Lineare Algebra II

Inoffizieller Mitschrieb

Stand: 17. Juli 2018

Vorlesung gehalten von:

Prof. Dr. Amador Martín-Pizarro
Abteilung für Angewandte Mathematik
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

0. Recap

Definition 0.1 – Ring

Ein (kommutativer) Ring (mit Einselement) ist eine Menge zusammen mit zwei binären Operationen $+, \cdot$, derart, dass:

- $(R, +)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(R, \cdot)$ ist eine kommutative Halbgruppe
- die Dsitributivgesetze:
  $a(x + y) = ax + ay$
  $(x + y)z = xz + yz)$

Definition 0.2 – Integritätsbereich

Ein Integritätsbereich ist ein Ring ohne Nullteiler. Also $\forall x, y \in R : x \cdot y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0$

Definition 0.3 – Körper

Ein Körper ist ein Ring der Art, dass

1. $1 \neq 0$
2. $\forall x \in K : x \neq 0 \Rightarrow \exists x^{-1} : xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

Bemerkung: Körper sind Integritätsbereiche.

Definition 0.4 – Charakteristik

Sei R ein nicht trivialer Ring $(0 \neq 1)$. $\varphi : \mathbb{Z} \to R, z \mapsto \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 1 & n >= 0 \\ -\sum_{i=1}^{n} 1 & \text{ansonsten} \end{cases}$
Dann ist φ ein Ringhomomorphismus.
Für den Kern von φ ($\mathrm{Ker}(\varphi)$) gibt es zwei Möglichkeiten.

1. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}, p = 0$
2. $\mathrm{Ker}(\varphi) \neq \{0\}$. Dann gibt es ein kleinstes echt positives Element $p \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.

R hat dann Charakteristik p ($\mathrm{Char}(R) = p$). Falls R ein Integritaetsbereich ist, dann ist p eine Primzahl.
Beispiele:
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \ldots, \bar{n}\}$ hat Charakteristik n.
Insbesondere enthält jeder Körper mit Charakteristik p eine "Kopie" von $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$:
k hat Charakteristik p $\Rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \overset{injectiv}{\leftrightarrow} K$.
Hier ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper:
$a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} \Rightarrow$ es ist a mit p teilerfremd. $1 = a \cdot b + p \cdot m \Rightarrow \bar{1} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

Definition 0.5 – Polynomring

Sei K ein Körper. Der Polynomring $K[T]$ in einer Variable R über K ist die Menge formeller Summen der Form:
$f = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot T^i, n \in \mathbb{N}$

Der Grad von $f \in K[T]$ ist definiert als:
$\text{Grad}(f) := max(m|m < n \wedge a_m \neq 0)$
$\text{Grad}(0) := -1$
Falls $Grad(f) = n$ und $n = 1$ heißt das Polynom normiert.
Die Summe und das Produkt von Polynomen sind definiert als:
$\sum_{i=0}^{n} a_i T^i + \sum_{j=0}^{m} b_j T^j := \sum_{k=0}^{max(m,n)} (a_k b_k) T^k$
$\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j T^j := \sum_{k=0}^{m+j} = c_K T^k, c_k = \sum_i + j = k a_i b_j$

Bemerkung: $K[T]$ ist ein Integritätsbereich.

Korollar 0.6

Es seien f, g beide $\neq 0$
$\Rightarrow \text{Grad}(f \cdot g) = \text{Grad}(f) + \text{Grad}(g) \Rightarrow f \cdot g \neq 0$
$\text{Grad}(f + g) \leq max(\text{Grad}(f), \text{Grad}(g))$

Satz 0.7 – Division mit Rest

Gegeben $f, g \in K[T], \text{Grad}(g) > 0$. Dann existieren eindeutige Polynome q, r, so dass $f = g\dot{q} + r$, wobei $\text{Grad}(r) < \text{Grad}(g)$.

Beweis: Eindeutigkeit: Angenommen $f = g \cdot q + r = g \cdot q' + r', q \neq q' \vee r \neq r'$.
$\Rightarrow g(q - q') = r' - r \Rightarrow \text{Grad}(r' - r) = max(\text{Grad}(r'), \text{Grad}(r)) < \text{Grad}(g) = \text{Grad}(g(q - q')) \Rightarrow$ Widerspruch
$\Rightarrow q = q' \Rightarrow r = r'$ Existenz: Induktion auf $\text{Grad}(f)$
$\text{Grad}(f) = 0 \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$
$\text{Grad}(f) = n + 1$
$\text{Grad}(f) < \text{Grad}(g) = m \Rightarrow f = g \cdot 0 + f$
OBdA. $n + 1 = \text{Grad}(f) \geq \text{Grad}(g) = m > 0$
$f = a_{n+1} \cdot T^{n+1} + \hat{f}, \text{Grad}(\hat{f}) \leq n, a_{n+1} \neq 0$
Sei $f' = f - b_m^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} \cdot g \Rightarrow \text{Grad}(f') \leq n$ Ia: $f' = g \cdot q' + r', \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g)$
$f' = f - b - b^{-1} a_{n+1} Tn + 1 - m \cdot g \Rightarrow f = g(b_n^{-1} a_{n+1} T^{n+1-m} + q') + r' \Rightarrow \text{Grad}(r') < \text{Grad}(g)$ □

Definition 0.8 – Polynom Teilt

$f, g, q \in K[T]$, $\text{Grad}(g) > 0$
g teilt $f = g|_f \Leftrightarrow f = g \cdot q$

Definition 0.9 – Nullstellen von Polynomen

$f \in K[T]$ besizt eine Nullstelle $\lambda \in K$ gdw. $(T - \lambda)|_f \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$.
f lässt sich dann schreiben als $f = (T - \lambda)q + r$.

Lemma 0.10

$f \in K[t], f \neq 0, \text{Grad}(f) = n \Rightarrow$ f besitzt höchstens n Nullstellen in k.

Beweis:

$n = 0 \ \Rightarrow f = a_0, a_0 \neq 0$

$n > 0$ Falls f keine Nullstellen in K besitzt $\Rightarrow$ ok!
Sonst, sei $\lambda \in K$ eine Nullstelle von f. $f = (T - \lambda) \cdot g, \mathrm{Grad}(g) = n - 1 < n$
I.A besitzt g höchstens n - 1 Nullstellen. Jede Nullstelle von f ist entweder λ oder eine Nullstelle von g. $\Rightarrow$ f hat höchstens n Nullstellen.

□

Definition 0.11 – Vielfachheit einer Nullstelle

$f \in K[T], f \neq 0, \lambda \in K$ Nullstelle von f $\Rightarrow f = (T - \lambda)^{K_\lambda} \cdot g, g(\lambda \neq 0$. K_λ ist die Vielfacheit der Nullstelle λ in f.

Definition 0.12

Ein Körper heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes Polynom über K positiven Grades eine Nullstelle besitzt.

Beispiele Ist $\mathbb{R}$ algebraisch abgeschlossen? Nein: $T^2 + 1$.
Bem.: $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen.
Bemerkung: Jeder algebraisch abgeschlossene Körper muss unendlich sein. Sei $K = \{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}, f = (T - \lambda), \ldots, (T - \lambda_n) + 1$.

Lemma 0.13

K ist genau dann algebraisch abgeschlossen, wenn jedes Polynom positiven Grades in lineare Faktoren zerfällt.
$f = T(\lambda_1) \ldots (T - \lambda_n)$.

Beweis:

$\Leftarrow$ trivial

$\Rightarrow$ $\mathrm{Grad}(f) = n > 0 \Rightarrow f = (T - \lambda_1) \cdot g, \mathrm{Grad}(g) \leq n - 1 < n \overset{I.A.}{\Rightarrow} f = c(T - \lambda_1) \ldots (T - \lambda_n)$

□

Definition 0.14 – Vektorraum

Vektorraum V über K ist eine abelsche Gruppe $(V, +, 0_V)$ zusammen mit einer Verknüpfung $K \times V \to V$ $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ die die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\lambda(v + w) = \lambda v + \lambda w$
2. $\lambda(\mu\Big()\Big) = (\lambda\mu)v$
3. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$
4. $1_k v = v$

Definition 0.15 – Unterverktorraum

Ein Untervektorraum $U \subset V$ ist eine Untergruppe, welche unter der Skalarmultiplikation abgeschlossen ist.

Bemerkung: $\{U_i\}_{i\in I}$ Untervektorräume von V $\Rightarrow \bigcap_{i\in I} U_i$ ist Untervektorraum. Insb. gebenen $M \subset V$ existiert span$(M) =< M >=$ der kleinste Unterraum von V, der M enthält.
span$(M) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i m_i$, $m_i \in M, \lambda_i \in K, n \in \mathbb{N}$
M ist ein Erzeugendensystem für span(M)
Außerdem gilt:
$\sum_{i\in I} U_i = \text{span}(\bigcup_{i\in I} U_i)$
$M_1 \subset M_2 \Rightarrow \text{span}(M_1) \subset \text{span}(M_2)$

Definition 0.16 – Lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über K. Dann gilt $v_1, \ldots v_n$ sind linear unabhängig falls $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K : \sum \lambda_i v_i \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ $M \subset V$ ist linear unabhängig, falls jede endliche Teilmenge von M linear unabhängig ist. Äquivalent dazu ist: M ist linear unabhängig, falls kein Element von M sich als Linearkombination der anderen schreiben lässt.

Definition 0.17 – Basis

Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}, v_i \in V$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent und definieren eine Basis:

1. B ist ein lineare unabhängiges Erzeugendensystem von V
2. Jedes Element von V lässt sich eindeutig als Linearkombination der Elemente in B schreiben.
3. B ist ein minimales Erzeugendensystem.
4. B ist maximal lineare unabhängig.

Satz 0.18 – Basisergänzungssatz

Sei $M \subset V$ lineare unabhängig, dann gilt $\exists B \subset V$, und B ist eine Basis welche M entält. Insbesondere hat jeder Vektorraum eine Basis. "Je zwei Basen sind in Bijektion".

Definition 0.19 – Dimension

V ist endlichdimensional, falls V eine endliche Basis besitzt. Sonst ist V unendlichdimensional. Fall V endlichdimensional ist, ist die Dimension von V definert durch:
$dim(V) = |B|$ mit B beliebeige Basis.

Satz 0.20 – Basisauswahlsatz

Sei $M \subset V$ ein Erzeugendensystem von V, dann gilt $\exists B \subset M$ mit B ist eine Basis von V.

Lemma 0.21

Sei $U \subset V$ ein Unterraum, dann gilt $\dim(V) < \infty \Rightarrow \dim(U) < \infty$

Lemma 0.22

Die Dimension ist modular: $\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2)$

Definition 0.23 – Direktes Produkt von Vektorräumen

$V = U_1 \oplus U_2 \Leftrightarrow V = U_1 + U_2 \wedge U_1 \cap U_2 = \{0\}$
$V = \oplus_{i\in I} U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i\in I} U_i$ und die Familie ist transversal: $\{U_i\}_{i\in I} \to U_i \cap (\sum_{j\in I} U_j) = \{0\}$

Definition 0.24 – Komplementär

Sei $U \subset V$ ein Unterverktorraum, dann gilt $\exists \hat{U} \subset V : V = U \oplus \hat{U}$.
$\hat{U}$ heißt dann Komplementär zu U.

Beispiele

K^2 ist ein K-VR. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist eine Basis.
$U = \text{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. $K^2 = U \oplus \text{span}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})$. $K^2 = U \oplus \text{span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Definition 0.25 – Lineare Abbildungen

$F : V \to W$ ist linear, falls gilt: $F(\lambda v + \mu u) = \lambda F(v) + \mu F(u)$

Definition 0.26 – Kern und Bild

$\text{Ker}(F) = \{v \in V \ F(v) = 0\}$
$\text{Im}(F) = \{w \in W | \exists v \in V : F(V) = w\}$
$\text{Ker}(F)$ ist ein Untervektorraum von V, $\text{Im}(F)$ ist ein Untervektorraum von W.

Lemma 0.27

Falls B eine Basis von V ist, ist $F(B)$ ein Erzeugendensystem von $Im(F)$. F ist injektiv genau dann wenn $\text{Ker}(F) = \{0\}$.

Lemma 0.28

V endlichdimensional: $dim(V) = dim(Ker(F)) + dim(Im(F))$.
$V/Ker(f) \cong \text{Im}(F)$.

Bemerkung: V, W endlichdimensional, $\{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V $V \cong K^n$, $v_i \mapsto e_i$.

Definition 0.29 – Matrix

Sei $F : V \to W, dim(V) = n, dim(W) = m, \{v_1, \dots, v_n\}$ Basis von V, $\{w_1, \dots, w_n\}$ Basis von W.
$K^n \cong V \xrightarrow{F} W \cong K^m$. Dadurch wird durch F und die beiden Basen eine Abbildung von K^n nach K^m definiert. Diese Diese Abbildung kann durch eine Matrix A dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \mapsto A\Big(\lambda_1, \vdots \lambda_n\Big)$$

$F(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$
$F(v_1), \dots, F(v_n)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$ ist die mxn Matrix A.

Definition 0.30 – Rang einer Matrix

$Rg(A) = \dim(\text{span}(\text{Spaltenvektoren})) = \dim(\text{span}(\text{Zeilenvektoren}))$
$F : V \to W$ linear. $Rg(F) = Rg(A) = dim(\text{Im}(F))$, mit A eine beliebige darstellende Matrix von F.

Satz 0.31 – Normalform

Es seien V, W endlichdimensional. Dann existieren Basen $\{v_1, \dots v_n\}$ von V, $\{w_1, \dots, w_n\}$ von W, so dass die darstellende Matrix von F der Form $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ ist.

Beweis: Sei $U = \mathrm{Ker}(F)$ und $\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ eine Basis von U. Sei U' ein Komplement von U in V $\Rightarrow V = U \oplus U'$. Sei $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis von U'. $B = \{v_1, \dots v_n\}$ ist eine Basis von V. $\mathrm{Im}(F)$ hat $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$ als Basis.
$\sum_{i=1}^n \lambda_i F(v_i) = 0 \Rightarrow F(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) \in U \wedge \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) \in U' \Rightarrow \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots \lambda_n = 0$. Ergänze $\{F(v_1), \dots, F(v_r)\}$ zu einer Basis $B' = \{w_1, \dots, w_m\}$ von W. $F(v_1), \dots, F(v_r), F(v_{r+1}), \dots, F(v_n)$
$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ $\square$

Definition 0.32 – Invertierbarkeit von Matrizen

$A \in M_{n\times n}(K)$ ist invertierbar, fall es eine Matrix $B \in M_{n\times n}(K)$ gibt, so dass $A \cdot B = B \cdot A = Id_n$. B wird dann als A^{-1} bezeichnet.
$GL(n,k) = Gl_n(K) = \{A \in M_{n\times n}(K)\text{invertierbar}\}$ ist eine Gruppe.
$A \in GL_k(n) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n$ (Eine Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie regulär ist).

Bemerkung: Sei A regulär. Dann besitz ein Gleichungssystem der Form $A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots \\ \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$ die Eindeutige Lösung, $A^{-1}\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots \\ b_n\end{pmatrix}$.
Bemerkung: A ist regulär genau dann wenn A sich durch elementare Zeilenoperationen in Id_n überführen lässt.
$E_{i,j}$ sei Die Matrix, die an der Stelle ij 1 ist, ansonsten 0.
Elementare Zeilenoperationen sind:
Multiplikation der Zeile i mit λ: $\mathrm{Id}_n + (\lambda - 1)E_{i,j}$.
Addieren von λ mal der iten Zeilten zur jten: $Id_n + \lambda E_{i,j}$.
Vertauschung der i-ten und j-ten Zeile: $Id_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{j,i} + E_{i,j}$

Bemerkung: Das inverse einer Matrix lässt sich durch nutzen dieser elementaren Zeilenoperationen nach z.B. dem Gauß-Jordan Verfahren errechnen:
$\left(A \,\middle|\, Id_n \right) \overset{Zeilenoperationen}{\rightarrow} \left(Id_n \,\middle|\, A^{-1} \right)$
Die linke Hälfte der Ergebnis Matrix enthält dann A^{-1}, denn:
$B_m \dots B_2 B_1 A = Id_n \Rightarrow B_m \dots B_1 = A^{-1}$

Definition 0.33 – Übergangsmatrizen

Es sei $dim(V) = n$ und $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ Basen von V. Weiterhin sei $F : V \to V, v_i \mapsto v'_i$. Dann gilt:

$v'_i = \sum_{ij} s_{ij} v_j$ und die darstellende Matrix S von F, $S = \begin{pmatrix} s_{11} & \dots & s_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & \dots & s_{nm} \end{pmatrix}$ ist regulär.

Definition 0.34

Zwei (mxn) Matrizen A, A' sind äquivalent, falls es regl̈are matrizen $T \in GL_m(K), s \in GL_n(K)$ gibt, so dass $A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$.
$A, A' \in M_{n\times n}(K)$ sind ähnlich, fall es $S \in GL_n(K)$ gibt, so dass $A' = s^{-1} \cdot A \cdot S$.

Bemerkung: Ähnlichkeit ist eine Äquivalenzrelation auf $M_{n\times n}(K)$.

Definition 0.35 – Determinante

$detK^n \to K$ ist eine multilineare alternierende Abildung der Art, dass $det(e_1, \dots, e_n) = 1$.
$A \in M_{n\times n}(K)$
$A = (a_1|a_2|\dots|a)n) \Rightarrow det(a_1, a_2, \dots, a_n) = det(A)$.
$A = (a_ij), det(a_ij) = \sum sign(\pi) \cdot \Pi_{i=1}^n a_{\pi(i)i}$ mit $sign(\pi) = -1^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \pi}$ bzw. Anzahl von Faktoren von π als Produkt von Transpositionen.

