

ON THE POWER OF COLOR REFINEMENT

V. ARVIND, JOHANNES KÖBLER, GAURAV RATTAN UND
OLEG VERBITSKY

Florian Lüdiger

05.02.2018

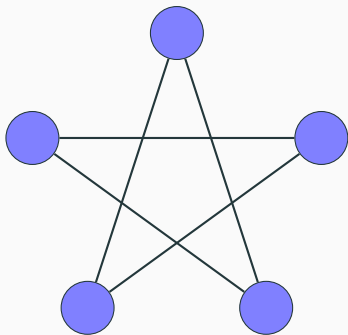
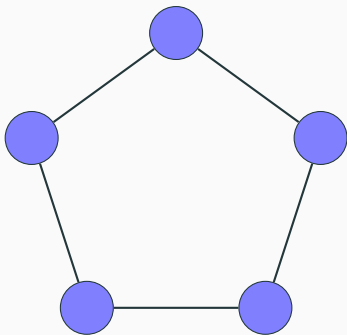
Seminar Algorithm Engineering - Lehrstuhl 11 - TU Dortmund

WIEDERHOLUNG: GRAPH-ISOMORPHIE UND COLOR-REFINEMENT

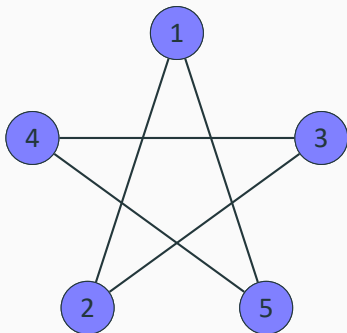
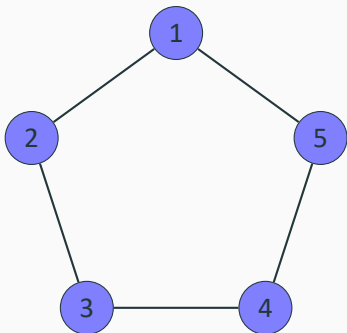
Definition

Zwei Graphen G und H sind **isomorph**, wenn es eine bijektive Abbildung ϕ gibt, sodass gilt:

$$(u, v) \in E_G \Leftrightarrow (\phi(u), \phi(v)) \in E_H \text{ für alle } u, v \in V_G.$$



BEISPIEL



Definition

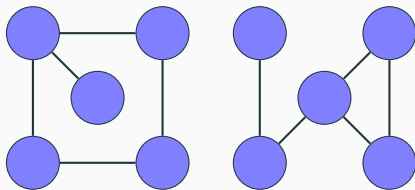
Mit der Color-Refinement-Heuristik kann in polynomieller Zeit festgestellt werden, dass zwei Graphen **nicht isomorph** sind.

Anders gesagt gilt für beliebige Graphen G, H :

- 1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\cong H$

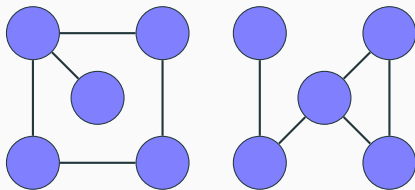
BEISPIEL

1)

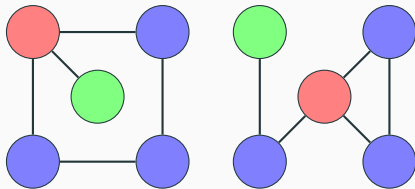


BEISPIEL

1)

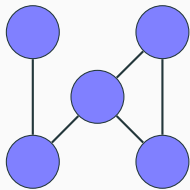
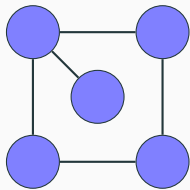


2)

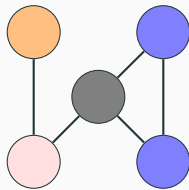
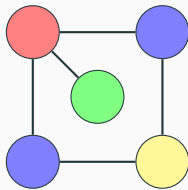


