On the Power of Color Refinement

V. Arvind, Johannes Köbler, Gaurav Rattan und
Oleg Verbitsky

Florian Lüdiger

05.02.2018

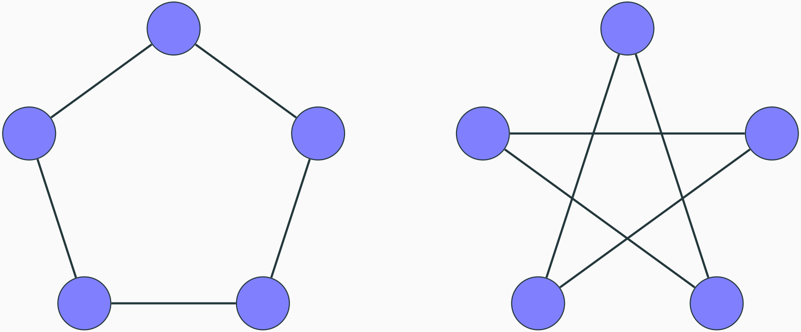
Seminar Algorithm Engineering - Lehrstuhl 11 - TU Dortmund

Wiederholung: Graph-Isomorphie und Color-Refinement

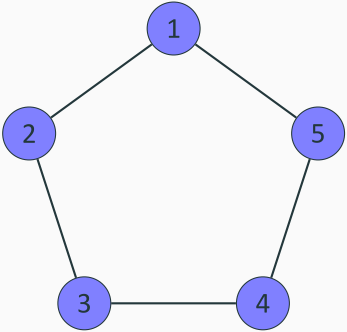
Definition

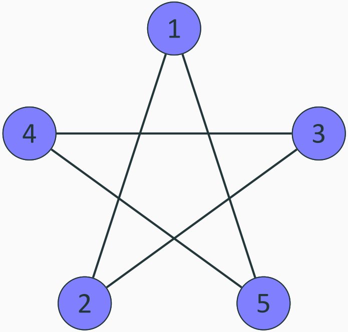
Zwei Graphen G und H sind **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung ϕ gibt, sodass gilt:
$(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E_H$ für alle $u, v \in V_G$.

Beispiel



Beispiel





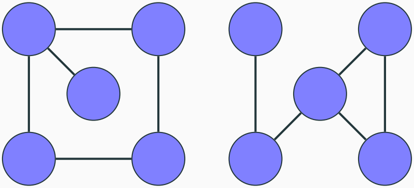
Definition

Mit der Color-Refinement-Heuristik kann in polynomieller Zeit festgestellt werden, dass zwei Graphen **nicht isomorph** sind.

Anders gesagt gilt für beliebige Graphen G,H:

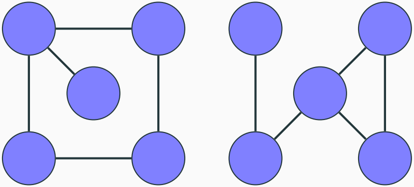
1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$

Beispiel

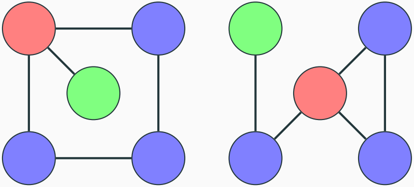
1) 

Beispiel

1)

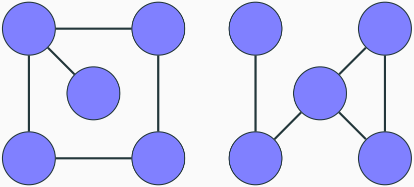


2)

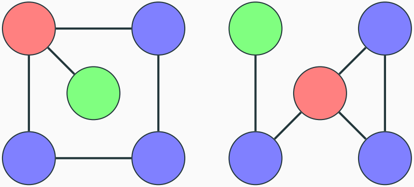


Beispiel

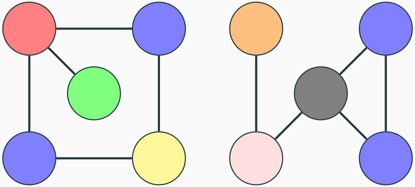
1)



