

ON THE POWER OF COLOR REFINEMENT

V. ARVIND, JOHANNES KÖBLER, GAURAV RATTAN UND
OLEG VERBITSKY

Florian Lüdiger

05.02.2018

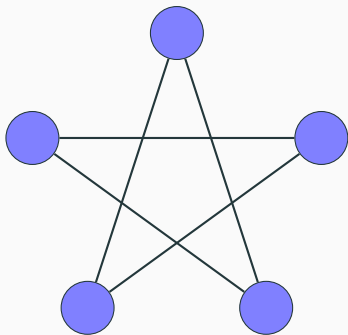
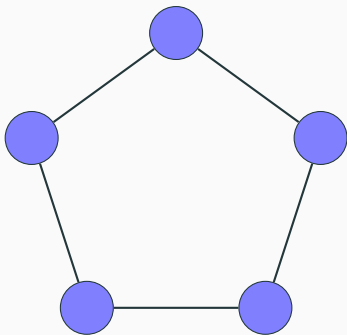
Seminar Algorithm Engineering - Lehrstuhl 11 - TU Dortmund

WIEDERHOLUNG: GRAPH-ISOMORPHIE UND COLOR-REFINEMENT

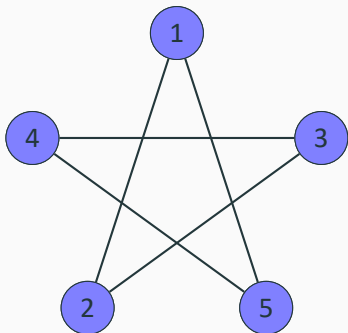
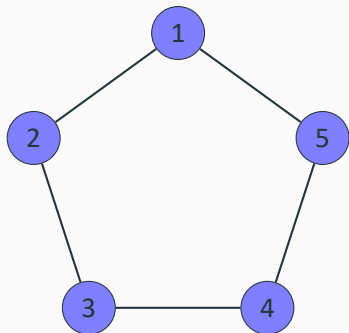
Definition

Zwei Graphen G und H sind **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung ϕ gibt, sodass gilt:

$$(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E_H \text{ für alle } u, v \in V_G.$$



BEISPIEL



Definition

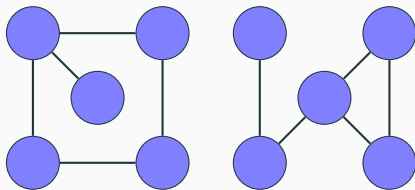
Mit der Color-Refinement-Heuristik kann in polynomieller Zeit festgestellt werden, dass zwei Graphen **nicht isomorph** sind.

Anders gesagt gilt für beliebige Graphen G, H :

- 1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\cong H$

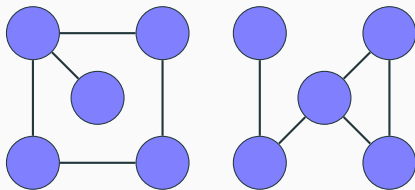
BEISPIEL

1)

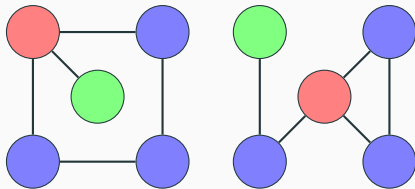


BEISPIEL

1)

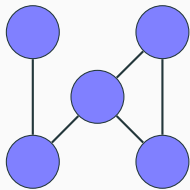
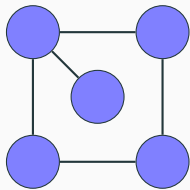


2)

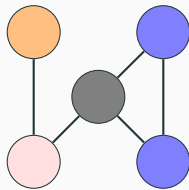
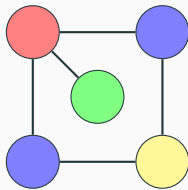


