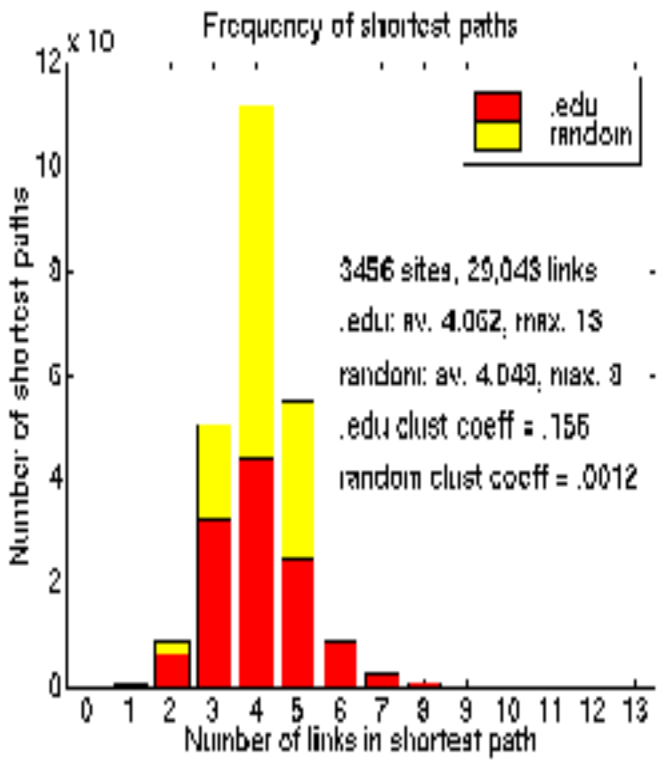
Les réseaux petits mondes

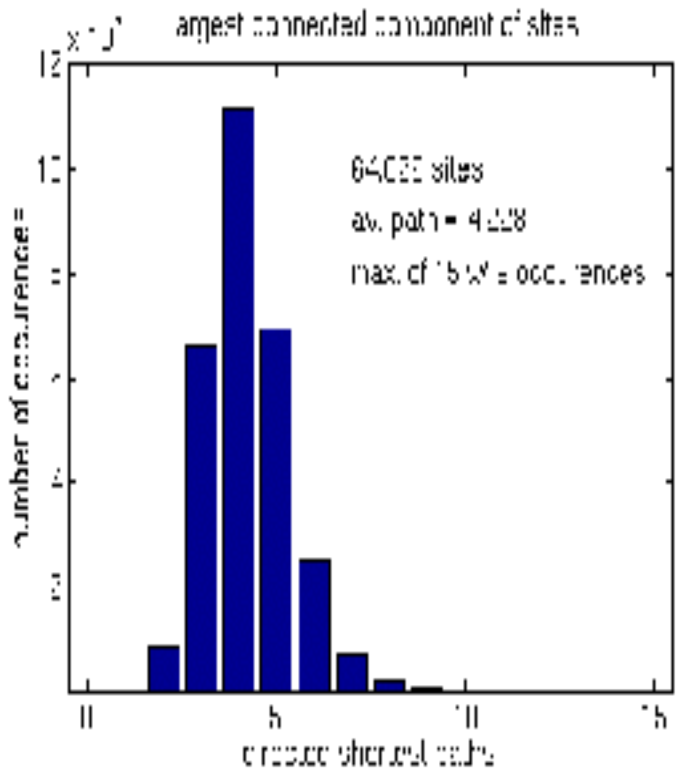
Web…

- Comprendre le réseau (2015)
  - Nombre de pages indexé >= 4,85 .10^{12}
  - Nombres de liens par pages 4,59 (degré)
  - Diamètre et excentricité moyenne (distance au sommet le plus éloigné) (18,59 pour l'excentricité moyenne)

