Seminar 4

Repere. Coordonate. Operații cu subspații vectoriale. Sumă directă

① $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$ $\quad R_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$
reper canonic

$R' = \{e_1' = e_1 + 2e_2 + e_3,\ e_2' = e_1 + 7e_2 + e_3,\ e_3' = e_1 + e_2 + e_3\}$

a) R' reper în $\mathbb{R}^3$ $\quad R_0 \xrightarrow{A} R'$ $\quad A = ?$
(matricea de trecere

b) Aflați coord. $x = (3,2,1)$ în rap cu R'

a) $R' = \{e_1' = (1,2,1),\ e_2' = (1,7,1),\ e_3' = (-1,1,1)\}$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 = \text{coord } (R_0)$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ - matricea componentelor cu R' în raport cu R_0
- $R_0 \xrightarrow{A} R'$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 3$ maxim $\overset{CLI}{\Rightarrow}$ R' SLI

$\operatorname{card} |R'| = 3 \Rightarrow R'$ reper

Scanned with CamScanner

b) $x = x_1' \cdot e_1' + x_2' e_2' + x_3' e_3' \Rightarrow x = x_1'(1,2,1) + x_2'(1,7,1) +$
$+ x_3'(-1,1,1) \Rightarrow (3,2,1) = (x_1' + x_2' - x_3', 2x_1' + 7x_2' + x_3', x_1' + x_2' + x_3')$

$$\begin{cases} x_1' + x_2' - x_3' = 3 \\ 2x_1' + 7x_2' + x_3' = 2 \\ x_1' + x_2' + x_3' = 1 \end{cases}$$

$ec_3 - ec_1 \Rightarrow 2x_3' = -2 \Rightarrow x_3' = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1' + x_2' = 2 \quad | \cdot (-2) \\ 2x_1' + 7x_2' = 3 \\ \hline \end{cases} \oplus$$

$5x_2' = -1 \Rightarrow x_2' = -\frac{1}{5} \Rightarrow x_1' = \frac{11}{5}$

$(x_1', x_2', x_3') = \left(\frac{11}{5}, -\frac{1}{5}, -1\right)$ - coordonatele lui x în rap cu R'

2. $(\mathbb{R}_2[x], +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$. $R_0 = \{e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2\}$ reperul canonic

$R' = \{\underbrace{-1 + 2x + 3x^2}_{e_1'}, \underbrace{x - x^2}_{e_2'}, \underbrace{x - 2x^2}_{e_3'}\}$

a) R' reper în $\mathbb{R}_2[x]$, $R_0 \xrightarrow{A} R'$, $A = ?$

b) Aflati coordonatele lui $P = 3 - x + x^2$ în raport cu R'

Scanned with CamScanner

a) $\mathbb{R}_2[x] \simeq \mathbb{R}^3$ $\quad (P = a_0 + a_1x + a_2x^2 \to (a_0, a_1, a_2))$

$R' = \{e_1' = (-1,2,3),\ e_2' = (0,1,-1),\ e_3' = (0,1,-2)\}$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad \det A = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

$= -(-2+1) = 1 \neq 0$

$\left.\begin{array}{l} \text{rg } A = 3 \text{ maxim} \overset{SLI}{\Rightarrow} R' \text{ e SLI} \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 = \text{card } R' \end{array}\right\} \Rightarrow R' \text{ raport în } \mathbb{R}^3$

$\left.\begin{array}{l} \det A > 0 \Rightarrow R_0, R' \text{ la fel orientate} \\ \text{convenție} \to R_0 \text{ e pozitiv orientat} \end{array}\right\} \Rightarrow R' \text{ e pozitiv orientat.}$

b) $(3,-1,1) = a\cdot(-1,2,3) + b\cdot(0,1,-1) + c(0,1,-2)$

$\begin{cases} -a = 3 \Rightarrow a = -3 \\ 2a + b + c = -1 \\ 3a - b - 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = 5 \\ -b - 2c = 10 \ (+) \end{cases}$

