FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 2

(S2.1) Daţi exemplu de familie de submulţimi ale lui $\mathbb{R}$, indexată, pe rând, după:

(i) $\mathbb{N}^*$;

(ii) $\mathbb{Z}$;

(iii) $\{2, 3, 4\}$.

Determinaţi reuniunea şi intersecţia fiecărei familii date ca exemplu.
Demonstraţie:

(i) (a) $A_n = \{n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \emptyset$.

(b) $B_1 = \{0\}, B_2 = \mathbb{N}^*, B_3 = \mathbb{Q}$ şi $B_n = \mathbb{R}$ pentru orice $n \geq 5$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \mathbb{R}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_n = \emptyset$.

(c) $E_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = (-1, 1)$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = \{0\}$.

(d) $A_n = \{1\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.

(e) $A_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{N}^*$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \{1\}$.

(ii) $C_1 = (-\infty, 0), C_2 = \{0\}, C_{-n} = \{3\}$ pentru orice $n \geq 0$, $C_n = \{7\}$ pentru orice $n \geq 3$. Atunci $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} C_n = (-\infty, 0] \cup \{3\} \cup \{7\}$, $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} C_n = \emptyset$.

(iii) $D_2 = \{0\}, D_3 = \{2\}, D_4 = \{3\}$. Atunci $\bigcup_{x\in\{2,3,4\}} D_x = \{0, 2, 3\}$, $\bigcap_{x\in\{2,3,4\}} D_x = \emptyset$.

□

(S2.2) Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o familie de submulţimi ale unei mulţimi X, arătaţi următoarele (**legile lui De Morgan**):

(i) $C_X \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} C_X A_i$;

(ii) $C_X \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} C_X A_i$.

Demonstraţie:

(i) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcup_{i\in I} A_i \iff x \notin \bigcup_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcup_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (există $i \in I$ a.î. $x \in A_i$) $\iff$

pentru orice $i \in I$, $x \notin A_i \iff$ pentru orice $i \in I$, $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcap_{i\in I} C_X A_i$.

(ii) Fie $x \in X$. Atunci $x \in C_X \bigcap_{i\in I} A_i \iff x \notin \bigcap_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că $x \in \bigcap_{i\in I} A_i \iff$ nu este adevărat că (pentru orice $i \in I$, $x \in A_i$) $\iff$ există $i \in I$ a.î. $x \notin A_i \iff$ există $i \in I$ a.î. $x \in C_X A_i \iff x \in \bigcup_{i\in I} C_X A_i$.

$\square$

(S2.3) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) $\mathbb{N}^*$ este numărabilă.

(ii) $\mathbb{Z}$ este numărabilă.

(iii) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ este numărabilă.

Demonstraţie:

(i) Definim

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*, \quad f(n) = n + 1.$$

Se demonstrează imediat că f este bijecţie, inversa sa fiind

$$f^{-1} : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, \quad f^{-1}(n) = n - 1.$$

(ii) Enumerăm elementele lui $\mathbb{Z}$ astfel:

$$0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \ldots$$

Funcţia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ corespunzătoare acestei enumerări este următoarea:

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{dacă } n \text{ e par} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{dacă } n \text{ e impar.} \end{cases}$$

E clar că f e bijectivă şi că $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ definită prin:

$$h(s) = \begin{cases} 2s & \text{dacă } s \geq 0 \\ -2s - 1 & \text{dacă } s < 0 \end{cases}$$

este inversa lui f.

(iii) Ordonăm elementele lui $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ după suma coordonatelor şi în cadrul elementelor cu aceeaşi sumă după prima componentă în ordine crescătoare:

$$\begin{array}{rc}
\text{linia } 0 & (0,0), \\
\text{linia } 1 & (0,1),(1,0), \\
\text{linia } 2 & (0,2),(1,1),(2,0), \\
\text{linia } 3 & (0,3),(1,2),(2,1),(3,0), \\
\vdots & \\
\text{linia } k & (0,k),(1,k-1),\ldots,(k-1,1),(k,0), \\
\vdots &
\end{array}$$

Prin urmare, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$, pe linia k sunt $k+1$ perechi $(i, k-i), i = 0, \ldots, k$. Definim $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ astfel: $f(0,0) = 0$, $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 2$, $\ldots$. În general, $f(i,j)$ se defineşte ca fiind numărul perechilor situate înaintea lui (i,j). Deoarece (i,j) este al $(i+1)$-lea element pe linia $i+j$, rezultă că înaintea sa sunt $1+2+3+\ldots+(i+j)+i = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i$ elemente. Aşadar, bijecţia va fi funcţia

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad f(i,j) = \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + i.$$

Această funcţie se numeşte şi *funcţia numărare diagonală a lui Cantor* (în engleză, *Cantor pairing function*).

