# On the Power of Color Refinement

V. Arvind, Johannes Köbler, Gaurav Rattan und
Oleg Verbitsky

Florian Lüdiger

05.02.2018

Seminar Algorithm Engineering - Lehrstuhl 11 - TU Dortmund

# Wiederholung: Graph-Isomorphie und Color-Refinement

Beispiel für GI

Beispiel für CR

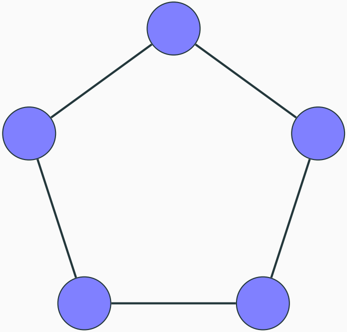
Kernergebnis von CR

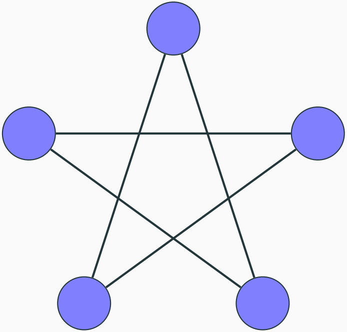
Problem: nicht-isomorphe Graphen können nicht immer unterschieden werden (Beispiel)

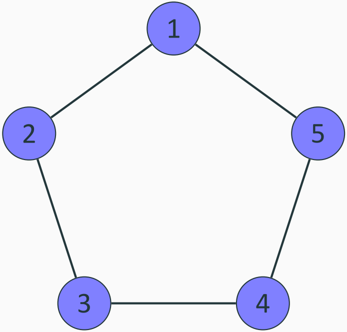
**Definition**

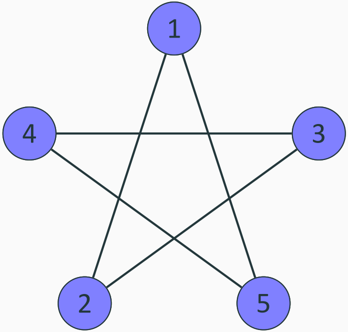
Zwei Graphen $G$ und $H$ sind isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\phi$ gibt, sodass gilt:
$(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E_H$ für alle $u, v \in V_G$.

## Beispiel






1
2
5
3
4


1
4
3
2
5

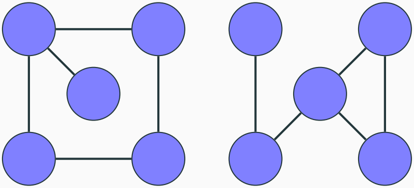
**Definition**

Mit der Color-Refinement-Heuristik kann in polynomieller Zeit festgestellt werden, dass zwei Graphen nicht isomorph sind.

Anders gesagt gilt für beliebige Graphen $G$,$H$:

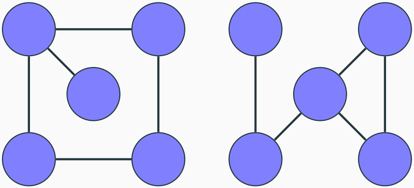
1 CR unterscheidet $G$ und $H \Rightarrow G \not\simeq H$

# Beispiel

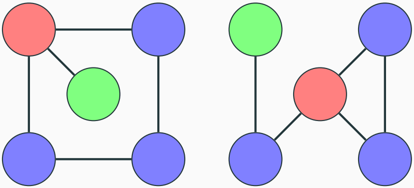
1) 

# Beispiel

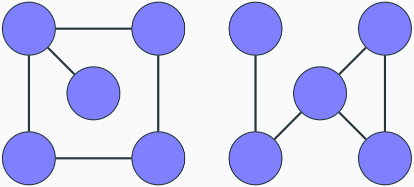
1)

