On the Power of Color Refinement

V. Arvind, Johannes Köbler, Gaurav Rattan und
Oleg Verbitsky

Florian Lüdiger

05.02.2018

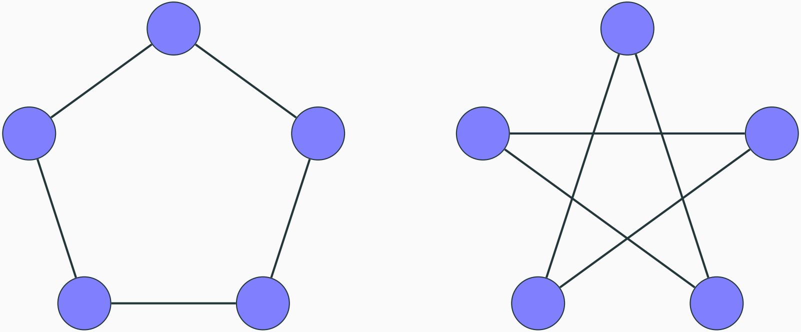
Seminar Algorithm Engineering - Lehrstuhl 11 - TU Dortmund

Wiederholung: Graph-Isomorphie und Color-Refinement

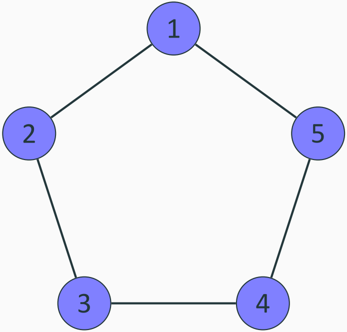
Definition

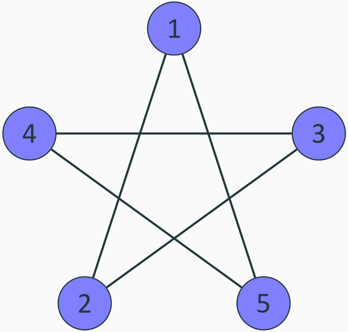
Zwei Graphen G und H sind isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung ϕ gibt, sodass gilt:
$(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E_H$ für alle $u, v \in V_G$.

Beispiel



Beispiel





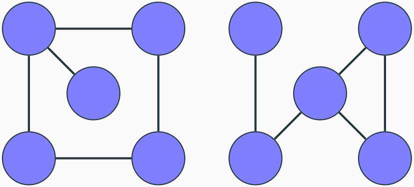
Definition

Mit der Color-Refinement-Heuristik kann in polynomieller Zeit festgestellt werden, dass zwei Graphen nicht isomorph sind.

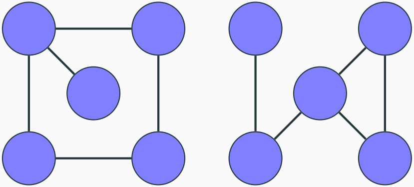
Anders gesagt gilt für beliebige Graphen G,H:

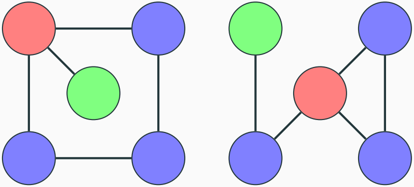
1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$

Beispiel

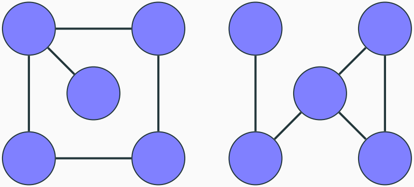
1) 

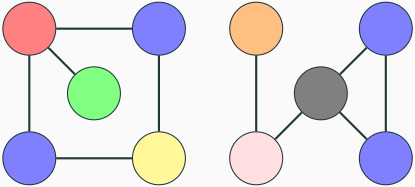
Beispiel

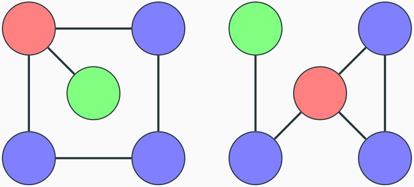
1) 

2) 

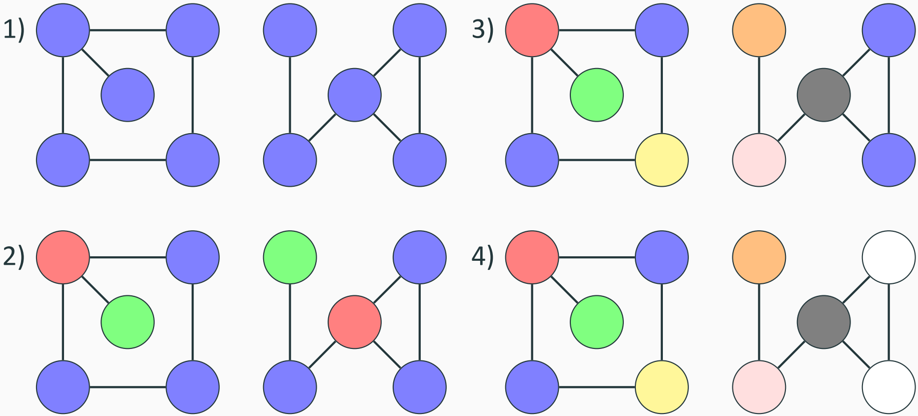
Beispiel

1)