BEISPIEL

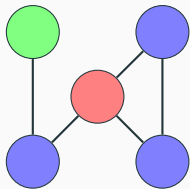
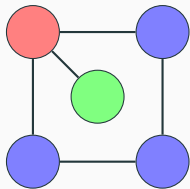
1)



3)

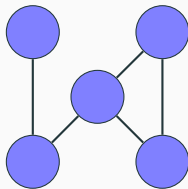
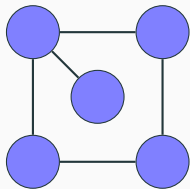


2)

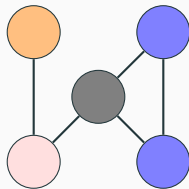
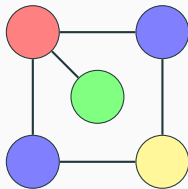


BEISPIEL

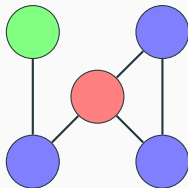
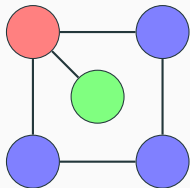
1)



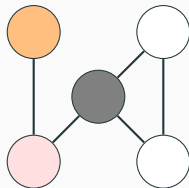
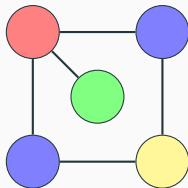
3)



2)

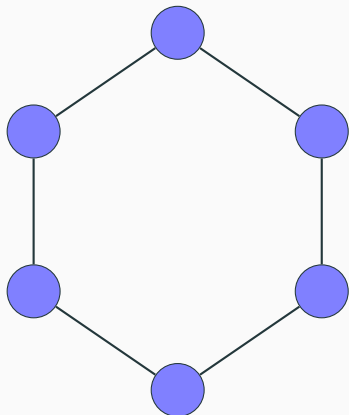


4)

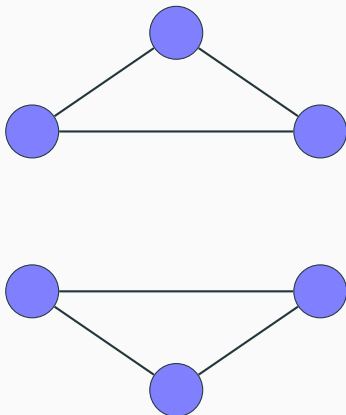


LIMITIERUNG DER HEURISTIK

Es gibt nicht-isomorphe Graphenpaare, welche das Color-Refinement nicht unterscheiden kann.



$\not\cong$



WAS GIBT ES NEUES?

Definition

Graph G ist **CR-Graph**, wenn das Color-Refinement diesen von jedem nicht zu G isomorphen Graphen H unterscheiden kann.

Für beliebige CR-Graphen G, H gilt also:

$$\textcircled{2} \quad G \not\cong H \Rightarrow \text{CR unterscheidet } G \text{ und } H$$

- 1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
- 2 $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

Korollar

Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

- 1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
- 2 $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

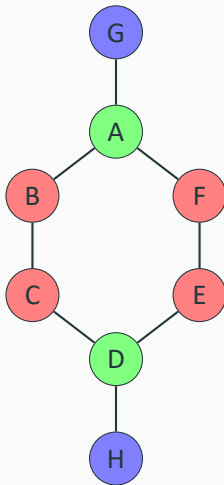
Korollar

Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

Wie identifiziere ich also die Klasse der CR-Graphen?

BEGRIFFSERKLÄRUNGEN UND ANWENDUNGSBEISPIEL



Definition

Die **Partitionierung** \mathcal{P} teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Die **Partitionierung** \mathcal{P} teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** \mathcal{P}^s genannt.

Definition

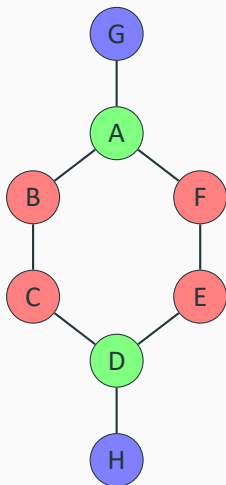
Die **Partitionierung** \mathcal{P} teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** \mathcal{P}^s genannt.

