

# ON THE POWER OF COLOR REFINEMENT

V. ARVIND, JOHANNES KÖBLER, GAURAV RATTAN UND  
OLEG VERBITSKY

---

Florian Lüdiger

05.02.2018

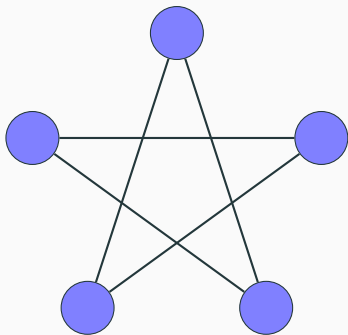
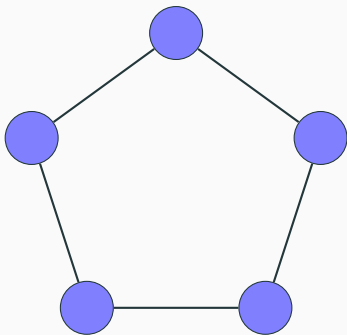
Seminar Algorithm Engineering - Lehrstuhl 11 - TU Dortmund

# **WIEDERHOLUNG: GRAPH-ISOMORPHIE UND COLOR-REFINEMENT**

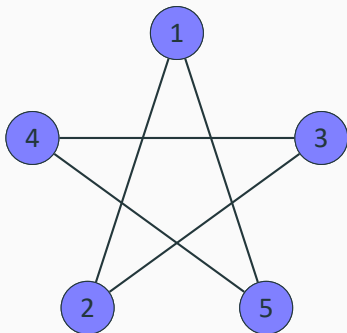
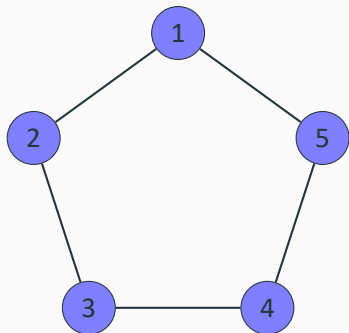
## Definition

Zwei Graphen  $G$  und  $H$  sind **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung  $\phi$  gibt, sodass gilt:

$$(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E_H \text{ für alle } u, v \in V_G.$$



## BEISPIEL



## Definition

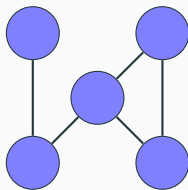
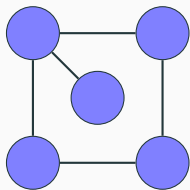
Mit der Color-Refinement-Heuristik kann in polynomieller Zeit festgestellt werden, dass zwei Graphen **nicht isomorph** sind.

Anders gesagt gilt für beliebige Graphen  $G, H$ :

- 1 CR unterscheidet  $G$  und  $H \Rightarrow G \not\cong H$

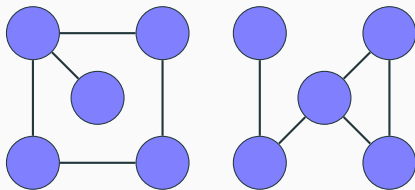
## BEISPIEL

1)

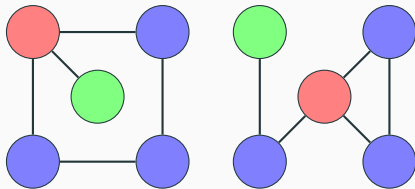


## BEISPIEL

1)



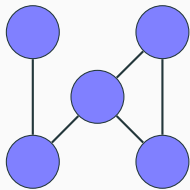
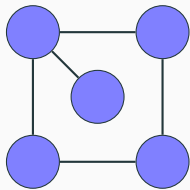
2)



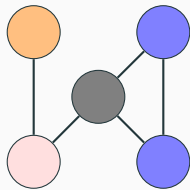
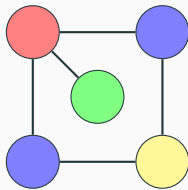


# BEISPIEL

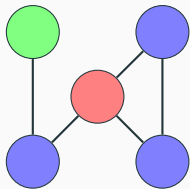
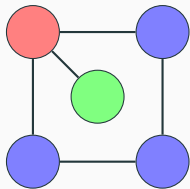
1)



3)

