C7

Endomorfisme diagonalizabile
Forme biliniare. Forme pătratice

Preliminarii

Fie $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vectorial și $f \in End(V)$.

- $x \in V \setminus \{0_V\}$ s.n. vector propriu $\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}$ a.î. $f(x) = \lambda x$.
- $V_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$ subspațiul propriu corespunzător valorii proprii λ.

  $V_\lambda \subseteq V$ subspațiu invariant al lui f (i.e. $f(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$)
- $P(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$

$\lambda^n - \sigma_1 \lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \sigma_n = 0$ (polinomul caracteristic)

σ_r = suma minorilor diagonali de ordinul r ai lui A

$(A = [f]_{R,R}$; R = reper în $V)$

$\sigma_1 = Tr(A), \ldots, \sigma_n = \det(A)$

$(\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_r)^{m_r} = 0$, $m_1 + \ldots + m_r = n$

$\sigma(f) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_r\}$ spectrul lui f.

($\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ sunt răd. distincte, cu multiplicitățile $m_1, \ldots, m_r$)

OBS a) Polinomul caracteristic este invariant la schimbarea de reper.

b) Dacă λ este valoare proprie, atunci λ este rădăcină din $\mathbb{K}$ a polinomului caracteristic

Prop. Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte formează un SLI.

Prop. Fie $f \in End(V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ valoare proprie a lui f. Atunci $\dim V_\lambda \leq m_\lambda$,

unde V_λ = subspațiul propriu corespunzător valorii proprii λ și m_λ este multiplicitatea valorii proprii λ.

<u>Dem</u>. $V_\lambda \subseteq V$ subspațiu vectorial.

Notăm $n_\lambda = \dim_{\mathbb{K}} V_\lambda$.

Fie R_λ reper în V_λ, $R_\lambda = \{e_1, \dots, e_{n_\lambda}\}$

Cum $V_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$, avem $f(e_i) = \lambda e_i$, $\forall\, i = \overline{1, n_\lambda}$

Extindem R_λ la un reper $R = \{e_1, \dots, e_{n_\lambda}, e_{n_\lambda+1}, \dots, e_n\}$ în V, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

Fie $A = [f]_{R,R}$.

Avem
$$f(e_1) = \lambda e_1$$
$$\vdots$$
$$f(e_{n_\lambda}) = \lambda e_{n_\lambda}$$
$$f(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k, \ \forall\, j = \overline{n_\lambda+1, n}$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda & \cdots & 0 & a_{1\,n_\lambda+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & 0 & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & & \lambda & a_{n_\lambda\, n_\lambda+1} & \cdots & a_{n_\lambda n} \\ \hline 0 & & 0 & \vdots & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & & 0 & a_{n\, n_\lambda+1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda \cdot I_{n_\lambda} & \\ \hline 0 & \end{array}\right)$$

$$P(X) = \det(A - X I_n) = \left|\begin{array}{ccc|c} \lambda - X & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & \lambda - X & \\ \hline & 0 & & \end{array}\right| =$$

$$= (\lambda - X)^{n_\lambda} Q(X).$$

Cum Q poate avea λ ca rădăcină, multiplicitatea lui λ verifică $m_\lambda \geq n_\lambda$.

În concluzie $\dim V_\lambda \leq m_\lambda$. q.e.d.

Teoremă (diagonalizare)

Fie $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect și $f \in End(V)$.

$\exists$ un reper $\mathcal{R}=\{e_1,\dots,e_n\}$ în V a.î. $A=[f]_{\mathcal{R},\mathcal{R}}$ este diagonală $\Leftrightarrow$

1) rădăcinile polinomului caracteristic aparțin lui $\mathbb{K}$ i.e. $\lambda_1,\dots,\lambda_r \in \mathbb{K}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ = rădăcini distincte.

și

2) dimensiunile subspațiilor proprii coincid cu multiplicitățile valorilor proprii corespunzătoare i.e. $\dim V_{\lambda_i} = m_i$, $\forall i=\overline{1,r}$, m_i = multiplicitatea valorii proprii λ_i, $i=\overline{1,r}$ și $m_1+\dots+m_r=n=\dim_{\mathbb{K}} V$.

