Chapitre I

Nombres complexes

1 Ecriture (ou forme) algébrique

1.1 Parties réelles et imaginaires

Propriété

Soit z un nombre complexe, z s'écrit de manière unique sous la forme $a + ib$ où a et b sont des réels. Cette écriture s'appelle écriture algébrique de z. On appelle partie réelle de z notée $\mathrm{Re}(z)$ le réel a et partie imaginaire de z notée $\mathrm{Im}(z)$ le réel b.

Conséquence 1

Si a, b, c et d sont des réels, $a + ib = c + id \iff (a = c)$ et $(b = d)$. On dit que l'on peut identifier les parties réelles et imaginaires.

Conséquence 2

Pour tous réels x et y, $x + iy = 0 \iff x = 0$ et $y = 0$

1.2 Règles de calcul

Addition et multiplication

Soient z et z' quelconques dans $\mathbb{C}$, $a + ib$ et $c + id$ leurs écritures algébriques :

- $z + z' = (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- $zz' = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$
- Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - i\dfrac{b}{a^2 + b^2}$

Linéarité des parties réelles et imaginaires

Soient z et z' quelconques dans $\mathbb{C}$, λ quelconque dans $\mathbb{R}$:
- $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$
- $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$
- $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda \,\mathrm{Re}(z)$
- $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda \,\mathrm{Im}(z)$

1.3 Réels et imaginaires purs

Définition et propriété

Pour tout nombre complexe z, on a
- z est réel si et seulement si $\mathrm{Im}(z) = 0$
- Par définition, z est imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z) = 0$.

2 Représentation géométrique des nombres complexes

Remarque : il est très important de savoir transposer un problème sur les nombres complexes sous forme géométrique.

2.1 Affixe

Définition et propriété

Soit P un plan affine muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe à tout nombre complexe z d'écriture algébrique $a + ib$ le point M de coordonnées (a, b). z détermine M de manière unique et inversement.
Le nombre z est appelée **affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$. Sa partie réelle est l'abscisse de M dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et sa partie imaginaire l'ordonnée.

Notation : $M(z)$, $\overrightarrow{OM}(z)$

Faire un schéma.

2.2 Plan complexe

Pour simplifier cette représentation géométrique, on peut ne représenter que les affixes, sans les points ou les vecteurs. On fait alors abstraction du plan affine pour ne s'intéresser qu'aux nombres complexes. On parle de **plan complexe**. C'est la représentation géométrique habituelle des nombres complexes.

Représentation : avec module et argument, droites des réels et des imaginaires purs

3 Conjugué

3.1 Définition

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $a+ib$ (a et b réels), on appelle conjugué de z et on note $\bar{z}$ le nombre $a-ib$.

Interprétation géométrique Dans le plan complexe, $\bar{z}$ est le symétrique de z par rapport à la droite des réels.

3.2 Règles de calcul

Soient z et z' quelconques dans $\mathbb{C}$, on a :

- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$
- Si $z \neq 0$, $\overline{(1/z)} = 1/\overline{z}$

Important

- $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z+\overline{z})$
- $\mathrm{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z-\overline{z})$

3.3 Caractérisation des réels et imaginaires purs

Propriété

Soit z quelconque dans $\mathbb{C}$, on a :
$z \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; z = \overline{z}$
$z \in i\mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; z = -\overline{z}$

4 Module

4.1 Définition

Soit z un nombre complexe d'écriture algébrique $a+ib$ (a et b réels), on appelle **module** de z et on note $|z|$ le réel positif $\sqrt{a^2+b^2}$.

Module et valeur absolue
Si $z \in \mathbb{R}$, son module est égale à la valeur absolue définie pour les nombres réels, d'où le choix d'une même notation. On dit que le module des nombres complexes prolonge la valeur absolue des réels.

Interprétation géométrique
Le module de z est la distance OM où M est le point d'affixe z.

4.2 Règles de calcul

Dans cette sous-section, z et z' sont des nombres complexes quelconques.

- $|zz'| = |z||z'|$
- Si $z \neq 0$, $|1/z| = 1/|z|$

Important

- $|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0$
- $|z|^2 = z\overline{z}$
- Si $z \neq 0$, $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$

Démonstration (utiliser la forme algébrique)

Application
Calculer l'inverse de $z = 5 - 3i$.

