Chapitre VII

Ordre sur $\mathbb{R}$, rappels et compléments sur les fonctions réelles

1 Ordre sur $\mathbb{R}$

1.1 Encadrements

Dans cette section, a, b, c, d, x et y sont des réels.

Addition

Si $a \leqslant x \leqslant b$ alors $a+c \leqslant x+c \leqslant b+c$	
Si $a \leqslant x \leqslant b$ et $c \leqslant y \leqslant d$ alors $a+c \leqslant x+y \leqslant b+d$	

Multiplication

$\boxed{\text{Si } a \leqslant x \leqslant b \text{ et } c \text{ positif alors } c\,a \leqslant c\,x \leqslant c\,b}$

Exemple : $-1 \leqslant x \leqslant 2 \ \Rightarrow\ -3 \leqslant 3x \leqslant 6$

$\boxed{\text{Si } a \leqslant x \leqslant b \text{ et } c \text{ négatif alors } c\,b \leqslant c\,x \leqslant c\,a}$

On se ramène au cas où c est positif avec $-c \geqslant 0$.
Exemple : $-1 \leqslant x \leqslant 2 \ \Rightarrow\ -4 \leqslant -2x \leqslant 2$

$\boxed{\text{Si } 0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b \text{ et } 0 \leqslant c \leqslant y \leqslant d \text{ alors } 0 \leqslant a\,c \leqslant x\,y \leqslant b\,d}$

Exemple : $(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } 3 \leqslant y \leqslant 5) \ \Rightarrow\ \frac{3}{2} \leqslant x\,y \leqslant 10$

$\boxed{\text{Si } 0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b \text{ et } c \leqslant y \leqslant d \leqslant 0 \text{ alors } b\,c \leqslant x\,y \leqslant a\,d \leqslant 0}$

On se ramène au cas de nombres positifs avec $0 \leqslant -d \leqslant -y \leqslant -c$.
Exemple : $(\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2 \text{ et } -7 \leqslant y \leqslant -5) \ \Rightarrow\ -14 \leqslant x\,y \leqslant -\frac{5}{2}$

Si $\quad a \leqslant x \leqslant b \leqslant 0 \quad$ et $\quad c \leqslant y \leqslant d \leqslant 0 \quad$ alors $\quad 0 \leqslant b\,d \leqslant x\,y \leqslant a\,c$

On se ramène au cas de nombres positifs avec $0 \leqslant -b \leqslant -x \leqslant -a$ et $0 \leqslant -d \leqslant -y \leqslant -c$.
Exemple : $(-5 \leqslant x \leqslant -\frac{1}{3}$ et $-3 \leqslant y \leqslant -2) \Rightarrow \frac{2}{3} \leqslant x\,y \leqslant 15$

1.2 Valeur absolue d'un réel

Pour tout réel x, la **valeur absolue** de x, notée $|x|$ est définie par $|x| = \max(x, -x)$.

Remarque : $|x|$ représente la distance de x à 0, $|x-y|$ la distance de x à y.
On a donc les propriétés classiques des distances, en particulier l'**inégalité triangulaire**.

Inégalité triangulaire

Pour tout x et x' dans $\mathbb{R}$, $|x + x'| \leqslant |x| + |x'|$

1.3 Majorants et minorants

Défintions

Soit A une partie **non vide** de $\mathbb{R}$:

- A est **majorée** si et seulement s'il existe un réel M tel que $\forall x \in A,\ x \leqslant M$.
  On dit alors que M **est un majorant de** A.
- A est **minorée** si et seulement s'il existe un réel m tel que $\forall x \in A,\ m \leqslant x$.
  On dit alors que m **est un minorant de** A.
- A est **bornée** si et seulement si $|A| = \{|x|/x \in A\}$ est majorée.
- A **borné** $\Leftrightarrow$ (A majorée) et (A minorée).

Remarque : A est bornée signifie que la distance entre 0 et tout élément x de A est inférieure à une valeur donnée.

Exemple
Montrer que $A = \left\{\frac{1-n}{1+n}/n \in \mathbb{N}\right\}$ est bornée.

Démonstration
Remarque : cela revient à montrer que la suite $\left(\frac{1-n}{1+n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

On note $u_n = \frac{1-n}{1+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Considérons $n > 0$, on a $u_n = -\dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$.
Or $1 < 1 + \frac{1}{n} \leqslant 2$ donc $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{n}} < 1 \quad (I_1)$.
De plus $0 \leqslant 1 - \frac{1}{n} < 1 \quad (I_2)$.