Dem

„$\Rightarrow$" Ipoteza: $\exists \mathcal{R}=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V a.î.

$$A=[f]_{\mathcal{R},\mathcal{R}}=\begin{pmatrix}\mu_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Eventual schimbând reperul, considerăm:

$$A=\begin{pmatrix}\overbrace{\lambda_1 \dots \lambda_1}^{m_1 \text{ ori}} & & \\ & \ddots & \\ & & \overbrace{\lambda_r \dots \lambda_r}^{m_r \text{ ori}}\end{pmatrix}$$

unde $\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sunt valorile distincte pentru $\lambda_1,\dots,\lambda_n$.

$$P(X)=\det(A-XI_n)=\begin{vmatrix}\lambda_1-X & & & & 0\\ & \lambda_1-X & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_r-X & \\ 0 & & & & \lambda_r-X\end{vmatrix}=$$

$=(\lambda_1-X)^{m_1}\cdot\ldots\cdot(\lambda_r-X)^{m_r} \Rightarrow$

$\lambda_1,\dots,\lambda_r$ sunt rădăcini (distincte) $\in \mathbb{K}$

$$\left.\begin{cases} f(e_1)=\lambda_1 e_1 \\ f(e_{m_1})=\lambda_1 e_1\end{cases} \Rightarrow \mathcal{R}_1=\{e_1,\dots,e_{m_1}\}\subset V_{\lambda_1} \quad \mathcal{R}_1 \text{ este SLI}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\dim V_{\lambda_1}\geq |\mathcal{R}_1|=m_1\\ \text{dar } \dim V_{\lambda_1}\leq m_1 \text{ (prop.)}\end{array}\right\}\Rightarrow \dim V_{\lambda_1}=m_1$$

Analog $\dim V_{\lambda_i}=m_i$, $\forall i=\overline{2,r}$

"$\Leftarrow$" Ipoteză: 1) răd. $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ (distincte) $\in \mathbb{K}$ ale polinomului caracteristic

2) $\dim V_{\lambda_i} = m_i$, $i = \overline{1,r}$,

m_i = multiplicitatea lui λ_i, $i = \overline{1,r}$; $m_1 + \dots + m_r = n$.

Fie R_i reper în V_{λ_i}, $i = \overline{1,r}$

$R_1 = \{e_1, \dots, e_{m_1}\}, \dots, R_r = \{e_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}, \dots, e_n\}$.

$|R_1| + \dots + |R_r| = m_1 + \dots + m_r = n = \dim_{\mathbb{K}} V$.

Fie $R = \{e_1, \dots, e_{m_1}, \dots, e_{m_1+\dots+m_{r-1}+1}, \dots, e_n\} \subset V$.

Dem că R este reper în V.

Arătăm că R este SLI.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m_1} a_i e_i}_{\substack{\| \\ f_1 \\ \cap \\ V_{\lambda_1}}} + \dots + \underbrace{\sum_{j=m_1+\dots+m_{r-1}+1}^{n} a_j e_j}_{\substack{\| \\ f_r \\ \cap \\ V_{\lambda_r}}} = 0$$

Dacă $\exists\ 1 \le i_1 < \dots < i_p \le r$, $p \le r$, $\{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, r\}$

a.î. $f_{i_1} \neq 0_V, \dots, f_{i_p} \neq 0_V$, atunci

$f_{i_1} + \dots + f_{i_p} = 0 \Rightarrow \{f_{i_1}, \dots, f_{i_p}\}$ SLD (1)

dar $f_{i_1}, \dots, f_{i_p}$ sunt vectori proprii corespunzători la valori proprii distincte $\underset{OBS}{\Rightarrow} \{f_{i_1}, \dots, f_{i_p}\}$ SLI (2)

Din (1), (2) $\Rightarrow$ Contradicție.

