11.03.2021

SEMINAR 4

Repere. Coordonate. Subspații vectoriale.

Preliminarii

$(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect. n-dim.

- $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper $\Leftrightarrow R$ bază ordonată
  $\forall x\in V,\ \exists!\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ a.î. $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$
  (coordonatele lui x în raport cu reperul R)
- $R=\{e_1,\dots,e_n\}\xrightarrow{A}R'=\{e_1',\dots,e_n'\}$
  $e_i'=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}e_j,\ \forall i=\overline{1,n}$
  $X=AX'$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$, $X'=\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}$
  $(x_1,\dots,x_n)$, $(x_1',\dots,x_n')$ coord. în rap cu R, resp R'
- Criteriu de LI $S=\{v_1,\dots,v_m\}$, $m\leq n$.
  S ~~este~~ SLI $\Leftrightarrow$ rg $C=m=$ maxim
  $C=$ matricea compon. vect din S în raport cu un reper arbitrar
- $V_1,V_2\subset V$ subsp. vect $\Rightarrow V_1\cap V_2$ subsp. vect.
  În general, $V_1\cup V_2$ nu e ssp vect; $\langle V_1\cup V_2\rangle=V_1+V_2$
  V_1+V_2 este sumă directă i.e $V_1\oplus V_2\Leftrightarrow V_1\cap V_2=\{0_V\}$
  $\Leftrightarrow\forall v\in V_1+V_2,\ \exists!\ \begin{matrix}v_1\in V_1\\ v_2\in V_2\end{matrix}$ a.î. $v=v_1+v_2$.
  Dacă $V=V_1\oplus V_2$, $V_2=$ subspațiu complementar lui V_1 (nu e unic)
  R_1 reper în V_1
  $R=R_1\cup R_2$ reper în $V\Rightarrow V_2=\langle R_2\rangle$

Th. Grassmann $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)$

$\dim(V_1\oplus V_2)=\dim V_1+\dim V_2$.

EX1. $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{/\mathbb{R}}$ $\mathcal{R}_0=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ reperul canonic.

Fie $\mathcal{R}'=\{e_1'=e_1+2e_2+e_3, e_2'=e_1+7e_2+e_3, e_3'=-e_1+e_2+e_3\}$

a) Să se arate că $\mathcal{R}'$ este reper în $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$, $A=?$

b) Să se afle coordonatele vectorului $x=(3,2,1)$ în raport cu reperul $\mathcal{R}'$

SOL.

a) $\begin{cases} e_1'=e_1+2e_2+e_3=(1,2,1), \\ e_2'=e_1+7e_2+e_3=(1,7,1), \\ e_3'=-e_1+e_2+e_3=(-1,1,1) \end{cases}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

A = matricea componentelor vect din $\mathcal{R}'$ în raport cu reperul $\mathcal{R}_0$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} rg A = 3 \max \xrightarrow[LI]{CRIT} \mathcal{R}' \text{ este SLI} \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 = |\mathcal{R}'| \end{array}\right\} \xrightarrow{OBS} \mathcal{R}'$ reper

$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$

b) $x=(3,2,1) = x_1'e_1'+x_2'e_2'+x_3'e_3'$

$= x_1'(1,2,1)+x_2'(1,7,1)+x_3'(-1,1,1)$

$= (x_1'+x_2'-x_3', 2x_1'+7x_2'+x_3', x_1'+x_2'+x_3')$

$\begin{cases} x_1'+x_2'-x_3'=3 \\ 2x_1'+7x_2'+x_3'=2 \\ x_1'+x_2'+x_3'=1 \end{cases}$ ec3−ec1: $2x_3'=-2 \Rightarrow x_3'=-1$

$\begin{cases} x_1'+x_2'=2 \quad |-2 \\ 2x_1'+7x_2'=3 \end{cases}$ $\quad x_2'=-\frac{1}{5}$

$5x_2'=-1$ $\quad x_1'=2+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}$

$(x_1', x_2', x_3')=\left(\frac{11}{5}, -\frac{1}{5}, -1\right)$ coord. lui x în rap cu $\mathcal{R}'$

$\doteq (\mathbb{R}_2[X],+,\cdot)/\mathbb{R}$, $R_0 = \{\overset{e_1}{1}, \overset{e_2}{X}, \overset{e_3}{X^2}\}$ reperul canonic.

Fie $R' = \{-1+2X+3X^2, X-X^2, X-2X^2\}$

a) Să se arate că R' este reper în $\mathbb{R}_2[X]$; $R_0 \xrightarrow{A} R'$, $A=?$

b) Să se afle coordonatele lui $P = 3-X+X^2$ în raport cu reperul R'

SOL/ $e_1' = \sum_{j=1}^{3} a_{j1} e_j = a_{11}e_1 + a_{21}e_1 + a_{31}e_2$

a) $e_1' = -1+2X+3X^2 = -e_1 + 2e_2 + 3e_3$

$e_2' = X - X^2 = 0e_1 + e_1 - e_3$

$e_3' = X - 2X^2 = 0e_1 + e_2 - 2e_3$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

A = matricea compon. vect din R' în raport cu R_0

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{rg} A = 3 = \max \overset{CRIT}{\underset{LI}{\Longrightarrow}} R' \text{ este SLI} \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X] = 3 = |R'| \end{array}\right\} \Rightarrow R' \text{ reper}$$

$$R_0 \xrightarrow{A} R'$$

b) $P = 3 - X + X^2 = a_1'e_1' + a_2'e_2' + a_3'e_3' =$

$= a_1'(-1+2X+3X^2) + a_2'(X-X^2) + a_3'(X-2X^2)$

$= -a_1' + X(2a_1' + a_2' + a_3') + X^2(3a_1' - a_2' - 2a_3')$

$$\begin{cases} -a_1' = 3 \\ 2a_1' + a_2' + a_3' = -1 \\ 3a_1' - a_2' - 2a_3' = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1' = -3 \\ a_2' + a_3' = 5 \\ -a_2' - 2a_3' = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1' = -3 \\ a_3' = -15 \\ a_2' = 20 \end{cases}$$

$/ \quad -a_3' = 15$

$(a_1', a_2', a_3') = (-3, 20, -15)$ coordonatele lui P în raport cu reperul R'

Scanned with CamScanner

$$\begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\2&1&1\\3&-1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\20\\-15\end{pmatrix}$$

$P=3-x+x^2$

<u>Ex3</u> Fie $(V,+,\cdot)/\mathbb{R}$ sp vect 3-dim.
Fie $R=\{v_1,v_2,v_3\}$ reper în V și $R'=\{\underset{v_1'}{v_1},\underset{v_2'}{v_1+v_2},\underset{v_3'}{v_1+v_2+v_3}\}\subset V$

a) Să se arate că R' e un reper în V; $R\xrightarrow{A}R'$, $A=?$

b) Dacă $v\in V$ are coord. (x_1,x_2,x_3) în raport cu reperul R, at care sunt coord (x_1',x_2',x_3') în raport cu reperul R'.

<u>SOL</u>

a) $\begin{cases}v_1'=v_1+0v_2+0v_3\\v_2'=v_1+v_2+0\cdot v_3\\v_3'=v_1+v_2+v_3\end{cases}$ $\quad A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$A=$ matricea compon. vect din R' în rap cu reperul R

$\det A=1\Rightarrow rg\,A=3=\max\overset{CRIT}{\underset{LI}{\Longrightarrow}}R'$ este SLI
dar $\dim_{\mathbb{R}}V=3=|R'|$ $\Bigg\}\Rightarrow R'$ reper în V

b) $X=AX'\Rightarrow X'=A^{-1}X$

$A^T=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$, $A^*=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

$\det A=1\Rightarrow A^{-1}=A^*$

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_2-x_3\\x_3\end{pmatrix}$$

$(x_1',x_2',x_3')=(x_1-x_2,x_2-x_3,x_3)$ coord. lui v în raport cu reperul R'.

Ex4 Fie $(\mathbb{R}_3[X], +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$, $\tilde{P} = P$

$V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$

$V_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$

a) $V_i \subset \mathbb{R}_3[X]$, $\forall i = \overline{1,3}$ subspatii vectoriale

b) Precizati câte un reper R_i în V_i, $i = \overline{1,3}$

c) Aflati coordonatele lui

$P_1 = X + 2X^2 + 3X^3$ în raport cu R_1

$P_2 = 1 + 2X^2 - 3X^3$ —//— R_2

$P_3 = X + 3X^2 - 4X^3$ —//— R_3.

d) Determinati câte un subspatiu complementar V_i' lui V_i $i = \overline{1,3}$

i.e $\mathbb{R}_3[X] = V_i \oplus V_i'$, $i = \overline{1,3}$

e) Să se scrie $\mathbb{R}_3[X]$ ca suma directă a 3 subspatii vectoriale, respectiv 4 subspatii vectoriale.

SOL

a) $V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$.

$\forall P, Q \in V_1$ $\Rightarrow aP + bQ \in V_1$.
$\forall a, b \in \mathbb{R}$

$aP + bQ = S$

$S(0) = a\underbrace{P(0)}_{0} + b\underbrace{Q(0)}_{0} = 0 \Rightarrow S \in V_1$

$\Rightarrow V_1 \subset \mathbb{R}_3[X]$ subsp. vect.

Analog pt V_2 și V_3.

b) $V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$

$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in \langle\{X, X^2, X^3\}\rangle$

$P(0) = 0 \Rightarrow a_0$

$\mathcal{R}_1 = \{X, X^2, X^3\}$ e SG pt V_1
$\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_0 = \{\underset{e_1}{1}, \underset{e_2}{X}, \underset{e_3}{X^2}, \underset{e_4}{X^3}\}$ $\Rightarrow \mathcal{R}_1$ SLI
$\mathcal{R}_0$ reperul canonic $\Rightarrow$ SLI

$\Rightarrow \mathcal{R}_1$ reper

• $V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$

$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = -(a_1 + a_2 + a_3) + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$

$P(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_0 = -a_1 - a_2 - a_3$

$P = a_1(-1+X) + a_2(-1+X^2) + a_3(-1+X^3) \in \langle\{-1+X, -1+X^2, -1+X^3\}\rangle$

$\mathcal{R}_2 = \{-1+X, -1+X^2, -1+X^3\}$ SG pt V_2 (1)

$$\begin{cases} -1+X = -e_1 + e_2 + 0e_3 + 0e_4 \\ -1+X^2 = -e_1 + 0e_2 + e_3 + 0e_4 \\ -1+X^3 = -e_1 + 0e_2 + 0e_3 + e_4 \end{cases}$$

$$rg\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = max \Rightarrow \mathcal{R}_2 \text{ este SLI (2)}$$

Din (1), (2) $\Rightarrow \mathcal{R}_2$ reper în V_2.

• $V_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$

$P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 = -(a_2 + a_3)X + a_2X^2 + a_3X^3$

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 - a_3 \end{cases}$$

$P = a_2(-X+X^2) + a_3(-X+X^3) \in \langle\{-X+X^2, -X+X^3\}\rangle$

$\mathcal{R}_3 = \{-X+X^2, -X+X^3\}$ este SG pt V_3 (*)

$$\begin{cases} -X+X^2 = 0e_1 - e_2 + e_3 + 0e_4 \\ -X+X^3 = 0e_1 - e_2 + 0e_3 + e_4 \end{cases}$$

$$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 = max \Rightarrow \mathcal{R}_3 \text{ este SLI (**)}$$

Din (*), (**) $\Rightarrow \mathcal{R}_3$ reper în V_3

c) • $P_1 = X + 2X^2 + 3X^3 \in V_1$, $R_1 = \{X, X^2, X^3\}$

$(1, 2, 3)$ coord lui P_1 în raport cu reperul R_1

• $P_2 = 1 + 2X^2 - 3X^3 \in V_2$, $R_2 = \{-1+X, -1+X^2, -1+X^3\}$

$P_2 = b_1(-1+X) + b_2(-1+X^2) + b_3(-1+X^3)$

$$1 + 2X^2 - 3X^3 = -(\underbrace{b_1+b_2+b_3}_{-1}) + \underbrace{b_1}_{=0} X + \underbrace{b_2}_{=2} X^2 + \underbrace{b_3}_{=-3} X^3$$

$(b_1, b_2, b_3) = (0, 2, -3)$ coord. lui P_2 în rap. cu R_2

• $P_3 = X + 3X^2 - 4X^3 \in V_3$, $R_3 = \{-X+X^2, -X+X^3\}$

$P_3 = c_1(-X+X^2) + c_2(-X+X^3)$

$$X + 3X^2 - 4X^3 = -(\underbrace{c_1+c_2}_{=-1})X + \underbrace{c_1}_{=3} X^2 + \underbrace{c_2}_{=-4} X^3$$

$(c_1, c_2) = (3, -4)$ coord. lui P_3 în rap. cu R_3

d) • $\mathbb{R}_3[X] = V_1 \oplus V_1'$

$R_1 = \{X, X^2, X^3\}$ reper în $V_1 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_1 = 3$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 1 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{0} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{0} \end{pmatrix} \neq 0 \quad R_1' = \{2\} \text{ e SLI}$$

$V_1' = \langle R_1' \rangle$, $\dim V_1' = 1$.

subspațiu complementar lui V_1.

