CURS 4 G-A

Repere. Coordonate în raport cu un reper.
Operații cu subspații vectoriale.

Teorema schimbului

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ finit generat
$\left.\begin{array}{l}\{x_1,..,x_n\} \text{ SG} \\ \{y_1,..,y_n\} \text{ SLI}\end{array}\right\} \Rightarrow \{y_1,..,y_n\}$ SG.

Prop card $\forall$ SG (finit) $\geq$ card $\forall$ SLI

Dem Fie $\{x_1,..,x_n\}$ SG. Considerăm $S=\{y_1,..,y_n,y_{n+1}\}$.
Dem că S este SLD.

a) $\{y_1,..,y_n\}$ SLI $\xRightarrow{\text{Th. sch}}$ $\{y_1,..,y_n\}$ SG

$V = <\{y_1,..,y_n\}> \Rightarrow \exists a_1,..,a_n \in \mathbb{K}$ aî $y_{n+1}=a_1y_1+...+a_ny_n$
Ψ
$y_{n+1} \Rightarrow a_1y_1+...+a_ny_n - y_{n+1} = 0_V \Rightarrow S$ este SLD

b) $\{y_1,..,y_n\}$ SLD $\xRightarrow[\text{este SLD}]{\forall \text{ supram.}}$ $\{y_1,..,y_n,y_{n+1}\}$ SLD.

Teorema $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp.v. finit generat
$\forall B_1, B_2$ baze $\Rightarrow$ card B_1 = card $B_2 = n = \dim_{\mathbb{K}} V$.

Dem
B_1, B_2 bază $\Rightarrow$ SG + SLI

$\left.\begin{array}{l}B_1 \text{ SG} \\ B_2 \text{ SLI}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{card}(B_1) \geq \text{card}(B_2)$; $\left.\begin{array}{l}B_2 \text{ SG} \\ B_1 \text{ SLI}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{card} B_2 \geq \text{card} B_1$.

Deci card B_1 = card B_2.

OBS $n = \dim_{\mathbb{K}} V$

n = nr max. de vect care formează un SLI
n = nr min de vect care formează SG.

OBS $n=\dim_{\mathbb{K}} V$, $S=\{x_1,..,x_n\}$
UAE
1) S bază
2) S SLI
3) S e SG.

Def $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect finit generat, $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ bază
R s.n. <u>reper</u> $\Leftrightarrow$ este o bază ordonată

Prop $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect f. generat, $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper
$\forall x\in V$, $\exists!\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ (coordonatele sau componentele lui x în raport cu R) a.î. $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$.

Dem
$V=\langle R\rangle \Rightarrow \exists x_1,\dots,x_n\in\mathbb{K}$ a.î. $x=x_1e_1+\dots+x_ne_n$.
Pp. abs $\exists x_1',\dots,x_n'\in\mathbb{K}$ a.î. $x=x_1'e_1+\dots+x_n'e_n$

$$x_1e_1+\dots+x_ne_n=x_1'e_1+\dots+x_n'e_n \Rightarrow (x_1-x_1')e_1+\dots+(x_n-x_n')e_n=0$$

$$\xRightarrow{R\ SLI} \begin{matrix} x_1-x_1'=0\\ \vdots\\ x_n-x_n'=0\end{matrix} \qquad \exists!\ (x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n \text{ componentele lui } x \text{ în rap. cu } R.$$

<u>Modificarea coordonatelor lui x la schimbarea reperului</u>

$$R=\{e_1,\dots,e_n\}\xrightarrow{A}R'=\{e_1',\dots,e_n'\} \text{ repere în } (V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}.$$

$$A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}\ ,\quad e_i'=\sum_{j=1}^n a_{ji}e_j\ ,\ \forall i=\overline{1,n}$$

$$x=\sum_{j=1}^n x_je_j$$

$$x=\sum_{i=1}^n x_i'e_i'=\sum_{i=1}^n x_i'\Big(\sum_{j=1}^n a_{ji}e_j\Big)=\sum_{j=1}^n\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i'\Big)e_j$$

$$\Rightarrow x_j=\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i'\ ,\ \forall j=\overline{1,n}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \vdots&&\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\ \vdots\\ x_n'\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{X=AX'}$$

