23.02.2021

CURS 2

Rang. Sisteme liniare
Teorema Kronecker-Capelli. Teorema Rouche

<u>Def</u> Fie $\underset{\neq O_{m,n}}{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Spunem că $\text{rang}A = k$
$(1 \leq k \leq \min\{m,n\}) \Leftrightarrow \exists$ un minor de ordinul k nenul și toți minorii de ordin mai mare sunt nuli.
(Convenție: $rg\, O_{m,n} = 0$)

<u>OBS</u> $\exists\, C_m^{k+1} \cdot C_n^{k+1}$ minori de ordin $k+1$.

<u>Teoremă</u>
$\text{rang}A = k \Leftrightarrow \exists$ un minor Δ_k de ordin k nenul și toți minorii de ordin $k+1$ (dacă $\exists$), care îl conțin (pe Δ_k) sunt nuli.

<u>OBS</u>
$\exists\,(m-k)(n-k)$ minori de ordin $k+1$, care conțin Δ_k.

<u>OBS</u>
$rgA = k \Leftrightarrow k =$ nr. maxim de linii (resp. coloane) care <u>nu</u> sunt combinații liniare de celelalte linii (resp. coloane).

Algoritm

Fie $\Delta_k \neq 0$.

Fie toți minorii Δ_{k+1} de ordin $k+1$, care conțin Δ_k.

a) Dc. toți minorii Δ_{k+1} sunt nuli, at. $rg A = k$

b) Dc $\exists$ un minor $\Delta_{k+1} \neq 0$ și repetă raționam.
și după un nr finit de pași $\Rightarrow rg A$.

Prop

a) $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $\Rightarrow rg(AB) \leq \min\{rg A, rg B\}$.

b) Dacă $A \in GL(n, \mathbb{K})$, at. $rg(AB) = rg B = rg(BA)$, $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

OBS. Operațiile care păstrează rangul s.n. transformări elementare:

- înm. unei linii (resp coloane) cu o ct.
  ($l_i' = \alpha l_i$; $c_i' = \alpha c_i$)
- schimbarea l_i cu l_j (resp c_i cu c_j)
- $l_i' = l_i + \alpha l_j$

Exemple

Ex1 $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ $rg A = ?$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$rg A = 3$

EX2 $A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 & 3 \\ a & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & b \end{matrix} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$

$a, b = ?$ aî $rg A = 2$.

SOL

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & a+2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a+2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-a-2$$

$$\Delta_1 = -(a+3) = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b-4$$

$$\Delta_2 = b-4 = 0 \Rightarrow b = 4.$$

EX3 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ $rg A = ?$ Discuție $(a \in \mathbb{R})$

SOL

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a+2)(a-1)^2$$

1). $\Delta \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \Leftrightarrow rg A = 3$

2) $\Delta = 0$

a) $a = -2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} & -2 \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg A = 2$

b) $a = 1 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $rg A = 1$.

EX4 Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care verifică $A^3 - A - I_n = O_n$

a) $rg A = ?$

b) $rg(A + I_n) = ?$

SOL

a) $A^3 - A - I_n = O_n \Rightarrow A(A^2 - I_n) = I_n \mid \det$

$\det A \cdot \det(A^2 - I_n) = 1 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow rg A = n$

b) $A^3 = A + I_n \mid \det \Rightarrow (\underset{\neq 0}{\det A})^3 = \det(A + I_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow rg(A + I_n) = n$

Sisteme liniare

(Sisteme de ecuații algebrice de ordinul 1 cu mai multe necunoscute)

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

Fie sistemul liniar ⊛ $AX = B$

$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \ \forall i = \overline{1,m}$$

(m ecuații cu n necunoscute)

Interpretare geometrică: $\cap$ a m hiperplane în $\mathbb{R}^n$.

Not $S(A) = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid AX = B\} \subset \mathbb{R}^n$

mulțimea soluțiilor sistemului ⊛

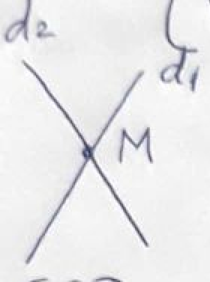
1) Dacă $S(A) \neq \emptyset$ → a) SCD ($\exists!$ soluție)

→ b) SCN ($\exists$ o inf. sol) / $\exists$ mai multe soluții

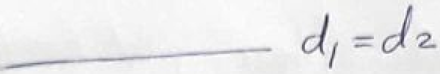
2) Dacă $S(A) = \emptyset$ și ($\nexists$ sol)

azuri particulare

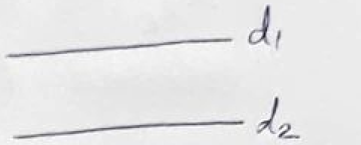
1) $n = 2$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ $\cap$ a 2 drepte în plan.



