'} \cdot \xi_{F|_U}, F' : v/U \rightarrow V/U, \bar{w} \mapsto F(\bar{w})$ .

Aufgabe:

$$R(T) = P \cdot Q$$

$$R(F) = P \circ (Q(F)) \quad \chi_F(F)(v) = \xi_{F'} \circ (\xi_{F|_U}(v)), \text{ wobei } \xi_{F|_U}(v) = 0, \text{ also } \xi_F F(v) = 0. \quad \square$$

#### Korollar 0.55

$$A \in M_{n \times n}(K)$$

$$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i \Rightarrow A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot A^i = 0$$

#### Satz 0.56

V endlichdimensionaler Vektorraum,  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus, Dann existiert genau ein normiertes Polynom kleinsten Grades,  $m_f$ , derart, dass  $\forall P \in K[T] : m_f|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$  Insbesondere gilt  $m_F(F) = 0$ . Das Polynom  $m_F$  heißt das Minimalpolynom von F.

#### Satz 0.57

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus, Dann existiert genau ein normiertes Polynom derart, dass  $\forall P \in K[T] : m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$ . Das Polynom  $m_F(T)$  heißt das Minimalpolynom von F.

**Beweis:** Sei  $\mathcal{F} = \{P[T] \text{ teilerfremd zu } P(F) = 0 \text{ als Endomorphismus}\}$ .

Caley - Hamilton:  $\chi_F(T) \in \mathcal{F} \neq \emptyset$  Sei  $m = \min\{P(T) \in \mathcal{F} \mid P \text{ Polynom kleinsten Grades}\}$ .

Zu zeigen:  $\forall P \in K[T] : m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$

$\Rightarrow$

$$m_F|_P \Rightarrow \exists Q \in K[T] : P = Q \cdot m_F$$

$$P(F) = Q(F) \circ m_F(F), m_F(F) = 0$$

$$P(F) = 0$$

$\Leftarrow$

Sei  $P \in K[T], P(F) = 0$ . Division mit Rest  $\Rightarrow \exists q, r \in K[T] : P = Qm_F + r, \text{Grad}(r) < \text{Grad}(m_F)$

$$0 = P(F) = Q(F) \circ m_F(F) + r(F) = r(F) = 0$$

$$\Rightarrow r(F) = 0 \text{ als Endomorphismus, } \Rightarrow r = 0. \text{ (sonst } \frac{1}{a_{\text{Grad}(T)}} \cdot r(T) \in \mathcal{F}$$

Eindeutigkeit:

Angenommen ( $m'_F$  würde auch die Bedingungen erfüllen

$$m'_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0 \forall P \in K[T]$$

$$\Leftrightarrow M_F|_{m'_F} \wedge m'_F|_{m_F}$$

$$m_F = Qm'_F \wedge m'_F = Hm_F$$

zu Zeigen  $Q = H = 1$ . Sowohl  $m_F, m'_F$  beide normiert,  $\Rightarrow Q, H$  sind normiert.

$$m_F = Q \cdot m'_F = QHm_F \wedge K[T] \text{ Integritätsbereich}$$

$$\Rightarrow 1 = QH$$

$$\text{Grad}(GH) = \text{Grad}(G) \text{Grad}(H) = \text{Grad}(1) = 0 \wedge G, H \text{ normiert}$$

$$\Rightarrow G = H = 1 \Rightarrow m_F = m'_F.$$

□

Frage

$$A \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m|_A =$$

$$\chi_A(T) = T^2 m_A|_{T^2} \Rightarrow m_A = \begin{cases} T \\ T^2 \end{cases} \quad m_A(A) = 0 \Rightarrow m_A \neq T \Rightarrow m_A = T^2$$

### Lemma 0.58

gegeben  $F : V \rightarrow V$ ,  $V$  endlich dimensional,  $F$  Endomorphismus, dann haben  $\chi_F$  und  $m_F$  dieselben Nullstellen in  $K$ .

