Chapitre II

Ensembles et applications

1 Ensembles

1.1 Relations entre ensembles

Dans cette sous-section, E et F sont des ensembles.

Définition : inclusion

$E \subset F \Leftrightarrow$ (Tout élément de E est un élément de F) $\Leftrightarrow (\forall x \in E, x \in F)$
$E \not\subset F \Leftrightarrow$ (il existe un élément de E qui n'appartient pas à F) $\Leftrightarrow (\exists x \in E, x \notin F)$

Définition : égalité

$E = F \Leftrightarrow (E \subset F \text{ ET } F \subset E)$
$E \neq F \Leftrightarrow (E \not\subset F \text{ OU } F \not\subset E)$

En pratique dans les démonstrations

- Pour montrer que $E \subset F$ on se donne un x quelconque dans E et on prouve qu'il appartient à F.
- Pour montrer que $E \not\subset F$, on cherche un contre exemple c'est à dire un élément particulier de E qui n'appartient pas à F.
- Pour montrer que $E = F$, on montre successivement que $E \subset F$ puis que $F \subset E$.

Definition : Partie

Soit E un ensemble, tout ensemble F inclus dans E est appelé **partie** de E (ou sous-ensemble de E).
L'ensemble des parties de E est généralement noté $\mathcal{P}(E)$.

1.2 Opérations sur les parties d'un ensemble

Dans cette sous-section, A et B sont des parties d'un même ensemble E.

Définitions

Complémentaire de A **dans** E : $\complement_E A = \{x \in E \text{ tel que } x \notin A\}$
Intersection de A **et** B : $A \cap B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ et } x \in B\}$
Réunion de A **et** B : $A \cup B = \{x \in E \text{ tel que } x \in A \text{ ou } x \in B\}$
Produit cartésien de A **et** B : $A \times B = \{(x, y) \text{ tel que } x \in A \text{ et } y \in B\}$

Remarque
Contrairement au complémentaire, à l'intersection et l'inclusion, le résultat de $A \times B$ n'est pas une partie de E mais de $E \times E$.

En pratique dans les démonstrations
- $x \in \complement_E A \iff x \in E$ et $x \notin A$
- $x \in A \cap B \iff x \in A$ et $x \in B$
- $x \in A \cup B \iff x \in A$ ou $x \in B$
- $(x, y) \in A \times B \iff x \in A$ et $y \in B$

Schéma.

Exemple
Soient A, B et C les parties de $\mathbb{R}$ définies par
$A = \{x \in \mathbb{R}/x \geqslant 1 \text{ et } x < 4\}$, $\quad B = \{x \in \mathbb{R}/x < -1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$,

Ecrire ces ensembles comme des opérations sur des intervalles puis déterminer les ensembles $\complement_{\mathbb{R}} A$, $\complement_{\mathbb{R}} B$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \times B$, $B \times A$, $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B)$, $\complement_{\mathbb{R}}(A \cup B)$.
Peut-on simplifier les calculs ?

Associativité et commutativité
- **Associativité** : l'intersection, la réunion et le produit cartésien sont associatifs, i.e. pour toutes parties A, B et C de E :
  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ noté $A \cap B \cap C$
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ noté $A \cup B \cup C$
  $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ noté $A \times B \times C$.
- **Commutativité** : l'intersection et la réunion sont des opérations commutatives, i.e. pour toutes parties A et B de E, $A \cap B = B \cap A$ et $A \cup B = B \cup A$

  NB : le produit cartésien n'est pas commutatif, i.e. en général, $A \times B \neq B \times A$ (voir contre-exemple ci-dessus).

Distributivité
- L'intersection est distributive par rapport à la réunion, i.e.
  pour toutes parties A, B et C de E, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- La réunion est distributive par rapport à l'intersection, i.e.
  pour toutes parties A, B et C de E, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Schéma et démonstration d'une des deux égalités.

Propriétés du complémentaire

Pour toutes parties A et B de E, on a les propriétés :
- $\complement_E(\complement_E A) = A$
- $A \subset B$ équivaut à $\complement_E B \subset \complement_E A$
- $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$ et $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$

Schéma.
Exercice : démontrer ces égalités et équivalences.

2 Applications

Dans cette section, E et F sont des ensembles et f une application de E dans F.

Rappel : **Définition**

f est une **application** de E dans F si et seulement si tout élément x de E est associé à un et un seul élément de F appelé **image** de x et noté $f(x)$.
E est appelé **ensemble de départ** de f et F **ensemble d'arrivée**.
Soit $y \in F$, tout élément x de E qui vérifie $f(x) = y$ est appelé **antécédent** de y.

2.1 Image et image réciproque d'un sous ensemble

Définition

Soit A une partie de E, **l'image de A par f notée** $f(A)$ est l'ensemble des images des éléments de A par f.
$f(A) = \{y \in F / \exists x \in A, f(x) = y\} = \{f(x) / x \in A\}$

Schéma.

Définition

Soit B une partie de F, **l'image réciproque de B par f notée** $f^{-1}(B)$ est l'ensemble des antécédents des éléments de B par f.
$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

Schéma.

Exercice : que vaut $f^{-1}(F)$.

2.2 Application injective, surjective et bijective

Définition : application injective ou injection

f est injective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au plus un antécédent par f dans l'ensemble de départ E.

Schéma.

Propriété caractéristique

f est injective $\Leftrightarrow$ $(\forall (x,x') \in E \times E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$

Définition : application surjective ou surjection

f est surjective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a au moins un antécédent par f dans l'ensemble de départ E.
Autrement dit :
f est surjective $\Leftrightarrow$ $(\forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $f(x) = y)$

Schéma.

Propriété caractéristique

f est surjective $\Leftrightarrow$ $f(E) = F)$.
Autrement dit, f est surjective si et seulement si l'image de l'ensemble de départ est égale à l'ensemble d'arrivée.

Démonstration :
Comme $f(E)$ est une partie de F, $f(E) = F \Leftrightarrow f(E) \supset F$. Il suffit de réécrire cette dernière propriété.

$F \subset f(E) \Leftrightarrow \forall y \in F, y \in f(E) \Leftrightarrow \forall y \in F, \exists x \in E$ tel que $f(x) = y$.

Définition : application bijective ou bijection

f est bijective si et seulement si tout élément de l'ensemble d'arrivée F a exactement un antécédent par f dans l'ensemble de départ E.

Schéma.

Propriété

f est bijective $\Leftrightarrow$ (f injective ET f surjective)

2.3 Bijection réciproque

Définition

Soit f est une bijection de E dans F.
En associant à tout élément de F son antécédent par f dans E, on définit une application bijective de F dans E appelée **bijection réciproque** de f et notée f^{-1}.

Vérification de la définition de f^{-1}.
Une application est bien définie si tout élément de l'ensemble de départ a une et une seule image.
Soit $y \in F$, f est bijective donc y a un et un seul antécédent donc $f^{-1}(y)$ existe et est unique.

Démonstration de f^{-1} bijective.
f^{-1} est **injective**. En effet soient y et y' quelconque dans F vérifiant $f^{-1}(y) = f^{-1}(y')$. D'après la définition de f^{-1}, y et y' ont le même antécédent x par f, donc $y = f(x) = y'$.

f^{-1} est **surjective**. Soit x quelconque dans E, on note y son image par f.
$y \in F$ et y a pour antécédent x par f donc par définition de f^{-1}, $f^{-1}(y) = x$, i.e. x admet au moins pour antécédent y par f^{-1}.

Propriété

Soit $f : E \to F$ une une bijection.
Pour tous $x \in E$ et $y \in F$, $f(x) = y \;\Leftrightarrow\; x = f^{-1}(y)$

Schéma.

Propriété

Soit $f : E \to F$ une une bijection, $f \circ f^{-1} = Id_F$ et $f^{-1} \circ f = Id_E$

Caractérisation d'une bijection

Soit $f : E \to F$ une application.
f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$

2.4 Restrictions d'une application

Définition

Soit $f : E \to F$ une application, $A \subset E$ et $B \subset F$.

On appelle **restriction** de f à l'ensemble de départ A l'application

$$f_{/A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Si $f(E) \subset B$, on peut aussi définir la **restriction** de f à l'ensemble d'arrivée B :

$$f^{/B} : \begin{array}{ccc} E & \to & B \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple
Soit $f : \mathbb{R} \in \mathbb{R}$ qui à tout réel x associe $f(x) = x^2 + 3x + 1$.

1) Montrer que la restriction f à l'ensemble de départ $]-\frac{3}{2},+\infty[$ est injective.
2) Montrer que la restriction f à l'ensemble d'arrivée $]-\frac{5}{4},+\infty[$ est définie et surjective.
3) En déduire que la restriction de f à l'ensemble de départ $]-\frac{3}{2},+\infty[$ et à l'ensemble d'arrivée $]-\frac{5}{4},+\infty[$ est bijective.

Théorème

Soit $f : E \to F$ une application, la restriction de f à l'ensemble d'arrivée $f(E)$ est surjective.

Démonstration.
$f^{/f(E)}$ est bien définie et pour $f^{/f(E)}$, l'image de l'ensemble de départ E est égale à l'ensemble d'arrivée $f(E)$. Il s'agit d'une propriété caractéristique des applications surjective donc $f^{/f(E)}$ est surjective.

3 Ensembles finis

Dans cette sous section, E et F sont des ensembles **finis**.

Rappel : **Définition**

Si E est un ensemble fini, on appelle cardinal de E, noté $\operatorname{card} E$, le nombre d'éléments de E.

3.1 Cardinaux et opérations

Propriétés

- Soit A une partie de E, $\operatorname{card} A \leqslant \operatorname{card} E$ et $\operatorname{card}(\complement_E A) = \operatorname{card} E - \operatorname{card} A$,
  De plus $\operatorname{card} A = \operatorname{card} E \Rightarrow A = E$.
- $\operatorname{card}(E \cup F) = \operatorname{card} E + \operatorname{card} F - \operatorname{card}(E \cap F)$
- $\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card} E \times \operatorname{card} F$

Schémas.

3.2 Cardinaux et applications

Théorème

- $\operatorname{card} E \leqslant \operatorname{card} F$ équivaut à : il existe une injection de E dans F.
- $\operatorname{card} E \geqslant \operatorname{card} F$ équivaut à : il existe une surjection de E dans F.
- $\operatorname{card} E = \operatorname{card} F$ équivaut à : il existe une bijection de E dans F.

Schémas.

Théorème

Soit $f : E \to F$ une application, on a $\mathrm{card}(f(E)) \leqslant \mathrm{card}\, E$.
De plus $\mathrm{card}(f(E)) = \mathrm{card}\, E$ si et seulement si f est injective.

Démonstration
La première partie est une application de la proposition précédente pour l'application surjective $f^{/f(E)}$.

Démontrons la deuxième partie :
$LHS \;\Rightarrow\; RHS$: si f est injective alors $f^{/f(E)}$ est bijective donc $\mathrm{card}(f(E)) = \mathrm{card}\, E$.

$LHS \;\Leftarrow\; RHS$: si $\mathrm{card}(f(E)) = \mathrm{card}\, E$, démontrons par l'absurde que f est injective.

Supposons que f n'est pas injective, il existe un élément $y \in F$ ayant au moins deux antécédents distincts dans E. On note g la restriction de f à l'ensemble de départ $E' = \complement_E\{f^{-1}(y)\}$ et à l'ensemble d'arrivée $F' = \complement_F\{y\}$. D'après le résultat précédent, on a (I) $\mathrm{card}(g(E')) \leqslant \mathrm{card}\, E'$.
Or $\mathrm{card}(\{f^{-1}(y)\}) \geqslant 2$ donc $\mathrm{card}\, E' \leqslant \mathrm{card}\, E - 2$ et $\mathrm{card}(g(E')) = \mathrm{card}(f(E)) - 1$.
On en déduit que (I) $\Rightarrow$ $\mathrm{card}(f(E)) - 1 \leqslant \mathrm{card}\, E - 2$ $\Rightarrow$ $\mathrm{card}(f(E)) < \mathrm{card}\, E$ ce qui est contradictoire avec $\mathrm{card}(f(E)) = \mathrm{card}\, E$.
On en conclut que f est injective.

Théorème

Soit $f : E \to F$ une application :
- Si f est injective et $\mathrm{card}\, E = \mathrm{card}\, F$ alors f est bijective.
- Si f est surjective et $\mathrm{card}\, E = \mathrm{card}\, F$ alors f est bijective.

Démonstrations.
- Si f est injective alors f est bijective de E vers $f(E)$ donc $\mathrm{card}\, E = \mathrm{card}(f(E))$. Si de plus $\mathrm{card}\, E = \mathrm{card}\, F$ alors $\mathrm{card}(f(E)) = \mathrm{card}\, F$. Or $f(E)$ est une partie de F donc $f(E) = F$, c'est-à-dire que f est également surjective.
- Si f est surjective alors $f(E) = F$ donc $\mathrm{card}(f(E)) = \mathrm{card}\, F$. Si de plus $\mathrm{card}\, E = \mathrm{card}\, F$ alors $\mathrm{card}(f(E)) = \mathrm{card}\, E$ ce qui implique que f est également injective (d'après le théorème précédent).

3.3 Dénombrements sur les applications, injections et bijections

Propriété

On note $n = \mathrm{card}\, E$ et $p = \mathrm{card}\, F$.
- Le nombre d'applications de E dans F est égal à p^n.
- Si $\mathrm{card}\, E = n \leqslant \mathrm{card}\, F = p$, le nombre d'injections de E dans F est égale à $A_p^n = \frac{p!}{(p-n)!}$
- Si $\mathrm{card}\, E = \mathrm{card}\, F = n$, le nombre de bijection de E dans F est $n!$.

Démonstrations par récurrence.

3.4 Dénombrements sur les parties

On note $n = \operatorname{card} E$.

Nombre de parties à m éléments

Soit m un entier naturel vérifiant $m \leqslant n$, on note $\binom{n}{m}$ ou C_n^m le nombre de parties de E à m éléments, ce nombre est aussi appelé **coefficient binomial** (cf. formule du binôme de Newton).

Propriété

Soient n et m des entiers naturels tels que $m \leqslant n$, on a :
$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$

Démonstration par dénombrement.

Propriété : Triangle de Pascal

Soient n et m des entiers naturels tels $n > m > 0$, on a la relation de récurrence suivante :

$$\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m} + \binom{n-1}{m-1}$$

Démonstration par dénombrement.

Théorème

Soient n et m des entiers naturels tels que $m \leqslant n$, alors

$$\binom{n}{m} = \mathrm{C}_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Démonstration par récurrence.

Application : formule du binôme de Newton

Soient n un entier naturel, a et b des nombres complexes,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} a^{n-k}\, b^k = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}\, b + \cdots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

Démonstration par récurrence ou par dénombrement.

Nombre de parties

Si E est non vide, le nombre total de parties de E est égal à 2^n, et $\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k} = 2^n$

Démonstration par récurrence ou en appliquant la formule précédente.