Seminar 2

13.10.2020

P.I.E $A_1, A_2, \dots, A_n$ mulțimi finite ($\subseteq M$) $\Rightarrow$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

(Dem: prin ind. mat.)

$n=2 \rightsquigarrow |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.

Exc 1 Calculați $\varphi(n)$ pt $n \geq 2$.

Sol (Folosind P.I.E.) $\varphi(n) = |\{k \mid 1 \le k \le n,\ (k,n) = 1\}| = |A|$

$|A| + |\underbrace{\{1,\dots,n\} \setminus A}_{B}| = n$

Dacă $1 < d < n$ și $d \mid n \Rightarrow d \notin A$.

$B = \{1,\dots,n\} \setminus A = \{k \mid 1 \le k \le n,\ (k,n) \neq 1\}$

$n \geq 2$ $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ cu $p_1, \dots, p_r$ prime $\neq$ 2 câte 2; $r \geq 1$, $\alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 1$

$(6 = 2^1 \cdot 3^1;\ 120 = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1)$

$(24 = 2^3 \cdot 3^1;\ 90 = 2^1 \cdot 3^2 \cdot 5;\ (90, 24) = 2^1 \cdot 3^1 = 6)$

$(k,n) \neq 1 \Rightarrow (\exists)\ i \in \{1,\dots,r\}$ a.î. $p_i \mid k$.

$k \in B \Leftrightarrow (\exists)\ i \in \{1,\dots,r\}$ a.î. $k \in A_i$

$\Leftrightarrow k \in A_1 \cup \dots \cup A_r$

$A_i = \{k \mid 1 \le k \le n,\ p_i \mid k\}$ $(\forall)\ i = \overline{1,r}$

$|A_i| = \frac{n}{p_i}$

$B = A_1 \cup \dots \cup A_r$; Aplic P.I.E:

$$|B| = \sum_{i=1}^{r} |A_i| - \sum_{1\le i<j\le r} |A_i \cap A_j| + \dots + (-1)^{r-1} |A_1 \cap \dots \cap A_r| . \quad (*)$$

$$A_i \cap A_j = \{k \mid 1 \le k \le m \text{ și } p_i \mid k \text{ și } p_j \mid k\} \underset{\substack{p_i \ne p_j \\ \text{prime}}}{=\!=} \{k \mid 1 \le k \le m \text{ și } p_i p_j \mid k\} \quad |A_i \cap A_j| = \frac{m}{p_i p_j} \ (\forall) i, j$$

$$|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_t}| = \frac{m}{p_{i_1} p_{i_2} \cdots p_{i_t}}$$

Deci $(*)$ devine $|B| = \sum_{i=1}^{r} \frac{m}{p_i} - \sum_{1\le i<j\le r} \frac{m}{p_i p_j} + \dots + (-1)^{r-1} \frac{m}{p_1 p_2 \cdots p_r}$.

$$|A| = m - |B| = m - \sum_{i=1}^{r} \frac{m}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le r} \frac{m}{p_i p_j} - \dots + (-1)^{r} \frac{m}{p_1 \cdots p_r} = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$$

Exc 2 Fie M o mulțime finită și $f : M \to M$ o funcție. Atunci:

a) f inj $\iff$ b) f surj $\iff$ c) f bij.

$\Rightarrow M = \{a_1, \dots, a_m\}$; $f(M) = \{f(a_1), \dots, f(a_m)\}$

Sol $\boxed{c) \Rightarrow a), b)}$

"a) ⇒ c)" f inj. $\Rightarrow |f(M)| = m$; $f(M) \subseteq M \Rightarrow f(M) = M$

$|f(M)| = |M|$

$\boxed{f \text{ surj}}$

$f(M) = M$. $(*)$ $(\Rightarrow |f(M)| = m)$

b) ⇒ c) f surj $\Rightarrow$ $f(M)=M$. Pp abs. că f nu e inj. $\Rightarrow (\exists)\ i \ne j$ a.î. $f(a_i) = f(a_j) \Rightarrow |\{f(a_1), \dots, f(a_m)\}|$

$$|f(M)| = |\{f(a_1), \dots, f(a_m)\}| \overset{\wedge}{\le} m-1$$

⇒ presupunerea e falsă. ⇒ f e inj.

Exc 3 Să se arate că fct. $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f(n)=\{n\sqrt{2}\}$ e injectivă.

Sol Fie $n,m\in\mathbb{N}$ a.î. $f(n)=f(m) \Rightarrow \underbrace{\{n\sqrt{2}\}}_{n\sqrt{2}-[n\sqrt{2}]}=\underbrace{\{m\sqrt{2}\}}_{m\sqrt{2}-[m\sqrt{2}]} \Longrightarrow$

$$\underbrace{n\sqrt{2}-m\sqrt{2}}_{(n-m)\sqrt{2}}=\underbrace{[n\sqrt{2}]-[m\sqrt{2}]}_{\in\mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\text{Dc. } q\in\mathbb{Q}^*,\ t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow q\cdot t\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$$

$n-m\in\mathbb{Z}$

$\sqrt{2}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$n\sqrt{2}-m\sqrt{2}\in\mathbb{Z}$ dacă $n-m=0$, adică $\underline{n=m}$ $\Rightarrow$ f e inj

Exc 4 Să se studieze inj. (surj, bij) fct. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ în funcție de parametrul real m:

(Temă! pt m arbitrar)

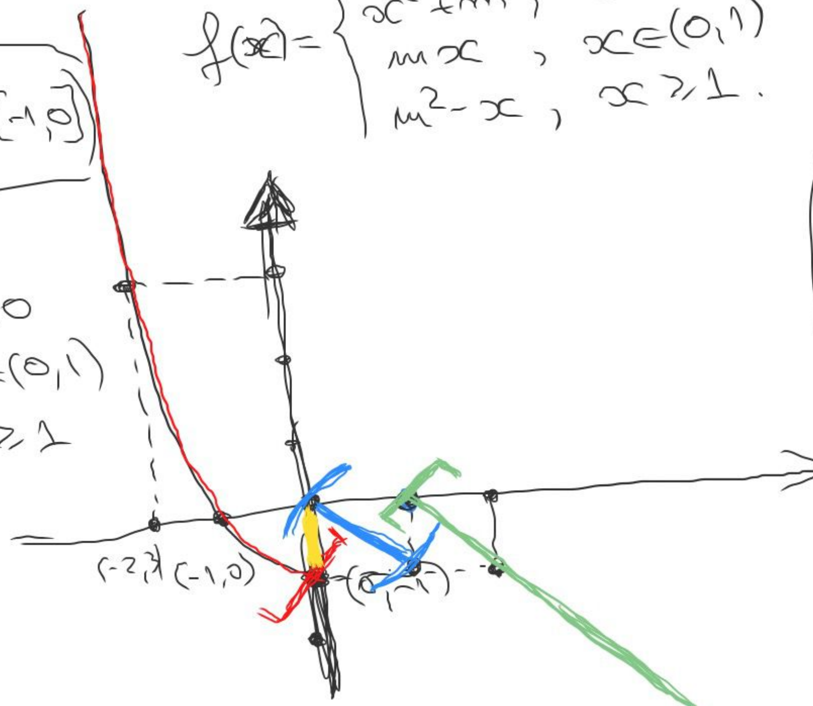
$$f(x)=\begin{cases} x^2+m, & x\le 0\\ mx, & x\in(0,1)\\ m^2-x, & x\ge 1.\end{cases}$$

Calc. pt $\underline{m=-1}$ $\boxed{f^{-1}([-1,0])}$

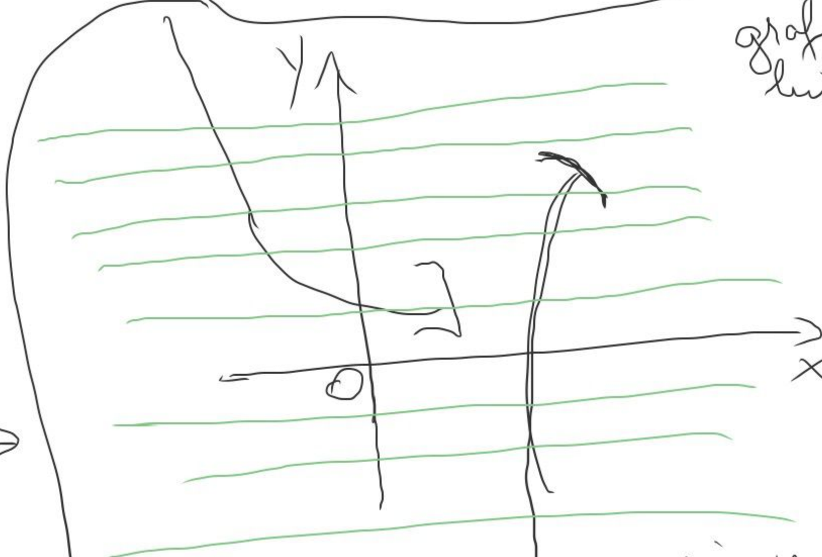
Sol $\boxed{m=-1}$

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le 0\\ -x, & x\in(0,1)\\ 1-x, & x\ge 1\end{cases}$$

f e surj,
f nu e inj.
(f nu e bij)



graficul lui g



Comentariu: g e surj, nu e inj

Exc. 6 Fie M, N 2 mulțimi finite cu $|M| = m$, $|N| = n$. Calculați:

1. # fct. definite pe M cu valori în N ($|\{f \mid f: M \to N, f \text{ funcție}\}|$)
2. $|\{f: M \to N \mid f \text{ fct. inj}\}| = ?$
3. $|\{f: M \to N \mid f \text{ fct. surj}\}| = ?$
4. $|\{f: M \to N \mid f \text{ fct. bij}\}| = ?$

Hint sol

1. n^m (Ind. după m)
2. $m > n \Rightarrow \# = 0$; pt $m \leq n$ $\quad A_n^m$ (def. combinatorică a aranjamentelor)
3. $m < n \Rightarrow \# = 0$; pt $\underline{m \geq n}$ aplic P.I.E
4. $m \neq n \Rightarrow \# = 0$; pt $\underline{m = n}$ $\quad n!$ (ind după n)

Calc. nr. fct. care nu $\underline{\text{sunt surj.}}$ (det. $A_1, \dots, A_n$!)

$f^{-1}([-1,0]) = [-1,0] \cup (0,1) \cup [1,2] = [-1,2]$.

Ex c 5 Fie M o mulțime și $A, B \subseteq M$. Def $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$,

$$f(X) = (X \cap A, X \cap B).$$ Ar. că:

① f e inj $\iff A \cup B = M$

② f e surj $\iff A \cap B = \emptyset$. (Temă!)

③ f e bij $\iff A = C_M B$. În acest caz, aflați inversa f^{-1}.

Sol ① "$\Leftarrow$" Fie $X, Y \in \mathcal{P}(M)$ (ori $X, Y \subseteq M$) a.î. $f(X) = f(Y)$. $\Rightarrow$

$(X \cap A, X \cap B) = (Y \cap A, Y \cap B) \Rightarrow \begin{cases} X \cap A = Y \cap A \\ \text{și} \\ X \cap B = Y \cap B \end{cases} \Rightarrow (X \cap A) \cup (X \cap B) = (Y \cap A) \cup (Y \cap B)$

$$X \cap (A \cup B) = Y \cap (A \cup B)$$

$A \cup B = M \Rightarrow$

$$X \cap M = Y \cap M \Rightarrow X = Y \Rightarrow f \text{ e inj}$$

"$\Rightarrow$" Știm că f e inj.

Pp abs. că $A \cup B \subsetneq M \Rightarrow (\exists)\, x \in M$ și $x \notin A \cup B$.

$X = \{x\}$ $f(X) = (\{x\} \cap A, \{x\} \cap B) = (\emptyset, \emptyset) = f(\emptyset) \Rightarrow$ ~~δ~~ (f inj) $\Rightarrow$

Pp e falsă $\Rightarrow A \cup B = M$ ∎