**Beweis:**  $m_F|_{\chi_F} \Rightarrow \xi_F = Qm_F \Rightarrow \forall \lambda \in K$ , falls  $m_F(\lambda) = 0 \Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$

Sei  $\lambda \in K^n, \chi_F(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$  ist ein Eigenwert von  $F \Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : F(v) = \lambda v$ . Sei  $m_F(T) = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i T^i$ .  $0 = m_F(F)(v) = (F^d + \sum c_i F^i)(v) = F^d(v) + \sum c_i F^i(v) = \lambda^d v + \sum c_i \lambda^i v = (\lambda^d + \sum c_i \lambda^i) v = m_F(\lambda) v \Rightarrow m_F(\lambda) = 0$ , da  $v \neq 0$ . □

### Satz 0.59

$F : V \rightarrow V$ ,  $V$  endlichdimensional,  $F$  endomorphismus ist diagonalisierbar gw.  $m|_F$  in lauter paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

**Beweis:** Kommt in einer späteren Vorlesung. □

*Bemerkung:*  $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K) : A^2 = Id_n \Rightarrow A$  ist diagonalisierbar.

$$A^2 = Id_n \Rightarrow (T-1)(A) = 0 \Rightarrow m_F|_{T^2-1} m_A = \begin{cases} T^2 - 1 = (T-1)(T+1) \\ T-1 \\ T+1 \end{cases}$$

## Jordansche Normalform

### Lemma 0.60

$F : V \rightarrow V$  Endomorphismus,  $U \subset V$ , dann ist  $U$   $F$ -invariant gdw.  $U(F - \lambda Id)$ -invariant ist  $\forall \lambda \in K$ .

**Beweis:** Übungsblatt 4

□

### Beispiel

$F : V \rightarrow V, F \neq 0$  Endomorphismus, derart, dass  $F^m = 0$  als Endomorphismus und  $m > 0$  minimal ( $F$  ist nilpotent).  $F^{m-1} \neq 0 \Rightarrow v \in V : F^{m-1}(v) \neq 0$ .  $\{v, F(v), \dots, F^{m-1}(v)\}$  ist linear unabhängig. Ergänze sie zu einer Basis  $B$  von  $V$ .  $B = \{v, F(v), \dots, F^{m-1}(v), \dots, v_n\}$ .

$F^{m-1}(v), \dots, F(v), v, \dots, v_n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & * \\ 0 & \vdots & 0 & & \\ 0 & \dots & & & * \end{pmatrix}$$

### Definition 0.61 – HAUPTTRAUM

Sei  $\lambda \in K$  ein Eigenwert von  $F : V \rightarrow V$ ,  $V$  endlichdimens..

$V(\lambda) = \text{Ker}(F - \lambda)$  Eigenraum von  $F$  bzgl.  $\lambda$ .

$\text{Ker}(F - \lambda) \subset \text{ker}(F - \lambda)^2 \subset \dots$

$\cup_{n \in \mathbb{N}} \text{ker}(F - \lambda)^n$  ist der Hauptraum von  $F$  bzgl.  $\lambda$ .

*Bemerkung:*  $V_\lambda$  ist ein Unterraum und  $V_\lambda$  ist  $F$ -invariant, da  $V_\lambda (F - \lambda)$ -invariant ist.

*Bemerkung:* Falls  $\text{Ker}(F - \lambda) = V(\lambda) = 0$  ist  $\cup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(F - \lambda)^n = 0$ .

### Lemma 0.62

Seien  $\lambda_1 \dots \lambda_k$  verschiedene Elemente aus  $K$ .  $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j=1, j \neq i}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$ .

**Beweis:**  $V_{\lambda_j} = (F - \lambda_j)$  invariant  $\Rightarrow V_{\lambda_j}$  ist  $F$ -invariant  $\Rightarrow (F - \lambda_i)$  invariant.

Wir wollen zuerst zeigen, dass  $F - \lambda_i \upharpoonright V_{\lambda_j}$  ein Automorphismus ist falls  $i \neq j$ .

$\Rightarrow$  es genügt zu zeigen, dass  $F - \lambda_i$  injektiv auf  $V_{\lambda_j}$  ist.

Sei  $w \in V_{\lambda_j} \setminus \{0\} \Rightarrow m \in \mathbb{N}$  kleinstmöglich,  $(F - \lambda_j)^m(w) = 0 \Rightarrow (F - \lambda_j)^{m-1}(w) \neq 0 \Rightarrow ((F - \lambda_j)^{m-1}((\lambda_i - \lambda_j)(w))) \neq 0$

Sei  $0 \neq (F - \lambda_j)^{m-1}(F(w) - \lambda_j w - (F(w) - \lambda_i w)) \Rightarrow (F - \lambda_i)^m(w) + (F - \lambda_j)^{m-1} \circ (F - \lambda_i)(w) \Rightarrow (F - \lambda_i)(w) \neq 0$ .