Definition

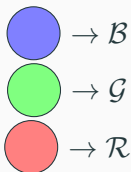
Die einzelnen Partitionen innerhalb der Partitionierung werden **Zellen** genannt.



„Partitionierung“

„stabile Partitionierung“

„Zellen“



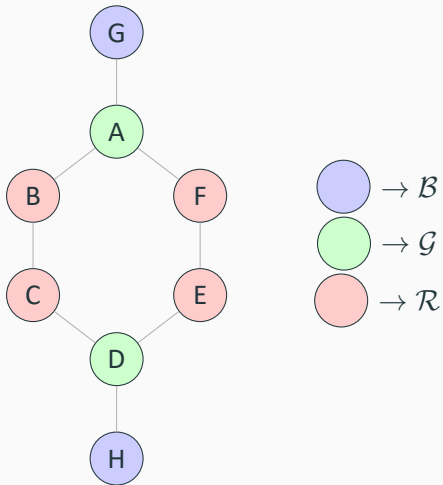
LOKALE STRUKTUR

Lemma

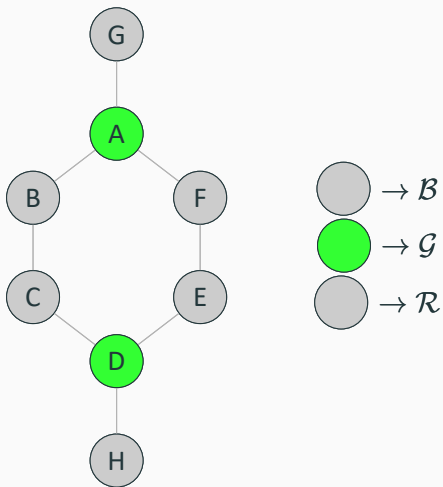
Die Zellen der stabilen Partition \mathcal{P}_G eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

- (A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2 , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*

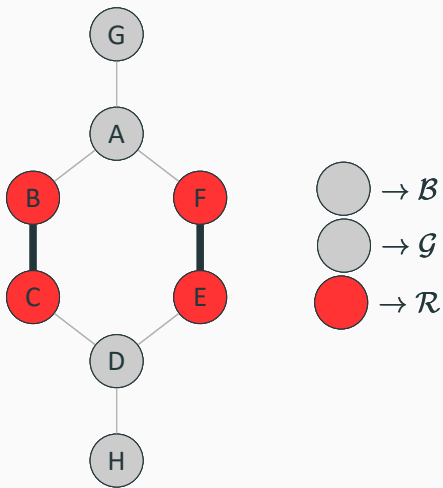
AM BEISPIEL



AM BEISPIEL - LEERER GRAPH



AM BEISPIEL - MATCHING-GRAPH



Lemma

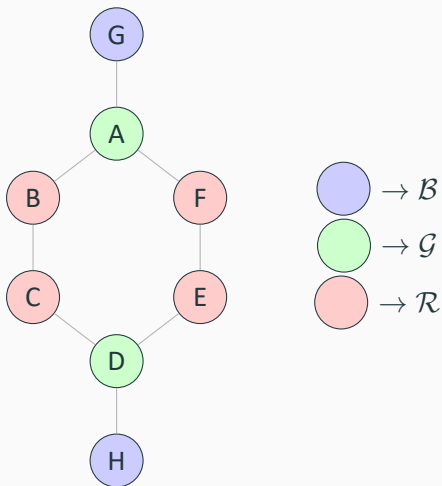
Die Zellen der stabilen Partition \mathcal{P}_G eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

- (A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2 , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*