Deci $f_1 = 0_V, \dots, f_r = 0_V \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{m_1} a_i e_i = 0_V \underset{R_1\ SLI}{\Longrightarrow} a_i = 0, \forall i = \overline{1, m_1}$$

$\vdots$ $\Rightarrow$

$$\sum_{i=m_1+\dots+m_{r-1}+1}^{n} a_i e_i = 0_V \underset{R_r\ SLI}{\Longrightarrow} a_i = 0, \forall i = \overline{m_1+\dots+m_{r-1}+1, n}$$

$\Rightarrow a_i = 0$, $\forall i = \overline{1,n} \Rightarrow R$ SLI și cum $|R| = n \Rightarrow$ reper

Avem $\begin{cases} f(e_i) = \lambda_1 e_i, \ \forall i = \overline{1, m_1} \\ \vdots \\ f(e_i) = \lambda_r e_i, \ \forall i = \overline{m_1 + \ldots + m_{r-1} + 1, n} \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = [f]_{R,R} = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ldots \lambda_1}^{m_1 \text{ ori}} & & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \underbrace{\lambda_r \ldots \lambda_r}_{m_r \text{ ori}} & \end{pmatrix}$$

(matricea asociată lui f este diagonală).

<u>Exemplu</u> Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1, x_2 + x_3, 2x_3)$

Să se arate că $\exists R = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper în $\mathbb{R}^3$ a.î. $A' = [f]_{R,R}$ este diagonală.

<u>SOL</u>. $A = [f]_{R_0, R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, R_0 = reper canonic în $\mathbb{R}^3$.

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 1$, $m_1 = 2$; $\lambda_2 = 2$, $m_2 = 1$. ; $\boxed{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}}$ (1)

- $V_{\lambda_1} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 1 \cdot x\} = \{(x_1, x_2, 0)\} = \langle\{(1,0,0), (0,1,0)\}\rangle$

$\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 + x_3 = x_2 \\ 2x_3 = x_3 \Rightarrow x_3 = 0 \end{cases}$; $R_1 = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ reper V_{λ_1}

- $V_{\lambda_2} = \{x \in \mathbb{R}^3 / f(x) = 2 \cdot x\} = \{(0, x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle\{(0,1,1)\}\rangle$

$\begin{cases} x_1 = 2x_1 \Rightarrow x_1 = 0 \\ x_2 + x_3 = 2x_2 \Rightarrow x_2 = x_3 \\ 2x_3 = 2x_3 \end{cases}$ $R_2 = \{(0,1,1)\}$ reper în V_{λ_2}

$\boxed{\dim V_{\lambda_1} = m_1 = 2 \ ; \ \dim V_{\lambda_2} = m_2 = 1}$. (2)

Din (1), (2) $\Rightarrow \exists R = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$ a.î. matricea $A' = [f]_{R,R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Forme biliniare. Forme pătratice.

Def $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect. Aplicația $g: V\times V \longrightarrow \mathbb{K}$ s.n. formă biliniară $\Leftrightarrow$

1) $g(ax+by, z) = a g(x,z) + b g(y,z)$,

2) $g(x, ay+bz) = a g(x,y) + b g(x,z)$,

$\forall x,y,z \in V$, $\forall a,b,c \in \mathbb{K}$

OBS Not : $L(V,V;\mathbb{K}) = \{ g: V\times V \longrightarrow \mathbb{K} \ / \ g$ formă biliniară$\}$

$(L(V,V;\mathbb{K}),+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ are structura de sp. vect.

Def a) $g: V\times V \longrightarrow \mathbb{K}$ s.n. formă simetrică $\Leftrightarrow g(x,y) = g(y,x)$ $\forall x,y \in V$

b) — // — antisimetrică $\Leftrightarrow g(x,y) = -g(x,y)$ $\forall x,y \in V$

OBS $L^s(V,V;\mathbb{K}) = \{ g: V\times V \longrightarrow \mathbb{K} \ / \ g$ formă biliniară simetrică$\}$

$L^a(V,V;\mathbb{K}) = \{ g: V\times V \longrightarrow \mathbb{K} \ / \ g$ formă biliniară antisimetrică$\}$

- $L^s(V,V;\mathbb{K}) \subset L(V,V;\mathbb{K})$ subspațiu vect.
- $L^a(V,V;\mathbb{K}) \subset L(V,V;\mathbb{K})$ — // —

OBS Dacă $g: V\times V \longrightarrow \mathbb{K}$ este formă simetrică, respectiv antisimetrică și liniară într-un argument, atunci g este formă biliniară.

