
Lineare Algebra II

Inoffizieller Mitschrieb

Stand: 14. Juni 2018

Vorlesung gehalten von:

Prof. Dr. Amador Martín-Pizarro
Abteilung für Angewandte Mathematik
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT FREIBURG

0. Recap

Definition 0.1 – RING

Ein (kommutativer) Ring (mit Einselement) ist eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen $+$, \cdot , derart, dass:

- $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- (R, \cdot) ist eine kommutative Halbgruppe
- die Distributivgesetze:
 $a(x + y) = ax + ay$
 $(x + y)z = xz + yz$

Definition 0.2 – INTEGRITÄTSBEREICH

Ein Integritätsbereich ist ein Ring ohne Nullteiler. Also $\forall x, y \in R : x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

Definition 0.3 – KÖRPER

Ein Körper ist ein Ring der Art, dass

1. $1 \neq 0$
2. $\forall x \in K : x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} : xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

Bemerkung: Körper sind Integritätsbereiche.

Definition 0.4 – CHARAKTERISTIK

Sei R ein nicht trivialer Ring ($0 \neq 1$). $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow R, z \mapsto \begin{cases} \sum_{i=1}^n 1 & n \geq 0 \\ -\sum_{i=1}^n 1 & \text{ansonsten} \end{cases}$

Dann ist φ ein Ringhomomorphismus.

Für den Kern von φ ($\text{Ker}(\varphi)$) gibt es zwei Möglichkeiten.

1. $\text{Ker}(\varphi) = \{0\}, p = 0$
2. $\text{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$. Dann gibt es ein kleinstes echt positives Element $p \in \text{Ker}(\varphi)$.

R hat dann Charakteristik p ($\text{Char}(R) = p$). Falls R ein Integritätsbereich ist, dann ist p eine Primzahl.

Beispiele:

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \dots, \bar{n}\}$ hat Charakteristik n .

Insbesondere enthält jeder Körper mit Charakteristik p eine "Kopie" von $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$:

K hat Charakteristik $p \Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{injectiv}} K$.

Hier ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper:

$a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow$ es ist a mit p teilerfremd. $1 = a \cdot b + p \cdot m \Rightarrow \bar{1} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

Definition 0.5 – POLYNOMRING

Sei K ein Körper. Der Polynomring $K[T]$ in einer Variable T über K ist die Menge formeller Summen der Form:

$$f = \sum_{i=0}^n a_i \cdot T^i, n \in \mathbb{N}$$

Der Grad von $f \in K[T]$ ist definiert als:

$$\text{Grad}(f) := \max\{m \mid m < n \wedge a_m \neq 0\}$$

$$\text{Grad}(0) := -1$$

Falls $\text{Grad}(f) = n$ und $n = 1$ heißt das Polynom normiert.

Die Summe und das Produkt von Polynomen sind definiert als:

$$\sum_{i=0}^n a_i T^i + \sum_{j=0}^m b_j T^j := \sum_{k=0}^{\max(m,n)} (a_k + b_k) T^k$$

$$\sum_{i=0}^n a_i T^i \cdot \sum_{j=0}^m b_j T^j := \sum_{k=0}^{m+n} c_k T^k, c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

Bemerkung: $K[T]$ ist ein Integritätsbereich.

Korollar 0.6

Es seien f, g beide $\neq 0$

$$\Rightarrow \text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \Rightarrow f \cdot g \neq 0$$

$$\text{Grad}(f + g) \leq \max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$$

Satz 0.7 – DIVISION MIT REST

Gegeben $f, g \in K[T], \text{Grad}(g) > 0$. Dann existieren eindeutige Polynome q, r , so dass $f = gq + r$, wobei $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(g)$.

Beweis: Eindeutigkeit: Angenommen $f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r', q \neq q' \vee r \neq r'$.

$$\Rightarrow g(q - q') = r' - r \Rightarrow \text{Grad}(r' - r) = \max(\text{Grad}(r'), \text{Grad}(r)) < \text{Grad}(g) = \text{Grad}(g(q - q')) \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

$$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r' \text{ Existenz: Induktion auf } \text{Grad}(f)$$

$$\text{Grad}(f) = 0 \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$$

$$\text{Grad}(f) = n + 1$$

$$\text{Grad}(f) < \text{Grad}(g) = m \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$$

$$\text{OBdA. } n + 1 = \text{Grad}(f) \geq \text{Grad}(g) = m > 0$$

$$f = a_{n+1} \cdot T^{n+1} + \hat{f}, \text{Grad}(\hat{f}) \leq n, a_{n+1} \neq 0$$

$$\text{Sei } f' = f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g \Rightarrow \text{Grad}(f') \leq n \text{ Ia: } f' = g \cdot q' + r', \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g)$$

$$f' = f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g \Rightarrow f = g(b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} + q') + r' \Rightarrow \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g) \quad \square$$

Definition 0.8 – POLYNOM TEILT

$$f, g, q \in K[T], \text{Grad}(g) > 0$$

$$g \text{ teilt } f = g|_f \Leftrightarrow f = g \cdot q$$

Definition 0.9 – NULLSTELLEN VON POLYNOMEN

$$f \in K[T] \text{ besitzt eine Nullstelle } \lambda \in K \text{ gdw. } (T - \lambda)|_f \Leftrightarrow f(\lambda) = 0.$$

$$f \text{ lässt sich dann schreiben als } f = (T - \lambda)q + r.$$

Lemma 0.10

$$f \in K[t], f \neq 0, \text{Grad}(f) = n \Rightarrow f \text{ besitzt höchstens } n \text{ Nullstellen in } K.$$

Beweis:

$$n = 0 \Rightarrow f = a_0, a_0 \neq 0$$

$n > 0$ Falls f keine Nullstellen in K besitzt \Rightarrow ok!

Sonst, sei $\lambda \in K$ eine Nullstelle von f . $f = (T - \lambda) \cdot g$, $\text{Grad}(g) = n - 1 < n$

I.A besitzt g höchstens $n - 1$ Nullstellen. Jede Nullstelle von f ist entweder λ oder eine Nullstelle von g . $\Rightarrow f$ hat höchstens n Nullstellen.

□

Definition 0.11 – VIELFACHHEIT EINER NULLSTELLE

$f \in K[T]$, $f \neq 0$, $\lambda \in K$ Nullstelle von $f \Rightarrow f = (T - \lambda)^{K_\lambda} \cdot g$, $g(\lambda) \neq 0$. K_λ ist die Vielfachheit der Nullstelle λ in f .

Definition 0.12

Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom über K positiven Grades eine Nullstelle besitzt.

Beispiele Ist \mathbb{R} algebraisch abgeschlossen? Nein: $T^2 + 1$.

Bem.: \mathbb{C} ist algebraisch abgeschlossen.

Bemerkung: Jeder algebraisch abgeschlossene Körper muss unendlich sein. Sei $K = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, $f = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n) + 1$.

Lemma 0.13

K ist genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn jedes Polynom positiven Grades in lineare Faktoren zerfällt.

$$f = T(\lambda_1) \dots (T - \lambda_n).$$

Beweis:

\Leftarrow trivial

$$\Rightarrow \text{Grad}(f) = n > 0 \Rightarrow f = (T - \lambda_1) \cdot g, \text{Grad}(g) \leq n - 1 < n \stackrel{\text{I.A.}}{\Rightarrow} f = c(T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$$

□

Definition 0.14 – VEKTORRAUM

Vektorraum V über K ist eine abelsche Gruppe $(V, +, 0_V)$ zusammen mit einer Verknüpfung $K \times V \rightarrow V$ $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
2. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$
3. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
4. $1_K v = v$

Definition 0.15 – UNTERVEKTORRAUM

Ein Untervektorraum $U \subset V$ ist eine Untergruppe, welche unter der Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

Bemerkung: $\{U_i\}_{i \in I}$ Untervektorräume von $V \Rightarrow \bigcap_{i \in I} U_i$ ist Untervektorraum. Insb. gegeben $M \subset V$ existiert $\text{span}(M) = \langle M \rangle$ der kleinste Unterraum von V , der M enthält.

$$\text{span}(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i m_i, m_i \in M, \lambda_i \in K, n \in \mathbb{N}$$

M ist ein Erzeugendensystem für $\text{span}(M)$

Außerdem gilt:

$$\sum_{i \in I} U_i = \text{span}(\bigcup_{i \in I} U_i)$$

$$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \text{span}(M_1) \subset \text{span}(M_2)$$

Definition 0.16 – LINEARE UNABHÄNGIGKEIT

Sei V ein Vektorraum über K . Dann gilt v_1, \dots, v_n sind linear unabhängig falls $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K : \sum \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. $M \subset V$ ist linear unabhängig, falls jede endliche Teilmenge von M linear unabhängig ist. Äquivalent dazu ist: M ist linear unabhängig, falls kein Element von M sich als Linearkombination der anderen schreiben lässt.

Definition 0.17 – BASIS

Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}, v_i \in V$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent und definieren eine Basis:

1. B ist ein lineares unabhängiges Erzeugendensystem von V
2. Jedes Element von V lässt sich eindeutig als Linearkombination der Elemente in B schreiben.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem.
4. B ist maximal linear unabhängig.

Satz 0.18 – BASISERGÄNZUNGSSATZ

Sei $M \subset V$ linear unabhängig, dann gilt $\exists B \subset V$, und B ist eine Basis welche M enthält. Insbesondere hat jeder Vektorraum eine Basis. "Je zwei Basen sind in Bijektion".

Definition 0.19 – DIMENSION

V ist endlichdimensional, falls V eine endliche Basis besitzt. Sonst ist V unendlichdimensional. Fall V endlichdimensional ist, ist die Dimension von V definiert durch:

$$\dim(V) = |B| \text{ mit } B \text{ beliebige Basis.}$$

Satz 0.20 – BASISAUSWAHLSATZ

Sei $M \subset V$ ein Erzeugendensystem von V , dann gilt $\exists B \subset M$ mit B ist eine Basis von V .

Lemma 0.21

Sei $U \subset V$ ein Unterraum, dann gilt $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(U) < \infty$

Lemma 0.22

Die Dimension ist modular: $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

Definition 0.23 – DIREKTES PRODUKT VON VEKTORRÄUMEN

$$V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow V = U_1 + U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

$$V = \bigoplus_{i \in I} U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i \in I} U_i \text{ und die Familie ist transversal: } \{U_i\}_{i \in I} \rightarrow U_i \cap (\sum_{j \in I} U_j) = \{0\}$$

Definition 0.24 – KOMPLEMENTÄR

Sei $U \subset V$ ein Untervektorraum, dann gilt $\exists \hat{U} \subset V : V = U \oplus \hat{U}$.
 \hat{U} heißt dann Komplementär zu U .

Beispiele

K^2 ist ein K-VR. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis.

$$U = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), K^2 = U \oplus \text{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), K^2 = U \oplus \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Definition 0.25 – LINEARE ABBILDUNGEN

$F : V \rightarrow W$ ist linear, falls gilt: $F(\lambda v + \mu u) = \lambda F(v) + \mu F(u)$

Definition 0.26 – KERN UND BILD

$$\text{Ker}(F) = \{v \in V \mid F(v) = 0\}$$

$$\text{Im}(F) = \{w \in W \mid \exists v \in V : F(v) = w\}$$

$\text{Ker}(F)$ ist ein Untervektorraum von V , $\text{Im}(F)$ ist ein Untervektorraum von W .

Lemma 0.27

Falls B eine Basis von V ist, ist $F(B)$ ein Erzeugendensystem von $\text{Im}(F)$. F ist injektiv genau dann wenn $\text{Ker}(F) = \{0\}$.

Lemma 0.28

V endlichdimensional: $\dim(V) = \dim(\text{Ker}(F)) + \dim(\text{Im}(F))$.

$$V/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(F).$$

Bemerkung: V, W endlichdimensional, $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V , $V \cong K^n$, $v_i \mapsto e_i$.

Definition 0.29 – MATRIX

Sei $F : V \rightarrow W$, $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$, $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V , $\{w_1, \dots, w_m\}$ Basis von W .

$K^n \cong V \xrightarrow{F} W \cong K^m$. Dadurch wird durch F und die beiden Basen eine Abbildung von K^n nach K^m definiert. Diese Abbildung kann durch eine Matrix A dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$F(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$$

$$F(v_1), \dots, F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ ist die } m \times n \text{ Matrix } A.$$

Definition 0.30 – RANG EINER MATRIX

$$\text{Rg}(A) = \dim(\text{span}(\text{Spaltenvektoren})) = \dim(\text{span}(\text{Zeilenvektoren}))$$

$F : V \rightarrow W$ linear. $\text{Rg}(F) = \text{Rg}(A) = \dim(\text{Im}(F))$, mit A eine beliebige darstellende Matrix von F .

Satz 0.31 – NORMALFORM

Es seien V, W endlichdimensional. Dann existieren Basen $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V , $\{w_1, \dots, w_m\}$ von W , so dass

die darstellende Matrix von F der Form $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ist.

Beweis: Sei $U = \text{Ker}(F)$ und $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis von U . Sei U' ein Komplement von U in $V \Rightarrow V = U \oplus U'$. Sei $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis von U' . $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V . $\text{Im}(F)$ hat $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$ als Basis.

$\sum_{i=1}^n \lambda_i F(v_i) = 0 \Rightarrow F(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in U \wedge \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \in U' \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. Ergänze $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$ zu einer Basis $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ von W . $F(v_1), \dots, F(v_r), F(v_{r+1}), \dots, F(v_n)$

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

□

Definition 0.32 – INVERTIERBARKEIT VON MATRIZEN

$A \in M_{n \times n}(K)$ ist invertierbar, falls es eine Matrix $B \in M_{n \times n}(K)$ gibt, so dass $A \cdot B = B \cdot A = Id_n$. B wird dann als A^{-1} bezeichnet.

$GL(n, k) = GL_n(K) = \{A \in M_{n \times n}(K) \mid A \text{ invertierbar}\}$ ist eine Gruppe.

$A \in GL_k(n) \Leftrightarrow \text{rg}(A) = n$ (Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie regulär ist).

Bemerkung: Sei A regulär. Dann besitzt ein Gleichungssystem der Form $A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ die eindeutige

Lösung, $A^{-1} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Bemerkung: A ist regulär genau dann wenn A sich durch elementare Zeilenoperationen in Id_n überführen lässt.

$E_{i,j}$ sei die Matrix, die an der Stelle ij 1 ist, ansonsten 0.

Elementare Zeilenoperationen sind:

Multiplikation der Zeile i mit λ : $Id_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.

Addieren von λ mal der i -ten Zeile zur j -ten: $Id_n + \lambda E_{i,j}$.

Vertauschung der i -ten und j -ten Zeile: $Id_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{j,i} + E_{i,j}$

Bemerkung: Das Inverse einer Matrix lässt sich durch Nutzen dieser elementaren Zeilenoperationen nach z.B. dem Gauß-Jordan Verfahren errechnen:

$$\left(A \mid Id_n \right) \xrightarrow{\text{Zeilenoperationen}} \left(Id_n \mid A^{-1} \right)$$

Die linke Hälfte der Ergebnis-Matrix enthält dann A^{-1} , denn:

$$B_m \dots B_2 B_1 A = Id_n \Rightarrow B_m \dots B_1 = A^{-1}$$

Definition 0.33 – ÜBERGANGSMATRIZEN

Es sei $\dim(V) = n$ und $\{v_1, \dots, v_n\}, \{v'_1, \dots, v'_n\}$ Basen von V . Weiterhin sei $F : V \rightarrow V, v_i \mapsto v'_i$. Dann gilt:

$$v'_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} v_j \text{ und die darstellende Matrix } S \text{ von } F, S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \text{ ist regulär.}$$

Definition 0.34

Zwei $(m \times n)$ Matrizen A, A' sind äquivalent, falls es reguläre Matrizen $T \in GL_m(K), S \in GL_n(K)$ gibt, so dass $A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$.

$A, A' \in M_{n \times n}(K)$ sind ähnlich, falls es $S \in GL_n(K)$ gibt, so dass $A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

Bemerkung: Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $M_{n \times n}(K)$.

Definition 0.35 – DETERMINANTE

$\det : K^n \rightarrow K$ ist eine multilineare alternierende Abbildung der Art, dass $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$.

$A \in M_{n \times n}(K)$

$A = (a_1 | a_2 | \dots | a_n) \Rightarrow \det(a_1, a_2, \dots, a_n) = \det(A)$.

$A = (a_{ij}), \det(a_{ij}) = \sum \text{sign}(\pi) \cdot \prod_{i=1}^n a_{\pi(i)i}$ mit $\text{sign}(\pi) = (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \pi}$ bzw. Anzahl von Faktoren von π als Produkt von Transpositionen.

Eigenschaften von Determinanten:

1. $\det(A \cdot B) = \det(A) \det(B)$
2. A ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A) \neq 0$
3. $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
4. $\det(A^T) = \det(A)$

Bemerkung: $\text{Id}_n + (-\text{Id}_n)$ ist nicht invertierbar, also $\exists A, B : \det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$

Satz 0.36 – LAPLACESCHER ENTWICKLUNGSSATZ

Sei j_0 ein Spaltenindex

$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_0} \det(A_{j_0 i})$ wobei $A_{j_0 i}$ die Matrix ohne Zeile j_0 und Spalte i ist.

Satz 0.37 – CRAMERSCHE REGEL

$$(a_1 | \dots | a_n) = A, A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ Falls } A \text{ regulär ist, gibt es eine einzige Lösung zum System: } \lambda_j = \frac{\det(a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \dots, a_n)}{\det(A)}$$

Definition 0.38 – DETERMINANTE EINES HOMOMORPHISMUS

Sei $F : V \rightarrow V$. $\det(F) = \det(A)$ wobei A eine Darstellungsmatrix von F bezgl. einer Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Definition 0.39 – ADJUNTE MATRIX

Sei A eine $n \times n$ Matrix, dann ist die Adjunte von A

$\text{adj}(A) = (\gamma_{ij})$ mit $\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$

Bemerkung: Sei c_i die j -te Zeile von $\text{adj}(A)$. Sei weiterhin a_i die i -te Spalte von A .

$$\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{jn} \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \gamma_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^n (-1)^{j+n} a_{ki} \det(A_{jk}) \stackrel{\text{Laplacescher Entw. Satz}}{=} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n) =$$

$$\begin{cases} \det(A) & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

Angenommen A ist regulär.

$$\text{adj}(A) \cdot A = \det(A) \cdot \text{Id}_n \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A) \cdot A} = \text{Id}_n = A^{-1} \cdot A \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = A^{-1} \Rightarrow A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \text{Id}_n$$

1. Diagonalisierbarkeit

Sei V ein Vektorraum, $\{U_i\}_{i=1}^k$ Unterräume von V .

$$V = \bigoplus_{i=1}^k U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i=1}^n U_i \wedge U_i \cap (\sum_{j=1}^k U_j) = 0$$

Äquivalent dazu ist, dass jeder Vektor $v \in V$ sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren $\cup_{j=i}^k B_j$ schreiben lässt, wobei B_j eine Basis von U_i ist.

Definition 1.1 – EIGENWERTE UND -VEKTOREN

Ein Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ besitzt einen Eigenvektor, falls es ein $v \in V \setminus \{0\}$, so dass $F(v) = \lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in K$. Falls $F(v) = \lambda v$ ist λ eindeutig bestimmt durch F und v . λ ist dann ein Eigenwert von F .

Definition 1.2 – EIGENRÄUME

$\lambda \in K, F : V \rightarrow V$ Endomorphismus.

$V(\lambda) = \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$, der Eigenraum zu λ ist ein UVR.

Bemerkung: λ ist ein Eigenwert von F gdw, $\dim(V(\lambda)) \geq 1$.

Bemerkung: Falls $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von $F \Rightarrow V(\lambda_i) \cap \sum_{j=1, j \neq i}^k V(\lambda_j) = \{0\}$

Definition 1.3 – DIAGONALISIERBARKEIT

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus. Bzw. eine Matrix $A : K^n \rightarrow K^n$.

F ist diagonalisierbar, falls $V = \bigoplus_{i=1}^k V(\lambda_i)$, λ verschiedene Eigenwerte von F .

Äquivalent dazu, wenn V eine basis von Eigenwerten von F besitzt. Äquivalent dazu, wenn F bezüglich

einer Basis von V die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ hat.

Äquivalent dazu, für Matrizen: A ist diagonalisierbar gdw. es eine reguläre Matrix S gibt, sodaß $S^{-1}AS =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Satz 1.4

$$A \in M_{n \times n}(K), \lambda \in K$$

λ ist ein Eigenwert von A gdw. $\lambda Id_n - A$ nicht regulär ist. $\Leftrightarrow \det(\lambda \cdot Id_n - A) = 0$

Definition 1.5 – CHARAKTERISTISCHES POLYNOM

Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ ist $\chi_A(T) = \det(T \cdot Id_n - A)$

Bemerkung: λ ist ein eigenwert von $A \Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$

Beispiel $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\chi_A(T) = T^2 + 1 = \det\left(\begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix}\right)$$

Bemerkung: A und A' ähnlich, $A' = s^{-1}AS \Rightarrow \chi_A(T) = \chi_{A'}(T)$. Insbesondere können wir über das charakteristische Polynom eines Endomorphismus reden.

$$A \in M_{n \times n}(K), \chi_A(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \dots + b_0 \text{ wobei } b_0 = (-1)^n \det(A), b_{n-1} = -\text{Tr}(A) = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Korollar 1.6

Ein Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ mit $\dim(V) = n < \infty$ kann höchstens n viele Eigenwerte besitzen.

Korollar 1.7

$F : V \rightarrow V$ mit $\dim(V) = n < \infty$ mit verschiedenen Eigenwerten $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ist diagonalisierbar, gdw. $n = \sum_{i=1}^k d_i, d_i = \dim(V(\lambda_i))$. d_i heißt geometrische Vielfachheit von λ_i .

Beweis:

\Rightarrow

F ist diag. gdw. V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, welche aus $\cup_{i=1}^n B_i$ besteht, $|B_i| = d_i = \dim(V(\lambda_i))$, $n = |B| = \sum_{i=1}^k |B_i|$

\Leftarrow

$n = \sum d_i \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^k (V(\lambda_i))) = n \Rightarrow V = \sum_{i=1}^k (V(\lambda_i))$ da die Eigenräume transversal sind, und ein Vektorraum nur einen UVR der dimension $\dim(V)$ hat, sich selbst. \square

Definition 1.8 – ALGEBRAISCHE VIELFACHHEIT

Es seien $F : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, $\dim(V) = n < \infty$, $\lambda \in K$ Eigenwert $\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$.

