FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 10

(S10.1) Să se arate, folosind rezoluţia, că formula

$$\varphi := (v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \to v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (v_0 \to v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (v_4 \to v_3)$$

este nesatisfiabilă.
Demonstraţie: Înlocuind implicaţiile, obţinem că:

$$\varphi \sim (v_0 \vee v_2) \wedge (\neg v_2 \vee v_1) \wedge \neg v_1 \wedge (\neg v_0 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_4 \vee v_3),$$

o formulă în FNC pe care o notăm cu φ'. Notând:

$$\begin{array}{lll} C_1 := \{v_0, v_2\}, & C_2 := \{\neg v_2, v_1\}, & C_3 := \{\neg v_1\} \\ C_4 := \{\neg v_0, v_4\}, & C_5 := \{\neg v_3\}, & C_6 := \{\neg v_4, v_3\} \end{array}$$

se observă că $\mathcal{S}_{\varphi'} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6\}$. Notând mai departe:

$$\begin{array}{llll} C_7 & := & \{\neg v_2\} & \text{(rezolvent al clauzelor } C_2,\ C_3) \\ C_8 & := & \{v_0\} & \text{(rezolvent al clauzelor } C_1,\ C_7) \\ C_9 & := & \{v_4\} & \text{(rezolvent al clauzelor } C_4,\ C_8) \\ C_{10} & := & \{v_3\} & \text{(rezolvent al clauzelor } C_6,\ C_9) \\ C_{11} & := & \square & \text{(rezolvent al clauzelor } C_5,\ C_{10}) \end{array}$$

avem că secvenţa $C_1, C_2, \ldots, C_{11}$ este o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}_{\varphi'}$, de unde, aplicând Teorema 1.92, rezultă că $\mathcal{S}_{\varphi'}$ este nesatisfiabilă. Din Propoziţia 1.86, rezultă că φ' este nesatisfiabilă, deci şi φ, care este echivalentă semantic cu φ', este nesatisfiabilă. $\square$

(S10.2) Să se ruleze algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea:

$$\{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_0, v_3\}, \{v_0\}, \{\neg v_6\}\}.$$

Demonstraţie: Notând mulţimea de clauze de mai sus cu $\mathcal{S}$, obţinem următoarea rulare:

$i := 1$

$\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$

$P1.1.$ $x_1 := v_0$

$T_1^1 := \{\{v_0\}\}$

$T_1^0 := \{\{\neg v_0, \neg v_1, v_2\}, \{\neg v_0, \neg v_4, v_5\}, \{\neg v_0, v_3\}\}$

$P1.2.$ $U_1 := \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$

$P1.3.$ $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}, \{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}\}$

$P1.4.$ $i := 2;$ goto $P2.1$

$P2.1.$ $x_2 := v_1$

$T_2^1 := \{\{\neg v_3, v_1, v_4\}\}$

$T_2^0 := \{\{\neg v_1, v_2\}\}$

$P2.2.$ $U_2 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$

$P2.3.$ $\mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_2, v_6\}, \{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$

$P2.4.$ $i := 3;$ goto $P3.1$

$P3.1.$ $x_3 := v_2$

$T_3^1 := \{\{\neg v_3, v_4, v_2\}\}$

$T_3^0 := \{\{\neg v_2, v_6\}\}$

$P3.2.$ $U_3 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$

$P3.3.$ $\mathcal{S}_4 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_3\}, \{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$

$P3.4.$ $i := 4;$ goto $P4.1$

$P4.1.$	$x_4 := v_3$
	$T_4^1 := \{\{v_3\}\}$
	$T_4^0 := \{\{\neg v_3, v_4, v_6\}\}$
$P4.2.$	$U_4 := \{\{v_4, v_6\}\}$
$P4.3.$	$\mathcal{S}_5 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{\neg v_4, v_5\}, \{v_4, v_6\}\}$
$P4.4.$	$i := 5;$ goto $P5.1$
$P5.1.$	$x_5 := v_4$
	$T_5^1 := \{\{v_4, v_6\}\}$
	$T_5^0 := \{\{\neg v_4, v_5\}\}$
$P5.2.$	$U_5 := \{\{v_5, v_6\}\}$
$P5.3.$	$\mathcal{S}_6 := \{\{\neg v_5, v_6\}, \{\neg v_6\}, \{v_5, v_6\}\}$
$P5.4.$	$i := 6;$ goto $P6.1$
$P6.1.$	$x_6 := v_5$
	$T_6^1 := \{\{v_5, v_6\}\}$
	$T_6^0 := \{\{\neg v_5, v_6\}\}$
$P6.2.$	$U_6 := \{\{v_6\}\}$
$P6.3.$	$\mathcal{S}_7 := \{\{\neg v_6\}, \{v_6\}\}$
$P6.4.$	$i := 7;$ goto $P7.1$
$P7.1.$	$x_7 := v_6$
	$T_7^1 := \{\{v_6\}\}$
	$T_7^0 := \{\{\neg v_6\}\}$
$P7.2.$	$U_7 := \{\square\}$
$P7.3.$	$\mathcal{S}_8 := \{\square\}$
$P7.4.$	$\square \in \mathcal{S}_8.$

Prin urmare, $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă. $\square$

(S10.3) Demonstraţi, folosindu-vă de proprietăţile satisfacerii semantice şi de aplicarea sistematică (i.e., via algoritmul Davis-Putnam) a regulii rezoluţiei:

$$\{v_2, v_2 \to \neg v_3, v_3 \to v_4\} \vDash (\neg v_3 \to \neg(v_1 \to \neg v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4.$$

Demonstraţie: Aplicând Propoziţia 1.30.(i), condiţia din enunţ este echivalentă cu faptul că mulţimea de formule:

$$\{v_2, v_2 \to \neg v_3, v_3 \to v_4, \neg((\neg v_3 \to \neg(v_1 \to \neg v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)\}$$

este nesatisfiabilă şi, mai departe, din Propoziţia 1.31.(i), cu faptul că formula:

$$\varphi := v_2 \wedge (v_2 \to \neg v_3) \wedge (v_3 \to v_4) \wedge \neg((\neg v_3 \to \neg(v_1 \to \neg v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4)$$

este nesatisfiabilă. Aplicând transformări sintactice succesive, obţinem:

$$\begin{array}{lll}
\varphi & \sim & v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg(\neg\neg v_3 \vee \neg(\neg v_1 \vee \neg v_2) \vee \neg v_1 \vee (v_3 \wedge v_4) \vee v_4) \\
 & \sim & v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg\neg\neg v_3 \wedge \neg\neg(\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge \neg\neg v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4 \\
 & \sim & v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge v_1 \wedge \neg(v_3 \wedge v_4) \wedge \neg v_4 \\
 & \sim & \psi := v_2 \wedge (\neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_3 \vee v_4) \wedge \neg v_3 \wedge (\neg v_1 \vee \neg v_2) \wedge v_1 \wedge (\neg v_3 \vee \neg v_4) \wedge \neg v_4
\end{array}$$

Formulei ψ, care este în FNC, îi corespunde forma clauzală:

$$\mathcal{S}_\psi := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\},$$

despre care vom arăta că este nesatisfiabilă. Folosim mulţimea $\mathcal{S}_\psi$ ca intrare a algoritmului Davis-Putnam, a cărui rulare se produce după cum urmează.

$$\begin{array}{ll}
 & i := 1 \\
 & \mathcal{S}_1 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_1, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}\} \\
P1.1. & x_1 := v_1 \\
 & T_1^1 := \{\{v_1\}\} \\
 & T_1^0 := \{\{\neg v_1, \neg v_2\}\} \\
P1.2. & U_1 := \{\{\neg v_2\}\} \\
P1.3. & \mathcal{S}_2 := \{\{v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_2\}\} \\
P1.4. & i := 2;\ \text{goto } P2.1 \\
P2.1. & x_2 := v_2 \\
 & T_2^1 := \{\{v_2\}\} \\
 & T_2^0 := \{\{\neg v_2, \neg v_3\}, \{\neg v_2\}\} \\
P2.2. & U_2 := \{\{\neg v_3\}, \square\} \\
P2.3. & \mathcal{S}_3 := \{\{\neg v_3, v_4\}, \{\neg v_3\}, \{\neg v_3, \neg v_4\}, \{\neg v_4\}, \{\neg v_3\}, \square\} \\
P2.4. & \square \in \mathcal{S}_3.
\end{array}$$

Rezultă, deci, că $\mathcal{S}_\psi$ este nesatisfiabilă. Aplicând Propoziţia 1.86, rezultă că ψ este nesatisfiabilă. Prin urmare,

$$\{v_2, v_2 \to \neg v_3, v_3 \to v_4\} \vDash (\neg v_3 \to \neg(v_1 \to \neg v_2)) \vee (v_1 \to (v_3 \wedge v_4)) \vee v_4.$$

$\square$

(S10.4) Există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din mulţimea de clauze

$$\mathcal{S} := \{C_1 := \{v_0, \neg v_1\}, C_2 := \{\neg v_0, v_1\}\}?$$

Justificaţi.
Demonstraţie: Fie mulţimea de clauze $\mathcal{S}' := \{C_1, C_2, C_3 := \{v_0, \neg v_0\}, C_4 := \{v_1, \neg v_1\}\}$. Observăm că $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$ şi că:

$$\begin{array}{rr} Res(C_1, C_1) = \emptyset, & Res(C_1, C_2) = \{C_3, C_4\}, \\ Res(C_1, C_3) = \{C_1\}, & Res(C_1, C_4) = \{C_1\}, \\ Res(C_2, C_2) = \emptyset, & Res(C_2, C_3) = \{C_2\}, \\ Res(C_2, C_4) = \{C_2\}, & Res(C_3, C_3) = \{C_3\}, \\ Res(C_3, C_4) = \emptyset, & Res(C_4, C_4) = \{C_4\}. \end{array}$$

Prin umare,

$$(*) \quad \text{pentru orice } D_1, D_2 \in \mathcal{S}', \ Res(D_1, D_2) \subseteq \mathcal{S}'.$$

Presupunem prin absurd că există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}$ şi fie aceasta

$$C_1', \ldots, C_n' = \square.$$

Demonstrăm prin inducţie completă că pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$, $C_i' \in \mathcal{S}'$. Fie un astfel de i. Din definiţia derivării prin rezoluţie, avem că ori $C_i' \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}'$, ceea ce rezolvă problema, ori există $j, k < i$ cu $C_i' \in Res(C_j', C_k')$. Din ipoteza de inducţie completă, $C_j', C_k' \in \mathcal{S}'$, iar din (*) avem $Res(C_j', C_k') \subseteq \mathcal{S}'$, deci $C_i' \in \mathcal{S}'$. Obţinem că $C_n' = \square \in \mathcal{S}'$, ceea ce este o contradicţie. Aşadar, nu există o derivare prin rezoluţie a lui $\square$ din $\mathcal{S}$. $\square$