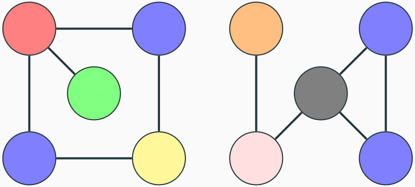


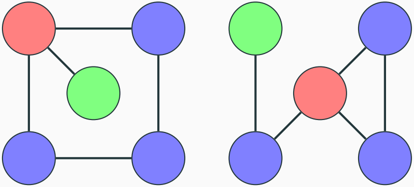
2)



# Beispiel

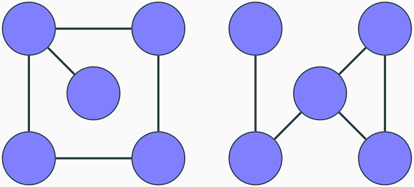
1) 

3) 

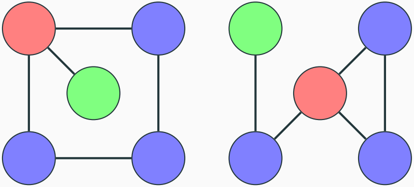
2) 

# Beispiel

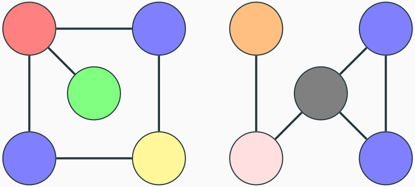
1)



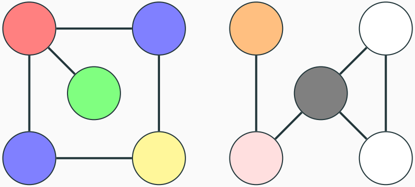
2)



3)

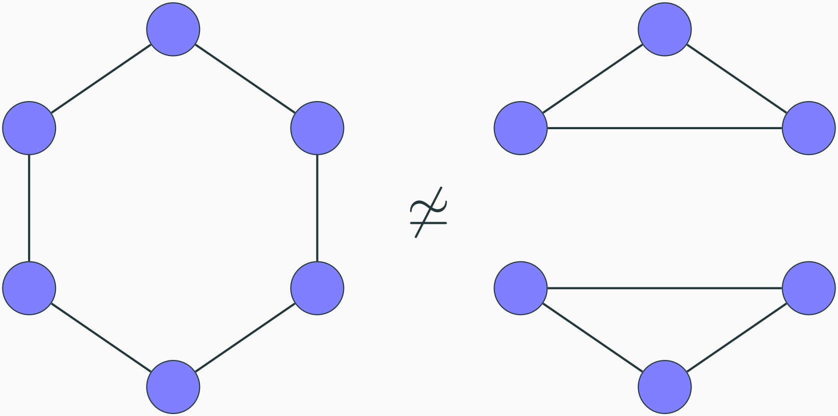


4)



# Limitierung der Heuristik

Es gibt nicht-isomorphe Graphenpaare, welche das Color-Refinement nicht unterscheiden kann.



# Was gibt es neues?

Definition CR-Graph

**Definition**

Graph $G$ ist **CR-Graph**, wenn das Color-Refinement diesen von jedem nicht zu $G$ isomorphen Graphen $H$ unterscheiden kann.

Für beliebige CR-Graphen $G$,$H$ gilt also:

2 $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet $G$ und $H$

1. CR unterscheidet $G$ und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
2. $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet $G$ und $H$

**Korollar**

*Für zwei CR-Graphen G und H gilt:*

*CR erkennt G und H als isomorph* $\Leftrightarrow G \simeq H$

1. CR unterscheidet $G$ und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
2. $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet $G$ und $H$

**Korollar**

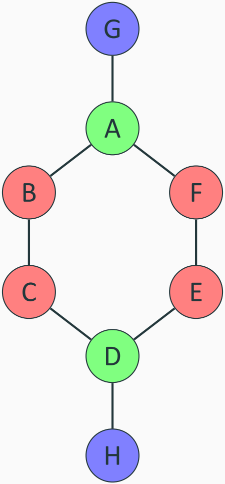
*Für zwei CR-Graphen G und H gilt:*

*CR erkennt G und H als isomorph* $\Leftrightarrow G \simeq H$

*Wie identifiziere ich also die Klasse der CR-Graphen?*

# Begriffserklärungen und Anwendungsbeispiel

# Anwendungsbeispiel



**Definition**

Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen $G$ in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

**Definition**

Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen $G$ in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

**Definition**

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** $\mathcal{P}^s$ genannt.