• $\mathbb{R}_3[X] = V_2 \oplus V_2'$

$R_2 = \{-1+X, -1+X^2, -1+X^3\}$ reper în $V_2 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_2 = 3$

$$\det\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \boxed{2} \\ 1 & 0 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 1 & \boxed{2} \end{pmatrix} \neq 0 , \quad R_2' = \{2+2X+2X^2+2X^3\} \text{ SLI}$$

$V_2' = \langle R_2' \rangle$, R_2' reper în V_2'

• $\mathbb{R}_3[X] = V_3 \oplus V_3'$

$\mathcal{R}_3 = \{-X+X^2, -X+X^3\}$ reper în $V_3 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V_3 = 2$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 ,$$

$\mathcal{R}_3' = \{1, X^3\} \subset \underset{SLI}{\mathcal{R}_0 = \{1, X, X^2, X^3\}} \Rightarrow \mathcal{R}_3'$ e SLI

$V_3' = \langle \mathcal{R}_3' \rangle$, $\mathcal{R}_3'$ reper în V_3'

e). $\mathbb{R}_3[X] = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3$

$\mathcal{R}_0 = \{1, X, X^2, X^3\}$ reperul canonic

$W_1 = \langle\{1, X\}\rangle$, $W_2 = \langle\{X^2\}\rangle$; $W_3 = \langle\{X^3\}\rangle$

$\mathbb{R}_3[X] = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 \oplus U_4$

$U_1 = \langle\{1\}\rangle$; $U_2 = \langle\{X\}\rangle$; $U_3 = \langle\{X^2\}\rangle$, $U_4 = \langle\{X^3\}\rangle$

<u>Ex 5</u> $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$, $V' = \{(a,b,c,0) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$

$V'' = \{(0,0,d,e) \mid d,e \in \mathbb{R}\}$

Este V'' subspațiu complementar lui V' ?

i.e. $\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$?

<u>SOL</u> NU $V' \cap V'' \neq \{0_{\mathbb{R}^4}\}$

$(0,0,1,0) \in V' \cap V''$

<u>OBS</u> $V' = \{a e_1 + b e_2 + c e_3 , a,b,c \in \mathbb{R}\} = \langle\{e_1, e_2, e_3\}\rangle$

$\mathcal{R}_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ reperul can. din $\mathbb{R}^4$

$\mathcal{R}' = \{e_1, e_2, e_3\} \subset \underset{SLI}{\mathcal{R}_0} \Rightarrow \mathcal{R}'$ este SLI

Deci $\mathcal{R}'$ este bază în V'

$V'' = \{d e_3 + e e_4,\ d, e \in \mathbb{R}\} = \langle\{e_3, e_4\}\rangle$
$\mathcal{R}'' = \{e_3, e_4\} \subset \mathcal{R}_0 \Rightarrow \mathcal{R}''$ e SLI
$\Rightarrow \mathcal{R}''$ bază în V''

$\dim(V'+V'') = \dim V' + \dim V'' - \dim(V' \cap V'')$

$= 3 + 2 - 1 = 4$.

$\mathbb{R}^4 = V' + V''$

$\oplus$ nu este directă $(V' \cap V'' = \langle\{e_3\}\rangle)$

Tema 2 (sem)

① Fie $(V_1, +, \cdot)/\mathbb{R}$ sp vect cu $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază

$(V_2, +, \cdot)/\mathbb{K}$ —"— $\mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$ bază

Să se determine o bază în $(V_1 \times V_2, +, \cdot)/\mathbb{K}$

② $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $\mathcal{R}_0$ = reperul canonic

$S = \{(1,0,-1,2), (1,1,1,1), (2,1,0,3), (3,2,1,4)\}$

a) S este SLD

b) Să se extragă S' un SLI max și să se extindă la un reper $\mathcal{R}$ în $\mathbb{R}^4$

c) $\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}$, $A = ?$

d) Să se afle coord. lui $x = (1,2,3,-4)$ în rap cu $\mathcal{R}$

③ $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$

$V' = \left\{ A = \begin{pmatrix} u & -u-x \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| u, x \in \mathbb{R} \right\}$ ssp vect

a) Precizați o bază în V'

b) Determinați V'' un subspațiu complementar lui V'.

Scanned with CamScanner