1. Enunțați teorema funcțiilor implicite și teorema multiplicatorilor lui Lagrange.

<u>Teoremă</u> Fie $D = \mathring{D} \subseteq R^{n+m}$ $f : D \to \mathbb{R}^m$ și $(a,b) \in D$

a.î. 1) $f(a,b) = 0$

2) f este funcție de clasă C^1 (derivabilă și cu derivata continuă

3) $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ este inversabilă

Atunci $\exists D_1 = \mathring{D}_1$ (mulțime deschisă) și $D_2 = \mathring{D}_2$ a.î. $a \in D_1$ și $b \in D_2$, $D_1 \times D_2 \subseteq D$ și

$\exists \varphi : D_1 \to D_2$ a.î. 1) $\varphi(a) = b$

2) $f(x, \varphi(x)) = 0$

3) funcția φ este de clasă C^1 și

$$\varphi'(x) = -\frac{\partial f}{\partial y}(x, \varphi(x))^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, \varphi(x))$$

<u>Teoremă</u> - Extreme cu legături / Teorema multiplicatorilor lui Lagrange.

Fie $D = \mathring{D} \subseteq R^n$, $f : D \to \mathbb{R}$ și $g : D \to \mathbb{R}^m$ $(m < n)$ și a un punct de extrem al funcției f pe mulțimea $g(x) = 0$. Dacă $f, g \in C^1$ și rang $g' = m$ (maxim) $\Rightarrow \exists \lambda = (\lambda_1, \dots \lambda_m)$ a.î. $h'_\lambda(a) = 0$, unde $h_\lambda = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \dots \lambda_m g_m$

2. Def. suma Riemann, suma Darboux superioară, suma Darboux inferioară, integrala superioară și funcție integrabilă Riemann.

<u>Def. suma Riemann</u> Fie $f:[a,b]\to R$ o funcție mărginită, $\Delta=(a=x_0<x_1<..<x_n=b)$ o diviziune a intervalului $[a,b]$ și $\{\alpha_i\}_{i=\overline{0,n-1}}$ un sistem de puncte intermediare asociat diviziunii, cu $\alpha_i\in[x_i,x_{i+1}]$ $\forall i=\overline{0,n-1}$

$$\sigma_\Delta\left(f,(\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}\right)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\alpha_i)(x_{i+1}-x_i)$$

- suma Riemann asociată funcției

<u>Def suma Darboux sup. și inf.</u> Fie $f:[a,b]\to R$, mărginită și $\Delta=(a=x_0<x_1<\dots<x_n=b)$

$$S_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1}M_i(x_{i+1}-x_i) \text{ unde } M_i=\sup_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)$$

$$s_\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n-1}m_i(x_{i+1}-x_i) \text{ unde } m_i=\inf_{x\in[x_i,x_{i+1}]}f(x)$$

<u>Integrală superioară</u> Se numește integrala superioară Darboux a funcției pe intervalul $[a,b]$ numărul

$$\overline{\int_a^b}f(x)\,dx=\overline{\int_a^b}f=\inf_\Delta S_\Delta(f)$$ $\Delta\in D$ unde D e mult. tuturor diviziunilor posibile ale interv. $[a,b]$

<u>Integrală inferioară</u> $\underline{\int_a^b}f(x)dx=\underline{\int_a^b}f=\sup_\Delta s_\Delta(f)$

<u>Def</u> $\|\Delta\|=\max_{i=0}^{n-1}|x_{i+1}-x_i|$

<u>Teoremă</u> Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este integrabilă Riemann pe $[a,b]$ dacă și numai dacă $\exists I\in\mathbb{R}$ a.î. pentru orice șir de diviziuni Δ, cu $\lim_{n\to\infty}\|\Delta\|=0$ și pentru $\forall$ sistem de puncte intermediare $\lim_{n\to\infty}\sigma_\Delta\left(f,(\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}\right)=I$

3. Arătați că suma a două funcții integr. Riemann e integrabilă Riemann.

Dem • f integrabilă Riemann $\Rightarrow \exists I_f$ a.î. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta'_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta'_\varepsilon \Rightarrow |I_f - \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| < \frac{\varepsilon}{2}$

• g integr. Riemann $\Rightarrow \exists I_g$ a.î. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta''_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon \Rightarrow |I_g - \sigma_\Delta(g, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| < \frac{\varepsilon}{2}$

• $\sigma_\Delta(f+g, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}) = \sum_{i=0}^{n-1} (f+g)(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i) =$
$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=1}^{n-1} g(\alpha_i)(x_{i+1} - x_i) =$
$= \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}) + \sigma_\Delta(g, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})$

• Fie $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ unde $\delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon) > 0 \Rightarrow$

$|I_f + I_g - \sigma_\Delta(f+g, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| =$
$= |I_f - \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}) + I_g - \sigma_\Delta(g, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| \le$
$\le |I_f - \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| + |I_g - \sigma_\Delta(g, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| <$
$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

4. Arătați că o funcție integrabilă Riemann e integrabilă Darboux. Dem Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integr. Riemann, arăt că $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.

• f integr. Riemann $\Rightarrow \exists I \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |I_f - \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}})| < \varepsilon \Leftrightarrow$

$I - \varepsilon \le \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}) < I + \varepsilon$

$S_\Delta(f) = \sup_{(\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}} \sigma_\Delta(f, (\alpha_i)_{i=\overline{0,n-1}}) \le I + \varepsilon$

$s_\Delta(f) \ge I - \varepsilon$

$\Rightarrow I - \varepsilon \le s_\Delta(f) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f < S_\Delta(f) \le I + \varepsilon$

$\Rightarrow 0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow$

$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

5. Lema lui Darboux şi Teorema lui Darboux

<u>Lema lui Darboux</u> Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ o funcţie mărginită astfel încât pentru $\forall$ şir de diviziuni Δ_n cu $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ avem $\lim_{n\to\infty} (S_{\Delta_n}(f) - s_{\Delta_n}(f)) = 0$

atunci $\exists I \in \mathbb{R}$ a.î. pentru orice şir $\Delta_1 < \Delta_2 \cdots$ cu $\lim_{n\to\infty} \|\Delta_n\| = 0$ avem $\lim_{n\to\infty} s_{\Delta_n}(f) = \lim_{n\to\infty} S_{\Delta_n}(f) = I$

<u>Teorema lui Darboux</u>

Fie $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mărginită, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) f este integrabilă Riemann.

2) $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

3) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Delta$ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

4) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$

<u>Dem</u> $1 \Rightarrow 2$ făcut la pct. anterior

$4 \Rightarrow 3$ evidentă

$3 \Rightarrow 2$ Fie Δ a.î. $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$. Atunci $\Rightarrow$

$s_\Delta(f) \le \underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f < S_\Delta(f) \Rightarrow$

$0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$

$2 \Rightarrow 4$ $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$; $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta'_\varepsilon$ a.î. $\|\Delta\| < \delta'_\varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f) - \underline{\int_a^b} f < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta''_\varepsilon$ a.î. $\|\Delta\| < \delta''_\varepsilon \Rightarrow \underline{\int_a^b} f - s_\Delta(f) < \varepsilon$

$\delta_\varepsilon = \min(\delta'_\varepsilon, \delta''_\varepsilon) > 0$; $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < 2\varepsilon$

6. Criteriul lui Lebesgue

<u>Teoremă (Lebesgue)</u> Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>mărginită</u>. Atunci f este integrabilă Riemann $\iff$ Δf (discontinuitatea lui f) este neglijabilă Lebesgue.

7. Teoremă privind integrabilitatea funcțiilor continue și monotone.

<u>Teoremă</u> Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci f este integrabilă Riemann.

- f mărginită și uniform continuă $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall x, y \in [a,b]$ cu $|x-y| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
- Fie Δ cu $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$. Fie $x, y \in [x_i, x_{i+1}] \Rightarrow$ $|x-y| \le |x_{i+1} - x_i| \le \|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
- $M_i - m_i \le \varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i)$

$$\le \varepsilon \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = \varepsilon (b-a) \Rightarrow f \text{ e integr. Riemann}$$

<u>Teoremă</u> Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotonă. Atunci f este integrabilă Riemann.

