Chapitre IX

Fonctions dérivables

1 Généralités

1.1 Définition

Définition : dérivabilité

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

- f est **dérivable en** x_0 si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie. On note cette limite $f'(x_0)$ et on l'appelle dérivée de f en x_0.
- f **est dérivable sur** I si f est dérivable en tout point $x \in I$. On peut alors définir la fonction dérivée de f sur I :

$$f' : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

Remarque : pour les calculs, il est préférable d'utiliser la formule équivalente :

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Exemple : vérifier la dérivabilité de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^{+*}$. Calculer sa dérivée. Est-elle dérivable en 0 ?

Etude de la dérivabilité en $x_0 \in \mathbb{R}^{+*}$:

Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \dfrac{(x_0 + h) - (x_0)}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \dfrac{h}{h(\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0})} = \dfrac{1}{\sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0}}$.

Or $\lim\limits_{h \to 0} \sqrt{x_0 + h} + \sqrt{x_0} = 2\sqrt{x_0} \neq 0$, donc $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{\sqrt{x_0 + h} - \sqrt{x_0}}{h} = \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Etude de la dérivabilité en 0 : $\sqrt{0+h}$ n'est définie que pour $h \geqslant 0$.
Pour tout $h > 0$, $\dfrac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$, donc $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = +\infty$.

Conclusion : la fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais pas en 0.
Sa dérivée est :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

1.2 Dérivabilité et continuité

Propriété

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Démonstration
Posons

$$\begin{array}{rrcl} \varepsilon : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ 0 & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

Comme f est dérivable en x_0, ε est continue en x_0.
Pour tout $x \in I$, $f(x) - f(x_0) = (f'(x_0) + \varepsilon(x))(x - x_0)$ c.a.d.
$f(x) = f(x_0) + (f'(x_0) + \varepsilon(x))(x - x_0)$.
D'après les théorèmes concernant les opérations sur les fonctions continues, on en conclut que f est continue en x_0.

1.3 Tangente au graphe

Propriété

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
Si f est **dérivable** en x_0 alors le graphe de f **admet une tangente** au point $M(x_0, f(x_0))$ d'équation $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$

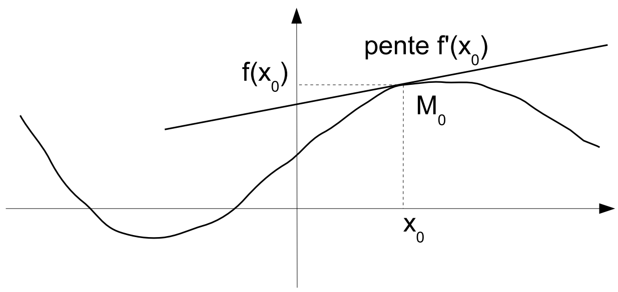

FIGURE IX.1 – Tangente au graphe d'une fonction dérivable

1.4 Dérivée à gauche, à droite

Définition

Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

- f est **dérivable à gauche** en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. On la note alors $f'_g(x_0)$.
- f est **dérivable à droite** en x_0 si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe. On la note alors $f'_d(x_0)$.

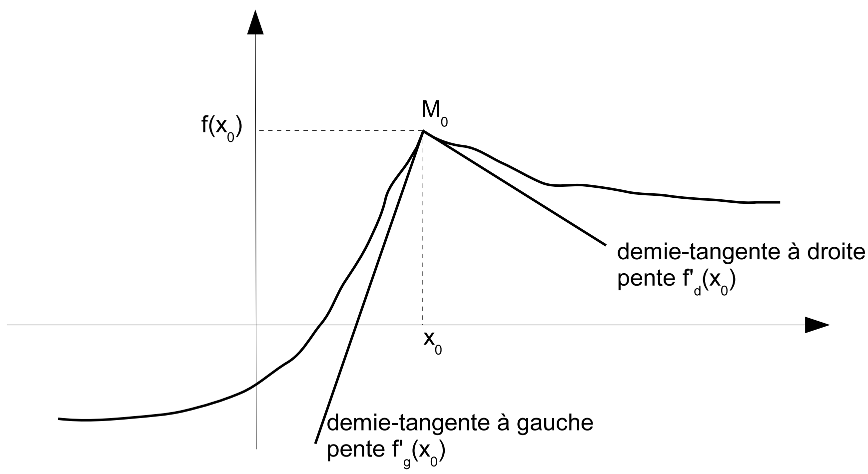

FIGURE IX.2 – Demies tangentes en x_0 où f est dérivable à gauche et à droite

Géométriquement, si f est dérivable à droite en x_0, le graphe de f admet une demie tangente à droite en $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ de pente $f'_d(x_0)$. Si f est dérivable à gauche en x_0, le graphe de f admet une demie tangente à gauche en $M_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ de pente $f'_g(x_0)$.