Dann gilt $\chi_F(T) = (T - \lambda)^K G(T)$, $G(\lambda) \neq 0$. k ist die algebraische Vielfachheit von λ , bzw. $\text{ord}_\lambda(F)$.

Bemerkung: $\text{ord}_\lambda(F) \geq \dim(V(\lambda))$

Beweis: Sei v_1, \dots, v_k eine Basis von $V(\lambda)$. Wir erweitern sie zu einer Basis $\{v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ von V . Die Darstellungsmatrix M von F bzw. B ist dann

$\{F(v_1), \dots, F(v_k), F(v_{k+1}), \dots, F(v_n)\}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda & C_2 \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

Wobei $C_2 \in \text{Mat}_{n-k \times k}(K)$.

$$\chi_F(T) = \det(TId_n - M) = (T - \lambda)^k \cdot \det(TId_{n-k} - C_1)$$

$\Rightarrow \text{ord}_\lambda(F) \geq k$. Wobei $\det(TId_{n-k} - C_1) = 0$ sein kann. \square

Lemma 1.9

Sei V endlichdimensional, $F : V \rightarrow V$ ein Endomorphismus, U ein F -invarianter Unterraum ($F(U) \subset U$).

$F' : V/U \rightarrow V/U$ ist eine lineare Abbildung, $\bar{v} \mapsto F(\bar{v})$. F' ist wohldefiniert, linear und es gilt $\chi_F(T) =$

$$\xi_{F|_U}(T) \cdot \xi_{F'}(T)$$

Beweis:

F' ist wohldefiniert;

$$\bar{v}_1 = \bar{v} \stackrel{ZZ}{\Rightarrow} F'(v_1) = F(v) \quad \bar{v}_1 = \bar{v} \Rightarrow v_1 = v + (v_1 - v), v_1 - v \in U$$

$$\Rightarrow F(v_1) = F(v) + F(v_1 - v), F(v_1 - v) \in U \Rightarrow F(\bar{v}_1) = F(\bar{v})$$

Restklassen sind linear und F ist linear $\Rightarrow F'$ ist linear.

Sei $\{u_1, \dots, u_k\}$ eine Basis von U . erweitert zu $\{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ sei sie eine Basis von V .

Bemerkung: $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V/U . Bew. Einfach.

Darstellungsmatrix H von F bzgl. B :

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & A & & C_2 \\ & & & \\ 0 & \dots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & C_1 \\ 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix} \text{ mit } A, C_1, C_2 \text{ Matrizen.}$$

$$\chi_F(T) = \det(T \text{Id}_n - H) = \det(T \text{Id}_n - \begin{pmatrix} A & C_2 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix})$$

$$= \det \begin{pmatrix} T_i d_k - A & -C_2 \\ 0 & T_i d_{n-k} - C_1 \end{pmatrix} = \det(T_i d_k - A) \det(T_i d_{n-k} - C_1)$$

A ist die Darstellungsmatrix von $F|_U$ bezüglich $\{u_1, \dots, u_k\} \Rightarrow \det(T \text{Id}_k - A) = \chi_{F|_U}(T)$

C_1 ist die Darstellungsmatrix von F' bzgl. $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$.

$$\Rightarrow \det(T \text{Id}_{n-k} - C_1) = \chi_{F'}(T)$$

□

Satz 1.10

Sei K ein Körper, $\dim(V) < \infty$, $F: V \rightarrow V$ ein Endomorphismus so gilt:

F Diagonalisierbar gdw $\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \dots (T - \lambda_n)^{k_n}$ in Linearfaktoren zerfällt, wobei für jeden Faktor $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $T - \lambda_i$ gilt $\text{ord}_{\lambda_i}(F) = \dim(V(\lambda_i))$.

Beweis:

\Rightarrow

Sei $b = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte. Ordne nun B um so dass

$v_1, \dots, v_{d_1} \in V(\lambda_1), v_{d_1+1}, \dots, v_{d_1+d_2} \in V(\lambda_2), \dots, v_{d_1+\dots+d_{r-1}}, \dots, v_{d_1+\dots+d_r} \in V(\lambda_r)$ mit $d_i = \dim(V(\lambda_i))$.

Die Darstellungsmatrix von F bzgl. B :

$$\begin{pmatrix} F(v_1), \dots, F(v_{d_1}), \dots, F(v_r) \\ \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_1 & \\ & & & \lambda_r \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Wobei d_i viele λ_i auf der Diagonale sind

$\chi_F(T) = \det(T \text{Id}_n - A) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r} ((T - \lambda_2)^{d_2} \dots (T - \lambda_r)^{d_r})(\lambda_1) \neq 0 \Rightarrow d_i = \text{ord}_{\lambda_i}(F)$, da die λ_i verschieden sind.

\Leftarrow

$$\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r}$$

$$F \text{ ist diag} \Leftrightarrow n = \dim(V) = \sum d_i$$

□

Definition 1.11

Eine Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ ist trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satz 1.12

$F : V \rightarrow V$ ist trigonalisierbar? gdw. $\chi_F(t)$ in Linearfaktoren zerfällt $\chi_F(T) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$.

Beweis: $\Rightarrow F$ hat Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\chi_F(T) = \det(T \cdot Id_n - A) = \prod_{i=1}^n (T - a_{ii}) \Leftarrow \text{Induktion über } n = \dim(V)$$

$n = 1 \Rightarrow$ Jede 1×1 Matrix ist in oberer Dreiecksform.

$n \geq 2$ $\chi_F(t) = (T - \lambda_1) \dots (T - \lambda_n)$. λ_1 ist ein Eigenwert $\Rightarrow \exists v_1 \in V \setminus \{0\} : F(v_1) = \lambda_1 v_1$. $U = \text{span}(v_1) \subset V$ ist F -invariant. Nach Lemma ... gilt $(T - \lambda_1) \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i) = \chi_{F|_U}(T) = \chi_{F|_U} \cdot \xi_{F|_U} = (T - \lambda_1) K[T]$ ist ein Integritätsbereich $\Rightarrow \exists_{F'}(T) = \prod_{i=2}^n (T - \lambda_i)$, $\dim(V/U) < \dim(V)$.

Nach Ia gibt es eine Basis $\exists(\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ von V/U derart, dass F' bzgl. dieser Basis Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & & X \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\mu_{ij}) \text{ Behauptung: Seien } v_i \in V, \bar{v}_i = v_i + U, 2 \leq i \leq n, \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ ist eine Basis von } V.$$

Bew. Übungsaufgabe.

Frage: Wie sieht die Darstellungsmatrix von F bzgl. $\{v_1, \dots, v_n\}$ aus?

$$\sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} \bar{v}_i = F'(v_j) = F(v_j)$$

$$\sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} \bar{v}_i = \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_i \Rightarrow \exists \mu_{ij} \in K/F(v_j) = \mu_{ij} v_1 + \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j = \sum_{1 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j$$

$$F(v_1)F(v_2), \dots, F(v_n)$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_{12} & \lambda_2 & X & \ddots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

□

Korollar 1.13

Jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes über einem algebraisch abgeschlossenen Körper (z.B. \mathbb{C}) ist trigonalisierbar.

Lemma 1.14

Sei V endlichdimensional über einem Körper K .

$v \in V \setminus \{0\} \exists r \in \mathbb{N} : F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$ a_i ist eindeutig bestimmt. Insb. ist $U = \text{Span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v))$

ist F invariant, hat Basis $v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)$

$F \upharpoonright U$ hat Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & \dots & a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$ $\chi_{F \upharpoonright U}(T) = T^r - a_{r-1}T^{r-1} - \dots - a_0$.

Beweis: $n = \dim(V)$. $\{v, F(v), \dots, F^n(v)\}$ sind lin. abh. Sei r die kleinste natürliche Zahl, so dass $\{v, F(v), \dots, F^r(v)\}$ lin. abh. sind. Dann sind $\{v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)\}$ linear unabhängig. $\xRightarrow{\text{Austauschprinzip von } r} F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$

wobei a_i eindeutig bestimmt sind.

$U = \text{span}(v_1, \dots, F^{r-1}(v))$ ist F -invariant. Sei $u \in U, u = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^i(v)$

$$F(u) = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v)$$

$$= \sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F^{i+1}(v) + \mu_{r-1} F^r(v) \text{ Wobei } F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v).$$

Beide Teile der Summe $\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F^{i+1}(v) + \mu_{r-1} F^r(v)$ liegen eindeutig in U , also liegt auch die Summe in U .

$\{v_1, \dots, F^{r-1}(v)\}$ ist eine Basis von U .

$$F(v_1), \dots, F(F^{r-1}(v))$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\chi_{F|_U}(T) = \det(T Id_r - A) = \det \begin{pmatrix} T & 0 & \dots & -a_0 & -1 & T & \dots & 0 & -1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \text{Laplacische Entwicklung nach der letzten Spalte:} = (-1)^{r+1}(-a_0)\det\left(\begin{pmatrix} -1 & T \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}\right) + (-1)^{r+2}(-a_1)\det\left(\begin{pmatrix} & T \\ 0 & -1 & \ddots \end{pmatrix}\right) + \\
& \dots + (-1)^{2r}(T-a_r)\det\left(\begin{pmatrix} T & & \\ -1 & T & \\ & & -1T \end{pmatrix}\right) = (-1)^r a_0(-1)^r + (-1)^{r+1}a_1T(-1)^{r+1} + \dots + (-1)^{2r}(T-a_1)T^{r-1} = \\
& -a_0 - a_1T - \dots - a_{r-1}T^{r-1} + T^r \quad \square
\end{aligned}$$

Notation:

$P(T) \in K[T]$, $P(T) + \sum_{i=0}^m a_i T^i$, $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus.

$P(f) : V \rightarrow V, v \mapsto \sum_{i=0}^m a_i F^i(v)$

Mit dieser Notation haben wir, dass im vorigen Lemma $\chi_{F|_U}(F) = F^r(v) - \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v) = 0$

Satz 1.15 – CALOY - HAMILTON

$F : v \rightarrow V$ Homomorphismus

$\chi_F(F)$ ist der 0 Endomorphismus auf V .

Beweis: z.Z. ist dass $\forall v \in V : \chi_F(F)(v) = 0$

$v = 0 \Rightarrow \chi_F(F)(v) = 0$

Ansonsten $v \neq 0$:

$\exists r : U := \text{span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v))$ ist F -invariant.

U - F -invariant $\Rightarrow \chi_f = \xi_{F|_U} \cdot \xi_{F'} = \xi_{F'} \cdot \xi_{F|_U}$, $F' : v/U \rightarrow V/U, \bar{w} \mapsto F(\bar{w})$.

Aufgabe:

$R(T) = P \cdot Q$

$R(F) = P \circ (Q(F))$ $\chi_F(F)(v) = \xi_{F'} \circ (\xi_{F|_U}(v))$, wobei $\xi_{F|_U}(v) = 0$, also $\xi_F F(v) = 0$. \square

Korollar 1.16

$A \in M_{n \times n}(K)$

$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i T^i \Rightarrow A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot A^i = 0$

Satz 1.17

V endlichdimensionaler V , $FV \rightarrow V$ Endomorphismus, Dann existiert genau ein normiertes Polynom kleinsten Grades, m_f , derart, dass $\forall P \in K[T] : m_F|_P \Leftrightarrow P(\tau) = 0$ Insbesondere gilt $m_F(F) = 0$. Das Polynom m_F heißt das Minimalpolynom von F .