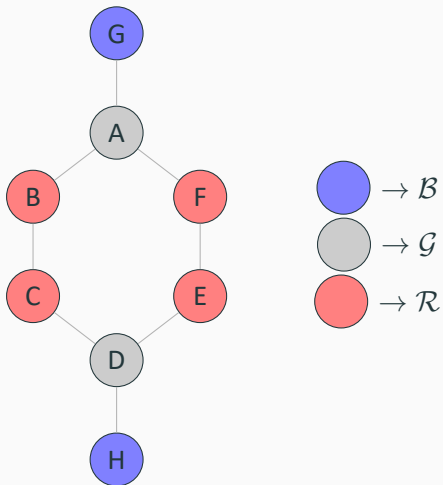
Lemma

Die Zellen der stabilen Partition \mathcal{P}_G eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

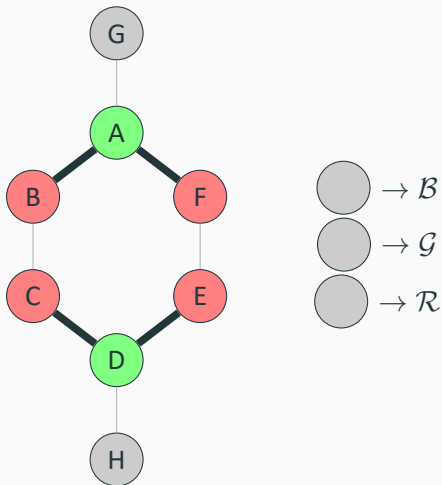
- (A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2 , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*
- (B) Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der X die Menge der s inneren Knoten und Y die Menge der t Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.*



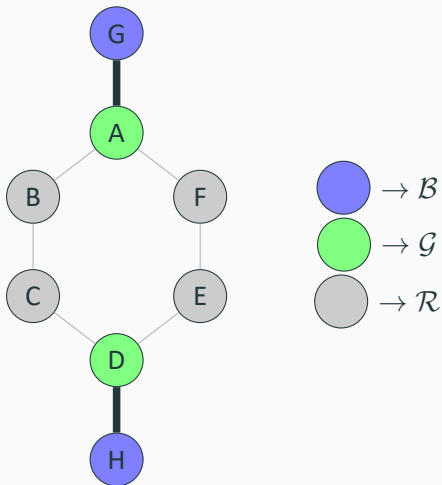
AM BEISPIEL - LEERER GRAPH



AM BEISPIEL - DISJUNKTE VEREINIGUNG VON STERNEN $sK_{1,t}$



AM BEISPIEL - MATCHING GRAPH*



Lemma

Die Zellen der stabilen Partition \mathcal{P}_G eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

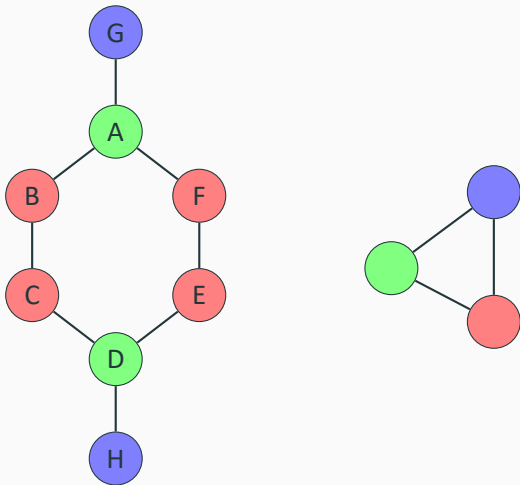
- (A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2 , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*
- (B) Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der X die Menge der s inneren Knoten und Y die Menge der t Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.*

GLOBALE STRUKTUR

Definition

Der Zellgraph $C(G)$ eines Graphen G wird aus dessen stabilen Partition \mathcal{P}_G gebildet. Es handelt sich dabei um einen vollständigen Graphen, bei dem die Knoten die Zellen von \mathcal{P}_G darstellen.

ZELLGRAPH - BEISPIEL



Definition

Eine Zelle $X \in \mathcal{C}(G)$ wird **homogen** genannt, wenn der Graph $G[X]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **heterogen** genannt.

