Chapitre V

Espaces vectoriels

On traitera dans ce chapitre des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, mais on peut facilement le généraliser aux espaces vectoriels sur $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$ en remplaçant l'ensemble des scalaires par l'un de ces deux ensembles.

1 Généralités

1.1 Espaces vectoriels

Définition

Un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}$-espace vectoriel) est un ensemble E **non vide** muni de deux lois $(+, .)$ telles que :

- **la loi** $+$ est une application de $E \times E \to E$ (c'est donc une loi interne) vérifiant les propriétés habituelles d'une **addition** : commutativité, associativité, existence d'un élément nul et existence d'un opposé pour tout élément. Les éléments de E sont appelé **vecteurs**.
- **la loi . appelée multiplication par un scalaire** (les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés scalaires) est une application $\mathbb{R} \times E \to E$ (c'est donc une loi externe) qui vérifie des règles de **compatibilité avec les opérations sur les scalaires et avec l'addition de** E :
  - pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs x et y de E : $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
  - pour tous scalaires λ, μ de $\mathbb{R}$ et tout vecteur $x \in E$:
    $(\lambda + \mu).x = \lambda.x + \mu.x$ et $(\lambda\mu).x = \lambda.(\mu.x)$
  - pour tout vecteur $x \in E$, $1.x = x$

Remarques :
- On omet très souvent le point notant la multiplication par un scalaire.
- On note parfois 0_E **l'élément nul de** E pour le distinguer de l'élément nul de $\mathbb{R}$.

Propriétés

- $\forall x \in E$, $0.x = 0_E$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.0_E = 0_E$
- $\forall x \in E$, $(-1).x = -x$ (l'opposé du vecteur x pour l'addition).
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall x \in E, \lambda.x = 0_E \;\Rightarrow\; \lambda = 0$ ou $x = 0_E$

Démonstration

- Soit $x \in E$, d'après les axiomes et les propriétés des réels : $x + 0_E = x = 1.x = (1+0).x = 1.x + 0.x = x + 0.x$. En ajoutant l'opposé de x, on en déduit : $0.x = 0_E$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, d'après les axiomes et les propriétés des réels : $\lambda.0_E + \lambda.0_E = \lambda.(0_E + 0_E) = \lambda.0_E = \lambda.0_E + 0_E$. En ajoutant l'opposé de $\lambda.0_E$, on en déduit : $\lambda.0_E = 0_E$.
- Soit $x \in E$, $x + (-1).x = 1.x + (-1).x = (1 + (-1)).x = 0.x = 0_E$. Donc par définition de l'opposé pour l'addition, $(-1).x = -x$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ tels que $\lambda.x = 0_E$. Si $\lambda \neq 0$, alors, d'après les axiomes, $\frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) = (\frac{1}{\lambda}\lambda).x = 1.x = x$. D'après ce qui précède, on a aussi $\frac{1}{\lambda}.(\lambda.x) = \frac{1}{\lambda}.0_E = 0_E$. Donc $x = 0_E$. (CQFD)

Exemples

- $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- $\mathbb{C}$ muni de l'addition et de la multiplication par un réel usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes $\mathbb{R}[X]$ muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire usuelles est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- On considère l'ensemble des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
  On peut définir dans cette ensemble l'addition de deux fonctions par $(f+g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto f(x) + g(x)$.
  On peut définir la multiplication d'une fonction par un réel par : $(\lambda.f) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x \mapsto \lambda f(x)$.
  Muni de ces deux lois, l'espace des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- On considère l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.
  En définissant les lois + et . comme pour les fonctions, l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Dans la suite de ce cours, $(E, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

1.2 Sous-espace vectoriel

Définition : combinaison linéaire

Soient $u_1, \ldots, u_n$ des vecteurs de E, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires, le vecteur $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_n u_n$ est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ (avec les coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$).

Définition : sous-espace vectoriel

Un sous-ensemble F de E est un **sous-espace vectoriel de** E si muni des deux lois de E, il est lui-même un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème

Soit $F \subset E$, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
- F **n'est pas vide**.
- F **est stable pour l'addition** : pour tous vecteurs x et y de F, $x + y \in F$.
- F **est stable pour la loi externe** : pour tout scalaire λ et tout vecteur $x \in F$, $\lambda x \in F$.

Démonstration :

LHS $\Rightarrow$ RHS : Si F est un sous-espace vectoriel de E, par définition, il n'est pas vide et les lois de E peuvent être restreinte à F, c'est-à-dire que F est stable pour l'addition et la loi externe.

LHS $\Leftarrow$ RHS : Si F est stable pour l'addition et la loi externe. On peut restreindre les lois de E à F.

La commutativité et associativité de l'addition ainsi que les règles de la multiplication par un scalaire restent vérifiées.

Pour tout $x \in F$, $-x = (-1).x \in F$ par stabilité de F pour la multiplication par un réel. Donc l'opposé de tout vecteur de F est dans F.

De plus $F \neq \emptyset$, il existe un vecteur $u \in F$. Donc son opposé $-u \in F$ et $u + (-u) = 0_E \in F$ par stabilité de F pour l'addition. On a montré que F contient l'élément nul de l'addition.

Finalement, F munie des mêmes lois que E vérifie les axiomes d'un espace vectoriel, c'est donc bien un sous-espace vectoriel de E.

Théorème

Soit $F \subset E$, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
- $0_E \in F$.
- F **est stable par combinaison linéaire** :
  pour tous scalaires λ et μ, pour tous vecteurs x et y de F, $\lambda x + \mu y \in F$.

Démonstration

La première condition équivaut à F non vide. La deuxième équivaut à la stabilité de F pour l'addition et la multiplication par un scalaire.

Propriété

- E est le plus grand sous-espace vectoriel de E (au sens de l'inclusion).
- $\{0_E\}$ est le plus petit sous-espaces vectoriel de E (au sens de l'inclusion).

Démonstration : E est un espace vectoriel et c'est le plus grand sous-ensemble de E donc c'est le plus grand sous-espace vectoriel de E.

$\{0\}$ est un sous-espace vectoriel de E. En effet, il est non vide et stable pour l'addition et la multiplication par un scalaire : pour tout $u, v \in \{0_E\}$, tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $u + v = 0_E \in \{0_E\}$ et $\lambda.u = 0_E \in \{0_E\}$.

De plus, $\{0_E\}$ est le plus petit sous-espaces vectoriel de E puisque tout sous-espace vectoriel contient au moins le vecteur nul 0_E.

Exemples

- **Propriété : ensemble des solutions d'un système linéaire homogène**

  L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n inconnues réelles est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

  Démonstration : on a montré dans le chapitre précédent que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène contient la solution nulle, c'est-à-dire le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$ et qu'il est stable par combinaison linéaire.
- L'ensemble des fonctions continues $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. De même pour l'ensemble des fonctions dérivables, deux-fois dérivables, etc.
- L'ensemble des fonctions deux fois dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifie l'équation différentielle linéaire homogène $af'' + bf' + cf = 0$ est sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions deux fois dérivables.
- L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui vérifie l'équation de récurrence linéaire et homogène $au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0$ est sous-espace vectoriel de l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Propriété : intersection de sous-espaces vectoriels

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration : on vérifie que $0_E \in F \cap G$ *et que* $F \cap G$ *est stable par combinaison linéaire.*

Remarque : $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel, sauf si $F \subset G$ ou $F \supset G$.

1.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Définition : sous-espace engendré par une partie de E

Soient P une partie de E, le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-espace de E contenant P est noté $\langle P \rangle$ et est appelé sous-espace de E engendré par P.

Remarques :
- Si F est un sous-espace vectoriel de E , $\langle F \rangle = F$.
- $\langle \emptyset \rangle = \{0_E\}$ puisque $\{0_E\}$ est le plus petit sous-espace de E.

Définition et propriété : somme de sous-espaces vectoriels

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E,
- L'ensemble $F+G=\{x+y/x\in F \text{ et } y\in G\}$ est appelé **somme de** F **et** G.
- $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- $F+G=\langle F\cup G\rangle$, c'est-à-dire $F+G$ est le plus petit sous-espace contenant $F\cup G$.

Démonstration : on vérifie que $0_E\in F+G$ et que $F+G$ est stable combinaison linéaire. De plus, soit H un sous-espace contenant $F\cup G$, H contient F et G donc H contient $F+G$ puisque H est stable pour l'addition.

Définition

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E, on dit que la somme $F+G$ est **directe** si et seulement si $F\cap G=\{0\}$ et on note dans ce cas la somme $F\oplus G$.

2 Espaces vectoriels $\mathbb{R}^n$

Dans la suite du cours, on se place dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ avec $n\in\mathbb{N}^*$. L'étude de ces espaces est d'une grande portée car tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n peut-être identifié à $\mathbb{R}^n$.

2.1 Espace engendré par une famille de vecteurs

Théorème

Soit $(u_1,\ldots,u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, l'**ensemble des combinaisons linéaires** de cette famille est un sous-espace vectoriel de E.
C'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille $(u_1,\ldots,u_p)$, c'est donc l'**espace engendré par la famille** (u_i) noté $\langle u_1,\ldots,u_p\rangle$ ou $\langle (u_i)_{i\in[1,p]}\rangle$.

On peut résumer ce théorème ainsi :

Soit $(u_1,...,u_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, $\langle u_1,...,u_p\rangle=\{\lambda_1u_1+...+\lambda_pu_p \mid \lambda_1,...,\lambda_p\in\mathbb{R}\}$

Démonstration : on note $F=\{\lambda_1u_1+\ldots+\lambda_pu_p \mid \lambda_1,\ldots,\lambda_p\in\mathbb{R}\}$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs u_i.
F est un sous-espace vectoriel car il contient $0_{\mathbb{R}^n}$, il est stable pour l'addition et pour la multiplication par un scalaire.
De plus, soit H un sous-espace contenant $u_1,\ldots,u_p$, H est stable par combinaison linéaire donc il contient toutes les combinaisons linéaires de la famille $(u_1,\ldots,u_p)$, c.a.d. F. Donc F est le plus petit espaces contenant $u_1,\ldots,u_p$, c'est-à-dire $F=\langle u_1,\ldots,u_p\rangle$. (CQFD)

Remarques :

- Tous les vecteurs u_i appartiennent à $\langle u_1, \ldots, u_p\rangle$, puisque par définition, c'est le plus petit sous-espace qui contient $(u_1, \ldots, u_p)$.
- $\langle u_1, \ldots, u_p\rangle = \langle u_1\rangle + \ldots + \langle u_p\rangle$ puisque
  d'une part $\langle u_1, \ldots, u_p\rangle = \{\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_p u_p \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$ et d'autre part
  $\langle u_1\rangle + ... + \langle u_p\rangle = \{\lambda_1 u_1 | \lambda_1 \in \mathbb{R}\} + ... + \{\lambda_p u_p | \lambda_p \in \mathbb{R}\} = \{\lambda_1 u_1 + ... + \lambda_p u_p | \lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{R}\}$.

2.2 Familles génératrices

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(e_i)_{i\in[1,p]}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
$(e_i)_{i\in[1,p]}$ est **génératrice** de F si et seulement si l'espace qu'elle engendre est égal à F, autrement dit si

$$F = \langle e_1, \ldots, e_p\rangle.$$

Remarque : si $(e_i)_{i\in[1,p]}$ est génératrice de F alors tous les vecteurs e_i sont dans F d'après la propriété vue dans la section précédente.

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
$(e_1, \ldots, e_p)$ est **génératrice** de F si et seulement si
- $\forall i \in [1, p], e_i \in F$.
- Pour tout $u \in F$, le système linéaire $x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p = u$ à n équations et p inconnues $x_1, \ldots, x_p$ admet au moins une solution (i.e. est compatible).

Démonstration :
LHS $\Rightarrow$ RHS :
Supposons que $(e_1, \ldots, e_p)$ engendre F, alors $F = \{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\}$.
- On a vu que pour tout $i \in [1, p], e_i \in F$.
- Soit $u \in F$, notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p$. On en déduit que le système $x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p = u$ admet au moins pour solution $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$.

LHS $\Leftarrow$ RHS :
Supposons que pour tout $u \in F$, le système $x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p = u$ admette au moins une solution. Soit $u \in F$, il existe donc $(x_1, \ldots, x_p)$ tels que $u = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$ donc $u \in \{\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}\} = \langle e_1, \ldots, e_p\rangle$.
On en déduit que $F \subset \langle e_1, \ldots, e_p\rangle$.
Supposons de plus que pour tout $i \in [1, p], e_i \in F$, par définition d'un espace engendré, il suit que $\langle e_1, \ldots, e_p\rangle \subset F$.
Conclusion : $F = \langle e_1, \ldots, e_p\rangle$, i.e. $(e_1, \ldots, e_p)$ est génératrice de F

Propriété

Soit F un sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs $(e_1, \ldots, e_p)$ où, par exemple, e_p est combinaison linéaire des autres e_i, alors $(e_1, \ldots, e_{p-1})$ est encore une famille génératrice de F (**on peut enlever** e_p sans changer le caractère générateur de la famille).

Démonstration : Supposons que e_p est combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_{p-1})$.
Notons $F = \langle e_1, \ldots, e_p \rangle$ et $G = \langle e_1, \ldots, e_{p-1} \rangle$.

On a $G \subset F$ puisque que le plus petit sous-espace contenant $e_1, \ldots, e_p$ contient a fortiori $e_1, \ldots, e_{p-1}$ donc $\langle e_1, \ldots, e_{p-1} \rangle = G$ (par définition).

On a aussi $F \subset G$ car d'après l'hypothèse e_p combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_{p-1})$, tout vecteur qui s'écrit comme combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_p)$ est combinaison linéaire de $(e_1, \ldots, e_{p-1})$.

Problème type

Rechercher une équation du sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par une famille de vecteurs.

Exemple : soient $u_1 = (1, -2, 1, 2)$, $u_2 = (1, -3, 1, 0)$, $u_3 = (2, -4, 3, 5)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^4$, donner une équation de l'espace engendré par la famille (u_1, u_2, u_3).

Démonstration :
On recherche les vecteurs (x, y, z, t) de $\mathbb{R}^4$ qui sont des combinaisons linéaires de (u_1, u_2, u_3), c'est-à-dire les vecteurs pour lesquelles il existe des réels a, b, c vérifiant
$(x, y, z, t) = au_1 + bu_2 + cu_3$.

Autrement dit, on cherche à quelle condition sur (x, y, z, t) le système
$au_1 + bu_2 + cu_3 = (x, y, z, t)$ d'inconnues a, b et c admet des solutions.

En utilisant la méthode de Gauss et une notation matricielle, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & 2 & x \\ -2 & -3 & -4 & y \\ 1 & 1 & 3 & z \\ 2 & 0 & 5 & t \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & 0 & y+2x \\ 0 & 0 & 1 & z-x \\ 0 & -2 & 1 & t-2x \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2+2L_1 \\ L_3-L_1 \\ L_4-2L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 0 & -y-2x \\ 0 & 0 & 1 & z-x \\ 0 & 0 & 0 & t-2x+2(-y-2x)-(z-x) \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ -L_2 \\ L_3 \\ L_4+2L_2-L_3 \end{array}$$

Le système admet des solutions si et seulement si
$0 = t - 2x + 2(-y - 2x) - (z - x) = -5x - 2y - z + t$.
Une équation du sous-espace $\langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ est $\quad 5x + 2y + z - t = 0$.

Problème dérivé

Montrer qu'une famille est génératrice de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Méthode : on vérifie en utilisant le raisonnement précédent que l'espace engendré n'est pas limité par une équation, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de condition pour l'existence de solutions au système.

2.3 Familles linéairement indépendantes

Définition

Soit une famille $(e_i)_{i\in[1,p]}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- La famille (e_i) est **linéairement indépendante** (ou libre) si et seulement si
  Pour tous scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, $\quad \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = 0$
- La famille (e_i) est **linéairement dépendante** (ou liée) si elle n'est pas linéairement indépendante, c'est-à-dire si et seulement si
  Il existe des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ **non tous nuls** tels que $\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p = 0$

Théorème

Une famille $(e_i)_{i\in[1,p]}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendante si et seulement si le système linéaire homogène $x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p = 0_{\mathbb{R}^n}$ à n équations et p inconnues $x_1, \ldots, x_p$ admet une solution unique.

Démonstration : C'est une simple reformulation de la définition sachant qu'un système linéaire homogène admet toujours au moins pour solution la solution nulle.

Propriétés

- La famille vide $\emptyset$ est une famille libre par convention.
- Une famille qui contient le vecteur nul est liée.
- Une famille qui contient plusieurs fois le même vecteur est liée.

Démonstration :

- Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ tel que $u_i = 0$ avec $i \in [1, p]$.
  Alors on a $0.u_1 + \cdots + 0.e_{i-1} + 1.u_i + 0.u_{i+1} + \cdots + 0.u_p = 0$, une combinaison linéaire nulle dont le i-ème coefficient est non nul. (CQFD)
- Soit $(u_1, \ldots, u_p)$ tel que $u_i = u_j$ avec $i \neq j$.
  Alors on a $1.u_i + (-1).u_j + \displaystyle\sum_{k\notin\{i,j\}} 0.u_k = 0$, une combinaison linéaire nulle dont deux coefficient sont non nuls.(CQFD)

Problème type

Déterminer si une famille de $\mathbb{R}^n$ est linéairement indépendante.

Exemple : montrer que $u = (1, 0, 2, 2)$, $v = (1, 1, 2, 3)$, $w = (2, 1, 2, 3)$ sont des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^4$.

Démonstration :
Soient α, β et γ quelconques dans $\mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$.
α, β et γ sont solutions du système : $\alpha(1, 0, 2, 2) + \beta(1, 1, 2, 3) + \gamma(2, 1, 2, 3) = (0, 0, 0, 0)$.

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 - 2L_1 \\ L_4 - 2L_1 - L_2 \end{array}$$

Chaque colonne possède un pivot donc le système a une solution unique. Par ailleurs, on sait que $(0, 0, 0)$ est solution, c'est donc l'unique solution. On en déduit que α, β et γ sont nécessairement tous nuls et que u, v et w sont linéairement indépendants.

Propiété

Soit une famille $(u_i)_{i\in[1,p]}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La famille (u_i) est linéairement dépendante si et seulement si un des vecteurs u_i est **combinaison linéaire des autres**.
En particulier, **deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement si ils sont colinéaires**.

Démonstration :

$RHS \Rightarrow LHS$: supposons qu'il existe un vecteur u_k combinaison linéaire des autres vecteurs u_i $(i \neq k)$.
Il existe des scalaires λ_i tels que $u_k = \sum_{i\neq k} \lambda_i u_i$.
Donc $\lambda_1 u_1 + \ldots - u_k + \ldots + \lambda_p u_p = 0$.
Comme les coefficients ne sont pas tous nuls (celui de u_k vaut -1), la famille (u_i) est linéairement dépendante.

$LHS \Rightarrow RHS$: supposons que (u_i) est linéairement dépendante, il existe donc des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i = 0$.
On note k l'indice d'un des coefficients non nuls.
On a alors : $-\lambda_k u_k = \sum_{i\neq k} \lambda_i u_i$ que l'on peut écrire $u_k = -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{i\neq k} \lambda_i u_i$ puisque $\lambda_k \neq 0$.
u_k s'écrit donc comme combinaison linéaire des autres vecteurs u_i $(i \neq k)$.

