Ex. 1: Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{641-x}=7,\quad x\in[0,641].$$

Rez:

Notăm $\sqrt[4]{x}=a$, $\sqrt[4]{641-x}=b$

$a^4=x$, $b^4=641-x$.

$$\begin{cases} a+b=7 \\ a^4+b^4=641 \end{cases}$$

Ideea de rezolvare: construim o ec. de gr. al II-lea X^2-sX+p cu rădăcinile a, b.

Scriem a^4+b^4 în funcție de $a+b=s$, $a\cdot b=p$.

$$a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=[(a+b)^2-2ab]^2-2(ab)^2.$$

$$=(s^2-2p)^2-2p^2=s^4-4s^2p+2p^2.$$

$$\begin{cases} s=7 \\ 2p^2-4\cdot 49p+7^4=641 \end{cases}$$

$$2p^2-196p+1760=0 \quad |:2$$

$$p^2-98p+880=0.$$

$\Delta=6084=78^2$

$p_1=10$, $p_2=\frac{98+78}{2}=88.$

Cazul 1: $s=7, p=10$: $X^2-7X+10=0$

$x_{1,2}\in\{5,2\}$. $\Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=5 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a=5 \\ b=2 \end{cases}$

$\Downarrow$ $\boxed{x=16}$ $\qquad$ $\Downarrow$ $\boxed{x=625}$.

Cazul 2: $s=7, p=88$; $X^2-7X+44=0$, $\Delta<0$ Nu are sol.

Obs: $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$.

Obs: $m \in \mathbb{N}^*$, $X^m - 1 \in \mathbb{C}[X]$.
Rădăcinile sale sunt: $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \dots, \varepsilon^{m-1}$, unde
$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{m} + i\sin\frac{2\pi}{m}$.
Din rel. lui Viète pt. $X^m - 1$ obținem:
$$1 + \varepsilon + \dots + \varepsilon^{m-1} = 0.$$

Ex. 2: Arătați că $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \mid \underbrace{x^{44} + x^{33} + x^{22} + x^{11} + 1}_{g}$.

Rez:
$f = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ - răd. sale sunt $\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4$,
unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ $(\varepsilon^5 = 1)$.
$$X^m - 1 = (X-1)(X^{m-1} + X^{m-2} + \dots + X + 1)$$
$$X^m - 1 = (X-1)(X-\varepsilon_m)(X-\varepsilon_m^2)\dots(X-\varepsilon_m^{m-1})$$
$$f \mid g \iff g(\varepsilon^k) = 0, \ \forall k \in \{1,2,3,4\}.$$
$$g(\varepsilon) = \varepsilon^{44} + \varepsilon^{33} + \varepsilon^{22} + \varepsilon^{11} + 1 =$$
$$= \underbrace{(\varepsilon^5)^8}_{1} \cdot \varepsilon^4 + \underbrace{(\varepsilon^5)^6}_{1} \cdot \varepsilon^3 + \underbrace{(\varepsilon^5)^4}_{1} \varepsilon^2 + \underbrace{(\varepsilon^5)^2}_{1} \varepsilon + 1$$
$$= \varepsilon^4 + \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$
Analog se arată $g(\varepsilon^2) = g(\varepsilon^3) = g(\varepsilon^4) = 0$.

Ex. 3: Det. $m \in \mathbb{N}$ a.î. $x^2 + x + 1 \mid x^{2m} + x^m + 1$.

Rez: $x^2 + x + 1$ are răd. $\varepsilon = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $\varepsilon^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$
$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$, $\varepsilon^3 = 1$.

$\underbrace{X^2+X+1}_{f} \mid \underbrace{X^{2n}+X^{n}+1}_{g} \iff \begin{cases} \varepsilon^{2n}+\varepsilon^{n}+1=0 & (g(\varepsilon)=0) \\ \varepsilon^{4n}+\varepsilon^{2n}+1=0 & (g(\varepsilon^2)=0) \end{cases}$

$\varepsilon^{4n}+\varepsilon^{2n}+1 = (\varepsilon^{3})^{n}\cdot\varepsilon^{n}+\varepsilon^{2n}+1 = \varepsilon^{2n}+\varepsilon^{n}+1$

$f \mid g \iff \varepsilon^{2n}+\varepsilon^{n}+1=0$

Discuție în funcție de restul împărțirii lui n la 3:

- $n=3k$,

$\varepsilon^{2n}+\varepsilon^{n}+1=0 \iff \varepsilon^{6k}+\varepsilon^{3k}+1=0 \iff 3=0$ Ab.

- $n=3k+1$

$\varepsilon^{2n}+\varepsilon^{n}+1=0 \iff \varepsilon^{6k+2}+\varepsilon^{3k+1}+1=0$

$\iff \varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. ✓.

- $n=3k+2$,

$\varepsilon^{2n}+\varepsilon^{n}+1=0 \iff \varepsilon^{\overset{3(2k+1)+1}{6k+4}}+\varepsilon^{3k+2}+1=0$

$\iff \varepsilon+\varepsilon^{2}+1=0$ ✓.

$f \mid g \iff n\in\mathbb{N},\ 3\nmid n$.

Ex. 4: Ce condiții trebuie să satisfacă $m, n, p \in \mathbb{N}^*$ a.î. $X^4+X^2+1 \mid X^{3m}+X^{3n+1}+X^{3p+2}$?

Rez:

$X^4+X^2+1 = \underbrace{(X^2+X+1)}_{\varepsilon_1^3=1}\underbrace{(X^2-X+1)}_{\varepsilon_2^3=-1}$

$X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$

$X^3+1=(X+1)(X^2-X+1)$

Avem că $\boxed{\varepsilon^6=1}$

$X^6-1=(X^3-1)(X^3+1)=(X-1)(X+1)(X^2+X+1)(X^2-X+1)$

$g=X^{3m}+X^{3n+1}+X^{3p+2}$

$g(\varepsilon_1)=1+\varepsilon_1+\varepsilon_1^{2}=0$

$g(\varepsilon_2)=(-1)^m+(-1)^n\cdot\varepsilon_2+(-1)^p\cdot\varepsilon_2^{2}$.

$\Rightarrow$ ... $[m\equiv p \pmod 2),\ m\not\equiv p \pmod 2).]$

Polinoame ireductibile. Criteriul lui Eisenstein

Pt. polinoame monice: $f=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0\in\mathbb{Z}[X]$

Dacă $\exists\, p$ prim ($p\in\mathbb{N}$) a.î. $p\mid a_i$, $\forall i\in\{0,\ldots,n-1\}$ și $p^2\nmid a_0$, atunci f este ired. în $\mathbb{Q}[X]$ (în $\mathbb{Z}[X]$).

Pt. polinoame oarecare: $f=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_1X+a_0\in\mathbb{Z}[X]$

$\exists\, p$ prim, $p\mid a_i$ $\forall i\in\{0,\ldots,n-1\}$, $p^2\nmid a_0$ și $p\nmid a_n$
$\Rightarrow f$ ired. în $\mathbb{Q}[X]$.

Ex. 5: Dem. că următ. polinoame sunt ired. în $\mathbb{Q}[X]$:

a. X^4-4X^3+6

b. $X^6+30X^5-15X^3+6X-120$

c. $X^4+4X^3+6X^2+2X+1$

d. $18X^5-30X^2+120X+360$.

e. $X^{100}-5^7$.

Rez:

a. Aplicăm Crit. lui Eisenstein pt. $p=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f=X^4-4X^3+6 \\ 2\mid 6,0,-4 \\ 2^2\nmid 6 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ ired. conform Eisenstein } p=2.$$

b. $f = X^6 + 30X^5 - \underset{30}{15}X^3 + 6X - \underline{120}$.

Apl. crit. lui Eisenstein pt. $p=3$.

c. $X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 2X + 1 = f$

Nu se poate aplica Eisenstein în această formă.

Obs.: $f(X)$ ired $\Leftrightarrow$ $f(X+1)$ ired.

$X \longmapsto X+1$

$$(X+1)^4 + 4(X+1)^3 + 6(X+1)^2 + 2(X+1) + 1 =$$
$$= X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1 + 4(X^3 + 3X^2 + 3X + 1) +$$
$$+ 6(X^2 + 2X + 1) + 2X + 2 + 1$$
$$= X^4 + 8X^3 + 24X^2 + 30X + 14.$$

În acest caz, putem aplica crit. lui Eisenstein pt. $p=2$. $\Rightarrow f(X+1)$ ired $\Rightarrow f(X)$ ired în $\mathbb{Q}[X]$.

d. $f = 18X^5 - 30X^2 + 120X + 360$
$$= 6(3X^5 - 5X^2 + 20X + 60)$$

Se aplică crit. lui Eisenstein pt. $p=5$.

$\Rightarrow f$ ired. în $\underline{\mathbb{Q}[X]}$

e. $X^{100} - 5^7 = f$ (Ex).

Răd. lui f sunt $a = \sqrt[100]{5^7}$, $a\cdot\varepsilon, \ldots, a\cdot\varepsilon^{99}$

unde $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{100} + i\sin\frac{2\pi}{100}$

$X \longmapsto X+1$

$$f(X+1) = X^{100} + C_{100}^{1}X^{99} + \ldots + C_{100}^{99}X + 1 - 5^7$$
$$1 - 5^7 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod 4.$$

În $\mathbb{C}[X]$: $X^{100}-5^7=(X-a)(X-a\varepsilon)\dots(X-a\varepsilon^{99})$

Dacă f ar fi reductibil în $\mathbb{Q}[X]$:

$$f=g\cdot h, \quad g,h\in\mathbb{Q}[X].$$

$$g=\prod_{k\in A}(X-a\varepsilon^k), \quad h=\prod_{j\in B}(X-a\varepsilon^j)$$

cu $A\cup B=\{0,1,\dots,99\}$, $A\cap B=\emptyset$.

$g,h\in\mathbb{Q}[X]\to$ Rel. lui Viète obținem coeficienții

$$a\cdot\sum_{k\in A}\varepsilon^k\in\mathbb{Q}$$

$$a^2\sum_{\substack{k\neq i\\ k,i\in A}}\varepsilon^i\varepsilon^k\in\mathbb{Q}$$

$\vdots$

$$a^t\prod_{k\in A}\varepsilon^k\in\mathbb{Q}, \quad t=|A|.$$

$$a=\sqrt[100]{5^7}$$

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{100}+i\sin\frac{2\pi}{100}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}.$$

$$\prod_{k\in A}\varepsilon^k\in\mathbb{Q} \iff \sin\frac{\pi\sum_{k\in A}k}{50}=0\iff\sum_{k\in A}k\ \vdots\ 50$$

$$a^t\in\mathbb{Q}\iff\sqrt[100]{5^{7t}}\in\mathbb{Q}\iff\left.\begin{array}{l}100\mid 7t\\(100,7)=1\end{array}\right\}\Rightarrow 100\mid t$$

$\Rightarrow g=f.$

Obs: În $\mathbb{R}[X]$ singurele polinoame ired. sunt:
- polinoamele de grad 1
- polinoamele de grad 2 fără rădăcini reale.

Obs: $f \in K[X]$ de grad 2 sau 3
f ired $\Leftrightarrow$ f nu are rădăcini în K.

Contraexemplu:

- $f = X^4 + X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$
  nu are rădăcini în $\mathbb{Q}$ $(\mathbb{R})$.

Dar f este reductibil.

$$X^4+X^2+1 = (X^2+aX+b)(X^2+cX+d)$$

$$X^4+X^2+1 = X^4+(a+c)X^3+(b+d+ac)X^2+(ad+bc)X+bd$$

$$\begin{cases} a+c=0 \Rightarrow c=-a \\ b+d+ac=1 \\ ad+bc=0 \quad \Rightarrow a(d-b)=0 \quad \begin{matrix} \nearrow a=0 \\ \searrow b=d \end{matrix} \\ bd=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+d=1 \\ bd=1 \end{cases} \rightarrow X^2-X+1=0 \text{ nu are sol. reale}$$

$\Rightarrow b=d$

$bd=1 \Rightarrow b=\pm 1$

$b=-1 \Rightarrow -2-a^2=1$ Abs.

$b=1 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1.$

$$X^4+X^2+1 = (X^2+X+1)(X^2-X+1).$$