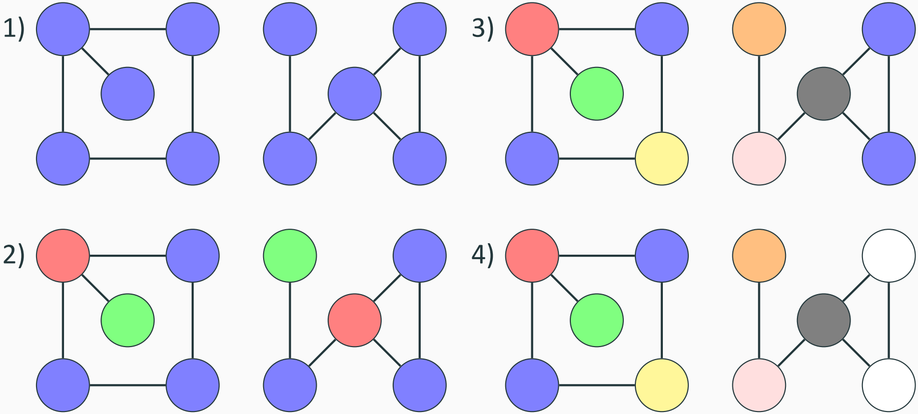
2)



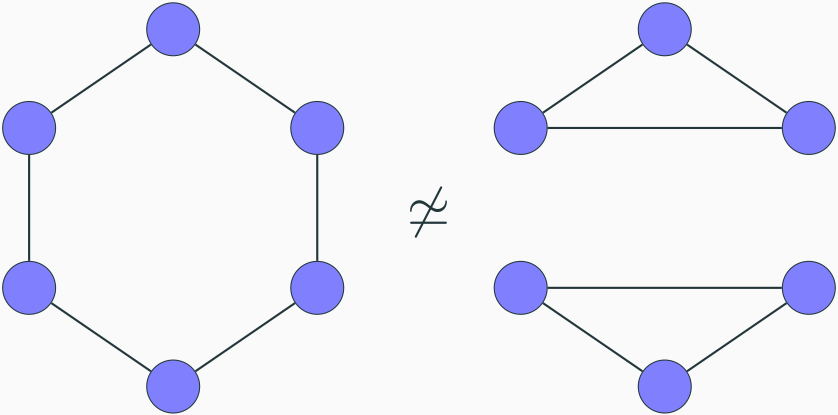
3)



Beispiel



Es gibt nicht-isomorphe Graphenpaare, welche das Color-Refinement nicht unterscheiden kann.



Was gibt es neues?

Definition

Graph G ist **CR-Graph**, wenn das Color-Refinement diesen von jedem nicht zu G isomorphen Graphen H unterscheiden kann.

Für beliebige CR-Graphen G,H gilt also:

2 $G \not\cong H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

1. CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
2. $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

Korollar

Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

1. CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
2. $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

Korollar

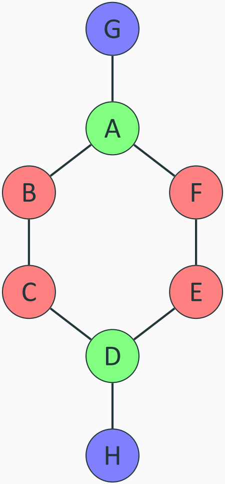
Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

Wie identifiziere ich also die Klasse der CR-Graphen?

Begriffserklärungen und Anwendungsbeispiel

Anwendungsbeispiel



Definition

Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** $\mathcal{P}^s$ genannt.

Definition

Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

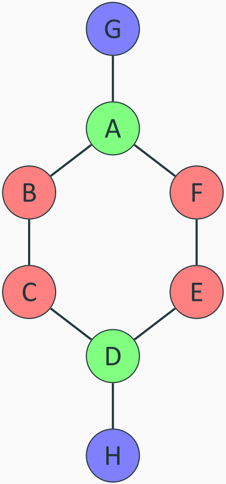
Definition

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** $\mathcal{P}^s$ genannt.

