

$$f \in \text{End}(V)$$

Endomorfisme Diagonalizare

$x \neq 0_V$ s.n. vector propriu $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ ai $f(x) = \lambda x$
 $\lambda = \text{valoare proprie.}$

$$V_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\} \text{ subspatiu propriu.}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$$

• valorile proprii = răd din \mathbb{K} ale polin. caracteristic

$$P(\lambda) = 0 \Rightarrow (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} = 0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_k = \text{valori proprii distincte.}$

$m_1, \dots, m_k = \text{multiplicități.}$

Ⓙ \exists un reper R în V ai $[f]_{R,R}$ diagonală \Leftrightarrow

1) $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$

2) $\dim V_{\lambda_i} = m_i, \forall i = \overline{1, k}$

⑤ $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4, f(x) = (x_2 - x_3 + x_4, x_2 - x_3 + x_4, x_4, x_4)$

a) Să se afle valorile proprii

b) Precizați care sunt subspatiile proprii

c) \exists un reper R în \mathbb{R}^4 ai $[f]_{R,R}$ este diagonală?

⑥ Fie $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ liniară

$$A = [f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Să se afle valorile proprii și subsp. proprii corrisp.

b) $U = \langle \{e_1 + 2e_2, e_2 + e_3 + 2e_4\} \rangle$ Să se arate că U este subsp. invariant al lui f i.e. $f(U) \subset U$.

⑦ $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_2, x_3, 2x_1 - 5x_2 + 4x_3)$

Să se arate că f nu este un endomorfism diagonalizabil.

Endomorfisme diagonalizabile

⑧ Fie $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$, $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic în \mathbb{R}^3

a) $\begin{cases} f(e_1) = e_2 \\ f(e_2) = e_1 + e_2 + e_3 \\ f(e_3) = e_2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(e_1) = e_3 \\ f(e_2) = e_2 \\ f(e_3) = e_1 \end{cases}$

Precizați dacă există un reper R în \mathbb{R}^3 ai $[f]_{R,R}$ este matrice diagonală.

⑨ Fie $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$, $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic în \mathbb{R}^3

a) $[f]_{R_0, R_0} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $[f]_{R_0, R_0} = A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $[f]_{R_0, R_0} = A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

Precizați dacă \exists un reper R în \mathbb{R}^3 ai $[f]_{R,R}$ este matrice diagonală. În caz afirmativ, să se detaceasta.

⑩ Fie $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$, $[f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} = A$

a) Det valorile proprii și subspațiile proprii coresp.

b) Det R reper în \mathbb{R}^3 ai $[f]_{R,R} = A' = \text{diagonală}$

c) $R_0 \xrightarrow{C} R$ Det. C

d) Să se calculeze A^n .

14) Fie sirul Fibonacci $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$

a) Determinati matricea A cu

$$\begin{pmatrix} f_{n+2} \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix}$$

b) Diagonalizati A si calculati A^n .

c) $f_n = ?$

15) $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$

Daca $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 1$ sunt valorile proprii si

$v_1 = (-3, 2, 1), v_2 = (-2, 1, 0), v_3 = (-6, 3, 1)$ sunt vectorii proprii corresp,
atunci care este matricea $A = [f]_{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0}$?

16) Fie $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x) = (4x_1 + x_2 + x_3, x_1 + 4x_2 + x_3, x_1 + x_2 + 4x_3)$

Precizati daca \exists un reper \mathcal{R} in rap. cu care
 $[f]_{\mathcal{R}, \mathcal{R}}$ este diagonală.