Eigenschaften von Determinanten:

1. $det(A \cdot B) = \det(A)\det(B)$

2. A ist genau dann invertierbar, wenn $det(A) \neq 0$

3. $\det(A^-1) = det(A)^{-1}$
4. $\det(A^T) = \det(A)$

Bemerkung: $Id_n + (-\operatorname{Id}_n)$ ist nicht invertierbar, also $\exists A, B : det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

Satz 0.36 – Laplacescher entwicklkungssats

Sei j_0 ein Spaltenindex
$det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} a_{ij_o} det(A_{j_0 i})$ wobei $A_{j_0 i}$ die Matrix ohne Zeile j_0 und Spalte i ist.

Satz 0.37 – Cramersche Regel

$(a_1|\dots|a_n) = A, A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ Falls A regul—'ar ist, gibt es eine einzige LÓsung zum System: $\lambda_j = \frac{det(a_1, \dots, a_{j-1}, b_j, a_{j+1}, \dots, a_n}{det(A)}$

Definition 0.38 – Determinante eines Homomorphismus

Sei $F : V \to V$. $det(F) = det(A)$ woei A eine Darstellungmatrix von F bezgl. einer Baiss $\{v_1, \dots, v_n\}$.

Definition 0.39 – Adjunte Matrix

Sei A eine $n \times n$ Matrix, dann ist die Adjunte von A
$\operatorname{adj}(A) = (\gamma_{ij})$ mit $\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}$

Bemerkung: Sei c_i die j-te Zeile von adj(A). Sei weiterhing a_i die i-te Spalte von A.

$\gamma_{j1}, \dots, \gamma_{jn} \cdot \begin{pmatrix} a_{1i} \\ vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+n} a_{ki} \det(A_{jk}) \overset{\text{Laplacescher Entw. Satz}}{=} \det(a_1, \dots, a_{j-1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_n) =$

$\begin{cases} \det(A) & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$

Angenommen A ist regulär.

$adj(A) \cdot A = det(A) \cdot Id_n \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A) \cdot A} = \text{Id}_n = A^{-1} \cdot A \Rightarrow \frac{\text{adj}(A)}{\det(A)} = A^{-1} \Rightarrow A \cdot \text{adj}(A) = det(A) Id_n$

1. Diagonalisiserbarkeit

Sei V ein Vektorraum, $\{U_i\}_{i=1}^k$ Unterräume von V.
$V = \oplus_{i=1}^k U_i \Leftrightarrow V = \sum_{i=1}^n U_i \wedge U_i \bigcap (\sum_{j=1}^k U_i) = 0$
Äquivalent dazu ist, dass jeder Vektor $v \in V$ sich eindeutig als Linearkombination von Vektoren $\cup_{j=i}^k B_j$ schreiben lässt, woebi B_j eine Basis von U_i ist.

Definition 1.1 – Eigenwerte und -vektoren

Ein Endomorphismus $F : V \to V$ besitzt einen Eigenvektor, falls es ein $v \in V \setminus \{0\}$, so dass $F(V)\lambda \cdot v$ für ein $\lambda \in K$. Falls $F(v) = \lambda v$ ist λ eindeutig bestimmt durch F und v. λ ist dann ein Eigenwert von F.

Definition 1.2 – Eigenräume

$\lambda \in K, FV \to V$ Endomorphismus.
$V(\lambda) = \{v \in V | F(v) = \lambda v\}$, der Eigeneraum zu λ is ein UVR.

Bemerkung: λ ist ein Eigenwet von F gdw, $dim(V(\lambda)) \geq 1$.
Bemerkung: Falls $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ verschiedene Eigenwerte von F $\Rightarrow V(\lambda_i) \cap \sum_{j=1, j\neq i}^k V(\lambda_j) = \{0\}$

Definition 1.3 – Diagonalisiserbarkeit

Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum. $F : V \to V$ Endomorphismus. Bzw. eine Matrix $A : K^n \to K^n$.
F ist diagonalisierbar, falls $V = \oplus_{i=1}^k V('lb), \lambda$ verschiedene Eigenwerte von F.
Äquivalent dazu, wenn V eine basis von Eigenwerten von F besitzt. Äquivalent dazu, wenn F bezüglich einer Basis von V die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ hat.
Äquivalentz dazu, für Matrizen: A ist diagonalisierbar gdw.es eine reguläre Matrix S gibt, sodaß $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

Satz 1.4

$A \in M_{n\times n}(K), \lambda \in K$
λ ist ein Eigenwert von A gdw. $\lambda Id_n - A$ nicht regulär ist. $\Leftrightarrow det(\lambda \cdot Id_n - A) = 0$

Definition 1.5 – Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom einer Matrix $A \in M_{nxn}(K)$ ist $\chi_{A(T)} = det(T \cdot Id_n - A)$

Bemerkung: λ ist ein eigenwert von A $\Leftrightarrow \chi_A(\lambda) = 0$
Beispiel $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\chi_{A(T)} = T^2 + 1 = \det(\begin{pmatrix} T & -1 \\ 1 & T \end{pmatrix})$
Bemerkung: A und A' ähnlich, $A' = s^{-1}AS \Rightarrow \chi_A(T) = \xi_{A'}(T)$. Insebsondere können wir über das charakteritische Polynom eines Endomorphismus reden.
$A \in M_{nxn}(K), \chi_A(T) = T^n + b_{n-1}T^{n-1} + \cdots + b_o$ wobei $b_0 = (-1)^n det(A), b_n{-}1 = -Tr(A) = -\sum_{i=1}^n a_{ii}$

Korollar 1.6

Ein Endomorphismus $F : V \to V$ mit $\dim(V) = n < \infty$ kann höchstens n viele Eigenwerte besizten.

Korollar 1.7

$F : V \to V$ mit $\dim(V) = n < \infty$ mit verschiedenen Eigenwerten $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ist diagonalisierbar, gdw. $n = \sum_{i=1}^{k} d_i, d_i = \dim(V(\lambda_i))$. d_i heißt geometrische Vielfachheit von λ_i.

Beweis:

$\Rightarrow$

F ist diag. gdw. V eine Basis aus Eigenvektoren besitzt, welche aus $\cup_{i=1}^{n} B_i$ besteht, $|B_I| = di = dim(V\lambda_i)$, $n = |B| = \sum_{i=1}^{k} |B_i|$

$\Leftarrow$

$n = \sum d_i \Rightarrow \dim(\sum_{i=1}^{k}(V(\lambda_i))) = n \Rightarrow V = \sum_{i=1}^{k}(V(lb_i)$ da die Eigenräume tranversal sind, und ein Vektorraum nur einen UVR der dimension dim(V) hat, sich selbst. $\square$

Definition 1.8 – Algebraische Vielfachheit

Es seien $F : V \to V$ ein Endomorphismus, $dim(V) = n < \infty$, $\lambda \in K$ Eigenwert $\Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$.
Dann gilt $\chi_F(T) = (T - \lambda)^K G(T)$, $G(\lambda) \neq 0$. k ist die algebraische Vielfachheit von λ, bzw. $\mathrm{ord}_\lambda(F)$.

Bemerkung: $\mathrm{ord}_\lambda(F) \geq \dim(V(\lambda))$

Beweis: Sei $v_1, \ldots, v_k$ eine Basis von $V(\lambda)$. Wir erweitern sie zu einer Basis $\{v_1, \ldots, v_k, v_{K+1}, \ldots, v_n\}$ von V. Die Darstellungsmatrix M von F bzwg. B ist dann
$\{F(v_1), \ldots, F(v_k), F(v_{k+1}), F(v_n)\}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda & C_2 \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

Wobei $C_2 \in Mat_{n-k \times k}(K)$.
$\chi_F(T) = det(TId_n - M) = (T - \lambda)^k \cdot \det(TId_{n-k} \cdot C_1)$
$\Rightarrow \mathrm{ord}_\lambda(F) \geq K$. Wobei $\det(TId_{n-k} \cdot C_1) = 0$ sein kann. $\square$

Lemma 1.9

Sei V endlichdimensional, $F : V \to V$ ein Endomorphismus, U ein F-Invarianter Unterraum $(F(U) \subset U)$.
$F' : V/U \to V/U$ ist eine lineare Abbildung, $\bar{V} \mapsto F(\bar{V})$. F' ist woldefiniert, linear und es gilt $\chi_F(T) = \xi_{F|_U}(T) \cdot \xi_{F'}(T)$

Beweis:

F' ist wohldefiniert;
$\bar{v_1} = \bar{v} \overset{zZ}{\Rightarrow} F'(v_1) = F(v)$ $\bar{v_1} = \bar{v} \Rightarrow v_1 = v + (v_1 - v), v_1 - v \in U$
$\Rightarrow F(v_1) = F(v) + F(v_1 - v), F(v_1 - v) \in U \Rightarrow F(\bar{v_1}) = F(\bar{v})$
Restklassen sind linear und F ist linear $\Rightarrow F'$ ist linear.
Sei $\{u_1, \ldots, u_k\}$ eine Basis von U. erweitert zu $\{u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ sei sie eine Basis von V.
Bemerkung: $\{\bar{v_{k+1}}, \ldots, \bar{v_n}\}$ ist eine Basis von V/U. Bew. Einfach.
Darstellungsmatrix H von F bzgl. B:

$$\begin{array}{c} u_1 \\ \vdots \\ u_k \\ v_{k+1} \\ \vdots \\ v_n \end{array} \begin{pmatrix} & A & & & C_2 \\ & & & & \\ & 0 & \dots & 0 & \\ & \vdots & \ddots & \vdots & C_1 \\ & 0 & \dots & 0 & \end{pmatrix} \text{ mit } A, C_1, C_2 \text{ Matrizen.}$$

$\chi_F(T) = det(TId_n - H) = \det(TId_n - \begin{pmatrix} A & C_2 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix})$

$= \det(\begin{pmatrix} T_i d_k - A & -C_2 \\ 0 & T_I d_{n-k} - C_1 \end{pmatrix}) = \det(T_i d_k - A) \cot det(T_E n - k - C_1)$

A ist die Darstellungsmatrix von $F|_U$ bezüglich $\{u_1, \dots, u_k\} \Rightarrow det(TId_k - A) = \chi_{F|_U}(T)$

C_1 ist die Darstellungmatrixvon F' bzg. $\{\bar{v}_{k+1}, \dots, \bar{v_n}\}$.

$\Rightarrow \det(T\,\mathrm{Id}_{n-k} - C_1) = \chi_{F'}(T)$ □

Satz 1.10

Sei K ein Körper, $dim(V) < \infty, F : V \to V$ ein Endomorphismus so gilt:
F Diagonalisierbar gdw $\chi_F(T) = (T - \lambda_1)^{k_1} \dots (T - \lambda_n)^{k_n}$ in Linearfaktoren zerfällt, wobei für jeden Faktor $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ $T - \lambda_i$ gilt $\mathrm{ord}_{lb_i}(F) = \dim(V(\lambda_i))$.

Beweis:

$\Rightarrow$

Sei $b = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von Eigenvektoren. Seien $\lambda_1, \dots \lambda_r$ die verschiedenen Eigenwerte. Ordne nun B um so dass

$v_1, \dots, v_{d_1} \in V(\lambda_i), v_{d_1+1}, \dots v_{d_1+d_2} \in V(\lambda_2), \dots, v_{d_1+\dots+d_{r-1}}, \dots v_{d_1+\dots+d_r} \in V(\lambda_r)$ mit $d_i = dim(V(\lambda_i))$.

Die Darstellungsmatrix von F bzgl. B:

$(F(v_1), \dots, F(v_{d_1}), \dots F(v_r))$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_1 & & & \\ & & & \lambda_r & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Wobei d_i viele λ_i auf der Diagonale sind

$\chi_F(T) = det(T\,\mathrm{Id}_n - A) = (T - \lambda_1)^{d_1} \dots T(-\lambda_r)^{d_t}$ $((T - \lambda_2)^{d_2} \dots T(-\lambda_r)^{d_t})(\lambda_1) \neq 0 \Rightarrow d_i = \mathrm{ord}_{\lambda_I}(F)$, da die λ_i verschieden sind.

$\Leftarrow$

$\chi_F(T) = (T - \lambda_i)^{d_1} \dots (T - \lambda_r)^{d_r}$

F ist diag $\Leftrightarrow n = dim(V) = \sum d_i$ □

Definition 1.11

Eine Matrix $A \in M_{n \times n}(K)$ ist trigonalisierbar, wenn sie ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Satz 1.12

$F : V \to V$ ist trigonalisierbar? gdw. $\chi_F(t)$ in Linearfaktoren zerfällt $\chi_F(T) = (T - \lambda_1)\dots(T - \lambda_n)$.

Beweis: $\Rightarrow$ F hat Darstellungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} a_1 1 & & \\ & a)21 & X \\ & \ddots & \\ 0 & a_{nn} & \end{pmatrix}$$

$\chi_F(T) = det(T \cdot Id_n - A) = \Pi_{i=1}^n (T - a_{ii}) \Leftarrow$ Induktion über $n = dim(V)$

$n = 1 \Rightarrow$ Jede 1×1 Matrix ist in oberer Dreiecksform.

$n \geq 2$ $\chi_F(t) = (T - \lambda_1)\dots(T_{\lambda_n})$. λ_1 ist ein Eigenwert $\Rightarrow \exists v_1 \in V\{0\} : F(v_1 0 + \lambda_1 v_1$. $U = \text{span}(v_1) \subset V$ ist F-invariant. Nach Lemma ... gilt $T - \lambda_1)\Pi_{i=2}^n(T - \lambda_n) = xi_F(T) = \chi_{F\_U} \cdot \xi_{F'}$, $\xi_{F|_U} = (T - \lambda_1)$ $K[T]$ ist ein Integritätsbereich $\Rightarrow \Xi_{F'}(T) = \pi_{i=2}^n(T - \lambda_i), \dim(V/U) < \dim(V)$.

Nach Ia gibt ese eine Basis$\exists(\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ von V/U derart, dass F' bzgl. dieser Basis Darstellungsmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_2 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = (\mu_{ij})$$ Behauptung: Seien $v_i \in V, \bar{v_i} = \bar{v}_i, 2 \leq i \leq n, \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist eine Basis von V.

Bew. Übungsaufgabe.

Frage: Wie sieht die Darstellungmatrix von F bzgl $\{v_1, \dots v_n\}$ aus?

$\sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} \bar{v}_i = F'(v_j) = F(\bar{v}_j)$

$\sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} \bar{v}_i = \overline{\sum_{2 \leq i \leq j}} \mu_{ij} v_i \Rightarrow \exists \mu_{ij} \in K / F(v_j) = \mu_{ij} v_1 + \sum_{2 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j = \sum_{1 \leq i \leq j} \mu_{ij} v_j$

$F(v_1)F(v_2), \dots, F(v_n)$

$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \mu_{12} & \lambda_2 & X & \ddots 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ $\square$

Korollar 1.13

Jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes über einen algebraisch abgeschlossenen Körper (z.B. $\mathbb{C}$) ist trigonalisierbar.

Lemma 1.14

Sei V endlichdimensional úber ienen Körper K.

$v \in V \backslash \{0\} \exists r \in \mathbb{N} : F^r(v) = sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$ a_i ist eindeutig bestimmt. Insb. ist $U = Span(v, F(v)m \dots, F^{r-1}(v))$ ist F inviariant, hat Basis $v, F(V), \dots, F^{r-1}(v))$

$F \uparrow U$ hat Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 ... a_0 10 ... \vdots 10 a_n \end{pmatrix}$ $\chi_{F \uparrow U}(T) = T^r - a_{r-1} T^{r-1} - \dots - a_0$.

Beweis: $n = \dim(V)$. $\{v, F(v), \dots, F^n(v)\}$ sind lin.abh. Sei r die kleinste natÚrlich Zahl, so dass $\{v, F(v), \dots, F^r(v)\}$ lin. abh sind. Dann sind $\{v, F(v), \dots, F^{r-1}(v)\}$ linear unabhängig. $\overset{\text{Ausstauschprinzip von r}}{\Rightarrow}$ $F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$ wobei a_i eindeutig bestimmt sind.

$U = \text{span}(v_1, \dots, F^{r-1}(v))$ ist F-invariant. Sei $u \in U, u = \sum_0^{r-1} \mu_i F^i(v)$

$F(u) = \sum_{i=0}^{r-1} \mu_i F^{i+1}(v)$

$= \sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F(i + 1(v) + \mu_{i-1} F^r(v)$ Wobei $F^r(v) = \sum_{i=0}^{r-1} a_i F^i(v)$.

Beide teile der Summe $\sum_{i=0}^{r-2} \mu_i F(i + 1(v) + \mu_{i-1} F^r(v)$ liegen eindeutig in U, also liegt auch die Summe in U.

$\{v_1, \dots, F^{r-1}(v)\}$ ist eine Basis von U.

$F(v_1), \dots F(F^{3-1}(v))$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & a_0 1 & 0 & \vdots 0 & 1 & a_{r-1} \end{pmatrix}$

$\chi_{F|U}(T) = det(TId_r - A) = det(\begin{pmatrix} T & 0 & \dots & -a_0 - 1 & T & -\vdots 0 & -1 & -a_{r-1} \end{pmatrix}$

Laplacsche Entwicklung nach der letzten Spalte: $= (-1)^{r+1}(-a_0)det(\begin{pmatrix} -1 & T \\ 0-1 & \ddots \end{pmatrix}) + (-1)^{r+2}(-a_1)\det(\begin{pmatrix} & T \\ 0-1 & \ddots \end{pmatrix}) +$
$\dots + (-1)^{2r}(T-a_r)\det(\begin{pmatrix} T & \\ -1 & T \\ & -1T \end{pmatrix}) = (-1)^r a_0(-1)^r + (-1)^{r+1}a_1T(-1)^{r+1} + \dots + (-1)^{2r}(T-a_1)T^{r-1} =$
$-a_0 - a_1T - \dots - a_{r-1}T^{r-1} + T^r$ □

Notation:
$P(T) \in K[T], P(T) + \sum_{i=0}^m a_iT^i$, $F: V \to V$ Endomorphismus.
$P(f): V \to V, v \mapsto \sum_{i=0}^m a_iF^i(v)$
Mit dieser Notation haben wir, dass im vorigen Lemma $\chi_{F|_u}(F) = F^r(v) - \sum_{i=0}^{r-1} a_iF^i(v) = 0$

Satz 1.15 – Caloy - Hamilton

$F: v \to V$ Homomorphismus
$\chi_F(F)$ ist der 0 Endomorphismus auf V.

