UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Seminar 5

Analiza topologică a unei mulțimi

① Pentru $A \subseteq \mathbb{R}^n$, fie $\overline{A} = \bigcap_{A \subseteq F;\, F\text{-închisă}} F$: închiderea (sau aderența) lui A

Este cea mai mică mulțime închisă (în sensul incluziunii) care conține pe A

Să se arate că:

a) $\overline{A}$ - este o mulțime închisă

b) $A \subseteq \overline{A}$

c) A este închisă $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$

d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

e) $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid B(x,r) \cap A \neq \emptyset;\ (\forall) r > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset;\ (\forall) V \in \mathcal{V}_x\}$.

f) Dacă $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A} \subseteq \overline{B}$

g) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

h) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$. Este adevărat că dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cap B}$

Soluție.

ⓐ Deoarece $\overline{A}$ este o intersecție de mulțimi închise, ea este o mulțime închisă

ⓑ Clar. $A \subseteq \bigcap_{A \subseteq F;\, F\text{-închisă}} F = \overline{A}$

ⓒ „$\Rightarrow$" Știm A - închisă. Vrem $A = \overline{A}$. Din b) avem $A \subseteq \overline{A}$

Cum A este închisă avem $\bigcap_{A \subseteq F,\, F\text{-închisă}} F \subseteq A$ adică $\overline{A} \subseteq A$

Prin urmare $\overline{A} \subseteq A$ și deci $A = \overline{A}$

„$\Leftarrow$" Știm $A = \overline{A}$. Vrem A-închisă

Din a) avem că $\overline{A}$ - e închisă și cum $\overline{A} = A \Rightarrow A$ închisă

ⓓ $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

Din ⓐ și ⓒ cum $\overline{A}$ este închisă rezultă evident $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

ⓔ $\overline{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset \ (\forall) V \in \mathcal{V}_x\}$.

„$\subseteq$" Fie $x_0 \in \overline{A} = \bigcap_{A \subseteq F,\, F\text{-închisă}} F$. Presupunem prin absurd că $x_0 \notin$

$\{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq \emptyset; (\forall) V \in \mathcal{V}_x\}$. Atunci $(\exists) V_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$ a.î. $V_0 \cap A = \emptyset$

Deoarece $V_0 \in \mathcal{V}_{x_0} \Rightarrow (\exists) r_0 > 0$ a.î. $B(x_0, r_0) \subseteq V_0$, deci $B(x_0, r_0) \cap A = \emptyset$

i.e. $A \subseteq \mathbb{R}^n - B(x_0, r_0) := F_0$

Deoarece F_0 - este închisă obținem $x_0 \in \bigcap_{A \subseteq F,\, F\text{-închisă}} F \subseteq F_0$, i.e $x_0 \notin B(x_0, r_0)$

ceea ce constituie o contradicție

„$\supseteq$" Fie $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid V \cap A \neq 0; (\forall) V \in \mathcal{V}_x\}$.

P.A. $x_0 \notin \overline{A} = \bigcap_{A \subseteq F,\, F\text{-închisă}} F$ atunci $(\exists) F_0$ închisă $A \subseteq F_0$ și $x_0 \notin F_0$

Prin urmare $x_0 \in \mathbb{R}^n - F_0$. Cum $\mathbb{R}^n - F_0$ e deschisă $\Rightarrow \mathbb{R}^n - F_0 \in \mathcal{V}_{x_0}$

deci $(\mathbb{R}^n \setminus F_0) \cap A \neq \emptyset$ ↯ cu $A \subseteq F_0$

ⓕ $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$

Definiția aderenței

g) $A, B \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Cum } A \subseteq A \cup B \overset{f)}{\Rightarrow} \overline{A} \subseteq \overline{A \cup B} \\ \phantom{\text{Cum }} B \subseteq A \cup B \overset{f)}{\Rightarrow} \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \end{array}\right| \Rightarrow \overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B} \ (1)$$

Fie acum $x \in \overline{A \cup B}$. P.A $x \notin \overline{A} \cup \overline{B}$