<u>Dem</u> Presupunem că f este crescătoare $\Rightarrow$

$m_i = f(x_i)$ și $M_i = f(x_{i+1})$

- $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i)(x_{i+1} - x_i) \le$
$\le \|\Delta\| \cdot \sum (f(x_{i+1}) - f(x_i)) = \|\Delta\| (f(b) - f(a))$
- $\varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon = \dfrac{\varepsilon}{f(b) - f(a) + 1} \quad \|\Delta\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le \|\Delta\| (f(b) - f(a)) \le \frac{\varepsilon (f(b) - f(a))}{f(b) - f(a) + 1} < \varepsilon$$

8. Proprietățile funcțiilor integrabile Riemann

Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funcții integrabile Riemann. Atunci funcțiile $c \cdot f$, $f + g$, $|f|$ și $f \cdot g$ sunt integrabile Riemann și $\int_a^b c \cdot f = c \cdot \int_a^b f$ și $\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g$. Dacă $f(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$ și $\frac{1}{f}$ este mărginită $\Rightarrow$ $\frac{1}{f}$ este integrabilă Riemann

9. Păstrarea integrabilității prin convergență uniformă

Fie $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și f_n să fie integrabile Riemann $\forall n \geq 1$. Atunci f este integrabilă Riemann și $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

<u>Dem.</u>
- $\left.\begin{array}{l} f_n \xrightarrow{u} f \\ f_n \text{ continuă în } C \end{array}\right\} \Rightarrow f$ continuă în C $\Rightarrow$ D_f (discont. lui f) $\subset \bigcup_{n \geq} D_{f_n}$

f_n sunt integr. Riemann $\Rightarrow D_{f_n}$ neg $\mathcal{L} \Rightarrow D_f$ neg $\mathcal{L}$

$f_n \xrightarrow{u} f$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Dacă $\varepsilon = 1 \Rightarrow |f(x)| \leq 1 + |f_n(x)|$ $\forall x \in [a,b]$

f_n este integrabilă Riemann $\Rightarrow$ f_n este mărg.

$\Rightarrow$ f este mărginită

- $f_n \xrightarrow{u} f$ $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_\varepsilon$ a.î. $\forall n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ $\forall x \in [a,b] \Rightarrow f(x) < f_n(x) + \varepsilon$ $\forall x \in [a,b]$

Fie Δ o diviziune a lui $[a,b]$

$M_i^f = \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \leq \varepsilon + \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f_n(x) \leq \varepsilon + M_i^{f_n}$

- $S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i^f (x_{i+1} - x_i) \le \sum_{i=0}^{n-1} M_i^{f_n} (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=1}^{n-1} \varepsilon (x_{i+1} - x_i) = S_\Delta(f_n) + \varepsilon(b-a)$
- $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \le S_\Delta(f_n) - s_\Delta(f_n) + 2\varepsilon(b-a)$

f_n este int. Riemann $\Rightarrow \exists \Delta$ a.î. $S_\Delta(f_n) - s_\Delta(f_n) < \varepsilon \Rightarrow S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon(1 + 2(b-a)) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ este Riemann

- $f_n \xrightarrow[b]{u} f \Rightarrow \left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \right| \le$

$\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \le \varepsilon(b-a) \Rightarrow \int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

10. Teorema Leibniz - Newton + Dem

Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabilă cu f' integrabilă Riemann. Atunci $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$.

<u>Dem</u> Fie $\Delta_n = a = x_0^n < x_1^n < \dots < x_n^n = b$ a.î. $\|\Delta\| \to 0$

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n)$$

Aplic teorema lui Lagrange pentru f pe $[x_i^n, x_{i+1}^n]$

$\Rightarrow \exists c_i^n \in (x_i^n, x_{i+1}^n)$ a.î. $f(x_{i+1}^n) - f(x_i^n) = f'(c_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n)$

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=0}^{n-1} f'(c_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n) = \sigma_{\Delta_n}(f', (c_i^n)_{i=\overline{0,n-1}})$$

Deoarece f' este integrabilă Riemann $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{\Delta_n}(f', (c_i^n)_{i=\overline{0,n-1}}) = \int_a^b f'(x)dx = \lim_{n\to\infty} f(b) - f(a)$$

$$\Rightarrow f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

11. Formula de integrare prin părți și de schimbare de variabilă + Dem.

__Propoziție__ : Fie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, derivabile cu f' și g' integrabile Riemann, atunci:

$$\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\, dx$$

__Dem__ Fie $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = f(x)\cdot g(x)$

$$F'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

- f și g sunt derivabile $\Rightarrow$ sunt continue $\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ și } g \text{ sunt integrabile Riemann} \\ \bullet\ f' \text{ și } g' \text{ sunt integrabile Riemann} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow f\cdot g'$ și $f'\cdot g$ sunt integrabile $\Rightarrow F$ e integr. Riemann

$$\underbrace{\int_a^b F'(x)\, dx}_{\displaystyle \int_a^b f'\cdot g + \int_a^b f\cdot g'} = F(b) - F(a) = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a)$$

$$\int_a^b f'\cdot g + \int_a^b f\cdot g' = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a).$$

__Propoziție__ Fie $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ bijectivă, crescătoare, derivabilă, cu φ' continuă și $f : [c,d] \to R$ continuă. Atunci $f\circ\varphi : [a,b] \to R$ este continuă

și $$\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\cdot\varphi'(x)\, dx = \int_c^d f(y)\, dy$$

__Dem__ Fie $F : [c,d] \to \mathbb{R}$ $F(y) = \int_c^d f(t)\, dt \Rightarrow$

$\Rightarrow F$ e derivabilă cu $F'(y) = f(y)$

- $F\circ\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$

$$(F\circ\varphi)(b) - (F\circ\varphi)(a) = \int_a^b (F\circ\varphi)'(x)\, dx = \int_a^b F'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\, dx$$

$$= \int_a^b f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\, dx$$

- $F(d) - F(c) \overset{TLN}{=} \int_c^d F'(y)\, dy = \int_c^d f(y)\, dy.$

12. Integrale improprii și proprietăți

Def Fie $f:[a,b)\to R$ a.î. f să fie integrabilă pe $[a,c]$ $\forall c\in[a,b)$ (f local integrabilă).

Dacă $\exists \lim\limits_{c\nearrow b}\int_a^c f = \ell$ și $\ell\in\mathbb{R}$ spunem că f este integrabilă improprie pe (a,b) și $\int_a^b f = \lim\limits_{c\nearrow b}\int_a^c f$ (mai notăm $\int_a^{b^-} f$).

Dacă $\ell=\infty$ scriem $\int_a^b f=\infty$.

Proprietăți

Propoziție Fie $f,g:[a,b)\to R$ integrabile improprii. Atunci $f+g$ și αf sunt integrabile improprii și $\int_a^b f+g=\int_a^b f+\int_a^b g$, $\int_a^b \alpha f=\alpha\int_a^b f$.

Teorema Leibnitz-Newton Fie $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ derivabilă cu f' local integrabilă. Dacă $\exists\lim\limits_{c\nearrow b} f(c)\in\mathbb{R}\Rightarrow$ $\exists$ integr. improprie $\int_a^b f'$ și $\int_a^b f'=\lim\limits_{c\nearrow b} f(c)-f(a)$.

Prop Fie $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile cu derivatele locale integrabile. Dacă $\exists\int_a^b f'g$ și $\exists\int_a^b f\cdot g'$, $\lim\limits_{c\nearrow b} f(c)\cdot g(c)\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_a^b f'\cdot g=\lim\limits_{c\nearrow b} f(c)\cdot g(c)-\int_a^c f\cdot g'$.

Prop Fie $f:[c,d)\to R$ continuă si $\varphi:[a,b)\to[c,d)$, bijectivă, crescătoare, de clasă C^1. Dacă $\exists\int_c^d f\Rightarrow$

$\Rightarrow\exists\int_a^b(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)dt$ există si $\int_a^b(f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)dt=\int_c^d f(x)dx$.

13. Variația unei funcții - def + propr.

Def Fie $f:[a,b]\to R$, $\Delta = a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$.

$V_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$

$\bigvee_a^b (f) = \sup_\Delta V_\Delta(f)$. f are variație mărginită dacă

$\bigvee_a^b (f) < \infty$

Propoziție Fie $f, g : [a,b] \to R$ Atunci:

1) $\bigvee_a^b (f+g) \le \bigvee_a^b (f) + \bigvee_a^b (g)$

2) $\bigvee_a^b (|f|) \le \bigvee_a^b (f)$ și $\bigvee_a^b (c \cdot f) = |c| \cdot \bigvee_a^b (f)$

3) $\bigvee_a^b (f) \ge |f(b) - f(a)|$

4) $\bigvee_a^b (f \cdot g) \le \|f\|_\infty \cdot \bigvee_a^b (g) + \|g\|_\infty \cdot \bigvee_a^b (f)$

unde $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

Obs 1) $\bigvee_a^b (f) = 0 \Rightarrow f$ este constantă

2) f crescătoare $\Rightarrow \bigvee_a^b f = f(b) - f(a)$

3) $c \in [a,b] \Rightarrow \bigvee_a^b (f) = \bigvee_a^c (f) + \bigvee_c^b (f)$

4) $\bigvee_a^b (f) < \infty \Rightarrow h, g : [a,b]$ a.î. h, g crescătoare

și $f = h - g$. $h = \bigvee_a^x (f)$ $g = \bigvee_a^x (f) - f(x)$

14. Teoremă privind variația unei funcții derivabile.

<u>Prop.</u> Fie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, derivabilă cu derivata mărginită.

