Chapitre VI

Géométrie affine

1 Définitions

1.1 Espaces affines

Définition

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide associé à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V par une application $\varphi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to V$ qui vérifie les axiomes :

1) Pour tous éléments A, B, C de $\mathcal{E}$, $\varphi(A,B) + \varphi(B,C) = \varphi(A,C)$.
2) Pour tout élément $A \in \mathcal{E}$ et tout vecteur $v \in V$, il existe un unique élément $B \in \mathcal{E}$ tel que $\varphi(A,B) = v$.

$\mathcal{E}$ est alors appelé **espace affine** sur $\mathbb{R}$ associé à l'espace vectoriel V.
- Les éléments de $\mathcal{E}$ sont appelés **points**.
- Soient A et B deux points, $\varphi(A,B)$ est noté $\overrightarrow{AB}$.
- On appelle **dimension** de $\mathcal{E}$ la dimension de l'espace vectoriel associé V.
- V est appelé **direction** de $\mathcal{E}$.

Définitions

On appelle **droite** un espace affine de dimension 1, **plan** un espace affine de dimension 2.

Propriété

Pour tous points A, B et C :
1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).
2) $\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow A = B$.
3) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

Démonstration

1) Il s'agit d'une réécriture de l'axiome 1.
2) La relation de Chasles implique $\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{AA}$ donc $\overrightarrow{AA}=0$. D'après l'axiome 2, A est donc l'unique point B qui vérifie $\overrightarrow{AB}=0$ (CQFD).
3) La relation de Chasles et la propriété précédente implique $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=0$.

Propriété

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, E est un $\mathbb{R}$-espace affine associé à l'espace vectoriel E si on définit pour tout couple $(a,b)\in E\times E$, $\overrightarrow{ab}=\varphi(a,b)=b-a$.

Démonstration : on vérifie facilement les deux axiomes des espaces affines.

Exemple : $\mathbb{R}^n$ **est un $\mathbb{R}$-espace affine associé à l'espace vectoriel** $\mathbb{R}^n$.
Soit $A=(x_1,\ldots,x_n)$ et $B=(y_1,\ldots,y_n)$ des points de $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{AB}=(y_1-x_1,\ldots,y_n-x_n)$.

1.2 Sous espaces affines

Dans cette section, $\mathcal{E}$ un $\mathbb{R}$-espace affine associé à un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V par l'application $\varphi:\mathcal{E}\times\mathcal{E}\to V$.

Définition

Un ensemble $\mathcal{F}$ de points de $\mathcal{E}$ est un **sous-espace affine** de $\mathcal{E}$ si, il existe un sous espace vectoriel W de V tel que $\mathcal{F}$ associé à W par l'application restreinte $\varphi^{/W}_{/\mathcal{F}\times\mathcal{F}}$ est un $\mathbb{R}$-espace affine.
Si A est un point de $\mathcal{F}$, alors $\mathcal{F}=\{M\in\mathcal{E}/\overrightarrow{AM}\in W\}$, on dit que $\mathcal{F}$ est le sous espace affine passant par A et de direction W.

Démonstration : supposons que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et $A\in\mathcal{F}$, montrons que $\mathcal{F}=\{M\in\mathcal{E}/\overrightarrow{AM}\in W\}$
Soit $B\in\mathcal{F}$, d'après la définition d'un sous-espace affine, $\overrightarrow{AB}=\varphi(A,B)\in W$ donc $B\in\{M\in\mathcal{E}/\overrightarrow{AM}\in W\}$.
Soit $B\in\{M\in\mathcal{E}/\overrightarrow{AM}\in W\}$, d'après le deuxième axiome dans $\mathcal{F}$ appliqué à $A\in\mathcal{F}$ et $\overrightarrow{AB}\in W$, il existe $M\in\mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\varphi(A,M)=\overrightarrow{AB}$. Dans $\mathcal{E}$, on a
$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=0$ donc $B=M$ et $B\in F$.

Théorème

Un ensemble de points $\mathcal{F}$ est un **sous-espaces affine de $\mathcal{E}$** si et seulement si :
- il contient au moins un point A.
- l'ensemble $\{\overrightarrow{AM}/M\in\mathcal{F}\}$ est un sous espace vectoriel de V.

$\{\overrightarrow{AM}/M\in\mathcal{F}\}$ est alors la direction de $\mathcal{F}$.

Démonstration : pour vérifier les axiomes, il suffit de montrer que φ peut être restreinte au départ à $\mathcal{F}^2$ et à l'arrivée à $W=\{\overrightarrow{AM}/M\in\mathcal{F}\}$. Or pour tous points B et C de $\mathcal{F}$, $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\in W$ car $\overrightarrow{AB}\in W$, $\overrightarrow{AC}\in W$ et W est un sous espace vectoriel.

Exemple : l'ensemble des solutions d'un système linéaire à p inconnues est un sous espaces affines de $\mathbb{R}^p$.

Théorème : intersection de sous espaces affines

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des sous-espaces affines de directions W et W', si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ n'est pas vide (c.a.d. $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sécants) , alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ est un sous espace affine de direction $W \cap W'$.

Remarque : si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \emptyset$, l'intersection n'est pas un sous-espace affine.

Démonstration : Si $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$ contient au moins un point A, on a $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \in W\}$ et $\mathcal{F}' = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \in W'\}$. Il suit $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \in W \cap W'\}$. Il s'agit du sous espace affine de direction $W \cap W'$ passant par A.

1.3 Sous-espaces affines parallèles

Définition

On dit que des sous espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{E}$ sont parallèles s'ils ont la même direction. On note $\mathcal{F} \parallel \mathcal{F}'$.

Théorème : intersection de sous espaces parallèles

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des sous-espaces affines parallèles, ou bien $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$, ou bien $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \emptyset$.

Démonstration Supposons que $\mathcal{F} \parallel \mathcal{F}'$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' \neq \emptyset$. Il existe donc un point $A \in \mathcal{F} \cap \mathcal{F}'$. On note W la direction commune de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$. $\mathcal{F} = \{M \in \mathcal{E} / \overrightarrow{AM} \in W\} = \mathcal{F}'$ (CQFD).

1.4 Repère cartésien

Définition

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n et de direction V, O un point de $\mathcal{E}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de V, $(O, e_1, \dots, e_n)$ est appelé repère cartésien de $\mathcal{E}$.

Remarque : pour une droite, on dit que e_1 est un vecteur directeur.

Définition : coordonnées cartésiennes

Soit $(O, e_1, \dots, e_n)$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$, pour tout point M, il existe un unique n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.
$(x_1, \dots, x_n)$ sont appelées coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $(O, e_1, \dots, e_n)$.

Démonstration : $\overrightarrow{OM} \in V$ qui admet pour base $(e_1, \dots, e_n)$, d'où le résultat.

2 Plan affine $\mathbb{R}^2$

2.1 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$

Propriété

Les sous espaces de $\mathbb{R}^2$ sont :
- les espaces de dimension 0, c'est à dire les singletons A avec $A \in \mathbb{R}^2$.
- les espaces de dimension 1, c'est à dire les droites de $\mathbb{R}^2$.
- le plan $\mathbb{R}^2$ lui-même de dimension 2.

2.2 Équation paramétrique d'une droite de $\mathbb{R}^2$

Propriété

Toute droite de $\mathbb{R}^2$ admet une équation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = x_a + \lambda x_u \\ y = y_a + \lambda y_u \end{cases}$ de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et où $(x_u, y_u) \neq (0,0)$.
Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^2$ ayant une telle équation paramétrique est une droite de vecteur directeur $u = (x_u, y_u)$ passant par $A = (x_a, y_a)$.

Démonstration : Ce résultat se déduit de l'équivalence :
$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_a + \lambda x_u \\ y = y_a + \lambda y_u \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \langle u \rangle$ où $M = (x, y)$, $A = (x_a, y_a)$ et $u = (x_u, y_u)$.

2.3 Équation d'une droite de $\mathbb{R}^2$

Propriété

Toute droite de $\mathbb{R}^2$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0,0)$.
Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^2$ admettant une telle équation est une droite de vecteur directeur $u = (-b, a)$ passant par $A = (\frac{-c}{a}, 0)$ si a est non nul, $A = (0, \frac{-c}{b})$ sinon.

Démonstration : Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathbb{R}^2$. Soit $A = (x_a, y_a)$ un point de $\mathcal{D}$ et $u = (x_u, y_u)$ un vecteur directeur.
$M = (x, y) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à u, c'est-à-dire $(x - x_a, y - y_a)$ est proportionnel (x_u, y_u), qui équivaut, d'après les produits en croix à : $y_u(x-x_a) = x_u(y-y_a)$ ce qui s'écrit $y_u x - x_u y - y_u x_a + x_u y_a = 0$. Comme $(x_u, y_u) \neq (0,0)$, on a bien une équation de la forme attendue.

Inversement, soit $(a, b) \neq (0,0)$ et $\mathcal{F}$ la partie d'équation $ax + by + c = 0$ (1). Supposons $a \neq 0$, (x, y) est solution de (1) si et seulement si il existe λ tel que $\begin{cases} x = \frac{-c-b\lambda}{a} \\ y = \lambda \end{cases}$. Il s'agit de l'équation paramétrique de la droite passant par $A = (\frac{-c}{a}, 0)$ et de vecteur directeur $(\frac{-b}{a}, 1)$ colinéaire à $u = (-b, a) \neq 0$.

