Legi de compoziție. Grupuri

Ex. 1: Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție „*" prin: $x*y = x+y-xy$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$. Arătați că „*" este asociativă, comutativă și are element neutru. Det. elementele simetrizabile.

Rez:

- Asociativitate: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, $x*(y*z)=(x*y)*z$.
- Comutativitate: $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $x*y=y*x$.
- Element neutru: $(\exists)e\in\mathbb{R}$ a.î. $\forall x\in\mathbb{R}$ $x*e=e*x=x$.

$x*e=x$

$x+e-xe=x$

$e(1-x)=0 \ \forall x \Rightarrow e=0$.

- Elemente simetrizabile: $x\in\mathbb{R}$ $(\exists)y\in\mathbb{R}$ a.î. $x*y=y*x=e$

$x*y=0 \Rightarrow x+y-xy=0$

$y(1-x)=-x \Rightarrow y=\frac{-x}{1-x}$

$y=\frac{x}{x-1}$

$x\neq 1$

$\Rightarrow \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ex. 2: Pe $\mathbb{R}$ se dă legea de comp. $x*y=2x+y$. Să se studieze proprietățile legii.

Rez:

- Asociativitate:

$x*(y*z)=x*(2y+z)=2x+2y+z$.

$(x*y)*z=(2x+y)*z=4x+2y+z$.

$\Rightarrow$ „*" Nu este asoc.

- Comutativitate: NU.
- Element neutru: $x*e=e*x=x \ \forall x$

$\begin{cases}2x+e=x\\2e+x=x\end{cases}$ Nu avem elem. neutru

(T) $\forall a \in \mathbb{R}$ calculați $a_2 = a * a$, $a_3 = a_2 * a$, $a_n = a_{n-1} * a$. $(x * y = 2x + y)$

Ex 3: Pe $[0, \infty)$ definim legea de comp. $x \top y = \frac{x+y+|x-y|}{2}$. Să se studieze propr. legii.

Rez:

- Comutativitate: DA
- Asociativitate:

$$x \top (y \top z) = (x \top y) \top z. \quad (T)$$

- Elem. neutru:

$$x \top e = e \top x = x$$

$$x \top e = x \Rightarrow \frac{x+e+|x-e|}{2} = x$$

$$\Rightarrow x+e+|x-e| = 2x \Rightarrow e+|x-e| = x$$

$$\Rightarrow |x-e| = x-e$$

$$\Rightarrow x-e \geq 0$$

$$x \geq e \quad \forall x \in [0, \infty)$$

$\boxed{e=0}$ - elem. neutru

- Elem. simetrizabile:

$$x \top y = y \top x = e$$

$$\frac{x+y+|x-y|}{2} = 0 \Rightarrow |x-y| = -x-y \leq 0$$

$$\Rightarrow x = y \quad (|x-y| = 0) \Rightarrow 0 = -2x \Rightarrow x = 0.$$

$$x \top x = \frac{2x+|x-x|}{2} = x$$

$\Rightarrow$ Singurul elem. simetrizabil este $x = e$.

Ex 4: Fie mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| \, m\in\mathbb{Z} \right\}$. Să se arate că $(M,\cdot)$ este grup comutativ. Mai mult, $(M,\cdot) \cong (\mathbb{Z},+)$ ($(M,\cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z},+)$).

Rez: 1. Parte stabilă:

$$\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & m+n\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \text{ok.}$$

2. Asociativitate:

Not: $A(m) = \begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

$A(m)\cdot A(n) = A(m+n)$

$A(m)\cdot(A(n)\cdot A(p)) = (A(m)\cdot A(n))\cdot A(p) = A(m+n+p)$.

3. Comutativitate ok.

4. Element neutru: $I_2 = A(0) \in M$.

5. Elemente simetrizabile:

$A(m)\cdot A(-m) = I_2 \; (= A(0))$

$A^{-1}(m) = A(-m)$.

Def: Fie $(G,*)$ și $(H,\circ)$ două grupuri. O funcție $f: G\to H$ se num. morfism dacă $\forall g_1, g_2 \in G$ $f(g_1 * g_2) = f(g_1)\circ f(g_2)$. Mai mult, f se num. izomorfism dacă f este morfism și este bijectivă.

$(M,\cdot) \cong (\mathbb{Z},+) \; (\Leftrightarrow (\mathbb{Z},+) \cong (M,\cdot))$

$f: \mathbb{Z} \to M$, $f(m) = A(m)$, $\forall m\in\mathbb{Z}$

• morfism:

$f(m+n) = f(m)\cdot f(n)$

$f(m+n) = A(m)\cdot A(n)$ ok.

• bijectivitatea: Ex

$g: M\to\mathbb{Z}$, $g(A(m)) = m$, $\forall m\in\mathbb{Z}$.

Ex. 5: Fie mulțimea:

$$G = \left\{ I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Arătați că $(G, \cdot)$, „$\cdot$" înmulțirea matricelor, este grup. Mai mult, $(G, \cdot) \cong (S_3, \circ)$.