Beweis: z.Z. ist dass $\forall v \in V : \chi_F(F)(v) = 0$
$v = 0 \Rightarrow \chi_F(F)(v) = 0$
Ansosnten $v \neq 0$:
$\exists r : U == \text{span}(v, F(v), \dots, F^{r-1}(v))$ ist F-invariant.
U - F-invariant $\Rightarrow \chi_f = \xi_{F|_U} \cdot \xi_{F'} = \xi_{F'} \cdot \xi_{F|_U}$, $F': v/U \to V/U, \bar{w} \mapsto F(\bar{w})$.
Aufgabe:
$R(T) = P \cdot Q$
$R(F) = P \circ (Q(F))$ $\chi_F(F)(v) = \xi_{F'} \circ (\xi_{F|_U}(v))$, wobei $\xi_{F|_U}(v) = 0$, also $\xi_F F(v) = 0$. □

Korollar 1.16

$A \in M_{n\times n}(K)$
$\chi_A(T) = T^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_iT^i \Rightarrow A^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot A^i = 0$

Satz 1.17

V endlichdimensionaler Vr, $FV \to V$ Endormophismus, Dann existiert genau ein normiertes Plynom kleinsten Grades, m_f, derart, dass $\forall P \in K[T] : m_F|_P \Leftrightarrow P(\tau) = 0$ Insbesondere gilt $m_F(F) = 0$. Das Polynom m_F heißt das Minimalpolynom von F.

Satz 1.18

$F : V \to V$ Endormorphismus, Dann existiert genau ein normiertes Polynom derart, dass $\forall P \in K[T]$ $m_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0$. Das Polynom $m_F(T)$ heißt das Minimalpolynom von F.

Beweis: Sei $\mathcal{F} = \{P[T]\ textnormmiert | P(F) = 0$als Endomorphis..
Caley - Hamilton: $Xi_F(T) \in \mathcal{F} \neq \emptyset$ Sei $m - F(T) \in \mathcal{F}$ Polynom kleinsten Grades.
Zu zeigen: $\forall P \in K[T] | m_F|_P | leftrightarrow P(F) = 0$
$\Rightarrow$
$m_F|_P \Rightarrow \exists Q \in K[T] : P = Q \cdot m_F$
$P(F) = Q(F) \circ m_F(F), m_F(F) = 0$
$P(F) = 0$
$\Leftarrow$
Sei $P \in K[T], P(F) = 0$. Division mit Rest $\Rightarrow \exists q, r \in K[T] : P = Qm_F + r, \text{Grad}(r) < \text{Grad}(m_F)$

$0 = P(F) = Q(F) \circ m_F(F) + r(F) = r(F) = 0$
$\Rightarrow r(F) = 0$ als Endomorphismus, $\Rightarrow r = 0$. (sonst $\frac{1}{a_{\text{Grad}(T)}} \cdot r(T) \in \mathcal{F}$
Eindeutigkeit:
Angenommen (m'_F würde auch die Bedingungen erfüllen
$m'_F|_P \Leftrightarrow P(F) = 0 \forall P \in K[T]$
$\Leftrightarrow M_F|_{m'_F} \wedge m'_F|_{m_F}$
$m_F = Qm'_F \wedge m'_F = Hm_F$
zu Zeigen $Q = H = 1$. Sowohl m_F, m'_F beide normiert, $\Rightarrow Q, H$ sind normiert.
$m_F = Q \cdot m'_F = QHm_F \wedge K[T]$ Integritätsbereich
$\Rightarrow 1 = QH$
$\text{Grad}(GH) = \text{Grad}(G)\,\text{Grad}(H) = \text{Grad}(1) = 0 \wedge G, H$ normiert
$\Rightarrow G = H = 1 \Rightarrow m_F = m'_F$. $\square$

Frage
$A \in \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} m|_A =$

$\chi_A(T) = T^2 m_A|_{T^2} \Rightarrow m_A = \begin{cases} T \\ T^2 \end{cases} \quad m_A(A) = 0 \Rightarrow m_A \neq T \Rightarrow m_A = T^2$

Lemma 1.19

gegeben $F : V \to V$, V endlich dimensional, F Endormorphismus, dann haben χ_F und m_F dieselben Nullstellen in K.

Beweis: $m_F|_{\chi_F} \Rightarrow \xi_F = Qm_F \Rightarrow \forall \lambda \in K$, falls $m_F(\lambda) = 0 \Rightarrow \chi_F(\lambda) = 0$
Sei $\lambda \in K$"$\chi_F(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda$ ist ein Eigenwert von F $\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : F(v) = \lambda v$. Sei $m_F(T) = T^d + \sum_{i=0}^{d-1} c_i T^i$. $0 = m_F(F)(v) = (F^d + \sum c_i F^I)(v) = F^d(v) + \sum c_i F^i(v) = \lambda^d v + \sum c_i \lambda^i v = (\lambda^d + \sum c_i \lambda^i)v = m_F(\lambda)v \Rightarrow m_F(\lambda) = 0$, da $v \neq 0$. $\square$

Satz 1.20

$F : V \to V$, V endlichdimensional, F endomorphismus ist diagonalisierbar gw. $m|_F$ in lauter paarweise veschiedene Linearfaktoren zerfällt.

Beweis:
$\Rightarrow$ sei F diagonalisierbar. Dann gilt $\chi_F(T) = \pi_{i=1}^k (T\lambda_i)^{d_i}$, mit λ_i Eigenwerte von F. Ausserdem ist $V = \oplus_i V(\lambda_i)$. Sei $v \in V$ bel. Dann gilt $V = \sum_{i=1}^k V_i$ wobei $v_i \in V(\lambda_I)$.
Setze $P(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)$. z.Z. ist $P(T) = m_F(T)$.
$P(F)(v) = \pi_{i=1}^k (F - \lambda_i)(v)$
$= \pi_{i=1}^k (F - \lambda_i)(\sum_{j=1}^k v_j)$
$= \sum_{j=1}^k (\pi_{i=0}^k (F - \lambda_i)(v_j))$
$= \sum_{j=1}^k (F - \lambda_1 Id) \circ \cdots \circ (F - \lambda_{j-1} Id) \circ (F - \lambda_{j+1} Id) \circ \cdots \circ (F - \lambda_k Id) \circ (F - \lambda_j Id)$
$= 0$, da $v_j \in V(\lambda_j)$.
v war beliebei $\Rightarrow P(F) = 0 \in \text{End}(V)$.
Also $m_F|_P \Rightarrow P(T) = Q(T) \cdot m_F(T)$
Aber $m_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{S_i}$, $S_i \geq 1$ und $P(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i) = Q(T)\pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{S_i}$
$\Rightarrow S_i = 1$ für $i = 1, \ldots, k$, sonst wäre der Grad der rechten Seite göß als der Grad der linken.
$\Rightarrow m_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)$.
$\Leftarrow$

Sei $m_F(T) = (T-\lambda_1)\circ\cdots\circ(T-\lambda_k)$, $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$
z.Z. F ist diagonalisierbar. Es genügt zu Zeigen, dass $V = \oplus_i V(\lambda_i)$. Beweis durch Induktion:
Sonderfälle:

1. Sei $\dim(V) = 1 \Rightarrow m_F(T) = (T-\lambda_1) \Rightarrow \lambda_1$ ist Eigenwert von F. Sei v der Eigenvektor zu λ_1 dann folgt $V = \text{span}(v) = V(\lambda_1)$

2. Sei $\dim(V) = n \geq 2$ aber $k = 1$. $\Rightarrow m_F(T) = (T-\lambda_1)$. Nach Def von m_F gilt $m_F(F) = 0 \Rightarrow F-\lambda_1 = 0 \in \text{End}(V)$. Für alle $v \in V$ gilt $(F-\lambda_1)(v) = 0 \Rightarrow F(v) = \lambda_1 v \Rightarrow V = V(\lambda_1)$

Induktionsanahme: Der Satz gilt für den Fall $\dim(V) < n, n \in \mathbb{N}$. Also sei $\dim(V) = n \geq 2, k \geq 2$.
Zunächst zeigen wir: Behauptung (1): $V = \text{Ker}(F-\lambda_1 Id) \oplus \text{Im}(F-\lambda_1 Id)$. Idee: Zeige dass $\text{Ker}(F-\lambda_1 Id) = V(\lambda_1), \text{Im}(F-\lambda_1 Id) = V(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus V(\lambda_K)$
Bew.:
Sei $R(T) = \Pi_{i=2}^k (T-\lambda_i) \Rightarrow m_F(T) = R(T)(T-\lambda_1)$.
Division mit Rest: $\exists Q(T), r \in K$, so dass:
$R(T) = Q(T)(T-\lambda_1) + r$
$0 \neq R(\lambda_1) = 0 + r \Rightarrow r \neq 0 \in K$
Sei $v \in V$ bel, $R(F)(v) = Q(F)(F-\lambda_1)(v) r \cdot v$
$\Rightarrow v = \underbrace{\frac{1}{r}R(F)}_{\in\text{Ker}(F-\lambda_1)} + \underbrace{(F-\lambda_1)\cdot(-\frac{1}{r}Q(F)(V))}_{\in\text{Im}(F-\lambda_1)}$
$(F-\lambda_1)(R(F)(v) = m_F(F)v = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}R(F) \in \text{Ker}(F-\lambda_1)$
$\Rightarrow V = \text{Ker}(F-\lambda_1) + \text{Im}(F-\lambda_1)$.
Zu zeigen ist nun noch, dass die Summe direkt ist. $\Leftrightarrow \text{Ker}(F-\lambda_1) \cap \text{Im}(F-\lambda_1) = \{0\}$.
Sei $v \in \text{Ker}(F-\lambda_1) \cap \text{Im}(F-\lambda_1) \Rightarrow v = (F-\lambda_1)(w), w \in V$
$R(f)(v) = Q(F)(F-\lambda Id)(v) + r \cdot v$
$m_F(F) = (R(F)\cdot(F-\lambda_1))(w) = Q(f)\underbrace{(f\lambda_1 Id)v}_{=0} + rv \Rightarrow rv = 0, r \neq 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow V = \text{Ker}(F-\lambda_1 Id) \oplus$ $(\text{Im}(F-\lambda_1 Id)$
Setze $W = \text{Im}(F-\lambda_1)$ (W ist UVR von V mit $\dim(W) < \dim(V)$.
Behauptung (2): W ist F-invariant:
Set $v \in W$ beliebeig $\Rightarrow v = (F-\lambda_1)(w), w \in V \Rightarrow F(v) = F\circ(F-\lambda_1)(w) = (F-\lambda_1)\circ(\underbrace{F(w)}_{\in V}) \in W$
Setze $F' = F|_W \in End(W)$.
Beh. (3): $m_{F'}(T) = \Pi_{i=2}^k(T-\lambda_i)$ $(= R(T))$.
Sei $v \in W$ bel. $\Rightarrow v = (F-\lambda_1)(w), w \in V$
$\Rightarrow R(F')(v) = \underbrace{(R(F)\circ(F-\lambda_1))}_{m_F(F)=0}(w)$
$\Rightarrow R(F') = 0 \in \text{End}(W)$
$\Rightarrow m_{F'}|_R$
$\Rightarrow R(T) = H(T)\cdot m_{F'}(T)$
Es gilt auch $0 = \underbrace{m_{F'}(F')}_{=0}\circ(F-\lambda_1)(v)$
$\Rightarrow m_{F'}\circ(F-\lambda_1) = 0 \in \text{End}(V)$
$\Rightarrow m_F(T)|_{m_{F'}(T)\cdot(T-\lambda_1)} \Rightarrow m_{F'(T)}(T-\lambda_1 = Q(T)\cdot(m_F(T))$
$= Q(T)R(T)(T-\lambda_1)$
$\Rightarrow m_{F'}(T) = Q(T)\cdot R(T) = Q(T)H(T)m_{F'}(T)$
$\Rightarrow Q(T) = H(T) = 1$, ansonsten wäre der Grad links und rechts verschieden
$R(T) = m_{F'}(T)$

$\overset{\text{IA}}{\Rightarrow} W = \oplus_{i=2}^k W(\lambda_i)$, mit $W(\lambda_i)$ Eigenraum von F' zu λ_i.
$\Rightarrow V = V(\lambda_1) \oplus_{i=2}^k W(\lambda_i)$

z.Z. $W(\lambda_i) = V(\lambda_i)$. Dann gilt $V = \oplus_{i=1}^k (V(\lambda_i))$.
Es gilt $W(\lambda_i) = \{w \in W : F'(W) = \lambda_I w\}$
$\subseteq \{v \in V : F(v)\ \lambda_i v\} = V(\lambda_i)$
Sei $i > 1, v \in V(\lambda_i)$. $\Rightarrow F(v) = \lambda_i v$. Setze $w = \frac{1}{\lambda_i - l_1} v \in V(\lambda_i)$. $\Rightarrow F(w) - \lambda_1 w = v \Rightarrow v \in Im(F - \lambda_1) = W$.
$\Rightarrow v \in \oplus_{j=2}^k (W(\lambda_j) \Rightarrow v \in W(\lambda_i)$, da $v = \sum \alpha_j w_j$ für $w_j \in W(\lambda_j), \alpha_j \in K$ Aber die Summe der $V(\lambda_J)$ ist direkt und $v \in V(\lambda_i)$, damit kann nur α_i nicht 0 sein, damit ist $v = \alpha_i w_i \Rightarrow w \in W(\lambda_i)$

□

Bemerkung: $A \in Mat_{n\times n}(K) : A^2 = Id_n \Rightarrow A$ ist diagonalisierbar.

$$A^2 = Id_n \Rightarrow (T^{-}1)(A) = 0 \Rightarrow m_F|_{T^2-1} m_A = \begin{cases} T^2 - 1 = (T-1)(T+1) \\ T - 1 \\ T + 1 \end{cases}$$

Jordansche Normalform

Lemma 1.21

$F : V \to V$ Endomorphismus, $U \subset V$, dann ist U F-invariant gdw. $U(F - \lambda Id$-invariant ist $\forall \lambda \in K$.

Beweis: Übungsblatt 4 □

Beispiel

$F : V \to V, F \neq 0$ Endomorphismus, derart, dass $F^m = 0$ als Endomorphismus und $m > 0$ minimal (F ist nilpotent). $F^{m-1} \neq 0 \Rightarrow v \in V : F^{m-1}(v) \neq 0$. $\{v, F(v), \dots, F^{m-1}(v)\}$ ist linear unabhängig. Ergänze sie zu einer Basis B von V. $B = \{v, F(v), \dots, F^{m-1}(v), \cdots v_n$.
$F^{m-1}(v), \dots F(v), v, \dots v_n$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \\ \vdots & 0 & \ddots & * \\ 0 & \vdots & 0 & \\ 0 & \dots & & * \end{pmatrix}$$

Definition 1.22 – HAUPTRAUM

Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von $F : V \to V$, V endlichdimens..
$V(\lambda) = \text{Ker}(F - \lambda)$ Eigenraum von F bzgl λ.
$\text{Ker}(F - \lambda) \subset \ker(F - \lambda)^2 \subset \dots$
$\cup_{n\in\mathbb{N}} \ker(F - \lambda)^n$ ist der Hauptraum von F bzgl. λ.
Bemerkung: V_λ ist ein Unterraum und V_λ ist F-invariant, da V_λ $(F - \lambda)$-invariant ist.
Bemerkung: Falls $\text{Ker}(F - \lambda) = V(\lambda) = 0$ ist $\cup_{n\in\mathbb{N}} \text{Ker}(F - \lambda)^n = 0$.

Lemma 1.23

Seien $\lambda_1 \dots \lambda_k$ verschiedene Elemente aus K. $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j=1 j\neq i}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$.