Atunci $\overline{\int_a^b} |f'| \geq \bigvee_a^b (f) \geq \underline{\int_a^b} |f'|$. In particular dacă f' este integrabilă Riemann $\Rightarrow \bigvee_a^b (f) = \int_a^b |f'(x)| dx$,

<u>Dem</u> $\Delta = a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b$

$$V_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

- Lagrange pe $[x_i, x_{i+1}]$ pt. $f \Rightarrow \exists c_i \in (x_i, x_{i+1})$ a.î. $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$
- $\sum_{i=0}^{n-1} M_i^{|f'|} (x_{i+1} - x_i) \geq V_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1} |f'(c_i)| \cdot (x_{i+1} - x_i) \geq$

$$\geq \sum_{i=0}^{n-1} m_i^{|f'|} (x_{i+1} - x_i) = s_\Delta(|f'|)$$

$$\underline{\int_a^b} |f'| = \sup_\Delta s_\Delta(|f'|) \leq \sup_\Delta V_\Delta(f) = \bigvee_a^b (f)$$

Pt. $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \Delta_1$ a.î. $\bigvee_a^b (f) - V_{\Delta_1}(f) < \varepsilon$

$\exists \Delta_2$ a.î. $S_\Delta(|f'|) - \overline{\int_a^b} |f'| < \varepsilon$

Fie $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \Rightarrow \bigvee_a^b (f) + S_\Delta(|f'|) - V_\Delta(f) - \overline{\int_a^b} |f'| < 2\varepsilon$

$$\Rightarrow \bigvee_a^b (f) \leq \overline{\int_a^b} |f'| + 2\varepsilon$$

15. Definiție lungimea unui drum

O funcție $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ continuă se numește drum.

- $\gamma(a)$ - se numește capătul initial al drumului
- $\gamma(b)$ - " " " final al drumului
- Dacă $\gamma(a) = \gamma(b) \to$ drum închis

Dacă notam $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_n(t))$, atunci relatiile $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ ... s.n ecuatiile parametrice ale drumului γ

- $d_2(x, y) = \| x - y \|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (x_i - y_i)^2}$

- $V_\Delta(\gamma) = \sum_{i=1}^{n-1} \| \gamma(x_{i+1}) - \gamma(x_i) \|_2$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Fie } \gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n \text{ de clasă } C^1. \text{ Atunci} \\ \ell_\gamma = \int_a^b \| \gamma'(x) \|_2 \, dt\end{array}}$$

In cazul particular $n = 3$, $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\ell_\gamma = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} \, dt.$$

16. Lungimea unei funcții pentru un drum de clasă C_1

Fie $\gamma : [a, b] \to D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n$, $\gamma \in C^1$ și

$f : D \to \mathbb{R}$ continuă.

$$\int_\gamma f \, dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \| \gamma'(t) \|_2 \, dt$$

17. Integrala curbilinie de primul tip - def și propr.

Def Fie $\gamma : [a,b] \to R^n$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t) \dots \gamma_n(t))$ drum de clasă C^1 ($\gamma_1, \gamma_2 \dots \gamma_n$ sunt funcții de clasă C^1 pe $[a,b]$).

Fie $f : D \to \mathbb{R}$ funcție continuă

$$\int_\gamma f\,dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|_2\,dt$$

Propr Fie $\gamma : [a,b] \to D = \mathring{D} \subset R^n$, $\gamma \in C^1$ pe porțiuni și $f, g : D \to \mathbb{R}^n$ continue. Atunci:

1) $\int_\gamma (f+g)\,dl = \int_\gamma f\,dl + \int_\gamma g\,dl$

2) $\int_\gamma c \cdot f\,dl = c \cdot \int_\gamma f\,dl$

3) γ_1, γ_2 este o descompunere a lui $\gamma \Rightarrow \int_\gamma f\,dl = \int_{\gamma_1} f\,dl + \int_{\gamma_2} f\,dl$

4) $\left|\int_\gamma f\,dl\right| \le l_\gamma \cdot \sup_{t \in \gamma([a,b])} |f(t)|$

5) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \int_{\gamma_1} f\,dl = \int_{\gamma_2} f\,dl$.

18. Integrala curbilinie de al doilea tip - def și propr.

Def Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{R}^n$ și ω o formă diferențială continuă $\omega = \sum_{i=1}^n P_i\,dx_i$ și $\gamma : [a,b] \to R^n$, $\gamma \in C^1$.

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^n \int_a^b P_i(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)\,dt$$

Dacă notăm $F = (P_1, P_2 \dots P_n) : D \to R^n$ și produsul scala $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i \Rightarrow$

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle F(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\,dt$$

Propr 1) $\int_\gamma (\omega_1 + \omega_2) = \int_\gamma \omega_1 + \int_\gamma \omega_2$

2) $\int_\gamma a\omega = a\int_\gamma \omega$

3) $\int_{(\gamma_1, \gamma_2)} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$

4) $\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma^-} \omega$

5) $\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

19. Teorema Leibnitz - Newton pt. integrale curbilinii.

Teoremă Fie $f: D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ și $\gamma: [a,b] \to D$ drum de clasă C^1 pe porțiuni. Atunci:

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Dem Presupunem că $\gamma \in C^1$

$$\int_\gamma df = \int_\gamma \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot dx_i = \int_a^b \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t) dt =$$

$$= \int_a^b (f \circ \gamma)' dt = (f \circ \gamma)(b) - (f \circ \gamma)(a)$$

20. Condiții echivalente ca o formă diferențială să admită primitive + dem.

Teoremă Fie $D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ un domeniu și ω o formă diferențială (continuă pe D). Atunci următ. afirmații sunt echivalente:

1) $\exists\, f: D \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$ a.î. $df = \omega$

2) $\forall\, \gamma: [a,b] \to D$, $\gamma \in C^1$, închis $\Rightarrow \int_\gamma \omega = 0$

3) $\forall\, \gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to D$ $(\gamma \in C^1)$ a.î.

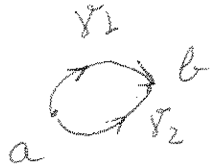
$\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ și $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) \Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$

<u>Dem</u>

$1 \Rightarrow 2 \qquad \int_\gamma df \overset{TLN}{=} f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$

$2 \Rightarrow 3 \qquad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ inchis

$$\int_\gamma \omega = 0 = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2^-} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$



$3 \Rightarrow 2$ asemanator $\gamma_1 \cup^- \gamma_2$ - e drum inchis

$$\int_{\gamma_2} \omega \Rightarrow -\int_{\gamma_2^-} \omega \Rightarrow \int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0$$

$3 \Rightarrow 1$ Fie $a \in D$ fixat si $x \in D$

Fie $\gamma : [0,1] \to D$ ($\gamma \in C^1$) a.î. $\gamma(0) = a$ și $\gamma(1) = x$

$F(x) = \int_\gamma \omega$ - bine definită, depinde doar de x

$\gamma(\gamma_1, [x, x_1], \gamma_2^{-1})$ inchis $\Rightarrow$

$$\int_{\gamma_1} \omega + \int_{[x,x_1]} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0 \Rightarrow$$

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = -\int_{[x,x_1]} \omega \Rightarrow F(x) - F(x_1) = -\int_{[x,x_1]} \omega$$

$$\Rightarrow F(x_1) - F(x) = \int_{[x,x_1]} \omega \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial x_i} = P_i$$

$f : [a,b] \to R$ integr. Riemann

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \Rightarrow F'(x) = f(x)$ în punctele de cont.

$f : D = \mathring{D} \to \mathbb{R}$ $(D \subset \mathbb{R}^n)$, $f \in C^2$

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n P_i dx_i$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

21. Lema lui Poincare + dem.

Fie $D = \mathring{D}$ un domeniu stelat în raport cu $a \in D$ și $\omega = \sum_{i=1}^{n} P_i dx_i$ o formă diferențială de clasă C^1.

Dacă $\frac{\partial P_i}{\partial x_j} = \frac{\partial P_j}{\partial x_i}$ $\forall i, j = \overline{1,n}$, $i \neq j$, atunci ω este exactă, adică $\exists f : D \to R$ a.î. $df = \omega$.

<u>Dem</u> Definim $f : D \to R$, $f(x) = \int_{[a,x]} \omega$ unde $[a, x)$ este un drum.