Definition

Die einzelnen Partitionen innerhalb der Partitionierung werden **Zellen** genannt.

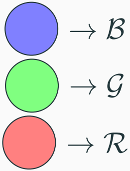
Anwendung auf das Beispiel



„Partitionierung"

„stabile Partitionierung"

„Zellen"



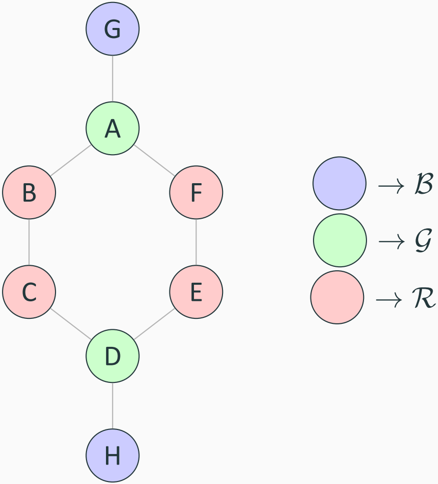
Lokale Struktur

Lemma

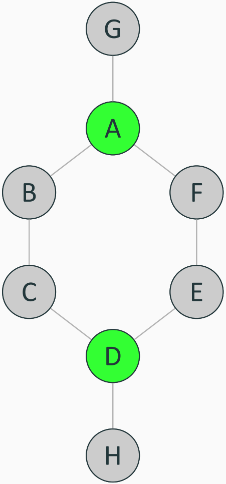
Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

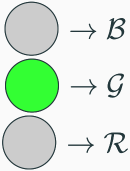
(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.

Am Beispiel

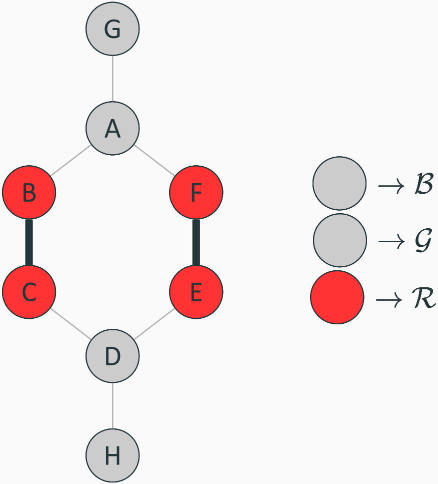


Am Beispiel - Leerer Graph





Am Beispiel - Matching-Graph



Lemma

Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

(A) *Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*

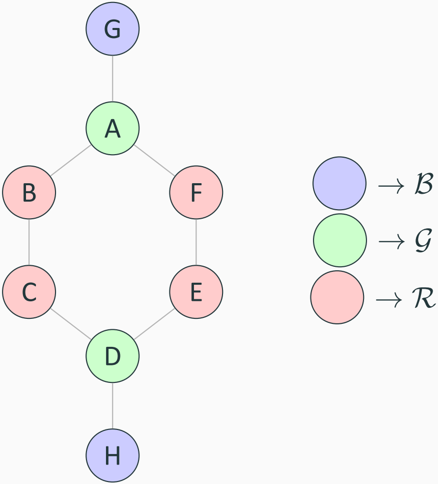
Lemma

Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.

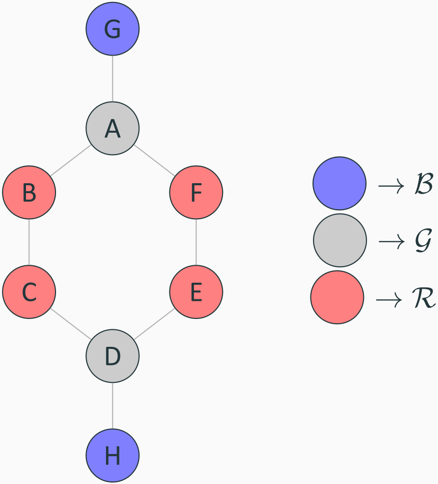
(B) Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der X die Menge der s inneren Knoten und Y die Menge der st Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.