Inbesondere ist jede Potenz  $F - \lambda_i^k$  ein Automorphismus von  $V_{\lambda_j}$ .  $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j=1, j \neq i}^k V_{\lambda_j} = \{0\} \Rightarrow v \in V_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}$   
 $v = \sum_{j \neq i} v_j \in V_{\lambda_j} \Rightarrow \exists m_j$  kleinstes  $F(-\lambda_j)^{m_j}(v_j) = 0$

$(F - \lambda_i)^{m_i} \circ \dots \circ (F - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}} \circ (F - \lambda_{i-1})^{m_{i-1}+1} \dots (F - \lambda_k)^{m_k}$  ist eine Automorphismus von  $V_{\lambda_i}$ . Sie dieser automorph. H.  $H(v) = \sum_{j \neq i} (H(v_j) = \sum_{j \neq i} (F - \lambda_1)^{m_1} \circ \dots \circ (F - \lambda_j)^{m_j}(v_j), F - \lambda_j)^{m_j}(v_j) = 0 \Rightarrow H(v) = 0 \Rightarrow v = 0$ . □

### Lemma 0.63

Sei  $\lambda \in K$ .  $\dim(V_\lambda) = \text{ord}_\lambda(\chi_F)$ . Ferner hat  $F \upharpoonright V_\lambda$  hat Matrixdarstellung der der Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

**Beweis:** Sei  $k = \text{ord}_\lambda(\chi_F(T))$ .  $\chi_F(T) = (T - \lambda)^k \cdot G(T)$  wobei  $G(\lambda) \neq 0$ .

Behauptung: es gibt einen  $F$ -invarianten Unterraum  $U$  von  $V$  der Dimension  $k$  so dass  $F \upharpoonright U$  hat Ma-

trixdarstellung  $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

Falls  $n = 0 \Rightarrow$  klar. OBdA. ist  $k \geq 1$ . Wir beweisen die Behauptung mit Induktion auf  $n = \dim(V)$ .

$n = 1$

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : F(v) = \lambda v$$

$$\Rightarrow V = \text{span}(v) = U$$

$n \geq 2$

$\Rightarrow \lambda$  ist ein Eigenwert

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : F(v) = \lambda v, U_0 = \text{span}(v) \Rightarrow \dim(U) = 1 \wedge F\text{-invariant} \Rightarrow \hat{F} : V/U_0 \rightarrow V/U_0, \bar{w} \mapsto F(\bar{w}), (T - \lambda)(T - \lambda)^{k-1} \cdot Q(T) = \chi_F(T) = \chi_{F \upharpoonright U}(T) \cdot \chi_{\hat{F}}(T) =_{(T-\lambda)} \chi_{\hat{F}}(T)$$

$$\Rightarrow \chi_{\hat{F}}(T) = (T - \lambda)^{k-1} \cdot Q(T), Q(\lambda) \neq 0$$

Nach Ia. existiert ein  $\hat{F}$ -invarianter Unterraum  $\hat{U} \subset V/U_0$  der Dimension  $n-1$ , so dass die Matrixdarstellung von  $\hat{F}$  der Form  $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$  ist. Sei  $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$  eine Basis von  $\hat{U}$  so dass die Darstellungsmatrix von

$\hat{F}$  bzgl.  $\{v_2, \dots, v_k\}$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Die Vektoren  $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$  sind linear unabhängig.  $U = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$  hat Dimension  $k$ .  $U$  ist  $F$ -invariant,  $F(\sum_{i=1}^k \mu_i v_i) = \sum \mu_i F(v_i) = \mu_1 \lambda v_1 + \sum_{i=2}^k \mu_i F(v_i) \in U$   
 $= \sum_{j \leq i} a_{ji} v_i$

Zu zeigen ist nun dass  $U = V_\lambda$ .  $U \subset V_\lambda : \chi_{F \upharpoonright U} = (T - \lambda)^k \xrightarrow{\text{Caley-Hamilton}} (F - \lambda)^k = 0$  auf  $U$

$$\Rightarrow U \subseteq \text{Ker}(F - \lambda)^k$$

Falls  $U \subsetneq V_\lambda$

$$\Rightarrow \dim(V_\lambda) \geq 1.$$

$$(T - \lambda)^K \cdot G(T) = \chi_F(T) = \chi_{F \upharpoonright U}(T) \cdot \chi_{\hat{F}}(T) \Rightarrow \chi_{\text{hat} F}(T) = G(T) \text{ aber } G(\lambda) \neq 0.$$

$\lambda$  ist kein Eigenwert von  $\hat{F}$ .  $\Rightarrow$  der Hauptraum von  $\hat{F} : V/u \rightarrow V/u$  ist trivial.

Sei  $w \in V_\lambda$

$$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} : (F - \lambda)^s(w) = 0 \Rightarrow (F - \lambda)^s(\bar{w}) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{w} = 0 \Rightarrow w \in U.$$

□

### Definition 0.64

Ein Endomorphismus  $F : V \rightarrow V$  heißt nilpotent, falls es eine nat. Zahl  $m$  gibt, so dass  $F \circ \dots \circ F = F^m = 0$  auf  $V$  ist.