Les inégalités I_1 et I_2 impliquent $0 \leqslant \dfrac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} < 1$ donc que $-1 < u_n \leqslant 0$.

Enfin, $u_0 = 1$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **est majoré par** 1 **et minorée par** -1.

1.4 Plus grand élément, plus petit élément

Défintions

Soit A une partie **non vide** de $\mathbb{R}$:

- A admet un **plus grand élément** si et seulement s'il existe un **majorant de** A **qui appartient à** A, autrement dit s'il existe un réel $a \in A$ tel que $\forall x \in A,\ x \leqslant a$.
  a est alors **unique** et s'appelle **le plus grand élément de** A, notée $\max(A)$.
- A admet un **plus petit élément** si et seulement s'il existe un **minorant de** A **qui appartient à** A, autrement dit s'il existe un réel $b \in A$ tel que $\forall x \in A,\ x \geqslant b$.
  b est alors **unique** et s'appelle **le plus petit élément de** A, notée $\min(A)$.

Démonstration de l'unicité

Supposons par exemple que a et a' sont des plus grand élément de A. Comme a et a' appartiennent à A, a majore a', c'est-à-dire $a \geqslant a'$, et inversement, donc $a = a'$.

Exemple

$A = \{\frac{1-n}{1+n}/n \in \mathbb{N}\}$ admet-il un plus grand élément, un plus petit élément ?

Démonstration

On a montré précédemment que $1 = \frac{1-0}{1+0} \in A$ et 1 majore A donc $\max(A) = -1$.

On montre que A n'admet pas de plus petit élément, autrement dit que $\min(A)$ n'existe pas. Pour cela on montre qu'aucun élément de A ne minore A.

Soit $x \in A$ quelconque, il existe n tel que $x = \frac{1-n}{1+n}$.

On pose $x' = \frac{1-(n+1)}{1+(n+1)}$, on a $x' \in A$.

$x' - x = \frac{-n}{2+n} - \frac{1-n}{1+n} = \frac{-n(1+n)-(1-n)(2+n)}{(1+n)(2+n)} = \frac{-n-n^2-2-n+2n+n^2}{(1+n)(2+n)} = \frac{-2}{(1+n)(2+n)}$.

Donc $x' < x$ ce qui prouve que x ne minore pas A.

Théorème : parties finies de $\mathbb{R}$

Toute partie finie de $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire de cardinal fini) admet **un plus grand et un plus petit élément**.

Démonstration

Comme il y a un nombre fini d'éléments, il est toujours possible de les comparer deux à deux et de déterminer ainsi le plus petit et le plus grand.

Noter que si on essayait le même procédé sur une partie infinie, on ne s'arrêterait jamais, donc cette méthode n'aboutirait pas.

1.5 Borne sup et borne inf

Définitions

Soit A une partie **non vide** de $\mathbb{R}$:

- A admet une **borne supérieure** si et seulement s'il existe **un plus petit des majorants** de A, autrement dit,
  s'il existe un majorant S de A tel que tout majorant M de A vérifie $S \leqslant M$.
  S est alors **unique** et s'appelle **borne supérieure** de A, **notée** $\sup(A)$.
- A admet une **borne inférieure** si et seulement s'il existe **un plus grand des minorants** de A, autrement dit,
  s'il existe un minorant s de A tel que tout minorant m de A vérifie $s \geqslant m$.
  s est alors **unique** et s'appelle **borne inférieure** de A, **notée** $\inf(A)$.

L'unicité découle de l'unicité du max *et du* min.

Remarque : pour un intervalle, les bornes correspondent aux définitions ci-dessus. Par exemple pour $A =]1, 3]$, 1 est le plus grand des minorants de A et 3 est le plus petit des majorants de A.

Propriété caractéristique

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, s et S des réels :

- $S = \sup(A) \iff \begin{cases} S \text{ majore } A \\ \text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } x \in A \text{ tel que } S - \varepsilon < x \end{cases}$
- $s = \inf(A) \iff \begin{cases} s \text{ minore } A \\ \text{Pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe } x \in A \text{ tel que } x < s + \varepsilon \end{cases}$

Démonstration : cette formulation signifie que tout nombre strictement inférieur à S n'est pas un majorant de A ce qui est bien équivalent à (S est le plus petit des majorants de A).