SCD

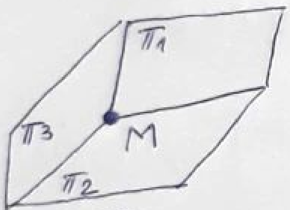


SCN

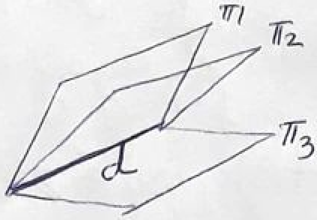


SI $d_1 \parallel d_2$

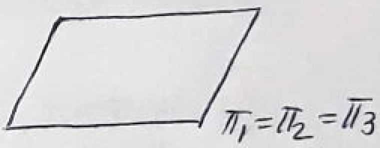
2) $n = 3$ $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ $\cap$ a 3 plane în spațiu (în $\mathbb{R}^3$)



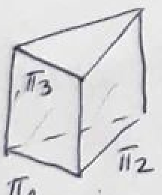
SCD.



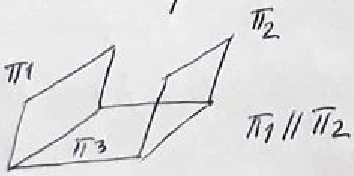
SC simplu N



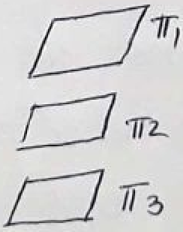
SC dublu N.



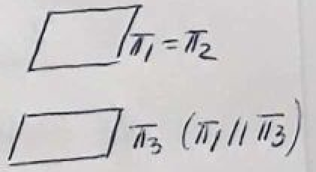
SI (fețele laterale)



SI



$\pi_1 \parallel \pi_2 \parallel \pi_3$ SI



SI

Cazul general

(*) $AX = B$, $\bar{A} = (A \mid B)$ matrice extinsă

Dacă $n = m$ și $\Delta = \det A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$AX = B \mid A^{-1} \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = \frac{1}{\det A} A^* B$$

$\Rightarrow (x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta}, \dots, \frac{\Delta x_n}{\Delta}\right)$ soluție unică

(sistem de tip Cramer)

Δ_{x_k} se obțin înlocuind coloana c_k din A cu coloana termenilor liberi, $\forall k = \overline{1,n}$

Teorema Kronecker-Capelli

Sistemul ⊛ $AX = B$ este compatibil $\Leftrightarrow rg A = rg \bar{A}$

Dem

"$\Rightarrow$" Ip: Sist este compat. Dem $rg A = rg \bar{A}$

$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S(A)$ i.e. $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j = b_i$, $\forall i = \overline{1,m}$

Fie $rg A = r$, $\bar{A} = (AB)$, $rg \bar{A} \geq rg A$

1) Dc $m = r \Rightarrow rg A = rg \bar{A} = r$

2) Dc $m > r$

$\exists$ un minor de ord r (Δ_r) în A și toți minorii de ordin $r+1$ sunt nuli.

Dem că $rg \bar{A} = r$

Fie $\bar{\Delta}_{r+1}$ minor de ordin $r+1$ din $\bar{A}$, care conține Δ_r.

- Dc $\bar{\Delta}_{r+1}$ nu conține col. term. liberi, at $\bar{\Delta}_{r+1} = 0$
- $\bar{\Delta}_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \dots & a_{i_1 j_r} & b_{i_1} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_1 j}\alpha_j \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i_r j_1} & \dots & a_{i_r j_r} & b_{i_r} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_r j}\alpha_j \\ a_{i_{r+1} j_1} & \dots & a_{i_{r+1} j_r} & b_{i_{r+1}} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_{r+1} j}\alpha_j \end{vmatrix}$

(minor caracteristic)

= sumă de r minori de ordinul $(r+1)$ din A

$= 0$

Toți minorii caract. sunt nuli $\Rightarrow rg\bar{A} = r$

"$\Leftarrow$" Ip. $rgA = rg\bar{A} = r$. Dem că $\circledast$ este SC

1) m (nr de ec) $> r$

$\exists \Delta_r$ = minor de ord r din A și toți minorii de ordin $(r+1)$ din $\bar{A}$ sunt nuli?