**Definition**

Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen $G$ in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

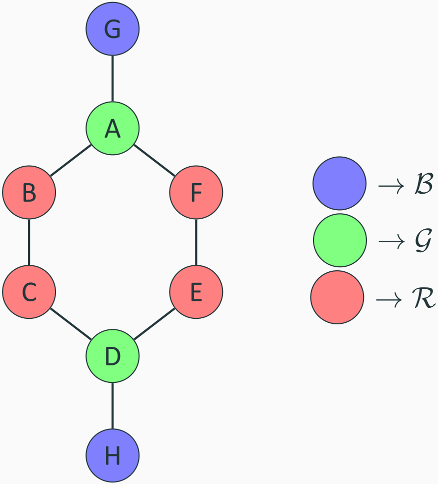
**Definition**

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** $\mathcal{P}^s$ genannt.

**Definition**

Die einzelnen Partitionen innerhalb der Partitionierung werden **Zellen** genannt.

# Anwendung auf das Beispiel



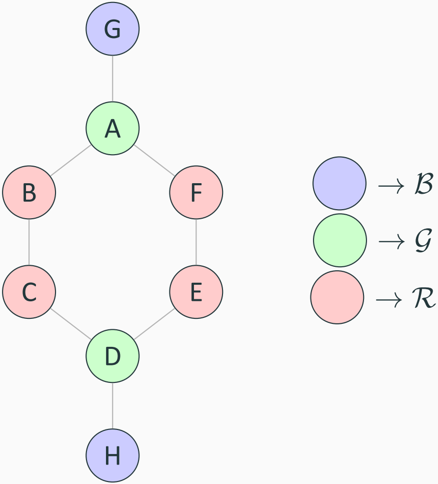
# Lokale Struktur

**Lemma**

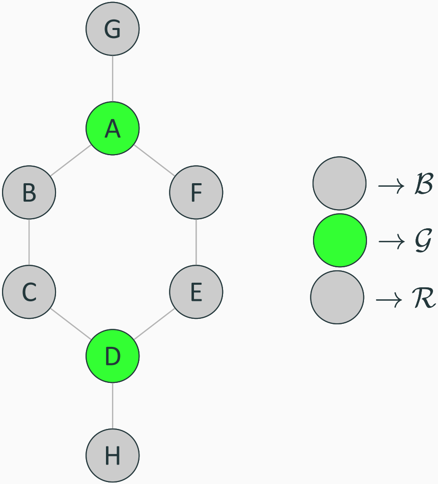
*Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:*

*(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph $mK_2$, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*

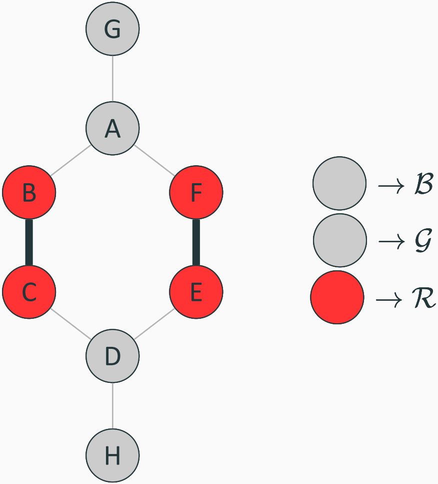
# Am Beispiel


G
A
B
F
C
E
D
H
$\rightarrow \mathcal{B}$
$\rightarrow \mathcal{G}$
$\rightarrow \mathcal{R}$