Autre formule importante (au pire à savoir retrouver)

$|z+z'|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z'\overline{z}) + |z'|^2$

Démonstration (utiliser le conjugué)

Application
Calculer $\left|e^{i\theta} + 3e^{i2\theta}\right|$ où θ est un réel quelconque.

4.3 Nombres complexes de module 1

Définition

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.
$\mathbb{U}$ est stable pour la multiplication, l'inverse et la conjugaison.

Représentation graphique

Propriété

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $|z| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{z} = \overline{z}$ (inverse = conjugué)

Démonstration

4.4 Inégalité triangulaire

Propriété

Pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$, $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Interprétation géométrique
schéma

Démonstration
Lemme : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|Re(z)| \leqslant |z|$ et $|Im(z)| \leqslant |z|$
Puis utiliser $|z + z'|^2 = |z|^2 + 2\,Re(z'\overline{z}) + |z'|^2$

Corollaire utile

Pour tout z et z' dans $\mathbb{C}$, $||z| - |z'|| \leqslant |z - z'|$

Démonstration (écrire z=(z-z')+z)

4.5 Ecriture algébrique des racines carrées d'un nombre complexe

Rappels sur la racine carrée dans $\mathbb{R}$

Propriété

Tout nombre complexe z possède deux racines carrées opposées, distinctes si $z \neq 0$.

Attention : La notation racine carrée n'a pas de sens pour les nombres complexes car elle doit désigner un nombre de manière univoque.

NB : absence d'ordre compatible avec les opérations sur $\mathbb{C}$.

Méthode de calcul générale

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $a+ib$ (a et b réels). Pour tous x et y réels, on a l'équivalence :

$$(x+iy)^2 = a+bi \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{array}\right.$$

De plus : $(x+iy)^2 = a+bi \Rightarrow x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$ (égalité des modules).

Nous avons donc a fortiori l'équivalence :

$$(x+iy)^2 = a+bi \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \\ x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right.$$

et en faisant la somme et la différence de la première et de la troisième égalité, on obtient :

$$(x+iy)^2 = a+bi \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x^2=\sqrt{a^2+b^2}+a \\ 2y^2=\sqrt{a^2+b^2}-a \\ 2xy=b \end{array}\right.$$

Puisqu'on a $b^2 \geq 0$, les nombres réels $\sqrt{a^2+b^2}+a$ et $\sqrt{a^2+b^2}-a$ sont positifs, donc il vient :

$$|x| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a} \quad \text{et} \quad |y| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}$$

Enfin, l'égalité $2xy=b$ implique que xy a le signe de b.

On obtient donc deux solutions possibles pour le couple (x,y), c'est-à-dire deux racines carrées pour z.

Formellement, en notant ϵ le signe de b dans le sens où ϵ vaut -1 si $b<0$, 1 si $b=0$ (on pourrait aussi choisir -1), 1 si $b>0$, les deux racines de $z=a+ib$, sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}+\epsilon i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)$$

et l'opposé, c'est-à-dire

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}+\epsilon i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right)$$

Exemple : Calculons les racines carrées du nombre complexe $3-4i$. Soit x et y réels, on a les équivalences :

$$(x+iy)^2 = 3-4i \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2-y^2=3 \\ 2xy=-4 \\ x^2+y^2=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2=4 \\ y^2=1 \\ xy=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x+iy=2-i \text{ } ou \text{ } x+iy=-2+i$$

Les racines carrées de $3-4i$ sont donc $2-i$ et $-2+i$.

Application :
Calculer les solutions de l'équation $x^2 - (2+3i)x - 2+4i = 0$.
Discriminant $3-4i$, *racines* $2+i$ *et* $2i$.

5 Ecriture (forme) polaire

5.1 Argument

Définition

Soit z un nombre complexe **non nul**. On note $(O, \vec{u}, \vec{v})$ le repère du plan complexe et on considère le point $M(z)$. On appelle argument de z et on note $\arg z$ toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. On appelle argument principal la mesure de cet angle qui appartient à $[0, 2\pi[$ (d'autres définitions utilisent l'intervalle $]-\pi, \pi]$).

Schéma

Attention : l'argument est donc défini à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$.
Par exemple, on écrit $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
ou bien $\arg(1+i) \equiv \dfrac{\pi}{4}[2\pi]$ (congru à ... modulo ...)
Rappeler éventuellement la définition de la congruence

5.2 Forme polaire

Définition

Soit z un nombre complexe **non nul**. En notant θ un argument de z et $r = |z|$, on a $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. On parle de l'écriture polaire (ou trigonométrique) de z. Le couple (r, θ) s'appelle coordonnées polaires du point $M(z)$.
r est un réel **positif** et est unique, θ est un réel déterminé à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$).