Beweis: $V_{\lambda_j} = (F - \lambda_j)$ invariant $\Rightarrow V_{\lambda_j}$ ist F-invariant $\Rightarrow (F - \lambda_i$ invariant.
Wir wollen zuerst zeigen, dass $F - \lambda_i \upharpoonright V_{\lambda_j}$ ein Automorphismus ist falls $i \neq j$.
$\Rightarrow$ es genügt zu zeigen, dass $F - \lambda_i$ injektiv auf V_{λ_j} ist.
Sei $w \in V_{\lambda_j} \setminus \{0\} \Rightarrow m \in \mathbb{N}$ kleinstmöglich, $F - \lambda_J)^m(w) = 0 \Rightarrow (F - \lambda_j)^{m-1}(w) \neq 0 \Rightarrow ((F - \lambda_j)^{m-1}((\lambda_i - \lambda_j)(w)) \neq 0$
Sei $0 \neq (F - \lambda)j)^{m-1}(F(w) - \lambda_j w - (F(w) - \lambda_i w)) \Rightarrow (F - \lambda_i)^m(w) + (F - \lambda_j)^{m-1} \circ (F - \lambda_i)(w) \Rightarrow$

$(F-\lambda_i)(w) \neq 0$.
Insebsondere is jede Potez $F-\lambda_i^k$ ein Automorphismus von V_{λ_j}. $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j=1, j\neq i}^k V_{\lambda_j} = \{0\}$ $v \in V_{\lambda_i} \cap \sum_{j\neq i} V_{\lambda_j}$
$v = \sum_{j\neq i} v_j \in V_{\lambda_j} \Rightarrow existsm_j$ kleinstes $F(-\lambda_J)^{m_j}(v_j) = 0$
$(F-\lambda_i)^{m_i} \circ \cdots \circ (F-\lambda_{i-1}^m i - 1 \circ (F-\lambda_{i-1}^{m_{i+1}} \ldots (F-\lambda_k)^{m_k}$ ist eine Automorphismus von V_{λ_i}. Sie dieser automorph. H. $H(v) = \sum_{j\neq i}(H(v_j) = \sum_{j\neq i}(F-\lambda 1)^{m_1} \circ \cdots \circ (F-\lambda_j)^{m_j}(v_j), F-\lambda_j)^{m_j}(v_j) = 0 \Rightarrow H(v) = 0 \Rightarrow v = 0$. □

Lemma 1.24

Sei $\lambda \in K$. $\dim(V_\lambda) = ord_\lambda(\chi_F)$. Ferner hat $F \uparrow V_\lambda$ hat Matrixdarstellung der der Form $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

Beweis: Sei $k = \mathrm{ord}_\lambda(\chi_F(T))$. $\chi_F(T) = (T-\lambda)^k \cdot G(T)$ wobei $G(\lambda) \neq 0$.
Behauptung: es gibt einen F-invarianten Unterraum U von V der Dimension k so dass $F \uparrow U$ hat Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$
Falls $n = 0 \Rightarrow$ klar. OBdA. ist $k \geq 1$. Wir beweisen die Begauptung mit Induktion auf $n = \dim(V)$.
$n = 1$
$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} : F(v) = \lambda v$
$\Rightarrow V = \mathrm{span}(v) = U$
$n \geq 2$
$\Rightarrow$ lambda is ein Eigenwert
$\Rightarrow \exists v \in V \setminus \{0\} F(v) = \lambda v, U_0 = \mathrm{span}(v) \Rightarrow \dim(U) = 1 \wedge$ F-invariant $\Rightarrow \hat{F} : V/U_0 \to V/U_0, \bar{W} \mapsto F(\bar{w}), (T-\lambda)(T-\lambda)^{k-1} \cdot Q(T) = \chi_F(T) = \underbrace{\chi_{F\uparrow U}(T)}_{=(T-\lambda)} \cdot \chi_{\hat{F}}(T)$
$\Rightarrow \chi_{\hat{F}}(T) = (T-\lambda)^{k-1} \cdot Q(T), Q(\lambda) \neq 0$
Nach Ia. existiert ein $\hat{F}$-invarianter Unterraum $\hat{U} \subset V/U_0$ der Dimension n-1, so dass die Matrixdartstellung von $\hat{F}$ der Form $\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$ ist. Sei $\bar{v_2}, \ldots, \bar{v_k}$ eine Basis von $\hat{U}$ so dass die Darstellungsmatrix von $\hat{F}$ bzgl. $\{v_2, \ldots, \bar{v}_k\}$

$$\begin{pmatrix} \lambda & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ sind linear unabhängig. $U = \mathrm{span}(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ hat Dimension k. U ist F-invariant, $F(\sum_{i=1}^k \mu_I v_i) = \sum \mu_i F(v_i) = \mu_i \lambda v_i + \sum_{i=2}^k \mu_i \underbrace{F(v_i)}_{=\sum_{j\leq i} a_{ji} v_i} \in U$
Zu zeigen ist nun dass $U = V_\lambda$. $U \subset V_\lambda : \chi_{F\uparrow U} = (T-\lambda)^k \overset{\text{Caley-Hamilton}}{\Rightarrow} (F-\lambda)^k = 0$ auf U
$\Rightarrow U \subseteq \mathrm{Ker}(F-\lambda)^k$
Falls $U \subsetneq V_\lambda$
$\Rightarrow \dim(V_\lambda) \geq 1$.
$(T-\lambda)^K \cdot G(T) = \chi_F(T) = \chi_{F\uparrow U}(T) \cdot \chi_{\hat{F}}(T) \Rightarrow \chi_{hatF}(T) = G(T)$ aber $G(\lambda) \neq 0$.
λ ist kein Eigenwert von $\hat{F}$. $\Rightarrow$ der Hauptraum von $\hat{F} : V/u \to V/u$ ist trivial.
Sei $w \in V_\lambda$
$\Rightarrow \exists s \in N : (F-\lambda)^s(w) = 0 \Rightarrow (F-\lambda)^s(\bar{(}w)) = 0$
$\Rightarrow \bar{w} = 0 \Rightarrow w \in U$. □

Definition 1.25

Ein Endormorphismus $F: V \to V$ heißt bilpotent, falls es eine nat. Zahl m gibt, so dass $F \circ \cdots \circ F = F^m = 0$ auf V ist.

Lemma 1.26

Sei $F; V \to V$. Folgende Ausagen sind äquivalent:

1. F ist nilpotent
2. $\forall c \in V \; Existsm_v \in \mathbb{N} F^{m_v}(v) = 0$
3. Es existiert eine Basis von V, so dass F Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$
4. $\chi_F(T) = T^n$

Beweis:

$1 \Rightarrow 2$ trivial.

$2 \Rightarrow 3$ Induktion auf $n = \dim(V)$. Sei $v \in V \setminus \{0\}$
$\Rightarrow \exists m_V \in \mathbb{N}$ kleinztest $F^{m_v}(v) = 0$
$\Rightarrow m_v \neq 0$
$\Rightarrow f_{m_v - 1}(v) = neq 0$
$\Rightarrow V = \text{span}(F^{m-1}(v))$
Ferner
$F(F^{m_v - 1}(v)) = 0$
$\Rightarrow$ Darstellungsmatrix bzg. $\{F^{m_v-1}(v)\}$ ist (0).
$n \geq 2$
Sei $v_1 \in V \setminus \{0\}$ so dass $F(v_1) = 0$
$\Rightarrow U = \text{span}(v_1)$ ist F-invariant.
$\Rightarrow \hat{f} = \underbrace{V/U}_{\dim = n-1} \to V/U$
ach I.A. existiert eine Basis $\{\bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$, so dass die Darstellungsmatrix von $\hat{F}$ die Form $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$ hat.

Die Familie $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ist eine Familie von V und F hat Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} 0 & & x \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$

$3 \Rightarrow 4$ $\chi_F(T) = det(T \cdot Id_B - (\begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix} T & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & T \end{pmatrix} = T^n$

$4 \Rightarrow 1$ Caley-Hamilton: $F^n = \chi_F(F) = 0$

□

Satz 1.27 – Jordan-Charvallery

Sei $F : V \to V$ Endomorphismus, V endl. dim. Fakks $\chi_F(T)$ in Linearfaktoren zerfällt dann ist $V = \oplus_i^k V_{\lambda_i}$ mit λ_i verschiedene Eigenwerte. F hat dann eine Blockmatrix als Darstellungsmatrix:
$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix} A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$
Insbseondere ist $F = G + H$ mit G ist diagonalisierbar und H ist nilpotent, und $G \cdot H = H \cdot G$.

Beweis: $\chi_F(T) = \pi_{i=1}^k (T - \lambda_i)^{d_i}$, λ_i verschieden.
$\dim(V) = \text{Grad}(\chi_F(T)) = n = \sum)i = 1_u^k nderset{=} \dim(V_{\lambda_i} d_i$.
$\dim(\sum_{i=1}^k V_{\lambda_I}) = \sum d_i = b = \dim(V)$ da die Haupträume transversal sind.
$\Rightarrow V = \oplus_{i=1}^k V_{\lambda_i}$
V besitzt eine Bais B, welche aus der Vereinigung der Basen der v_{λ_i} besteht. F wird durch $F \uparrow V_{\lambda_1}, \dots, F \uparrow V_{\lambda_K}$ bestimmt. Die einzelnen $F \uparrow V_{\lambda_I}$ habe Matrixdarstellungen $A_I = \begin{pmatrix} \lambda_i & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_I \end{pmatrix}$ Die Darstellungsmatrix von F ist dann
$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{pmatrix}.$$
Sei $G : V \to V$ $G \uparrow V_{\lambda_I}$ = Multiplkation mit λ_i. G hat diagonale Matrixdarstellung zgl. der Basis B :
$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & \lambda_k & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_k \end{pmatrix}$$
Setze $H = F - G$. Die Darstellungsmatrix von H bzgl. B ist
$$\begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{H ist nilpotent.}$$
z. Zeigen $GH = HG$
Beachte, dass jedes V_{λ_i} G-invariant ist. Damit ist V_{λ_i} H-invariant.
Es genügt zu zeigen, dass $GH = HG$ auf V_{λ_i}. Sei $w \in V_{\lambda_i}$: $H(G(W)) = H(\lambda_i w) = \lambda_i H(w) = G(H(w))$. □

Definition 1.28

$F : V \to V$, V endlichdimensional. Eine Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ ist F-adaptiert falls $F(v_1) = 0, F(v_j) = \begin{cases} 0 \\ v_{j-1} \end{cases}$

Bemerkung:
Falls V eine F-adaptierte Basis hat ist $F : V \to V$ nilpotent.

Beweis: Sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ F-adapteoert. Es genügt zu zeigen dass $F^n = 0$.
$\sum_j^n \mu_j v_j = F^n(v) = \sum_{j=1}^n \lambda_j F^n(v_j)$ □

Notation $N_m = \begin{pmatrix} 0 & & X \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{n\times n}$

$N_1 = (0)$
$N_m^m = 0$

Definition 1.29

$F : V \to V$ nilpotent. Es existiert $m \in \mathbb{N}$ $\mathrm{Ker}(F) \subset \dots \subset \mathrm{Ker}(F^m) = \mathrm{Ker}(F^{m+1}) = \dots \subset V$. m heißt der Index von F. $V = \mathrm{Ker}(F^m) \oplus F^m(V)$

Satz 1.30

Sei $F; V \to V$ undd B eine F-adaptierte Basis von V. Dann hat F Matrixdarstellung der Form:

$$\begin{pmatrix} N_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & N_{k_n} \end{pmatrix}$$

$\sum_{j=1}^r k_j = n$
$Index(F) = max\{k_j\}_{1\leq j\leq n}$

Beweis: Sei $i_1 < \dots < i_r$ eine Aufzählung der Menge von Indices so dass $\{j|F(v_j) = 0\}$

$v_1, v_2, \dots, v_{i_1}, v_{i_1+1}, \dots$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & \\ & & & 0 & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

□

Satz 1.31

Sei $F : V \to V$ nilpotent mit Index K, $\dim(V) = n < \infty$. Gegeben ein Unterraum U von V derart, dass $U \cap \mathrm{Ker}(F^{k-1}) = \{0\}$. Dann lässt sich jede Basis von U zu einer F-adaptierten Basis von V ergänzen.

Bemerkung: $\mathrm{Ker}(F) \subsetneq Ker(F^2) \subsetneq \mathrm{Ker}(F^{k-1}) \subsetneq \mathrm{Ker}(F^k) = \dots = V$.
$\mathrm{Ker}(F^{k-1}$ hat ein Komplement U in $\mathrm{Ker}(F^k)$

Beweis: Induktion auf k:
$k = 1$
$F = 0$ als Endomorphismus. $\Rightarrow$ Jede Basis ist F-adaptiert.
$k \geq 2$:
Sei $V' = \mathrm{Ker}(F^{k-1}) \subsetneq V$. Sei weiterhin $\{u_1, \dots, u_s\}$ eine Basis von U. $U \cap V' = \{0\}$. $U + V' = U \oplus U \oplus V'$ hat eine Basis: $\{u_1, \dots, u_s, \hat{v}_1, \dots, \hat{v}_m\}$. Ergänze diese Basis zu einer Basis von V: $\{u_1, \dots, u_s, \dots u_r, v_1, \dots, v_m\}$.
Sei $W = \mathrm{span}(u, \dots, u_r), U \subset W, W \cap V' = \{0\}$.
$F(W) \subset \mathrm{Ker}(F^{k-1}) = V'$, da $F^k = 0$. V' ist F-invariant und $F \uparrow V'$ hat Index $k - 1$.
Beh.: $\{0\} = F(W) \cap \mathrm{Ker}(F^{k-2})$
Sei $u \in F(w) \cap \mathrm{Ker}(F^{k-2}) \Rightarrow F^{k-2}(u) = 0$. es existiert $w \in W : u = F(W)$
$0 = F^{k-2}(u) = F^{k-1}(w)$

$\Rightarrow w \in \operatorname{Ker}(F^{k-1} = V'$

$\Rightarrow w = 0$

$\Rightarrow u = F(w) = 0$

Beh.: $\{F(u_1), \dots, F(u_r)\}$ sind linear unabhängig. also eine Basis von $F(W)$.

$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i F(u_i) = 0 = F(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i F(u_i))$

$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i \in \operatorname{Ker}(F) \subset V'$

$\overset{W \cap V' = \{0\}}{\Rightarrow} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$

Aus unserer Induktionsanahme: $F(W)$ und $F|_{V'} \Rightarrow$ Es existiert eine adaptierte Basis $\{v'_1, \dots, v'_m\}$ welche $\{F(u_1), \dots, F(u_r)\}$ ergänzt.

$F(u_j) = v'_{i_j}$ wobei $i_1 < \dots < i_r$ (ansonsten sortiere u_j um.

$v_1 = v'_1$

$v_2 = v'_2$

$\vdots$

$v_{i_1} = v'_{i_1}$

$v_{i_1+1} = u_1$

$v_{i_1+2} = v_{i_1+1}$

$v_{i_1+} = v_{i_1+1}$

(Füge an den stellen i_j den vektor u_j ein).

$\rightarrow$ Basis von V.

Es genügt nun zu zeigen, dass diese Basis F-adaptiert ist.

z.B. $F(v_{i_1+1}) = v'_{i_1} = F(u_1)$

$\Rightarrow u_1 - v_i \in \operatorname{Ker}(F) \wedge u_1 - v_i \in V' \Rightarrow$ Widerspruch. $\square$

Beispiel

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$\chi_A(T) = det(\begin{pmatrix} T-1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & T-2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & T-2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & T-3 \end{pmatrix}) = (T-2)det(\begin{pmatrix} T-1 & 0 & -1 \\ 1 & T-2 & -1 \\ 1 & 0 & T-3 \end{pmatrix}) = (T-2)^4 \Rightarrow 2$ ist der einzige Eigenwert

$A - 2Id$ ist nilpotent.

$A - 2Id = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\operatorname{Ker}(A - 2Id) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | -x_1 + x_2 + x_4 = 0\}$

$\operatorname{Ker}(A - 2Id) \subsetneq \operatorname{Ker}((A - 2Id)^2), \dim(\operatorname{Ker}(A - 2Id)) = 4$

Die Jordansche Normalform ist dann: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ & 2 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{pmatrix}$ Da es nur einen Vektor in $\operatorname{Ker}((A - 2Id)^2)$ gibt der nicht in $\mathrm{Ker}((A - 2Id))$ ist.

Korollar 1.32

Jeder Nilpontente Endormorphsimus besitzt eine F-adaptierte Basis.

Korollar 1.33

Jede niplotente Endormorphismus läßt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix dar-

stellen. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & 0 & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$

Korollar 1.34 – Jordansche Normalform

Jeder Endomorphismus eines endlichdimensionalen Vektorraumes dessen charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt lässt sich bezüglich einer geeigneten Basis durch eine Blockmatrix folgender Form darstellen.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & & & & & \\ & & & \lambda_1 & 0 & & & & & & \\ & & & & \lambda_2 & 1 & & & & & \\ & & & & & \lambda_2 & 1 & & & & \\ & & & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & & & \lambda_k & 1 & & \\ & & & & & & & & \ddots & 1 & \\ & & & & & & & & & \lambda_k & 1 \end{pmatrix}$$

2. Dualität

Definition 2.1

Sei V ein K-Vektorraum. Der Dualraum $V*$ ist die Kollektion aller linearen Abbildungen von $V \to K$
Bemerkung: $V*$ ist ein K-Vektorraum. $F + G : V \to K, v \mapsto F(V) + G(V)$ ist linear,
$\lambda \in KL\lambda F : V \to K, V \mapsto \lambda F(v)$ ist auch linear

Definition 2.2

Sei V endlichdimensional und wähle iene Basis B $\{b_1, \dots, b_n\}$ von V. Die duale Basis $B* = \{b_1*, \dots, b_n*$ ist eine lineare Abbildung derart, dass $b * (b_j) = 1_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{ansosnten} \end{cases}$
Insbesondere $b_i * (V) = b_i * (\sum_{j=1}^{n} \lambda_j b_j) = \lambda_i$
Bemerkung: Falls V endlichdimensional ist, dann ist $B*$ eine Basis von $V*$ und somit $V \simeq V*$.

Beweis: $b_1*, \dots, b_n*$ sind linear unabhängig.
1.)
$\sum \lambda_i b_i * = 0$
$\sum \lambda_i b_i * (b_j) = 0, 1 \leq i \leq n \Rightarrow \lambda_i = 0$ 2.)
$\text{span}(b_1*, \dots, b_n*) = V*$ Sei $F : V \to K$ beliebig. $F(b_i) = \lambda_i \in K$
$F - \sum \lambda_i b_i \overset{!}{=} 0$
$(F - \sum \lambda_i b_i *)(b_j) = 0 = F(b_j) - \sum \lambda_i b_i * (b_j)$ Insbesondere ist $V \to V*, b_i \mapsto b_i*$ ein Isomorphismus.
Allerdings: Der Isomorphismus $V \simeq V*$ hängt von der Wahl der Basis B ab, ist also nicht kanonisch. □

Lemma 2.3 – KANONISCHER MONOMORHISMUS

$V \to (V^*)^*, v \mapsto \varphi_V : V^* \to K, F \mapsto F(V)$

Beweis: φ_V ist wohldefiniert.
$\varphi_V(F + G) = (F + G)(v) = (F(V) + G(V)$
zu zeigen: φ_V ist injektiv. (Übungsaufgabe). □

Korollar 2.4

Falls V endlichdimensional ist sind $V \simeq (V^*)^*$ kanonisch isomorph.