→ Toute page web est (en moyenne) à moins de 9 clics

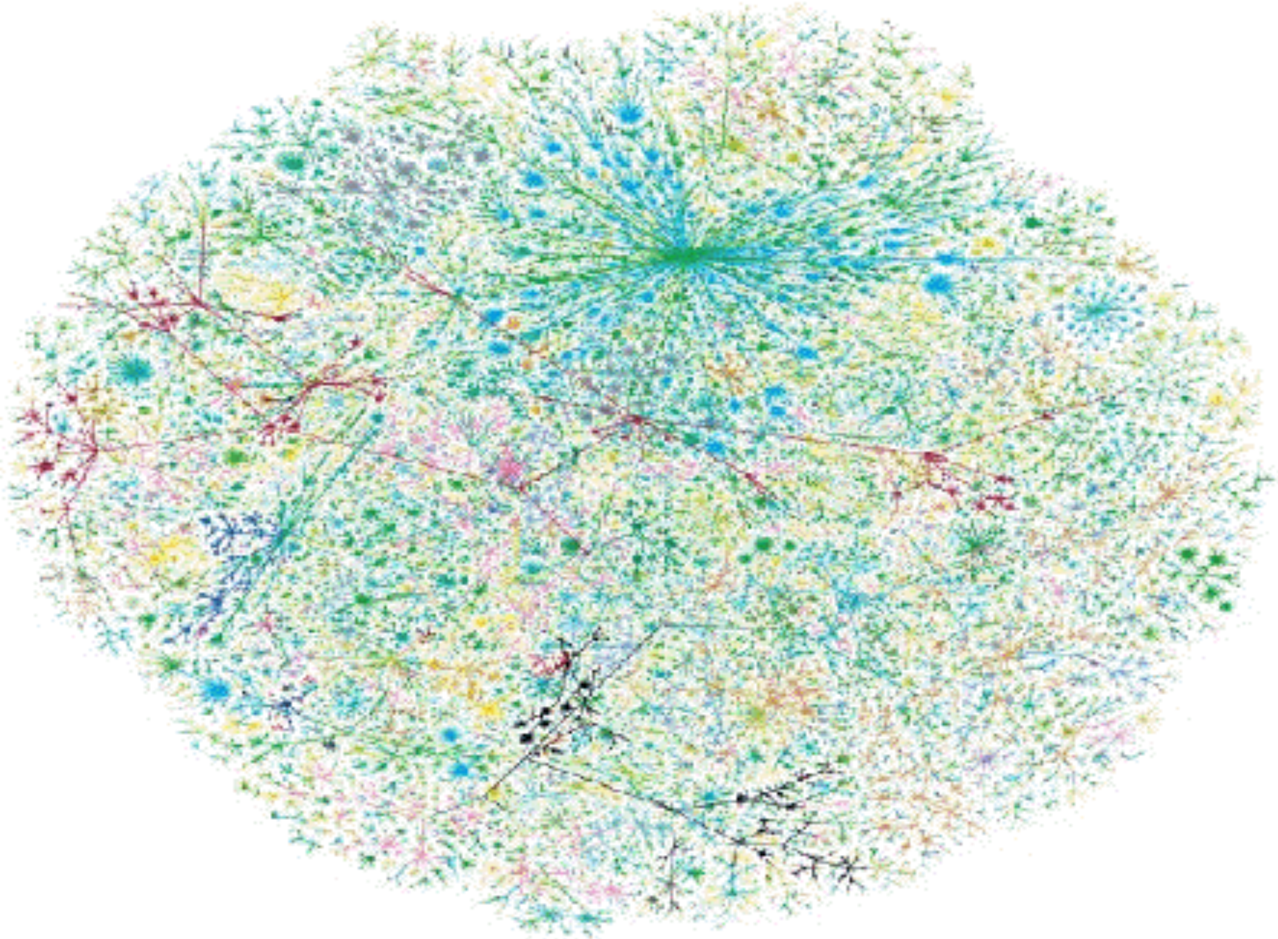
Distribution des distances





Lada A. Adamic. The Small World Web. 2000.

Structure du réseau



Quel est le rapport entre …

- Graphe du Web
- Réseaux sociaux:
  - collaborations scientifiques – Erdös Number;
  - Hollywood graph– Kevin Bacon
  - Facebook (en 2011, sur 721.10^6 personnes, excentricité moyenne 4,74)
- Réseaux pair-à-pair;
- …..

