

ON THE POWER OF COLOR REFINEMENT

V. ARVIND, JOHANNES KÖBLER, GAURAV RATTAN UND
OLEG VERBITSKY

Florian Lüdiger

05.02.2018

Seminar Algorithm Engineering - Lehrstuhl 11 - TU Dortmund

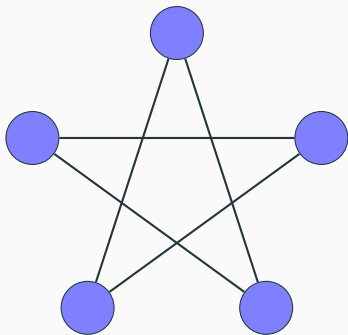
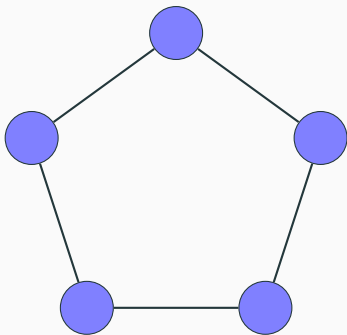
WIEDERHOLUNG: GRAPH-ISOMORPHIE UND COLOR-REFINEMENT

- Beispiel für GI
- Beispiel für CR
- Kernergebnis von CR
- Problem: nicht-isomorphe Graphen können nicht immer unterschieden werden (Beispiel)

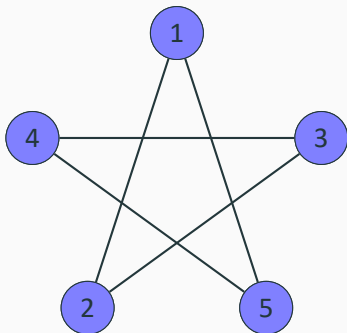
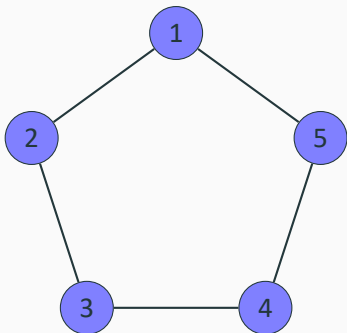
Definition

Zwei Graphen G und H sind isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung ϕ gibt, sodass gilt:

$$(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E_H \text{ für alle } u, v \in V_G.$$



BEISPIEL



Definition

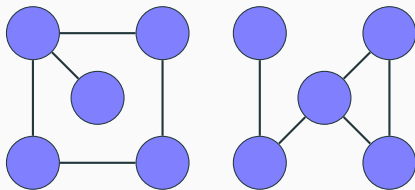
Mit der Color-Refinement-Heuristik kann in polynomieller Zeit festgestellt werden, dass zwei Graphen nicht isomorph sind.

Anders gesagt gilt für beliebige Graphen G, H :

- 1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\cong H$

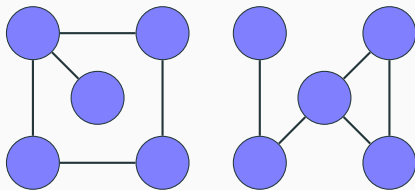
BEISPIEL

1)

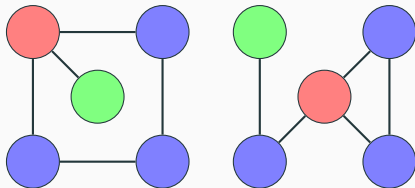


BEISPIEL

1)

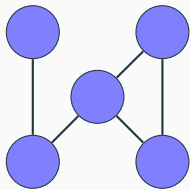
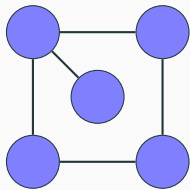


2)

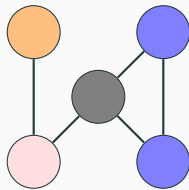
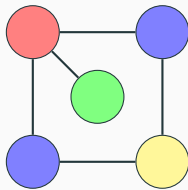


BEISPIEL

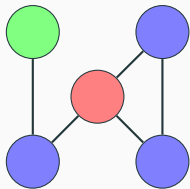
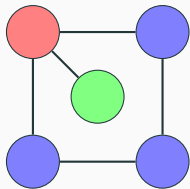
1)

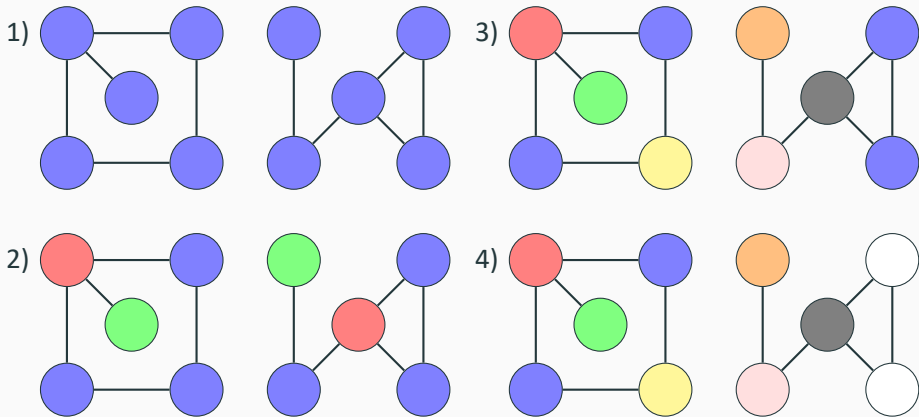


3)



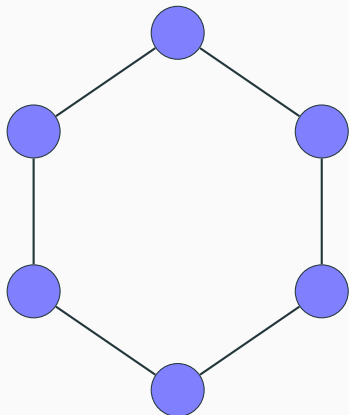
2)



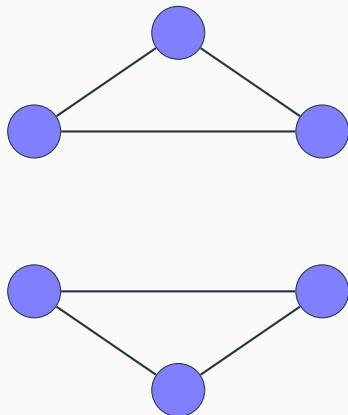


LIMITIERUNG DER HEURISTIK

Es gibt nicht-isomorphe Graphenpaare, welche das Color-Refinement nicht unterscheiden kann.



$\not\cong$



WAS GIBT ES NEUES?

- Definition CR-Graph

Definition

Graph G ist **CR-Graph**, wenn das Color-Refinement diesen von jedem nicht zu G isomorphen Graphen H unterscheiden kann.

Für beliebige CR-Graphen G, H gilt also:

$$\textcircled{2} \quad G \not\cong H \Rightarrow \text{CR unterscheidet } G \text{ und } H$$

- 1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
- 2 $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

Korollar

Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

- 1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
- 2 $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

Korollar

Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

Wie identifiziere ich also die Klasse der CR-Graphen?

LOKALE STRUKTUR

GLOBALE STRUKTUR

ERGEBNIS

- Anwendung der vorgestellten Bedingungen
- Anwendungsbeispiel

BACKUP-FOLIEN

- Beweis lokale Struktur
- Ein Beweis für globale Struktur beispielhaft