1.5 Opérations

Propriétés
Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f et g des applications de I dans $\mathbb{R}$.

f dérivable sur I	g dérivable sur I	$f+g$ dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
f dérivable sur I	g dérivable sur I	$f.g$ dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(f.g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
f dérivable sur I	$\lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda.f$ dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(\lambda.f)'(x) = \lambda.f'(x)$
f dérivable en x_0	et $f(x_0) \neq 0$	$\frac{1}{f}$ dérivable en x_0 et $\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = \frac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$
f dérivable sur I	g dérivable sur I et $\forall x \in I,\ g(x) \neq 0$	$\frac{f}{g}$ dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
f dérivable sur I	g dérivable sur $f(I)$	$g \circ f$ dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $(g \circ f)'(x) = f'(x).(g'\big(f(x)\big)$

Démonstration pour la dérivabilité de $\frac{1}{f}$ en x_0 :
$f(x_0) \neq 0$ et f est continue en x_0 car dérivable en x_0, donc il existe un intervalle ouvert I centré sur x_0 tel que f ne s'annule pas sur I.

Pour tout $x \in I - \{x_0\}$, $\dfrac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0} = \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} \; \dfrac{1}{f(x)\ f(x_0)}$.

La continuité de f en x_0 implique $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x).f(x_0)} = \dfrac{1}{\big(f(x_0)\big)^2}$.

La dérivabilité de f en x_0 implique $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0) - f(x)}{x - x_0} = -f'(x_0)$.

On en conclut que $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \dfrac{\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{f(x_0)}}{x - x_0}$ existe et vaut $\dfrac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$,

c.à.d. que $\big(\frac{1}{f}\big)'(x_0) = \dfrac{-f'(x_0)}{f^2(x_0)}$.

2 Théorème des accroissements finis et applications

2.1 Dérivée et extremum local

Lemme

Soient I un intervalle **ouvert** de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.
Si f a un **extremum** en $x_0 \in I$ et si f est **dérivable** en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration

FIGURE IX.3 – Extremum en x_0 où f est dérivable (à gauche) ou non dérivable (à droite)

2.2 Théorème de Rolle

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b$) une application **continue sur** $[a, b]$ **et dérivable sur** $]a, b[$.
Si $f(a) = f(b) = 0$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration

2.3 Théorème des accroissements finis

Théorème

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b$) une application **continue sur** $[a, b]$ **et dérivable sur** $]a, b[$, il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b - a)$.

Démonstration

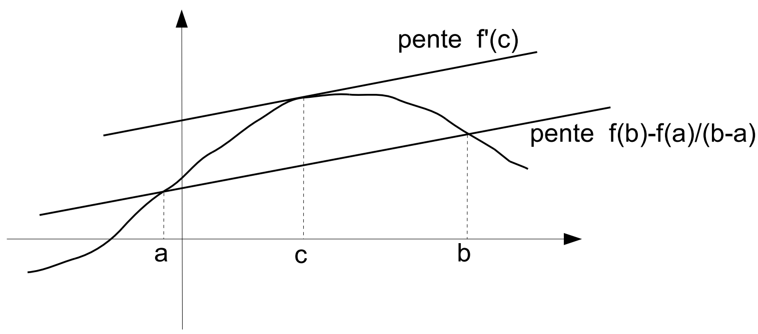

FIGURE IX.4 – Illustration du théorème des accroissements finis

2.4 Inégalité des accroissements finis

Théorème

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (avec $a < b$) une application **continue sur** $[a,b]$ **et dérivable sur** $]a,b[$.
Si $|f'|$ est majorée sur $]a,b[$ par un réel M, c'est à dire que $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in]a,b[$, alors $|f(b) - f(a)| \leqslant M\,|b-a|$.

Démonstration : d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$.

