

Lista exercitiu

- ①. Fie $(\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}$ și $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic.
Considerăm $R' = \{e'_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, e'_2 = e_1 + 7e_2 + e_3, e'_3 = -e_1 + e_2 + e_3\}$
- a) Să se arate că R' este reper în \mathbb{R}^3 .
 $R_0 \xrightarrow{A} R'$ $A = ?$ (matricea de trecere)
- b) Să se afle coordonatele vectorului $x = (3, 2, 1)$ în raport cu reperul R' .
- ② Fie $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot) / \mathbb{R}$, $R_0 = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$ reperul canonic.
Fie $R' = \{-1 + 2X + 3X^2, X - X^2, X - 2X^2\}$
- a) Să se arate că R' este reper în $\mathbb{R}_2[X]$.
 $R_0 \xrightarrow{A} R'$, $A = ?$
- b) Să se afle coordonatele lui $P = 3 - X + X^2$ în raport cu R' .
- ③ Fie $(V, +, \cdot) / \mathbb{R}$ sp. vect. 3-dim.
Fie $R = \{v_1, v_2, v_3\}$ reper în V și
 $R' = \{v'_1 = v_1, v'_2 = v_1 + v_2, v'_3 = v_1 + v_2 + v_3\} \subset V$.
- a) Să se arate că R' e reper în V ; $R \xrightarrow{A} R'$, $A = ?$
- b) Dacă $v \in V$ are coordonatele (x_1, x_2, x_3) în raport cu reperul R , atunci care sunt coordonatele (x'_1, x'_2, x'_3) în raport cu reperul R'

④ $\text{Fie } (\mathbb{R}_3[X], +, \cdot) / \mathbb{R}$

$$V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$$

$$V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$$

$$V_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$$

a) $V_i \subset \mathbb{R}_3[X]$, $\forall i = \overline{1,3}$ subspații vectoriale

b) Precizați câte un reper \mathcal{B}_i în V_i , $i = \overline{1,3}$

c) Aflați coordonatele lui

$$P_1 = X + 2X^2 + 3X^3 \text{ în raport cu } \mathcal{B}_1$$

$$P_2 = 1 + 2X^2 - 3X^3 \quad -11- \quad \mathcal{B}_2$$

$$P_3 = X + 3X^2 - 4X^3 \quad -11- \quad \mathcal{B}_3$$

d) Determinați câte un subspațiu complementar V_i lui V_i , $i = \overline{1,3}$
i.e. $\mathbb{R}_3[X] = V_i \oplus V_i', i = \overline{1,3}$

e) Se poate scrie $\mathbb{R}_3[X]$ ca sumă directă 3 subspații vectoriale, respectiv 4 subspații vectoriale.

⑤ Def $(V, +, \cdot) / \mathbb{R}$.

$$a) [v, w] = \{x \in V \mid x = (1-t)v + tw, t \in [0, 1]\}$$

$$b) C \subseteq V \text{ subm. } \text{convexă} \Leftrightarrow [\forall v, w \in C \Rightarrow [v, w] \subseteq C]$$

a) $\forall V' \subset V$ subsp. vect $\Rightarrow V'$ multime convexă

b) $\{v_0, \dots, v_k\} \subset V$ sistem finit de vectori din V
 $\Rightarrow C = \{v = \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1\}$ convexă.

Prop $A \in \text{Hom}_m(\mathbb{R})$

$$S(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\} \subset \mathbb{R}^n \text{ subspațiu vect}$$

$$\text{si } \dim_{\mathbb{R}} S(A) = n - \text{rg}(A)$$

⑥ $(\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}$, $V' = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}\} = S(A)$

a) Precizați o bază în V' .

b) Precizați un subspațiu complementat V'' lui V' , i.e. $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

c) Să se descompună $x = (1, 1, 2)$ în raport cu $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$.

⑦ $(\mathbb{R}^4, +, \cdot) / \mathbb{R}$, $V' = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z - 2t = 0\}$
 $V'' = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - 2z + t = 0\}$.

PR Să se arate că $\mathbb{R}^4 = V' + V''$.

Justificați că suma nu este directă

PROP Fie $(V, +, \cdot) / \mathbb{K}$ spațiu vect n -dim, și $V' \subset V$ subsp. vect.
 Dacă $\dim_{\mathbb{K}} V' = n$, atunci $V' = V$.

⑧ Fie $(\mathbb{R}^4, +, \cdot) / \mathbb{R}$ și $V' = \langle \{(1, 2, -1, 0), (1, 0, 0, 3)\} \rangle$

a) Să se descrie V' printr-un sistem de ec. liniare

b) $\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$, $V'' = ?$.

Să se descrie V'' printr-un sistem de ec. liniare.

⑨ $(\mathbb{R}^4, +, \cdot) / \mathbb{R}$, $V' = \langle \{u, v, w\} \rangle$, $V'' = \langle \{u', v', w'\} \rangle$,

unde $u = (2, 3, 11, 5)$, $v = (1, 1, 5, 2)$, $w = (0, 1, 1, 1)$,

$u' = (2, 1, 3, 2)$, $v' = (1, 1, 3, 4)$, $w' = (5, 2, 6, 2)$

a) Să se arate că $V' \oplus V'' = \mathbb{R}^4$.

b) Descrieți V', V'' printr-un sist de ec. liniare.

10) Fie $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ în \mathbb{R} , $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

și $V' = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Ax = 0\}$

a) $\dim_{\mathbb{R}} V' = ?$. Precizați o bază în V' .

b) Să se scrie $\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$

c) Descompuneți $x = (1, 2, 1, 2)$ ca sumă dintre un vector din V' și unul din V'' .