Definition

Eine Zelle $X \in C(G)$ wird **homogen** genannt, wenn der Graph $G[X]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **heterogen** genannt.

Definition

Eine Kante $\{X, Y\}$ mit $X, Y \in C(G)$ wird **isotrop** genannt, wenn der bipartite Graph $G[X, Y]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **anisotrop** genannt.

Definition

Eine Zelle $X \in C(G)$ wird **homogen** genannt, wenn der Graph $G[X]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **heterogen** genannt.

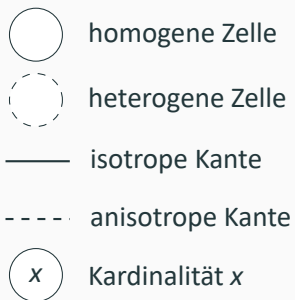
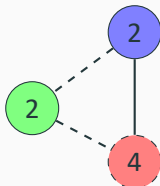
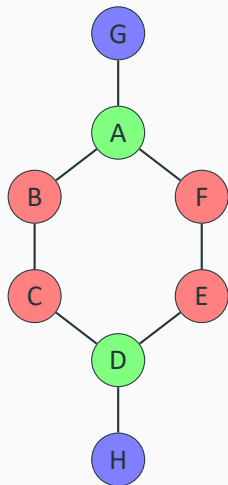
Definition

Eine Kante $\{X, Y\}$ mit $X, Y \in C(G)$ wird **isotrop** genannt, wenn der bipartite Graph $G[X, Y]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **anisotrop** genannt.

Definition

Ein Pfad $X_1X_2\dots X_l$ in $C(G)$, bei der jede Kante anisotrop ist, wird **anisotroper Pfad** genannt. Wenn dieser Pfad einen Kreis schließt wird er als **anisotroper Zyklus** bezeichnet. Gilt für einen anisotropen Pfad $|X_1| = |X_2| = \dots = |X_l|$, dann wird er **gleichmäßig** genannt.

EIGENSCHAFTEN VON ZELLGRAPHEN - BEISPIEL

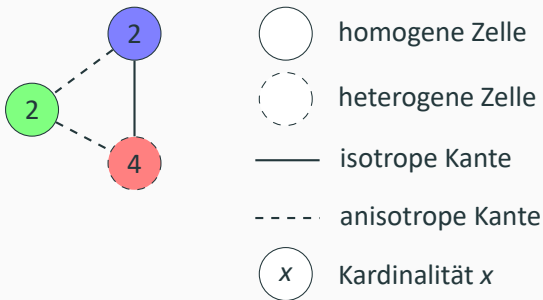


Lemma

Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

(C) $C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.

$C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.

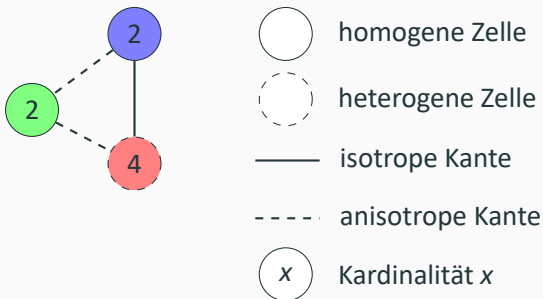


Lemma

Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

- (C) $C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.*
- (D) $C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.*

$C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.

