Seminar 9

8.12.2020

Prb 1 Se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in S_{10}$

1) Descompuneți σ în produs de cicli disjuncți și în produs de transpoziții.
2) Aflați $\mathrm{sgn}(\sigma)$ și calculați σ^{2017}, $\mathrm{ord}(\sigma)$, σ^{-1}.
3) Determinați toate permutările $\tau \in S_{10}$ cu proprietatea că $\tau^2 = \sigma$.
4) Fie $\rho \in S_{10}$ cu $\mathrm{ord}(\rho) = 10$. Poate fi ρ permutare pară?
5) Există permutări de ordin 35 în S_{10}? Dar de ordin 30?

---

1) $\sigma = (1\ 2\ 9)(3\ 5\ 10\ 8\ 6)(4\ 7) = (1\ 2)(2\ 9)(3\ 5)(5\ 10)(10\ 8)\cdot(8\ 6)(4\ 7)$

2) $\mathrm{sgn}(\sigma) = \mathrm{sgn}((1\ 2\ 9))\,\mathrm{sgn}((3\ 5\ 10\ 8\ 6))\,\mathrm{sgn}((4\ 7)) = (-1)^{3-1}\cdot(-1)^{5-1}\cdot(-1) = -1. \Rightarrow \sigma$ este permutare impară

$\mathrm{sgn}(\sigma) = (-1)^k = (-1)^7 = -1$, unde k este nr. de transpoziții care apare în descomp. lui σ în produs de transp.

sgn ~~e~~ morfism de grupuri

$(3\ 5\ 10\ 8\ 6)^7 = (3\ 5\ 10\ 8\ 6)^2 = (3\ 10\ 6\ 5\ 8)$.

$\mathrm{ord}(3\ 5\ 10\ 8\ 6) = 5$

Deci $\sigma^7 = (1\ 2\ 9)(3\ 10\ 6\ 5\ 8)(4\ 7)$.

Obs $(\forall)\ \tau \in S_n \Rightarrow \tau^{2k}$ este o permutare pară (Dem: $\mathrm{sgn}(\tau^{2k}) \overset{\mathrm{sgn}\ \text{morfism}}{=} \mathrm{sgn}(\tau)^{2k} = (\pm 1)^{2k} = 1 \Rightarrow$ ▢)

3) Deoarece τ^2 e permutare pară iar σ e permutare impară

$\Rightarrow$ Nu există permutări $\tau \in S_{10}$ a.î. $\tau^2 = \sigma$.

Q: Ecuația (2) $\tau^3 = \sigma$ are soluții în S_{10}?

σ e permutare impară; $\mathrm{sgn}(\tau^3) \overset{!}{=} \mathrm{sgn}(\tau) \Rightarrow$ DC (2) are soluții, atunci τ tb. să fie permutare impară

↑ Revenim după ce terminăm Pb.

4) Fie $\rho \in S_{10}$ a.î. $\mathrm{ord}(\rho) = 10 \Rightarrow$ c.m.m.m.c. al lungimii ciclilor din descompunerea lui ρ e 10.

$10 = [10, 1] = [10, 5] = [10, 2] = \dots$

Desc. lui $\rho \in S_{10}$ în produs de cicli disjuncți $\Rightarrow$

1) ρ e ciclu de lungime 10 $\Rightarrow \mathrm{sgn}(\rho) = (-1)^9 = -1$

2) ρ e produs dintre 1 cicli de lungime 5 și o transpoziție $\Rightarrow \mathrm{sgn}(\rho) = (-1)^4 \cdot (-1) = -1$

3) ρ e produs dintre 1 ciclu de lungime și 2 transpoziții $\Rightarrow \mathrm{sgn}(\rho) = (-1)^1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

σ^{2017} $\quad ord(\sigma) = \text{cmmmc}(3,5,2) = 30 \Rightarrow \sigma^{30} = e.$

$$\sigma^{2017} = \sigma^{30\cdot 67+7} = (\sigma^{30})^{67}\cdot \sigma^{7} = e\cdot\sigma^{7} = \sigma^{7}$$

Sol1 (calculăm!)

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 10 & 4 & 8 & 5 & 7 & 3 & 2 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 9\ 2)(3\ 10\ 6\ 5\ 8)$$

$$\sigma^4 = \sigma^2\cdot\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 6 & 4 & 3 & 8 & 7 & 10 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 9)(3\ 6\ 8\ 10\ 5)$$

$$\sigma^6 = \sigma^4\cdot\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 10 & 3 & 7 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix} = (3\ 5\ 10\ 8\ 6)$$

$$\sigma^7 = \sigma\cdot\sigma^6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 10 & 7 & 8 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 9)(3\ 10\ 6\ 5\ 8)(4\ 7) = \sigma^{2017}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 2 & 9 & 5 & 7 & 10 & 3 & 4 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 6 & 7 & 3 & 8 & 4 & 10 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (1\ 2\ 9)(3\ 5\ 10\ 8\ 6)(4\ 7) \Rightarrow \sigma^{-1} = (9\ 2\ 1)(6\ 8\ 10\ 5\ 3)(4\ 7)$$

Sol 2

$$\sigma^7 = \left((1\ 2\ 9)(3\ 5\ 10\ 8\ 6)(4\ 7)\right)^7$$

cicli disjuncți comută

$$= (1\ 2\ 9)^7(3\ 5\ 10\ 8\ 6)^7(4\ 7)^7$$

$$ord((1\ 2\ 9)) = 3 \Rightarrow (1\ 2\ 9)^7 = (1\ 2\ 9)^{3\cdot 2+1} = (1\ 2\ 9)$$

$$ord((4\ 7)) = 2 \Rightarrow (4\ 7)^7 = (4\ 7)^{2\cdot 3+1} = (4\ 7)$$

De exemplu, $\rho = (1\,2\,3\,4\,5)(6\,7)(8\,10)$ are $ord(\rho)=10$ şi $sgn(\rho)=1$.
Deci există permutări pare $\rho \in S_{10}$ a.î. $ord(\rho)=10$.

5) $35 = 5 \cdot 7$ Pentru ca $ord(\tau)$ să fie 35 ar trebui ca cmmmc-ul lungimii ciclilor din descompunerea în produs de cicli disjuncţi a lui τ să fie 35. Cum $\tau \in S_{10}$ şi cel mai mic n a.î. $\tau \in S_n$ şi $ord(\tau)=35$ este $n=12$ (caz în care τ este produsul dintre 1 ciclu de lungime 5 şi unul de lungime 7). $\Rightarrow$ Nu există permutări de ordin 35 în S_{10}!

$30 = [5,3,2]$ $\quad 5+3+2=10$ $\Rightarrow$ Orice permutare care se scrie ca produs de 3 cicli disjuncţi, de lungimi 5,3,2, are ordin 30.
În particular, σ este un astfel de exemplu.

Pb 2 Dacă σ este m-ciclu, i.e. $\sigma = (a_1\, a_2 \dots a_m) \in S_n$ $(m \le n)$, atunci
(*) $\sigma^i(a_k) = a_{k+i}$, $i \in \{1,2,\dots,m\}$, unde $k+i$ este înlocuit de restul $k+i \pmod m$ când $k+i>m$.

cazul $i=2$ $\quad \sigma = (a_1 \to a_2 \to a_3 \to \dots \to a_m \to a_1)$

Rezolvare Ind. după i (Exc!)

$\sigma^2(j) = \sigma(\sigma(j)) = \sigma(j) = j \quad (\forall)\ j \notin \{a_1, \dots, a_m\}$

$\sigma(j) = j$

$\sigma^2(a_1) = \sigma(\sigma(a_1)) = \sigma(a_2) = a_3$; $\sigma^2(a_2) = \sigma(\sigma(a_2)) = \sigma(a_3) = a_4$

$\dots \quad \sigma^2(a_{m-2}) = \sigma(\sigma(a_{m-2})) = \sigma(a_{m-1}) = a_m$; $\sigma^2(a_{m-1}) = \sigma(\sigma(a_{m-1})) = \sigma(a_m) = a_1$

$\sigma^2(a_m) = \sigma(\sigma(a_m)) = \sigma(a_1) = a_2$

$(a_1\, a_2\, \dots\, a_m)^2 \longrightarrow$

$a_1 \longmapsto a_3$
$a_2 \longmapsto a_4$
$a_3 \longmapsto a_5$
$\vdots$
$a_{m-1} \longmapsto a_1$
$a_m \longmapsto a_2$

Obs **Atenție!** Dacă σ este un m-ciclu nu înseamnă neapărat că σ^i rămâne un m-ciclu.

Exemplu 1) $\sigma = (1\,2\,3\,4) \in S_4$

$$\sigma^2 = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \to 3 \\ 2 \to 4 \\ 3 \to 1 \\ 4 \to 2 \end{pmatrix}} = (1\,3)(2\,4)$$

2) $\sigma = (\underset{a_1}{1}\ \underset{a_2}{2}\ \underset{a_3}{3}\ \underset{a_4}{4}\ \underset{a_5}{5}\ \underset{a_6}{6}\ \underset{a_7}{7}\ \underset{a_8}{8}\ \underset{a_9}{9}\ \underset{a_{10}}{10}) \in S_{10}$

$\sigma^5 = (1\ 6)(2\ 7)(3\ 8)(4\ 9)(5\ 10) \to$ produs de 5 cicli disjuncți de lungime 2.

$\sigma^5(a_6) = a_1$
$m = 10$

$\sigma^3 = (1\ 4\ 7\ 10\ 3\ 6\ 9\ 2\ 5\ 8)$
$\Rightarrow$ ciclu de lungime 10.

Prb 3 Fie σ un m-ciclu. Atunci σ^i este m-ciclu $\iff (i,m)=1$.
(Exc!)

("$\Rightarrow$" simplă: σ^i e m-ciclu $\Rightarrow$ $\mathrm{ord}(\sigma^i) = m$ $\Big| \Rightarrow (i,m)=1$)

$\| $ vezi S8

$\dfrac{\mathrm{ord}(\sigma)}{(i,m)} = \dfrac{m}{(i,m)}$

"$\Leftarrow$" Temă

10 $\qquad$ 5|10 $\qquad$ $\sigma^5 =$

Prb 4 Fie σ un m-ciclu și $d|m$. Atunci σ^d este un produs de d cicli disjuncți de lungime $\frac{m}{d}$. (Exc!)

Q $(\exists)\ \tau \in S_{10}$ a.î. $\tau^3 = \sigma$? $\qquad \sigma = (1\,2\,9)(3\,5\,10\,8\,6)(4\,7)$

Fie $\tau = c_{i_1} \circ c_{i_2} \circ \dots \circ c_{i_k}$ descompunerea lui τ în produs de cicli disjuncți, unde $\mathrm{ord}(c_{i_j}) = i_j$ $(\forall)\, j$ și $i_1 + i_2 + \dots + i_k = 10$.

$$\tau^3 = c_{i_1}^3 \cdot c_{i_2}^3 \cdot \ldots \cdot c_{i_k}^3$$
$$\|$$
$$\sigma = (1\,2\,9)\cdot(3\,5\,10\,8\,6)(4\,7)$$

$c_{i_j}^3$ este $\xrightarrow{\text{Prb4}}$ $3 | i_j \Rightarrow c_{i_j}^3$ este un produs de 3 cicli disj. de lungimi egale cu $i_j/3$

sau

$\xrightarrow{\text{Prb3}}$ $3 \nmid i_j \ (\iff (3, i_j) = 1)$

$c_{i_j}^3$ este tot un ciclu de lungime i_j

Din unicitatea descompunerii în produs de cicli disjuncți $\Longrightarrow$ $\underline{k=3}$

$\underline{\text{Exc!}}$

și după o eventuală permutare a indicilor i_1, i_2, i_3

$c_{i_1}^3 = (1\ 2\ 9)$ $\underline{\text{Exc}}$ $\mathcal{X}$

$c_{i_2}^3 = (3\ 5\ 10\ 8\ 6)$ se poate

$c_{i_3}^3 = (4\ 7)$ se poate.