Am Beispiel

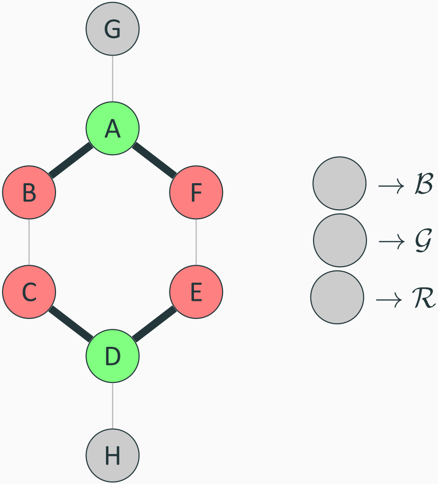


G
A
B
F
C
E
D
H
$\rightarrow \mathcal{B}$
$\rightarrow \mathcal{G}$
$\rightarrow \mathcal{R}$

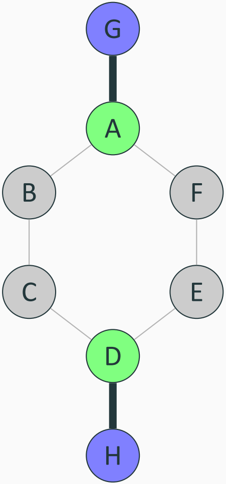
Am Beispiel - Leerer Graph

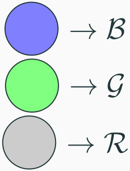


Am Beispiel - Disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$



Am Beispiel - Matching Graph*





Lemma

Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.

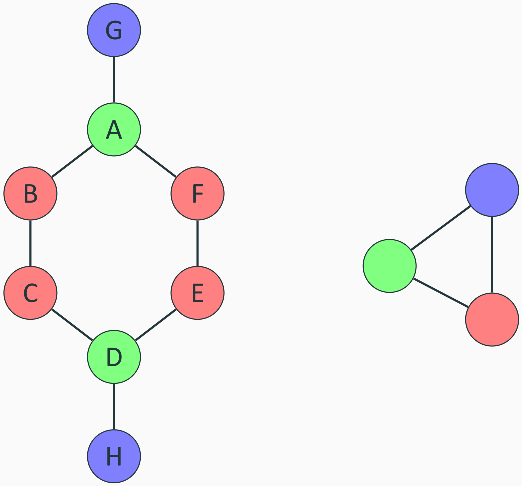
(B) Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der X die Menge der s inneren Knoten und Y die Menge der st Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.

Globale Struktur

Definition

Der Zellgraph $C(G)$ eines Graphen G wird aus dessen stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ gebildet. Es handelt sich dabei um einen vollständigen Graphen, bei dem die Knoten die Zellen von $\mathcal{P}_G$ darstellen.

Zellgraph - Beispiel



Definition

Eine Zelle $X \in C(G)$ wird **homogen** genannt, wenn der Graph $G[X]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **heterogen** genannt.

Eigenschaften von Zellgraphen

Definition

Eine Zelle $X \in C(G)$ wird **homogen** genannt, wenn der Graph $G[X]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **heterogen** genannt.

Definition

Eine Kante $\{X, Y\}$ mit $X, Y \in C(G)$ wird **isotrop** genannt, wenn der bipartite Graph $G[X, Y]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **anisotrop** genannt.

Definition

Eine Zelle $X \in C(G)$ wird **homogen** genannt, wenn der Graph $G[X]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **heterogen** genannt.