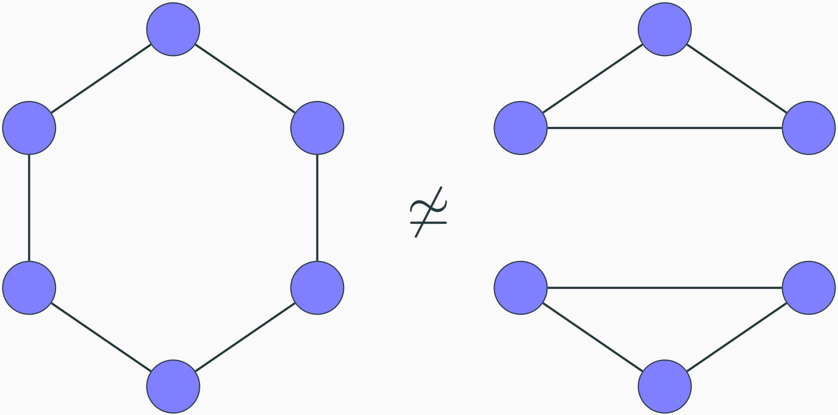
3)


2)


Beispiel



Es gibt nicht-isomorphe Graphenpaare, welche das Color-Refinement nicht unterscheiden kann.



Was gibt es neues?

Definition

Graph G ist **CR-Graph**, wenn das Color-Refinement diesen von jedem nicht zu G isomorphen Graphen H unterscheiden kann.

Für beliebige CR-Graphen G,H gilt also:

2 $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

Ergebnis und Beobachtung

1. CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
2. $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

Korollar

Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

1. CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
2. $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

Korollar

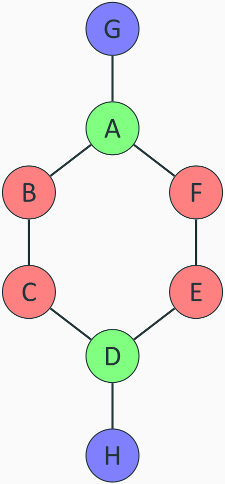
Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

Wie identifiziere ich also die Klasse der CR-Graphen?

Begriffserklärungen und Anwendungsbeispiel

Anwendungsbeispiel



Definition

Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** $\mathcal{P}^s$ genannt.

Definition

Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

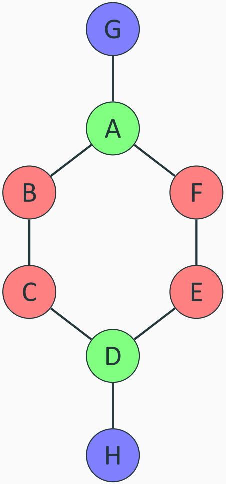
Definition

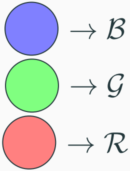
Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** $\mathcal{P}^s$ genannt.

Definition

Die einzelnen Partitionen innerhalb der Partitionierung werden **Zellen** genannt.

Anwendung auf das Beispiel





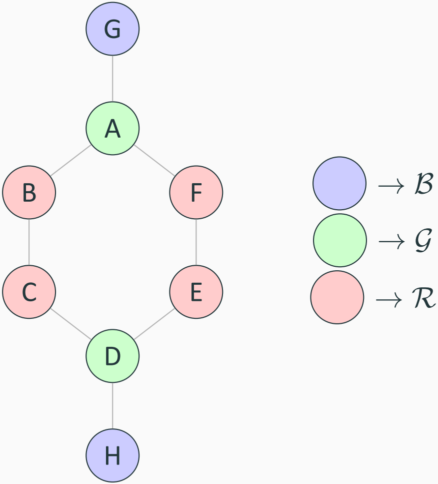
Lokale Struktur

Lemma

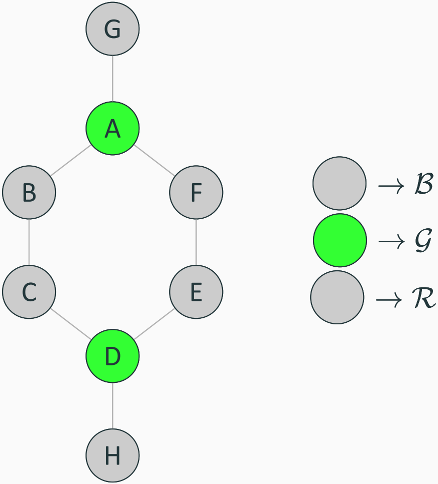
Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.