$-c = +15 \Rightarrow c = -15$

$b = 20$

$(a,b,c) = (-3, 20, -15)$ coordonatele lui P în raport cu R'

Scanned with CamScanner

④ $(\mathbb{R}_3[x], +, \cdot)$ $V_1 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = 0\}$; $P = \tilde{P}$

$V_2 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(1) = 0\}$

$V_3 = \{P \in \mathbb{R}_3[x] \mid P(0) = P(1) = 0\}$

a) $V_i \subset \mathbb{R}_3[x]$ $(\forall)\, i = \overline{1,3}$ subspații vectoriale

b) Precizați câte un reper R_i în V_i, $i = \overline{1,3}$

c) Aflați coordonatele lui:

$P_1 = x + 2x^2 + 3x^3$ în raport cu R_1

$P_2 = 1 + 2x^2 - 3x^3$ —"— R_2

$P_3 = x + 3x^2 - 4x^3$ —"— R_3

a) V_1: $\left.\begin{array}{l} P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ P(0) = 0 \end{array}\right| \Rightarrow a_0 = 0$

V_1 subspațiu $\Leftrightarrow (\forall)\, P, Q \in V_1$, $(\forall)\, a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow aP + bQ \in V_1$

$a(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) + b(b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3) =$

$= c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 \in V_1$

$P = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in \langle \underbrace{\{x, x^2, x^3\}}_{R_1} \rangle \Rightarrow R_1$ SG

$\left.\begin{array}{l} R_0 = \{1, x, x^2, x^3\} \text{ reper} \Rightarrow SLi \\ R_1 \subset R_0 \end{array}\right| \Rightarrow R_1$ SLi $\Rightarrow$

$\Rightarrow R_1$ reper în V_1

Coordonatele lui P_1 în raport cu R_1:

$(1, 2, 3)$

Scanned with CamScanner

V_2: $P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$P(1) = 0 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$

$\Rightarrow a = -a_1 - a_2 - a_3$

$P = -a_1 - a_2 - a_3 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 =$

$= a_1(x-1) + a_2(x^2-1) + a_3(x^3-1) \in \langle \underbrace{\{(x-1, x^2-1, x^3-1)\}}_{R_2} \rangle$

R_2 e SG în V_2

Dem că R_2 e SLi (C.L.i)

$$rg \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \text{ max} \overset{CLi}{\Rightarrow} R_2 \text{ SLi} \Rightarrow$$

$\Rightarrow R_2$ reper în V_2

$P_2 = 1 + 2x^2 - 3x^3$

$-3(x^3-1) + 2(x^2-1) + 0(x-1)$

$(0, 2, -3)$ coordonatele lui P_2 în raport cu R_2

Scanned with CamScanner

$V_3 = V_1 \cap V_2 \qquad P = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$P(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$

$P(1) = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 - a_3$

$P = a_2(x^2 - x) + a_3(x^3 - x)$

$R_3 = \{ x^2 - x, x^3 - x \}$ SG pt. V_3

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ \cancel{0}1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $rg A = 2$ maxim $\overset{CLi}{\Rightarrow} R_3$ SLi $\Bigg| \Rightarrow$

$\Rightarrow R_3$ reper în V_3

card $R_3 = 2$

$P_3 = -4(x^3 - x) + 3(x^2 - x) \Rightarrow$ coord. lui P_3 în raport cu R_3 sunt $(3, -4)$

Obs $\dim V_1 = 3$

$\mathbb{R}_3[x] = V_1 \oplus V_1' \qquad R_1 = \{x, x^2, x^3\}$

$V_1' = \langle \{1\} \rangle$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}_3[x] = V_2 \oplus V_2' \qquad R_2 = \{x-1, x^2-1, x^3-1\}$

$V_2' = \langle \{1\} \rangle$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}_3[x] = V_3 \oplus V_3'$ $\quad R_3 = \{x^2-x,\ x^3-x\}$