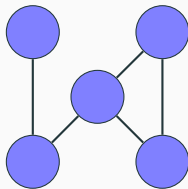
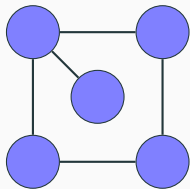


2)

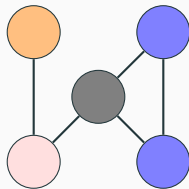
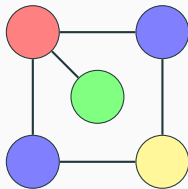


# BEISPIEL

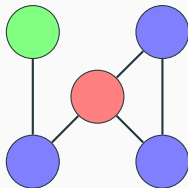
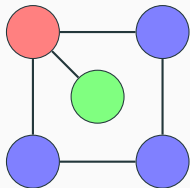
1)



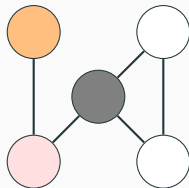
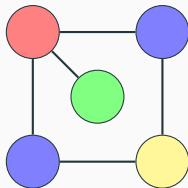
3)



2)

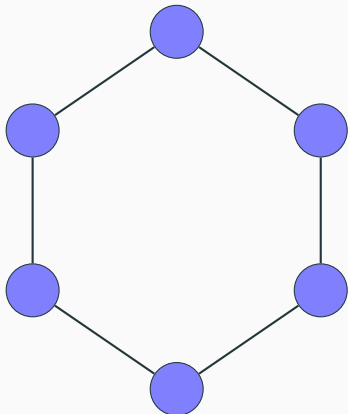


4)

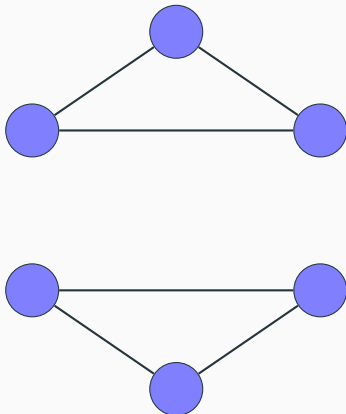


## LIMITIERUNG DER HEURISTIK

Es gibt nicht-isomorphe Graphenpaare, welche das Color-Refinement nicht unterscheiden kann.



$\not\cong$



**WAS GIBT ES NEUES?**

## Definition

Graph  $G$  ist **CR-Graph**, wenn das Color-Refinement diesen von jedem nicht zu  $G$  isomorphen Graphen  $H$  unterscheiden kann.

Für beliebige CR-Graphen  $G, H$  gilt also:

$$\textcircled{2} \quad G \not\cong H \Rightarrow \text{CR unterscheidet } G \text{ und } H$$

- 1 CR unterscheidet  $G$  und  $H \Rightarrow G \not\simeq H$
- 2  $G \not\simeq H \Rightarrow$  CR unterscheidet  $G$  und  $H$

### Korollar

*Für zwei CR-Graphen  $G$  und  $H$  gilt:*

*CR erkennt  $G$  und  $H$  als isomorph  $\Leftrightarrow G \simeq H$*

- 1 CR unterscheidet  $G$  und  $H \Rightarrow G \not\simeq H$
- 2  $G \not\simeq H \Rightarrow$  CR unterscheidet  $G$  und  $H$

### Korollar

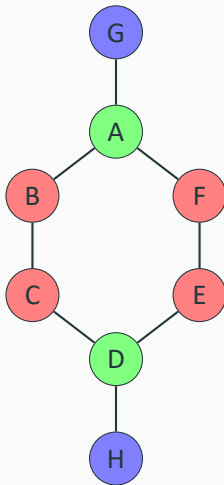
*Für zwei CR-Graphen  $G$  und  $H$  gilt:*

*CR erkennt  $G$  und  $H$  als isomorph  $\Leftrightarrow G \simeq H$*

*Wie identifiziere ich also die Klasse der CR-Graphen?*

## **BEGRIFFSERKLÄRUNGEN UND ANWENDUNGSBEISPIEL**





## Definition

Die **Partitionierung**  $\mathcal{P}$  teilt den Graphen  $G$  in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

## Definition

Die **Partitionierung**  $\mathcal{P}$  teilt den Graphen  $G$  in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

## Definition

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung**  $\mathcal{P}^s$  genannt.