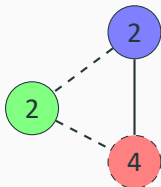


Lemma

Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

- (C) $C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.*
- (D) $C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.*
- (E) $C(G)$ enthält weder einen anisotropen Pfad $XY_1Y_2...Y_lZ$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_l| > |Z|$, noch einen anisotropen Zyklus $XY_1Y_2...Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.*

$C(G)$ enthält weder einen anisotropen Pfad $XY_1Y_2\dots Y_lZ$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_l| > |Z|$, noch einen anisotropen Zyklus $XY_1Y_2\dots Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.



homogene Zelle



heterogene Zelle



isotrope Kante



anisotrope Kante



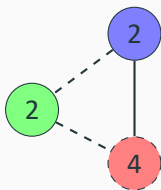
Kardinalität x

Lemma

Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

- (C) $C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.*
- (D) $C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.*
- (E) $C(G)$ enthält weder einen anisotropen Pfad $XY_1Y_2...Y_lZ$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_l| > |Z|$, noch einen anisotropen Zyklus $XY_1Y_2...Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.*
- (F) $C(G)$ enthält keinen anisotropen Pfad $XY_1Y_2...Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.*

$C(G)$ enthält keinen anisotropen Pfad $XY_1Y_2\dots Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.



homogene Zelle



heterogene Zelle



isotrope Kante

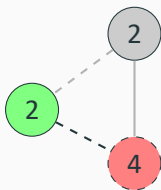


anisotrope Kante



Kardinalität x

$C(G)$ enthält keinen anisotropen Pfad $XY_1Y_2\dots Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.



homogene Zelle



heterogene Zelle



isotrope Kante



anisotrope Kante



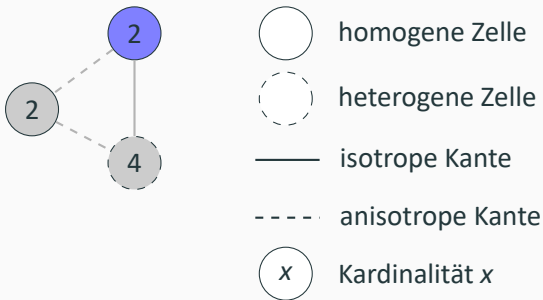
Kardinalität x

Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.

Definition

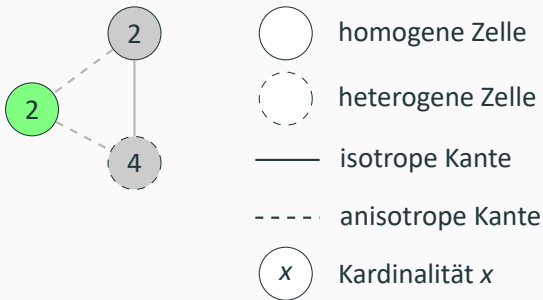
In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



DEFINITION

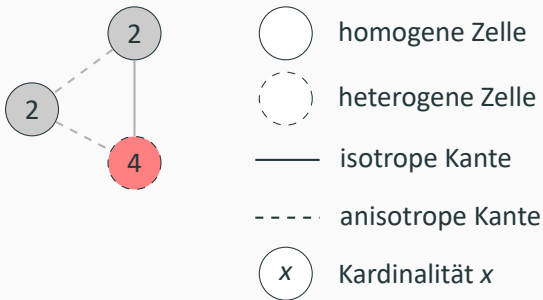
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



Definition

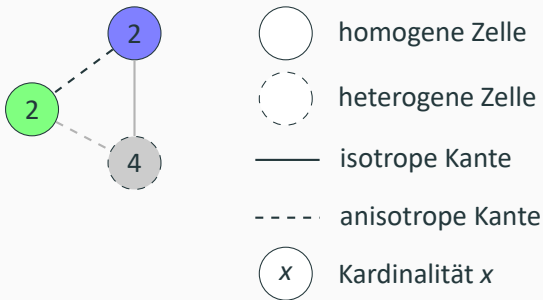
In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



DEFINITION

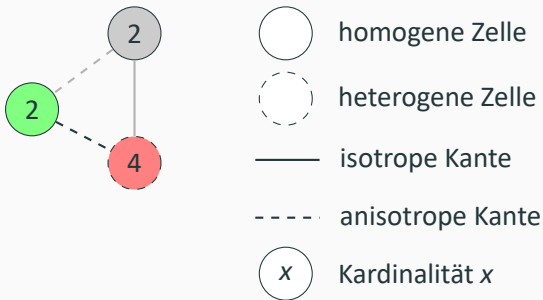
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