Satz 1.18

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus, Dann existiert genau ein normiertes Polynom derart, dass $\forall P \in K[T]$ $m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$. Das Polynom $m_F(T)$ heißt das Minimalpolynom von F .

Beweis: Sei $\mathcal{F} = \{P[T] \text{ normiert} | P(F) = 0\}$ als Endomorphis..

Caley - Hamilton: $\chi_F(T) \in \mathcal{F} \neq \emptyset$ Sei $m = F(T) \in \mathcal{F}$ Polynom kleinsten Grades.

Zu zeigen: $\forall P \in K[T] | m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$

\Rightarrow

$m_F|_P \Rightarrow \exists Q \in K[T] : P = Q \cdot m_F$

$P(F) = Q(F) \circ m_F(F), m_F(F) = 0$

$P(F) = 0$

\Leftarrow

Sei $P \in K[T], P(F) = 0$. Division mit Rest $\Rightarrow \exists q, r \in K[T] : P = Qm_F + r, \text{Grad}(r) < \text{Grad}(m_F)$

$$0 = P(F) = Q(F) \circ m_F(F) + r(F) = r(F) = 0$$

$$\Rightarrow r(F) = 0 \text{ als Endomorphismus, } \Rightarrow r = 0. \text{ (sonst } \frac{1}{a_{\text{Grad}(T)}} \cdot r(T) \in \mathcal{F}$$

Eindeutigkeit:

Angenommen (m'_F) würde auch die Bedingungen erfüllen

$$m'_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0 \forall P \in K[T]$$

$$\Leftrightarrow M_F|_{m'_F} \wedge m'_F|_{m_F}$$

$$m_F = Qm'_F \wedge m'_F = Hm_F$$

zu Zeigen $Q = H = 1$. Sowohl m_F, m'_F beide normiert, $\Rightarrow Q, H$ sind normiert.

$$m_F = Q \cdot m'_F = QHm_F \wedge K[T] \text{ Integritätsbereich}$$

$$\Rightarrow 1 = QH$$

$$\text{Grad}(GH) = \text{Grad}(G) \text{Grad}(H) = \text{Grad}(1) = 0 \wedge G, H \text{ normiert}$$

$$\Rightarrow G = H = 1 \Rightarrow m_F = m'_F.$$

□

Frage

$$A \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m|_A =$$

$$\chi_A(T) = T^2 m_A|_{T^2} \Rightarrow m_A = \begin{cases} T \\ T^2 \end{cases} \quad m_A(A) = 0 \Rightarrow m_A \neq T \Rightarrow m_A = T^2$$

Lemma 1.19

gegeben $F : V \rightarrow V$, V endlich dimensional, F Endomorphismus, dann haben χ_F und m_F dieselben Nullstellen in K .

Beweis: $m_F|_{\chi_F} \Rightarrow \xi_F = Qm_F \Rightarrow \forall \lambda \in K$, falls $m_F(\lambda) = 0 \Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$

Sei $\lambda \in K$ $\chi_F(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von $F \Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : F(v) = \lambda v$. Sei $m_F(T) = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i T^i$. $0 = m_F(F)(v) = (F^d + \sum c_i F^i)(v) = F^d(v) + \sum c_i F^i(v) = \lambda^d v + \sum c_i \lambda^i v = (\lambda^d + \sum c_i \lambda^i) v = m_F(\lambda) v \Rightarrow m_F(\lambda) = 0$, da $v \neq 0$. □

Satz 1.20

$F : V \rightarrow V$, V endlichdimensional, F endomorphismus ist diagonalisierbar gw. $m|_F$ in lauter paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt.

Beweis:

\Rightarrow sei F diagonalisierbar. Dann gilt $\chi_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$, mit λ_i Eigenwerte von F . Ausserdem ist $V = \bigoplus_i V(\lambda_i)$. Sei $v \in V$ bel. Dann gilt $V = \sum_{i=1}^k V_i$ wobei $v_i \in V(\lambda_i)$.

Setze $P(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)$. z.Z. ist $P(T) = m_F(T)$.

$$P(F)(v) = \pi_{i=1}^k (F - \lambda_i)(v)$$

$$= \pi_{i=1}^k (F - \lambda_i)(\sum_{j=1}^k v_j)$$

$$= \sum_{j=1}^k (\pi_{i=1}^k (F - \lambda_i)(v_j))$$

$$= \sum_{j=1}^k (F - \lambda_1 Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_{j-1} Id) \circ (F - \lambda_{j+1} Id) \circ \dots \circ (F - \lambda_k Id) \circ (F - \lambda_j Id)$$

$$= 0, \text{ da } v_j \in V(\lambda_j).$$

v war beliebig $\Rightarrow P(F) = 0 \in \text{End}(V)$.

$$\text{Also } m_F|_P \Rightarrow P(T) = Q(T) \cdot m_F(T)$$

$$\text{Aber } m_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{S_i}, S_i \geq 1 \text{ und } P(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i) = Q(T) \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{S_i}$$

$\Rightarrow S_i = 1$ für $i = 1, \dots, k$, sonst wäre der Grad der rechten Seite gröss als der Grad der linken.

$$\Rightarrow m_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i).$$

\Leftarrow

Sei $m_F(T) = (T - \lambda_1) \circ \dots \circ (T - \lambda_k)$, $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$

z.Z. F ist diagonalisierbar. Es genügt zu Zeigen, dass $V = \bigoplus_i V(\lambda_i)$. Beweis durch Induktion:

Sonderfälle:

1. Sei $\dim(V) = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1) \Rightarrow \lambda_1$ ist Eigenwert von F . Sei v der Eigenvektor zu λ_1 dann folgt $V = \text{span}(v) = V(\lambda_1)$
2. Sei $\dim(V) = n \geq 2$ aber $k = 1$. $\Rightarrow m_F(T) = (T - \lambda_1)$. Nach Def von m_F gilt $m_F(F) = 0 \Rightarrow F - \lambda_1 = 0 \in \text{End}(V)$. Für alle $v \in V$ gilt $(F - \lambda_1)(v) = 0 \Rightarrow F(v) = \lambda_1 v \Rightarrow V = V(\lambda_1)$

Induktionsannahme: Der Satz gilt für den Fall $\dim(V) < n, n \in \mathbb{N}$. Also sei $\dim(V) = n \geq 2, k \geq 2$.

Zunächst zeigen wir: Behauptung (1): $V = \text{Ker}(F - \lambda_1 Id) \oplus \text{Im}(F - \lambda_1 Id)$. Idee: Zeige dass $\text{Ker}(F - \lambda_1 Id) = V(\lambda_1), \text{Im}(F - \lambda_1 Id) = V(\lambda_1) \oplus \dots \oplus V(\lambda_K)$

Bew.:

Sei $R(T) = \prod_{i=2}^k (T - \lambda_i) \Rightarrow m_F(T) = R(T)(T - \lambda_1)$.

Division mit Rest: $\exists Q(T), r \in K$, so dass:

$$R(T) = Q(T)(T - \lambda_1) + r$$

$$0 \neq R(\lambda_1) = 0 + r \Rightarrow r \neq 0 \in K$$

Sei $v \in V$ bel, $R(F)(v) = Q(F)(F - \lambda_1)(v)r \cdot v$

$$\Rightarrow v = \underbrace{\frac{1}{r}R(F)}_{\in \text{Ker}(F - \lambda_1)} + \underbrace{(F - \lambda_1) \cdot (-\frac{1}{r}Q(F)(V))}_{\in \text{Im}(F - \lambda_1)}$$

$$(F - \lambda_1)(R(F)(v)) = m_F(F)v = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}R(F) \in \text{Ker}(F - \lambda_1)$$

$$\Rightarrow V = \text{Ker}(F - \lambda_1) + \text{Im}(F - \lambda_1).$$

Zu zeigen ist nun noch, dass die Summe direkt ist. $\Leftrightarrow \text{Ker}(F - \lambda_1) \cap \text{Im}(F - \lambda_1) = \{0\}$.

Sei $v \in \text{Ker}(F - \lambda_1) \cap \text{Im}(F - \lambda_1) \Rightarrow v = (F - \lambda_1)(w), w \in V$

$$R(f)(v) = Q(F)(F - \lambda Id)(v) + r \cdot v$$

$$m_F(F) = (R(F) \cdot (F - \lambda_1))(w) = Q(f)(\underbrace{f\lambda_1 Id}_=0)v + rv \Rightarrow rv = 0, r \neq 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow V = \text{Ker}(F - \lambda_1 Id) \oplus (\text{Im}(F - \lambda_1 Id))$$

Setze $W = \text{Im}(F - \lambda_1)$ (W ist UVR von V mit $\dim(W) < \dim(V)$).

Behauptung (2): W ist F -invariant:

$$\text{Set } v \in W \text{ beliebig} \Rightarrow v = (F - \lambda_1)(w), w \in V \Rightarrow F(v) = F \circ (F - \lambda_1)(w) = (F - \lambda_1) \circ \underbrace{(F(w))}_{\in V} \in W$$

Setze $F' = F|_W \in \text{End}(W)$.

Beh. (3): $m_{F'}(T) = \prod_{i=2}^k (T - \lambda_i) (= R(T))$.

Sei $v \in W$ bel. $\Rightarrow v = (F - \lambda_1)(w), w \in V$

$$\Rightarrow R(F')(v) = (R(F) \circ \underbrace{(F - \lambda_1)}_{m_F(F)=0})(w)$$

$$\Rightarrow R(F') = 0 \in \text{End}(W)$$

$$\Rightarrow m_{F'}|_R$$

$$\Rightarrow R(T) = H(T) \cdot m_{F'}(T)$$

Es gilt auch $0 = m_{F'}(F') \circ (F - \lambda_1)(v)$

$$\Rightarrow m_{F'} \circ \underbrace{(F - \lambda_1)}_{=0} = 0 \in \text{End}(V)$$

$$\Rightarrow m_F(T)|_{m_{F'}(T) \cdot (T - \lambda_1)} \Rightarrow m_{F'}(T)(T - \lambda_1 = Q(T) \cdot (m_F(T)))$$

$$= Q(T)R(T)(T - \lambda_1)$$

$$\Rightarrow m_{F'}(T) = Q(T) \cdot R(T) = Q(T)H(T)m_{F'}(T)$$

$$\Rightarrow Q(T) = H(T) = 1, \text{ ansonsten wäre der Grad links und rechts verschieden}$$

$$R(T) = m_{F'}(T)$$

$$\stackrel{\text{IA}}{\Rightarrow} W = \bigoplus_{i=2}^k W(\lambda_i), \text{ mit } W(\lambda_i) \text{ Eigenraum von } F' \text{ zu } \lambda_i.$$

$$\Rightarrow V = V(\lambda_1) \oplus_{i=2}^k W(\lambda_i)$$

z.Z. $W(\lambda_i) = V(\lambda_i)$. Dann gilt $V = \bigoplus_{i=1}^k (V(\lambda_i))$.

