On the Power of Color Refinement

V. Arvind, Johannes Köbler, Gaurav Rattan und
Oleg Verbitsky

Florian Lüdiger

05.02.2018

Seminar Algorithm Engineering - Lehrstuhl 11 - TU Dortmund

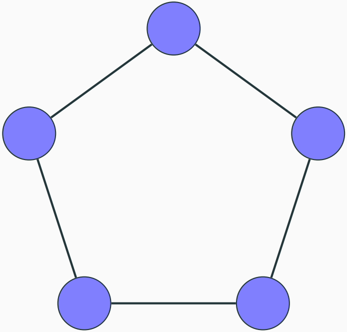
Wiederholung: Graph-Isomorphie und Color-Refinement

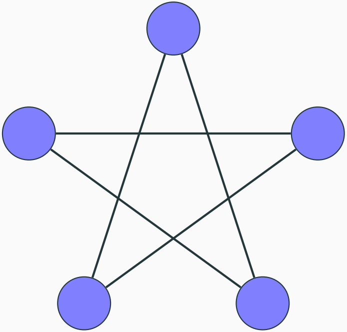
Graph-Isomorphie

Definition

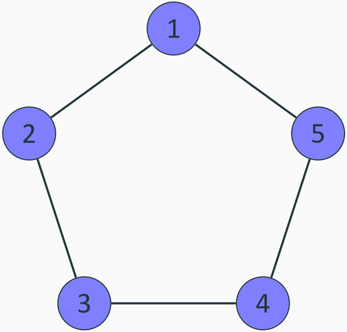
Zwei Graphen G und H sind **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung ϕ gibt, sodass gilt:
$(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E_H$ für alle $u, v \in V_G$.

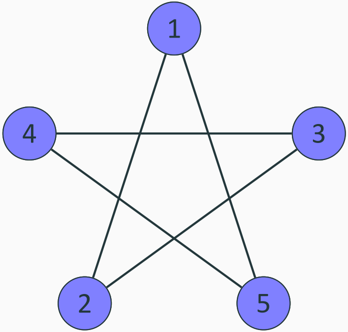
Beispiel





Beispiel





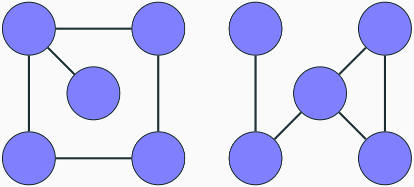
Definition

Mit der Color-Refinement-Heuristik kann in polynomieller Zeit festgestellt werden, dass zwei Graphen **nicht isomorph** sind.

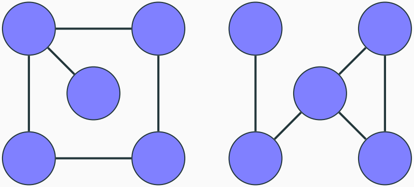
Anders gesagt gilt für beliebige Graphen G,H:

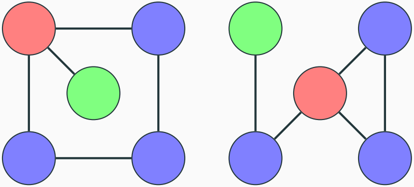
1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$

Beispiel

1) 

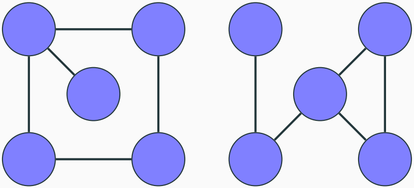
Beispiel

1) 

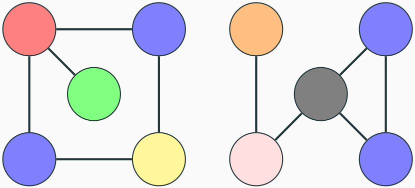
2) 

Beispiel

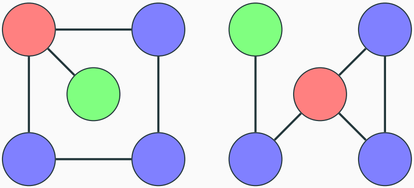
1)



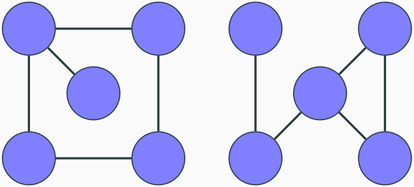
3)

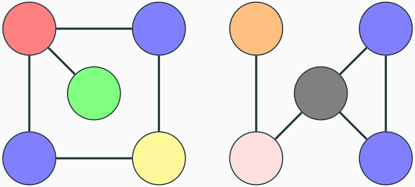


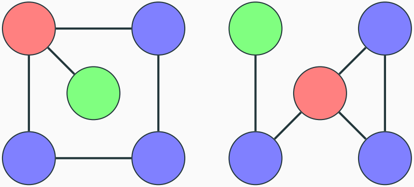
2)

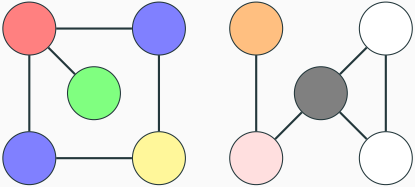


Beispiel

1) 

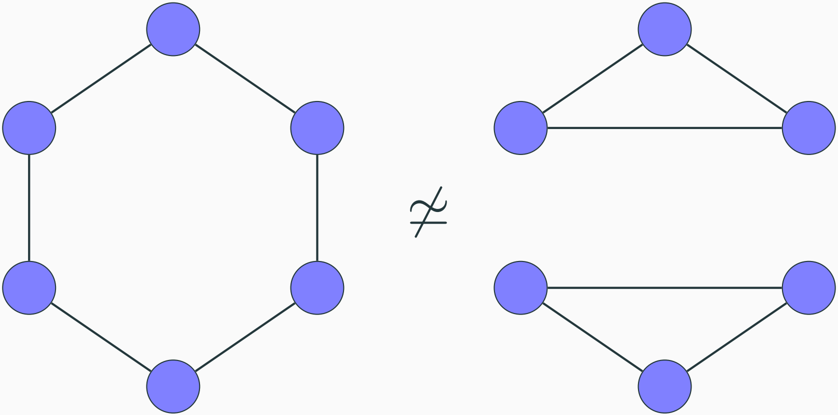
3) 

2) 

4) 

Limitierung der Heuristik

Es gibt nicht-isomorphe Graphenpaare, welche das Color-Refinement nicht unterscheiden kann.



Was gibt es neues?

Definition

Graph G ist **CR-Graph**, wenn das Color-Refinement diesen von jedem nicht zu G isomorphen Graphen H unterscheiden kann.

Für beliebige CR-Graphen G,H gilt also:

2 $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

1. CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
2. $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

Korollar

Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

1. CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
2. $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

Korollar

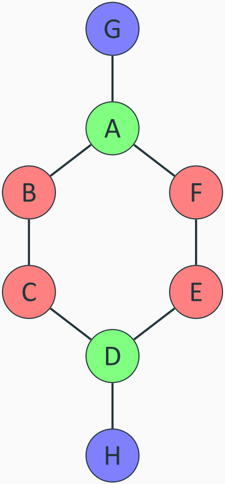
Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

Wie identifiziere ich also die Klasse der CR-Graphen?

Begriffserklärungen und Anwendungsbeispiel

Anwendungsbeispiel



Definition

Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** $\mathcal{P}^s$ genannt.

Definition

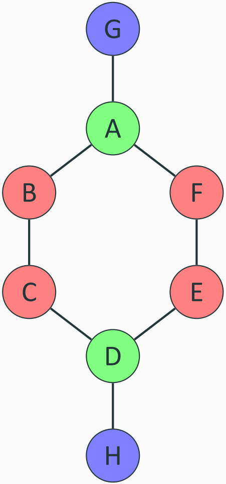
Die **Partitionierung** $\mathcal{P}$ teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** $\mathcal{P}^s$ genannt.

Definition

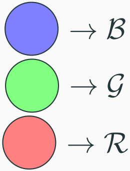
Die einzelnen Partitionen innerhalb der Partitionierung werden **Zellen** genannt.



„Partitionierung“

„stabile Partitionierung“

„Zellen“



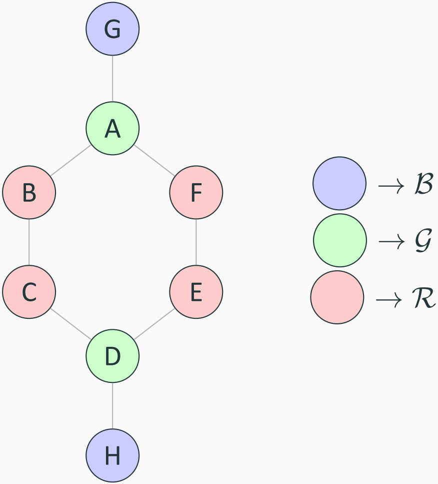
Lokale Struktur

Lemma

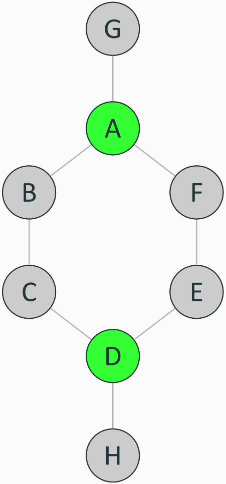
Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

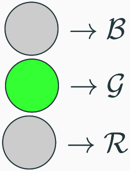
(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.

Am Beispiel

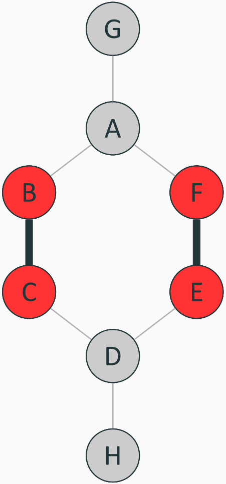

G
A
B
F
C
E
D
H
$\rightarrow \mathcal{B}$
$\rightarrow \mathcal{G}$
$\rightarrow \mathcal{R}$

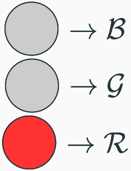
Am Beispiel - Leerer Graph





Am Beispiel - Matching-Graph





Lemma

Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.

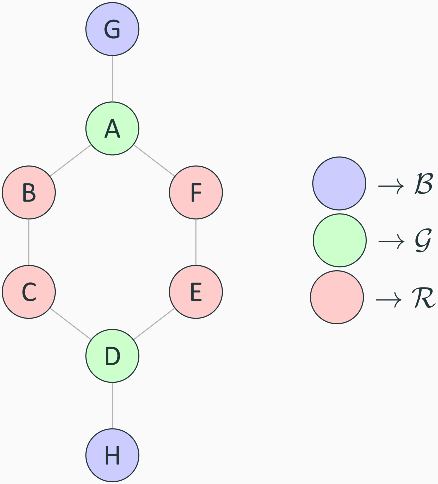
Lemma

Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

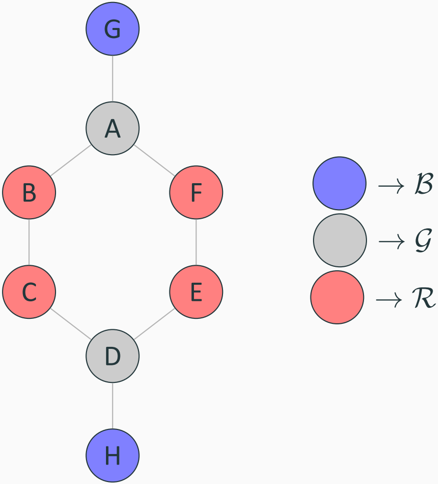
(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.

(B) Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der X die Menge der s inneren Knoten und Y die Menge der st Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.

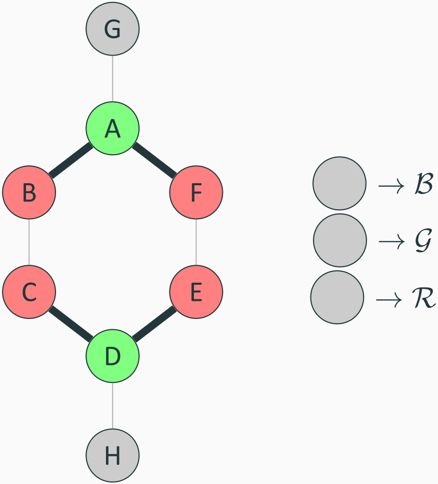
Am Beispiel



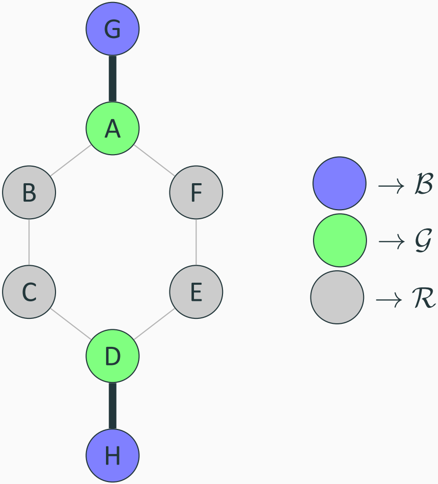
Am Beispiel - Leerer Graph



Am Beispiel - Disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$



Am Beispiel - Matching Graph*



Lemma

Die Zellen der stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

(A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2, das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.

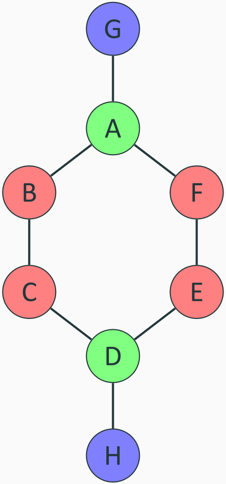
(B) Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der X die Menge der s inneren Knoten und Y die Menge der st Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.

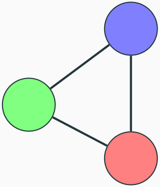
Globale Struktur

Definition

Der Zellgraph $C(G)$ eines Graphen G wird aus dessen stabilen Partition $\mathcal{P}_G$ gebildet. Dabei gibt es für jede Zelle von $\mathcal{P}_G$ einen Knoten.

Zellgraph - Beispiel





Definition

Eine Zelle $X \in C(G)$ wird **homogen** genannt, wenn der Graph $G[X]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **heterogen** genannt.

Definition

Eine Zelle $X \in C(G)$ wird **homogen** genannt, wenn der Graph $G[X]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **heterogen** genannt.

Definition

Eine Kante $\{X, Y\}$ mit $X, Y \in C(G)$ wird **isotrop** genannt, wenn der bipartite Graph $G[X, Y]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **anisotrop** genannt.

Definition

Eine Zelle $X \in C(G)$ wird **homogen** genannt, wenn der Graph $G[X]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **heterogen** genannt.

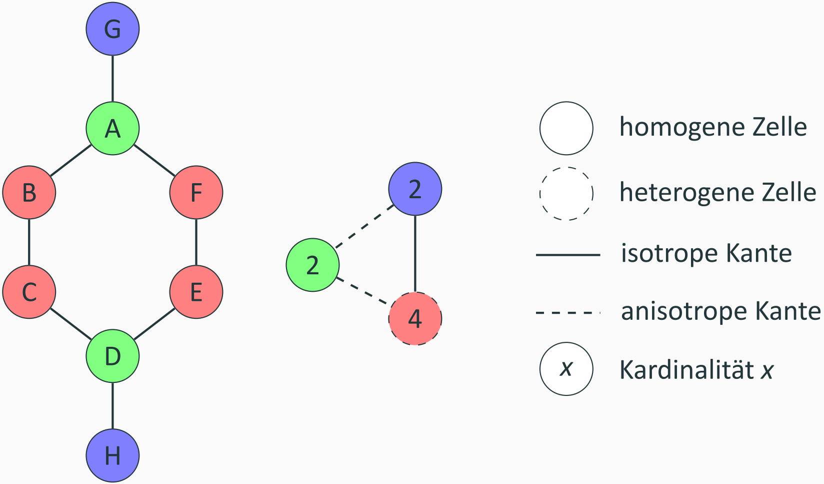
Definition

Eine Kante $\{X, Y\}$ mit $X, Y \in C(G)$ wird **isotrop** genannt, wenn der bipartite Graph $G[X, Y]$ vollständig oder leer ist. Anderenfalls wird diese **anisotrop** genannt.

Definition

Ein Pfad $X_1 X_2 \ldots X_l$ in $C(G)$, bei der jede Kante anisotrop ist, wird **anisotroper Pfad** genannt. Wenn dieser Pfad einen Kreis schließt wird er als **anisotroper Zyklus** bezeichnet. Gilt für einen anisotropen Pfad $|X_1| = |X_2| = \ldots = |X_l|$, dann wird er **gleichmäßig** genannt.

Eigenschaften von Zellgraphen - Beispiel



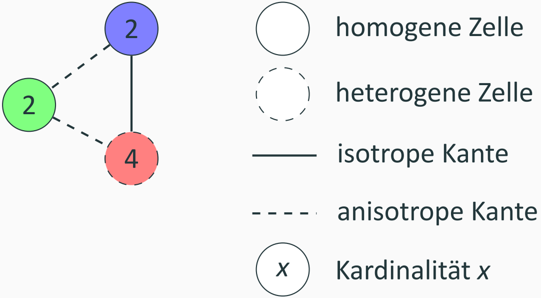
Lemma

Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

(C) $C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.

Allgemeine Globale Eigenschaften von CR-Graphen

$C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.



Allgemeine Globale Eigenschaften von CR-Graphen

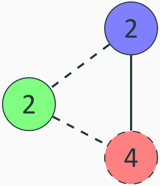
Lemma

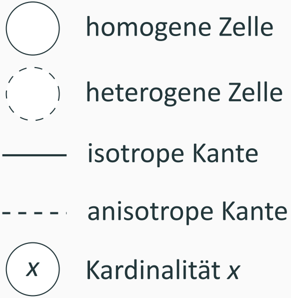
Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

(C) $C(G)$ *enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.*

(D) $C(G)$ *enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.*

$C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.



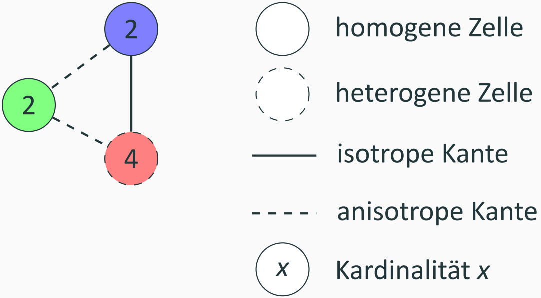


Lemma

Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

- *(C)* *$C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.*
- *(D)* *$C(G)$ enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.*
- *(E)* *$C(G)$ enthält weder einen anisotropen Pfad $XY_1Y_2...Y_lZ$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = ... = |Y_l| > |Z|$, noch einen anisotropen Zyklus $XY_1Y_2...Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = ... = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.*

$C(G)$ enthält weder einen anisotropen Pfad $XY_1Y_2\ldots Y_lZ$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \ldots = |Y_l| > |Z|$, noch einen anisotropen Zyklus $XY_1Y_2\ldots Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \ldots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.



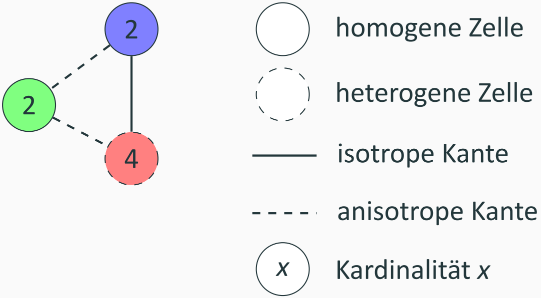
Lemma

Der Zellgraph $C(G)$ eines CR-Graphen G erfüllt folgende Eigenschaften:

- *(C)* $C(G)$ *enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Pfad, der zwei heterogene Zellen verbindet.*
- *(D)* $C(G)$ *enthält keinen gleichmäßigen, anisotropen Zyklus.*
- *(E)* $C(G)$ *enthält weder einen anisotropen Pfad* $XY_1Y_2...Y_lZ$, *sodass* $|X| < |Y_1| = |Y_2| = ... = |Y_l| > |Z|$, *noch einen anisotropen Zyklus* $XY_1Y_2...Y_l$, *sodass* $|X| < |Y_1| = |Y_2| = ... = |Y_l|$ *und die Zelle* Y_l *heterogen ist.*
- *(F)* $C(G)$ *enthält keinen anisotropen Pfad* $XY_1Y_2...Y_l$, *sodass* $|X| < |Y_1| = |Y_2| = ... = |Y_l|$ *und die Zelle* Y_l *heterogen ist.*

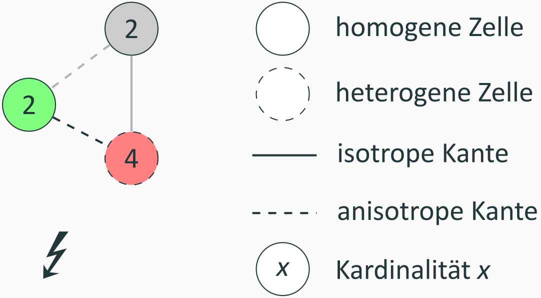
Allgemeine Globale Eigenschaften von CR-Graphen

$C(G)$ enthält keinen anisotropen Pfad $XY_1Y_2\dots Y_l$, sodass
$|X| < |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.



Allgemeine Globale Eigenschaften von CR-Graphen

$C(G)$ enthält keinen anisotropen Pfad $XY_1Y_2 \dots Y_l$, sodass $|X| < |Y_1| = |Y_2| = \dots = |Y_l|$ und die Zelle Y_l heterogen ist.



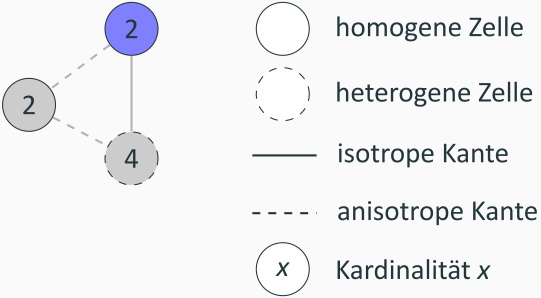
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.

Definition

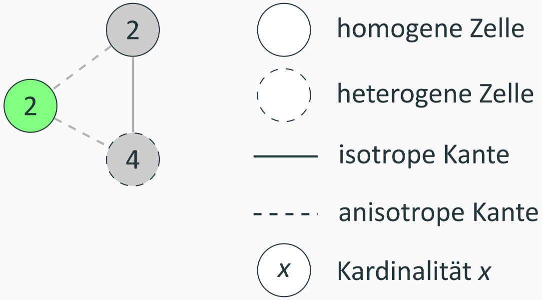
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



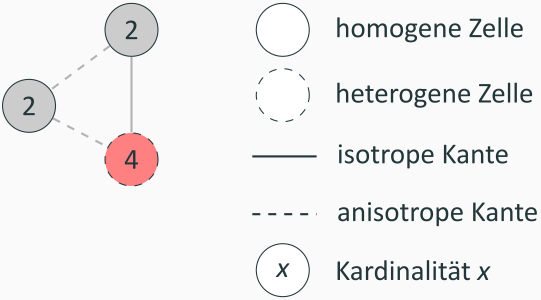
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



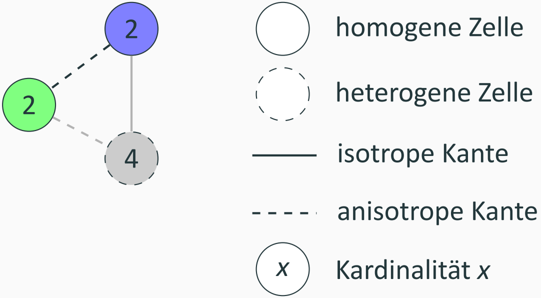
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



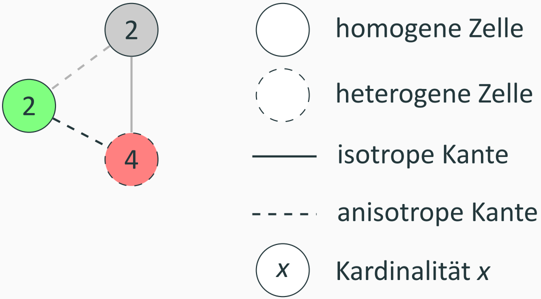
Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



Definition

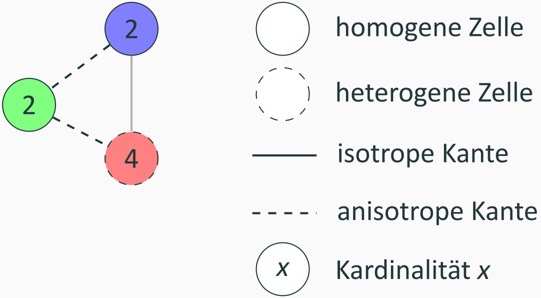
In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



Definition

Definition

In einem Zellgraphen $C(G)$ bezeichnet eine **anisotrope Komponente** einen Subgraphen, dessen Kanten alle anisotrop sind.



Lemma

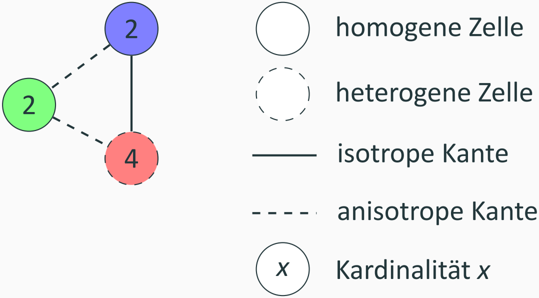
*Angenommen ein CR-Graph G erfüllt die Bedingungen **A-F**. Für jede anisotrope Komponente A von $C(G)$ gelten folgende Eigenschaften:*

(G) A ist ein Baum, der folgende Monotonieeigenschaft erfüllt: Sei R eine Zelle aus A mit minimaler Kardinalität, so ist A_R der gerichtete Baum mit Wurzel R; Für jede gerichtete Kante (X, Y) aus A_R gilt dann $|X| \leq |Y|$.

Baumartige Struktur von CR-Graphen

A ist ein Baum, der folgende Monotonieeigenschaft erfüllt: Sei R eine Zelle aus A mit minimaler Kardinalität, so ist A_R der gerichtete Baum mit Wurzel R; Für jede gerichtete Kante (X, Y) aus A_R gilt dann

$$|X| \leq |Y|.$$



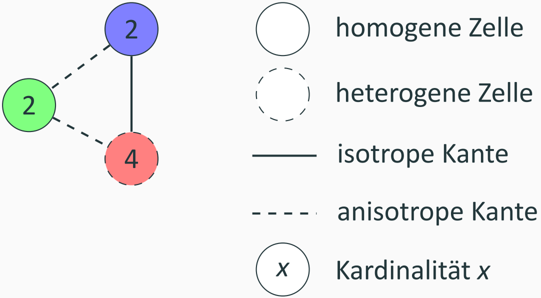
Lemma

*Angenommen ein CR-Graph G erfüllt die Bedingungen **A-F**. Für jede anisotrope Komponente A von $C(G)$ gelten folgende Eigenschaften:*

(G) A ist ein Baum, der folgende Monotonieeigenschaft erfüllt: Sei R eine Zelle aus A mit minimaler Kardinalität, so ist A_R der gerichtete Baum mit Wurzel R; Für jede gerichtete Kante (X, Y) aus A_R gilt dann $|X| \leq |Y|$.

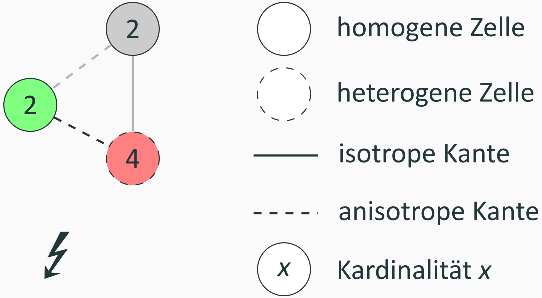
(H) A enthält maximal eine heterogene Zelle; Wenn eine solche Zelle existiert, hat diese minimale Kardinalität in A.

A enthält maximal eine heterogene Zelle; Wenn eine solche Zelle existiert, hat diese minimale Kardinalität in A.



Baumartige Struktur von CR-Graphen

A enthält maximal eine heterogene Zelle; Wenn eine solche Zelle existiert, hat diese minimale Kardinalität in A.



Was bringt mir jetzt das ganze?

Hinreichende Bedingung für CR-Graphen

Theorem

Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) G ist ein CR-Graph

(b) G erfüllt Bedingungen A-F

(c) G erfüllt Bedingungen A, B, G *und* H

Theorem

Für einen Graphen G sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) G ist ein CR-Graph

(b) G erfüllt Bedingungen A-F

(c) G erfüllt Bedingungen A, B, G *und* H

Wir können also jetzt CR-Graphen erkennen!

Laufzeit

Für das Erkennen von CR-Graphen dominiert die Laufzeit zum Berechnen der stabilen Partition.

$\Rightarrow O((n + m) \log n)$

Haupterkenntnis

Für die Klasse der CR-Graphen lässt sich das Isomorphieproblem mit dem Color-Refinement **in polynomieller Zeit** lösen.

Es kann **in polynomieller Zeit** entschieden werden, ob ein Graph ein CR-Graph ist.