EXAMEN GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ
30.06.2020
ŞI RĂSPUNSURI

Fiecare problemă este notată cu 0,5 puncte. Nota este suma notelor problemelor plus un punct din oficiu. Pe foaia de examen trebuie scrise numai răspunsurile. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

1. Care din următoarele afirmaţii NU sunt adevărate pentru $(\forall)A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ CU EXCEPȚIA
A) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
B) A, B matrice ortogonale atunci $A \cdot B$ NU este ortogonală
C) $\operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}(A)$
D) $\operatorname{tr}(AB - BA) = 0$

1'. Care din următoarele afirmaţii NU sunt adevărate pentru $(\forall)A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ CU EXCEPȚIA
A) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
B) $\operatorname{tr}(AB - BA) = n$
C) $\det(ABA^{-1}) = \det(B)$
D) A, B matrice ortogonale atunci $A \cdot B$ NU este ortogonală

2. Considerăm $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ o matrice inversabilă şi ${}^tA$ transpusa matricei A. Atunci
A) $A^\star = \det(A)A^{-1}$
B) $A^\star = \det(A)^{-1}A^{-1}$
C) $A^\star = \det(A)\ {}^tA$
D) $A^\star = \det(A)^{-1}\ {}^tA$

2'. Considerăm $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea $A = -\ {}^tA$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A. Atunci
A) $\operatorname{tr}(A) = 2n$
B) $\det(A) = 0$
C) $\det(A) = \pm 1$
D) $\operatorname{tr}(A) = 0$

3. Considerăm $A \in O_{2n}(\mathbb{R})$ şi morfismul $f : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $f(v) = A \cdot v$. Atunci
A) $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = n$
B) $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n$

C) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$
D) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$.

3'. Considerăm $A \in O_{2n+1}(\mathbb{R})$ şi morfismul $f : \mathbb{R}^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$, $f(v) = A \cdot v$. Atunci
A) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$
B) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$
C) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n$
D) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$.

Pentru problemele **4**, **5**, **6** considerăm pentru fiecare $n \geqslant 2$ matricea $A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pentru care elementele de pe poziţia $(i,i), 1 \leqslant i \leqslant n$ sunt egale cu 3, cele de pe poziţiile $(i, i+1), 1 \leqslant i \leqslant n-1$ sunt egale cu 1 iar cele de pe poziţiile $(i+1, i), 1 \leqslant i \leqslant n-1$ egale cu 2, şi toate celelalte elemente ale matricei sunt egale cu 0. Notăm cu $\Delta_n = \det(A_n)$.

4. Atunci:
A) $\Delta_3 = 7$ şi $\Delta_4 = 15$ **B)** $\Delta_3 = -15$ şi $\Delta_4 = -31$ **C)** $\Delta_3 = 15$ şi $\Delta_4 = 31$
D) $\Delta_3 = -15$ şi $\Delta_4 = 31$

5. Pentru Δ_n ca mai sus, avem:
A) $\Delta_n = 2^n - 1$ **B)** $\Delta_n = 1 - 2^{n+1}$ **C)** $\Delta_n = \frac{2^{n+1}-1}{2}$ **D)** $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$

6. Fie A_n ca mai sus. Atunci adjuncta matricei A_3 este:
A) $A_3^\star = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ **B)** $A_3^\star = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ **C)** $A_3^\star = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

D) $A_3^\star = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

Pentru problemele **4'**, **5'**, **6'** considerăm pentru fiecare $n \geqslant 2$ matricea $A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pentru care elementele de pe poziţia $(i,i), 1 \leqslant i \leqslant n$ sunt egale cu 4, cele de pe poziţiile $(i, i+1), 1 \leqslant i \leqslant n-1$ sunt egale cu 3 iar cele de pe poziţiile $(i+1, i), 1 \leqslant i \leqslant n-1$ egale cu 1, şi toate celelalte elemente ale matricei sunt egale cu 0. Notăm cu $\Delta_n = \det(A_n)$.