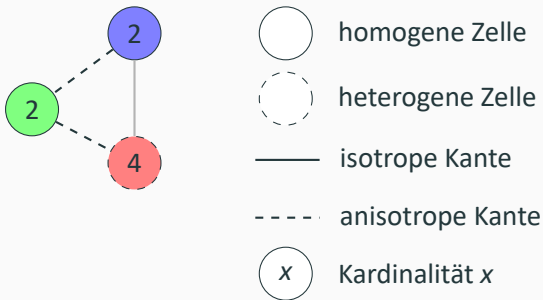
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



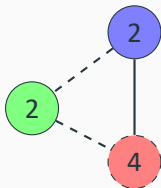
Lemma

*Angenommen ein CR-Graph G erfüllt die Bedingungen **A-F**. Für jede anisotrope Komponente A von $C(G)$ gelten folgende Eigenschaften:*

(G) A ist ein Baum, der folgende Monotonieeigenschaft erfüllt: Sei R eine Zelle aus A mit minimaler Kardinalität, so ist A_R der gerichtete Baum mit Wurzel R ; Für jede gerichtete Kante (X, Y) aus A_R gilt dann $|X| \leq |Y|$.

A ist ein Baum, der folgende Monotonieeigenschaft erfüllt: Sei R eine Zelle aus A mit minimaler Kardinalität, so ist A_R der gerichtete Baum mit Wurzel R; Für jede gerichtete Kante (X, Y) aus A_R gilt dann

$$|X| \leq |Y|.$$



homogene Zelle



heterogene Zelle



isotrope Kante



anisotrope Kante



Kardinalität x

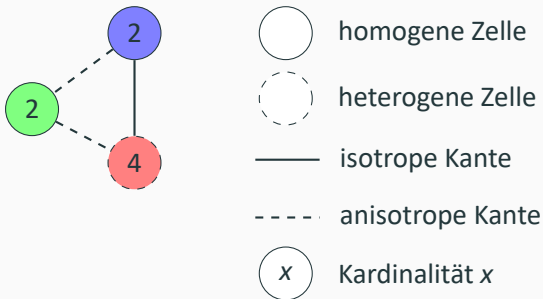
Lemma

*Angenommen ein CR-Graph G erfüllt die Bedingungen **A-F**. Für jede anisotrope Komponente A von $C(G)$ gelten folgende Eigenschaften:*

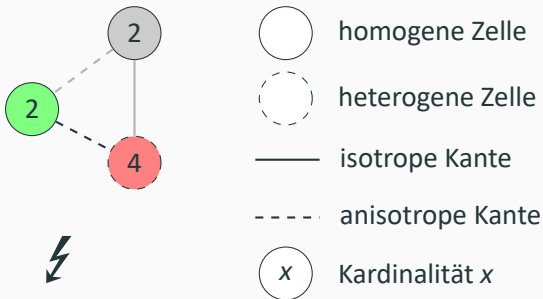
(G) A ist ein Baum, der folgende Monotonieeigenschaft erfüllt: Sei R eine Zelle aus A mit minimaler Kardinalität, so ist A_R der gerichtete Baum mit Wurzel R ; Für jede gerichtete Kante (X, Y) aus A_R gilt dann $|X| \leq |Y|$.

(H) A enthält maximal eine heterogene Zelle; Wenn eine solche Zelle existiert, hat diese minimale Kardinalität in A .

A enthält maximal eine heterogene Zelle; Wenn eine solche Zelle existiert, hat diese minimale Kardinalität in A.



A enthält maximal eine heterogene Zelle; Wenn eine solche Zelle existiert, hat diese minimale Kardinalität in A.



ERGEBNIS

Anwendung der vorgestellten Bedingungen

Anwendungsbeispiel

BACKUP-FOLIEN

Beweis lokale Struktur

Ein Beweis für globale Struktur beispielhaft