Fără a restrânge generalitatea, considerăm

$$\Delta_r = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (\exists (m-r) \text{ minori caract})$$

$$\bar{\Delta}_{r+1} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & \boxed{b_1} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & \boxed{b_r} \\ a_{r+1\,1} & \dots & a_{r+1\,r} & b_{r+1} \end{vmatrix} \to l_{r+1} \text{ (sau } l_{r+2} \dots l_m)$$

$\bar{\Delta}_{r+1}$ (toți) sunt nuli $\to$ col. term. liberi este o comb. liniară a primelor r coloane

$$b_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \alpha_j \quad , \forall i = \overline{1,r}$$

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_r, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-r) \text{ ori}}) \in S(A)$$

2) $m = r$

a) $n = r$ Sistem Cramer $\alpha_i = \dfrac{\Delta_{\alpha_i}}{\Delta}$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in S(A)$

b) $n > r$ $(\alpha_1, \dots, \alpha_r, 0, \dots, 0) \in S(A)$.

Teorema Rouche

(*) este SC $\Leftrightarrow$ toti minorii caracteristici (dc $\exists$) sunt nuli

Algoritm

$rg A = r$

- Dc $\exists$ cel putin un $\Delta_{car} \neq 0$, at $rg \bar{A} = r+1$ si.
- Dc. $rg \bar{A} = r$.

$\exists \Delta_{principal} \neq 0$ (de ord r) (format din $\begin{matrix} l_1, .., l_r \\ c_1, .., c_r \end{matrix}$)

$\Rightarrow ec(r+1), .., ec(m)$ = comb. liniare are $ec1, .., ec\, r$.

Consideram primele r ec (**)

$\forall$ sol a sist (**) e sol a sist (*) si reciproc.

$x_1, .., x_r$ = var. principale.

$x_{r+1} = \lambda_1, .., x_n = \lambda_p$, ($p = n - r$) var. secundare.

$$(**)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1r}x_r = -a_{1r+1}\lambda_1 - \dots - a_{1n}\lambda_p + b_1 \\ \vdots \\ a_{r1}x_1 + \dots + a_{rr}x_r = -a_{rr+1}\lambda_1 - \dots - a_{rn}\lambda_p + b_p \end{cases}$$

$(\underbrace{x_1, .., x_r}, \lambda_1, .., \lambda_p) \in S(A)$

se exprima in functie de $\lambda_1, .., \lambda_p$.

Sisteme liniare si omogene (SLO)

$AX = 0_{m,1}$.

Un SLO este totdeauna compatibil

a) Dacă $m = n$

- $\Delta \neq 0 \Rightarrow SCD \Rightarrow \exists! (0, \dots, 0)$

  $x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$, $\Delta_{x_i} = 0$, $\forall i = \overline{1,n}$

- $\Delta = 0 \Rightarrow SCN$

  ($\exists$ și sol nenule ; toți Δ_{car} sunt nuli)

b) Dacă $m > n$

- $rg A = r = n$ SCD
- $rg A = r \neq n$ SCN

c) Dacă $m < n$ SCN

Exemple

Ex1 ΔABC, a, b, c lg laturilor

$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}$$

a) $\forall \Delta ABC \rightarrow SCD$

b) sol (x_0, y_0, z_0) verifică

$x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$

c) Pt $a = 3, b = 4, c = 5$ să se rez

SOL

a) $A = \left(\begin{array}{ccc|c} b & a & 0 & c \\ c & 0 & a & b \\ 0 & c & b & a \end{array}\right)$

$\det A = b(-ac) - a(+bc) = -2bac \neq 0 \Rightarrow SCD$

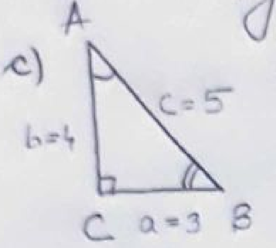
b) $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix} = c(-ac) - a(b^2 - a^2)$

$= -a(b^2 + c^2 - a^2)$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \underset{A \in (0, \pi)}{\cos A} \in (-1, 1)$

Sol este $(x, y, z) = (\cos A, \cos B, \cos C)$

c)



$\cos A = \frac{4}{5}$; $\cos B = \frac{3}{5}$; $\cos C = 0$

Sol este $(x, y, z) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right)$

Ex.