$\square$

(S2.4) Arătaţi că $\mathbb{R}$ nu este numărabilă.

Demonstraţie: Cum ştim din exerciţiul S1.4 că intervalul $(0,1)$ şi $\mathbb{R}$ sunt echipotente, este suficient să arătăm că intervalul $(0,1)$ nu este numărabil. Cu scopul reducerii la absurd, să presupunem că există o bijecţie $f : \mathbb{N} \to (0,1)$. Vom reprezenta funcţia f folosind tabelul de mai jos:

$$\begin{array}{c|c}
0 & 0,a_{0,0}a_{0,1}a_{0,2}a_{0,3}\ldots \\
1 & 0,a_{1,0}a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}\ldots \\
2 & 0,a_{2,0}a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}\ldots \\
3 & 0,a_{3,0}a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}\ldots \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Aşa cum se observă, $a_{i,j}$ este a $j+1$-a zecimală a lui $f(i), i \in \mathbb{N}$. Deoarece f este surjectivă, fiecărui număr din codomeniul acesteia, $(0,1)$, îi este asociat un număr natural. Cu alte cuvinte, toate numerele reale ce compun intervalul $(0,1)$ ar trebui să se regăsească în coloana a doua a tabelului de mai sus. Vom arăta că aceasta este imposibil, construind un număr $x \in (0,1)$ ce nu se poate găsi în coloana a doua a niciunei linii din tabel. Fie $x := 0, d_0 d_1 d_2 d_3 ... d_j ...$, unde fiecare cifră d_j din reprezentarea zecimală a lui x este obţinută astfel:

$$d_j := \begin{cases} 2, & \text{dacă } a_{j,j} = 1 \\ 1, & \text{dacă } a_{j,j} \neq 1. \end{cases}$$

Având în vedere construcţia numărului x, prima zecimală a acestuia va fi diferită de prima zecimală a lui $f(0)$, a doua zecimală va fi diferită de a doua zecimală a lui $f(1)$, ..., a n-a zecimală a lui x va fi diferită de a n-a zecimală a lui $f(n-1)$, şi aşa mai departe. În concluzie, numărului x nu îi este asociat un număr natural a a.î. $x = f(a)$, deci f nu este o bijecţie. Contradicţie.

□

(S2.5) Arătaţi, pe rând, următoarele:

(i) Produsul cartezian a două mulţimi numărabile este numărabil.

(ii) Produsul cartezian al unui număr finit (≥ 2) de mulţimi numărabile este numărabil.

Demonstraţie:

(i) Fie A_1 şi A_2 două mulţimi numărabile. Prin urmare, le putem enumera:

$$A_1 = \{a_{1,0}, a_{1,1}, \ldots, a_{1,n}, \ldots, \},\ A_2 = \{a_{2,0}, a_{2,1}, \ldots, a_{2,n}, \ldots, \}.$$

Definim

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to A_1 \times A_2, \quad f(m,n) = (a_{1,m}, a_{2,n}).$$

Se demonstrează uşor că f este bijecţie.

(ii) Demonstrăm prin inducţie după n că pentru orice $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ şi pentru orice mulţimi numărabile $A_1, \ldots, A_n$, $A_1 \times A_2 \ldots A_n$ este numărabilă.

$n = 2$: Aplicăm (i).

$n \Rightarrow n+1$. Fie $A_1, \ldots, A_{n+1}$ mulţimi numărabile şi $B = \prod_{i=1}^{n} A_i$. Atunci B este numărabilă, conform ipotezei de inducţie, deci, conform (i), $B \times A_{n+1}$ este numărabilă. Se observă imediat că funcţia

$$f : \prod_{i=1}^{n+1} A_i \to B \times A_{n+1}, \quad f((a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})) = ((a_1, a_2, \ldots, a_n), a_{n+1})$$

este bijecţie. Prin urmare, $\prod_{i=1}^{n+1} A_i$ este numărabilă.

$\square$