Atunci cum $x \notin \overline{A} \Rightarrow (\exists) V_1 \in \mathcal{V}_x$ a.î. $V_1 \cap A = \emptyset$

$x \notin \overline{B} \Rightarrow (\exists) V_2 \in \mathcal{V}_x$ a.î. $V_2 \cap B = \emptyset$

Atunci $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$ și $(V_1 \cap V_2) \cap (A \cup B) = \emptyset \Rightarrow x \notin \overline{A \cup B}$ $\cancel{A}$

Așadar $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$ (2). Ca atare $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$

h) $$\left.\begin{array}{l} \text{Cum } A \cap B \subseteq A \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \\ \phantom{\text{Cum }} A \cap B \subseteq B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \overline{B} \end{array}\right| \Rightarrow \overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$$

Incluziunea poate fi strictă: $A = [0, 1)$ și $B = (1, 2]$.

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \overline{A \cap B} = \emptyset$

$\overline{A} = [0, 1]$; $\overline{B} = [1, 2]$ deci $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

2) Pentru $A \subseteq \mathbb{R}^n$ $\quad \overset{\circ}{A} = \bigcup\limits_{D \subseteq A;\, D\text{-deschisă}} D$ se numește interiorul lui A

și este cea mai mare (în sensul incluziunii) mulțime deschisă care este conținută în A.

Să se arate că:

a) $\overset{\circ}{A}$ - e mulțime deschisă

b) $\overset{\circ}{A} \subseteq A$

c) A - deschisă $\Leftrightarrow A = \overset{\circ}{A}$

d). $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

e). $\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists) D$-deschisă a.î. $x \in D \subseteq A\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists) r > 0$ a.î. $B(x,r) \subseteq A\}$.

f) Dacă $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$

g) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cap B}}$

h) Dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$. Este adevărat că dacă $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$, atunci $\mathring{A} \cup \mathring{B} = \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$?

i) $\mathring{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n$

Soluție:

a) $\mathring{A}$ - fiind reuniune de mulțimi deschise este deschisă

b) $\mathring{A} = \bigcup\limits_{D \subseteq A,\, D\text{-deschisă}} D \subseteq A$

c) „$\Rightarrow$" Știm A-deschisă. Vrem $A = \mathring{A}$. Știm din (b) că $\mathring{A} \subseteq A$

Cum A este deschisă $\Rightarrow A \subseteq \bigcup\limits_{D \subseteq A,\, \text{deschisă}} D = \mathring{A}$. Clar $A = \mathring{A}$

„$\Leftarrow$" Știm $A = \mathring{A}$. Vrem A-deschisă. Din (a) $\mathring{A}$-deschisă și cum $\mathring{A} = A \Rightarrow A$-deschisă

d) $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$. Din (a) și (c). Cum $\mathring{A}$ e deschisă $\Leftrightarrow \mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$

e) „$\subseteq$" Fie $x_0 \in \bigcup\limits_{D \subseteq A,\, D\text{-deschisă}} D = \mathring{A} \Rightarrow (\exists) D_0$-deschisă a.î. $x_0 \in D_0 \subseteq A$.

deci $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists) D$-deschisă a.î. $x \in D \subseteq A\}$.

Deci $\mathring{A} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists) D$-deschisă a.î. $x \in D \subseteq A\}$.

"$\supseteq$" Fie $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n \mid (\exists) D$-deschisă a.î. $x \in D \subseteq A\}$. $\Rightarrow (\exists) D_0$ deschisă a.î. $x_0 \in D_0 \subseteq A$, deci $x_0 \in \bigcup\limits_{D \subseteq A,\, D\text{-deschisă}} D = \mathring{A}$

Așadar $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists D$-deschisă a.î. $x \in D \subseteq A\} \subseteq \mathring{A}$

f) $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$. Din definiție.

g) Cum $A \cap B \subseteq A \xRightarrow{f} \widehat{A \cap B}^{\circ} \subseteq \mathring{A}$