Si $a = 0$, nécessairement $b \neq 0$, par le même raisonnement on en déduit que $(x, y) \in \mathcal{F}$ si et seulement si il existe $\lambda \in$ tel que $(x, y) = (0, \frac{-c}{b}) + \lambda(1, \frac{-a}{b})$. $\mathcal{F}$ est donc la droite affine passant par $A = (0, \frac{-c}{b})$ et de vecteur directeur $u = (-b, a)$.

Théorème : équations de droites parallèles

Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites affines de $\mathbb{R}^2$ d'équations $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$.
$\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}' \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$.

Démonstration : $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ont pour vecteur directeur respectivement $u = (-b, a)$ et $u' = (-b', a')$. $\mathcal{D} \parallel \mathcal{D}'$ si et seulement si u et u' sont colinéaires, c.a.d. $(-b, a)$ et $(-b', a')$ sont proportionnels, c.a.d. $-ba' = -ab'$ (produit en croix), qui s'écrit aussi $ab' - a'b = 0$.

3 Espace affine $\mathbb{R}^3$

3.1 Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^3$

Propriété

Les sous espaces de $\mathbb{R}^3$ sont :
- les espaces de dimension 0, c'est à dire les singletons A avec $A \in \mathbb{R}^3$.
- les espaces de dimension 1, c'est à dire les droites de $\mathbb{R}^3$.
- les espaces de dimension 2, c'est à dire les plans de $\mathbb{R}^3$.
- l'espace $\mathbb{R}^3$ lui-même de dimension 3.

3.2 Plans de $\mathbb{R}^3$

Théorème

Deux plans de $\mathbb{R}^3$ non parallèles ont pour intersection une droite.

Démonstration

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ des plans non parallèles. Leurs directions P et P' sont donc des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, de dimension 2, tels que $P \neq P'$.

Il nous faut vérifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants et que $P \cap P'$ est une droite vectorielle. On sait que (1) : $\dim(P + P') = \dim P + \dim P' - \dim(P \cap P')$.

Puisque $P + P'$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, $\dim(P + P') \leqslant 3$ donc (1) implique $\dim(P \cap P') = 2 + 2 - \dim(P + P') \geqslant 4 - 3 = 1$. De plus, $P \cap P'$ n'est pas de dimension 2 (sinon on aurait $P \cap P' = P$ donc $P = P'$) donc $\dim(P \cap P') = 1$. $P \cap P'$ est donc une droite vectorielle.

De (1) et $\dim(P \cap P') = 1$, il suit que $\dim(P + P') = 2 + 2 - 1 = 3$ et donc $P + P' = \mathbb{R}^3$. On peut déduire de $P + P' = \mathbb{R}^3$ que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. En effet, soit $A \in \mathcal{P}$ et $A' \in \mathcal{P}'$, il existe $u \in P$ et $u' \in P'$ tel que $\overrightarrow{AA'} = u + u'$. Soit M le point défini par $\overrightarrow{AM} = u$, $M \in \mathcal{P}$ car $u \in P$. De plus $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AM} = -u - u' + u = -u' \in P'$ donc $M \in \mathcal{P}'$. On en déduit que $M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, c.a.d. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants. (CQFD)

Propriété : équation paramétrique d'un plan de $\mathbb{R}^3$

Tout plan de $\mathbb{R}^3$ admet une équation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = x_a + \lambda x_u + \mu x_v \\ y = y_a + \lambda y_u + \mu y_v \\ z = z_a + \lambda z_u + \mu z_v \end{cases}$
de paramètres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et où $u = (x_u, y_u, z_u)$ et $v = (x_v, y_v, z_v)$ sont non colinéaires.
Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^3$ ayant une telle équation paramétrique est un plan passant par $A = (x_a, y_a, z_a)$ de direction $\langle u, v\rangle$.

Démonstration : même méthode que pour les droites.

Propriété : équation d'un plan de $\mathbb{R}^3$

Tout plan de $\mathbb{R}^3$ admet une équation de la forme $ax+by+cz+d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.
Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^3$ admettant une telle équation est un plan dont la direction a pour équation $ax + by + cz = 0$.

Démonstration : Soit $\mathcal{P}$ un plan affine de $\mathbb{R}^3$, $A = (x_a, y_a, z_a) \in \mathcal{P}$ et $\langle u, v\rangle$ sa direction avec $u = (x_u, y_u, z_u)$ et $v = (x_v, y_v, z_v)$.
$M = (x, y, z) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \langle u, v\rangle \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}, u, v)$ est liée.