Es gilt $W(\lambda_i) = \{w \in W : F'(W) = \lambda_i w\}$

$\subseteq \{v \in V : F(v) = \lambda_i v\} = V(\lambda_i)$

Sei $i > 1$, $v \in V(\lambda_i)$. $\Rightarrow F(v) = \lambda_i v$. Setze $w = \frac{1}{\lambda_i - \lambda_1} v \in V(\lambda_i)$. $\Rightarrow F(w) - \lambda_1 w = v \Rightarrow v \in \text{Im}(F - \lambda_1) = W$.
 $\Rightarrow v \in \bigoplus_{j=2}^k (W(\lambda_j)) \Rightarrow v \in W(\lambda_i)$, da $v = \sum \alpha_j w_j$ für $w_j \in W(\lambda_j)$, $\alpha_j \in K$. Aber die Summe der $V(\lambda_j)$ ist direkt und $v \in V(\lambda_i)$, damit kann nur α_i nicht 0 sein, damit ist $v = \alpha_i w_i \Rightarrow w \in W(\lambda_i)$

□

Bemerkung: $A \in \text{Mat}_{n \times n}(K) : A^2 = Id_n \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar.

$$A^2 = Id_n \Rightarrow (T^{-1})(A) = 0 \Rightarrow m_F|_{T^2-1} m_A = \begin{cases} T^2 - 1 = (T-1)(T+1) \\ T-1 \\ T+1 \end{cases}$$

Jordansche Normalform

Lemma 1.21

$F : V \rightarrow V$ Endomorphismus, $U \subset V$, dann ist U F -invariant gdw. $U(F - \lambda Id)$ -invariant ist $\forall \lambda \in K$.

Beweis: Übungsblatt 4

□

Beispiel

$F : V \rightarrow V$, $F \neq 0$ Endomorphismus, derart, dass $F^m = 0$ als Endomorphismus und $m > 0$ minimal (F ist nilpotent). $F^{m-1} \neq 0 \Rightarrow v \in V : F^{m-1}(v) \neq 0$. $\{v, F(v), \dots, F^{m-1}(v)\}$ ist linear unabhängig. Ergänze sie zu einer Basis B von V . $B = \{v, F(v), \dots, F^{m-1}(v), \dots, v_n\}$.

$F^{m-1}(v), \dots, F(v), v, \dots, v_n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & & * \\ 0 & \vdots & 0 & & \\ 0 & \dots & & & * \end{pmatrix}$$

Definition 1.22 – HAUPTTRAUM

Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $F : V \rightarrow V$, V endlichdimens..

$V(\lambda) = \text{Ker}(F - \lambda)$ Eigenraum von F bzgl. λ .

$\text{Ker}(F - \lambda) \subset \text{Ker}(F - \lambda)^2 \subset \dots$

$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(F - \lambda)^n$ ist der Hauptraum von F bzgl. λ .

Bemerkung: V_λ ist ein Unterraum und V_λ ist F -invariant, da V_λ $(F - \lambda)$ -invariant ist.

Bemerkung: Falls $\text{Ker}(F - \lambda) = V(\lambda) = 0$ ist $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Ker}(F - \lambda)^n = 0$.

Lemma 1.23

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_k$ verschiedene Elemente aus K . $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j=1, j \neq i}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$.

Beweis: $V_{\lambda_j} = (F - \lambda_j)$ invariant $\Rightarrow V_{\lambda_j}$ ist F -invariant $\Rightarrow (F - \lambda_i)$ invariant.

Wir wollen zuerst zeigen, dass $F - \lambda_i \upharpoonright V_{\lambda_j}$ ein Automorphismus ist falls $i \neq j$.

\Rightarrow es genügt zu zeigen, dass $F - \lambda_i$ injektiv auf V_{λ_j} ist.

Sei $w \in V_{\lambda_j} \setminus \{0\} \Rightarrow m \in \mathbb{N}$ kleinstmöglich, $(F - \lambda_j)^m(w) = 0 \Rightarrow (F - \lambda_j)^{m-1}(w) \neq 0 \Rightarrow ((F - \lambda_j)^{m-1}((\lambda_i - \lambda_j)(w))) \neq 0$

Sei $0 \neq (F - \lambda_j)^{m-1}(F(w) - \lambda_j w - (F(w) - \lambda_i w)) \Rightarrow (F - \lambda_i)^m(w) + (F - \lambda_j)^{m-1} \circ (F - \lambda_i)(w) \Rightarrow$

$$(F - \lambda_i)(w) \neq 0.$$

Inbesondere ist jede Potenz $F - \lambda_i^k$ ein Automorphismus von V_{λ_j} . $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j=1, j \neq i}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$ $v \in V_{\lambda_i} \cap \sum_{j \neq i} V_{\lambda_j}$
 $v = \sum_{j \neq i} v_j \in V_{\lambda_j} \Rightarrow \text{exists } m_j \text{ kleinstes } (F - \lambda_j)^{m_j}(v_j) = 0$
 $(F - \lambda_i)^{m_i} \circ \dots \circ (F - \lambda_{i-1}^{m_{i-1}} \circ \dots \circ (F - \lambda_{i-1}^{m_{i-1}+1} \dots (F - \lambda_k)^{m_k} \text{ ist eine Automorphismus von } V_{\lambda_i}$. Sie dieser
 automorph. H. $H(v) = \sum_{j \neq i} (H(v_j) = \sum_{j \neq i} (F - \lambda_1)^{m_1} \circ \dots \circ (F - \lambda_j)^{m_j}(v_j), (F - \lambda_j)^{m_j}(v_j) = 0 \Rightarrow H(v) =$
 $0 \Rightarrow v = 0.$ \square

Lemma 1.24

Sei $\lambda \in K$. $\dim(V_\lambda) = \text{ord}_\lambda(\chi_F)$. Ferner hat $F \upharpoonright V_\lambda$ hat Matrixdarstellung der der Form $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

Beweis: Sei $k = \text{ord}_\lambda(\chi_F(T))$. $\chi_F(T) = (T - \lambda)^k \cdot G(T)$ wobei $G(\lambda) \neq 0$.

Behauptung: es gibt einen F-invarianten Unterraum U von V der Dimension k so dass $F \upharpoonright U$ hat Ma-

trixdarstellung $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

Falls $n = 0 \Rightarrow$ klar. OBdA. ist $k \geq 1$. Wir beweisen die Behauptung mit Induktion auf $n = \dim(V)$.

$$n = 1$$

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : F(v) = \lambda v$$

$$\Rightarrow V = \text{span}(v) = U$$

$$n \geq 2$$

$\Rightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert

$$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} F(v) = \lambda v, U_0 = \text{span}(v) \Rightarrow \dim(U) = 1 \wedge \text{F-invariant} \Rightarrow \hat{F} : V/U_0 \rightarrow V/U_0, \bar{w} \mapsto F(\bar{w}), (T - \lambda)(T - \lambda)^{k-1} \cdot Q(T) = \chi_F(T) = \chi_{F \upharpoonright U}(T) \cdot \chi_{\hat{F}}(T) = \chi_{(T-\lambda)}(T) \cdot \chi_{\hat{F}}(T)$$

$$\Rightarrow \chi_{\hat{F}}(T) = (T - \lambda)^{k-1} \cdot Q(T), Q(\lambda) \neq 0$$

Nach Ia. existiert ein \hat{F} -invarianter Unterraum $\hat{U} \subset V/U_0$ der Dimension n-1, so dass die Matrixdarstellung von \hat{F} der Form $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ ist. Sei $\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_k$ eine Basis von \hat{U} so dass die Darstellungsmatrix von

$$\hat{F} \text{ bzgl. } \{v_2, \dots, v_k\} \begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\hat{F} \text{ bzgl. } \{v_2, \dots, v_k\}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ sind linear unabhängig. $U = \text{span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ hat Dimension k. U ist F-

$$\text{invariant, } F(\sum_{i=1}^k \mu_i v_i) = \sum \mu_i F(v_i) = \mu_1 \lambda v_1 + \sum_{i=2}^k \mu_i F(v_i) \in U$$

$$\text{Zu zeigen ist nun dass } U = V_\lambda. U \subset V_\lambda : \chi_{F \upharpoonright U} = (T - \lambda)^k \xrightarrow{\text{Caley-Hamilton}} (F - \lambda)^k = 0 \text{ auf } U$$

$$\Rightarrow U \subseteq \text{Ker}(F - \lambda)^k$$

Falls $U \subsetneq V_\lambda$

$$\Rightarrow \dim(V_\lambda) \geq 1.$$

$$(T - \lambda)^K \cdot G(T) = \chi_F(T) = \chi_{F \upharpoonright U}(T) \cdot \chi_{\hat{F}}(T) \Rightarrow \chi_{\text{hat } F}(T) = G(T) \text{ aber } G(\lambda) \neq 0.$$

λ ist kein Eigenwert von \hat{F} . \Rightarrow der Hauptraum von $\hat{F} : V/u \rightarrow V/u$ ist trivial.

Sei $w \in V_\lambda$

$$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{N} : (F - \lambda)^s(w) = 0 \Rightarrow (F - \lambda)^s(\bar{w}) = 0$$

$$\Rightarrow \bar{w} = 0 \Rightarrow w \in U.$$

\square

Definition 1.25

Ein Endomorphismus $F : V \rightarrow V$ heißt nilpotent, falls es eine nat. Zahl m gibt, so dass $F \circ \dots \circ F = F^m = 0$ auf V ist.

Lemma 1.26

Sei $F : V \rightarrow V$. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. F ist nilpotent

2. $\forall v \in V \exists m_v \in \mathbb{N} F^{m_v}(v) = 0$

3. Es existiert eine Basis von V , so dass F Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

4. $\chi_F(T) = T^n$

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$ trivial.

$2 \Rightarrow 3$ Induktion auf $n = \dim(V)$. Sei $v \in V \setminus \{0\}$

$\Rightarrow \exists m_v \in \mathbb{N}$ kleinstes $F^{m_v}(v) = 0$

$\Rightarrow m_v \neq 0$

$\Rightarrow F^{m_v-1}(v) \neq 0$

$\Rightarrow U = \text{span}(F^{m_v-1}(v))$

Ferner

$F(F^{m_v-1}(v)) = 0$

\Rightarrow Darstellungsmatrix bzgl. $\{F^{m_v-1}(v)\}$ ist (0) .

$n \geq 2$

Sei $v_1 \in V \setminus \{0\}$ so dass $F(v_1) = 0$

$\Rightarrow U = \text{span}(v_1)$ ist F -invariant.

$\Rightarrow \hat{f} = \begin{matrix} V/U \\ \dim=n-1 \end{matrix} \rightarrow V/U$

nach I.A. existiert eine Basis $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$, so dass die Darstellungsmatrix von \hat{F} die Form

$\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ hat.

Die Familie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist eine Familie von V und F hat Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$3 \Rightarrow 4$ $\chi_F(T) = \det(T \cdot Id_B - \begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} T & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & T \end{pmatrix}) = T^n$

$4 \Rightarrow 1$ Caley-Hamilton: $F^n = \chi_F(F) = 0$

□

Satz 1.27 – JORDAN-CHARVALLERY

Sei $F : V \rightarrow V$ Endomorphismus, V endl. dim. Falls $\chi_F(T)$ in Linearfaktoren zerfällt dann ist $V = \bigoplus_i^k V_{\lambda_i}$ mit λ_i verschiedene Eigenwerte. F hat dann eine Blockmatrix als Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k \end{pmatrix} \quad A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist $F = G + H$ mit G ist diagonalisierbar und H ist nilpotent, und $G \cdot H = H \cdot G$.

Beweis: $\chi_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$, λ_i verschieden.

$\dim(V) = \text{Grad}(\chi_F(T)) = n = \sum d_i = \sum \dim(V_{\lambda_i}) = \dim(V)$.

$\dim(\sum_{i=1}^k V_{\lambda_i}) = \sum d_i = b = \dim(V)$ da die Haupträume transversal sind.