$\gamma : [0,1] \to D$ $\gamma(t) = (x-a)\cdot t + a$, $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = x$

Calculam $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ $f(x) = \int_{[a,x]} \omega = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} P_i((x-a)t+a)(x_i - a_i)dt$

(integr. cu param)

unde $(x_i - a_i)$ e $\gamma_i'(t)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \int_0^1 \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_j}(P_i((x-a)t+a)(x_i - a_i)dt$$

Caz 1. $i \neq j$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(P_i((x-a)\cdot t + a)(x_i - a_i)) = \frac{\partial P_i}{\partial x_j}((x-a)\cdot t + a)(x_i - a_i)\cdot t$$

Caz $i = j$ $\frac{\partial}{\partial x_j}(P_j((x-a)t+a)(x_j - a_j)) =$

$$= \frac{\partial P_j}{\partial x_j}((x-a)t+a)\cdot(x_j - a_j)\cdot t + P_j((x-a)t+a)$$

$$\frac{\partial(x_j - a_j)}{\partial x_j} = 1 \qquad \frac{\partial(x_i - a_i)}{\partial x_j} = 0$$

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial P_i}{\partial x_j}((x-a)t+a)(x_i - a_i) + P_j((x-a)t+a)dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial P_j}{\partial x_i}((x-a)t+a)(x_i - a_i) + P_j((x-a)t+a)dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(t\cdot P_j((x-a)t+a))dt = t P_j((x-a)t+a)\Big|_0^1 =$$

$\Rightarrow P_j(x)$ $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j} = P_j$ $\Rightarrow df = \omega$

22. Funcții $\mathbb{C}$ derivabile (definiție)

Def Fie $D = \overset{\circ}{D} \subseteq \mathbb{C}$, $f : D \to \mathbb{C}$ și $z_0 \in \mathbb{C}$

Spunem că f este $\mathbb{C}$-derivabila (sau olomorfă) în z_0 dacă există și este finită limita

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

- f este derivabilă în $z_0 \iff \exists\, \alpha \in \mathbb{C}$ și $\omega : D \to \mathbb{C}$ a.î.

1) $f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + (z - z_0)\cdot\omega(z)$

2) $\lim\limits_{z \to z_0} \omega(z) = 0$

23. Teorema Cauchy - Riemann pt. funcții $\mathbb{C}$ deriv. + dem

Fie $D = \overset{\circ}{D} \subset \mathbb{C}$, $z_0 \in D$ și $f : D \to \mathbb{C}$. Atunci sunt echivalente următoarele afirmații

1) $\exists\, f'(z_0)$

2) f este $\mathbb{R}$-diferențiabilă în z_0 și

$$\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \quad \text{și} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(z_0)$$

Dem $1 \Rightarrow 2$ Notăm $f'(z_0) = \alpha + i\beta$

f este derivabilă în $z_0 \Rightarrow \exists\, \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ și $\omega : D \to \mathbb{C}$ a.î.

$$f(z) = f(z_0) + (\alpha + i\beta)(z - z_0) + (z - z_0)\cdot\omega(z)$$

$$(u + iv)(z) = u(z_0) + i v(z_0) + \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + i\cdot\alpha(y - y_0) + i\beta(x - x_0) + (z - z_0)\cdot\omega_1(z) + i(z - z_0)\cdot\omega_2(z)$$

$$u(z) = u(z_0) + \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) + (z - z_0)\,\omega_1(z) \quad (1)$$

$$v(z) = v(z_0) + \alpha(y - y_0) + \beta(x - x_0) + (z - z_0)\,\omega_2(z) \quad (2)$$

(1) $\iff$ u este $\mathbb{R}$ diferențiabilă

(2) $\iff$ v este $\mathbb{R}$ diferențiabilă

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\beta$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \alpha \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \beta$$

f este $\mathbb{R}$ diferențiabilă $\Rightarrow \exists A \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ și $\omega_1, \omega_2 : D \to \mathbb{R}$

a.î. $u(z) = u(z_0) + a_{11}(x-x_0) + a_{12}(y-y_0) + (z-z_0)\omega_1(z)$

$v(z) = v(z_0) + a_{21}(x-x_0) + a_{22}(y-y_0) + (z-z_0)\omega_2(z)$

24. Teorema Cauchy - Hadamard pentru serii de numere complexe.

Fie $s(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ și $\rho = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$

Notăm $D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ s$ este convergentă în $z\}$

Atunci 1) Dacă $\rho = 0 \Rightarrow D = \{\emptyset\}$

$\rho = \infty \Rightarrow D = \mathbb{C}$

$0 < \rho < \infty \Rightarrow$ seria converge pt $|z| < \rho$ și diverge pentru $|z| > \rho$

2) Dacă $\rho > 0$ și $0 < R < \rho \Rightarrow s$ este uniform absolut conv pe $B(0, R]$.

3) $s_1(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n z^n)' = \sum_{n \geq 1} a_n \cdot n \cdot z^{n-1} \Rightarrow \rho_1 = \rho$

4) $s' = s_1$

5) $s^{(n)}(z) = \sum_{k \geq 0} (a_k z^k)^{(n)} = \sum_{n \geq k} a_k \cdot k(k-1) \cdots (k-n+1) z^{n-k}$

$z = 0 \Rightarrow s^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$

25. Teorema de identitate pentru serii de puteri.

Fie $s_1 = \sum_{n\geq} a_n z^n$ și $s_2(z) = \sum_{n\geq 0} b_n z^n$ două serii de puteri definite pe $B(0,R)$, cu $R>0$ a.î. $\exists A \subset B(0,R)$ cu $0 \in A'$ și $s_1(z) = s_2(z)$ $\forall z \in A$

Dem Pp. că $s_1 \neq s_2 \Rightarrow \exists n$ a.î. $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ ....

$a_{n-1} = b_{n-1}$ și $a_n \neq b_n$

$s_1(z) - s_2(z) = \sum_{k\geq n} (a_k - b_k)\cdot z^k = z^n \sum_{k>n} (a_k - b_k) z^{k-n}$

notăm $g(z) = z^n \cdot \sum_{k\geq n} (a_k - b_k)\cdot z^{k-n}$

$g(0) = a_n - b_n \neq 0$

g este cont în $0 \Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ a.î. $g(z) \neq 0\ \forall z \in B(0,\varepsilon)$

$\Rightarrow s_1(z) \neq s_2(z)$ pe $B(0,\varepsilon)$

$A = \{ z \mid s_1(z) = s_2(z) \}$

26. Integrala complexă pe drumuri - def + propr.

Def Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{C}$, $\gamma : [a,b] \to D$ un drum de clasă C^1 pe porțiuni ($\exists\ \Delta = a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$ a.î. $\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]} \in C^1$ $\forall i = \overline{0, n-1}$ și $f : D \to \mathbb{C}$ continuă

$$\int_\gamma f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)\, dt.$$

Propr

1) $\int_\gamma (f_1 + f_2) = \int_\gamma f_1 + \int_\gamma f_2$

2) $\int_\gamma af = a\int_\gamma f$ $\forall a \in \mathbb{C}$

3) $\int_\gamma f = -\int_{\gamma^-} f$

4) $\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \ell_\gamma \cdot \sup_{z\in\gamma([a,b])} |f(z)|$

5) Dacă $\gamma_1, \dots \gamma_n$ este o descomp. a lui γ atunci

$$\int_\gamma f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f$$

6) $f_n, f : D \to C$ continue a.î. $f_n \xrightarrow{u} f \Rightarrow \int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$

7) $\gamma_n : [a,b] \to D$ a.î. $\gamma_n \xrightarrow{u} \gamma$ și $\gamma_n' \xrightarrow{u} \gamma' \Rightarrow$

$$\int_{\gamma_n} f \to \int_\gamma f.$$

27. Condiții echivalente ca o funcție să admită primitivă complexă + dem.

<u>Teoremă</u> Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu și $f : D \to C$ continuă

Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $\forall \gamma : [a,b] \to D$ drum de clasă C^1 pe porțiuni și închis $(\gamma(a) = \gamma(b)) \Rightarrow \int_\gamma f = 0$

2) $\forall \gamma : [a,b] \to D$ drum poligonal închis $\Rightarrow \int_\gamma f = 0$

3) $\exists\, g : D \to C$ cu $g' = f$

<u>Dem</u> 3) $\Rightarrow$ 1) Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}$ un drum de clasă C^1 pe porțiuni ($\exists \Delta = a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b$ a.î. $\gamma|_{[x_i, x_{i+1}]} \in C^1 \ \forall i \in \overline{0,n-1}$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma g'(z)\,dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g \circ \gamma)'(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n-1} g(\gamma(x_{i+1})) - g(\gamma(x_i)) =$$

$g(\gamma(b)) - g(\gamma(a))$. Dacă γ închis $\Rightarrow \gamma(a) = \gamma(b) \Rightarrow \int_\gamma f = 0$

2) $\Rightarrow$ 1) Fie $a \in D$ fixat și $z \in D$

Fie $\gamma : [0,1] \to D$ poligonal a.î. $\gamma(0) = a$ și $\gamma(1) = z$. Notam $g(z) \stackrel{def}{=} \int_\gamma f(z)\,dz$

g este bine definită

Fie un alt drum $\gamma_1 : [0,1] \to D$ poligonal a.î.
$\gamma_1(0) = a$, $\gamma_1(1) = z$. Drumul $\alpha = (\gamma, \gamma_1^-)$ este închis $\Rightarrow \int_\alpha f = 0 = \int_\gamma f + \int_{\gamma^-} f = \int_\gamma f - \int_{\gamma_1} f \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f$$

$1 \Rightarrow 3$ Fie $z \in D$. D este deschisă $\Rightarrow \exists r > 0$ a.î. $B(z,r) \subset D$.

Alegem $\omega \in B(z,r) \Rightarrow [z,\omega] \subset B(z,r) \subset D$

$\gamma_1 : [0,1] \to D \quad \gamma_1(0) = a \quad \gamma_1(1) = z$

$\gamma_2 : [0,1] \to D \quad \gamma_2(0) = a \quad \gamma_2(1) = \omega$

Drumul $(\gamma_1, [z,\omega], \gamma_2^-)$ este închis

$$\int_\gamma f = 0 \Rightarrow \underbrace{\int_{\gamma_1} f}_{g(z)} + \int_{[z,\omega]} f - \underbrace{\int_{\gamma_2} f}_{g(\omega)} = 0$$

$$g(z) + \int_{[z,\omega]} f - g(\omega) = 0$$

$$g(\omega) - g(z) = \int_{[z,\omega]} f$$

Vrem să arătăm că $g'(z) = f(z) \Rightarrow \exists \omega : B(z,r) \to \mathbb{C}$ a.î. $g(\omega) = g(z) + f(z)(\omega - z) + (\omega - z)\,\omega(\omega)$

$$\lim_{\omega \to z} \omega(\omega) = 0$$

Fie $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon \in (0, R)$ a.î. $|f(\omega) - f(z)| < \varepsilon$
$\forall \omega \in B(0, \delta_\varepsilon)$

$$g(\omega) - g(z) - f(z)(\omega - z) = \int_{[z,\omega]} f - f(z)(\omega - z) =$$

$$= \int_0^1 f(\gamma(t))(\omega - z)\,dt - (\omega - z)\int_0^1 f(z)\,dz =$$

$$= (\omega - z)\int_0^1 (f(\gamma(t)) - f(z))\,dt$$

- $\omega \in B(z, \delta_\varepsilon) \Rightarrow \gamma(t) \in B(z, \delta_\varepsilon)$

$$|g(\omega) - g(z) - f(z)(\omega - z)| \le |\omega - z| \cdot \int_0^1 f(\gamma(t)) - f(z)\,dt$$

$$\le \varepsilon(\omega - z) \qquad \Rightarrow \omega(\omega) \to 0$$

28. Teorema lui Cauchy pentru un domeniu stelat.

Fie D un domeniu stelat în raport cu a și f derivabilă pe $D \setminus \{a\}$, continuă pe D. Atunci $\int_\gamma f = 0$ pentru $\forall$ drum închis de clasă C^1 pe porțiuni.

29. Formulele lui Cauchy pentru disc + dem.

<u>Teoremă</u> Fie $f : B[a,b] \to C$ continuă pe $B[a,b]$ și f olomorfă pe $B(a,r)$. Atunci $\forall z \in B(a,r)$ $\exists f^n(z)$ și $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} d\omega$

unde $\partial B(a,r)$ reprezintă drumul $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$
$\gamma(t) = (a + r\cos t, a + r\sin t)$

<u>Dem</u> Fie $r_n \to r$. Fie $g_z : B(a,r) \to \mathbb{C}$

$$g_z(u) = \begin{cases} \frac{f(u) - f(z)}{u - z} & u \neq z \\ f'(z) & u = z \end{cases}$$

g_z este continuă pe $B(a,r)$ și derivabilă pe $B(a,r) \setminus \{z\} \overset{T. Cauchy}{\Rightarrow} \int_{\partial B(a,r_n)} g_z(\omega) d\omega = 0 \Rightarrow$

$$\int_{\partial B(a,r_n)} \frac{f(\omega) - f(z)}{\omega - z} d\omega = 0$$

$$\int_{\partial B(a,r_n)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega = \int_{\partial B(a,r_n)} \frac{f(z)}{\omega - z} d\omega =$$

$$= f(z) \cdot \int_{\partial B(a,r_n)} \frac{1}{\omega - z} d\omega = 2\pi i \cdot f(z) \Rightarrow$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{\partial B(a,r_n)} \frac{f(\omega)}{\omega - z} d\omega \Rightarrow \text{am dem. pt. } n = 0$$

<u>Dem pt $\forall n$.</u> Aplicam faptul că dacă o funcție $h : G \to \mathbb{C}$ def. prin $h(z) = \int_\gamma g(z,\omega)\,d\omega$ e continuă, iar $g'_z(z,\omega)$ există și e cont, atunci h e olomorfă în G și $h'(z) = \int_\gamma g'_z(z,\omega)\,dz$

Fie $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r_n)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}}\,d\omega \Rightarrow$

$\Rightarrow f^{(n+1)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r_n)} \frac{(n+1)\cdot f(\omega)}{(\omega - z)^{n+2}}\,d\omega$

$= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r_n)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+2}}$.

30. Teorema de derivare sub integrală

- Fie $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C} \in C^1$, $D = \mathring{D} \subset \mathbb{C}$ și $g : D \times K \to \mathbb{C}$ continuă, unde $K = \gamma([a,b])$

  Fie $G(z) = \int_\gamma g(z,\omega)\,d\omega$. Dacă există $\frac{\partial g}{\partial z}(z,\omega)$ $\forall z \in D$ și $\omega \in K$ și este continuă în z și $\omega \Rightarrow G'(z) = \int_\gamma \frac{\partial g(z,\omega)}{\partial z}\,d\omega$

  $G(z) = \int_a^b g(z, \gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$

- $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ f continuă

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$, $F(x) = \int_a^b f(x,y)\,dy \Rightarrow$

$F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy$ dacă $\exists \frac{\partial f}{\partial x}$ continuă

31. Inegalitățile lui Cauchy + dem.

Fie $f : \overline{B(a, r)} \to \mathbb{C}$ a.î. f e olomorfă și

$M = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ atunci $|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M \ \forall n \in N$

<u>Dem</u> In formulele lui Cauchy luăm $z = a \Rightarrow$

$$|f^{(n)}(a)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial B(a,r)} \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} dz \right| \leq$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \underbrace{l_{\partial B(a,r)}}_{= 2\pi r} \cdot \sup_{|z|=r} \left| \frac{f(\omega)}{(\omega - z)^{n+1}} \right| =$$

$$= \frac{n!}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{n!}{r^n} \cdot M$$

32. Teorema lui Liouville.

Fie f o funcție olomorfă pe C și mărginită.

Atunci funcția e o constantă.

<u>Dem</u> $|f'(z)| \leq \frac{M}{r} \quad \forall z \in C$ și $r \in \mathbb{R}^+$ unde

$M \geq |f(z)|$. Pt $r \to \infty \Rightarrow f'(z) = 0 \quad \forall z \in C$

$\Rightarrow f$ e o constantă.

33. Teoremă privind analiticitatea funcțiilor olomorfe.

<u>Def</u> Fie $D = \mathring{D} \subset \mathbb{C}$, O funcție $f : D \to C$ se numește analitică dacă $\forall a \in D \Rightarrow \exists r > 0$ și $s(z) = \sum_{n\geq} a_n (z-a)^n$ a.î. $B(a, r) \subset D$ și $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$

unde $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$

<u>Prop</u> Fie $f \in C(\overline{B(a, r)}) \cap O(B(a, r))$ și $z_0 \in B(a, r)$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n \ \forall z \in B(a, r - |z_0|)$

Pt. orice funcție olomorfă $\exists$ o serie de puteri unică

34. Lema lui Weierstrass

Lema Dacă f_n este un şir de funcţii olomorfe $f_n \in C(\overline{B(a,r)}) \cap O(B(a,r))$ a.î. $f_n \xrightarrow{u} g$ pe $\partial B(a,r)$ (unde $g : \partial B(a,r) \to \mathbb{C}$)
Atunci $\exists f \in O(B(a,r))$ a.î. $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ uniform pe mulţimi compacte pe $B(a,r)$.

Teorema lui Weierstrass Fie $f_n, f : D \to \mathbb{C}$ (unde $D = \overset{\circ}{D}$).
Dacă $f_n \in O(D)$ şi f_n converge uniform la f pe mulţimi compacte atunci $f \in O(D)$ şi $f_n^{(k)} \xrightarrow{u.c} f^{(k)}$ pe D.

35. Lema lui Goursat

Teorema lui Cauchy pentru un Δ / Lema lui Goursat.

Fie z_1, z_2, z_3 trei puncte necoliniare, $T = T(z_1, z_2, z_3)$, $\gamma = \partial(z_1, z_2, z_3)$ iar f o funcţie olomorfă pe T şi continuă pe $\overline{T}$. Atunci $\int_\gamma f = 0$

Lemă Fie $f : B(a,r) \to \mathbb{C}$ continuă şi $F : B(a,r) \to \mathbb{C}$, $F(z) = \int_{[a,z]} f$. Atunci $F'(a) = f(a)$

36. Reziduul unei funcții $\mathbb{C}$ derivabile.

<u>Def</u> Fie $f : D \to \mathbb{C}$ o funcție olomorfă definită pe mulțimea deschisă D. Spunem că punctul $z_0 \in \mathbb{C} - D$ este un punct singular izolat al funcției f dacă $\exists\, r > 0$ a.î. coroana circulară $\{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ este conținută în D.

Coeficientul a_{-1} din dez. Laurent

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + \dots$$

a lui f în această coroană se numește reziduul lui f în punctul singular izolat z_0 și se notează cu $Rez_{z_0} f$.

Adică $Rez_{z_0} f = a_{-1}$

37. Teorema reziduurilor - enunț + dem.

Fie D un domeniu stelat, $a_1, a_2 \dots a_n \in D$, $f \in \mathcal{O}(D \setminus \{a_1, \dots a_n\})$, $\gamma : [a, b] \to D \setminus \{a_1 \dots a_n\}$ drum închis de clasă C^1 pe porțiuni

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{i=1}^{n} n_\gamma(a_i) \cdot Rez(f, a_i)$$

<u>Dem</u> $a_i \in D \Rightarrow \exists\, r > 0$ a.î. $B(a_i, r) \subset D$,

$f \in \mathcal{O}(B(a_i, r) \setminus \{a_i\})$

$B(a_i, r) = C(a_i, 0, r)$

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - a_i)^n$$

$$\Pi_i(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} a_n^i (z - a_i)^n \in \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus \{a_i\})$$

$$g(z) = f - \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \in \mathcal{O}(\Delta \setminus \{a_1, \dots a_n\}$$

g se poate prelungi prin continuitate în a_i pe $B(a_i, r_i)$, $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n^i (z - a_i)^n \Rightarrow g \in \mathcal{O}(\Delta)$

Din T. Cauchy pt. $g \Rightarrow \int_\gamma g(z)dz = 0 \Rightarrow$

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \int_\gamma \Pi_i(z)dz =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_\gamma \sum_{\ell=-\infty}^{\ell=-1} a_\ell^i (z - a_i)^\ell dz = \sum_{i=1}^{n} \int_\gamma a_{-1}^i \frac{1}{z - a_i} dz$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{-1}^i \int_\gamma \frac{1}{z - a_i} = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Rez}(f, a_i) \cdot 2\pi i\, n_\gamma(a_i)$$

38. Teorema lui Rouche

Def Prin ordinul lui f în z_0 - notat $\theta(f, z_0)$ înțelegem cel mai mare număr întreg n pentru care $f(z)$ e divizibilă prin $(z - z_0)^n$

Teoremă Fie $f, g \in \mathcal{O}(B(a, r)) \cap C(\overline{B(a, r)})$ dacă $|f(z) - g(z)| < |g(z)|$ $\forall z \in \partial B(a, r) \Rightarrow$

$\Rightarrow \theta(f, D) = \theta(g, d)$

39. Definiți : dreptunghi, mulțime elementară, μ^*, μ_*, volumul unui dreptunghi, volumul unei mulțimi elementare.

Def O mulțime $D = \overset{n}{\underset{i \geq 1}{\times}} [a_i, b_i]$ se numește dreptunghi. ($a_i < b_i$)

$\bar{D} = \overset{n}{\underset{i \geq 1}{\times}} [a_i, b_i] \rightarrow$ dreptunghi închis

$\mathring{D} = \overset{n}{\underset{i \geq n}{\times}} (a_i, b_i) \rightarrow$ dreptunghi deschis

Def Volumul unui dreptunghi

$v(D) = v(\bar{D}) = v(\mathring{D}) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$.

Def O mulțime $E = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ se numește elementară, unde D_i - dreptunghi. $\mathcal{E}(R^n) \rightarrow$ mulțime elementară.

Def Volumul unei mulțimi elementare.

$v(E) = \sum_{i=1}^{n} v(D_i)$ dacă $D_i \cap D_j = \emptyset \ \forall i \neq j$

Def Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ mărginită;

$\mu^*(A) = \inf\limits_{\substack{E \in \mathcal{E}(R^n) \\ A \subseteq E}} v(E)$ $\qquad$ $\mu_*(A) = \sup\limits_{\substack{E \in \mathcal{E}(R^n) \\ E \subseteq A}} v(E)$.

40. Definiți noțiunea de spațiu cu măsură aditivă, $(R^n, \mathcal{E}(R^n), v)$ și $(R^n, \mathcal{J}(R^n), \mu)$ sunt spații cu măsură aditivă.

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ $\quad \forall A, B$ cu $A \cap B$

~~Ex~~ $(X, \mathcal{A}, \mu)$, $\mathcal{A} \subset P(X)$ a.î. $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow$

$E_1 \cap E_2$, $E_1 \cup E_2$, $E_1 \setminus E_2 \in \mathcal{A}$

$\mu : \mathcal{A} \to (0, \infty)$ a.î. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \beta(B)$
$\forall A, B$ cu $A \cap B = \emptyset$

1) $\mu(\emptyset) = 0$
2) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$
3) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ cu $A \cap B = \emptyset$
4) $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_\mu \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

41. Definiți noțiunea de mulțime măsurabilă Jordan.

<u>Def</u> O mulțime elementară măsurabilă în sens Jordan în R^n este o mulțime $E \subseteq R^n$, $E = \bigcup_{\ell=1}^{q} I_\ell$ unde $I_\ell = [a_1^\ell, b_1^\ell] \times [a_2^\ell, b_2^\ell] \ldots \times [a_n^\ell, b_n^\ell]$ $\ell = \overline{1, q}$ astfel încât $E = \bigcup_{\ell=1}^{q} I_\ell$ și $I_j \cap I_\ell \doteq \emptyset$
$\forall j, \ell \in \{1, 2 \ldots q\}$ $j \neq \ell$.

<u>Def</u> Măsura Jordan a mulțimii elementare E este numărul $\mu(E) = \sum_{\ell=1}^{q} \mu(I_\ell)$ unde
$\mu(I_\ell) = \prod_{k=1}^{n} (b_k^\ell - a_k^\ell)$.

<u>Def</u> Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulțime mărginită.
- se numește măsură Jordan interioară a mult A
$\mu_*(A) = \sup \{\mu(E) \mid E \subseteq A, E \in \mathcal{E}_J^n\}$
- se numește măsură Jordan exterioară a mult A
$\mu^*(A) = \inf \{\mu(E) \mid E \supseteq A, E \in \mathcal{E}_J^n\}$

<u>Dacă</u> $\mu^*(A) = \mu_*(A)$ mulțimea s.n. măsurabilă Jordan.

42. Proprietăți privind măsura sup (inf) a reuniunii, intersecției și diferenței a două mulțimi.

Fie $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mărginită. Atunci

1) $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) \leq \mu^*(A) + \mu^*(B)$

2) $\mu_*(A \cup B) + \mu_*(A \cap B) \geq \mu_*(A) + \mu_*(B)$

Dacă $B \subset A \Rightarrow$ 3) $\mu^*(A \setminus B) \leq \mu^*(A) - \mu_*(B)$

4) $\mu_*(A \setminus B) \geq \mu_*(A) - \mu^*(B)$.

Dacă $A \subset B \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

43. Proprietăți care ne arată că $\mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ este un inel de mulțimi

Dacă $A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

și $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

1) $\mu(A) \geq 0$

2) $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \quad \forall A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$

cu $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset$

3) $\forall A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ cu $B \subset A \Rightarrow \mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$

4) $\forall A, B \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$ cu $B \subseteq A \Rightarrow \mu(B) \leq \mu(A)$

5) $\mu(\emptyset) = 0$

6) $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i \Rightarrow \mu(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$

44. Caract mulțimilor măs. Jordan în raport cu frontiera.

Fie $A \in \mathcal{J}(R^n)$. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1) $A \in \mathcal{J}(R^n)$

2) $\bar{A}, \mathring{A} \in \mathcal{J}(R^n)$ și $\mu(\bar{A}) = \mu(\mathring{A})$

3) $\mu(Fr(A)) = 0$

45. Suma Riemann, Darboux sup și inf, integrala unor funcții de mai multe variabile.

Def Fie $A \in \mathcal{J}(\mathbb{R}^n)$, $f : A \to R$ mărginită, $\mathcal{A}$ o descompunere a lui A.

- Suma Riemann $\sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i \in I}) = \sum_i f(\alpha_i) \cdot \mu(A_i)$, $\alpha_i \in A_i$
- Sumă Darboux sup $S_{\mathcal{A}}(f) = \sum_i M_i \mu(A_i)$, $M_i = \sup_{x \in A_i} f(x)$
- Sumă Darboux inf. $s_{\mathcal{A}}(f) = \sum_i m_i \mu(A_i)$, $m_i = \inf_{x \in A_i} f(x)$

Def. $\overline{S}_A f = \overline{\int}_A f(x)\,dx = \inf_{\mathcal{A}} S_{\mathcal{A}}(f)$

$$\underline{S}_A f = \underline{\int}_A f(x)\,dx = \sup_{\mathcal{A}} s_{\mathcal{A}}(f)$$

$$\int_A f(x)\,dx = \lim_{\|A\| \to 0} \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i \in I})$$

Def f este integrabilă Riemann pe $A \iff \exists J \in R$ a.î. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$|J - \sigma_{\mathcal{A}}(f, (\alpha_i)_{i \in I})| < \varepsilon \Rightarrow \overline{S}_{\mathcal{A}} f = \underline{S}_{\mathcal{A}} f$.

46. Lema și teorema lui Darboux pt. funcții de mai multe variabile.

Lema lui Darboux : Fie $A \in J(R^n)$, $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$S_{\mathcal{A}}(f) - \bar{S}_{\mathcal{A}} f < \varepsilon$ $\left(\bar{S}_A f = \lim_{\|\mathcal{A}\| \to 0} S_A(f) = \inf_{\mathcal{A}} S_A(f) \right)$

Teorema lui Darboux : Fie $\mathcal{A} \in J(\mathbb{R}^n)$, $f: A \to \mathbb{R}$ mărginită. AUASE:

1) f este integrabilă Riemann
2) $\bar{S}_A f = \underline{S}_A f$
3) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ a.î. $S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$
4) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_\varepsilon > 0$ a.î. $\forall \mathcal{A}$ cu $\|\mathcal{A}\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\mathcal{A}}(f) - s_{\mathcal{A}}(f) < \varepsilon$

47. Lema lui Lebesgue pt. funcții de mai multe variabile.

Fie $A \in J(\mathbb{R}^n)$ și $f: A \to R$ mărginită, f este integrabilă Riemann $\Leftrightarrow \Delta f$ sunt neglijabile Lebesgue.

48. Teorema privind păstrarea integrabilității prin convergență uniformă, pentru funcții de mai multe variabile.

Fie $A \in \mathcal{J}(R^n)$ $f_n, f : A \to R$ mărginită a.î. $f_n \xrightarrow{u} f$ și f_n să fie integrabilă Riemann. Atunci și f este integrabilă Riemann și

$$\int_A f_n \to \int_A f.$$

49. Teorema lui F~~u~~ubini (+Dem)

Fie $A \in \mathcal{J}(R^n)$ și $B \in \mathcal{J}(R^m)$, $A \times B \in \mathcal{J}(R^{n+m})$ și $f : A \times B \to R$ integrabilă Riemann.

Fie $\overline{F}, \underline{F} : A \to R$. $\overline{F}(x) = \overline{\int_A} f(x,y)\,dy$ și $\underline{F}(x) = \underline{\int_A} f(x,y)\,dy$

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,d(x,y) = \int_A \left(\int_B f(x,y)\,dy\right)dx =$$

$$= \int_B \left(\int_A f(x,y)\,dx\right)dy$$

<u>Corolar</u> Dacă $f(x,y) = g(x)\cdot g(y)$ atunci

$$\int_{A\times B} f(x,y)\,d(x,y) = \int_A g(x)\,dx \cdot \int_B h(y)\,dy.$$

<u>Lemă</u> Fie $A \in \mathcal{J}(R^n)$ și $B \in \mathcal{J}(R^n)$ și $f : A \times B \to R$ mărginită. Atunci

$$\overline{\int_{A\times B}} f(x,y)\,dx\,dy \geq \overline{\int_A}\left(\overline{\int_B} f(x,y)\,dy\right)dx.$$

<u>Dem. Fubini</u> Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i\in I}$ o clasă a lui A și $\mathcal{B} = (B_j)_{j\in J}$ o clasă a lui B.

$\mathcal{C} = (A_i \times B_j)_{\substack{i\in I \\ j\in J}}$ o descompunere a lui $A\times B$

- $S_{\mathcal{A}}(\bar{F}) = \sum_i M_i^{\bar{F}} \mu(A_i)$ (1)

$x \in A_i$, $\bar{F}(x) = \bar{\int_B} f(x,y)\,dy = \sum_j \bar{\int_{B_j}} f(x,y)\,dy \le$

$\le \sum_j \mu(B_j) \sup f_x(B_j) \le \sum_j \mu(B_j) \sup_{\substack{x\in A_i \\ y\in B_j}} f(x,y) =$

$= \sum_j \mu(B_j) \cdot M_{ij}^{f}$

- $M_i^{\bar{F}} \le \sum_j \mu(B_j) \cdot M_{ij}^{f}$ (2)

- $S_{\mathcal{A}}(\bar{F}) = \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} M_{ij}^{f} \mu(A_i)\cdot\mu(B_j) =$

$= \sum_{\substack{i\in I \\ j\in J}} M_{ij}^{f} \mu(A_i\times B_j) = S_{\mathcal{C}}(f)$

Fie $\mathcal{A}_n$ descompunere a lui A cu $\|\mathcal{A}_n\| \to 0$ și $\mathcal{B}_n$ un șir de descompuneri a lui B a.î. $\|\mathcal{B}_n\| \to 0 \Rightarrow \|\mathcal{C}_n\| \to 0$

$S_{\mathcal{A}_n}(\bar{F}) \le S_{\mathcal{C}_n}(f)$; $\bar{\int_A} \bar{F} \le \bar{\int_{A\times B}} f$

$\iint_{A\times B} f(x,y)\,dx\,dy \ge \bar{\int_A}\left(\bar{\int_B} f(x,y)\,dx\right)dy \ge \underline{\int_A}\bar{\int_B}(f(x,y)\,dy)\,dx$

$\ge \underline{\int_A}\left(\underline{\int_B} f(x,y)\,dy\right)dx \ge \underline{\int_{A\times B}} f(x,y)\,dx\,dy$

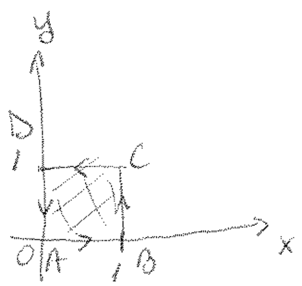
f integrabilă $\Rightarrow$ avem egalitate

50. Teorema lui Green pt. un pătrat + dem.

Formula lui Green face legătura între integrala dublă și integrala curbilinie de speța a doua.

<u>Teoremă</u> Fie ω o formă diferențială $\omega = P\,dx + Q\,dy$, $\omega : [0,1]^2 \to L(R^2, R)$ și $P, Q \in C^1$. Atunci

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy = \overleftarrow{\int_C} P\,dx + Q\,dy$$



(1) $\iint_\Delta \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\,dy \overset{T.\,Fubini}{=} \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx \right) dy =$

$= \int_0^1 \left(Q(x,y) \Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 Q(1,y)\,dy - \int_0^1 Q(0,y)\,dy$ (2)

Ținând seama de modul de calcul al integr. curbilinii de speța a doua $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} &\int_{AB} Q(x,y)\,dy = \int_{CD} Q(x,y)\,dy = 0 \\ &\int_{BC} Q(x,y)\,dy = \int_0^1 Q(1,y)\,dy \\ &\int_{AD} Q(x,y)\,dy = \int_0^1 Q(0,y)\,dy \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Din 2 și 3 deducem

$$\iint_\Delta \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\,dy = \int_{BC} Q\,dy + \int_{CD} Q\,dy + \int_{DA} Q\,dy + \int_{AB} Q\,dy$$

$$= \overleftarrow{\int_{F\Delta}} Q\,dy \qquad (4)$$

(B) Im mod analog avem

$$-\iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right)dx =$$

$$= -\int_0^1 P(x,1)\,dx + \int_0^1 P(x,0)\,dx$$

$$\int_{BC} P\,dx = \int_{AD} P\,dx = 0$$

$$\int_{AB} P(x,y)\,dy = \int_0^1 P(x,0)\,dx$$

$$\int_{DC} P(x,y)\,dy = \int_0^1 P(x,1)\,dx$$

$$\Rightarrow \iint_{\Delta} \frac{\partial P}{\partial y}\,dx = \overset{\leftarrow}{\int_{F_T}} P\,dx \qquad (5)$$

Din 4 + 5 $\Rightarrow$ Formula lui Green.

51. Definiți integrala de suprafață de primul și al doilea tip.

a) – Def: O mulțime $S \subset \mathbb{R}^3$ se numește suprafață de clasă C^1 dacă $\exists K \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime compactă, măsurabilă Jordan, $\exists f: K \to \mathbb{R}^3$ o funcție de clasă C^1 a.î. $Im f = S$

$$S = \{ f(u,v) \mid u,v \in K \} = \{ x(u,v), y(u,v), z(u,v) \}$$
$(u,v) \in K$.

Coef. suprafeței S

$$E(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\right)^2$$

$$G(u,v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\right)^2$$

$$F(u,v) = \frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)$$

$F : D = \overset{\circ}{D} \subseteq R^3 \to \mathbb{R}$ funcție continuă

$S \subseteq D$

$$\iint_D F \, dS = \iint_K F(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{E \cdot G - F^2} \, du\, dv$$

$$- \int_S f(x,y,z) \, d\sigma = \iint_D f(x,y,z(x,y)) \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$

unde $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$; $(x, y \in D)$

b) Integrala de tipul II

$$\int_{S = Fr K} P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy =$$

$$= \iiint_K \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx\,dy\,dz.$$

52. Existența locală și globală pentru ec. diferențiale

<u>Teoremă</u> Fie $f : [a, b] \times [c, d] \to R$ continuă a.î. $\exists\, c > 0$ cu propr. că $|f(x,y) - f(x,y_1)| < c|y - y_1|$ $\forall\, y, y_1 \in [c; d]$, $\forall\, a \in [a, b]$. Fie $x_0 \in (a; b)$ și $y_0 \in (c; d)$. Atunci $\exists$ un $\varepsilon > 0$ a.î.

$\exists!\; y : [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \to [c, d]$ a.î.

$f'(x) = f(x, y(x))$ $\quad y \in C^1 \quad y(x_0) = y_0$

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx.$$

Teoremă (principiul contracţiilor) Fie (X, d) un sp. metric complet şi $f : X \to X$ a.î. $\exists c \in [0; 1]$ cu prop. că $d(f(x), f(y)) \le c \cdot d(x, y)$ $\forall x, y \in X \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists! \alpha \in X$ a.î. $f(\alpha) = \alpha$ $\forall \cancel{x} \in X$

Soluţia globală : (X, d) sp. metric complet şi $f : X \to X$ a.î. $f^{(n)}$ să fie o contracţie $\Rightarrow$
$\exists! \alpha$ a.î. $\overset{n}{f}(x) \to \alpha$

Def S.n. ecuaţie diferenţială cu variabilă independentă x şi funcţie necunoscută $y = y(x)$ o egalitate de forma. $F(x, y(x), y'(x) \ldots y^{n}(x)) = 0$ unde $F : D \subset R^{n+1} \to R$ o funcţie dată, cu derivabilele $y', y'', \ldots y^{n}$.

Def S.n soluţie a ec. diferenţiale pe intervalul $I \subset R$ orice funcţie $\phi : I \to R$, deriv. de n ori pe I, care verifică ecuaţia:
$$F(x, \phi(x), \phi'(x) \ldots \phi^{(n)}(x)) = 0$$

Există 3 tipuri de soluţii

1. Soluţia generală - este sol. care depinde de x şi n constante arbitrare $C_1, C_2 \ldots C_n$ (câte ordinul ecuaţiei).
$$y = \phi(x, C_1, C_2 \ldots C_n)$$
2. Orice sol. care se obţine din soluţia generală pt. anumite val. ale constantelor s.n. soluţie particulară
3. Soluţii singulare - care nu se obţin prin acest procedeu

53. Teoremă privind existența și unicitatea pt. ecuații diferențiale de ordin I

Fie sistemul diferențial

$$x_i' = f_i(t, x_1, \dots x_n) \qquad i = 1 \dots n$$

cu condițiile inițiale $x_i(t_0) = x_i^0$ unde f_i sunt funcții continue.

$D = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1};\ |t - t_0| \leq a,\ \|x - x_0\| \leq b,$ $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Presupunem că funcția vectorială $f(t, x) = (f_1(t, x) \dots f_n(t, x))$ verifică în D condiția lui Lipschitz.

$$\| f(t, x) - f(t, y) \| \leq L \| x - y \| \quad \forall (t, x), (t, y) \in D$$

În aceste condiții sistemul diferențial cu condițiile inițiale are o soluție unică pe intervalul $I = \{t;\ |t - t_0| \leq \delta\}$ unde

$$\delta = \min \{a, \frac{b}{M}\}; \quad M = \max \{\|f(t, x)\|;\ (t, x) \in D\}$$

54. Existența și unicitatea pentru cazul global.
(ecuație diferențială de ordin superior)

Considerăm ecuația diferențială de ordin n,

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \dots x^{(n-1)}) \quad (1)$$

Prin soluția ecuației pe intervalul $I \subset R$ înțelegem o funcție de clasă C^n pe I care verifică relația (1) în $\forall$ punct $t \in I$, iar prin problema Cauchy asociată ec., înțelegem determinarea unei soluții x care la momentul dat $t = t_0 \in I$ verifică

$$x(t_0) = x_1^0, \ x'(t_0) = x_2^0, \ \dots \ x^{(n-1)}(t_0) = x_n^0$$

Pp. că f satisface următoarele condiții:

1) f este continuă pe $D = \{(t, x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^{n+1};$ $|t - t_0| \leq a, \ |x_i - x_i^0| \leq b, \ i = 1, 2 \dots n,$ $a, b \in \mathbb{R}^+\}$

2) f verifică în D condiția Lipschitz.

$$|f(t, x_1, \dots x_n) - f(t, y_1, y_2 \dots y_n)| \leq \cancel{L \max\{|x_i - y_i|\}} \leq L \cdot \max\{|x_i - y_i|\}$$

pentru $\forall (t, x_1, \dots x_n), (t, y_1, \dots y_n) \in D$

<u>Teoremă</u> Dacă sunt verificate condițiile 1 și 2, problema Cauchy admite o soluție unică $x = x(t)$ definită pe $I = \{t, \ |t - t_0| < \delta\}$ unde

$\delta = \min\{\alpha, \frac{b}{M}\}$ și $M = \max\{|f(t, x_1 \dots x_n)|, |x_2|, \dots |x_n|\}$

55. Transformarea Laplace - def și proprietăți

Def Funcția $f: R \to C$ s.n. funcție original dacă:
1) $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$
2) f este interval pe $[0, a] \quad \forall a > 0$
3) $|f(t)| < M \cdot e^{st} \quad M > 0 \quad s_0 > 0$

$s_0 = \inf \{ s ;\ s \in \mathbb{R} ,\ |f(t)| \leq M \cdot e^{st},\ t \geq 0 \}$
s_0 se numește indice de creștere.

Def Fie $f: R \to C$ original Laplace.
Definim $F(p) = L(f(t))(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt$
$p \in C$, $F: D \subset C \to C \quad D = \{ p \mid \exists L(f(t))(p) \}$

Proprietăți

1. Liniaritate $L(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) = \alpha L(f_1(t)) + \beta L(f_2(t))$
2. Deplasare $L(f(t))(p - \lambda) = L(e^{\lambda t} \cdot f(t))(p)$
3. $L(f(\alpha t))(p) = \frac{1}{\alpha} L(f(t))\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
4. $L(f'(t))(p) = p L(f(t))(p) - f(0)$

$L(f^{(n)}(t)) = p^n L(f(t))(p) - p^{n-1} f(0) -$
$- p^{n-2} f'(0) - \dots - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

unde f e derivabilă de n ori

5. $L\left(\int_0^t f(t) dt\right) = \frac{1}{p} L(f(t))$

56. Formula de schimbare de variabilă pentru integrala multiplă.

<u>Teoremă</u> (Formula de schimbare de variabilă.

Fie $D = \overset{\circ}{D}$ și $G = \overset{\circ}{G} \subset R^n$, $\varphi : D \to G$ bijectivă a.î. φ și $\varphi^{-1} \in C^1$. Fie A a.î. $A \in J(R^n)$ a.î. $\bar{A} \subset D \Leftrightarrow \varphi(A) \subset$ ~~G~~ G $\varphi(A) \in J(R^n)$ și $f : \varphi(A) \to R$ integrabilă Riemann. Atunci

$$\int_A (f \circ g)(x) \cdot \det \varphi'(x)\, dx = \int_{\varphi(A)} f(y)\, dy.$$

<u>Caz particular</u>

Fie $D \subset R^2$ un domeniu compact cu frontiera formată dintr-un număr finit de drumuri de clasă C^1 și fie $T : D \to R^2$, $T(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$ o aplicație injectivă de clasă C^1 cu propr. că

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall\, u, v \in D.$$

Dacă $f : T(D) \to R$ este o funcție continuă atunci

$$\iint_{T(D)} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_D f(\varphi(u,v), \psi(u,v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du\, dv$$