Beweis: $\dim(V) = \dim(V^*) = \dim(V^*)^* \Rightarrow \varphi : V \to (V^*)^*$ ist surjektiv also auch ein Isomorphismus. □

Lemma 2.5

Sei V endlichdimensional. Wähle Basen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ von V. Seien B^* und B'^* die entsprechenden dualen Basen in V^*. Wenn A die Transformationsmatrix von B nach B' ist, dann ist die Transformationsmatrixvon B^* nach $(B')^*$ $A^*)^-1$

Beweis: $\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Sei X die Transformationsmatrix von B^* nach $(B')^*$.

$veb_1 \vdots b_n \begin{pmatrix} b_1^* & \dots & b_n^* \end{pmatrix} = Id_n$

$\begin{pmatrix} b'_1 \\ \vdots \\ b'_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (b_1^*)' & \dots & (b_n^*)' \end{pmatrix} = Id_n$

$Id_n = \begin{pmatrix} (b_1^*)' \\ \vdots \\ (b_n^*)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b'_1 & \dots & b'_n \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} (b_1^*)' \\ \vdots \\ (b_n^*)' \end{pmatrix} (A \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix})^T = X \begin{pmatrix} (b_1^*)' \\ \vdots \\ (b_n^*)' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix} A^T = X \operatorname{Id}_n A^T \Rightarrow$

$X = (A^*)^{-1}$ □

Definition 2.6

Sei $F : V \to W$ eine lineare Abbildung. Definiere die duale Abbildung $F^* : W^* \to V^* : \psi \mapsto \psi \circ F$.

Bemerkung: $F*$ ist linear.

$F * (\psi_1 + \psi_2) = (\psi_1) + \psi_2) \circ F = \psi_1 \circ F + \psi_2 \circ F$

$U \xrightarrow{G} V \xrightarrow{F} W$

$W^* \xrightarrow{F^*} V^* \xrightarrow{G^*} U^*$

$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*$

Beweis: $\psi \in W^*$

$(F \circ G)^*(\psi) = \psi \circ F \circ G = F^*(\psi) \circ G = G^*(F^*(\psi))$ □

Eigenschaften:

1. $Id_V^* = Id_{V^*}$
2. $(F + G)^* = F^* + G^*$
3. $(F \circ G)^* = f^* \circ F^*)$
4. $\mu F)^* = \mu F^*$

Lemma 2.7

Falls $F^* = 0$ dann ist $F = 0$. Falls V und W endlich sind, $G : W^* \to V^*$ lineare Abbildung, dann gibt es $F : V \to W$ so dass $F^* = G$.

Beweis: $F^=0$ Sei $v \in V$ beliebig. Zu zeigen: $F(v) = 0$

Definiere:

$W^* \to K : \psi \to \psi(F(v))$

Erinnerung: $W \leftrightarrow (W^*)^* : w \mapsto \psi_w : W^* \to K : \psi \mapsto \psi(w)$

$\varphi_{F(v)}(\psi) = \psi(F(v)) = F^*(\psi)(v) = 0$

Abre φ ist ein Monomorphismus

$\Rightarrow F(v) = 0 \Rightarrow F = 0.$ □

Definition 2.8

Die Operation $* : Hom(V, W) \to Hom(W^*, V^*)$

Falls V, W endlichdim. sind.

$\dim(Hom(V,W)) = \dim(V) \cdot \dim(W)$
$\dim(Hom(W^*,V^*)) = \dim(V^*) \cdot \dim(W^*)$ Also ist die Operation $*$ injektiv $\Rightarrow$ surjektiv.

Bemerkung: $F : V \to W$, $\dim(V) = n, \dim(w) = m$ hat die Darstellungsmatrix A bzgl. der Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V und $B' = \{b'_1, \dots, b'_n\}$ von W. Seien B^* und $(B')^*$ die entsprechenden dualen Basen von V^* und W^*.
Dann hat F^* die Darstellungsmatrix A^T bezgl $(B')^*$ und B^*.

Beweis:
$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$
$$F^*\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_n \end{pmatrix} \cdot F\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$
Die Darstellungsmatrix von F^* ist $F^*\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_m \end{pmatrix} \cdot A$

$F^*\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix} = (A^T \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_m \end{pmatrix})^T \Rightarrow$ die Darsstellungsmatrix von F^* ist A^T. □

Alternativer Beweis:

Beweis:
$F^*(c_k^*) = \sum_l \lambda_{l_k} b_l^*$
$F(b_i) = \sum_{j=1}^n a_{ji} c_j$
$F^*(C_k^*)(b_i) = (\sum \lambda_{l_k} b_l^*)(b_i) = \lambda_{i_k}$
$= c_k^*(F(b_i)) = c_k^*(\sum a_{ji} c_j) = a_{ki}$
$\Rightarrow A^T$ ist die Darstellungsmatrix on F^*. □

Korollar 2.9

$\det(F^*) = \det(F)$.

Lemma 2.10

$V = \oplus_{i=1}^n V_i \Rightarrow V^* \simeq \oplus_{i=1}^n V_i^*$
Der Beweis ist trivial: $V \to K$ ist eindeutig bestimmt durch $F|_{V_1}, \dots, F|_{V_n}$.

Lemma 2.11

$F : V \to W$ linear.

1. F injektiv $\Leftrightarrow F^*$ surjektiv
2. F surjektiv $\Leftrightarrow F^*$ inj
3. F Isom $\Leftrightarrow F^*$ Isom.

Beweis:

1. $F : V \to W$ injektiv. z.Zeigen $F^* : w^* \to v^*$ surjektiv: Es existiert ein $\Theta : W \to k : F^*(\Theta) = \psi \in V^*, \forall v \in V \Theta(F(V)) = \psi(v)$
   $V \simeq Im(F) \subset W$. Sei Z ein Komplement von Im(F) in W. $W = \text{Im}(F) \oplus Z$. $\forall w \in W : w = w' + \hat{w}, w_1 = F(v), \hat{w} \in Z$.
   Definiere $\Theta : W \to K : w = F(v) + \hat{w} \mapsto \psi(v)$. Θ ist wohldefiniert. Zu zeigen ist nun noch, dass Θ linear ist:
   $\Theta(w_1 + w_2) = \Theta(F(v_1) + F(v_2) + \hat{w}_1 + \hat{w}_2) = \psi(v_1 + v_2) = \psi(v_1) + \psi(v_2) = \Theta(w_1) + \Theta(w_2)$
   $\Leftarrow$
   $F^* : W^* \to V^*$ surjektiv. Zu zeigen $F : V \to W$ ist unjektiv. $v \in V : F(v) = 0 \Rightarrow v = 0$.
   Falls $v \neq 0 \Rightarrow \exists \psi : V \to K : \psi(v) \neq 0$
   $\Rightarrow \exists \Theta : W \to K : F^*(\Theta) = \psi \Rightarrow \Theta(\underbrace{F(v)}_{=0}) = \underbrace{\psi(v)}_{\neq 0}$

2. $\Rightarrow$
   $F : V \to W$ surjektiv. Zu zeigen: $F^* : W^* \leftrightarrow V^*$ injektiv.
   Sei $\Theta \in W^* : F^*(\Theta) = 0$ als lineare abbildung. $F^*(\Theta) = \Theta \circ F : V\ toK$. Zu zeigen: $\forall w \in W : \Theta(w) = 0$.
   $w \in W : \exists v \in V : F(v) = w$. F surjektiv $\Theta(w) = \Theta(F(V)) = F(\Theta)(v)$.
   $\Leftarrow F^* : V^* \to W^*$ ist injektiv. z.Z. F ist surjektiv.
   Sei Z ein Komplement von Im(F) in W : $W = \text{Im}(F) \oplus Z$. Zu zeigen ist nun, dass $Z = \{0\}$. Sonst sei B eine Basis von Z. $G : W \to K$ linear derart, dass $G|_{\text{Im}(F)} = 0$ und $\forall b \in B : G(b) = 1$. $\Rightarrow G \in W^* \Rightarrow F^*(G) = G \circ F : V \to K$. Sei $v \in V : G \circ F(v) = G(F(v)) = 0$. $F^*(G)$ ist die triviale Abbildung $\Rightarrow G = 0 \Rightarrow B = \emptyset \Rightarrow Z = \{0\}$

$\square$

3. Duale Paarungen

Definition 3.1 – Bilinearität

Seien V, W K-Vektorraeume. Eine Abbildung $\varphi : V \times W \to K$ ist bilineare wenn φ linear in jeder Koordinate ist.

1. $\varphi(v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 \varphi(v, w_1) + \lambda_2 \varphi(v, w_2)$
2. $\varphi(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, v) = \lambda_1 \varphi(w_1, v) + \lambda_2 \varphi(w_2, v)$

Bemerkung: Falls V, W endlichdimensional mit Basis $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V, $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ von W, dann ist φ eindeutig bestimmt durch die ($n \times m$ Matrix A $= \varphi(b_i, c_j)$.

$$\varphi(v,w) = \varphi(\textstyle\sum_{i\le n} \lambda_i b_i, \sum_{j\le m} \mu_j c_j) = \sum_{i\le n} \lambda_i \varphi(b_i, \sum_{j\le m} \mu_j c_j) = \sum_{i\le n} \lambda_i \sum_{j\le n} \mu_i \varphi(b_i, c_j) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_m \end{pmatrix}$$

Bemerkung: Falls wir Basen B' von V und C' von W gewählt hätten, dann ist die Darstellungsmatrix von

$$\varphi : M(B,B')^T \cdot A \cdot M(C,C') \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = M(B,B') \begin{pmatrix} \lambda_1' \\ \vdots \\ \lambda_n' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} = M(C,C') \begin{pmatrix} \mu_1' \\ \vdots \\ \mu_n' \end{pmatrix}$$

$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (\lambda_1', \dots, \lambda_n') M(B,B')^T$

Korollar 3.2

Der Rang hängt nicht von der Auswahl der Basen ab. Somit ist der Rang von φ ($\mathrm{rg}(\varphi)$) wohldefiniert.

Definition 3.3 – Duales Paar

Ein Tupel (V, W, φ) ist ein duales Paar, falls:

1. $\dim(V) < \infty, \dim(W) < \infty$
2. $\dim(V) = \dim(W)$
3. φ ist bilinear.
4. $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(v)$

Bemerkung: Falls $\varphi : V \times W \to K$ bilinear ist, dann ist $\varphi' : W \times V \to K : (w, v) \mapsto \varphi(v, w)$ auch bilinear. Wenn (V, W, φ) ein duales Paar ist, dann ist auch (W, V, φ') auch ein duales Paar.

Lemma 3.4

Für gegebene V und W gilt:
$\{\varphi : V \times W \to K\} \overset{\Phi}{\leftrightarrow} \{F : V \to W^*\}$
$\varphi : V \times W \to K \overset{\Phi}{\mapsto} F_\varphi : V \to W^* : v \mapsto F_\varphi : W \to K : w \mapsto \varphi(v, w)$
$\varphi_F : V \times W \to K \overset{\Phi^{-1}}{\leftarrow} F : V \to W^* : (v, w) \mapsto F(v)(w)$
Ferner gilt: (v, w, φ) ist ein duales Paar $\Leftrightarrow F_\varphi : V \to W^*$ Isomorph.

Beobachtung:
$\Phi^{-1} \cdot \Phi(\varphi)(v,w) = \Phi^{-1}(F_\varphi(v) : w \mapsto \varphi(v,w)) = \varphi(v,w)$

Beweis: Φ ist wohldefiniert:

1. $F_\varphi(v) \in W^*$, weil $\varphi(v,-)$ lineare in der zweiten Koordinate ist.

2. F_φ ist linear, weil φ in der ersten Koordinate linear ist.

$\Phi^{-1} \cdot \Phi = Id_X, \Phi \cdot \Phi^{-1} = Id_Y$ mit X linke, Y rechte Menge von Φ (in der Definition oben).
Falls V, W endlichdimensional sind, mit Basen $\{b_1, \ldots, b_n\}, \{c_1, \ldots, c_m\}$. A_φ sei die Darstellungmatrix bezülgich dieser Basen $A_\varphi = (a_{ij}) = (\varphi(b_i, c_j))$
Sei $\{c_1^*, \ldots, c_m^*\}$ die duale Basis zu C in W^*. $c_i^*(c_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \end{cases}$.
Die Darstellungsmatrix von F_φ bezüglich B, C^* $(\lambda_{ij}) \in M_{m \times n}(K), F_\varphi(b_k) = \sum \lambda)lkc_l^*$ $(\sum \lambda_{lk} c_l^*)(c_r) = \sum \lambda_{lk} c_l^*(c_r) = \lambda_{rk} = F_\varphi(b_k)(c_r) = \varphi(b_k, c_r)$
$\begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots \\ \lambda_{21} & \ddots & \\ \vdots & & \end{pmatrix} = A_\varphi^T$
$\mathrm{rg}(A_\varphi^T) = \mathrm{rg}(A)$
(V, W, φ) ist eine duales Paar $\Leftrightarrow \dim(V) = \dim(W) = \dim(W^*) = \mathrm{rg}(A_\varphi) = \mathrm{rg}(A_\varphi^T$
$\Leftrightarrow F_\varphi$ ist ein Isomorphismus. $\square$

Korollar 3.5

Seien V, W endlichdimensional, $\varphi : V \times W \to K$ eine Bilinearform. Dann ist (V, W, φ) ein duales Paar genau dann, wenn φ nicht ausgeartet ist.
d.h. $\forall v, \in V \varphi(v,w) = 0 \forall w, \in W \Rightarrow v = 0 \wedge \forall w, \in W \varphi(v,w) = 0 \forall v, \in V \Rightarrow w = 0$

Beweis: $\Rightarrow$

1. Sei $V \in V$ fest : $\varphi(v,w) = 0 \forall w \in W \Rightarrow F_\varphi(V)(w) = 0 \Rightarrow (V, W, \varphi)$ ist ein duales Paar $\Rightarrow v = 0$

2. (V, W, φ) duales Paar $\Rightarrow (W, V, \varphi')$ auch dual $\Rightarrow F_{\varphi'} : W \to V^*$ Isomorphismus $\Rightarrow w \in W"\varphi(v,w) = 0 \forall v \in V \Rightarrow F_\varphi(w) = 0 \Rightarrow w = 0$

$\Leftarrow$
Es genügt zu zeigen, dass $F_\varphi : V \to W^*$ ein Isomorphismus ist.
a.) $\Rightarrow F_\varphi$ ist ein Monomorphismus (injektiv).
Insbesondere ist $\dim(V) \leq \dim(W^*) = \dim(W)$. Es genügt zu zeigen, dass $\dim(V) = \dim(W^*)$, da F_φ injektiv ist.
$(W, V, \varphi'$ ist eine Bilinearform.
Aus b.) folgt $\Rightarrow F_{\varphi'}$ injektiv $\square$

Beispiel:
$(R^n, <,>) < x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n >= \sum x_i y_i$

Korollar 3.6

Sei $V, W, \varphi)$ ein duales Paar. Für jede Basis $\{c_1, \dots, c_n\}$ aus W gibt es eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ aus V, welche dual zu $\{c_1, \dots, c_n\}$ ist: $\varphi(b_i, c_j) = S_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 \end{cases}$

Beweis: Für $\{c_1, \dots, c_n\}$ aus W eine Basis. Sei $\{c_1^*, \dots, c_n^*\}$ die duale Basis aus W^*.
$F_\varphi : V \to W^*$ Iso. Sei $b_i = F_\varphi^{-1}(c_i^*)$. $\{b_1, \dots, b_n\}$ ist dann eine Basis von V.
$\varphi(b_i, c_j) = \underbrace{F_\varphi(b_i)}_{=c)i^*}(c_j)$ □

Definition 3.7 – Orthogonales Komplement

Sei (V, W, φ) ein duales Paar. Gegeben $U \subset V$ UVR von V. Definiere $U^\perp = \{w \in W : \forall u \in U : \varphi(u, w) = 0\}$. $U^\perp$ ist ein UVR von W.