Evident géométriquement

5.3 Formule d'Euler

Propriété

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Cette formule n'est pas une définition de l'exponentielle complexe qui est définie par une série (pour simplifier, comme la limite d'une suite).

5.4 Formule de Moivre

Propriété

Pour tous réel θ et entier n, on a $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

Evident à partir de la formule d'Euler et des propriétés de l'exponentielle car la formule de Moivre s'écrit alors : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

Exercice Démonstration directe par récurrence en utilisant $\cos a\cos b - \sin a\sin b = \cos(a+b)$ et $\sin a\cos b + \cos a\sin b = \sin(a+b)$

5.5 Règles de calcul

Pour tous nombres complexes z et z' non nuls, on a :

- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'[2\pi]$
- $\arg(\frac{1}{z}) \equiv -\arg z[2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg z[2\pi]$

Formules équivalentes avec l'écriture polaire et l'exponentielle :

Pour tous réels r, r', θ et θ', on a :

- $re^{i\theta}r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta'}$
- $(re^{i\theta})^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$

Démonstration Sous cette forme les 2 premières propriétés sont évidentes. La troisième est évidente géométriquement car le conjugué est le symétrique par rapport à la droite des réels.

Application : Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $\arg(z^n)$ à partir de $\arg z$.

5.6 Interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes

Soit $t \in \mathbb{C}$, dans le plan complexe, on a :

- L'application $z \to z + t$ est la translation de vecteur $\vec{v}(t)$.
- L'application $z \to \overline{z}$ est la symétrie axiale d'axe la droite des réels.
- L'application $z \to t.z$ est la similitude directe de centre 0, d'angle $\arg t$ et de rapport $|t|$. Si t est réel, c'est une homothétie. Si t est de module 1, c'est une rotation.

Faire des schémas

Exemple :
Interpréter géométriquement l'application $z \mapsto az + b$ où a et b sont des réels.

5.7 Application à la trigonométrie

Expression de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$

Rappel important : Formule du binôme de Newton

Méthode sur un exemple
Exprimer $\cos 4\theta$ et $\sin 4\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

D'après la formule de Moivre : $\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$.
On utilise la formule du binôme de Newton pour développer le second membre puis on regroupe les parties réelles et imaginaires.
On peut alors identifier ces dernières avec $\cos n\theta$ *et* $\sin n\theta$.

Linéarisation de $(\cos\theta)^n$ et $(\sin\theta)^n$

Linéariser $\approx$ *transformer un produit en une somme*

Rappel
Soit θ un réel et n un entier naturel, on a $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Méthode sur un exemple
Linéariser $(\cos\theta)^3$ et $(\sin\theta)^3$.

On utilise l'une ou l'autre des formules précédentes selon que l'on veut linéariser un cosinus ou un sinus. On a par exemple pour le cosinus :

$$\cos^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$$

On utilise la formule du binôme de Newton pour développer $(e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n$ *puis on regroupe les termes en* $e^{ik\theta}$ *et* $e^{-ik\theta}$.
On peut alors simplifier en utilisant $e^{ik\theta} + e^{-ik\theta} = 2\cos(k\theta)$ *et* $e^{ik\theta} - e^{-ik\theta} = 2i\sin(k\theta)$.
Puis on obtient la linéarisation de $(\cos\theta)^n$ *en multipliant le résultat par* $\dfrac{1}{2^n}$. *S'il n'y a pas d'erreurs de calcul, on doit obtenir un nombre réel.*

6 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

6.1 Définition

Soit Z un nombre complexe et un n un entier naturel non nul, on appelle racine n-ième de Z tout nombre complexe z vérifiant $z^n = Z$.

Cas particuliers :
- Pour $n = 2$, on parle des racines carrées.
- Pour $z = 1$, on parle des racines n-ièmes de l'unité.

6.2 Existence et nombre de racines n-ièmes

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, toute suite géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$ est une suite périodique de période n qui prend n valeurs distinctes.

Démonstration :
On note u_0 le premier terme de la suite.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on a $u_k = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k u_0 = e^{i\frac{2k\pi}{n}} u_0$.
Donc $u_{k+n} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^n u_k = e^{i\frac{2n\pi}{n}} u_k = u_k$.