### Lemma 0.65

Sei  $F : V \rightarrow V$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:

1.  $F$  ist nilpotent

$$2. \forall v \in V \exists m_v \in \mathbb{N} : F^{m_v}(v) = 0$$

3. Es existiert eine Basis von  $V$ , so dass  $F$  Darstellungsmatrix  $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$$4. \chi_F(T) = T^n$$



**Beweis:**

1  $\Rightarrow$  2 trivial.

2  $\Rightarrow$  3 Induktion auf  $n = \dim(V)$ . Sei  $v \in V \setminus \{0\}$

$$\Rightarrow \exists m_V \in \mathbb{N} \text{ kleinstest } F^{m_V}(v) = 0$$

$$\Rightarrow m_v \neq 0$$

$$\Rightarrow f_{m_v-1}(v) \neq 0$$

$$\Rightarrow V = \text{span}(F^{m_v-1}(v))$$

Ferner

$$F(F^{m_v-1}(v)) = 0$$

$$\Rightarrow \text{Darstellungsmatrix bzgl. } \{F^{m_v-1}(v)\} \text{ ist } (0).$$

$$n \geq 2$$

$$\text{Sei } v_1 \in V \setminus \{0\} \text{ so dass } F(v_1) = 0$$

$$\Rightarrow U = \text{span}(v_1) \text{ ist } F\text{-invariant.}$$

$$\Rightarrow \hat{f} = \underset{\dim=n-1}{V/U} \rightarrow V/U$$

nach I.A. existiert eine Basis  $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ , so dass die Darstellungsmatrix von  $\hat{F}$  die Form

$$\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ hat.}$$

Die Familie  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  ist eine Familie von  $V$  und  $F$  hat Darstellungsmatrix:  $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$$3 \Rightarrow 4 \quad \chi_F(T) = \det(T \cdot Id_B - \begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}) = \det \begin{pmatrix} T & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & T \end{pmatrix} = T^n$$

$$4 \Rightarrow 1 \text{ Cayley-Hamilton: } F^n = \chi_F(F) = 0$$

□

### Satz 0.66 – JORDAN-CHARVALLERY

Sei  $F : V \rightarrow V$  Endomorphismus,  $V$  endl. dim. Faktors  $\chi_F(T)$  in Linearfaktoren zerfällt dann ist  $V = \bigoplus_i^k V_{\lambda_i}$  mit  $\lambda_i$  verschiedene Eigenwerte.  $F$  hat dann eine Blockmatrix als Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k \end{pmatrix} A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist  $F = G + H$  mit  $G$  ist diagonalisierbar und  $H$  ist nilpotent, und  $G \cdot H = H \cdot G$ .

**Beweis:**  $\chi_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$ ,  $\lambda_i$  verschieden.

$$\dim(V) = \text{Grad}(\chi_F(T)) = n = \sum_i d_i = \dim(V_{\lambda_i})$$

$$\dim(\sum_{i=1}^k V_{\lambda_i}) = \sum d_i = b = \dim(V) \text{ da die Haupträume transversal sind.}$$

$$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$$

$V$  besitzt eine Basis  $B$ , welche aus der Vereinigung der Basen der  $V_{\lambda_i}$  besteht.  $F$  wird durch  $F \upharpoonright V_{\lambda_1}, \dots, F \upharpoonright$

$$V_{\lambda_k} \text{ bestimmt. Die einzelnen } F \upharpoonright V_{\lambda_i} \text{ habe Matrixdarstellungen } A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix} \text{ Die Darstellungs-}$$

matrix von  $F$  ist dann

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}.$$

Sei  $G : V \rightarrow V$   $G \upharpoonright V_{\lambda_i} = \text{Multiplikation mit } \lambda_i$ .  $G$  hat diagonale Matrixdarstellung bzgl. der Basis  $B$  :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_k \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Setze  $H = F - G$ . Die Darstellungsmatrix von  $H$  bzgl.  $B$  ist

$$\begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H \text{ ist nilpotent.}$$

z. Zeigen  $GH = HG$

Beachte, dass jedes  $V_{\lambda_i}$   $G$ -invariant ist. Damit ist  $V_{\lambda_i}$   $H$ -invariant.

Es genügt zu zeigen, dass  $GH = HG$  auf  $V_{\lambda_i}$ . Sei  $w \in V_{\lambda_i}$ :  $H(G(w)) = H(\lambda_i w) = \lambda_i H(w) = G(H(w))$ .  $\square$