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right)$$

Să se rez.

SOL $\det A = (a+2)(a-1)^2$

I. $\Delta \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ SCD $(rg\,A = rg\,\bar{A} = 3)$

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 0$; $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = \Delta$

$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = 0$, $y = \frac{\Delta y}{\Delta} = 0$, $z = \frac{\Delta z}{\Delta} = 1$

$(x, y, z) = (0, 0, 1)$

II $\Delta = 0$

a) $a = -2 \Rightarrow A = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right)$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\,A = 2.$

$\Delta_c = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \Delta = 0 \Rightarrow rg\,\bar{A} = 2$

x, y = var. principale, $z = \alpha$ var secundară SC simplu N

$$\begin{cases} -2x + y = 1 - \alpha \quad | \cdot 2 \\ x - 2y = 1 - \alpha \end{cases}$$
$$-3x \quad / \quad = 3 - 3\alpha$$

$x = \alpha - 1$

$y = 1 - \alpha + 2\alpha - 2 = \alpha - 1$

$(x, y, z) \in \{(\alpha - 1, \alpha - 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

·) $a=1$ $\quad A=\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$

$\Delta_{c_1}=\Delta_{c_2}=\begin{vmatrix}\boxed{1} & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow rg A = rg\bar{A}=1$

$x=$ var principală, $y=\alpha$, $z=\beta$ var sec.

SC dublu N.

$x=1-\alpha-\beta$

$(x,y,z)\in\{(1-\alpha-\beta,\alpha,\beta),\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$

Ex3 $\begin{cases} ax+y+z=0\\ x+ay+z=0\\ x+y+az=0\end{cases}$

a) Să se rez.

b) Pt $a=-2$ să se afle sol (x,y,z) care verif $x^2+y^2+z^2=12$

SOL

$\Delta=\det A=(a+2)(a-1)^2$

$A=\begin{pmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$

I $\Delta\neq 0 \Rightarrow \exists!(x,y,z)=(0,0,0)$ SCD.

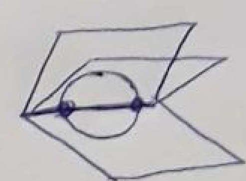
II $\Delta=0$.

a) $a=1$ $\quad A=\begin{pmatrix}\boxed{1} & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$

$rg A=1$, $\Delta_{c_1}=\Delta_{c_2}=0 \Rightarrow rg\bar{A}=1$

$x=-\alpha-\beta$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ SC d N
↓ dublu

$(-\alpha-\beta,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$



b) $a=-2$ $\quad A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\begin{vmatrix}0\\0\\0\end{vmatrix}$

$rg A = rg\bar{A}=2$. SCsN

$\begin{cases}-2x+y=-\alpha\\ x-2y=-\alpha\end{cases}\Big|\,2$

$-3x \quad\quad = -3\alpha$

$x=\alpha$
$y=\alpha$
$z=\alpha$.

$x^2+y^2+z^2=1$

$3\alpha^2=12$

$\alpha=\pm\sqrt{\frac{12}{3}}$

Soluțiile sunt
$2(1,1,1)$;
$-2(1,1,1)$.

T1 (curs)

① $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Să se afle A^{-1}, utilizând Th H-C

b) Dacă $B = A^6 + A^5 + A^4 + A + I_3$, atunci să se afle $a, b, c \in \mathbb{R}$ aî $B = aA^2 + bA + cI_3$

② $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

a) Dc $\text{Tr}\, A = 0$, at $A^2B = BA^2$, $\forall B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

b) Dc $\text{Tr}\, A \neq 0$, și $A^2B = BA^2$, at $AB = BA$

③ $\begin{cases} \frac{1}{2}x = ax + by + cz \\ \frac{1}{2}y = cx + ay + bz \\ \frac{1}{2}z = bx + cy + az \end{cases}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$

Să se arate că sist are sol unică.