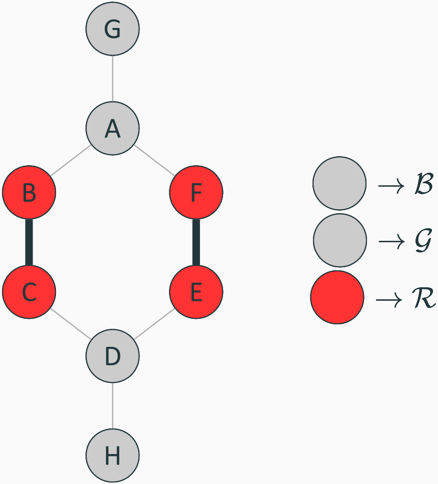
Am Beispiel


G
A
B
F
C
E
D
H
$\rightarrow \mathcal{B}$
$\rightarrow \mathcal{G}$
$\rightarrow \mathcal{R}$

Am Beispiel - Leerer Graph



Am Beispiel - Matching-Graph



Lemma

Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

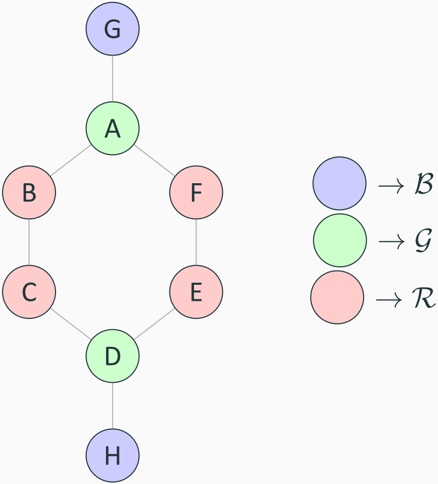
(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.

Lemma

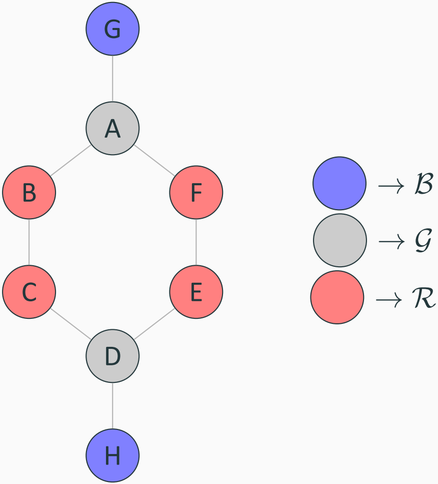
Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.

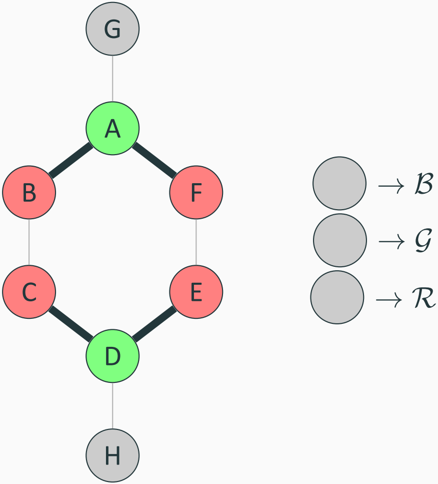
(B) Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der X die Menge der s inneren Knoten und Y die Menge der st Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.


G
A
B
F
C
E
D
H
$\rightarrow \mathcal{B}$
$\rightarrow \mathcal{G}$
$\rightarrow \mathcal{R}$

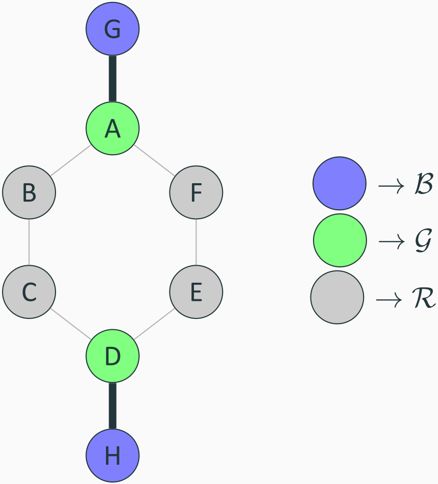
Am Beispiel - Leerer Graph



Am Beispiel - Disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$



Am Beispiel - Matching Graph*



Lemma

Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.

(B) Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der X die Menge der s inneren Knoten und Y die Menge der st Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.

Globale Struktur

Ergebnis

Anwendung der vorgestellten Bedingungen

Anwendungsbeispiel

Backup-Folien

Beweis lokale Struktur

Ein Beweis für globale Struktur beispielhaft