De plus, les nombres u_0, u_1, …, u_{n-1} sont distincts deux à deux.

Supposons qu'il existe $k, k' \in [0, n-1]$ tels que $u_k = u_{k'}$, on a alors $u_0 e^{i\frac{2k\pi}{n}} = u_0 e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$ donc $e^{i2\pi\frac{k-k'}{n}} = 1$ qui implique que $\frac{k-k'}{n}$ est un entier c'est-à-dire $k - k'$ est un multiple de n.

De plus $0 \leqslant k \leqslant n-1$ et $-(n-1) \leqslant -k' \leqslant 0$ implique $-(n-1) \leqslant k - k' \leqslant n-1$.

Comme le seul multiple de n de l'intervalle $[-(n-1), n-1]$ est 0, on en conclut que $k = k'$ (CQFD).

Propriété

Soit n un entier naturel non nul, tout nombre complexe non nul possède n racines n-ièmes **distinctes**.

Démonstration :
Soit Z un nombre complexe non nul et $re^{i\theta}$ sa forme polaire. r est un réel positif donc $\sqrt[n]{r}$ est défini.
On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$, on a $z_k^n = (\sqrt[n]{r})^n \left(e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}\right)^n = r\,e^{i(\theta+2k\pi)} = r\,e^{i\theta} = Z$.
Donc z_k est racine n-ième de z.

Inversement, soit z une racine n-ième de Z. On a $z^n = Z$ donc $|z^n| = Z$ et $\arg z^n = Z$ c'est-à-dire $|z| = \sqrt[n]{r}$ et $\arg z \equiv \frac{\theta}{n}\ [\frac{2\pi}{n}]$. On en conclut que z est un des termes de la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Donc l'ensemble des racines n-ièmes est exactement l'ensemble des nombres z_k.

De plus, la suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, donc elle est périodique de période n et prend n valeurs distinctes (CQFD).

6.3 Méthode de calcul

Propriété

Soient n un entier naturel non nul et Z un nombre complexe non nul de forme polaire $re^{i\theta}$, les n racines n-ième de Z sont les n termes successifs d'une suite géométrique de premier terme $z_0 = \sqrt[n]{r}\ e^{i\frac{\theta}{n}}$ et de raison $e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
Cette suite est périodique de période n et ses n valeurs distinctes sont les nombres
$z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$ avec $k \in [0, n-1]$.

Exercice : calculer les racines carrées et cinquièmes de $16 - 16\sqrt{3}i$.

6.4 Racines n-ième de l'unité

Il s'agit des racines de 1.

Propriété

Soient n un entier naturel non nul, les n racines n-ièmes de l'unité sont les nombres $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où k varie de 0 à $n-1$.

Propriété

Soient n un entier naturel non nul et Z un nombre complexe non nul dont z_0 est une racine n-ième connue, les n racines n-ièmes de Z s'obtiennent en multipliant z_0 par chacune des n racines n-ièmes de l'unité.

Démonstration : en notant $u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in [0, n-1]$, les racines n-ièmes de l'unité, les n nombres z_0u_k ($k \in [0, n-1]$) sont distincts deux à deux et $(z_0u_k)^n = Z$.

6.5 Interprétation géométrique

Propriété

Soient n un entier vérifiant $n \geqslant 2$ et Z un nombre complexe non nul, les n racines n-ièmes de Z sont les sommets d'un polygone régulier de centre 0 à n sommets dont le cercle circonscrit a pour rayon $\sqrt[n]{|Z|}$.

schéma

Démonstration :
Pour tout $k \in [0, n-1]$, on note A_k le sommet d'affixe $z_k = \sqrt[n]{r}\ e^{i(\frac{\theta+2k\pi}{n})}$. Si $k \neq 0$, on a $z_k = e^{i\frac{2\pi}{n}} z_{k-1}$ et $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{n}} z_{n-1}$, donc chaque sommet est l'image du précédent par une rotation de centre 0 et d'angle $\frac{2\pi}{n}$ ce qui caractérise un polygone régulier à n sommets de centre 0.

Propriété

Soient n un entier vérifiant $n \geqslant 2$ et Z un nombre complexe non nul, la somme des n racines n-ièmes de Z est nulle.

Démonstration : Cette somme est l'affixe de l'isobarycentre des points dont les affixes sont les racines de z. Or ces points sont les sommets d'un polygone régulier de centre O d'affixe 0, et le centre d'un polygone régulier est l'isobarycentre de ses sommets.