$\Rightarrow V = \bigoplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$

V besitzt eine Basis B , welche aus der Vereinigung der Basen der V_{λ_i} besteht. F wird durch $F \upharpoonright V_{\lambda_1}, \dots, F \upharpoonright V_{\lambda_k}$ bestimmt. Die einzelnen $F \upharpoonright V_{\lambda_i}$ habe Matrixdarstellungen $A_i =$

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Die Darstellungsmatrix von F ist dann

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_k \end{pmatrix}$$

Sei $G : V \rightarrow V$ $G \upharpoonright V_{\lambda_i} =$ Multiplikation mit λ_i . G hat diagonale Matrixdarstellung bzgl. der Basis B :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_k \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Setze $H = F - G$. Die Darstellungsmatrix von H bzgl. B ist

$$\begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow H \text{ ist nilpotent.}$$

z. Zeigen $GH = HG$

Beachte, dass jedes V_{λ_i} G -invariant ist. Damit ist V_{λ_i} H -invariant.

Es genügt zu zeigen, dass $GH = HG$ auf V_{λ_i} . Sei $w \in V_{\lambda_i}$: $H(G(w)) = H(\lambda_i w) = \lambda_i H(w) = G(H(w))$. \square

Definition 1.28

$F : V \rightarrow V$, V endlichdimensional. Eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist F -adaptiert falls $F(v_1) = 0, F(v_j) = \begin{cases} 0 \\ v_{j-1} \end{cases}$

Bemerkung:

Falls V eine F -adaptierte Basis hat ist $F : V \rightarrow V$ nilpotent.

Beweis: Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ F -adaptiert. Es genügt zu zeigen dass $F^n = 0$.

$\sum_{j=1}^n \mu_j v_j = F^n(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j F^n(v_j)$

\square

$$\text{Notation } N_m = \begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}_{n \times n}$$

$$N_1 = (0)$$

$$N_m^m = 0$$

Definition 1.29

$F : V \rightarrow V$ nilpotent. Es existiert $m \in \mathbb{N}$ $\text{Ker}(F) \subset \dots \subset \text{Ker}(F^m) = \text{Ker}(F^{m+1}) = \dots \subset V$. m heißt der Index von F . $V = \text{Ker}(F^m) \oplus F^m(V)$

Satz 1.30

Sei $F : V \rightarrow V$ und B eine F -adaptierte Basis von V . Dann hat F Matrixdarstellung der Form:

$$\begin{pmatrix} N_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{k_n} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^r k_j = n$$

$$\text{Index}(F) = \max\{k_j\}_{1 \leq j \leq n}$$

Beweis: Sei $i_1 < \dots < i_r$ eine Aufzählung der Menge von Indices so dass $\{j | F(v_j) = 0\}$

$$v_1, v_2, \dots, v_{i_1}, v_{i_1+1}, \dots$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

□

Satz 1.31

Sei $F : V \rightarrow V$ nilpotent mit Index K , $\dim(V) = n < \infty$. Gegeben ein Unterraum U von V derart, dass $U \cap \text{Ker}(F^{k-1}) = \{0\}$. Dann lässt sich jede Basis von U zu einer F -adaptierten Basis von V ergänzen.

Bemerkung: $\text{Ker}(F) \subsetneq \text{Ker}(F^2) \subsetneq \text{Ker}(F^{k-1}) \subsetneq \text{Ker}(F^k) = \dots = V$.

$\text{Ker}(F^{k-1})$ hat ein Komplement U in $\text{Ker}(F^k)$

Beweis: Induktion auf k :

$$k = 1$$

$F = 0$ als Endomorphismus. \Rightarrow Jede Basis ist F -adaptiert.

$$k \geq 2:$$

Sei $V' = \text{Ker}(F^{k-1}) \subsetneq V$. Sei weiterhin $\{u_1, \dots, u_s\}$ eine Basis von U . $U \cap V' = \{0\}$. $U + V' = U \oplus U \oplus V'$ hat eine Basis: $\{u_1, \dots, u_s, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$. Ergänze diese Basis zu einer Basis von V :

$$\{u_1, \dots, u_s, \dots, u_r, v_1, \dots, v_m\}.$$

Sei $W = \text{span}(u, \dots, u_r)$, $U \subset W$, $W \cap V' = \{0\}$.

$F(W) \subset \text{Ker}(F^{k-1}) = V'$, da $F^k = 0$. V' ist F -invariant und $F \upharpoonright V'$ hat Index $k - 1$.

Beh.: $\{0\} = F(W) \cap \text{Ker}(F^{k-2})$

Sei $u \in F(W) \cap \text{Ker}(F^{k-2}) \Rightarrow F^{k-2}(u) = 0$. es existiert $w \in W : u = F(W)$

$$0 = F^{k-2}(u) = F^{k-1}(w)$$

$$\Rightarrow w \in \text{Ker}(F^{k-1} = V')$$

$$\Rightarrow w = 0$$

$$\Rightarrow u = F(w) = 0$$

Beh.: $\{F(u_1), \dots, F(u_r)\}$ sind linear unabhängig. also eine Basis von $F(W)$.

$$\sum_{i=1}^r \lambda_i F(u_i) = 0 = F(\sum_{i=1}^k \lambda_i F(u_i))$$

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i u_i \in \text{Ker}(F) \subset V'$$

$$\xRightarrow{W \cap V' = \{0\}} \sum_{i=1}^k \lambda_i u_i = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$$

Aus unserer Induktionsannahme: $F(W)$ und $F|_{V'} \Rightarrow$ Es existiert eine adaptierte Basis $\{v'_1, \dots, v'_m\}$ welche $\{F(u_1), \dots, F(u_r)\}$ ergänzt.

$F(u_j) = v'_{i_j}$ wobei $i_1 < \dots < i_r$ (ansonsten sortiere u_j um).

$$v_1 = v'_1$$

$$v_2 = v'_2$$

$$\vdots$$

$$v_{i_1} = v'_{i_1}$$

$$v_{i_1+1} = u_1$$

$$v_{i_1+2} = v_{i_1+1}$$

$$v_{i_1+} = v_{i_1+1}$$

(Füge an den Stellen i_j den Vektor u_j ein).

\rightarrow Basis von V .

Es genügt nun zu zeigen, dass diese Basis F -adaptiert ist.

$$\text{z.B. } F(v_{i_1+1}) = v'_{i_1} = F(u_1)$$

$$\Rightarrow u_1 - v_i \in \text{Ker}(F) \wedge u_1 - v_i \in V' \Rightarrow \text{Widerspruch.}$$

□

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\chi_A(T) = \det \begin{pmatrix} T-1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & T-2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & T-2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & T-3 \end{pmatrix} = (T-2) \det \begin{pmatrix} T-1 & 0 & -1 \\ 1 & T-2 & -1 \\ 1 & 0 & T-3 \end{pmatrix} = (T-2)^4 \Rightarrow 2 \text{ ist}$$

der einzige Eigenwert

$A - 2Id$ ist nilpotent.

$$A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ker}(A - 2Id) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$$

$$\text{Ker}(A - 2Id) \subsetneq \text{Ker}((A - 2Id)^2), \dim(\text{Ker}(A - 2Id)) = 4$$

$$\text{Die Jordansche Normalform ist dann: } \begin{pmatrix} 2 & 1 & & \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{pmatrix} \text{ Da es nur einen Vektor in } \text{Ker}((A - 2Id)^2) \text{ gibt}$$

der nicht in $\text{Ker}((A - 2Id))$ ist.

Korollar 1.32

Jeder Nilpotente Endomorphismus besitzt eine F-adaptierte Basis.

Korollar 1.33

Jeder nilpotente Endomorphismus lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix dar-

stellen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Korollar 1.34 – JORDANSCHES NORMALFORM

Jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix folgender Form darstellen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & \\ & & \ddots & 1 & & \\ & & & \lambda_1 & 0 & \\ & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & \lambda_k & 1 \\ & & & & & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & & & & & \lambda_k & 1 \end{pmatrix}$$

2. Dualität

Definition 2.1

Sei V ein K -Vektorraum. Der Dualraum V^* ist die Kollektion aller linearen Abbildungen von $V \rightarrow K$

Bemerkung: V^* ist ein K -Vektorraum. $F + G : V \rightarrow K, v \mapsto F(v) + G(v)$ ist linear,

$\lambda \in K, \lambda F : V \rightarrow K, v \mapsto \lambda F(v)$ ist auch linear

Definition 2.2

Sei V endlichdimensional und wähle eine Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V . Die duale Basis $B^* = \{b_1^*, \dots, b_n^*\}$

ist eine lineare Abbildung derart, dass $b_i^*(b_j) = 1_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{ansonsten} \end{cases}$

Insbesondere $b_i^*(V) = b_i^*(\sum_{j=1}^n \lambda_j b_j) = \lambda_i$

Bemerkung: Falls V endlichdimensional ist, dann ist B^* eine Basis von V^* und somit $V \simeq V^*$.

Beweis: b_1^*, \dots, b_n^* sind linear unabhängig.

1.)

$$\sum \lambda_i b_i^* = 0$$

$$\sum \lambda_i b_i^*(b_j) = 0, 1 \leq j \leq n \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad 2.)$$

$\text{span}(b_1^*, \dots, b_n^*) = V^*$ Sei $F : V \rightarrow K$ beliebig. $F(b_i) = \lambda_i \in K$

$$F - \sum \lambda_i b_i^* \stackrel{!}{=} 0$$

$(F - \sum \lambda_i b_i^*)(b_j) = 0 = F(b_j) - \sum \lambda_i b_i^*(b_j)$ Insbesondere ist $V \rightarrow V^*, b_i \mapsto b_i^*$ ein Isomorphismus.

Allerdings: Der Isomorphismus $V \simeq V^*$ hängt von der Wahl der Basis B ab, ist also nicht kanonisch. \square

Lemma 2.3 – KANONISCHER MONOMORPHISMUS

$$V \rightarrow (V^*)^*, v \mapsto \varphi_V : V^* \rightarrow K, F \mapsto F(V)$$

Beweis: φ_V ist wohldefiniert.

$$\varphi_V(F + G) = (F + G)(v) = (F(V) + G(V))$$

zu zeigen: φ_V ist injektiv. (Übungsaufgabe). \square

Korollar 2.4

Falls V endlichdimensional ist sind $V \simeq (V^*)^*$ kanonisch isomorph.

Beweis: $\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(V^*)^* \Rightarrow \varphi : V \rightarrow (V^*)^*$ ist surjektiv also auch ein Isomorphismus. \square

Lemma 2.5

Sei V endlichdimensional. Wähle Basen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ von V . Seien B^* und B'^* die entsprechenden dualen Basen in V^* . Wenn A die Transformationsmatrix von B nach B' ist, dann ist die Transformationsmatrix von B^* nach $(B')^*$ A^*-1

Beweis:
$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Sei X die Transformationsmatrix von B^* nach $(B')^*$.

$$v_{eb_1} : b_n \begin{pmatrix} b_1^* & \dots & b_n^* \end{pmatrix} = Id_n$$

$$\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b_1^*)' & \dots & (b_n^*)' \end{pmatrix} = Id_n$$

$$Id_n = \begin{pmatrix} (b_1^*)' \\ \vdots \\ (b_n^*)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_1 & \dots & b'_n \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} (b_1^*)' \\ \vdots \\ (b_n^*)' \end{pmatrix} (A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix})^T = X \begin{pmatrix} (b_1^*)' \\ \vdots \\ (b_n^*)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} A^T = X Id_n A^T \Rightarrow$$

$$X = (A^*)^{-1}$$

□

Definition 2.6

Sei $F : V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Definiere die duale Abbildung $F^* : W^* \rightarrow V^* : \psi \mapsto \psi \circ F$.