## Definition

Die **Partitionierung**  $\mathcal{P}$  teilt den Graphen  $G$  in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

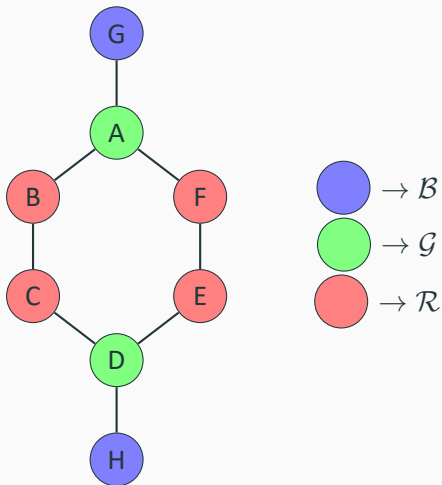
## Definition

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung**  $\mathcal{P}^s$  genannt.

## Definition

Die einzelnen Partitionen innerhalb der Partitionierung werden **Zellen** genannt.

## ANWENDUNG AUF DAS BEISPIEL



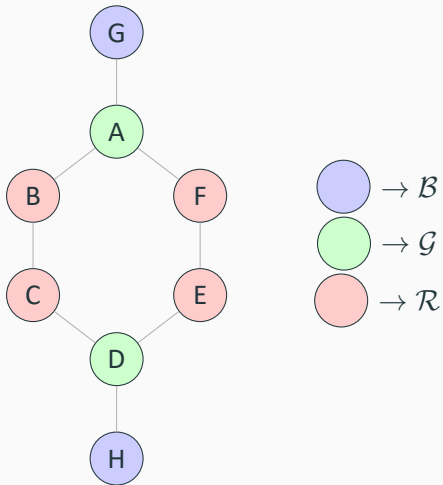
## **LOKALE STRUKTUR**

### Lemma

*Die Zellen der stabilen Partition  $\mathcal{P}_G$  eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:*

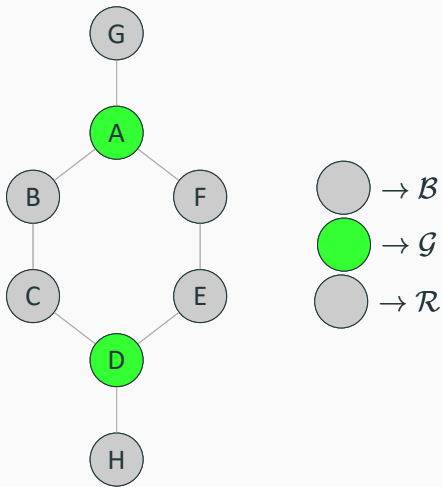
- (A) Für beliebige Zellen  $X \in \mathcal{P}_G$  ist  $G[X]$  ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph  $mK_2$ , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*

## AM BEISPIEL

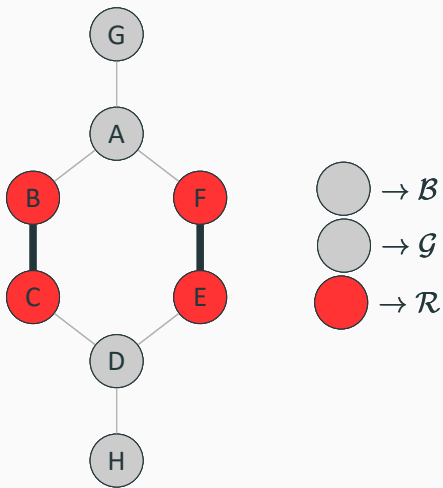




## AM BEISPIEL - LEERER GRAPH



## AM BEISPIEL - MATCHING-GRAPH



### Lemma

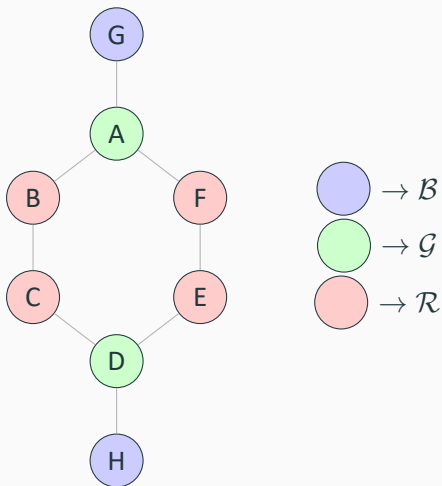
*Die Zellen der stabilen Partition  $\mathcal{P}_G$  eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:*