BEISPIEL

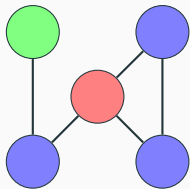
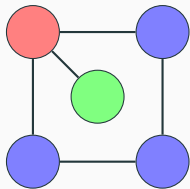
1)



3)

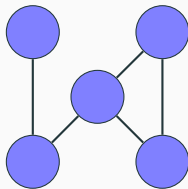
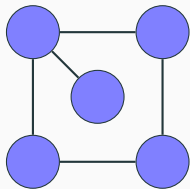


2)

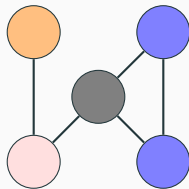
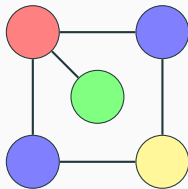


BEISPIEL

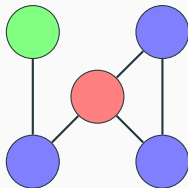
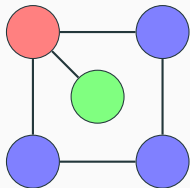
1)



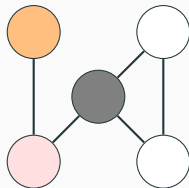
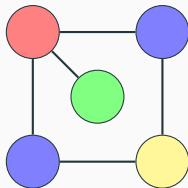
3)



2)

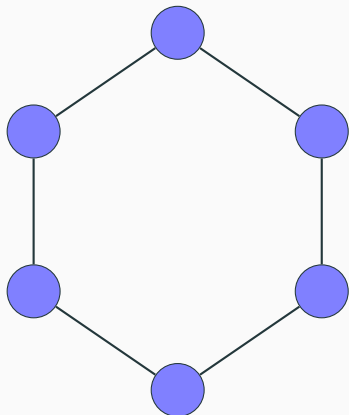


4)

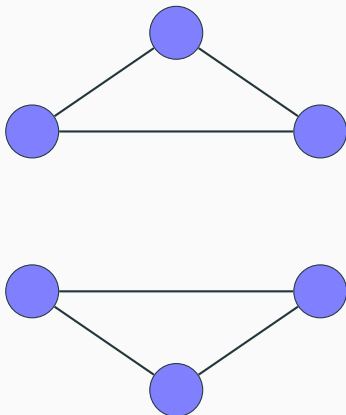


LIMITIERUNG DER HEURISTIK

Es gibt nicht-isomorphe Graphenpaare, welche das Color-Refinement nicht unterscheiden kann.



$\not\cong$



WAS GIBT ES NEUES?

Definition

Graph G ist **CR-Graph**, wenn das Color-Refinement diesen von jedem nicht zu G isomorphen Graphen H unterscheiden kann.

Für beliebige CR-Graphen G, H gilt also:

$$\textcircled{2} \quad G \not\cong H \Rightarrow \text{CR unterscheidet } G \text{ und } H$$

- 1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
- 2 $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

Korollar

Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

- 1 CR unterscheidet G und $H \Rightarrow G \not\simeq H$
- 2 $G \not\simeq H \Rightarrow$ CR unterscheidet G und H

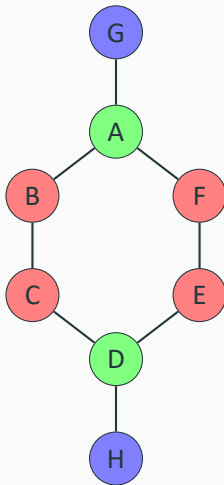
Korollar

Für zwei CR-Graphen G und H gilt:

CR erkennt G und H als isomorph $\Leftrightarrow G \simeq H$

Wie identifiziere ich also die Klasse der CR-Graphen?

BEGRIFFSERKLÄRUNGEN UND ANWENDUNGSBEISPIEL



Definition

Die **Partitionierung** \mathcal{P} teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Die **Partitionierung** \mathcal{P} teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** \mathcal{P}^s genannt.

Definition

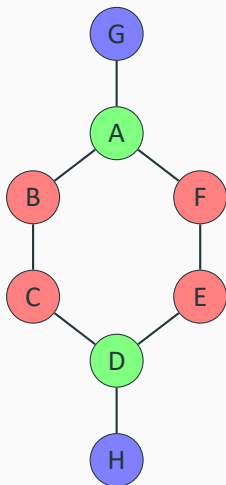
Die **Partitionierung** \mathcal{P} teilt den Graphen G in die Farbklassen eines Verfeinerungsschritts ein.

Definition

Wenn sich die Partitionierung bei weiteren Verfeinerungsschritten nicht mehr ändert, wird diese **stabile Partitionierung** \mathcal{P}^s genannt.

Definition

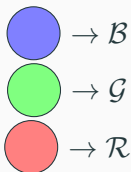
Die einzelnen Partitionen innerhalb der Partitionierung werden **Zellen** genannt.



„Partitionierung“

„stabile Partitionierung“

„Zellen“



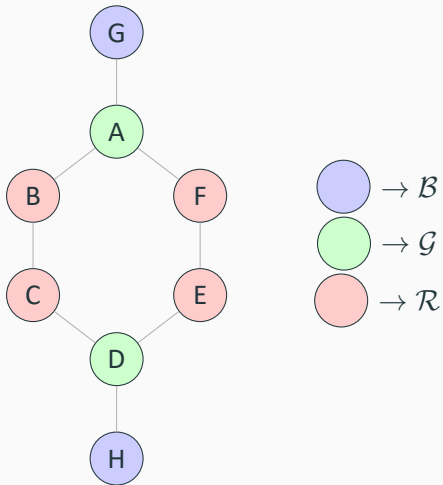
LOKALE STRUKTUR

Lemma

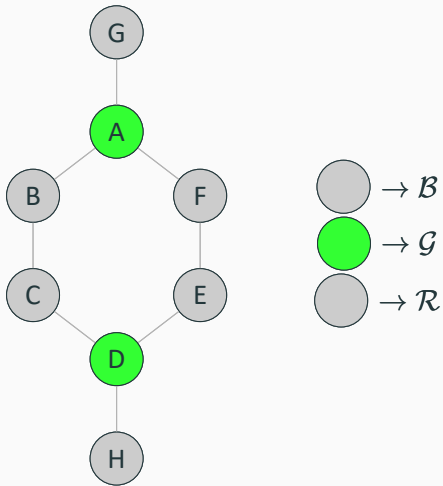
Die Zellen der stabilen Partition \mathcal{P}_G eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

- (A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2 , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*

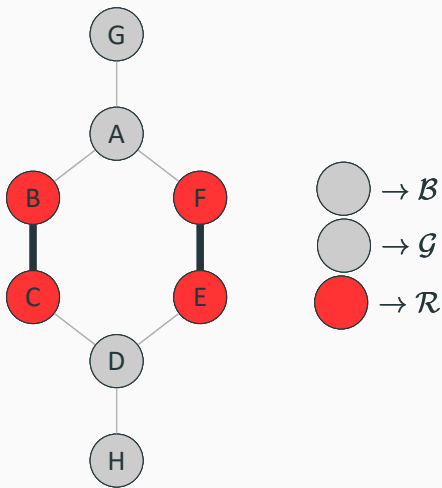
AM BEISPIEL



AM BEISPIEL - LEERER GRAPH



AM BEISPIEL - MATCHING-GRAPH



Lemma

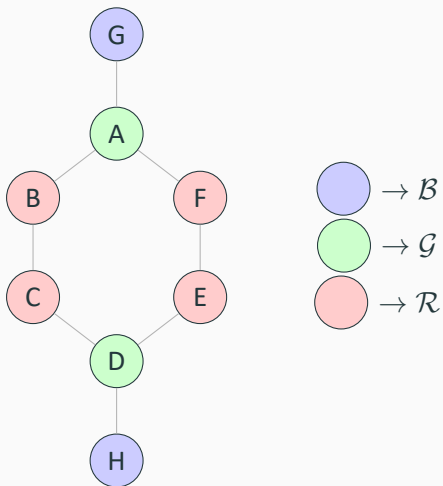
Die Zellen der stabilen Partition \mathcal{P}_G eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

- (A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2 , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*

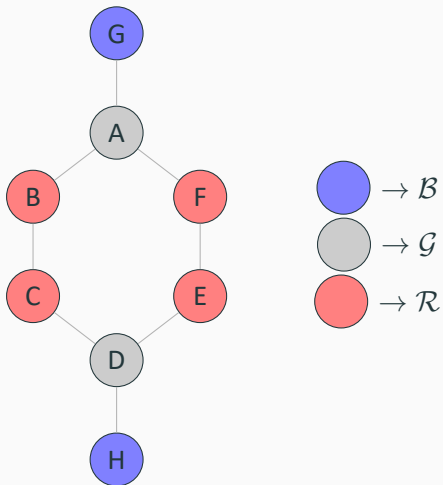
Lemma

Die Zellen der stabilen Partition \mathcal{P}_G eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

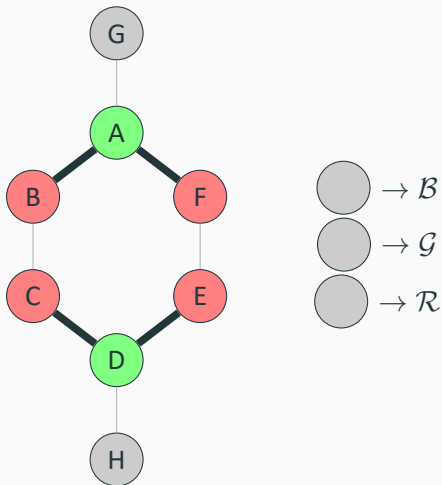
- (A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2 , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*
- (B) Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der X die Menge der s inneren Knoten und Y die Menge der t Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.*



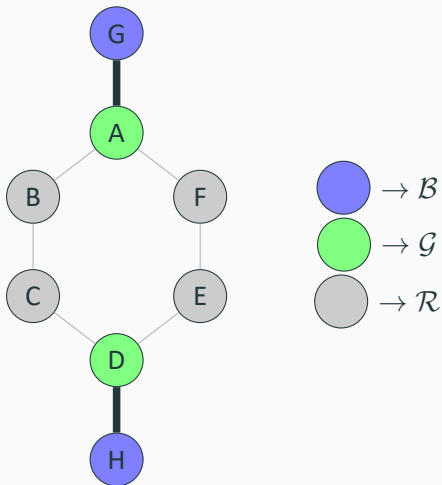
AM BEISPIEL - LEERER GRAPH



AM BEISPIEL - DISJUNKTE VEREINIGUNG VON STERNEN $sK_{1,t}$



AM BEISPIEL - MATCHING GRAPH*



Lemma

Die Zellen der stabilen Partition \mathcal{P}_G eines CR-Graphen erfüllen folgende Eigenschaften:

- (A) Für beliebige Zellen $X \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X]$ ein leerer Graph, vollständiger Graph, Matching-Graph mK_2 , das Komplement eines Matching Graphen oder der 5-Kreis.*
- (B) Für beliebige Zellen $X, Y \in \mathcal{P}_G$ ist $G[X, Y]$ ein leerer Graph, vollständiger bipartiter Graph, eine disjunkte Vereinigung von Sternen $sK_{1,t}$, bei der X die Menge der s inneren Knoten und Y die Menge der t Blätter ist, oder das bipartite Komplement des zuletzt genannten Graphen.*

GLOBALE STRUKTUR

ERGEBNIS

Anwendung der vorgestellten Bedingungen

Anwendungsbeispiel

BACKUP-FOLIEN

Beweis lokale Struktur

Ein Beweis für globale Struktur beispielhaft