Chapitre IV

Systèmes d'équations linéaires

Dans toute la partie sur les système d'équations linéaires, K désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (plus généralement K est un corps).

1 Définitions

1.1 Système d'équations linéaires

Définition

Un système d'équations linéaires à n équations et p inconnues $(x_1, \dots, x_p)$ peut s'écrire

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

1.2 Système homogène associé

Définition

On appelle **système homogène associé** au système (S) défini précédemment le système :

$$(SH)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & 0 \end{array}\right.$$

1.3 Systèmes équivalents

Définition

Deux systèmes sont **équivalents** si et seulement si ils ont le même ensemble de solutions.

1.4 Système compatible

Définition

Un système est dit **compatible** si et seulement si il admet au moins une solution.

Propriété

Tout système homogène est **compatible**.

Démonstration : un système homogène a toujours pour solution évidente la solution nulle $(0, \dots, 0)$.

1.5 Propriétés

Propriété 1

Soit $X = (x_1, \dots, x_p)$ une solution du système (S) et Y une solution du système homogène associé, alors $X + Y$ est une solution de (S).

Démonstration immédiate.

Propriété 2

L'ensemble des solutions d'un système homogène (SH) à p inconnues est un sous espace vectoriel de K^p, c'est-à-dire que c'est un sous ensemble de K^p contenant le vecteur nul $(0, \dots, 0)$ et stable par combinaison linéaire.

Démonstration

$(0, \dots, 0)$ est une solution évidente de (SH) car il est homogène.

on note $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (SH).

$\mathcal{S}_h$ est stable par combinaison linéaire signifie : Soient α et β dans K, $X = (x_1, \dots, x_p)$ et $Y = (y_1, \dots, y_p)$ dans $\mathcal{S}_h$ alors $\alpha X + \beta Y = (\alpha x_1 + \beta y_1, \dots, \alpha x_p + \beta y_p) \in \mathcal{S}_h$.

En effet, pour tout $i \in [1, n]$, $\alpha X + \beta Y$ vérifie la i-ième équation de (SH) car :
$a_{i,1}(\alpha x_1 + \beta y_1) + \ldots + a_{i,p}(\alpha x_p + \beta y_p) = \alpha(a_{i,1}x_1 + \ldots + a_{i,p}x_p) + \beta(a_{i,1}y_1 + \ldots + a_{i,p}y_p) = \alpha.0 + \beta.0 = 0.$

Propriété 3

Si X_0 une solution particulière de (S) et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions du système homogène associé à (S), alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (S) est
$\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_h = \{X_0 + Y / Y \in \mathcal{S}_h\}$.

Démonstration
On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (S).

D'après la propriété 1, on a $X_0 + \mathcal{S}_h \subset \mathcal{S}$.

On montre que l'on a aussi $X_0 + \mathcal{S}_h \supset \mathcal{S}$.
En effet, soit Y une solution de S alors $Y - X_0$ est solution de (SH) donc $Y \in X_0 + \mathcal{S}_h$.

Interprétation géométrique

Soit X_0 une solution particulière de (S), l'ensemble des solutions de (S) est le sous espace affine de K^p passant par X_0 et de direction $\mathcal{S}_h$, ensemble des solutions du système homogène associé.

Démonstration : simple interprétation de la propriété précédente.

Ecriture matricielle

On appelle **matrice** un tableau de nombres (que l'on note entre deux grandes parenthèses). Les nombres figurant dans une matrice sous appelé **coefficients** de la matrice.

Pour alléger l'écriture, on peut écrire le système

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \end{array}\right. \quad \text{sous la forme matricielle :}$$

$$(S)\left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right)$$

A gauche du trait vertical, on ne fait figurer que les coefficients des inconnues, à droite du trait les seconds membres. Cette écriture est très pratique mais n'a de sens que si on respecte scrupuleusement l'ordre des inconnues et des colonnes.

2 Méthode du Pivot de Gauss

2.1 Système échelonné

Définitions : pivot, système échelonné

- On appelle **pivot d'une ligne** le premier coefficient non nul de cette ligne.
- Un système est dit **échelonné** si et seulement si le pivot de chaque ligne est à droite (au sens strict) de celui de la ligne précédente.

Exemples

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Définition : inconnues principales et secondaires

Dans un système échelonné, on appelle **inconnues principales** celles dont le coefficient sur une des lignes est un pivot, les autres inconnues sont appelées **secondaires**.

Exemple

$$\begin{cases} -x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ 2z = 5 \end{cases}$$

Dans ce système échelonné, x et z sont les inconnues principales, y et t les inconnues secondaires.

2.2 Solutions d'un système échelonné

Propriété : existence (compatibilité)

Un système échelonné admet des solutions (est compatible) si et seulement si il n'y a pas de pivot sur la colonne des seconds membres.

Explication : si il y a un pivot sur la colonne des seconds membres, l'équation correspondante est $0 = 1$.

Exemple

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ z = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Propriété : unicité

Un système échelonné compatible admet une solution unique si et seulement si il n' a pas d'inconnue secondaire.

Explication : on a un système triangulaire dont tous les coefficients diagonaux sont non nuls.

Exemple

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Propriété : solutions multiples

Un système échelonné compatible admet des solutions multiples si et seulement si il possède au moins une inconnue secondaire.
La dimension du sous-espace affine des solutions est égale au nombre d'inconnues secondaires.

Expression paramétrique des solutions multiples

Pour exprimer l'ensemble des solutions de manière paramétrique :
1) On remplace toutes les inconnues secondaires par des paramètres dont les valeurs sont quelconques.
2) On calcule les inconnues principales en fonction de ces paramètres.

Exemple

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 2t = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

Propriété

Si le nombre d'équations est strictement inférieur au nombre d'inconnus, le système homogène associé a au moins une solution non nulle (c.a.d. il admet des solutions multiples).

Démonstration : on note n le nombre d'équations et p le nombre d'inconnues.

Si le système est échelonné, le système homogène associé a au moins la solution nulle.

De plus, on a au plus n pivots (1 par ligne non nulle) et p inconnues, si $n < p$, il y a plus d'inconnues que de pivots, donc il y a des inconnues secondaires, c.a.d. que le système admet des solutions multiples.

Si le système n'est pas échelonné, par la méthode du pivot de Gauss, on peut obtenir un système échelonné équivalent à n équations et p inconnues et le raisonnement précédent peut alors s'appliquer.

2.3 Opérations élémentaires

Définition

On appelle **opération élémentaire** une des trois opérations suivantes :
1) Permuter deux lignes.
2) Multiplier une ligne par un scalaire **non nul**.
3) Ajouter à une ligne L_i une **autre** ligne L_j $(j \neq i)$ multipliée un scalaire λ quelconque $(L_i \to L_i + \lambda L_j)$.

Théorème

Les opérations élémentaires transforment un système en un système équivalent.

Démonstration
1) Le système est évidemment équivalent si on permute deux lignes.
2) Appelons (S) le système initial et (S') le système obtenu en multipliant la ligne L_i par le scalaire $\lambda \neq 0$.
   Si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est solution de (S), alors X vérifie la ligne $L'_i = \lambda L_i$ de (S'), les autres lignes étant identiques dans S et S', X est solution de (S').
   Si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est solution de (S'), alors X vérifie la ligne $L_i = \frac{1}{\lambda} L'_i$ de (S) car $\lambda \neq 0$, les autres lignes étant identiques dans S' et S, X est solution de (S).
   Si λ est on nul, on a bien deux systèmes équivalents.
3) Appelons (S) le système initial et (S') le système dont seule la i-ème ligne est différente avec $L'_i = L_i + \lambda L_j$ ($j \neq i$ et λ scalaire quelconque).
   Si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est solution de (S), alors X vérifie la ligne $L'_i = L_i + \lambda L_j$ de (S'), les autres lignes étant identiques dans S et S', X est solution de (S').
   Si $X = (x_1, \ldots, x_p)$ est solution de (S'), alors X vérifie aussi $L'_i - \lambda L'_j = L'_i - \lambda L_j$ car $j \neq i$ et donc la ligne L_j est inchangée dans S'. Or $L'_i - \lambda L_j = L_i$, les autres lignes étant identiques dans S' et S, X est solution de (S).
   Si $j \neq i$, on a bien deux systèmes équivalents.

2.4 Regroupement d'opérations élémentaires

Théorème

On obtient un système équivalent en effectuant une des trois opérations suivantes :
1) Echanger l'ordre des lignes.
2) Multiplier les lignes par des scalaires **non nuls**.
3) Après avoir choisi une ligne L_i, remplacer une ou plusieurs **autres** lignes L_j $(j \neq i)$ par $L_j + \lambda_j L_i$ où les λ_j sont des scalaires quelconques. Attention, **il est essentiel de ne pas modifier la ligne L_i**.

Démonstration

Pour les opérations 1. et 2., on peut décomposer de manière évidente ces opérations en une succession d'opérations élémentaires, donc le système obtenu est équivalent.

Pour l'opérations 3., on peut aussi décomposer cette opération en une succession d'opérations élémentaires de type 3 parce que la ligne L_i est inchangée. Le système obtenu est donc équivalent.

Contre exemple

Le système $\begin{cases} x+y+z=3 \\ y+z=2 \\ z=1 \end{cases}$ admet une solution unique $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Si on effectue en une seule étape les opérations $L_1 \to L_1 - L_2$ et $L_2 \to L_2 - L_3$ et $L_3 \to L_3 - L_1$, on obtient le système :

$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ x+y=2 \end{cases}$ où z est une inconnue secondaire et dont l'ensemble des solutions est la droite passant par $(1,1,0)$ et de vecteur directeur $(0,0,1)$.

Ces deux systèmes ne sont pas équivalents !

2.5 Méthode du Pivot de Gauss

Description

Elle consiste transformer un système (S) donné en un système échelonné (S') équivalent à l'aide des opérations élémentaires.
On échelonne colonne par colonne de la gauche vers la droite.
Pour chaque colonne, on annule les coefficients sous le premier pivot (en descendant la colonne) par des opérations de type 3.
Les opérations de type 1 servent à réorganiser éventuellement le système pour gagner des étapes.
Les opérations de type 2 servent à ramener les pivots à 1 (simplification des calculs).
On peut en plus annuler les coefficients au dessus du pivot, ce qui évite de faire des substitutions pour résoudre le système échelonné (S').

Exemple 1

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+5y=3 \\ 2x+y-z=1 \end{cases}$$

Le système peut s'écrire en notation matricielle :

$$\left(\begin{array}{ccr|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

En utilisant la méthode de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - 2L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ -L_3 \\ L_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 - 4L_2 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \frac{L_3}{5} \end{array}$$

Ce système échelonné est compatible et n'a pas d'inconnues secondaires, il admet donc une solution unique. On poursuit la résolution soit en continuant la méthode du pivot soit par substitution.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 + L_3 \\ L_3 \end{array}$$

Le système admet pour solution unique $(x, y, z) = (1, \frac{2}{5}, \frac{7}{5})$.

Exemple 2

$$\begin{cases} x + y + 3z + 2t = -2 \\ 2x + 3y + 4z + t = -1 \\ 3x + 7y + z - 6t = 6 \end{cases}$$

Le système peut s'écrire en notation matricielle :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & -1 \\ 3 & 7 & 1 & -6 & 6 \end{array}\right)$$

En utilisant la méthode de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & -8 & -12 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ \frac{L_3}{4} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array}$$

Ce système échelonné est compatible et a 2 inconnues secondaires z et t, donc il admet des solutions multiples, son ensemble de solutions est un espace affine de dimension 2. Pour exprimer les solutions sous forme paramétrique, on pose $\lambda = z$ et $\mu = t$, les solutions vérifient

$$\begin{cases} x = -5 - 5\lambda - 5\mu \\ y = 3 + 2\lambda + 3\mu \\ z = \lambda \\ t = \mu \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est

$$\{(-5-5\lambda-5\mu, 3+2\lambda+3\mu, \lambda, \mu) \text{ où } (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}\}$$

Exemple 3

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ x+5y-2z=3 \\ 2x-2y-z=1 \end{cases} \quad \text{c.a.d. en notation matricielle :} \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

En utilisant la méthode de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2-L_1 \\ L_3-2L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2/4 \\ L_3+L_2 \end{array}$$

Le système a un pivot sur la colonne des seconds membres donc il est incompatible.