En utilisant les déterminants, ceci équivaut à

$$\begin{vmatrix} x - x_a & x_u & x_v \\ y - y_a & y_u & y_v \\ z - z_a & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$$

c.a.d. $(x - x_a)(y_u z_v - y_v z_u) - (y - y_a)(x_u z_v - x_v z_u) + (z - z_a)(x_u y_v - x_v y_u) = 0.$ (I)
En posant $a = (y_u z_v - y_v z_u)$, $b = -x_u z_v + x_v z_u$, $c = x_u y_v - x_v y_u$, et
$d = -x_a(y_u z_v - y_v z_u) + y_a(x_u z_v - x_v z_u) - z_a(x_u y_v - x_v y_u)$
(I) s'écrit $ax + by + cz + d = 0$.
De plus, si on avait $(a, b, c) = (0, 0, 0)$, u et v seraient colinéaires (produits en croix) ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\mathcal{P}$ est un plan.

Conclusion : $\mathcal{P}$ admet une équation de la forme $ax+by+cz+d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Inversement, soit $\mathcal{F}$ une partie qui admet une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec a, b et c non tous nuls.
Supposons par exemple que $a \neq 0$, alors le point $A = (\frac{-d}{a}, 0, 0) \in \mathcal{F}$.
Soit $M = (x, y, z)$ un point de $\mathbb{R}^3$,
$M \in \mathcal{F} \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \Leftrightarrow a(x - \frac{d}{a}) + by + cz = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in P$ où P est le sous

espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $ax + by + cz = 0$.
$\mathcal{F}$ est donc le sous espace affine passant par A et de direction P.

L'expression paramétrique des solutions de l'équation $ax + by + cz = 0$ est
$(x, y, z) = \lambda(-\frac{b}{a}, 1, 0) + \mu(-\frac{c}{a}, 0, 1)$ avec les paramètres $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

En posant $u = (-\frac{b}{a}, 1, 0)$ et $v = (-\frac{c}{a}, 0, 1)$, on en déduit que (u, v) est une famille génératrice de P, or u et v ne sont pas colinéaires (composantes non proportionnelles) donc (u, v) est une base de P. P est bien un plan vectoriel.

Conclusion : L'ensemble d'équation $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est un plan affine dont la direction a pour équation $ax + by + cz = 0$.

Théorème : équations de plans parallèles

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ des plans affines de $\mathbb{R}^3$ d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$.
$\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}' \Leftrightarrow (a, b, c)$ et (a', b', c') sont proportionnels.

Démonstration :
Les directions de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont pour équations $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$.
Donc $\mathcal{P} \parallel \mathcal{P}'$ si et seulement si $ax + by + cz = 0$ et $a'x + b'y + c'z = 0$ déterminent le même sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire si les coefficients de ces deux équations sont proportionnels. (CQFD)

3.3 Droites de $\mathbb{R}^3$

Propriété : équation paramétrique d'une droite de $\mathbb{R}^3$

Toute droite de $\mathbb{R}^3$ admet une équation paramétrique de la forme $\begin{cases} x = x_a + \lambda x_u \\ y = y_a + \lambda y_u \\ z = z_a + \lambda z_u \end{cases}$ de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ et où $(x_u, y_u, z_u) \neq (0, 0, 0)$.
Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^3$ ayant une telle équation paramétrique est une droite de vecteur directeur $u = (x_u, y_u, z_u)$ passant par $A = (x_a, y_a, z_a)$.

Démonstration : identique à celle dans $\mathbb{R}^2$.

Propriété : équation d'une droite de $\mathbb{R}^3$

Toute droite de $\mathbb{R}^3$ admet une équation de la forme $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ avec (a, b, c) et (a', b', c') non proportionnels.
Inversement, toute partie de $\mathbb{R}^3$ admettant une telle équation est une droite.

Démonstration : Soit $\mathcal{D}$ une droite affine de $\mathbb{R}^3$. Soit $A = (x_a, y_a, z_a)$ un point de $\mathcal{D}$ et $u = (x_u, y_u, z_u)$ un vecteur directeur. $(x_u, y_u, z_u) \neq (0, 0, 0)$, supposons par exemple que

$x_u \neq 0$.
$M = (x, y, z) \in \mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à u,
c'est-à-dire $(x - x_a, y - y_a, z - z_a)$ est proportionnel (x_u, y_u, z_u),
qui équivaut, d'après les produits en croix à : $\begin{cases} y_u(x - x_a) = x_u(y - y_a) \\ z_u(x - x_a) = x_u(z - z_a) \end{cases}$
c.a.d. $\begin{cases} y_u x - x_u y + x_u y_a - y_u x_a = 0 \\ z_u x - x_u z + x_u z_a - z_u x_a = 0 \end{cases}$.

Comme $x_u \neq 0$, $(y_u, -x_u, 0)$ $(z_u, 0, -x_u)$ ne sont pas proportionnels, on a bien une équation de la forme attendue.

Inversement, si une partie $\mathcal{F}$ admet une telle équation, $\mathcal{F} = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$ où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont les plans d'équations $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$. Comme (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles donc leur intersection $\mathcal{F}$ est une droite.