Fie g simetrică și $g(ax+by, z) = a g(x,z) + b g(y,z)$ $\forall x,y,z \in V$, $\forall a,b \in \mathbb{K}$.

g simetrică $\Rightarrow g(z, ax+by) = a g(z,x) + b g(z,y)$

$\Rightarrow g$ este liniară în al doilea argument.

Deci g este biliniară.

Analog pt cazul g antisimetrică.

Matricea asociată unei forme biliniare

Fie $R=\{e_1,..,e_n\}$ reper în V și $g(e_i,e_j)=g_{ij}$, $\forall i,j=\overline{1,n}$. Notăm $G=(g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$.

$$g(x,y)=g\left(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}x_iy_j\,g(e_i,e_j)$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}x_iy_j=X^TGY=$$

$$=(x_1\dots x_n)\begin{pmatrix}g_{11}&\dots&g_{1n}\\ \vdots& &\vdots\\ g_{n1}&\dots&g_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

OBS a) $g\in L^s(V,V;\mathbb{K})\iff G=G^T$ $(g(e_i,e_j)=g(e_j,e_i)$;

b) $g\in L^a(V,V;\mathbb{K})\iff G=-G^T$ $\quad g(e_i,e_j)=-g(e_j,e_i)$ $\forall i,j=\overline{1,n})$

Modificarea matricei la schimbarea reperului

Fie $R=\{e_1,..,e_n\}\xrightarrow{C}R'=\{e_1',..,e_n'\}$ repere în V

$$e_j'=\sum_{k=1}^{n}c_{kj}e_k,\ \forall j=\overline{1,n}$$

$$g_{ij}=g(e_i,e_j)\ ;\ g'_{rs}=g(e_r',e_s')$$

$$g'_{rs}=g\left(\sum_{i=1}^{n}c_{ir}e_i,\sum_{j=1}^{n}c_{js}e_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n}c_{ir}c_{js}g_{ij}$$

$$\Rightarrow G'=C^TGC$$

OBS g formă biliniară simetrică

$$G'^T=(C^TGC)^T=C^TG^T(C^T)^T=C^TGC=G'$$

Analog pentru forme biliniare antisimetrice

$(G^T=-G\Rightarrow G'^T=-G')$

Def Fie $g\in L^s(V,V;\mathbb{K})$ și $\operatorname{Ker}g=\{x\in V\mid g(x,y)=0,\forall y\in V\}$

g s.n. nedegenerată $\iff\operatorname{Ker}g=\{0_V\}$

OBS Fie $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V. și $x \in \operatorname{Ker} g$

$$\Rightarrow \begin{cases} g(x,e_1)=0 \\ \vdots \\ g(x,e_n)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_1\right)=0 \\ \vdots \\ g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_n\right)=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(*) \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i g_{i1}=0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i g_{in}=0 \end{cases}$$

$(*)$ este un SLO (sist. lin. omogen)

$(*)$ are sol unică nulă $\Leftrightarrow \det G \neq 0$

g nedegenerată $\Leftrightarrow G \in GL(n, \mathbb{K})$

Exemplu $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$.

Fie $R_0 = \{e_1,e_2,e_3\}$ reperul canonic.

$$g_{ij}=g(e_i,e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \end{cases} \Rightarrow G=I_3 \in GL(3,\mathbb{R})$$

$\Rightarrow g$ nedegenerată

SAU Fie $x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow \begin{cases} g(x,e_1)=0 \\ g(x,e_2)=0 \\ g(x,e_3)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ x_2=0 \\ x_3=0 \end{cases} \Rightarrow X=0_{\mathbb{R}^3}$

Def $g \in L(V,V;\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} G$.

($\operatorname{rg} G$ = invariant la schimbarea reperului
$\quad \| $
$\operatorname{rg} G' \quad G' = C^T G C$)

OBS g nedegenerată $\Leftrightarrow \operatorname{rg} G = n$ (maxim)

Prop Fie $g: V \times V \to \mathbb{K}$ funcție.

$g \in L(V,V;\mathbb{K}) \Leftrightarrow \exists\, G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a.î. coordonatele lui x, y în raport cu reperul $R=\{e_1,\dots,e_n\}$ al lui V verifică $g(x,y)=X^T G Y$,

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$y=\sum_{j=1}^{m} y_j e_j$.