$V_3' = \langle \{1, x\} \rangle \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

e) Să se scrie $\mathbb{R}_3[x]$ ca sumă directă 3 subspații vectoriale, respectiv 4 subspații vectoriale

$\mathbb{R}_3[x] = V_1 \oplus V_2 \oplus V_3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$

$R_0 = \{1, x, x^2, x^3\}$

$V_1 = \langle \{1\} \rangle, \quad V_2 = \langle \{x\} \rangle, \quad V_3 = \langle \{x^2, x^3\} \rangle$

$W_1 = V_1, \quad W_2 = V_2 \quad W_3 = \langle \{x^2\} \rangle, \quad W_4 = \langle \{x^3\} \rangle$

⑥ $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)_{/\mathbb{R}} \qquad V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \right\} = S(A).$

a) Precizați o bază în V'

b) Precizați un subspațiu complementar V'' lui V' i.e $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$.

c) Să se descompună $x = (1,1,2)$ în raport cu $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\qquad V' = S(A)$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - rg A = 3 - 2 = 1$

$x_3 = \alpha \in \mathbb{R}$

Sistemul devine $\begin{cases} x_1 = -4\alpha \\ x_2 = 8\alpha \end{cases}$

Scanned with CamScanner

$$V' = \{(-4\alpha, 8\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle \underbrace{\{(-4,8,1)\}}_{R'} \rangle$$

$\alpha(-4,8,1)$

$\dim V' = 1$ $\Rightarrow R'$ reper

b)

$$\text{rang}\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \quad \text{maxim}$$

am completat R' la un reper în $\mathbb{R}^3$

$$V'' = \langle \overbrace{\{(1,0,0), (0,1,0)\}}^{R''} \rangle \quad SLi$$

(submulțime B_0)

c) $R = R' \cup R''$ reper în $\mathbb{R}^3$

$$(1,1,2) = \cancel{a} \; \underbrace{a \cdot (-4,8,1)}_{x'} + \underbrace{b(1,0,0) + c\cdot(0,1,0)}_{x''}$$

$$= (-4a+b, 8a+c, a) \Rightarrow \begin{cases} -4a+b = 1 \\ 8a+c = 1 \\ a = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 \\ c = -15 \end{cases}$$

$x = x' + x''$, $x' = (-8, 16, 2)$

$x' \in V_1$

$x'' \in V_2$, $x'' = (9, -15, 0)$

⑧

$(\mathbb{R}^4, +, \cdot)/\mathbb{R} \qquad V' = <\{(1,2,-1,0), (1,0,0,3)\}>$

a) Să se ~~sor~~ descrie V' printr-un sistem de ec. liniare

b) $\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$, $V'' = ?$

Să se descrie V'' printr-un sistem de ec. liniare

a) $(\forall)\ x \in (x_1, x_2, x_3, x_4) \in V'\ (\exists)\ a, b \in \mathbb{R}$ a.î

$x = a(1,2,-1,0) + b(1,0,0,3) =$

$= (a+b, 2a, -a, 3b)$

$$\begin{cases} a+b = x_1 \\ 2a = x_2 \\ -a = x_3 \\ 3b = x_4 \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}} & & x_1 \\ & & x_2 \\ -1 & 0 & x_3 \\ 3 & 3 & x_4 \end{array}\right) \qquad \text{SCD}$$

$rg\,A = rg\,\bar{A} = 2 \iff \Delta c_1 = \Delta c_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ -1 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x_3 + x_2 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 0 & 3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \cancel{\begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 2 & -2 & x_2 \\ 0 & 3 & x_4 \end{vmatrix}}$$

$\Rightarrow -2x_4 - 3x_2 + 6x_1 = 0$

$$V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \ \middle|\ \begin{cases} x_2 + 2x_3 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases} \right\}$$

Scanned with CamScanner

$V'' = \langle \{ (1,0,0,0), (0,1,0,0) \} \rangle$

Scanned with CamScanner