- Petit nombre d'arêtes
- Diamètre et excentricité moyenne très petits
- Distribution des degrés suivant une loi de puissance Prob(degré(u)=d) α d^{-a}

a varie suivant le graphe considéré typiquement entre 2 et 3

- Forte interconnectivité locale

Ce sont tous des graphes petits mondes !

Pas de définition précise *mais* existence de nombreux courts chemins.

Différence de comportement

- Dans un graphe aléatoire uniforme, une proportion minimale de personnes initialement contaminées est nécessaire pour qu'une épidémie contamine tous les individus (seuil épidémique)
- Alors que dans un graphe aléatoire dont la distribution des degrés suit une loi de puissance fixée, ce phénomène de seuil disparaît. Une contamination initiale infime suffit pour toucher tous les individus.

Contexte

- Caractériser ce type de réseaux
  - En partant de données réelles … qui partagent des propriétés structurelles particulières;
  - En proposant de bons « modèles »
- Etudier les conséquences algorithmiques:
  - Requêtes: Routage, recherche information ;
  - Tolérance aux pannes;
  - Diffusion/propagation d'information, d'épidémie ou rumeurs.

  Bons candidats pour des réseaux logiques

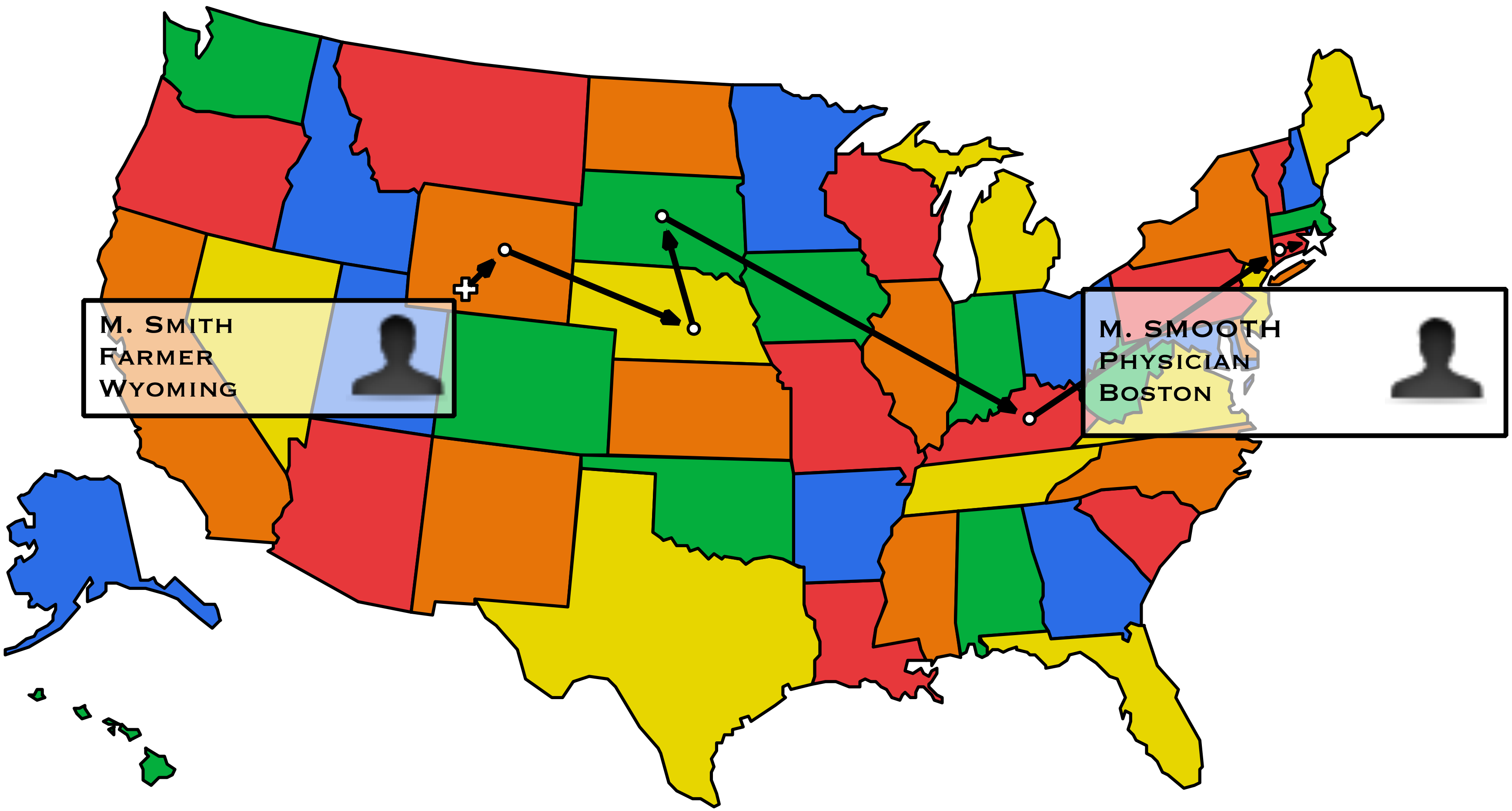