Corollaire

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, m et M des réels :

- si M majore A et $M \in A$, autrement dit si $M = \max(A)$, alors A admet une borne supérieure et $\sup(A) = M$.
- si m minore A et $m \in A$, autrement dit si $m = \min(A)$, alors A admet une borne inférieure et $\inf(A) = m$.

Démonstration : il suffit d'appliquer la propriété caractéristique précédente.
Par exemple si M majore A et $M \in A$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $x = M$ vérifie $x \in A$ et $S - \varepsilon < x$.

Exemple
Montrer que $A = \{\frac{1-n}{1+n} / n \in \mathbb{N}\}$ admet une borne supérieur et une borne inférieure, donner leur valeur.

On montre d'abord que $\sup(A) = 1$.
D'après la propriété précédente, cela découle de $\max(A) = 1$.

On montre ensuite que $\inf(A) = -1$.
On note que $\lim \frac{1-n}{1+n} = -1$ mais que $-1 \notin A$.
D'après la question précédente, -1 minore A.
Soit $\varepsilon > 0$. On veut montrer que $-1+\varepsilon$ n'est pas un minorant de A, c'est-à-dire qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n < -1+\varepsilon$ qui s'écrit $\dfrac{1-n}{1+n} < -1+\varepsilon$.
Or $\dfrac{1-n}{1+n} < -1+\varepsilon \Leftrightarrow \dfrac{1-n}{1+n} + 1 = \dfrac{2}{1+n} < \varepsilon$.
On peut toujours trouver un entier supérieur à $\dfrac{2}{\varepsilon} - 1$. On note n_0 l'un d'entre eux, on a $n_0 > \dfrac{2}{\varepsilon} - 1$ qui implique $\dfrac{2}{1+n_0} < \varepsilon$ et finalement $u_{n_0} < -1+\varepsilon$.
On a donc trouvé un élément de A qui n'est pas minoré par $-1+\varepsilon$. On en conclut que -1 est le plus petit des minorants de A, c'est-à-dire la borne inférieure de A.
Conclusion : $\inf(A) = -1$.

Théorème fondamental : complétude de $\mathbb{R}$

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque : cette propriété n'est pas vraie dans $\mathbb{Q}$. Par exemple $\{x \in \mathbb{Q} / x < \sqrt{2}\}$ est majorée dans $\mathbb{Q}$ (par exemple par 2) mais n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. On peut le montrer formellement mais cela se comprend intuitivement car la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ est $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1.6 Partie entière d'un réel

Propriété axiomatique de $\mathbb{N}$

Toute ensemble d'entiers non vide et majoré admet un plus grand élément.

Remarque : c'est un des axiomes qui définissent $\mathbb{N}$.

Définition

Pour tout réel x, on appelle partie entière de x notée $\mathrm{E}(x)$ ou $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier $n \leqslant x$, autrement dit $\mathrm{E}(x) = \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leqslant x\}$.

Justification : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leqslant x\}$ est un ensemble d'entiers non vide et majoré.

Théorème

- Pour tout réel x, la partie entière de x est l'unique entier n tel que $n \leqslant x < n+1$.
- Pour tout réel x, la partie entière de x est l'unique entier n tel que $x - 1 < n \leqslant x$.

1.7 Intervalles de $\mathbb{R}$

Propriété

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si $\forall x, y \in I$ tels que $x < y, [x, y] \subset I$.

Remarques :
- cette propriété s'appelle la **connexité**. Elle signifie que pour tous x et y dans I, il y a un chemin de x à y inclus dans I. Autrement dit, I est d'un seul tenant.
- $[x, y] = \{a \in \mathbb{R} | x \leqslant a \leqslant y\}$ donc par exemple $[2, 1] = \emptyset$.

Propriété

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, I est ouvert si et seulement si pour tout $x \in I$, il existe un intervalle ouvert centré sur x inclus dans I, autrement dit :
Pour tout $x \in I$, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset I$.

Remarque : cette propriété caractérise plus généralement les sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}$, concept fondamentale de l'Analyse.

Exemple : l'intervalle $]1, 3]$ ne vérifie pas cette propriété en 3.
En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, $3 + \frac{\varepsilon}{2} \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ mais $3 + \frac{\varepsilon}{2} \notin]1, 3]$ donc $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$ n'est pas inclus dans $]1, 3]$.

2 Rappels sur les fonctions réelles d'une variable réelle

2.1 Révisions

Revoir les définitions des fonctions croissantes, décroissantes, monotones, ainsi que des fonctions paires, impaires, périodiques.

A retenir

Les images sont dans le même ordre que leurs antécédents pour une fonction croissante, dans l'ordre contraire pour une fonction décroissante.

2.2 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition

Soit $A \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f : A \to \mathbb{R}$:
- f **est majorée sur** A si et seulement si $f(A)$ est majorée,
  autrement dit, s'il existe un réel M tel que $\forall x \in A,\ f(x) \leqslant M$
- f **est minorée sur** A si et seulement si $f(A)$ est minorée,
  autrement dit, s'il existe un réel m tel que $\forall x \in A,\ m \leqslant f(x)$
- f **est bornée sur** A si et seulement si $f(A)$ est bornée.

2.3 Opérations sur des fonctions monotones

Propriété

Soient A une partie de $\mathbb{R}$, f et g des fonctions de A dans $\mathbb{R}$.

$f \nearrow$	$g \nearrow$	$f+g \nearrow$
$f \nearrow$	$g \nearrow$	$f-g\,?$
$f \nearrow$	$g \searrow$	$f-g \nearrow$
$f \nearrow$	$g \nearrow$	$f.g\,?$
$f \nearrow$ et positive	$g \nearrow$ et positive	$f.g \nearrow$
$f \nearrow$ et positive	$g \nearrow$ et négative	$f.g\,?$
$f \nearrow$ et positive	$g \searrow$ et négative	$f.g \searrow$
$f \nearrow$	$g \nearrow$	$f \circ g \nearrow$
$f \nearrow$	$g \searrow$	$f \circ g \searrow$
$f \searrow$	$g \nearrow$	$f \circ g \searrow$
$f \searrow$	$g \searrow$	$f \circ g \nearrow$

Démonstrations

Pour les sommes et produits de fonctions, il suffit d'appliquer la définition d'une fonction croissante ou décroissante et d'utiliser les propriétés des encadrements.
Exemple : supposons $f \nearrow$ et positive et $g \searrow$ et négative.
Soient x et y dans A tels que $x \leqslant y$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant f(y)$ et $g(y) \leqslant g(x) \leqslant 0$. On en déduit $0 \leqslant -g(x) \leqslant -g(y)$ et donc $0 \leqslant -f(x)g(x) \leqslant -f(y)g(y)$ c'est-à-dire $f(y)g(y) \leqslant f(x)g(x)$. On en conclut que $f.g \searrow$.

Pour les composées de fonctions, il faut utiliser que les images sont dans le même ordre que leurs antécédents pour une fonction croissante, dans l'ordre contraire pour une fonction décroissante.

3 Comparaison de fonctions

3.1 Définition

Dans ce paragraphe, a est un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition

Soient f et g des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Si f et g vérifient $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, on dit que la fonction f est **négligeable** devant la fonction g au voisinage de a ou encore que $f(x)$ est **négligeable** devant $g(x)$ au voisinage de a.

Transitivité

Soient f, g et h des fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Si f est négligeable devant g au voisinage de a et g est négligeable devant h au voisinage de a alors f est négligeable devant h au voisinage de a.

3.2 Comparaisons des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.

Propriété

1) Soit $\alpha > 0$ réel,
   a) $\ln(x)$ est négligeable devant x^α au voisinage de $+\infty$,
   b) $\ln(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^\alpha}$ au voisinage de 0.
2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$,
   a) $x \mapsto x^\alpha$ est négligeable devant $\exp(x)$ au voisinage de $+\infty$,
   b) $\exp(x)$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^\alpha}$ au voisinage de $-\infty$.

Exemples

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{\ln x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x^2}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{\ln x^2}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{\ln x}, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5}, \quad \lim_{x\to-\infty} x^5 e^x, \quad \lim_{x\to+\infty} x e^{-x^2}.$$

3.3 Comparaisons de fonctions polynomiales.

Dans cette section, on considère deux fonctions polynomiales $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ ($a_n \neq 0$) et $Q(x) = b_m x^m + \ldots + b_0$ ($b_m \neq 0$).

Comparaison au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

1) Si $n < m$, $P(x)$ est négligeable devant $Q(x)$ au voisinage de $+\infty$.
2) Si $n = m$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m}$.

Exemples

Comparaison au voisinage d'une racine

Soit x_0 une racine de P qui n'est pas une racine de Q, $P(x)$ est négligeable devant $Q(x)$ au voisinage de x_0.

Remarque : si x_0 est à la fois une racine de Q et de P, il faut rechercher l'ordre de multiplicité de x_0 dans P et Q, factoriser par $(x - x_0)$ et faire des simplifications.

Exemples