Prop $A\in GL(n,\mathbb{K})$

Dem

$$R\xrightarrow{A}R'\xrightarrow{B}R'' \quad\Rightarrow C=A\cdot B$$

$$\{e_1,\dots,e_n\}\quad\{e_1',\dots,e_n'\}\quad\{e_1'',\dots,e_n''\}$$

$$\{e_1,\dots,e_n\}\xrightarrow{C}\{e_1'',\dots,e_n''\}$$

$$e_k''=\sum_{i=1}^n c_{ik}e_i$$

$$e_k''=\sum_{j=1}^n b_{jk}\underline{e_j'}=\sum_{j=1}^n b_{jk}\Big(\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i\Big)=\sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\Big)e_i$$

$$\Rightarrow c_{ik}=\sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}\quad\Rightarrow C=AB$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "I_n"'] & R' \arrow[r, "B"] & R \end{tikzcd} \quad ; \quad \begin{tikzcd} R' \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "I_n"'] & R \arrow[r, "A"] & R' \end{tikzcd}$$

$AB = BA = I_n$
A inversabilă

Def Spunem că reperele R, R' sunt la fel orientate $\Leftrightarrow \det A > 0$
$R \xrightarrow{A} R'$

— " — sunt opus orientate $\Leftrightarrow \det A < 0$.

OBS a) Relația „a fi la fel orientate" este o relație de echivalență.

b) Pe mult. tuturor reperelor se consideră 2 clase de echivalență. A alege o orientare = a preciza un reper pozitiv orientat.

$\boxed{\text{Criterii de LI}}$

Fie $(V, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect f. generat, $n = \dim_{\mathbb{K}} V$
$S = \{v_1, .., v_m\} \subset V$, $m \leq n$

S este un SLI $\Leftrightarrow$ rangul matricei componentelor vect. din S este maxim, în raport cu $\forall$ reper din V

Dem

Fie $R = \{e_1, .., e_n\}$ reper în V

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ji} e_j, \quad \forall i = \overline{1,m}$$

S este SLI $\Leftrightarrow [\forall a_1, .., a_m \in \mathbb{K}$ aî $a_1 v_1 + .. + a_m v_m = 0_V \Rightarrow a_1 = .. = a_m = 0_{\mathbb{K}}]$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0_V \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i \Big(\sum_{j=1}^{n} v_{ji} e_j\Big) = 0_V \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} v_{ji} a_i\Big) e_j = 0_V$$

$$\overset{R\text{ e SLI}}{\Longrightarrow} (*) \sum_{i=1}^{m} v_{ji} a_i = 0, \quad \forall j = \overline{1,n}$$

(*) SLO de n ecuații cu m ($m \leq n$) necunoscute: $a_1, .., a_m$

(*) SCD (sol unică nulă) $\Rightarrow rg(v_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}} = m =$ maxim.

Dem că rg nu depinde de reperul ales.

$R \xrightarrow{A} R'$
$R = \{e_1, .., e_n\}$, $R' = \{e'_1, .., e'_n\}$

$$e'_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$$

$$v_j = \sum_{k=1}^{n} v_{kj} e_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ki} v'_{ij}\Big) e_k$$

$$v_j = \sum_{i=1}^{n} v'_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{n} v'_{ij} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$$

$v_{kj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} v'_{ij} \Rightarrow C = AC'$

$rg C = rg(AC') = rg C'$

Ex $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)_{\mathbb{R}}$, $R_0=\{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\}$ reper canonic

Fie $R'=\{e_1'=(2,1), e_2'=(3,0)\}$

a) R' este reper în $\mathbb{R}^2$

b) $R_0 \xrightarrow{A} R' \xrightarrow{B} R_0$, $A, B = ?$

Sunt R_0, R' la fel orientate?

c) Fie $x=(1,2)$. Să se afle coord. lui x în raport cu reperul R_0 și R'.

Sol. a) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = \text{card } R_0 = 2$.

$|R'|=2$

Dem că R' este SLI

$e_1'=(2,1)=2\underset{e_1}{(1,0)}+1\underset{e_2}{(0,1)}$

$e_2'=(3,0)=3\underbrace{(1,0)}_{e_1}+0\underbrace{(0,1)}_{e_2}$.

$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $R_0 \xrightarrow{A} R'$

b) $\text{rg} A = 2$ max $\overset{C.L.I}{\Longrightarrow}$ R' este SLI, $|R'|=2$ $\overset{OBS}{\Longrightarrow}$ R' este reper.

$R' \xrightarrow{B=A^{-1}} R_0$

$\det A = -3$ Nu sunt la fel orientate.

c) $x=(1,2)=(1,0)+2(0,1)=1\cdot e_1+2\cdot e_2$

$(1,2)$ coord lui x în rap cu R_0.

$x=(1,2)=x_1'e_1'+x_2'e_2'=x_1'(2,1)+x_2'(3,0)$

$=(2x_1'+3x_2', x_1')$

$\begin{cases}2x_1'+3x_2'=1\\ x_1'=2\end{cases}$

$x_2'=\dfrac{1-4}{3}=-1$

$(x_1', x_2')=(2,-1)$ coord. lui x în rap cu R'

OBS $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_1'\\ x_2'\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$

Ex. $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{\mathbb{R}}$, $R_0=\{e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$ reper canonic.

$S=\{(1,2,3), (-1,1,0)\}$; $S'=S\cup\{(1,5,6)\}$

a) S este SLI ; b) S' e SLD.

a) $rg\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{matrix}} \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 2 = max \overset{CLI}{\Longrightarrow} S$ e SLI

b) $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$

$rg\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2$ nu e max $\Rightarrow S'$ e SLD.

Operații cu subspații vect

Def $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$, $V' \subseteq V$ subm. nevidă

$V' \subseteq V$ subsp vect $\Leftrightarrow \forall x, y \in V'$, $\forall a, b \in \mathbb{K}$: $ax+by \in V'$

Ex $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)_{/\mathbb{R}}$, $V' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y=2\}$ este ssp vect?

$(0,0) = 0_{\mathbb{R}^2} \notin V'$ V' nu e ssp vect

OBS a) $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect, $V_1, V_2 \subseteq V$ subsp vect $\Rightarrow V_1 \cap V_2$ subsp vect

b) În general, $V_1 \cup V_2$ nu e subsp vect.

Def $\langle V_1 \cup V_2 \rangle = \{a_1x_1 + \dots + a_nx_n,\ a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K},\ x_1,\dots,x_n \in V_1 \cup V_2\}$

sp. vectorial generat de $V_1 \cup V_2$.

$= V_1 + V_2$

Prop $\langle V_1 \cup V_2 \rangle = \{v_1 + v_2,\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$

Dem "$\subset$" Considerăm (eventual renumerotăm) $x_1, \dots, x_k \in V_1$, $x_{k+1}, \dots, x_n \in V_2$.

$$\underset{V_1 \cup V_2}{\overset{\cap}{x}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i x_i}_{= v_1 \in V_1} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{n} a_j x_j}_{= v_2 \in V_2} \in \{v_1+v_2,\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$$

"$\supset$" $\underset{V_1}{\overset{\cap}{v_1}} + \underset{V_2}{\overset{\cap}{v_2}}$ comb. lin. particulară $\Rightarrow v_1 + v_2 \in \langle V_1 \cup V_2 \rangle$

Deci $\langle V_1 \cup V_2 \rangle = V_1 + V_2 = \{v_1 + v_2,\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2\}$.

Def Spunem că $V_1 + V_2$ este <u>sumă directă</u> și notăm $V_1 \oplus V_2$ $\Leftrightarrow$ $V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

Prop $V_1 + V_2$ este sumă directă i.e $V_1 \oplus V_2 \Leftrightarrow$ $\forall x \in V_1 + V_2$, $\exists!\, v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ aî $x = v_1 + v_2$.

Dem

"$\Rightarrow$" Ip $V_1 \oplus V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

Pp. abs. $\exists\, v_1, v_1' \in V_1$, $\exists\, v_2, v_2' \in V_2$ aî $x = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$

$\underset{\substack{\cap \\ V_1}}{v_1 - v_1'} = \underset{\substack{\cap \\ V_2}}{v_2' - v_2} \in V_1 \cap V_2 = \{0_V\} \Rightarrow \begin{matrix} v_1 = v_1' \\ v_2 = v_2' \end{matrix}$ scrierea e unică

"$\Leftarrow$" $\forall x \in V_1 + V_2$, $\exists!\, v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, $x = v_1 + v_2$. (scriere unică)

Pp abs $\exists\, \underset{\substack{\neq \\ 0_V}}{u} \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow x = \underset{\substack{\cap \\ V_1}}{(v_1 - u)} + \underset{\substack{\cap \\ V_2}}{(v_2 + u)}$ do.

Pp. este falsă $\Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

Exemplu $(V = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$.

$V_1 = \{A \in V \mid Tr(A) = 0\} \subset V$ sp vect.

$V_2 = \{A \in V \mid A = \alpha I_n, \alpha \in \mathbb{R}\} \subset V$

$\Rightarrow V = V_1 \oplus V_2$.

$V_1 \cap V_2 = \{O_n\}$ (dem)

Fie $A \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \left.\begin{matrix} Tr(A) = 0 \\ A = \alpha I_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow n\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow A = O_n$.

$V_1 + V_2 = \langle V_1 + V_2 \rangle \subseteq V$ (din constr)

Dem că $V \subseteq V_1 + V_2$.

$\forall A \in V \Rightarrow A = \underbrace{\left(A - \frac{1}{n} Tr(A) I_n\right)}_{A_1} + \underbrace{\frac{1}{n} Tr(A) I_n}_{A_2 \in V_2}$

$Tr(A_1) = Tr(A) - \frac{1}{\cancel{n}} Tr(A) \cancel{n} = 0 \Rightarrow A_1 \in V_1$

Deci $V = V_1 \oplus V_2$, $\dim V_1 = n^2 - 1$, $\dim V_2 = 1$.

Teoremă $(V,+,\cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp vect n-dim, $\mathcal{R}=\{e_1,..,e_n\}$ reper în V.

$x\in V$, $x=x_1e_1+\ldots+x_ne_n$, $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$

$S(A)=\{(x_1,..,x_n)\in\mathbb{K}^n \mid \underset{(m,n)}{A}\underset{(n,1)}{X}=\underset{(m,1)}{0}\}$ mult. sol SLO

a) $S(A)\subseteq\mathbb{K}^n$ subsp. vect

b) $\dim_{\mathbb{K}} S(A)=n-\operatorname{rg}A$

Ex. $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{/\mathbb{R}}$, $V'=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{cases}x-y+z=0\\2x+y-z=0\end{cases}\right\}$

a) $\dim V'$; b) Precizați o bază în V'.

$A=\left(\begin{array}{cc|c}1&-1&1\\2&1&-1\end{array}\right)\begin{array}{|c}0\\0\end{array}$

SOL

a) $\dim V'=3-\operatorname{rg}A=3-2=1$

b) $z=t$

$\begin{cases}x-y=-t\\2x+y=t\end{cases}$

$3x\ \ /\ =0$

$x=0$

$y=t$

$V'=\{(0,t,t),\ t\in\mathbb{R}\}=\langle\{(0,1,1)\}\rangle$

$(0,t,t)=t(0,1,1)$

$\mathcal{R}'=\{(0,1,1)\}$ $\quad$ $\mathcal{R}'$ SLI, $\mathcal{R}'$ SG $\Rightarrow$ $\mathcal{R}'$ este reper în V'