Caractérisation des petits mondes

- Statistiques sur des paramètres de graphes:
  - Petit diamètre: logarithmique par rapport à la taille du graphe
  - Densité locale forte (mes voisins se connaissent);
  - Densité globale faible = degré moyen faible;
  - Distribution des degrés: hétérogène ou homogène;
  - …
- Algorithmique: on peut router facilement et rapidement dans un petit monde (espoir).

Petit monde

- Expérience de Milgram:
  - 60 lettres depuis Omaha (Nebraska) destinées un agent de change à Sharon (Massachssetts)
  - Règle:
    - Transmission en mains propres à des amis (ou amis d'amis)
  - Résultat:
    - (beaucoup de pertes)
    - Les lettres qui sont arrivées à destination ne passent que par 6 intermédiaires (5,2 en moyenne)
    - Notion de petit-monde

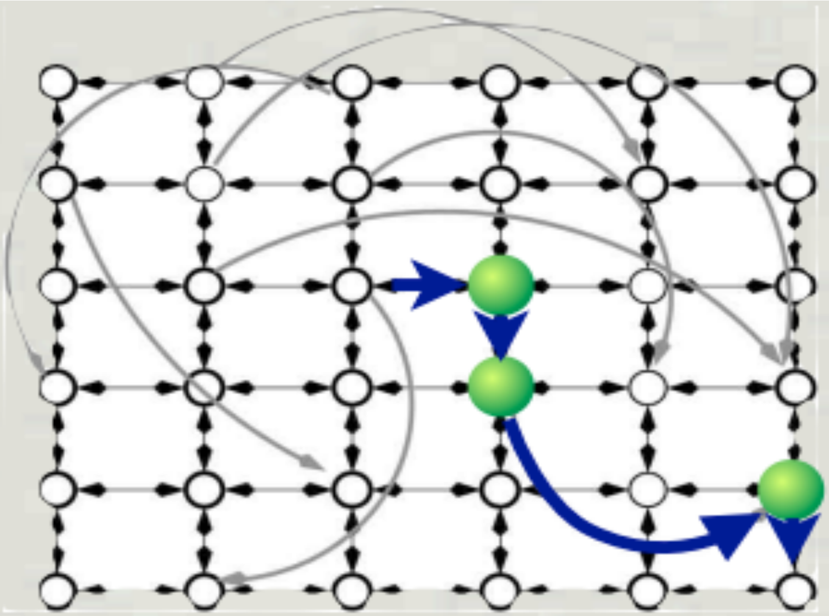
Milgram



Global/local

- Les noeuds ne connaissent pas le plus court chemin d'un point à un autre
- Notion de distance entre les nœuds: « métrique » (géographique + professionnel)
- Le routage se fait avec les informations locales
- Notion de réseau navigable, dans lequel un nœud peut trouver des chemins courts vers un autre nœud en se basant uniquement sur sa vision locale du réseau.

Kleinberg



$$\Pr\{u \rightarrow v\} \propto \frac{1}{d(u,v)^{\alpha}}$$

d dimensionn de la grille

- Le graphe ainsi obtenu a un petit diamètre (information globale)
- Ce graphe n’est navigable que pour d= α
  - Algorithme glouton
- Si d≠ α, tout algorithme **décentralisé** calculera nécessairement des chemins de longueur moyenne polynomiale

Kleinberg

- Algorithme glouton:

Source s cible t

x:=s

Tant que x≠t

Passer le msg au contact y (local ou distant) de x qui minimise |y-t|,

x:=y

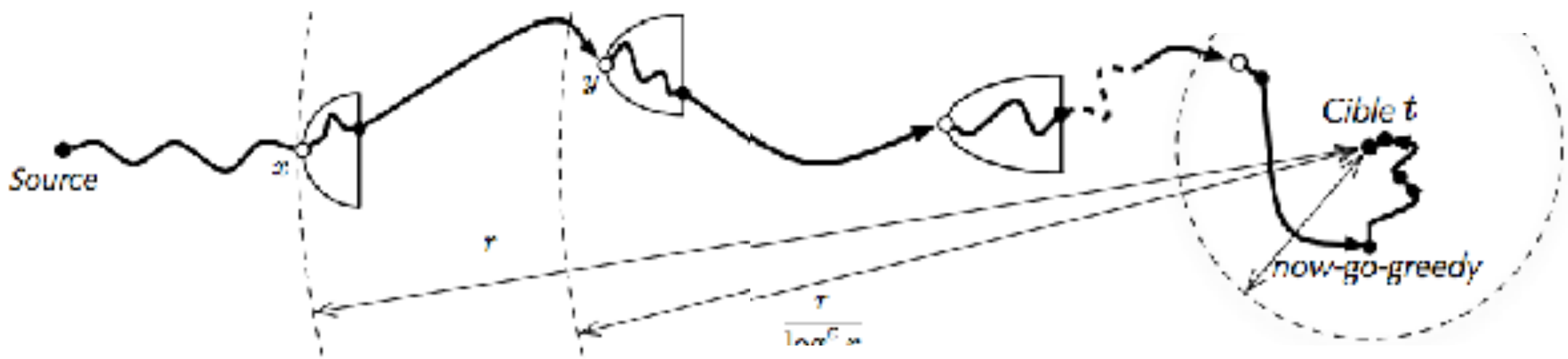
- Le chemin de s à t obtenu est en moyenne de longueur

$$\Theta((\log n)^2/k)$$

Faire mieux?

- Ajouter une phase d'exploration pour trouver le meilleur lien
- On obtient un algorithme *décentralisé* des chemins considérablement plus courts, de longueur quasi-optimale:

$$O(\log n \log \log n)$$



(c) Progression de l'algorithme : diminution de la distance à la cible d'un facteur $\log^\varepsilon r$ avec probabilité constante après chaque phase d'exploration pour $r >$ *now-go-greedy*, puis algorithme glouton pour $r \leqslant$ *now-go-greedy*.

- L’inconvénient majeur du modèle de Kleinberg est son absence d’explication sur les raisons de l’apparition du phénomène des petits mondes

Petit-monde navigable

- Petit-monde navigable: tout graphe peut-il être transformé en petit-monde navigable?
- Petite-mondialisation: augmenter le graphe avec des liens supplémentaires à chaque sommet pour obtenir un petit-monde navigable.
- Pas toujours possible

Perspectives

- Réseau logique:
  - Petit-Mondes: Bons candidats pour la construction décentralisée de réseaux *faiblement structurés* mais efficaces pour les opérations de recherche.
  - Etude de la *congestion, diffusion* dans les réseaux petit-monde.
- Logique / Physique:
  - Comment tenir compte du réseau physique ?
- Dynamisme:
  - garantir des propriétés de petit-monde à moindre coût (proactif, réactif)

Perspectives

- Problèmes pratiques:
  - la *construction* des liens longue-distance est *coûteuse* en ressources (temps et mémoire).
  - Implantation dans un réseau pair-à-pair: nécessite la *construction distribué* des liens longue-distance.