Or $|f'(c)| \leqslant M$, donc $|f(b) - f(a)| = |f'(c)|\,|b-a| \leqslant M|b-a|$

2.5 Application au sens de variation d'une fonction

On appelle **intérieur de** I, l'intervalle ouvert de même borne que I.
Par exemple, l'intérieur des intervalles $[a,b]$, $]a,b]$, $[a,b[$ et $]a,b[$ est $]a,b[$, l'intérieur des intervalles $[a,+\infty[$ et $]a,+\infty[$ est $]a,+\infty[$.

Théorème

Soient I **un intervalle** de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application **continue sur** I **et dérivable à l'intérieur de** I.
1) f est **constante** sur I si et seulement si pour tout x à l'intérieur de I, $f'(x) = 0$.
2) f est **croissante** sur I si et seulement si pour tout x à l'intérieur de I, $f'(x) \geqslant 0$.
3) f est **décroissante** sur I si et seulement si pour tout x à l'intérieur de I, $f'(x) \leqslant 0$.
4) Si $f'(x) > 0$ pour tout x à l'intérieur de I alors f est **strictement croissante** sur I.

Démonstration du 2)

- $LHS \Rightarrow RHS$: si f est croissante, pour tout x_0 à l'intérieur de I et tout $x \in I$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$. Comme f est dérivable en x_0, on en déduit par passage à la limite que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$, autrement dit $f'(x_0) \geqslant 0$.
- $RHS \Rightarrow LHS$: on suppose $f'(x) \geqslant 0$ pour tout x à l'intérieur de I.
  Soient x et y quelconques dans I tels que $x < y$, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $z \in]x,y[$ tel que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z)$.
  z est à l'intérieur de I donc $f'(z) \geqslant 0$. On en déduit que $\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} \geqslant 0$.
  Comme on a fait le raisonnement pour tous x et y dans I tels que $x < y$, on en déduit que f est croissante.

3 Dérivée d'une application réciproque

Théorème

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application **bijective** de I sur $J = f(I)$, f admet une réciproque $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$.
Si f est **dérivable** en x_0 **et si** $f'(x_0) \neq 0$ alors f^{-1} est **dérivable** en $y_0 = f(x_0)$ et

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Démonstration

Géométriquement, la courbe de f^{-1} est la symétrique de la courbe de f par rapport à l'axe $y = x$. Si le graphe de f admet une tangente au point $M(x_0, f(x_0))$, le graphe de f^{-1} admet une tangente de pente $\dfrac{1}{f'(x_0)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ au point $M'(y_0, f^{-1}(y_0))$ avec $y_0 = f(x_0)$ et $f^{-1}(y_0) = x_0$. De plus, ou bien les pentes des deux tangentes valent 1 et elles sont parallèles, ou bien les deux tangentes sont sécantes sur l'axe $y = x$.