$A \cap B \subseteq B \xRightarrow{f} \widehat{A \cap B}^{\circ} \subseteq \mathring{B}$ $\Bigg| \Rightarrow \widehat{A \cap B}^{\circ} \subseteq \mathring{A} \cap \mathring{B}$

Dacă $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B} \Rightarrow (\exists) D_1$-deschisă a.î. $x \in D_1 \subset A$, și D_2-deschisă a.î. $x \in D_2 \subseteq B \Rightarrow x \in D_1 \cap D_2 \subseteq A \cap B$, de unde cum $D_1 \cap D_2$ e deschisă deducem că $x \in \widehat{A \cap B}^{\circ}$. Deci $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq \widehat{A \cap B}^{\circ}$

h) $A \subseteq A \cup B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \widehat{A \cup B}^{\circ}$

$B \subseteq A \cup B \Rightarrow \mathring{B} \subseteq \widehat{A \cup B}^{\circ}$ $\Bigg| \Rightarrow \mathring{A} \cup \mathring{B} \subseteq \widehat{A \cup B}^{\circ}$

Incluziunea poate fi strictă $A = [0,1)$ și $B = [1,2]$.

$\mathring{A} = (0,1)$; $\mathring{B} = (1,2)$. Avem $\mathring{A} \cup \mathring{B} = (0,1) \cup (1,2)$ și $\widehat{A \cup B}^{\circ} = (0,2)$

i) $\mathbb{R}^n$- este deschisă

$A = \mathbb{Q}^n$ are prop. $\mathring{A} = \emptyset$ și $\overline{A} = \mathbb{R}^n$

3) Fie mulțimea

$$A = \bigcup_{i=1}^{m} (a_i, b_i) \cup \bigcup_{j=1}^{m} (c_j, d_j] \cup \bigcup_{k=1}^{p} [e_k, f_k) \cup \bigcup_{t=1}^{q} [g_t, h_t] \cup \{x_1, \dots, x_r\}.$$

$a_i, b_i, c_j, d_j, e_k, f_k; g_t, h_t; x_r \in \mathbb{R}$; $(\forall)\ i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$; $k=\overline{1,p}$
$t=\overline{1,q}$; $r=\overline{1,n}$

Să se calculeze $\mathring{A}$; $\overline{A}$; A'; $Fr(A)$; Puncte izolate

Soluție

$$\mathring{A}=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i)\cup\bigcup_{j=1}^{m}(c_j,d_j)\cup\bigcup_{k=1}^{p}(e_k,f_k)\cup\bigcup_{t=1}^{q}(g_t,h_t)$$

$$\overline{A}=\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i]\cup\bigcup_{j=1}^{m}[c_j,d_j]\cup\bigcup_{k=1}^{p}[e_k,f_k]\cup\bigcup_{t=1}^{q}[g_t,h_t]\cup\{x_1,\dots,x_r\}$$

$$A'=\bigcup_{i=1}^{n}[a_i,b_i]\cup\bigcup_{j=1}^{m}[c_j,d_j]\cup\bigcup_{k=1}^{p}[e_k,f_k]\cup\bigcup_{t=1}^{q}[g_t,h_t]$$

$$Fr(A)=\overline{A}-\mathring{A}=\bigcup_{i=1}^{n}\{a_i,b_i\}\cup\bigcup_{j=1}^{m}\{c_j,d_j\}\cup\bigcup_{k=1}^{p}\{e_k,f_k\}\cup\bigcup_{t=1}^{q}\{g_t,h_t\}\cup$$
$$\cup\{x_1,\dots,x_r\}$$

Puncte izolate $=\{x_1,\dots,x_r\}$.

4. Fie $A=(0,1)\cap\mathbb{Q}$. Să se determine A', $\overline{A}$ și $Fr(A)$.

Soluție: $A'=[0,1]$.

Dem: Fie $x_0\in[0,1]$ și $(\forall)\varepsilon>0 \Rightarrow I=(x_0-\varepsilon;x_0)\cap(0,1)\neq\emptyset$ sau $J=(x_0;x_0+\varepsilon)\cap(0,1)\neq\emptyset$, deci I sau J este un interval deschis și deci conține cel puțin un număr rațional. Atunci $I\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$ sau $J\cap\mathbb{Q}\neq\emptyset$. Așadar $A\cap(V_\varepsilon(x_0)\setminus\{x_0\})\neq\emptyset$, unde $V_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ ar $x_0\in A'$. Prin urmare $[0,1]\subseteq A'$

Reciproc, dacă $x_0 \in A'$ și $x_0 \notin [0,1]$ avem spre exemplu $x_0 < 0$ pentru $\varepsilon \in (0, |x_0|)$ avem evident că $V_\varepsilon(x_0) \cap [0,1] = \emptyset \Rightarrow x_0 \notin A'$ Abs.

Rămâne că $x_0 \in [0,1]$, deci $A' \subseteq [0,1]$, prin urmare $A' = [0,1]$

Se obține $\overline{A} = A \cup A' = ((0,1) \cap \mathbb{Q}) \cup [0,1] = [0,1]$.

Se găsește ușor că: $\mathring{A} = \emptyset$; $Fr(A) = \overline{A} - \mathring{A} = [0,1]$.

(5) Fie (X,d) un spațiu metric; $A \subseteq X$ și $x \in X$. Atunci

a). $x \in \overline{A} \Leftrightarrow (\exists)(x_n)_n \longrightarrow x$ cu $x_n \in A$; $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

b). $x \in A' \Leftrightarrow (\exists)(x_n)_n \longrightarrow x$ cu $x_n \in A \setminus \{x\}$. $(\forall) n \in \mathbb{N}$.

Soluție:

a) Fie $x \in \overline{A}$ atunci $(\forall) n \in \mathbb{N}$ $(\exists)$ $x_n \in A \cap B(x, \frac{1}{n})$. Deoarece $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ că $(x_n)_n \longrightarrow x$.

Reciproc fie $(x_n)_n \longrightarrow x$ cu $(x_n)_n \subseteq A$. Fie $B_x = \{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ sistem fundamental de vecinătăți al bilelor de centru x.

Pentru $(\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon \Rightarrow x_n \in B(x,\varepsilon)$.

și deci $A \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{A}$

b). Dacă $x \in A'$ atunci $(\forall) n \in \mathbb{N}$ $(\exists)$ $x_n \in (A \setminus \{x\}) \cap B(x; \frac{1}{n})$

$\Rightarrow d(x_n, x) < \frac{1}{n}$ și deci $(x_n)_n \longrightarrow x$ și evident $x_n \in A \setminus \{x\}$.

Reciproc:

Fie $(x_n)_n \longrightarrow x$; $x_n \in A \setminus \{x\} \Rightarrow (\forall)\varepsilon > 0$ $(\exists) n_\varepsilon > 0$ a.î. $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ $d(x_n, x) < \varepsilon$

$\Rightarrow x_n \in B(x,\varepsilon) \Rightarrow (A \setminus \{x\}) \cap B(x,\varepsilon) \neq \emptyset$, Cum $\{B(x,\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ formează un sistem fundamental de vecinătăți ale lui x avem că $x \in A'$

⑥ Fie $F \subseteq \mathbb{R}^n$ atunci u.a.s.e.

a) F - închisă

b) F - conține orice punct de acumulare al său.

Soluție:

a) $\Rightarrow$ b). P.A $(\exists)\, x \in F'$ dar $x \notin F \Rightarrow x \in \mathbb{R}^n \setminus F$. Cum $\mathbb{R}^n \setminus F$ e deschisă

$\Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus F \in \mathcal{V}_x$ deci $F \cap ((\mathbb{R}^n - F) \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ $\cancel{\Delta}$.

b) $\Rightarrow$ a). Arătăm că $\mathbb{R}^n \setminus F$ e deschisă

Dacă $y \in \mathbb{R}^n \setminus F$ atunci $y \notin F' \Rightarrow (\exists)\, V \in \mathcal{V}_y$ a.î. $F \cap (V \setminus \{y\}) = \emptyset$

deci $V \subseteq \mathbb{R}^n \setminus F$, adică $\mathbb{R}^n \setminus F \in \mathcal{V}_y$.