4'. Atunci:
A) $\Delta_3 = 26$ şi $\Delta_4 = 80$ **B)** $\Delta_3 = -80$ şi $\Delta_4 = -243$ **C)** $\Delta_3 = 13$ şi $\Delta_4 = 40$
D) $\Delta_3 = 40$ şi $\Delta_4 = 121$

5'. Pentru Δ_n ca mai sus, avem:
A) $\Delta_n = 3^n - 1$ **B)** $\Delta_n = 1 - 3^{n+1}$ **C)** $\Delta_n = \frac{3^{n+1}-1}{2}$ **D)** $\Delta_n = \frac{3^n-1}{2}$

6'. Fie A_n ca mai sus. Atunci adjuncta matricei A_3 este:
A) $A_3^\star = \begin{pmatrix} -13 & 10 & -1 \\ -2 & 9 & -3 \\ 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ **B)** $A_3^\star = \begin{pmatrix} 13 & -12 & 9 \\ -4 & 16 & -12 \\ 1 & -4 & 13 \end{pmatrix}$ **C)** $A_3^\star = \begin{pmatrix} 13 & 10 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

D) $A_3^\star = \begin{pmatrix} -13 & -12 & 9 \\ -4 & 16 & -12 \\ 1 & -4 & -13 \end{pmatrix}$

Pentru problemele **7**, **8**, **9**, **10** considerăm operatorul $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $f(v) = A \cdot v$, pentru $(\forall) v \in \mathbb{R}^4$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & -2 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

7. Fie vectorii: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
A) $\{v_1, v_2\}$ formează bază în $\mathrm{Ker}(f)$
B) $\{v_1, v_2\}$ formează bază în $\mathrm{Im}(f)$
C) $v_1 \in \mathrm{Ker}(f)$
D)$\{v_2\}$ generează $\mathrm{Im}(f)$.

8. Fie subspaţiul $\mathrm{Ker}(f)$, atunci:
A) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 3$ şi are ecuaţia $x_1 + x_2 \quad - 2x_4 = 0$
B) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$
C) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ şi este definit de ecuaţiile
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$
D) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$ şi este definit de ecuaţiile
$$\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

9. Fie $L_1 = \mathrm{Ker}(f)^\perp \subset \mathbb{R}^4$, atunci

A) $\dim(L_1) = 3$ având baza $\{ {}^t(-1,0,1,0),\ {}^t(-1,-1,0,2),\ {}^t(0,0,1,-1)\}$
B) $\dim(L_1) = 2$ având baza $\{ {}^t(-1,0,1,0),\ {}^t(-1,-1,0,2)\}$

C) $\dim(L_1) = 1$ având baza $\{\,{}^t(0, 0, 1, -1)\}$
D) $\dim(L_1) = 0$ având baza $\varnothing$.

10. Vectorii $w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $w_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

A) $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ este sistem de generatori liniar-dependent pentru $\mathbb{R}^4$
B) $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ este bază pentru $\mathbb{R}^4$
C) $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ nu este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^4$ şi este sistem liniar-dependent
D) $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ nu este sistem de generatori pentru $\mathbb{R}^4$ şi este sistem liniar-independent

Pentru problemele **7'**, **8'**, **9'**, **10'** considerăm operatorul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f(v) = A \cdot v$, pentru $(\forall) v \in \mathbb{R}^3$, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7'. Fie vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

A) $\{v_2\}$ generează $\mathrm{Im}(f)$
B) $\{v_1, v_2\}$ formează bază în $\mathrm{Im}(f)$
C) $v_1 - v_2 \notin \mathrm{Im}(f)$
D) $v_1 + v_2 \notin \mathrm{Im}(f)$.

8'. Considerăm $\mathrm{Ker}(f)$.
A) $\mathrm{Ker}(f)$ are dimensiune 1 și este dat de ecuația $x - z = 0$
B) $\mathrm{Ker}(f)$ are dimensiune 1 și este dat de ecuațiile $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$
C) $\mathrm{Ker}(f)$ are dimensiune 2 și este dat de ecuația $x - z = 0$
D) $\mathrm{Ker}(f)$ are dimensiune 0

9'. Fie vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

A) $\{v_1, v_2, v_3\}$ formează bază pentru $\mathbb{R}^4$
B) $\{v_1, v_2, v_3\}$ este sistem de generatori liniar-dependent pentru $\mathbb{R}^4$

C) $\{v_1, v_2, v_3\}$ este sistem de generatori liniar independent pentru $\mathbb{R}^4$
D) $\{v_1, v_2, v_3\}$ nu este sistem de generatori şi este sistem liniar-dependent pentru $\mathbb{R}^4$.

10'. $L_1 = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$.
A) $\dim(L_1) = 3$ şi are baza $\{\ {}^t(-1,1,1),\ {}^t(1,1,0),\ {}^t(-1,0,1)\}$
B) $\dim(L_1) = 0$ şi are baza $\varnothing$
C) $\dim(L_1) = 2$ şi are baza $\{\ {}^t(1,1,0),\ {}^t(-1,0,1)\}$
D) $\dim(L_1) = 1$ şi are baza $\{\ {}^t(1,-1,1)\}$

Pentru problemele **11** şi **12** considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. