Chapitre

Raisonner en mathématiques

1 Enoncés

En mathématiques, on manipule des énoncés qui sont de 3 types :

- **Les propositions** : ce sont des énoncés qui sont soit Vrai soit Faux. Exemples :
  P1 : "Pour tout x réel, $x^2 \geqslant 0$."
  P2 : "L'équation $x^2 - x + 1 = 0$ a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$."
  P3 : "Si z est un nombre complexe, alors le nombre $z\bar{z}$ est réel et positif."
  P4 : "Il existe un nombre réel x tel que $e^x = -1$."
  Remarque : P1 et P3 sont vrais, P2 et P4 sont faux.

Une proposition mathématique ne peut pas être à la fois Vraie et Fausse.

- **Les définitions** Exemple : "pour tout nombre complexe z, on appelle module de z le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$."
- **Les notations** Exemples : "Posons $Z = 1/z$" , "Pour tout nombre complexe z, on note $|z|$ le module de z.
  NB : la tendance est d'utiliser le symbôle ":=". Par exemple, "posons $Z := 1/z$".

Raisonnements mathématiques : suites de propositions vraies connectées par des opérateurs logiques et contenant des définitions et des notations.

Par commodité, on n'écrit que des propositions vraies sans préciser qu'elles le sont. Par exemple "2 est pair" et pas "(2 est pair) est vrai".
Si il nous arrive d'écrire une proposition fausse alors on précise toujours, par exemple, on dit "(2 est impair) est faux", ce qui est un énoncé vrai.

2 Opérateurs logiques (connecteurs logiques)

Les opérations logiques sont semblables aux opérations arithmétiques mais elles opèrent sur des propositions.
Exemples : $5 + 3$ construit un nouveau nombre à partir des nombres 5, 3.
(1 est réel) ET ($1 > 0$) construit une nouvelle proposition à partir des propositions (1 est réel), ($1 > 0$).

Comme les propositions n'ont que deux valeurs possibles, il est possible de décrire tous les résultats possibles d'une opération logique dans un tableau appelé **table de vérité**.

Dans cette section, P et Q sont des propositions quelconques.

2.1 Négation (NON)

P	NON(P)
V	F
F	V

Exemples de la section 1 : P1 est Vrai donc NON(P1) est Faux. P2 est Faux donc NON(P2) est Vrai.

A faire : simplifier NON(P1) et NON(P2).

2.2 Opération OU

P	Q	P OU Q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemples : pour un entier n quelconque, on note $P(n)$ la proposition (n est multiple de 2) et $Q(n)$ la proposition (n est multiple de 3).
P(6) OU Q(6) = V
P(2) OU Q(2) = V
P(3) OU Q(3) = V
P(1) OU Q(1) = F

2.3 Opération ET

P	Q	P ET Q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemples (avec les propositions précédentes) :
P(6) ET Q(6) = V
P(2) ET Q(2) = F
P(3) ET Q(3) = F
P(1) ET Q(1) = F

2.4 Implication (opération $\Rightarrow$)

P	Q	P $\Rightarrow$ Q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple : pour n quelconque dans $\mathbb{Z}$, (n est multiple de 6) $\Rightarrow$ (n est multiple de 2)
Sous entendue : l'implication est vraie.

On remarque que $P \Rightarrow Q$ est faux dans un seul cas : P vrai et Q faux.

Propriété fondamentale

$(P \ \Rightarrow\ Q)$ équivaut à $(NON(P)\ OU\ Q)$
$NON(P \ \Rightarrow\ Q)$ équivaut à $(P\ ET\ NON(Q))$

2.5 Equivalence (opération $\Leftrightarrow$)

P $\Leftrightarrow$ Q est définie par (P $\Rightarrow$ Q) ET (Q $\Rightarrow$ P)

P	Q	P $\Rightarrow$ Q	Q $\Rightarrow$ P	P $\Leftrightarrow$ Q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Exemple : pour x quelconque dans $\mathbb{R}$, $(x \geqslant 0) \quad \Leftrightarrow \quad (x^3 \geqslant 0)$
Sous entendue : l'équivalence est vraie.

$P \Leftrightarrow Q$ signifie que P et Q ont la même valeur. En pratique, pour démontrer une équivalence $P \Leftrightarrow Q$, on prouve successivement les implications $P \Rightarrow Q$ puis $Q \Rightarrow P$.

2.6 Négation et opérations ET, OU

NON(P ET Q) équivaut à NON(P) OU NON(Q) NON(P OU Q) équivaut à NON(P) ET NON(Q)

Démonstration pour la première équivalence :

P	Q	P ET Q	NON(P ET Q)	NON(P) OU NON(Q)
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Exemples reprenant les définitions $P(n) = n$ est multiple de 2 et $Q(n) = n$ est multiple de 3 :

- NON(P(n) ET Q(n)) $\Leftrightarrow$ NON(n est multiple de 2 ET n est multiple de 3)
$\Leftrightarrow$ n n'est pas multiple de 2 OU n n'est pas multiple de 3
- NON(P(n) OU Q(n)) $\Leftrightarrow$ NON(n est multiple de 2 OU n est multiple de 3)
$\Leftrightarrow$ n n'est pas multiple de 2 ET n n'est pas multiple de 3

3 Quantificateurs

On construit aussi des propositions avec les quantificateurs "pour tout" (noté $\forall$) et "il existe" (noté $\exists$).
Remarque : Les expressions "pour x quelconque dans $\mathbb{R}$", "pour tout x dans $\mathbb{R}$", "quelque soit x dans $\mathbb{R}$" ont la même signification.

Exemples :
P1 (V) : "Pour tout x réel, $x^2 \geqslant 0$."
P4 (F) : "Il existe un nombre réel x tel que $e^x = -1$."

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ n'ont de signification que si l'ensemble dans lequel on les utilise est précisé.
"$\forall x, x^2 \geqslant 0$" est vrai dans $\mathbb{R}$ mais faux dans $i\mathbb{R}$ et sans signification dans $\mathbb{C}$.
"$\exists x$ tel que $e^x = -1$ est faux dans $\mathbb{R}$ mais vrai dans $\mathbb{C}$ car $e^{i\pi} = -1$.

Il vaut mieux que vous utilisiez les expressions "Pour tout" et "Il existe" plutôt que les symboles $\forall$ et $\exists$ car vous comprenez mieux ce que vous écrivez.

3.1 Négation des quantificateurs

Soit E un ensemble et $P(x)$ une proposition dépendant de x, on a les équivalences :

$$\big(NON(\forall x \in E, P(x))\big) \Leftrightarrow \big(\exists x \in E, NON(P(x))\big)$$
$$\big(NON(\exists x \in E, P(x))\big) \Leftrightarrow \big(\forall x \in E, NON(P(x))\big)$$

Exemple 1 : Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 1)$ est faux équivaut à montrer que $(\exists x \in \mathbb{R}, e^x \leqslant 1)$ ce que l'on fait en montrant un exemple : $e^0 = 1$.

On dit que 0 est un contre exemple pour la proposition $(\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 1)$, ce qui prouve qu'elle est fausse.

Exemple 2 : Montrer que $(\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0)$ est faux équivaut à montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 \neq 0)$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 > 0$.

4 Méthodes de démonstration

Dans cette section, P et Q sont des propositions quelconques.

4.1 Raisonnement par contraposée

Propriété fondamentale

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (NON(Q) \Rightarrow NON(P))$$

Faire une table de vérité.

On en déduit une méthode appelée raisonnement par contraposée :
Pour montrer que $P \Rightarrow Q$, on montre à la place que $NON(Q) \Rightarrow NON(P)$ c'est-à-dire $(QFaux) \Rightarrow (PFaux)$.

Exemple : soient x et y des nombres réels, démontrer que si x et y sont différents, alors (x+1)(y-1) et (x-1)(y+1) sont différents.
Correction dans le Liret Martinais Algèbre 1ère année p.9.

4.2 Raisonnement par l'absurde

Propriété fondamentale

Une proposition ne peut pas être à la fois vraie et fausse.

On en déduit une méthode appelée raisonnement par l'absurde : On sait que P est vraie et on veut montrer que Q est vraie.
On fait l'hypothèse que Q est fausse.
On déduit de P qu'une proposition R est vraie et on déduit de NON(Q) que la même proposition R est fausse. Comme R ne peut pas être à la fois vraie et fausse, l'hypothèse Q fausse est à rejeter. On en déduit que Q est vraie.

4.3 Démonstration d'une égalité

Pour démontrer une égalité A=B :

- soit on transforme successivement A en B : A= A' = A" = ... = B
- soit on transforme successivement B en A : B= B' = B" = ... = A
- soit on transforme successivement A puis B en une expression identique C :
  A= A' = A" = ... = C puis B= B' = B" = ... = C.

4.4 Raisonnement par récurrence

Revoir le cours du lycée.