2.4 Bases

Définition

Soient F un sous-espace et $(e_i)_{i\in[1,p]}$ une famille de vecteurs.
(e_i) est une **base** de F si et seulement si elle est **génératrice et linéairement indépendante**.

Remarque

Le sous-espace $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$ admet pour base la famille vide $\emptyset$ puisqu'on a vu que $\langle\emptyset\rangle = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ et que la famille vide est libre par convention.

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(e_1, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
$(e_1, \ldots, e_p)$ est une **base** de F si et seulement si :
- $\forall i \in [1, p], e_i \in F$.
- Pour tout $u \in F$, le système linéaire $x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p = u$ à n équations et p inconnues $x_1, \ldots, x_p$ admet une unique solution.

Démonstration :
LHS $\Rightarrow$ RHS :
Supposons que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F.
(e_i) est génératrice de F donc $\forall i \in [1, p], e_i \in F$.
De plus, soit $u \in F$, le système linéaire (S) $x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p = u$ admet au moins une solution X_0.
(e_i) est libre donc le système linéaire homogène associé (S_h) $x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p = 0$ admet une unique solution.
En notant $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_h$ leurs ensembles de solutions respectifs, on a $\mathcal{S} = X_0 + \mathcal{S}_h$ donc si $\mathcal{S}_h$ est un singleton, $\mathcal{S}$ aussi.
Conclusion : (S) $x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p = u$ admet une unique solution.
LHS $\Leftarrow$ RHS :
Supposons que $\forall i \in [1, p], e_i \in F$ et que pour tout $u \in F$, le système $x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p = u$ admette une solution unique.
D'après le théorème de la section 2.2, $(e_1, \ldots, e_p)$ engendre F.
Appliquons de plus l'hypothèse à $0 \in F$. Le système $x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p = 0$ admet une unique solution donc d'après le théorème de la section 2.3, $(e_1, \ldots, e_p)$ est libre.
Conclusion : $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F.

Définition : coordonnées

Soit $(e_i)_{i \in [1,p]}$ une base de F et $u \in F$, l'unique p-uplet de scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ tel que $u = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_p e_p$ est appelé p-uplet des **coordonnées du vecteur** u **dans la base** (e_i).

Base canonique de $\mathbb{R}^n$

Les vecteurs $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^n$ appelée **la base canonique de** $\mathbb{R}^n$.
Soit $u = (x_1, \ldots, x_n)$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, ses **coordonnées dans la base canonique** sont $(x_1, \ldots, x_n)$.

Démonstration
Tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i de la manière suivante : $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$.

Problème type

Trouver une base d'un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ caractérisé par une équation.

- **Exemple 1 :**
Trouver une base pour le sous-espace F de $\mathbb{R}^3$ dont une équation est : $2x - y + 3z = 0$.
Démonstration :
On résout le système défini par l'équation du sous-espace : $2x - y + 3z = 0$.
Ce système est déjà échelonné. Il admet des solutions multiples.
On pose $\lambda = y$ et $\mu = z$ et on a $x = \dfrac{1}{2}\lambda - \dfrac{3}{2}\mu$.
(x, y, z) est solution équivaut à (il existe λ et μ tels que $(x, y, z) = (\dfrac{1}{2}\lambda - \dfrac{3}{2}\mu, \lambda, \mu)$).
Or $(\frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2}\mu, \lambda, \mu) = \frac{\lambda}{2}(1, 2, 0) + \frac{\mu}{2}(-3, 0, 2)$
donc F est engendré par les vecteurs $u = (1, 2, 0)$ et $v = (-3, 0, 2)$.
De plus u et v ne sont pas colinéaires donc ils sont linéairement indépendants.
Conclusion : $u = (1, 2, 0)$ et $v = (-3, 0, 2)$ forme une base de F.

- **Exemple 2 :** trouver une base pour le sous-espace G de $\mathbb{R}^4$ dont une équation est :

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - t = 0 \\ x + 2y - 2z + t = 0 \end{cases}$$

Démonstration :
On résout le système défini par l'équation du sous-espace. Il est équivalent aux systèmes suivants :

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_2 \\ L_1 - 2L_2 \end{array}$$

Le système admet des solutions multiples.
On pose $\lambda = z$ et $\mu = t$, on en déduit $\begin{cases} x + 2y = 2\lambda - \mu \\ \quad 5y = 7\lambda - 3\mu \end{cases}$ qui équivaut à
$\begin{cases} x = 2\lambda - \mu - \frac{2}{5}(7\lambda - 3\mu) = -\frac{4}{5}\lambda + \frac{1}{5}\mu \\ y = \frac{7}{5}\lambda - \frac{3}{5}\mu \end{cases}$
On définit $u = (-\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 1, 0)$ et $v = (\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 0, 1)$.
(x, y, z, t) est solution équivaut à (il existe λ et μ tels que $(x, y, z, t) = \lambda u + \mu v$).
par conséquent F est engendré par (u, v).
De plus u et v ne sont pas colinéaires donc ils sont linéairement indépendants.
Conclusion : $u = (-\frac{4}{5}, \frac{7}{5}, 1, 0)$ et $v = (\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 0, 1)$ forme une base de F.

Problème type

Extraire une base à partir d'une famille génératrice d'un sous-espace F de $\mathbb{R}^n$.

Méthode :

Pour extraire une base d'une famille génératrice de F, on utilise la propriété de la section 2.2 qui permet d'enlever, sans modifier l'espace engendré, un vecteur combinaison linéaire des autres.
On continue cette opération jusqu'à ce que cela ne soit plus possible. Dans la section 2.3, on a vu qu'on avait alors une famille libre.
La famille obtenue par cette algorithme est libre et encore génératrice de F, c'est une base de F.

Plutôt que de retirer un à un des vecteurs combinaisons linéaires des autres, on va les enlever d'un seul coup en utilisant la propriété suivante :

Si on peut séparer la famille $(u_i)_{i\in[1,n]}$ en deux sous-familles disjointes $(u_i)_{i\in I}$ et $(u_j)_{j\in J}$ telles que tous les vecteurs de $(u_j)_{j\in J}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs de $(u_i)_{i\in I}$, alors on ne change pas l'espace engendré en retirant tous les vecteurs $(u_j)_{j\in J}$.

Exemple

Soit F l'espace engendré par les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 1, 1)$, $w = (-1, 4, 7)$ et $t = (6, 0, -2)$. Extraire une base de F à partir de la famille (u, v, w, t).

On cherche toutes les combinaisons linéaires entre les vecteurs (u, v, w, t), c'est-à-dire que l'on résout le système $au + bv + cw + dt = 0$ d'inconnues a, b, c et d.

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 7 & -2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & -12 & 0 \\ 0 & -5 & 10 & -20 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_2 - 3L_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ -L_2/3 \\ -L_3/5 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 - 2L_2 \\ L_2 \\ L_3 - L_2 \end{array}$$

Finalement $au + bv + cw + dt = 0$ si et seulement si $\begin{cases} a = -3c + 2d \\ b = \ \ 2c - 4d \end{cases}$.

On choisit des valeurs pour les inconnues secondaires c et d qui correspondent à des combinaisons linéaires de la forme "$u = \dots$", "$v = \dots$", "$w = \dots$" ou "$t = \dots$". Pour cela, on prend une inconnue secondaire égale à 1 les autres égales à 0.

Avec $c = 1$ et $d = 0$, on a $a = -3$ et $b = 2$ c'est-à-dire $-3u + 2v + w = 0$.
Puis $c = 0$ et $d = 1$ donne $a = 2$ et $b = -4$ c'est-à-dire $2u - 4v + t = 0$.

Comme $w = 3u-2v$ et $t = -2u+4v$, (u, v) engendre le même sous-espace que (u, v, w, t).

De plus u et v sont linéairement indépendants car sinon on aurait trouvé une combinaison linéaire $au + bv + cw + dt = 0$ avec $c = d = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$ or $c = d = 0$ implique $a = b = 0$.

Conclusion : (u, v) est une base de F.

3 Dimension

3.1 Définitions

Dimension finie

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Si E admet une famille génératrice finie, on dit qu'il est de **dimension finie**.

Exemple : $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie puisqu'il admet pour famille génératrice la base canonique de cardinal n.

Théorème de la base incomplète

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_p)$ une famille linéairement indépendante de E et $\mathcal{F} = (f_1, ..., f_q)$ une famille génératrice de E.
Alors on peut construire une base $\mathcal{B}$ de E en complétant la famille libre $\mathcal{E}$ par des vecteurs de la famille génératrice $\mathcal{F}$

Démonstration : On construit la base $\mathcal{B}$ par l'algorithme suivant :

Début
Initialisation : $\mathcal{B} := \mathcal{E}$
Pour i de 1 à q, faire : si $f_i \notin \langle\mathcal{B}\rangle$ *alors* $\mathcal{B} := \mathcal{B} \cup \{f_i\}$.
Fin

Cet algorithme se termine toujours puisque le nombre d'itérations est fini.

A la fin de son exécution, pour tout $i \in [1, \dots, q]$, $f_i \in \langle\mathcal{B}\rangle$ donc $E = \langle\mathcal{F}\rangle \subset \langle\mathcal{B}\rangle$.
De plus, tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont dans E puisque ce sont des vecteurs de $\mathcal{E}$ ou $\mathcal{F}$ qui le sont tous. Donc $\langle\mathcal{B}\rangle \subset E$.

Première conclusion : $E = \langle\mathcal{B}\rangle$, i.e. $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E.

On montre que chaque itération conserve l'indépendance linéaire.
Considérons l'itération i et supposons que $\mathcal{B}$ est libre à son début. On note m son cardinal et $b_1, \dots, b_m$ ses vecteurs.
Il y a deux cas :

- Si $f_i \in \langle\mathcal{B}\rangle$ alors $\mathcal{B}$ est inchangée donc elle reste libre.
- Si $f_i \notin \langle\mathcal{B}\rangle$ alors $\mathcal{B}$ devient la famille $(b_1, \dots, b_m, f_i)$.
  Considérons des scalaires $\beta_1, \dots \beta_m$ et α tels que $\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m + \alpha f_i = 0_E$.
  Si $\alpha \neq 0$ alors on a $f_i = -\frac{1}{\alpha}(\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m)$ ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $f_i \notin \langle\mathcal{B}\rangle$.
  On en déduit que $\alpha = 0$ et donc $\beta_1 b_1 + \cdots + \beta_m b_m = 0_E$, or $(b_1, \dots, b_m)$ est par hypothèse libre donc $\beta_1 = \cdots = \beta_m = 0$.
  $\mathcal{B}$ est donc encore libre à la fin de l'itération i.

Comme $\mathcal{B}$ est initialisée avec la famille libre $\mathcal{E}$, on en déduit qu'elle est libre à la fin de l'algorithme.

Conclusion : $\mathcal{B}$ est une base à la fin de l'algorithme.

Propriété et définition : dimension d'un espace vectoriel

Si E est de dimension finie, alors E admet au moins une base de cardinal fini et **toutes les bases de E ont le même cardinal** appelé **dimension** de E et noté $\dim E$.

Démonstration : Supposons que E admet une famille génératrice finie $\mathcal{F}$, en appliquant le théorème de la base incomplète à la famille vide qui est libre et à la famille génératrice $\mathcal{F}$, on construit une base $\mathcal{B}$ qui est de cardinal fini puisque $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$.

On note $p = \operatorname{card} \mathcal{B}$. Considérons une autre base de E, $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_m)$. On montre par l'absurde que $m \leqslant p$.

Supposons $m > p$. Considérons l'équation vectorielle (E) $x_1 b'_1 + \cdots + x_m b'_m = 0$ d'inconnues réelle $x_1, \ldots, x_m$. On sait que $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_m)$ est libre si et seulement si (E) admet une solution unique.

En écrivant (E) avec les coordonnées des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$, on obtient un système (S) équivalent à (E).
(S) est un système linéaire homogène à p équations (autant que de coordonnées) et m inconnues. Comme $p < m$, on sait que (S) n'admet pas de solution unique ce qui est contradictoire avec l'hypothèse $\mathcal{B}'$ base de E.

Conclusion : $\operatorname{card} \mathcal{B}' = m \leqslant p = \operatorname{card} \mathcal{B}$. En échangeant dans ce raisonnement les rôles de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, on en déduit aussi $\operatorname{card} \mathcal{B} \leqslant \operatorname{card} \mathcal{B}'$. Par conséquent $\operatorname{card} \mathcal{B} = \operatorname{card} \mathcal{B}'$ (CQFD).

Propriété : dimension de $\mathbb{R}^n$

$\dim \mathbb{R}^n = n$

Démonstration : on connait la base canonique de cardinal n d'où le résultat.

3.2 Propriétés des dimensions

Théorème : dimension et propriétés des familles de vecteurs

Soit E un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de **dimension** p alors :

1) Toute famille de E **linéairement indépendante** est de cardinal au plus p.
2) Toute famille de E **linéairement indépendante et de cardinal** p est une base de E.
3) Toute famille **génératrice** de E est de cardinal au moins p.
4) Toute famille **génératrice de E et de cardinal** p est une base de E.

Démonstration
E est de dimension p donc il admet une base $\mathcal{B}$ de cardinal p.
Soient $\mathcal{E}$ une famille libre de E et $\mathcal{F}$ une famille génératrice de E.
1) En appliquant le théorème de la base incomplète à la famille libre $\mathcal{E}$ et à la famille génératrice $\mathcal{B}$, on obtient une base $\mathcal{B}'$. Par construction $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}'$ donc $\operatorname{card} \mathcal{E} \leqslant \operatorname{card} \mathcal{B}' = p$.
2) En reprenant la même construction, la base $\mathcal{B}'$ obtenue vérifie $\mathcal{E} \subset \mathcal{B}'$ et $\operatorname{card} \mathcal{E} = p = \operatorname{card} \mathcal{B}'$, donc $\mathcal{E} = \mathcal{B}'$. On en conclut que $\mathcal{E}$ est une base.
3) En appliquant le théorème de la base incomplète à la famille libre $\emptyset$ et à la famille génératrice $\mathcal{F}$, on obtient une base $\mathcal{B}'$. Par construction $\mathcal{B}' \subset \mathcal{F}$ donc $\operatorname{card} \mathcal{F} \geqslant \operatorname{card} \mathcal{B}' = p$.
4) En reprenant la même construction, la base $\mathcal{B}'$ obtenue vérifie $\mathcal{B}' \subset \mathcal{F}$ et $\operatorname{card} \mathcal{F} = p = \operatorname{card} \mathcal{B}'$, donc $\mathcal{F} = \mathcal{B}'$. On en conclut que $\mathcal{F}$ est une base.

Corollaire

Dans **l'espace vectoriel** $\mathbb{R}^n$:
1) Toute famille **linéairement indépendante** est de cardinal au plus n.
2) Toute famille **linéairement indépendante et de cardinal** n est une base de $\mathbb{R}^n$.
3) Toute famille **génératrice** de $\mathbb{R}^n$ est de cardinal au moins n.
4) Toute famille **génératrice de** $\mathbb{R}^n$ **et de cardinal** n est une base de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration
On applique le théorème précédent avec $E = \mathbb{R}^n$ dont la dimension est n.

Théorème : dimension d'un sous-espace

Soient E et F des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.
- Si $F \subset E$ alors $\dim F \leqslant \dim E$.
- Si $F \subset E$ et $\dim F = \dim E$ alors $F = E$.

Démonstration
On note $p = \dim E$ et $q = \dim F$ et on choisit une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de E et une base $(f_1, \ldots, f_q)$ de F.
- Supposons $F \subset E$, alors $(f_1, \ldots, f_q)$ est une famille linéairement indépendante de E donc $q \leqslant \dim E$, c.a.d. $\dim F \leqslant \dim F$.
- Supposons $F \subset E$ et $q = p$ alors $(f_1, \ldots, f_q)$ est une famille linéairement indépendante de E dont le cardinal est égal $q = p = \dim E$ donc c'est une base de E. On en déduit que $E = \langle f_1, \ldots, f_q \rangle$.
  Comme par hypothèse $(f_1, \ldots, f_q)$ est une base de F, on a aussi $F = \langle f_1, \ldots, f_q \rangle$ donc $F = E$.

Théorème : dimension nulle

Le seul sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension nulle est $\{0\}$.

Démonstration
On sait que $\{0\}$ admet pour base la famille vide donc $\dim\{0\} = \operatorname{card}(\emptyset) = 0$.
Soit E un sous-espace de dimension 0 et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Par définition, $\operatorname{card} \mathcal{B} = 0$

donc $\mathcal{B} = \emptyset$. Or $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$ puisque tout sous-espace contient au moins le vecteur nul. Donc $E = \langle \mathcal{B} \rangle = \{0\}$.

Théorème admis : dimension d'une somme de sous-espaces

Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E, $\dim F + \dim G = \dim(F+G) + \dim(F \cap G)$.

Problème type

Vérifier qu'une famille de vecteurs est une base de $\mathbb{R}^n$.

Exemple

On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1,2,3)$, $v = (2,1,1)$, $w = (-1,4,3)$: montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

La première chose à vérifier est le nombre de vecteurs : une base de $\mathbb{R}^3$ contient nécessairement 3 vecteurs.

Comme c'est le cas, on peut continuer en vérifiant si la famille (u,v,w) est libre.

Soient α, β et γ quelconques dans $\mathbb{R}$ tels que $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$.
α, β et γ sont solutions du système : $\alpha(1,2,3) + \beta(2,1,1) + \gamma(-1,4,3) = (0,0,0)$.

En utilisant la méthode du pivot de Gauss, on obtient les systèmes équivalents suivants :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - 2L_1 \\ L_3 - 3L_1 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ -L_2/3 \\ L_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + 5L_2 \end{array}$$

Ce système homogène n'a pas d'inconnue secondaire donc il admet pour solution unique $(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$.
On en déduit que u, v et w sont linéairement indépendants.

Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, trois vecteurs libres de $\mathbb{R}^3$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

Conclusion : (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

3.3 Rang d'une famille de vecteurs

Définition

Soit $(u_i)_{i \in [1,p]}$ une famille de vecteur de $\mathbb{R}^n$. On appelle **rang de la famille** (u_i) la dimension du sous-espace qu'elle engendre, c'est-à-dire $\dim \langle u_1, \ldots, u_p \rangle$.

Problème type

Déterminer le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Exemple Soient les vecteurs $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, 1, 1)$, $w = (-1, 4, 7)$ et $t = (6, 0, -2)$. Déterminer le rang de la famille (u, v, w, t) dans $\mathbb{R}^3$.

Méthode :
On note F l'espace engendré par (u, v, w, t). Pour déterminer la dimension de F, il suffit d'extraire une base de F à partir de la famille génératrice (u, v, w, t). On reprend la même méthode qu'à la section 2.4 et on obtient la base (u, v).
La dimension du sous-espace engendré par (u, v, w, t) est 2 donc le rang de cette famille est 2.

Pour les petites dimensions comme ici, il est aussi possible de discuter des possibilités pour le rang de la famille (u, v, w, t). Il y a 4 possibilités 0, 1, 2 ou 3 puisqu'on est dans $\mathbb{R}^3$. Les rangs 0 et 1 sont très faciles à éliminer. Reste à éliminer le rang 3 en montrant que (u, v, w, t) n'engendre pas $\mathbb{R}^3$ (voir méthode présentée précédemment).