Bemerkung: F^* ist linear.

$$F^* (\psi_1 + \psi_2) = (\psi_1 + \psi_2) \circ F = \psi_1 \circ F + \psi_2 \circ F$$

$$U \xrightarrow{G} V \xrightarrow{F} W$$

$$W^* \xrightarrow{F^*} V^* \xrightarrow{G^*} U^*$$

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$$

Beweis: $\psi \in W^*$

$$(F \circ G)^*(\psi) = \psi \circ F \circ G = F^*(\psi) \circ G = G^*(F^*(\psi))$$

□

Eigenschaften:

$$1. Id_V^* = Id_{V^*}$$

$$2. (F + G)^* = F^* + G^*$$

$$3. (F \circ G)^* = G^* \circ F^*$$

$$4. (\mu F)^* = \mu F^*$$

Lemma 2.7

Falls $F^* = 0$ dann ist $F = 0$. Falls V und W endlich sind, $G : W^* \rightarrow V^*$ lineare Abbildung, dann gibt es $F : V \rightarrow W$ so dass $F^* = G$.

Beweis: $F=0$ Sei $v \in V$ beliebig. Zu zeigen: $F(v) = 0$

Definiere:

$$W^* \rightarrow K : \psi \mapsto \psi(F(v))$$

$$\text{Erinnerung: } W \leftrightarrow (W^*)^* : w \mapsto \psi_w : W^* \rightarrow K : \psi \mapsto \psi(w)$$

$$\varphi_{F(v)}(\psi) = \psi(F(v)) = F^*(\psi)(v) = 0$$

Abre φ ist ein Monomorphismus

$$\Rightarrow F(v) = 0 \Rightarrow F = 0.$$

□

Definition 2.8

Die Operation $*$: $Hom(V, W) \rightarrow Hom(W^*, V^*)$

Falls V, W endlichdim. sind.

$$\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$$

$$\dim(\text{Hom}(W^*, V^*)) = \dim(V^*) \cdot \dim(W^*) \text{ Also ist die Operation } * \text{ injektiv} \Rightarrow \text{surjektiv.}$$

Bemerkung: $F : V \rightarrow W$, $\dim(V) = n, \dim(W) = m$ hat die Darstellungsmatrix A bzgl. der Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V und $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ von W . Seien B^* und $(B')^*$ die entsprechenden dualen Basen von V^* und W^* .

Dann hat F^* die Darstellungsmatrix A^T bezgl $(B')^*$ und B^* .

Beweis:

$$F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

$$F^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_m \end{pmatrix} \cdot F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

$$\text{Die Darstellungsmatrix von } F^* \text{ ist } F^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_m \end{pmatrix} \cdot A$$

$$F^* \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = (A^T \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix})^T \Rightarrow \text{die Darstellungsmatrix von } F^* \text{ ist } A^T. \quad \square$$

Alternativer Beweis:

Beweis:

$$F^*(c_k^*) = \sum_l \lambda_{lk} b_l^*$$

$$F(b_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} c_j$$

$$F^*(C_k^*)(b_i) = (\sum \lambda_{lk} b_l^*)(b_i) = \lambda_{ik}$$

$$= c_k^*(F(b_i)) = c_k^*(\sum a_{ji} c_j) = a_{ki}$$

$$\Rightarrow A^T \text{ ist die Darstellungsmatrix on } F^*. \quad \square$$

Korollar 2.9

$$\det(F^*) = \det(F).$$

Lemma 2.10

$$V = \oplus_{i=1}^n V_i \Rightarrow V^* \simeq \oplus_{i=1}^n V_i^*$$

Der Beweis ist trivial: $V \rightarrow K$ ist eindeutig bestimmt durch $F|_{V_1}, \dots, F|_{V_n}$.

Lemma 2.11

$F : V \rightarrow W$ linear.

$$1. F \text{ injektiv} \Leftrightarrow F^* \text{ surjektiv}$$

$$2. F \text{ surjektiv} \Leftrightarrow F^* \text{ inj}$$

$$3. F \text{ Isom} \Leftrightarrow F^* \text{ Isom.}$$

Beweis:

1. $F : V \rightarrow W$ injektiv. z. Zeigen $F^* : W^* \rightarrow V^*$ surjektiv: Es existiert ein $\Theta : W \rightarrow K : F^*(\Theta) = \psi \in V^*, \forall v \in V \Theta(F(v)) = \psi(v)$

$V \simeq \text{Im}(F) \subset W$. Sei Z ein Komplement von $\text{Im}(F)$ in W . $W = \text{Im}(F) \oplus Z$. $\forall w \in W : w = w' + \hat{w}, w' = F(v), \hat{w} \in Z$.

Definiere $\Theta : W \rightarrow K : w = F(v) + \hat{w} \mapsto \psi(v)$. Θ ist wohldefiniert. Zu zeigen ist nun noch, dass Θ linear ist:

$$\Theta(w_1 + w_2) = \Theta(F(v_1) + F(v_2) + \hat{w}_1 + \hat{w}_2) = \psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2) = \Theta(w_1) + \Theta(w_2)$$

\Leftarrow

$F^* : W^* \rightarrow V^*$ surjektiv. Zu zeigen $F : V \rightarrow W$ ist injektiv. $v \in V : F(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.

Falls $v \neq 0 \Rightarrow \exists \psi : V \rightarrow K : \psi(v) \neq 0$

$$\Rightarrow \exists \Theta : W \rightarrow K : F^*(\Theta) = \psi \Rightarrow \underbrace{\Theta(F(v))}_{=0} = \underbrace{\psi(v)}_{\neq 0}$$

2. \Rightarrow

$F : V \rightarrow W$ surjektiv. Zu zeigen: $F^* : W^* \leftrightarrow V^*$ injektiv.

Sei $\Theta \in W^* : F^*(\Theta) = 0$ als lineare Abbildung. $F^*(\Theta) = \Theta \circ F : V \rightarrow K$. Zu zeigen: $\forall w \in W : \Theta(w) = 0$.

$w \in W : \exists v \in V : F(v) = w$. F surjektiv $\Theta(w) = \Theta(F(v)) = F^*(\Theta)(v)$.

$\Leftarrow F^* : V^* \rightarrow W^*$ ist injektiv. z.Z. F ist surjektiv.

Sei Z ein Komplement von $\text{Im}(F)$ in $W : W = \text{Im}(F) \oplus Z$. Zu zeigen ist nun, dass $Z = \{0\}$. Sonst sei B eine Basis von Z . $G : W \rightarrow K$ linear derart, dass $G|_{\text{Im}(F)} = 0$ und $\forall b \in B : G(b) = 1$. $\Rightarrow G \in W^* \Rightarrow F^*(G) = G \circ F : V \rightarrow K$. Sei $v \in V : G \circ F(v) = G(F(v)) = 0$. $F^*(G)$ ist die triviale Abbildung $\Rightarrow G = 0 \Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow Z = \{0\}$

□

3. Duale Paarungen

Definition 3.1 – BILINEARITÄT

Seien V, W K -Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi : V \times W \rightarrow K$ ist bilinear wenn φ linear in jeder Koordinate ist.

1. $\varphi(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \varphi(v, w_1) + \lambda_2 \varphi(v, w_2)$
2. $\varphi(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, v) = \lambda_1 \varphi(w_1, v) + \lambda_2 \varphi(w_2, v)$

Bemerkung: Falls V, W endlichdimensional mit Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V , $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ von W , dann ist φ eindeutig bestimmt durch die $(n \times m)$ Matrix $A = \varphi(b_i, c_j)$.

$$\varphi(v, w) = \varphi(\sum_{i \leq n} \lambda_i b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j) = \sum_{i \leq n} \lambda_i \varphi(b_i, \sum_{j \leq m} \mu_j c_j) = \sum_{i \leq n} \lambda_i \sum_{j \leq m} \mu_j \varphi(b_i, c_j) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Falls wir Basen B' von V und C' von W gewählt hätten, dann ist die Darstellungsmatrix von

$$\varphi : M(B, B')^T \cdot A \cdot M(C, C') \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = M(B, B') \begin{pmatrix} \lambda'_1 \\ \vdots \\ \lambda'_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix} = M(C, C') \begin{pmatrix} \mu'_1 \\ \vdots \\ \mu'_m \end{pmatrix}$$

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda'_1, \dots, \lambda'_n) M(B, B')^T$$

Korollar 3.2

Der Rang hängt nicht von der Auswahl der Basen ab. Somit ist der Rang von φ ($\text{rg}(\varphi)$) wohldefiniert.

Definition 3.3 – DUALES PAAR

Ein Tupel (V, W, φ) ist ein duales Paar, falls:

1. $\dim(V) < \infty, \dim(W) < \infty$
2. $\dim(V) = \dim(W)$
3. φ ist bilinear.
4. $\text{rg}(\varphi) = \dim(V)$

Bemerkung: Falls $\varphi : V \times W \rightarrow K$ bilinear ist, dann ist $\varphi' : W \times V \rightarrow K : (w, v) \mapsto \varphi(v, w)$ auch bilinear. Wenn (V, W, φ) ein duales Paar ist, dann ist auch (W, V, φ') auch ein duales Paar.

Lemma 3.4

Für gegebene V und W gilt:

$$\{\varphi : V \times W \rightarrow K\} \xrightarrow{\Phi} \{F : V \rightarrow W^*\}$$

$$\varphi : V \times W \rightarrow K \xrightarrow{\Phi} F_\varphi : V \rightarrow W^* : v \mapsto F_\varphi : W \rightarrow K : w \mapsto \varphi(v, w)$$

$$\varphi_F : V \times W \rightarrow K \xleftarrow{\Phi^{-1}} F : V \rightarrow W^* : (v, w) \mapsto F(v)(w)$$

Ferner gilt: (v, w, φ) ist ein duales Paar $\Leftrightarrow F_\varphi : V \rightarrow W^*$ Isomorph.

Beobachtung:

$$\Phi^{-1} \cdot \Phi(\varphi)(v, w) = \Phi^{-1}(F_\varphi(v) : w \mapsto \varphi(v, w)) = \varphi(v, w)$$

Beweis: Φ ist wohldefiniert:

1. $F_\varphi(v) \in W^*$, weil $\varphi(v, -)$ linear in der zweiten Koordinate ist.
2. F_φ ist linear, weil φ in der ersten Koordinate linear ist.

$\Phi^{-1} \cdot \Phi = Id_X, \Phi \cdot \Phi^{-1} = Id_Y$ mit X linke, Y rechte Menge von Φ (in der Definition oben).

Falls V, W endlichdimensional sind, mit Basen $\{b_1, \dots, b_n\}, \{c_1, \dots, c_m\}$. A_φ sei die Darstellungsmatrix bezüglich dieser Basen $A_\varphi = (a_{ij}) = (\varphi(b_i, c_j))$

Sei $\{c_1^*, \dots, c_m^*\}$ die duale Basis zu C in W^* . $c_i^*(c_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \end{cases}$.