Beispiel:
$(0)^\perp = V, V^\perp = \{0\}$
Bemerkung: $U \subset V, (U^\perp)^\perp = \{v \in V : \forall w \in U^\perp \varphi(v, w) = 0\} = U$

Beweis: $U \subset (U^\perp)^\perp$ trivial.
Sei $v \notin U$. z.Z. $v \notin (U^\perp)^\perp$. es existiert $G : V \to K : G|_U = 0, G(v) = 1$. $G \in V^* \simeq W$ (da F_φ ein isomorphismus ist. $\Rightarrow \exists w \in W : F_\varphi(w) = G$. D.h. $\forall z \in V : G(z) = \varphi'(z, w)$ $u \in U : 0 = G(u) = \varphi(u, w) \Rightarrow w \in U^\perp\}$ aber $G(v) = 1 = \varphi(v, w) \Rightarrow v \notin (U^\perp)^\perp$ □

Lemma 3.8

Sei (V, W, φ) ein duales Paar und $U \subset V$ UVR. Dann ist $(V/U, U^\perp, \bar{\varphi})$ ein duales Paar, wobei $\bar{\varphi}(v+U, w) = \varphi(v, w)$. Insbesondere gilt $\dim(V) + \sim (U) + \dim(U^\perp)$

Beweis: Übungsaufgabe. □

Definition 3.9 – adjungierter Endomorphismus

Sei $V, W, \varphi)$ ein duales paar und $G : W \to W$ ein Endomorphismus. Der adjungierte Endormorphismus $G^T : V \to V$ und definiert als $G^T = F_\varphi^{-1} \cdot G^* \cdot F_\varphi$

4. Euklidische Räume

Definition 4.1 – SYMMETRISCHE BILINEARFORM

Eine Bilinearform $\varphi : V \times V \to K$ ist symmetrisch, falls $\varphi = \varphi' \Leftrightarrow \forall u, v, \in V : \varphi(u, v) = \varphi(u, v)$

Bemerkung: Seien B, C Basen von V und A die Darstellungsmatrix von φ bzgl. B und C. Dann gilt:
φ ist symmetrisch $\Leftrightarrow A = A^T$

Beweis:
$\Rightarrow$
Siehe Übungsblattt
$\Leftarrow$
$\varphi(u, v) = u^T \cdot A \cdot v = (A^T \cdot u)^T \cdot v = v^T \cdot ((A^T \cdot u)^T)^T = v^T \cdot A^T \cdot u = v^T \cdot A \cdot u = \varphi(v, u)$ □

Bemerkung: Wenn φ symmetrisch ist ist der Begriff der orthogonalität wohldefiniert und vor allem symmetrisch.
$u \perp v \Leftrightarrow \varphi(u, v) = 0$
$v \perp u \Leftrightarrow \varphi(v, u) = 0$
Beispiel:
$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ ist symmetrisch.
$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$

Definition 4.2 – QUADRATISCHE FORM

Sei $\varphi : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Die zugehörige quadratische Form ist: $q : V \to K, v \mapsto \varphi(v, v)$

Bemerkung: $\dim(V) = n$ Sei $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Basis.
φ hat die Darstellungsmatrix A bzgl. B.

$$Q(v) = \varphi(v, v) = \varphi(\sum \lambda_i b_i, \sum \lambda_i b_i) = \begin{pmatrix} \lambda_1, \ldots, \lambda_n \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

Korollar 4.3

Fallse $char(K) \neq 2$:
Jede symmetrische Lienarform is durch ihre quadratische Form eindeutig bestimmt.
$q(u + v) = \varphi(u + v, u + v) = \varphi(u, u) + \varphi(u, v) + \varphi(v, u) + \varphi(v, v) = \varphi(u, u) + \varphi(v, v) + 2\varphi(u, v) = q(u) + q(v) + 2\varphi(u, v)$
$q(u - v) = \cdots = q(u) + q(v) - 2\varphi(u, v)$
Insbesondere: $\varphi(u, v) = \frac{q(u+v) - q(u-v)}{4}$

Definition 4.4 – BILINEARFORM DIFINIT

Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\varphi : V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform.

1. Wir sagen, dass φ positiv semidifinit ist, falls $\varphi(u, u) \geq 0 \forall u \in V$.

2. Falls $\varphi(u,u) \leq 0 \forall u \in V$ ist φ negativ semidefinit

3. φ ist positiv definit, falls φ pos. semidifinit ist und $\varphi(u,u) > 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$

4. φ ist negativ definit, falls φ neg. semidefinit ist und $\varphi(u,u) < 0 \forall v \in V \setminus \{0\}$

5. Ansonsten ist φ indefinit.

Beispiel:

1. Standard Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist positiv definit
2. $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto x_1 y_2$ Ist positiv semidefinit aber nicht pos. definit ($\varphi((0,1),(0,1)) = 0$).
3. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \to x_1 y_1 - x_2 y_2$ ist indefinit.

Bemerkung: φ ist pos. (semi) definit $\Leftrightarrow -\varphi$ ist neg. (semi) definit.

Definition 4.5 – Skalarprodukt

Ein Skalarprodukt auf einem endliche nVektorraum V ist eine positiv definite symmetrische Bilinearform. $\varphi(u,v) \to < u, v >$

Definition 4.6 – Euklidischer Raum

$V, <,>)$ ist ein euklidischer Raum, wenn V ein endlicher $\mathbb{R}$-Vr ist und $<,>$ ein Skalarprodukt.

Definition 4.7 – Norm, normierter Vektorraum

Eine Norm auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum V ist eine Abbildung $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}$, so dass:

1. $||v|| > \geq 0$
   $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
2. $||\lambda v|| = |\lambda| \cdot ||v||$
3. Dreiecksungleichung:
   $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$

$(V, || \cdot ||)$ ist ein normierter Vektorraum.

Beispiel:

1. $||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, die euklidische Norm.
2. $||x||_{\infty_1} = \sum |x_i|$
3. $||x||_{\infty_2} = max(|x_i|)$

Definition 4.8

Sei $(V, <,>)$ ein euklidischer Raum und definiere $|| \cdot || : V' to \mathbb{R}, v\ mapsto \sqrt(< v, v >)$. Die Abbildung ist wohldefiniert und induziert sie eine Norm auf V.

Lemma 4.9 – CAUCHY-SCHWARZ UNGLEICHUNG

$\forall v, w \in V : | < v, w > | \leq ||v|| \cdot ||w||$

Beweis: Falls $w = 0$ ist die Aussage trivial. ObdA. ist $w \neq 0$, also $||w|| > 0$.
Sei $\lambda \in R$ beliebig.
$0 \leq < v - \lambda w, v - \lambda w >= ||v||^2 + \lambda^2 ||w||^2 - 2\lambda < v, w >$
Insbesondere $2\lambda < v, w > \leq \lambda^2 ||w||^2 + ||v||^2$.
Falls $\lambda = \frac{<v,w>}{||w||^2} \in \mathbb{R}$:
$2\frac{<v,w>^2}{||w||^2} \leq ||v||^2 + \frac{<v,w>^2}{||w||^2}$
$\Rightarrow \frac{<v,w>^2}{||w||^2} \geq ||v||^2 \Rightarrow < v, w >^2 < ||v||^2 \cdot ||w||^2$
$\Rightarrow | < v, w > \leq ||v|| \cdot ||w||^2$ □

Korollar 4.10

$(V, <, >)$ ist ein Euklidischer Raum:
$|| \cdot || : V \to \mathbb{R}, v \to \sqrt{< v, v >}$ ist eine Norm.

Beweis:

1. Klar.
2. $||\lambda v|| = \sqrt{< \lambda v, \lambda v} = \sqrt{\lambda^2 < v, v >} = |\lambda| \cdot ||v|$
3. Es genügt zu zeigen, dass $||u + v||^2 \leq (||u|| + ||v||)^2$
   $||u+v||^2 =< u+v, u+v >=< u, u > + < v, v > +2 < u, v > \leq ||u||^2 + ||v||^2 + 2||u||||v|| = (||u|| + ||v||)^2$

□

Definition 4.11

Sei $(V, <, >)$ ein euklidischer Raum.
$-1 \leq \underbrace{\frac{<v,u>}{||v||||u||}}_{=\cos(\Theta)} < 1$
Mit $\Theta \in (0, \pi]$ ist eindeutig bestimmt. Θ ist der Winkel zwischen u und v.

Bemerkung: $u \perp v \Leftrightarrow < uv >= 0 \Leftrightarrow$ der Winkel $\frac{\pi}{2}$ ist.

Satz 4.12 – SATZ VON PYTHAGORAS

Sei $(V, <, >)$ ein euklidischer Raum. Dann gilt:
$v \perp w \Leftrightarrow ||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$

Beweis: $||v + w||^2 =< v + w, v + w >=< v, v > + < w, w > +2 < v, w >= ||v||^2 + ||W||^2 + 2 < v, w >= ||v||^2 + ||w||^2 \Leftrightarrow < v, w >= 0 \Leftrightarrow v \perp w$ □

Definition 4.13 – ORTHOGONALES SYSTEM

Sei $\varphi : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform. Ein orthogonales System bezüglich φ ist eine Kollektion von Verktoren M, so dass:
$0 \notin M, u, v \in M \wedge u \neq v : \varphi(u, v) = 0$.
Ein Orthonormales System M ist eine Kollektion von Vektoren, so dass:
$$\varphi(u, v) = \begin{cases} 0 & u \neq v \\ 1 & u = v \end{cases}$$

Bemerkung: Dementsprechend definieren wir Orthogonalbasis und Orthonomalbasis (ONB).
Beispiel:
Standardbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$ in $(R^n, <,>)$ mit dem Standarskalarprodukt.

Satz 4.14

Sei $char(K) \neq 2$. Jede symmetrische Bilinearform φ auf einem endlichdimensionalen K-VR V lässt sich bei einer geeigneten Basisauswahl durch eine Diagonalmatrix darstellen.
Ferner ist φ nicht ausgartet $\Leftrightarrow$ kein Eigenwert der Matrix ist null.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass (V, φ) eine Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ besitzt, welche aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht.
Dann ist die Darstellungsmatrix von φ bzgl. $\{b_1, \dots, b_n\}$:
$\begin{pmatrix} \varphi(b_1, b_1) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \varphi(b_n, b_n) \end{pmatrix}$ Sei $q : V \to k : v \mapsto \varphi(v, v)$ die zugehoerige quadratische Form.
Falls $q(v) = 0 \forall v \in V \Rightarrow \varphi(u, v) = 0 \forall u, v \in V$. Dann besteht jede Basis von V aus paarweise orthogonalesn Bektoren.
Sonst existiert $b_1 \in V : q(b_1) \neq 0$.
$F : V \to K, v \mapsto \varphi(v, b_1), F \neq 0, \mathrm{Im}(F) = K$ als K-Vr. $\Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(F)) = n - 1$.
$\mathrm{Ker}(F) = \{v \in V ; \varphi(v, b_1) = 0\} = \{v, \in V ; v \perp b_1\} = Span(b_1)^\perp$.
Nach Induktion auf der Dimension von V existiert eine Basis von $b_2, \dots, b_n$ von $\mathrm{Ker}(F)$ welche aus paarweise orthogonalen Vektoren besteht.
Die Basis $\{b_1, \dots, b_n\}$ ist eine Orthogonalbasis von V.

Bemerkung: Die Eigenwerte der Matrix hängen nicht von der Basis ab.
$\Rightarrow$ Eigenwerte sind $\varphi(b_1, b_1), \dots, \varphi(b_n, b_n)$
$\Rightarrow$
Angenommen, dass $\mu_j = \varphi(b_j, b_j) = 0$ wäre.
$\varphi(b_j, b_i) = \begin{cases} 0 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ $\varphi(b_j, -) = V \to K$ ist die triviale Abbildung und $b_j \neq 0$.
$\Leftarrow$
Sei $v \in V \setminus \{0\}$ beliebig. Zu zeigen: $\varphi(v, -) : V \to K$ ist nicht trivial.
$v = \sum_{i=1}^n b_i \Rightarrow \exists i : \lambda_i \neq 0$
$\varphi(v, b_i) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi(b_j, b_i) = \lambda \varphi(b_i, b_j) \neq 0$

□

Korollar 4.15

Sei $char(K) \neq 2$. Falls in K jedes Element ein Quadrat ist, dann lässt sich jede symmetrische Bilinearform durch eine Matrix der Form $\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$ darstellen.

Beweis: Es existiert eine Orthogonalbasis $\{b_1, \dots, b_n\}$ für $\varphi : V \times V \to K$

$$c_i = \begin{cases} \frac{b_i}{\sqrt{\varphi(b_i,b_i)}} & \varphi(b_i,b_i) \neq 0 \\ b_i & \text{ansonsten} \end{cases}$$

OBdA. können wir annehmen, dass $\{c_1, \ldots, c_n\}$ ist so geordnet, dass:

$\varphi(c_i, c_i) = 1, i \leq k$

$\varphi(c_j, c_j) = 0, j > k$

Die Darstellungsmatrix von φ bzgl $\{c_1, \ldots, c_n\}$ ist dann:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & \ddots &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& 0 && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& 0 \end{pmatrix}$$

□

Satz 4.16 – Satz von Sylvester

Jede symmetrische Bilinearform φ auf einem endlichdimensionalem $\mathbb{R}$-Vektorraum lässt sich bei geeigneter Basisauswahl durch eine Matrix der Form:

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$$

datstellen, wobei die matrix p 1er, q -1 er und r 0er hat.

Ferner hängen die Zahen p, q und r nur von φ ab.

Beweis: Sei $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine Orthogonalbasis fúr φ.

$$c_i = \begin{cases} \frac{b_i}{\sqrt{\varphi(b_i,b_i)}} & \varphi(b_i,b_i) > 0 \\ \frac{b_i}{\sqrt{-\varphi(b_i,b_i)}} & \varphi(b_i,b_i) < 0 \\ 0 & \varphi(b_i,b_i) = 0 \end{cases}$$

Nach Umordnung der c_i's ist die Darstellungsmatrix, dann $\begin{pmatrix} 1 &&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&& \\ && 1 &&&&&& \\ &&& -1 &&&&& \\ &&&& \ddots &&&& \\ &&&&& -1 &&& \\ &&&&&& 0 && \\ &&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&& 0 \end{pmatrix}$

Bemerkung: $\varphi|_{\mathrm{span}(c_1,\ldots,c_p)\times\mathrm{span}(c_1,\ldots,c_p)}$ ist positiv definit.

Beweis: $\varphi(\sum_{i=1}^p \lambda_i c_i, \sum_{i=1}^p \lambda_j c_j) = \sum_{i,j} \lambda_i, \lambda_j \varphi(c_i, c_j) = \sum_{i=j} \lambda_i^2$ □

Sei $U \subset V$ der grösste Unterraum von V derart, dass $\varphi|_{U\times U}$ positiv definit ist.

$\text{span}(c_1, \dots, c_p) \subset U$.
z.Zeigen: $p = \dim(U)$
Ansonsten $U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) \neq 0$.
Sei $0 \neq v \in U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n)$.
$c = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i, c_i$
$0 \leq \varphi(v, v) = \sum_{i=p+1}^{n} \lambda^2 \varphi(c_i, c_i) \leq 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow p = \dim(U)$
q, r bestimmen:
$\text{rg}(\varphi) = p + q$, also ist q eindeutig bestimmt. r ist dann $n - \text{rg}(\varphi)$ □

Definition 4.17 – Signatur

Signatur$(\varphi) = p - q$

Beispiel:
$\varphi = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : ((x, y), (x_2, y_2)) \mapsto 2x_1x_2 - y_1y_2$
φ ist positiv definit auf $\text{span}((1, 0))$:
$\varphi((\lambda, 0), (\lambda, 0)) = 2\lambda^2 \geq 0$
φ ist positiv definit auf $\text{span}((1, 1))$:
$\varphi((\lambda, \lambda), (\lambda, \lambda)) = \lambda^2 \geq 0$
φ ist nicht positiv definit auf $\text{span}(1, 0) + \text{span}((1, 1)) = \mathbb{R}^2$:
$\varphi((0, 1), (0, 1)) = -1$
Damit gibt es keinen größten Unterraum, so wie im Beweis zum Satz von Sylvester angenommen.

Beweis: Korrektur zum Satz on Sylvester
Wir wollen p Eindeutig bestimmen. φ ist positiv definit auf $\text{span}(c_1, \dots, c_p)$.
Sei $h = \max\{\dim(U) | U \subset V : \varphi|_{U \times U}$ ist positiv definit$\}$ Sei $U \subset V$ ein UVR der Dimension h, so dass $\varphi|_{U \times U}$ positiv definit ist. Wir zeigen, dass $U \cap \text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n) = \{0\} \Rightarrow h + n - p = \dim(U) + n - p = \dim(\text{span}(c_{p+1}, \dots, c_n)) \leq n$
$\Rightarrow h \leq p$ □

5. Unitäre Räume

Definition 5.1 – Unitärer Raum

Ein unitärer Raum V ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum zusammen mit einem komplexen Skalarprodukt $<,>: V \times V \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $< v, w >= < w, \bar{v} >$ wobei $\overline{a + bi} = a - bi$
2. $< v + v', w >=< v, w > + < v', w >$
3. $< \lambda v, w >= \lambda < v, w >$
4. $< v, v >\in \mathbb{R}$ und ferner $< v, v >> 0$ für $v \neq 0$

Beispiel:
$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i$
Bemerkung: Die Abbildung $<,>$ ist nicht bilinear sondern hermitsch sesquilinear.
$< v, \lambda w + \mu w' >= \bar{\lambda} < v, w > +\bar{\mu} < v, w' >$

Beweis: $< v, \lambda w + \mu w' >= \overline{< \lambda w + \mu w', v >} = \bar{\lambda}\overline{< w, v >} + \bar{\mu}\overline{< w', v >} = \bar{\lambda} < v, w > +\bar{\mu} < v, w' >$ □
Bemerkung: Für einen unitären Raum V ist $|| \cdot || : V \to \mathbb{R}, v \mapsto \sqrt{< v, v >}$
$||v|| > 0$
$||\lambda \cdot v|| = |lb|||v||$
$||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$
Bemerkung: Sei $(V, <, >)$ unitärer Raum:
$v \perp w \Leftrightarrow < v, w >= 0$
Orthogonalität, orthogonales System und orthonomales System sowie orthogonal- und orthonomalbasen werden in Unitäre Räumenn analog zu Euklidischen Räumen definiert.

Definition 5.2 – Orthonormalbasis

Sei $V, <, >$ ein euklidischer oder unitärer Raum. Eine Orthonomalbasis V ist eine Basis $B = \{b_i\}$, so dass $i \neq j \Rightarrow b_i \perp b_j, ||b_i|| = 1$.

Bemerkung: Jedes orthogonale System ist linear unabhängig.

Beweis: $\sum \lambda_i b_i = 0$
$0 =< \sum \lambda_i b_i, b_j >= sum \lambda_i < b_i, b_j >= \lambda_j < b_j, b_j >\Rightarrow \lambda_j = 0$ □

Lemma 5.3

Sei $(V, <, >)$ ein euklidischer oder unitärer Raum und $\{b_1, \ldots, b_n\}$ eine ONB (orthonormalbasis). Dann gilt:

1. $\forall v \in V v = \sum_{i=1}^{n} < v, b_i > b_i$
2. $v = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i b_i, w = \sum_{i=0}^{n} \mu_i b_i$
   $\Rightarrow < v, w >= \sum \lambda_i \bar{\mu}_i$

3. Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus. Dann ist die Darstellungsmatrix A von F bezüglich $\{b_1, \dots, b_n\}$ gegeben durch $a_{ij} =< F(b_j), b_i >$

Beweis:

1. $v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$
   $< v, b_j >= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < b_i, b_j >= \lambda_j$
2. $< \sum \lambda_i b_i, \sum \mu_j b_j >= \sum_{i,j} \lambda_i \bar{\mu_j} < b_i, b_j >= \sum \lambda_i \bar{\mu_i}$
3. $A = (a_{ij})$
   $F(b_1), \dots, F(b_n)$
   a_{ij} ist die Koordinate von $Fb_j)$ bzgl b_i. Aus 1. folgt: $a_{ij} =< F(B_j), b_i >$

$\square$

Satz 5.4 – GRAM-SCHMIDTSCHES ORTHONORMALISERUNGSVERFAHREN

Sei V ein euklidischer oder uniärer Vektorraum. Gegeben $\{v_1, \dots, v_n\}$ lin. unabh. Dann gibt es ein orthonormalsystem $\{e_1, \dots, e_n\}$, dass $\text{span}(v_1, \dots, v_n) = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$.
Insbesondere falls V endlichdimensional ist besitzt V eine ONB.

Beweis: Zwei Schritte: zuerst aus $v_1, \dots, v_n$ eine orthogonalbasis konstruieren, dann diese Vektoren normalisieren.
$e_1, \dots, e_n$ werden rekursiv definiert.
$e'_1 = v_1$, $e_1 = \frac{e'_1}{||e'_1||}$
Angenommen $e_1, \dots, e_k$ wurden konstruiert, so dass $i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j, ||e_i|| = 1$ und $\text{span}(e_1, \dots, e_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$
$e'_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, e_i > e_i$
$e'_{k+1} \neq 0$ Sonst ist $v_{k+1} \in \text{span}(e_1, \dots, e_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$
$e_{k+1} = \frac{e_{k+1}'}{||e'_{k+1}||}$ z.Zeigen:
$e_{k+1} \perp e_j :< e_{k+1}.e_j >= \frac{1}{||e'_{k+1}}' < v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, e_i > e_i, e_j >= \frac{1}{||e'_{k+1}}' < v_{k+1}, e_i > - \sum_{i=1}^{k} < v_{k+1}, e_i >< e_i, e_j >) = \frac{1}{||e'_{k+1}}' < v_{k+1}, e_i > - < v_{k+1}, e_j >= 0$ $\text{span}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{span}(v_1, \dots, v_{k+1}$
$e_{k-1} \in \text{span}(v_{k-1}, e_1, \dots, e_k) = \text{span}(v_{k+1}, v_1, \dots, v_k)$
$v_{k+1} = ||e'_{k+1}||e_{k+1} + \sum_{j=1}^{k} < v_{k-1}, e_j > e_j \in \text{span}(e_1, \dots, e_{k+1})$ $\square$

Korollar 5.5

Sei $(V, <, >)$ euklidisch oder unitär endlich dimensional und $D \subset V$ ein Orthonormales system dann $\exists$ ONB B, so dass $D \subset B$.

Beweis: Sei $D = \{v_1, \dots, v_k\}$ und ergänze zu einer Basis von $\{v_1, \dots, v_n\}$ von V. Konstriuiere eine ONB.
z.Zeigen: $i \leq k \Rightarrow e_i = v_i$.
$e_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = v_1$
Annahme $i \leq j \Rightarrow e_i = v_j$
$e_{i+1} = \frac{e'_{i+1}}{||e'_{i+1}}, e'_{i+1} = v_{i+1} - \sum_{j=1}^{i} < v_{i+1}, e_j > v_j = v_{i+1}$ $\square$

Definition 5.6 – ORTHOGONALITÄT VON TEILMENGEN

Sei $(V, <, >)$ euklidisch oder unitär. Zwei Teilmengen A, B von V sind orthogonal $A \perp B$, falls $v \perp w \forall v \in A, \forall w \in B$.
Bemerkung: $A \perp B \Leftrightarrow \text{span}(A) \perp \text{span}(B)$ (Blatt 7 Aufgabe 3).

Definition 5.7

Wenn $A \subset V$ eine Teilmenge ist:
$A^\perp = \{v \in V | \{v\} \perp A\} = \{v \in V | \forall w \in A : v \perp w\}$
Bemerkung: $A^\perp$ ist ein Unterraum von V.

Bemerkung: $A^\perp = \operatorname{span}(A)^\perp$.

Beweis:
$A^\perp \subset \operatorname{span}(A)^\perp$:
$A^\perp \perp A \Rightarrow A^\perp \perp \operatorname{span}(A) \Rightarrow A^\perp \subset \operatorname{span}(A)^\perp$
$A^\perp \supset \operatorname{span}(A)^\perp$:
$v \in \operatorname{span}(A)^\perp \Rightarrow \forall w \in \operatorname{span}(A) : v \perp w \Rightarrow \forall w \in A : v \perp w \Rightarrow v \in A^\perp$ □

Satz 5.8

Sei $(V, <,>)$ euklidisch oder unitär und $U \subset V$ ein endlichdimensionaler Unterraum. $\Rightarrow V = U \oplus U^\perp$

Beweis: $U \cap U^\top = \{0\}$ (da das Skalarprodukt nicht ausgeartet ist). Es genügt zu zeigen, dass $V = U + U^\perp$.
Falls $U = \{0\} \Rightarrow U^\perp = V$
Falls $U \neq \{0\}$. Wegen Gram-Schmidt da U endlichdimensional ist existiert $\{b_1, \dots, b_k\}$, eine orhtonormale Basis von U.
$v = \sum_{i=1}^k < v, b_i > b_i + (\underbrace{v - \sum_{i=1}^k < v, b_i > b_i}_{=w})$ Wir müssen zeigen, dass $w \in U^\perp$. $\Rightarrow$ Es genügt, wenn wir zeigen, dass w orthogonal zu allen b_i ist.
$< w, b_j >=< v - \sum_{i=1}^k < v, b_i > b_i, b_j >=< v, b_j > - \sum_{i=1}^k < v, b_i >< b_i, b_j >=< v, b_j > - < v, b_j >= 0$ □

Lemma 5.9

Sei $(V, <,>)$ eukldisch oder unitär und $U \subset V$ endlichdimensionaler UVR. Dann gilt $(U^\perp)^\perp) = U$

Beweis: $\supset$
$U \perp U^\perp \Rightarrow U \subset (U^\perp)^\perp)$
$\subset$
Sei $v \in (U^\perp)^\perp \subset V = U \oplus U^\perp \Rightarrow v = \subset \in Uu + \subset \in Ww$
Es genügt zu zeigen, dass $w = 0 \Rightarrow v = u \in U$.
$w = v - u, u \in U \subset (U^\perp)^\perp, v \in U \Rightarrow w \in (U^\perp)^\perp \cap U^\perp = \{0\}$ □

Definition 5.10 – ORHTOGONALE PROJEKTION

Sei $U \subset V$ UVR. Wir definieren die orthogonale Projektion von v auf U als der Vektor $u \in U$ derart, dass $v = u + \subset \in U^\perp w$
Bemerkung: Falls u existiert ist er eindeutig bestimmt.
$u_2 + w_2 = v = u_1 + w_1 \Rightarrow u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap U^\top$
Bemerkung: Falls $U \subset V$ endlichdimensional ist, ist die orthogonale Projektion auf U wohldefiniert.
$\forall v \in V$ existiert ein $pr_U(v)$ derart, dass $v = Pr_U(v) + w$

Satz 5.11

Sei $U \subset V$ ein UVR, $(V, <,>)$ euklidisch oder unitär, $v \in V, u \in U$. Folgende Aussagen sind dann äquivalent:

1. $Pr_U(v) = u$

2. $\forall i_1 \subset U \setminus \{u\}, ||v - u_1|| > ||v - u||$

Beweis:

1. Kommt später.

b.) $\Rightarrow$ a.) $v = u + (v - u)$

Es genügt zu zeigen, dass $v - u \in U^{\perp}$

Sonst existiert ein $u' \in U : \lambda - < v - u, u' > \neq 0 \Rightarrow u' \neq 0$ O.b.d.A. $||u'|| = 1$

Sei $u + \lambda u' \in U \setminus \{u\}$

$||v - u||^2 < || \underbrace{v - (u + \lambda u')}_{=<v-u-\lambda u', v-i-\lambda u'>} ||^2$

$= ||v - u^2 - \lambda < u', \underbrace{v - u}_{=\bar{\lambda}} > -\bar{\lambda} < \underbrace{v - u}_{=\lambda}, u' > + \lambda\bar{\lambda}||u||^2 = ||v - u||^2 - \lambda\bar{\lambda} - \lambda\bar{\lambda} + \lambda\bar{\lambda} < ||v - u||^2$

Widerspruch!

$\square$

6. Selbstadjungierte Endormorphismen und Hauptachsentransformationen

Bemerkung: Sei $(V, <, >)$ ein endlichdimensionaler euklidischer Raum $\Rightarrow (V, V, <, >)$ ist ein duales Paar.
Sei $v \in V, < v, - >: V \to \mathbb{R}$ ist wohldefiniert falls v $\neq 0$
$<, v, v >= ||v||^2 \neq 0$, falls $v \neq 0$
Falls V ein endlichdimensionaler unitärer Raum ist, dann ist $<, - >: V \to \mathbb{C}$ nicht linear.
Lösung: Wir definieren eine neue Struktur auf V als $\mathbb{C}$-Vektorraum.
$\lambda \cdot_{\text{konj}} v = \bar{\lambda} v$
Somit ist $(V, V_{konj}, <, >)$ ein duales Paar, da $< v, v >= ||v||^2 \neq 0$ fr̈ $v \neq 0$.
Folgerung:
Sei V ein endlichdimensionaler unitärer oder euklidischer Raum. Jeder Endomorphismus $F : V \to V$ besitzt einen adjungierten Endomorphismus $F^T : V \to V : \forall v, w \in V :< v, F(W) >=< F^T(v), w >$
Alternative Beschreibung:
Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine ONB von V. Seien $v, winV \Rightarrow w = \sum_{i=1}^n \underbrace{\lambda_i}_{<w,b_i>} b_i$
$< v, F(w) >=< v, \sum_{i=1}^n < w, b_i > F(b_i) >= \sum_{i=1}^n \overline{< w, b_i >} < v, F(b_i >= \sum_{i=1}^n < v, F(b_i) >< b_i, w >=< \sum_{i=1}^n < v, F(b_i) > \cdot b_i, w >=< F^T(v), w >$
$\Rightarrow F^T(v) = \sum i = 1^n < v, F(b_i) > b_i$

Definition 6.1 – Adjungierte Matrix

Sei $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, $A \in M_{n\times n}(K)$
Die adjungierte Matrix A^* von A ist die Matrix $A^* = (\bar{a_{ji}})$
Bemerkung: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : A^* = A^T$
leicht zu zeigen:
$(A^*)^* = A$
$(A + B)^* = A^* + B^*$
$(\lambda A^*) = \bar{\lambda} \cdot A^*$
$AB)^* = B^* A^*$
Bemerkung: Falls A regulär ist, dann $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$

Lemma 6.2

Sei $F : V \to V$ ein Endormorphismus eines euklidischen oder unitären endlichdimensioanlen Vektorraumes V und A die Darstellungsmatrix von F bezüglich den orthonormalbasen $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, $D = \{d_1, \dots, d_n\}$. Dannn hat $F^T : V\ toV$ Darstellungsmatrix A^* bzgl D und B.

Beweis: $F^T(d_i) = \sum_{j=1}^n < F^T(d_i), b_j$
$A = (a_{ij}) \Rightarrow F(b_j) = \sum_{i=1}^n = \underbrace{a_{ij}}_{=<F(b_i),d_i>} d_i$
$\bar{a_{ij}} = \overline{< F(b_j), d_i >} =< d_i, F(b_j) >=< F^T(d_i), b_j >= c_{ji}$ □

Bemerkung: Von Hier and sei $(V, <, >$ ein endlichdimensionaler euklidischer oder unitärer Vektorraum

Definition 6.3 – Normale Homomorphismen

$F : V \to V$ ist normal, falls $F \circ F^T = F^T \circ F$

Lemma 6.4

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $F : V \to V$ ist normal;
2. $\forall v, w \in V :< F(v), F(w) >= F^T(v), F^T(w) >$

Beweis:

1.) $\Rightarrow$ 2.) $< F(v), F(w) >=< F^T(F(v)), w >=< F(F^T(v)), w >= \overline{< w, F(F^T(v)) >} = \overline{< F^T(w), F^T(v) >} =< F^T(w), F^T(v) >$

2.) $\Rightarrow$ 1.) zu Zeigen: $F \circ F^T(v) = F^T \circ F(v)$
Oder Äquivalent dazu, dass $F \circ F^T(v) - F^T \circ F(v) = 0$
$\Leftrightarrow \forall w \in V :< F \circ F^T(v) - F^T \circ F(v), w >= 0$
$\Leftrightarrow< F \circ F^T(v), w >=< F^T \circ F(v), w >$
$< F^T \circ F(v), w >=< F(v), F(w) >=< F^T(v), F^T(w) >=< F \circ F^T(v), w >= \overline{< w, F \circ F^T(v) >} = \overline{< F^T(w), F^T(v) >}$

□

Bemerkung: $F : V \to V$ mit Darstellungsmatrix A bzgl der ONB $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ von V. F^T hat Darstellungsmatrix A^*
$F^T \circ F \to A^*A$
$F \circ F^T \to AA^*$

Definition 6.5 – NORMALE MATRIX

Eine Matrix $A \in M_{n\times n}$ ist normal, falls $A^*A = AA^*$.

Bemerkung: F ist normal, gdw. F eine normale Darstellungsmatrix bzgl. JEDER ONB von V besitzt.

Lemma 6.6

$F : V \to V$ normal.
$v \in V'$ ist ein Eigenvektor von F bzgl λ gdw. v ein Eigenvektor von F^t bzgl $\bar{\lambda}$ ist.

Beweis: $||F(v)-\lambda v||^2 =< F(v)-\lambda v, F(v)-\lambda v >=< F(v), F(v) > -\bar{\lambda} < F(v), v > -\lambda < v, F(v)+\lambda\bar{\lambda} < v, v >=< F^T(v), F^T(v) > -\bar{\lambda}\overline{< F^T(v), v >} - < F^T(v), \bar{\lambda}v > + < \lambda v, \lambda v >=< F^T(v), F^T(v) > -\bar{\lambda} < v, F^(T), v > - < F^T(v), \bar{\lambda}v > + < \lambda v, \lambda v >=< F^T(v) - \bar{\lambda}v, F^T(v) - \lambda v >= ||F^T(v) - \bar{\lambda}v||^2$ □

Satz 6.7

Sei $F : V \to V$ derart, dass $\chi_F(T)$ in Linearfaktoren zerfällt. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. F ist normal.
2. Es existiert eine ONB $\{b_1, \dots, b_n\}$ von V, welche aus Eigenvektoren von F besteht.

1.) $\Rightarrow$ 2.) Induktion auf $\dim(V)$.

$\dim(V) = 1 \Rightarrow$ F besitzt einen Eigenvektor v zum Eigenwert λ. $||v|| \neq 0 \Rightarrow \frac{v}{||v||}$ ist auch ein Eigenvektor. $\{\frac{v}{||v||}\}$ ist eine ONB von V.

Sei nun $\dim(V) \geq 2$:

$\chi_F(T)$ zerfällt in Linearfaktoren $(T - lb_1), \dots, (T - \lambda_n)$. Sei $b_1 \in V$ Eigenvektor zom Eigenwert λ_1. OBdA. $||b_1|| = 1$. $V = \text{span}(b_1) \oplus U, U = \text{span}(b_1)^{\perp}$

$\dim(U) = n - 1$.

Beh. U ift F-invariant.

Beweis kommt nächste woche.

$F|_U : U \to U$ ist ein Endomorphismus.

Behauptung U ist T^T-invariant und $F|_U)^T = F^T|_U$

Beweis:

U F^T-invariant ist wie oben.

$\forall u_1, u_2 \in U :< u_1, \underbrace{F(u_2)}_{F|_U(u_2)} >=< \underbrace{F^T}_{F^T|_U}(u_1), u_2 >$ Aus der Eindeutigkeit von adjungierten Endormorphismen folgt $F^T|_U = (F|_U)^T$

Insbesondere ist $F|_U$ normal. $\overset{Induktion}{\Rightarrow} \exists\{b_2, \dots, b_n\}$ eine ONB von U welche aus Eigenvektoren von $F|_U$ besteht.

$\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ ist eine Basis von Eigenvektoren.

2.) $\Rightarrow$ 1.) Sei $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ eine ONB von Eigenvektoren von F. $F(b_i) = \lambda_i b_i$

Setze $G : V\ toV : b_i \mapsto \bar{\lambda}_i \cdot b_i$

$G \circ F(b_i) = G(\lambda_i b_I)\lambda_i G(b_i) = \lambda_i\bar{\lambda} + ib_i = \bar{\lambda}_i(\lambda_i b_i) = \bar{\lambda}_i(F(b_I)) = F(\bar{\lambda}_i b_i) = F(G(b_i))$

$\Rightarrow F \circ G = G \circ F$ auf V.

Aber $G = F^T$, da b_i Eigenvektor von F^T zum Eigenwert $\bar{\lambda}_i$ ist.

$\Rightarrow F^(T)(b_i) = \bar{\lambda}_i = G(b_i) \Rightarrow G = F^T$ $\square$

Bemerkung: Jeder normale Endomorphismus eines unitären endlichen Raumes ist diagonalisierbar.

Satz 6.8 – Sylvester

Sei $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ symmetrisch. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

Beweis:

1 $\Leftrightarrow$ 2 ok

1 $\Rightarrow$ 3 Die Bilinearform $\varphi\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto v^T Aw$ ist positiv definit.

$\det(A) = \Pi_{i=1}^n \lambda_i > 0$

$\forall U \in \mathbb{R}^n$ UVR $\to \varphi_{|_U} : U \times U \to \mathbb{R}$ ist auch positiv definit. Sei $U = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$

$$\varphi_{|_U} : U \times U \to \mathbb{R} : (v, w) \mapsto v^T \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} w$$

$$\Rightarrow \det(\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1k} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix}) > 0$$

$3 \Rightarrow 1$ Induktion auf n.

$n = 1$:

$A = (\lambda) \Rightarrow \lambda > 0$

$x^T Ax = \lambda x^2 \geq 0 \Rightarrow, \lambda x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$ A ist positiv definit. Für $U = \text{span}(e_1, \ldots, e_{n+1})$

Darstellungsmatrix von $\varphi|_U$ hat auch alle Hauptminome echt positiv $\Rightarrow \varphi|_U$ ist positiv definit.

$\Rightarrow$ Hauptachesntransformationssatz? Es gibt eine Orthonormalbasis $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von V, so dass φ Diagonalform bzgl. $b_1, \ldots, b_n$ hat. Falls φ nicht postiiv definit wäre, gäbe es $i : \varphi(b_i, b_i) = \lambda_i < 0$

$\Rightarrow \det(A) = \Pi\lambda_i > 0$

$\Rightarrow \exists j \neq i : \lambda_i < 0$i

$b_i = \sum_{k=1}^n \mu_k^i e_k, b_j = \sum_{k=1}^n \mu_k^j e_k$

$\Rightarrow \exists' alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nicht beide null, so dass $\alpha b_i + \beta b_j \in Span(e_1, \ldots, e_{n+1}) = U$

$\mu_N^i = 0 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 0$

$\alpha = \mu_n^i, \beta = -\mu_n^i, 0 = \mu_n^j$ genau so. $\varphi(\alpha b_i + \beta b_j, \alpha b_i + \beta b - j) = \varphi(v, v) = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots \\ \vdots & \end{pmatrix}}_{\geq 0} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ xi_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \alpha^2 \lambda_i + \underbrace{\alpha}_{<0} \beta^2 + 0$ Widerspruch.

$\square$

7. Orthogonale Abbildungen und Drehungen

Definition 7.1 – Orthogonale Abbildungen

Sei V eukldidisch oder unitär. $F : V \to V$ ist orthogonal (manchmal auch unitär genannt, falls V unitär ist), falls $\forall v, w \in V :< v, w >=< F(v), F(w) >$

Lemma 7.2

Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. $F : V \to V$ ist orthogonal
2. $\forall v \in V : ||v|| = ||F(v)||$
3. Für jedes OrthonormaleSystem $\{e_1, \dots, e_n\}$ ist $\{F(e_1), \dots, F(e_n)\}$ auch ein orthonormales System.

Beweis:

$1 \to 2$ $||v||^2 =< v, v >=< F(v), F(v) >= ||F(v)||^2$

$2 \Rightarrow 3$ Es genügt zu eigen, dass $F(e_i) \perp F(e_j) \forall i \neq j$ (da die norm nach 2 erhalten wird).
1. Fall: V ist euklidisch:
$< F(e_i + e_j), F(e_i + e_j) >= ||F(e_i + e_j)||^2 = ||e_i + e_j||^2 =< e_i + e_j, e_i + e_j >= 2$
$< F(e_i + e_j >, F(e_i + e_j) >=< F(e_I), F(e_i) > + < F(e_i), F(e_j) > + < F(e_j), F(e_i) > + < F(e_j), F(e_j) >$
Insbesondere $2 < F(e_i, F(e_j) >= 0 \Rightarrow F(e_i) \perp F(e_j)$
2. Fall: V ist unitär:
$< e_i + \underbrace{i}_{=\sqrt{-1}} e_j >= ||F(e_i + ie_j)||^2 = ||e_i||^2 + ||ie_j||^2 = 2$
$||F(e_i + ie_j)||^2 =< F(e_I) + iF(e_j), F(e_i) + iF(e_j) >= ||F(e_i)||^2 + ||F(e_j)||^2 + i(< F(e_i), F(e_j) > - < F(e_i), F(e_j) >) \Rightarrow< F(e_i), F(e_j) >=< F(e_j), F(e_i) >= -\overline{< F(e_i), F(e_j) >}$ Rest der Argumentation analog zum ersten Fall.

$3 \Rightarrow 2$ $forall v, w \in V$
z.Z. $< v, w >=< F(v), F(w) >$
$v = 0 \Rightarrow$ ok!
Sonst $v \neq 0$.
1. Fall $\{v, w\}$ linear abghängig, also $w = \lambda v$
$v \neq 0 \Rightarrow \frac{v}{||v}$ orthonormal $\Rightarrow F(\frac{v}{||v||})$ auch $\Rightarrow ||F(\frac{v}{||v||}|| = 1 \ Rightarrow ||v|| = ||F(v)||$
$< v, w >=< v, \lambda v >= \bar{\lambda} < v, v >= \bar{\lambda}||v||^2 = \bar{\lambda}||F(V)||^2 = \bar{\lambda} < F(v), F(v) >=< F(v), \lambda F(v) >=< F(v), F(w) >$
2. Fall: v, w lienare unabhängig.
GramSchidt: $\exists b_1, b_2$ orthonormales System, so dass $\text{span}(v, w) = \text{span}(b_1, b_2)$
$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 + b_2, w = \mu_1 b_1 + \mu_2 + b_2$
$< v, w >= \lambda_1 \bar{\mu}_1 ||b_1||^2 + \lambda_2 \bar{\mu}_2 ||b_2||^2 =< F(\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b)2), F(\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2) >$ da $b_1 \perp b_2$.

□

Satz 7.3

Jede orthogonale Abbildung ist injektiv.

Beweis: Sei F eine orthogonale Abbildung, $F : V \to V$, $v \in \text{Ker}(F)$
$0 = F(v) \Rightarrow o = ||F(v)|| = ||v|| \Rightarrow v = 0$ $\square$

Satz 7.4

Sei V endlichdimensionaler unitärer oder euklidischer Raum und $F : V \to V$ eine bijektive lienare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. F ist orthogonal
2. Der adjungierte Endomorphismus F^t von F ist F^{-1}

Beweis:

1.) $\Rightarrow$ 2.) $\forall v, w \in V :< w, F(v) >=< F^t(w), v >$
$w = F(F^{-1}(w)), < w, F(v) >=< F^{-1}(w), v) >\Rightarrow F^t = F^{-1}$ Da F^t eindeutig ist.

2.) $\Rightarrow$ 1.) $< F(v), F(w) >=< F^{-1}(F(w)), F(v) >=< F^{-1}(F(v)), w) =< v, w >$, da $F^{-1} = F^t$.
Damit ist F orthogonal.

$\square$

Korollar 7.5

$F : V \to V$ sei eine endliche uniäre oder eukldische orthogonale Abbildung. $\Rightarrow$ F ist bijektiv und normal, mit $F^{-1} = F^*$

Beweis: F orthogonal $\Rightarrow$ F ist injektiv, da V endlichdim $\Rightarrow$ F ist bijektiv $\Rightarrow F^t = F^{-1} \Rightarrow$ F ist normal $(F^tF = F^{-1}F = FF^{-1} = FF^t)$. $\square$

Satz 7.6

Sei V endlichdimensional euklidisch oder unitär und $F : V \to V$ orthogonal.
Dann haben alle Eigenwerte von F absolutbetrag 1. Ferner ist $|\det(F)| = 1$

Beweis:
Bemerkung: Beachte, dass 0 kein Eigenwert von F ist (weil F injektiv ist).
Sei $\lambda \in K$ ein Eigenwert von F, $v \in V \setminus \{0\}$ ein Eigenvektor.
$|\lambda|||v||||\lambda v|| = ||F(v)|| = ||v|| \Rightarrow \lambda = 1$ (da $\lambda \neq 0$).
Sei A die Darstellungsmatrix von F bzgl. einer ONB von V.
$|\det(F)| = |\det(A)| = |\overline{\det(A)}| = |\det(\bar{A})| = |\det(\bar{A}^T)| = |\det(F^t)| \underset{\text{orthogonal}}{=} |\det(F^{-1})| = |\det(F)|^{-1}$
$\Rightarrow |\det(F)|^2 = 1$ $\square$
Bemerkung: Sei B eine ONB von V.
A die Darteslungsmatrix von F bzgl. B
A^* die Darstellungsmatrix von F^t bzgl. B
A^{-1} die Darstellungsmtarix von F^{-1} bzgl B
$F^{-1} = F^t \Leftrightarrow A^{-1} = A^*$

Definition 7.7 – Orthogonale Matrix

Sei $A \in M_{n\times n}(K)$. A ist orthogonal, falls $A^{-1} = A^*$

Bemerkung: F ist orthogonale $\Leftrightarrow$ Die Darstellungsmatrix von F bzgl ONB ist orthogonal.

Korollar 7.8

$A \in \text{Mat}_{n\times n}$ regulär ist orthogonal $\Leftrightarrow$ die Zeilenvektoren (bzw. Spaltenvektoren) ein orthonormalsystem in K^n bilden (und somit eine ONB).

Beweis: $Aorthogonal \Leftrightarrow A^{-1} = A^* \Leftrightarrow AA^* = Id_n = AA^{-1}$
$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \bar{a_{jk}} =< \bar{a}_i, \bar{a}_j >$ (in K^n mit dem Standardskalarprodukt). □

Korollar 7.9

Sei $F : V \to V$ eine normale Abbildung eines endlichdimensionalen unitären Raumes V derart, dass alle Eigenwerrte von F Absolutbetrag 1 haben. Dann ist F orthogonal.

Beweis: $\chi_F(T) \in \mathbb{C}[T]$ zerfällt in Linearfaktoren, F normal $\Rightarrow$ Es existiert eine ONB $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von Eigenvektoren von F $F(b_i) = \lambda_i b_i$
F hat Darstellungsmatrix:
$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$ bzgk, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$

F^t hat damit Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$ bzgl., $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$

$\lambda_i \bar{\lambda}_i = |\lambda_i|^2 = 1 \Rightarrow \bar{\lambda}_i = \lambda_I^{-1}$

F^t hat die Darstellungsmatrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\lambda_n} \end{pmatrix}$ bzgl. $B = \{b_1, \ldots, b_n\} \Rightarrow F^t = F^{-1} \Rightarrow$ F ist orthogonal.

□

Definition 7.10 – Orthognalisierbarkeit von Matrizen

Die Matrix $A\ in\, \text{Mat}_{n\times n}$ ist orthogonal diagonalisierbar, falls es eine orthogonale (reguläre) Matrix S gibt, so dass $S^{-1}AS$ in diagonalform ist.

Lemma 7.11 – Proposition

Jede normale Matrix $A \in M_{n\times n}(K)$ deren charakteristisches Polynom in Linearfaktoren zerfällt ist diagonalisierbar.

Beweis: Sei $F_A : K^n \to K^n$ die zugehörige lineare Abbildung. $\Rightarrow F_A$ ist normal. $\chi_A(T)$ zerfällt in Linearfaktoren. Es gibt eine ONB $\{b_1, \ldots, b_n\}$ von Eigenvektoren von F (d.h. von A). Sei $S = (b1| \ldots |b_n)$. Es genügt zu zeigen, dass S eine orthogonale Matrix ist. Die Spaltenvektoren von S bilden ein orthonormales System, damit ist S orthogonal. □

Korollar 7.12

Jede symmetrische $n \times n$ MAtrix über $\mathbb{R}$ bzw. jede hermitssche Matrix über $\mathbb{C}$ ist orthogonal diagonalisierbar.

Definition 7.13 – Drehung

Sei V eindlidimensionaler euklidischer Raum. $F : V \to V$ orthognale Abbildung ist eine Drehung falls $\det(F) = 1$.
Bemerkung: Die Kollektion aller Drehungen bilden eine Gruppe.

Satz 7.14

Sei $V = \mathbb{R}^2$ mit dem Standarskalarprodukt als euklidischer Raum. $F = V \to V$ ist eine Drehung, gdw. F Darsellungsmatrix bzgl $\{e_1, e_2\}$ der Form
$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}, \alpha \in [0, 2\pi)$

Satz 7.15

: Gegeben zwei K-VR U und V gibt es einen K-VR T, zusammen mit einer bilibnearen abbildung $\otimes : U \times V \to T$ derart, dass für jeden K-VR W und jede bilineraere Abbildung existiert eine eindeutig bestimmes $f : T \to \mathbb{N}$ so dass $f \circ \otimes = g$ Ferner ist $(T, \otimes)$ bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.
$U \times V \overset{\otimes}{\to} T, U \overset{g}{\times} V \to W$
Wir schreiebn T als $U \otimes V$.

Beweis: Sei $\{a_i\}_{i \in I}$ eine Basis von U
Sei $\{a_i\}_{i \in I}$ eine Basis von U

Eindeutigkeit:
Sei T' auch ein Tensorprodukt von U, V:
$\otimes' : U \times V \to T'$. Dann gilt:
$U \times V \overset{\otimes}{\to} T$
$U \times V \overset{\otimes'}{\to} T'$
$T \overset{f}{\to} T'$
$T' \overset{f'}{\to} T$
$T \overset{Id}{\to} T$
$\Rightarrow Id = f' \circ f$
Analog:
$f \circ f' = Id$
$\Rightarrow f : T \to T$ ist ein Isomorphismus. □

Korollar 7.16

Für jede Basis $\{a - I\}_{i \in I}$ von U und jede Basis $\{b_j\}_{j \in J}$ von V ist $\{a_i \otimes b_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ eine Basis.

Korollar 7.17

Jedes Element w von $U \otimes V$ lässt sich schreiben als $\sum_{k=1}^{n} a_{i_k} \otimes v_k$ für $v_k \in V$ eindeutig bestimmt.

Beweis: $w \in U \otimes V \Rightarrow \sum \lambda_j a_i \otimes b_j$
$= \sum a_i \otimes \lambda_{ij} b_j$
$= \sum_i \sum_j a_i \otimes \lambda_{ij} b_j$
$= \sum_I a_i \otimes \underset{v_i \in V}{\sum_j \lambda_{ij} b_j}$
Frage: Warum sind die v_I's eindeutig bestimmt?
$w = \sum a_i \otimes (\sum \mu_{ij} b_j) = \sum_i \sum_j \mu_{ij} a_i \otimes b_j$
$\Rightarrow \lambda_{ij} = \mu_{ij} \Rightarrow v_i = v_i'$. □

Achtung: Nicht jedes Element von $U \otimes V$ lässt sich als ein rein Tensor $u \otimes v$ schreiben!

Beweis: $U = V = \mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis $\{e_1, e_2\}$.
Behauptung: $w = e)1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$
$w \stackrel{?}{=} u \otimes v, u, v \in \mathbb{R}^2$.
$u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2, v = \mu_1 e_1 + \mu_2 e_2$
$\lambda_1\mu_1 e_1 \otimes e_1 + \lambda_1\mu_2 e_1 \otimes 2_1 + \lambda_2\mu_1 e_2 \otimes e_1 + \lambda_2\mu_2 e_2 \otimes e_2$
$\Rightarrow \lambda_1\mu_1 = 0, \lambda_2\mu_2 = 0, \lambda_1\mu_2 = 1, \lambda_2\mu_1 = 1$
$\Rightarrow \lambda_1 \neq 0 \wedge \mu_1 = 0 \wedge \lambda_2 \neq 0, \mu_2 = 0$
$\Rightarrow v = 0 \Rightarrow u \otimes v = 0 \neq e_1 \otimes e_2 + e_2 \otimes e_1$ □

Lemma 7.18

Sei V ein K-VR.
$K \otimes V \simeq V$

Beweis: Wir wollen zuerst eine Abbildung von $K \otimes V \to V$ konstruieren.
$K \times V \to V : (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ ist bilinear. $\exists! f : K \otimes V \to V : F(\lambda \otimes v) = \lambda v$
$G = V \to K \otimes V : v \mapsto 1 \otimes v$ ist linear.
G ist surjektiv. Jedes Element laesst sicheindeutig schreiben als $\lambda(1 \otimes v)$, da 1 eine Basis von K über K ist.
$\lambda(1 \otimes v) = 1 \otimes \lambda v = G(\lambda v)$
z.Z.: $F : K \otimes V \to V$ ist eine isomorphismus.
$G \circ F(\lambda \otimes V) = G(\lambda v) = 1 \otimes \lambda v = \lambda(1 \otimes v) = \lambda \otimes v$
$F \circ G(v) = F(1 \circ v) = 1v = v$
F und G sind Inverse voneinander. □

Lemma 7.19

1. $F : U \to T'$ lineare Abbildung, $G : V \to V' \Rightarrow F \otimes G : U \otimes V \to U' \otimes V; : u \otimes v \to F(u) \otimes G(v)$ ist linear
2. $Id_u \otimes Id_V = Id_{u \otimes v}$
3. $F_1 + F_2) \otimes G = F_1 \otimes G + F_2 \otimes G$
4. $(\lambda G) \otimes G = \lambda(F \otimes G)$
5. $F_2 \circ F_2) \otimes (G_2 \circ G) = (F_2 \otimes G_2) \circ (F_1 \otimes G_1) U \stackrel{f_1}{\to} U_1 \stackrel{F_2}{\to} U_2 \; V \stackrel{G_1}{\to} V_1 \stackrel{G_2}{\to} V_2$

Beweis:

1. Sei $U \times V \to U' \otimes V' : (u, v) \mapsto F(u) \otimes G(v)$ ist bilinear. $\otimes(u, v) \mapsto U \otimes V \stackrel{F \otimes G}{\to} F(u) \otimes G(v)$
2. trivial
3. einfach
4. einfach
5. $(F_2 \circ F_1) \otimes (G_2 \circ G_1)(u \otimes v) = F_2 \circ F_1(u) \otimes g_2 \circ G_1(v) = F_2(f_1(u)) \otimes G_2(g_1(v)) = f_2 \otimes G_2(f_1(u) \otimes G_1(v)) = F_2 \otimes G_2((F_1 \otimes G_1)(u \otimes v))$

□