# Am Beispiel - Leerer Graph



# Am Beispiel - Matching-Graph



**Lemma**

*Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:*

*(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph $mK_2$, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*

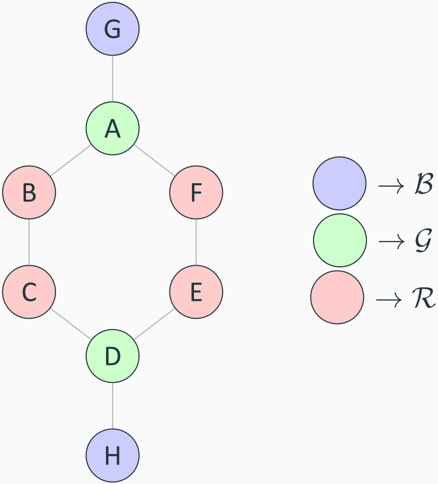
**Lemma**

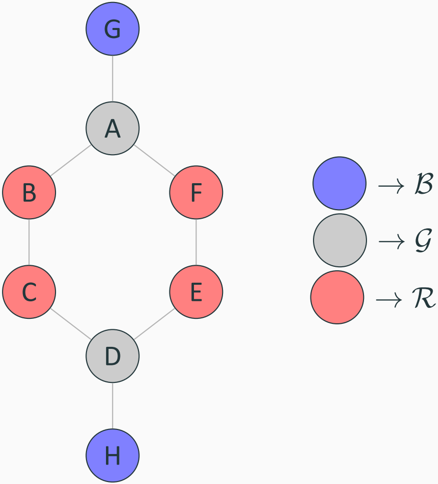
*Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:*

(A) *Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph $mK_2$, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*

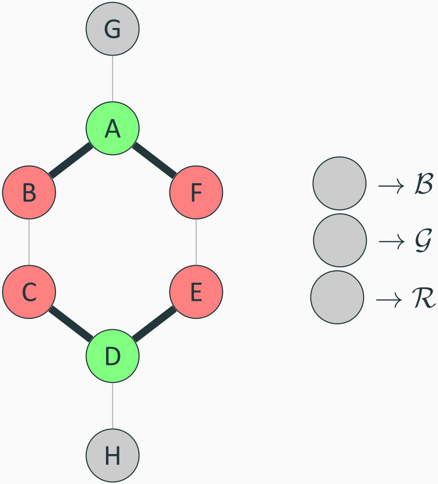
(B) *Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der $X$ die Menge der $s$ inneren Knoten und $Y$ die Menge der $st$ Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.*

# Am Beispiel

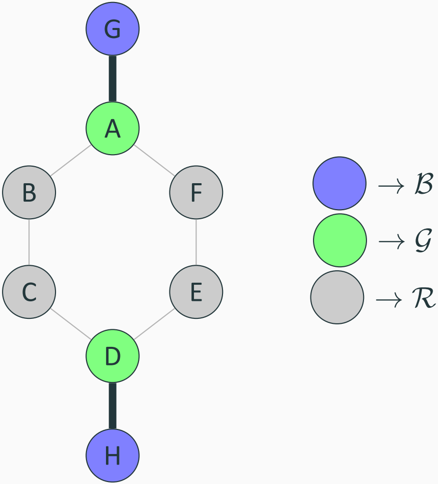



G
A
B
F
C
E
D
H
→ $\mathcal{B}$
→ $\mathcal{G}$
→ $\mathcal{R}$

# Am Beispiel - Disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$



# Am Beispiel - Matching Graph*



**Lemma**

*Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:*

*(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph $mK_2$, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*

*(B) Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der $X$ die Menge der $s$ inneren Knoten und $Y$ die Menge der $st$ Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.*

# Globale Struktur

# Ergebnis

Anwendung der vorgestellten Bedingungen

Anwendungsbeispiel

# Backup-Folien

Beweis lokale Struktur

Ein Beweis für globale Struktur beispielhaft