- (A) Für beliebige Zellen  $X \in \mathcal{P}_G$  ist  $G[X]$  ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph  $mK_2$ , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*

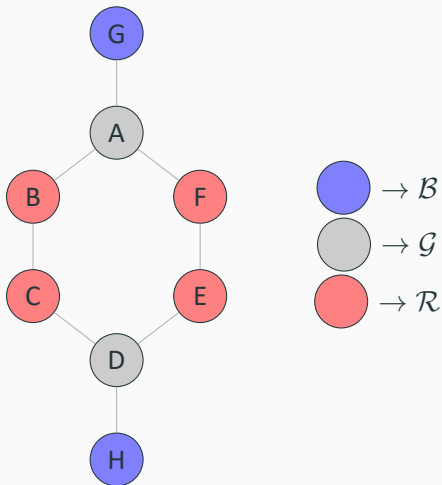
### Lemma

*Die Zellen der stabilen Partition  $\mathcal{P}_G$  eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:*

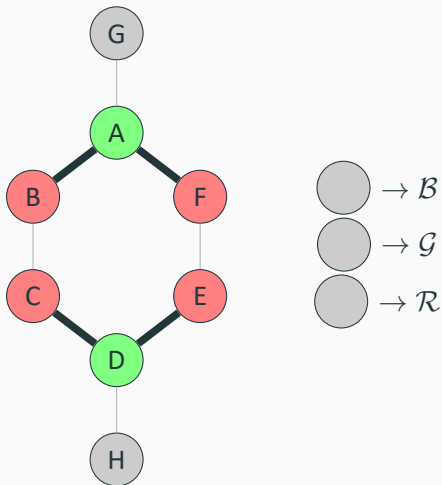
- (A) Für beliebige Zellen  $X \in \mathcal{P}_G$  ist  $G[X]$  ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph  $mK_2$ , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*
- (B) Für beliebige Zellen  $X, Y \in \mathcal{P}_G$  ist  $G[X, Y]$  ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen  $sK_{1,t}$ , bei der  $X$  die Menge der  $s$  inneren Knoten und  $Y$  die Menge der  $t$  Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.*



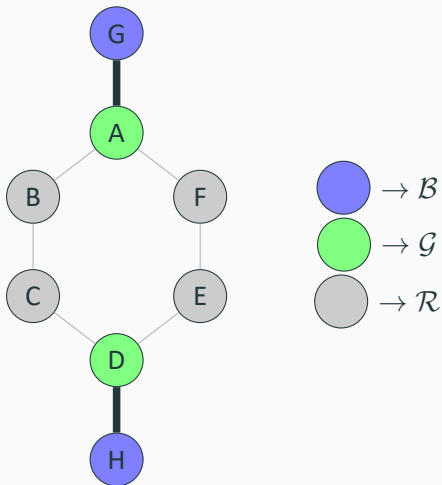
## AM BEISPIEL - LEERER GRAPH



## AM BEISPIEL - DISJUNKTE VEREINIGUNG VON STERNEN $sK_{1,t}$



## AM BEISPIEL - MATCHING GRAPH\*





### Lemma

*Die Zellen der stabilen Partition  $\mathcal{P}_G$  eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:*

- (A) Für beliebige Zellen  $X \in \mathcal{P}_G$  ist  $G[X]$  ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph  $mK_2$ , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*
- (B) Für beliebige Zellen  $X, Y \in \mathcal{P}_G$  ist  $G[X, Y]$  ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen  $sK_{1,t}$ , bei der  $X$  die Menge der  $s$  inneren Knoten und  $Y$  die Menge der  $t$  Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.*

## **GLOBALE STRUKTUR**

## **ERGEBNIS**

Anwendung der vorgestellten Bedingungen

Anwendungsbeispiel

## **BACKUP-FOLIEN**

Beweis lokale Struktur

Ein Beweis für globale Struktur beispielhaft