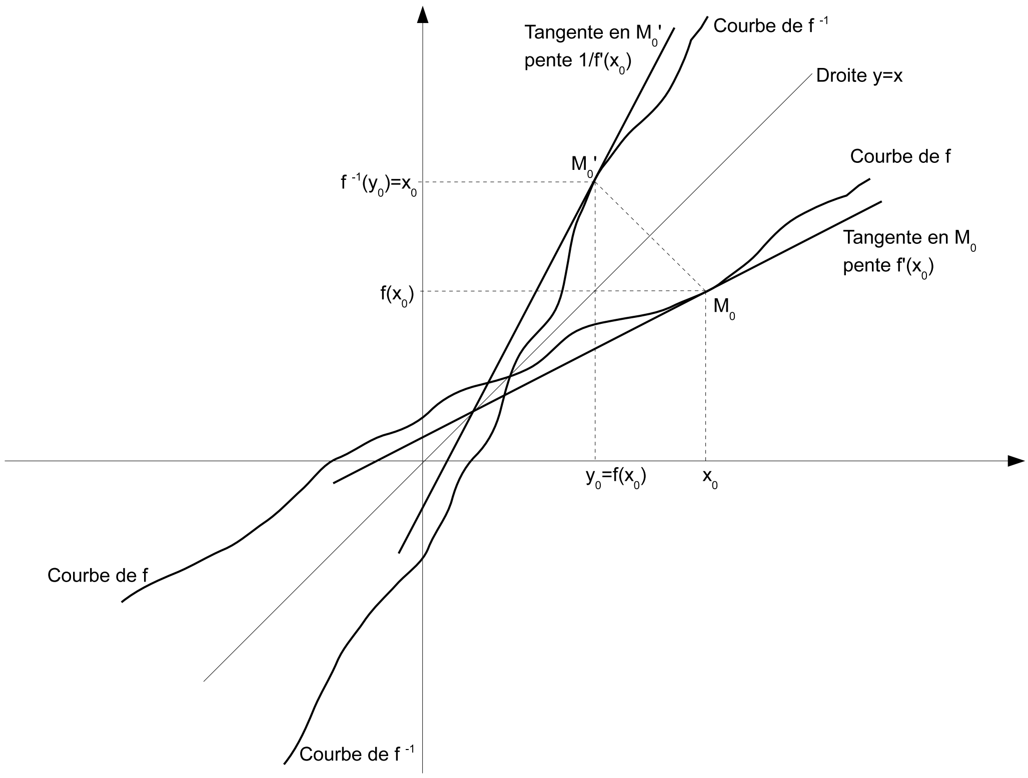

FIGURE IX.5 – Tangente au graphe de la réciproque d'une fonction dérivable

3.1 Etude de la fonction Arc sinus

Propriété : réciproque d'une fonction impaire

La réciproque d'une fonction impaire est impaire.

La fonction sinus est impaire, continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

D'après le théorème de la bijection, $\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1$ et la restriction de la fonction sinus à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ admet une réciproque appelée **Arc sinus, notée** arcsin**, définie sur** $[-1, 1]$.

Propriété

La fonction arcsin : $[-1,1] \to \mathbb{R}$ est impaire, continue et strictement croissante.

La fonction sinus est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée ne s'annule qu'en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ donc :

Propriété

La fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et admet en -1 et 1 des tangentes verticales.

Pour tout $b \in]-1,1[$, on note $a = \arcsin(b)$ et on a $\arcsin'(b) = \dfrac{1}{\sin'(\arcsin(b))} = \dfrac{1}{\cos(a)}$.

$a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(a) \geqslant 0$. Comme $\cos^2(a) = 1 - \sin^2(a) = 1 - b^2$, il suit que $\cos(a) = \sqrt{1-b^2}$.

Finalement $\arcsin'(b) = \dfrac{1}{\sqrt{1-b^2}}$.

Propriété

Pour tout $x \in \ ]-1,1[$, $\quad \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.2 Etude de la fonction Arc cosinus

La fonction cosinus continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$.

D'après le théorème de la bijection, $\cos([0,\pi]) = [\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$ et la restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ admet une réciproque appelée **Arc cosinus, notée** arccos**, définie sur** $[-1, 1]$.

Propriété

La fonction arccos : $[-1,1] \to \mathbb{R}$ est continue et strictement décroissante.

La fonction cosinus est dérivable sur $[0, \pi]$ et sa dérivée ne s'annule qu'en 0 et π donc :

Propriété

La fonction arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et admet en -1 et 1 des tangentes verticales.

Propriété

Pour tout $x \in \ [-1,1]$, $\quad \arcsin(x) + \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

En effet, notons $a = \arcsin(x)$, alors $a \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\dfrac{\pi}{2} - a \in [0, \pi]$.
De plus $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ donc $\arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} - a$ (CQFD).
On déduit de cette égalité deux propriétés :
Propriété

Pour tout $x \in]-1,1[$, $\quad \arccos'(x) = -\arcsin'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Propriété

Les graphes des fonctions Arc sin et Arc cosinus sont symétriques par rapport à l'axe $y = \frac{\pi}{4}$.

3.3 Etude de la fonction Arc tangente

La fonction tangente continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$..

D'après le théorème de la bijection, $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left]\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}} \tan(x), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \tan(x)\right[= \mathbb{R}$ et la restriction de la fonction tangente à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ admet une réciproque appelée **Arc tangente, notée** arctan**, définie sur** $\mathbb{R}$.

Propriété

La fonction arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est impaire, continue, strictement croissante, et $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan(x) = \dfrac{\pi}{2}$

La fonction tangente est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée ne s'annule pas donc : **Propriété**

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $b \in \mathbb{R}$, on note $a = \arctan(b)$ et on a $\arctan'(b) = \dfrac{1}{\tan'(\arctan(b))} = \dfrac{1}{\tan'(a)}$.

Or $\tan'(a) = 1 + \tan^2(a) = 1 + b^2$ donc $\arctan'(b) = \dfrac{1}{1+b^2}$.

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.