

Teorema 2.56 (Teorema de compacitate)

O mulțime de enunțuri Γ este satisfiabilă dacă și numai dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

- unul din rezultatele centrale ale logicii de ordinul întâi

73

Fie \mathcal{L} un limbaj de ordinul întâi.

Propoziția 2.57

Clasa \mathcal{L} -structurilor finite nu este axiomatizabilă, adică nu există o mulțime de enunțuri Γ astfel încât

(*) pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} , $\mathcal{A} \models \Gamma \iff \mathcal{A}$ este finită.

Dem.: Presupunem prin reducere la absurd că există $\Gamma \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}}$ a.î. (*) are loc. Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \quad \text{pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie \mathcal{A} o \mathcal{L} -structură finită a.î. $|\mathcal{A}| \geq \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Atunci $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$ și $\mathcal{A} \models \Gamma$ deoarece \mathcal{A} este finită.

74

Prin urmare, $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\}$, de unde rezultă că $\mathcal{A} \models \Delta_0$. Așadar, Δ_0 este satisfiabilă.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că

$$\Delta = \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

are un model \mathcal{B} .

Deoarece $\mathcal{B} \models \Gamma$, \mathcal{B} este finită.

Deoarece $\mathcal{B} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}$, rezultă că \mathcal{B} este infinită.

Am obținut o contradicție. □

Corolar 2.58

Clasa mulțimilor nevide finite nu este axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{=}$.

75

Propoziția 2.59

Clasa \mathcal{L} -structurilor infinite este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Notăm cu \mathcal{K}_{Inf} clasa \mathcal{L} -structurilor infinite.

Conform Propoziției 2.55, pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \in \mathcal{K}_{\text{Inf}} \iff \mathcal{A} \text{ este infinită} \iff \mathcal{A} \models \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{K}_{\text{Inf}} = \text{Mod}(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$$

deci e axiomatizabilă.

76

Presupunem că \mathcal{K}_{Inf} este finit axiomatizabilă, deci există

$$\Gamma := \{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \subseteq \text{Sen}_{\mathcal{L}} \text{ a.î. } \mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\Gamma).$$

Fie $\varphi := \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$. Atunci $\mathcal{K}_{Inf} = \text{Mod}(\varphi)$.

Rezultă că pentru orice \mathcal{L} -structură \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} \text{ este finită} \iff \mathcal{A} \notin \mathcal{K}_{Inf} \iff \mathcal{A} \not\models \varphi \iff \mathcal{A} \models \neg\varphi.$$

Așadar, clasa \mathcal{L} -structurilor finite este axiomatizabilă, ceea ce contrazice Propoziția 2.57. \square

Corolar 2.60

Clasa mulțimilor infinite nu este finit axiomatizabilă în $\mathcal{L}_{=}$.

77

Propoziția 2.61

Fie Γ o mulțime de enunțuri ale lui \mathcal{L} cu proprietatea

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci Γ are un model infinit.

Dem.: Fie

$$\Delta := \Gamma \cup \{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\}.$$

Demonstrăm că Δ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Δ_0 o submulțime finită a lui Δ . Atunci

$$\Delta_0 \subseteq \Gamma \cup \{\exists^{\geq n_1}, \dots, \exists^{\geq n_k}\} \text{ pentru un } k \in \mathbb{N}.$$

Fie $m := \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Conform (*), Γ are un model finit \mathcal{A} a.î. $|\mathcal{A}| \geq m$. Atunci $\mathcal{A} \models \exists^{\geq n_i}$ pentru orice $i = 1, \dots, k$, deci $\mathcal{A} \models \Delta_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Δ are un model \mathcal{B} . Prin urmare, \mathcal{B} este un model infinit al lui Γ . \square

78

Propoziția 2.62

Dacă un enunț φ este adevărat în orice \mathcal{L} -structură infinită, atunci există $m \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că φ este adevărat în orice \mathcal{L} -structură finită de cardinal $\geq m$.

Dem.: Presupunem că nu e adevărat. Fie $\Gamma := \{\neg\varphi\}$. Atunci pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$. Aplicând Propoziția 2.61, rezultă că Γ are un model infinit \mathcal{A} . Prin urmare, $\mathcal{A} \not\models \varphi$, ceea ce contrazice ipoteza. \square

79

Propoziția 2.63

Fie Γ o mulțime de enunțuri cu proprietatea că

(*) pentru orice $m \in \mathbb{N}$, Γ are un model finit de cardinal $\geq m$.

Atunci

- (i) Γ are un model infinit.
- (ii) Clasa modelelor finite ale lui Γ nu este axiomatizabilă.
- (iii) Clasa modelelor infinite ale lui Γ este axiomatizabilă, dar nu este finit axiomatizabilă.

Dem.: Exercițiu.

80

Considerăm limbajul $\mathcal{L} = (\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, unde $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare, \dot{S} este simbol de operație unară și $\dot{0}$ este simbol de constantă.

Pentru orice $n \in \mathbb{N}$, definim prin inducție \mathcal{L} -termenul $\Delta(n)$ astfel:

$$\Delta(0) = \dot{0}, \quad \Delta(n+1) = \dot{S}\Delta(n).$$

Fie \mathcal{L} -structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, S, 0)$. Atunci $\Delta(n)^{\mathcal{N}} = n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Prin urmare, $\mathbb{N} = \{\Delta(n)^{\mathcal{N}} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Definiția 2.64

O \mathcal{L} -structură \mathcal{A} se numește **non-standard** dacă există $a \in A$ a.î. $a \neq \Delta(n)^{\mathcal{A}}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Un astfel de element a se numește **element non-standard**.

81

Teoria lui \mathcal{N} se definește astfel:

$$Th(\mathcal{N}) := \{\varphi \in Sen_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{N} \models \varphi\}.$$

Se poate demonstra ușor că $Th(\mathcal{N})$ este o teorie.

Teorema 2.65

Există un model non-standard al teoriei $Th(\mathcal{N})$.

Dem.: Fie c un simbol de constantă nou, $\mathcal{L}^+ = \mathcal{L} \cup \{c\}$ și

$$\Gamma = Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n) = c) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Demonstrăm că Γ este satisfiabilă folosind Teorema de compacitate. Fie Γ_0 o submulțime finită a lui Γ ,

$$\Gamma_0 \subseteq Th(\mathcal{N}) \cup \{\neg(\Delta(n_1) = c), \dots, \neg(\Delta(n_k) = c)\}.$$

82

Fie $n_0 > \max\{n_1, \dots, n_k\}$. Considerăm extensia \mathcal{N}^+ a lui \mathcal{N} la \mathcal{L}^+ definită astfel: $c^{\mathcal{N}^+} := n_0$. Atunci $\mathcal{N}^+ \models \Gamma_0$.

Aplicând Teorema de compacitate, rezultă că Γ are un model

$$\mathcal{A} = (A, +^{\mathcal{A}}, \cdot^{\mathcal{A}}, S^{\mathcal{A}}, 0^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}).$$

Rezultă că $a := c^{\mathcal{A}}$ este element non-standard al lui \mathcal{A} . □

83