Die Darstellungsmatrix von F_φ bezüglich B, C^* $(\lambda_{ij}) \in M_{m \times n}(K), F_\varphi(b_k) = \sum \lambda_{lk} c_l^* (\sum \lambda_{lk} c_l^*)(c_r) = \sum \lambda_{lk} c_l^*(c_r) = \lambda_{rk} = F_\varphi(b_k)(c_r) = \varphi(b_k, c_r)$

$$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots \\ \lambda_{21} & & \ddots \\ \vdots & & \end{pmatrix} = A_\varphi^T$$

$$\text{rg}(A_\varphi^T) = \text{rg}(A)$$

$$(V, W, \varphi) \text{ ist ein duales Paar} \Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W) = \dim(W^*) = \text{rg}(A_\varphi) = \text{rg}(A_\varphi^T)$$

$$\Leftrightarrow F_\varphi \text{ ist ein Isomorphismus.} \quad \square$$

Korollar 3.5

Seien V, W endlichdimensional, $\varphi : V \times W \rightarrow K$ eine Bilinearform. Dann ist (V, W, φ) ein duales Paar genau dann, wenn φ nicht ausgeartet ist.

$$\text{d.h. } \forall v \in V \varphi(v, w) = 0 \forall w \in W \Rightarrow v = 0 \wedge \forall w \in W \varphi(v, w) = 0 \forall v \in V \Rightarrow w = 0$$

Beweis: \Rightarrow

1. Sei $V \in V$ fest : $\varphi(v, w) = 0 \forall w \in W \Rightarrow F_\varphi(V)(w) = 0 \Rightarrow (V, W, \varphi)$ ist ein duales Paar $\Rightarrow v = 0$
2. (V, W, φ) duales Paar $\Rightarrow (W, V, \varphi')$ auch dual $\Rightarrow F_{\varphi'} : W \rightarrow V^*$ Isomorphismus $\Rightarrow w \in W \varphi(v, w) = 0 \forall v \in V \Rightarrow F_\varphi(w) = 0 \Rightarrow w = 0$

\Leftarrow

Es genügt zu zeigen, dass $F_\varphi : V \rightarrow W^*$ ein Isomorphismus ist.

a.) $\Rightarrow F_\varphi$ ist ein Monomorphismus (injektiv).

Insbesondere ist $\dim(V) \leq \dim(W^*) = \dim(W)$. Es genügt zu zeigen, dass $\dim(V) = \dim(W^*)$, da F_φ injektiv ist.

(W, V, φ') ist eine Bilinearform.

Aus b.) folgt $\Rightarrow F_{\varphi'}$ injektiv \square

Beispiel:

$$(R^n, \langle, \rangle) \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \rangle = \sum x_i y_i$$

Korollar 3.6

Sei (V, W, φ) ein duales Paar. Für jede Basis $\{c_1, \dots, c_n\}$ aus W gibt es eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ aus V , welche dual zu $\{c_1, \dots, c_n\}$ ist: $\varphi(b_i, c_j) = S_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \end{cases}$

Beweis: Für $\{c_1, \dots, c_n\}$ aus W eine Basis. Sei $\{c_1^*, \dots, c_n^*\}$ die duale Basis aus W^* .

$F_\varphi : V \rightarrow W^*$ Iso. Sei $b_i = F_\varphi^{-1}(c_i^*)$. $\{b_1, \dots, b_n\}$ ist dann eine Basis von V .

$$\varphi(b_i, c_j) = F_\varphi(b_i)(c_j) = c_j^*(b_i) = \delta_{ij}$$

□

Definition 3.7

Sei (V, W, φ) ein duales Paar. Gegeben $U \subset V$ UVR von V . Definiere $U^\perp = \{w \in W : \forall u \in U : \varphi(u, w) = 0\}$. U^\perp ist ein UVR von W .

Beispiel:

$$(0)^\perp = W, V^\perp = \{0\}$$

Bemerkung: $U \subset V, (U^\perp)^\perp = \{v \in V : \forall w \in U^\perp \varphi(v, w) = 0\} = U$

Beweis: $U \subset (U^\perp)^\perp$ trivial.

Sei $v \notin U$. z.Z. $v \notin (U^\perp)^\perp$. es existiert $G : V \rightarrow K : G|_U = 0, G(v) = 1$. $G \in V^* \simeq W$ (da F_φ ein Isomorphismus ist. $\Rightarrow \exists w \in W : F_\varphi(w) = G$. D.h. $\forall z \in V : G(z) = \varphi'(z, w)$ $u \in U : 0 = G(u) = \varphi(u, w) \Rightarrow w \in U^\perp$ aber $G(v) = 1 = \varphi(v, w) \Rightarrow v \notin (U^\perp)^\perp$ □

Lemma 3.8

Sei (V, W, φ) ein duales Paar und $U \subset V$ UVR. Dann ist $(V/U, U^\perp, \bar{\varphi})$ ein duales Paar, wobei $\bar{\varphi}(v+U, w) = \varphi(v, w)$. Insbesondere gilt $\dim(V/U) + \dim(U^\perp) = \dim(W)$

Beweis: Übungsaufgabe. □

Definition 3.9 – ADJUNGIERTER ENDOMORPHISMUS

Sei (V, W, φ) ein duales Paar und $G : W \rightarrow W$ ein Endomorphismus. Der adjungierte Endomorphismus $G^T : V \rightarrow V$ und definiert als $G^T = F_\varphi^{-1} \cdot G^* \cdot F_\varphi$

4. Euklidische Räume

Definition 4.1 – SYMMETRISCHE BILINEARFORM

Eine Bilinearform $\varphi : V \times V \rightarrow K$ ist symmetrisch, falls $\varphi = \varphi' \Leftrightarrow \forall u, v \in V : \varphi(u, v) = \varphi(v, u)$

Bemerkung: Seien B, C Basen von V und A die Darstellungsmatrix von φ bzgl. B und C . Dann gilt:

φ ist symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^T$

Beweis:

\Rightarrow

Siehe Übungsblattt

\Leftarrow

$$\varphi(u, v) = u^T \cdot A \cdot v = (A^T \cdot u)^T \cdot v = v^T \cdot ((A^T \cdot u)^T)^T = v^T \cdot A^T \cdot u = v^T \cdot A \cdot u = \varphi(v, u) \quad \square$$

Bemerkung: Wenn φ symmetrisch ist ist der Begriff der orthogonalität wohldefiniert und vor allem symmetrisch.

$$u \perp v \Leftrightarrow \varphi(u, v) = 0$$

$$v \perp u \Leftrightarrow \varphi(v, u) = 0$$

Beispiel:

$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ist symmetrisch.

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$$

Definition 4.2 – QUADRATISCHE FORM

Sei $\varphi : V \times V \rightarrow K$ eine symmetrische Bilinearform. Die zugehörige quadratische Form ist: $q : V \rightarrow K, v \mapsto \varphi(v, v)$

Bemerkung: $\dim(V) = n$ Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine Basis.

φ hat die Darstellungsmatrix A bzgl. B .

$$Q(v) = \varphi(v, v) = \varphi(\sum \lambda_i b_i, \sum \lambda_i b_i) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

Korollar 4.3

Fallse $\text{char}(K) \neq 2$:

Jede symmetrische Lienarform is durch ihre quadratische Form eindeutig bestimmt.

$$q(u + v) = \varphi(u + v, u + v) = \varphi(u, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, u) + \varphi(v, v) = \varphi(u, u) + \varphi(v, v) + 2\varphi(u, v) =$$

$$q(u) + q(v) + 2\varphi(u, v)$$

$$q(u - v) = \dots = q(u) + q(v) - 2\varphi(u, v)$$

$$\text{Insbesondere: } \varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}$$

Definition 4.4 – BILINEARFORM DIFINIT

Sei V ein endlichdimensionaler \mathbb{R} -Vektorraum und $\varphi : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform.

1. Wir sagen, dass φ positiv semidifinit ist, falls $\varphi(u, u) \geq 0 \forall u \in V$.

2. Falls $\varphi(u, u) \leq 0 \forall u \in V$ ist φ negativ semidefinit
3. φ ist positiv definit, falls φ pos. semidefinit ist und $\varphi(u, u) > 0 \forall u \in V \setminus \{0\}$
4. φ ist negativ definit, falls φ neg. semidefinit ist und $\varphi(u, u) < 0 \forall u \in V \setminus \{0\}$
5. Ansonsten ist φ indefinit.

Beispiel:

1. Standard Skalarprodukt auf \mathbb{R}^n ist positiv definit
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_2$ Ist positiv semidefinit aber nicht pos. definit ($\varphi((0, 1), (0, 1)) = 0$).
3. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_1 - x_2 y_2$ ist indefinit.

Bemerkung: φ ist pos. (semi) definit $\Leftrightarrow -\varphi$ ist neg. (semi) definit.

Definition 4.5 – SKALARPRODUKT

Ein Skalarprodukt auf einem endliche nVektorraum V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform.
 $\varphi(u, v) \rightarrow \langle u, v \rangle$

Definition 4.6 – EUKLIDISCHER RAUM

(V, \langle, \rangle) ist ein euklidischer Raum, wenn V ein endlicher \mathbb{R} -Vr ist und \langle, \rangle ein Skalarprodukt.

Definition 4.7 – NORM, NORMIERTER VEKTORRAUM

Eine Norm auf einem \mathbb{R} -Vektorraum V ist eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$, so dass:

1. $\|v\| \geq 0$
 $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
3. Dreiecksungleichung:
 $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

$(V, \|\cdot\|)$ ist ein normierter Vektorraum.

Beispiel:

1. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, die euklidische Norm.
2. $\|x\|_{\infty} = \max |x_i|$
3. $\|x\|_{\infty} = \max(|x_i|)$

Definition 4.8

Sei (V, \langle, \rangle) ein euklidischer Raum und definiere $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Die Abbildung ist wohldefiniert und induziert sie eine Norm auf V .

Lemma 4.9 – CAUCHY-SCHWARZ UNGLEICHUNG

$$\forall v, w \in V : | \langle v, w \rangle | \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Beweis: Falls $w = 0$ ist die Aussage trivial. ObdA. ist $w \neq 0$, also $\|w\| > 0$.

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$0 \leq \langle v - \lambda w, v - \lambda w \rangle = \|v\|^2 + \lambda^2 \|w\|^2 - 2\lambda \langle v, w \rangle$$

$$\text{Insbesondere } 2\lambda \langle v, w \rangle \leq \lambda^2 \|w\|^2 + \|v\|^2.$$

Falls $\lambda = \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} \in \mathbb{R}$:

$$2 \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \leq \|v\|^2 + \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\langle v, w \rangle^2}{\|w\|^2} \geq \|v\|^2 \Rightarrow \langle v, w \rangle^2 \leq \|v\|^2 \cdot \|w\|^2$$

$$\Rightarrow | \langle v, w \rangle | \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

□

Korollar 4.10

(V, \langle, \rangle) ist ein Euklidischer Raum:

$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \sqrt{\langle v, v \rangle}$ ist eine Norm.

Beweis:

1. Klar.

$$2. \|\lambda v\| = \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} = \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} = |\lambda| \cdot \|v\|$$

3. Es genügt zu zeigen, dass $\|u + v\|^2 \leq (\|u\| + \|v\|)^2$

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + 2 \langle u, v \rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2$$

□

Definition 4.11

Sei (V, \langle, \rangle) ein euklidischer Raum.

$$-1 \leq \frac{\langle v, u \rangle}{\|v\| \|u\|} \leq 1$$

$$= \cos(\Theta)$$

Mit $\Theta \in (0, \pi]$ ist eindeutig bestimmt. Θ ist der Winkel zwischen u und v .

Bemerkung: $u \perp v \Leftrightarrow \langle uv \rangle = 0 \Leftrightarrow$ der Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist.