

Propoziția 1.28

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{Form}$.

- (i) Dacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$, atunci $\Gamma \models \psi$.
- (ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \models \psi$ ddacă $\Gamma \models \varphi \rightarrow \psi$.
- (iii) $\Gamma \models \varphi \wedge \psi$ ddacă $\Gamma \models \varphi$ și $\Gamma \models \psi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.29

Fie Γ o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) Γ este nesatisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă φ .
- (iii) $\Gamma \models \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ .
- (iv) $\Gamma \models \perp$.

Dem.: Exercițiu ușor.

49

Propoziția 1.30

Fie Γ o mulțime de formule.

- (i) $\Gamma \models \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.
- (ii) $\Gamma \models \neg\varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesatisfiabilă.
- (iii) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci cel puțin una dintre $\Gamma \cup \{\varphi\}$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

Dem.:

- (i) Avem că $\Gamma \not\models \varphi \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma$ și $e^+(\varphi) = 0 \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma$ și $e^+(\neg\varphi) = 1 \iff$ există o evaluare $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ a.î. $e \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.
- (ii) Similar.
- (iii) Fie e un model al lui Γ . Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $e^+(\varphi) = 0$, deci $e^+(\neg\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. □

50

Propoziția 1.31

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

- (i) $\Gamma \sim \{\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n\}$.
- (ii) $\Gamma \models \psi$ ddacă $\models \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \psi$.
- (iii) Γ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \dots \vee \neg\varphi_n$ este tautologie.
- (iv) Dacă $\Delta = \{\psi_1, \dots, \psi_k\}$ este o altă mulțime finită de formule, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:
 - (a) $\Gamma \sim \Delta$.
 - (b) $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \sim \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k$.

Dem.: Exercițiu.

51

Teorema de compacitate - versiunea 1

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 2

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

Teorema de compacitate - versiunea 3

Pentru orice mulțime Γ de formule și pentru orice formulă φ , $\Gamma \models \varphi$ ddacă există o submulțime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \models \varphi$.

Propoziția 1.32

Cele trei versiuni sunt echivalente.

Dem.: Exercițiu.

52

Lema 1.33

Fie Γ finit satisfiabilă. Atunci există un șir (ε_n) în $\{0, 1\}$ care satisface, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

P_n Orice submulțime finită Δ a lui Γ are un model $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ care satisface $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$.

Dem.: Definim șirul (ε_n) prin inducție după $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0$. Avem următoarele cazuri:

(1₀) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ , există un model e al lui Δ a.î. $e(v_0) = 0$. Definim $\varepsilon_0 := 0$.

(2₀) Există o submulțime finită Δ_0 a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_0 , avem $e(v_0) = 1$. Definim $\varepsilon_0 := 1$.

Demonstrăm că **P_0** este satisfăcută. În cazul (1₀) este evident. Să considerăm cazul (2₀). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ . Atunci $\Delta \cup \Delta_0$ este o submulțime finită a lui Γ . Deoarece Γ este finit satisfiabilă, $\Delta \cup \Delta_0$ are un model e . Rezultă că $e \models \Delta$ și, din faptul că $e \models \Delta_0$, obținem că $e(v_0) = 1 = \varepsilon_0$.

53

Pasul de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că am definit $\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_n$ a.î. **P_n** este satisfăcută. Avem următoarele cazuri:

(1 _{$n+1$}) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ , există un model e al lui Δ a.î.

$e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ și $e(v_{n+1}) = 0$.

Definim $\varepsilon_{n+1} := 0$.

(2 _{$n+1$}) Există o submulțime finită Δ_{n+1} a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_{n+1} , avem

$e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ implică $e(v_{n+1}) = 1$.

Definim $\varepsilon_{n+1} := 1$.

Demonstrăm că **P_{n+1}** este satisfăcută. În cazul (1 _{$n+1$}) este evident. Să considerăm cazul (2 _{$n+1$}). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ . Atunci $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ este o submulțime finită a lui Γ . Prin urmare, conform **P_n** , există un model e al lui $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, n\}$. Din (2 _{$n+1$}), obținem și $e(v_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$. □

54

Teorema 1.34 (Teorema de compacitate)

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă dacă Γ este finit satisfiabilă.

Dem.: " \Rightarrow " Evident.

" \Leftarrow " Presupunem că Γ este finit satisfiabilă. Definim

$$\bar{e} : V \rightarrow \{0, 1\}, \quad \bar{e}(v_n) = \varepsilon_n,$$

unde (ε_n) este șirul construit în lema precedentă (Lema 1.33).

Demonstrăm că \bar{e} este model al lui Γ . Fie $\varphi \in \Gamma$ arbitrară și fie $k \in \mathbb{N}$ a.î. $\text{Var}(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \dots, v_k\}$. Deoarece $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ este o submulțime finită a lui Γ , putem aplica Proprietatea **P_k** pentru a obține un model e al lui φ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k\}$. Atunci $\bar{e}(v) = e(v)$ pentru orice variabilă $v \in \text{Var}(\varphi)$. Aplicând Propoziția 1.13, rezultă că $\bar{e}^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $\bar{e} \models \varphi$.

Prin urmare, \bar{e} este model al lui Γ , deci Γ este satisfiabilă. □

55

SINTAXA LP

56

Folosim un **sistem deductiv** de tip Hilbert pentru LP .

Axiomele logice

Mulțimea Axm a **axiomelor** lui LP constă din toate formulele de forma:

$$(A1) \quad \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi)$$

$$(A2) \quad (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$$

$$(A3) \quad (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi),$$

unde φ , ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție

Pentru orice formule φ, ψ ,

din φ și $\varphi \rightarrow \psi$ se inferă ψ (**modus ponens** sau **(MP)**):

$$\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}.$$