Cum y a fost ales arbitrar în $\mathbb{R}^n \setminus F \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus F$ e deschisă.

⑦ Să se arate că mulțimea punctelor limită ale unui șir mărginit $(x_n)_n$ este mulțime închisă

Soluție. Notăm $L((x_n)_n)$ - mulțimea punctelor limită

Vrem $\overline{L((x_n)_n)} = L((x_n)_n)$. Știm $L((x_n)_n) \subseteq \overline{L((x_n)_n)}$.

Deci vrem $\overline{L((x_n)_n)} \subseteq L((x_n)_n)$.

Fie $y \in \overline{L((x_n)_n)}$, atunci $\exists\, (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq L((x_n)_n)$ a.î. $y_k \xrightarrow{k} y$.

Cum $y_1 \in L((x_n)_n) \Rightarrow (\exists)$ un subșir al lui $(x_n)_n$ care converge către y_1.

$\Rightarrow (\exists)\, n_1 \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_{n_1} - y_1| < 1$; $y_2 \in L((x_n)_n) \Rightarrow (\exists)$ subșir al lui $(x_n)_n$ care converge către $y_2 \Rightarrow (\exists)\, n_2 > n_1$ a.î. $|x_{n_2} - y_2| < \frac{1}{2}$. Continuând găsim $(x_{n_k})_k$ - subșir al lui $(x_n)_n$ a.î. $|x_{n_k} - y_k| < \frac{1}{k}$ $(\forall)\, k \in \mathbb{N}$.

Avem $|y - x_{n_k}| \leq |y - y_k| + |y_k - x_{n_k}| < |y - y_k| + \frac{1}{k}$ $(\forall)\, k \in \mathbb{N}$.

Cum $y_k \to k \Rightarrow \lim\limits_{k} (|y - y_k| + \frac{1}{k}) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{k} x_{n_k} = y \Rightarrow y \in L((x_n)_n)$

Qed.

8 Fie $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$.

Să se determine A'; $\bar{A}$; $\mathring{A}$; $Fr(A)$

Soluție:

Să $A' = \{0\}$ arătăm. Fie $\varepsilon > 0$ fixat. Atunci $(\exists)\, n_0 \geq 1$ cu $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

deci $\frac{1}{n_0} \in A \cap (V_\varepsilon(0) \setminus \{0\})$ și deci $A \cap (V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}) \neq \emptyset \Rightarrow 0 \in A'$

Fie acum $x_0 \in \mathbb{R}^*$ fixat. Dacă $x_0 \in A$, deci $x_0 = \frac{1}{n_0}$, cu $n_0 \in \mathbb{N}$.

rezultă că $A \cap (V_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) = \emptyset$ dacă luăm $\varepsilon = \frac{1}{n_0} - \frac{1}{n_0+1}$.

deci $x_0 \notin A'$

Dacă $x_0 \notin A$ avem $\frac{1}{n_0+1} < x_0 < \frac{1}{n_0}$ cu $n_0 \in \mathbb{N}$ sau $x_0 < 0$

În ambele cazuri $(\exists)\, \varepsilon > 0$ cu $A \cap (V_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) = \emptyset$, deci $x_0 \notin A'$

Absurd $x_0 \in A'$, prin urmare $A' = \{0\}$.

Apoi $\bar{A} = A \cup A' = A \cup \{0\}$

Este clar că $(\forall)\, V \in \mathcal{V}_{x_0}$ avem $V \not\subset A$, deoarece V conține și numere iraționale; deci $x_0 \notin \mathring{A}$ și deci $\mathring{A} = \emptyset$

$Fr(A) = \bar{A} - \mathring{A} = \bar{A}$