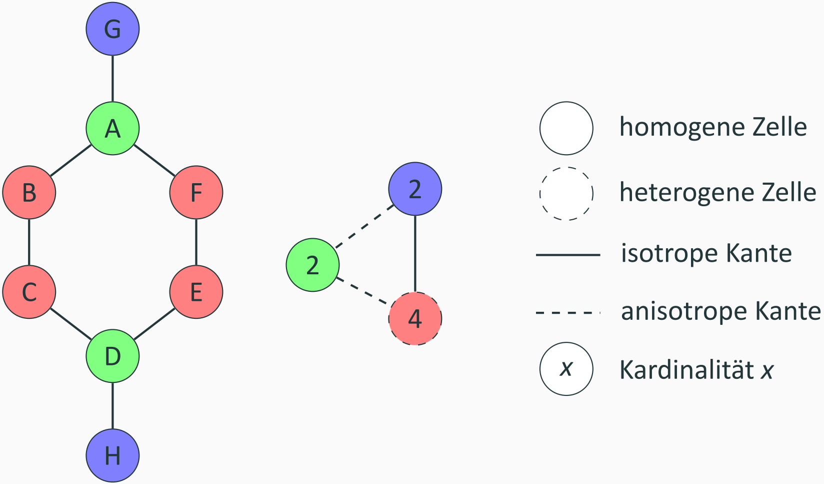
Definition

Eine Kante $\{X, Y\}$ mit $X, Y \in C(G)$ wird **isotrop** genannt, wenn der bipartite Graph $G[X, Y]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **anisotrop** genannt.

Definition

Ein Pfad $X_1 X_2 \ldots X_l$ in $C(G)$, bei der jede Kante anisotrop ist, wird **anisotroper Pfad** genannt. Wenn dieser Pfad einen Kreis schließt wird er als **anisotroper Zyklus** bezeichnet. Gilt für einen anisotropen Pfad $|X_1| = |X_2| = \ldots = |X_l|$, dann wird er **gleichmäßig** genannt.

Eigenschaften von Zellgraphen - Beispiel



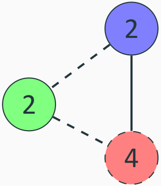
Lemma

Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

(C) $C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.

Allgemeine Globale Eigenschaften von CR-Graphen

$C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.



homogene Zelle

heterogene Zelle

isotrope Kante

anisotrope Kante

x Kardinalität x

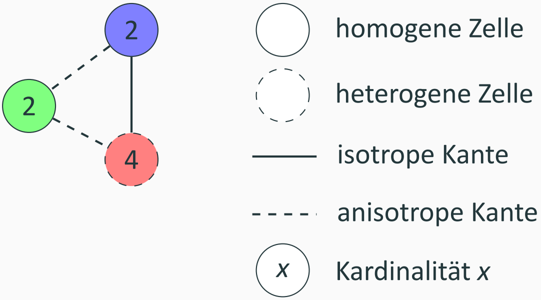
Lemma

Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

(C) $C(G)$ *enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.*

(D) $C(G)$ *enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.*

$C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.



Lemma

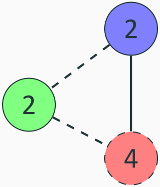
Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

(C) $C(G)$ *enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.*

(D) $C(G)$ *enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.*

(E) $C(G)$ *enthält weder einen anisotropen Pfad* $XY_1Y_2...Y_lZ$*, sodass* $|X| < |Y_1| = |Y_2| = ... = |Y_l| > |Z|$*, noch einen anisotropen Zyklus* $XY_1Y_2...Y_l$*, sodass* $|X| < |Y_1| = |Y_2| = ... = |Y_l|$ *und die Zelle* Y_l *heterogen ist.*

$C(G)$ enthält weder einen anisotropen Pfad $XY_1Y_2\ldots Y_lZ$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \ldots = |Y_l| > |Z|$, noch einen anisotropen Zyklus $XY_1Y_2\ldots Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \ldots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.



homogene Zelle

heterogene Zelle

isotrope Kante

anisotrope Kante

x Kardinalität x

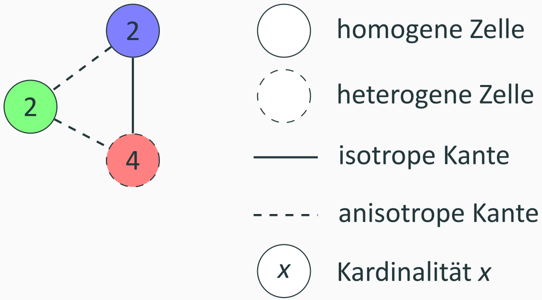
Lemma

Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

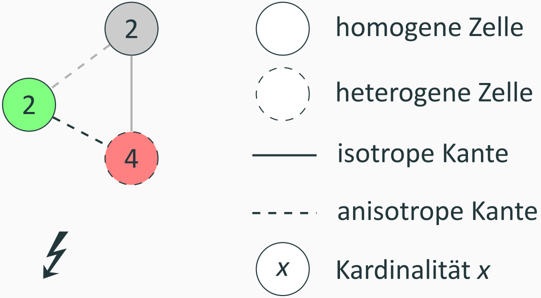
- *(C)* *$C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.*
- *(D)* *$C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.*
- *(E)* *$C(G)$ enthält weder einen anisotropen Pfad $XY_1Y_2...Y_lZ$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = ... = |Y_l| > |Z|$, noch einen anisotropen Zyklus $XY_1Y_2...Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = ... = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.*
- *(F)* *$C(G)$ enthält keinen anisotropen Pfad $XY_1Y_2...Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = ... = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.*

Allgemeine Globale Eigenschaften von CR-Graphen

$C(G)$ enthält keinen anisotropen Pfad $XY_1Y_2 \ldots Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \ldots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.



$C(G)$ enthält keinen anisotropen Pfad $XY_1Y_2 \ldots Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \ldots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.

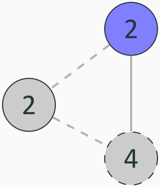


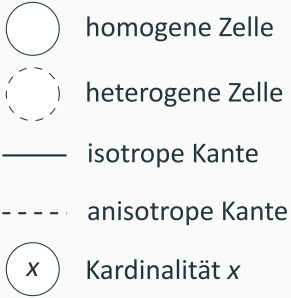
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.

Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.

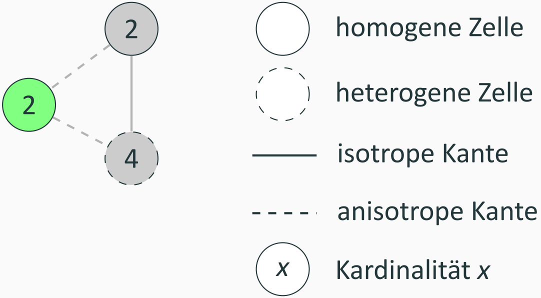




Definition

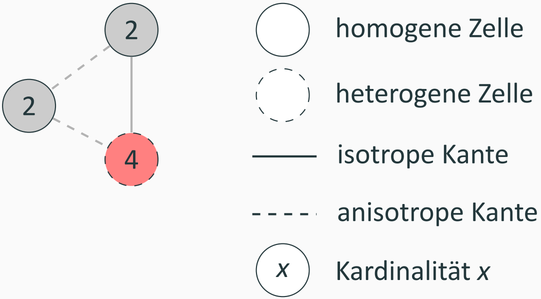
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



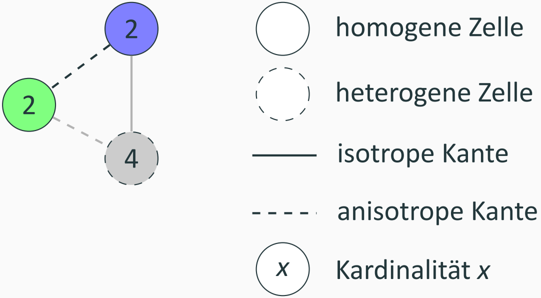
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



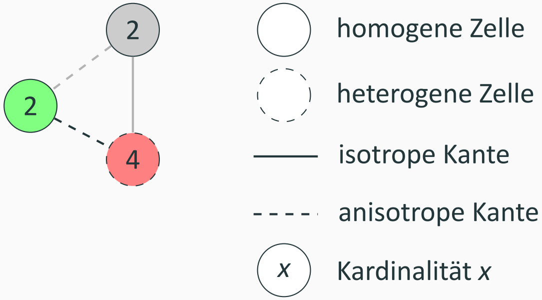
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



Definition

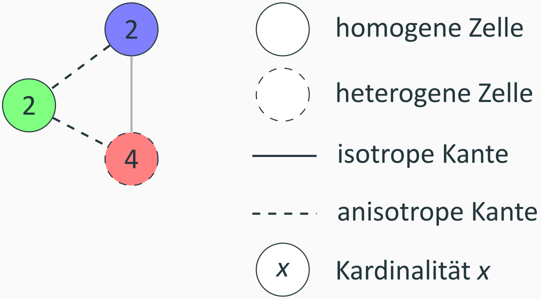
In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



Definition

Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.

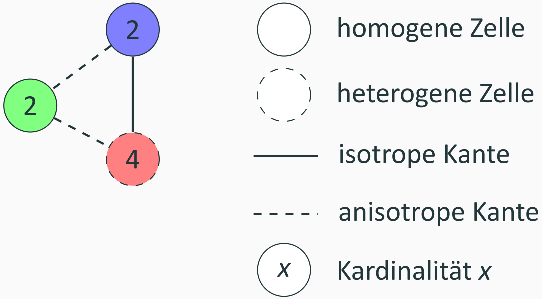


Lemma

*Angenommen ein CR-Graph G erfüllt die Bedingungen **A-F**. Für jede anisotrope Komponente A von $C(G)$ gelten folgende Eigenschaften:*

(G) A ist ein Baum, der folgende Monotonieeigenschaft erfüllt: Sei R eine Zelle aus A mit minimaler Kardinalität, so ist A_R der gerichtete Baum mit Wurzel R; Für jede gerichtete Kante (X, Y) aus A_R gilt dann $|X| \leq |Y|$.

A ist ein Baum, der folgende Monotonieeigenschaft erfüllt: Sei R eine Zelle aus A mit minimaler Kardinalität, so ist A_R der gerichtete Baum mit Wurzel R; Für jede gerichtete Kante (X, Y) aus A_R gilt dann $|X| \leq |Y|$.



Lemma

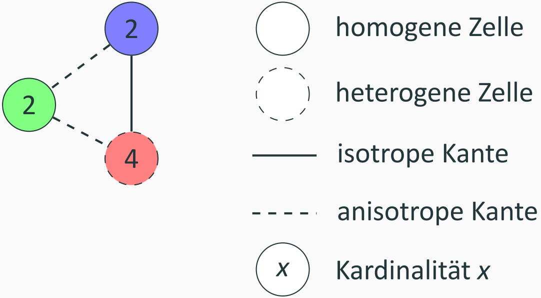
*Angenommen ein CR-Graph G erfüllt die Bedingungen **A-F**. Für jede anisotrope Komponente A von $C(G)$ gelten folgende Eigenschaften:*

(G) A ist ein Baum, der folgende Monotonieeigenschaft erfüllt: Sei R eine Zelle aus A mit minimaler Kardinalität, so ist A_R der gerichtete Baum mit Wurzel R; Für jede gerichtete Kante (X, Y) aus A_R gilt dann $|X| \leq |Y|$.

(H) A enthält maximal eine heterogene Zelle; Wenn eine solche Zelle existiert, hat diese minimale Kardinalität in A.

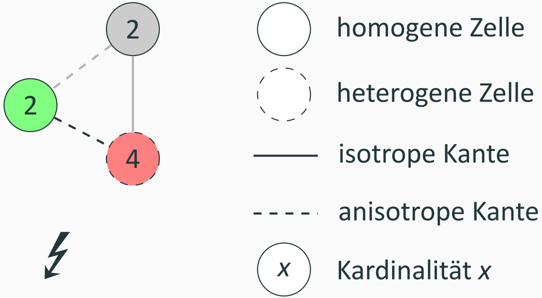
Baumartige Struktur von CR-Graphen

A enthält maximal eine heterogene Zelle; Wenn eine solche Zelle existiert, hat diese minimale Kardinalität in A.



Baumartige Struktur von CR-Graphen

A enthält maximal eine heterogene Zelle; Wenn eine solche Zelle existiert, hat diese minimale Kardinalität in A.



Ergebnis

Anwendung der vorgestellten Bedingungen

Anwendungsbeispiel