Rez:

1. G parte stabilă (Ex. de calcul) V.
2. Asociativitatea. V
3. Comutativitate?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nu este comutativă.

4. Elem. neutru: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Elem. simetrizabile: $A \in G \Rightarrow A^{-1} \in G$.

$A_1^2 = I_3$ $\quad A_3^3 = A_4^3 = I_3$.

$A_2^2 = I_3$

$A_5^2 = I_3$

$f : G \to S_3$

$f(A) = (1 \ 2 \ 3) \cdot A$.

$I_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = e$ $\qquad A_2 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \tau_{12}$

$A_1 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \tau_{23}$ $\qquad A_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A_4 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau_{13}$$

f izomorfism (EX)

• f morfism:

$$A_i \cdot A_j = A \in G$$

$A_i \longmapsto \sigma \qquad A \longmapsto \nu$

$A_j \longmapsto \tau$

$$\sigma \circ \tau = \nu.$$

$$A_1 \cdot A_2 = A_3 \qquad \tau_{23} \circ \tau_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$A_1 \longmapsto \tau_{23}$

$A_2 \longmapsto \tau_{12}$

$$A_3 \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{etc.} \qquad = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

• f bijectivă: f injectivă, $|G| = |S_3| = 6$.

$\Rightarrow f$ bijectivă. (din def.)

∇ $f: A \to B$, $|A| = |B| = n < \infty$.

f bijectivă $\Leftrightarrow f$ inj. $\Leftrightarrow f$ surj.

Ex. 6: Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ definim legile de compoziție:

$x \top y = (m+n, ab)$

$x \perp y = (mn, a+b)$, unde $x = (m, a)$, $y = (n, b)$.

a. Stud. propr.

b. Descrieți elem. simetrizabile

c. Să se studieze distributivitatea legii $\perp$ față de $\top$.

Rez:

a. Elem. neutre:

$x T e_1 = e_1 T x = x$, $x=(m,a)$

$e_1=(n,b)$

$x T e_1 = (m+n, ab) = (m,a)$

$\Rightarrow n=0$ $b=1$ $\Rightarrow e_1=(0,1)$

Analog, $x \perp e_2 = e_2 \perp x = x$ obținem $e_2=(1,0)$

b. Elem. simetrizabile:

$x T y = y T x = (0,1)$

$(m+n, ab) = (0,1)$

$\Rightarrow n=-m$, $b=\frac{1}{a}$ (a^{-1})

$y=(-m, a^{-1})$, $a\neq 0$

$(\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}^*, T)$ este grup.

„T" elem. simetrizabile $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}^*$

$x \perp y = y \perp x = (1,0)$

$(m\cdot n, a+b) = (1,0)$

$n=\frac{1}{m} \in \mathbb{Z} \Rightarrow m\in\{1,-1\}$.

$b=-a$.

Elem. simetrizabile:

$(1,a),(-1,a)$, $a\in\mathbb{Q}$.

c. Distributivitatea legii $\perp$ față de T.

$x\perp(y T z) = (x\perp y) T (x\perp z)$

$\Leftrightarrow$ $x\cdot(a+b) = x\cdot a + x\cdot b$

$x\perp(y T z) = x\perp(n+p, bc) = (m(n+p), a+bc)$

$x=(m,a)$

$y=(n,b)$

$z=(p,c)$

$(x\perp y) T (x\perp z) = (mn, a+b)\cdot(m\cdot p, a+c) =$

$=(mn+mp, (a+b)(a+c))$

$(m(n+p), a+bc) \overset{?}{=} (mn+mp, (a+b)(a+c))$

• distributivitate „$\cdot$" față de „+"

$a+bc \neq (a+b)(a+c)$ „+" nu este distributivă față de „$\cdot$"

Ex. 7: Pe $\mathbb{R}$ definim legile:

$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ $\quad \forall x, y \in \mathbb{R}$.

$x \circ y = x + y + 1$

a. Stud. propr.

b. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} x * y = -1 \\ x \circ y = 0 \end{cases}$.

Rez:

a. „$*$", „$\circ$" comutative.

„$*$", „$\circ$" asociative

$x \circ y \circ z = x + y + z + 2$

Elem. neutru

$x * e_1 = e_1 * x = x \Rightarrow e_1 = 0$.

$x \circ e_2 = e_2 \circ x = x \Rightarrow e_2 = -1$.

Elem. simetrizabile:

$x * y = y * x = 0$

$\sqrt[3]{x^3 + y^3} = 0 \Rightarrow y = -x$

$x \circ y = y \circ x = -1$

$x + y + 1 = -1$

$y = -x - 2$

$(\mathbb{R}, *)$, $(\mathbb{R}, \circ)$ grupuri

b. $\begin{cases} x * y = -1 \\ x \circ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 + y^3} = -1 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = -1 \\ x + y = -1 \end{cases}$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = +1 \\ x + y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 - x \\ x^2 + x(1 + x) + (1 + x)^2 = 1 \end{cases}$

↳ ec. de gr. 2.

$\Rightarrow 3x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ sau $x = -1$.

$y = -1$ $\qquad y = 0$.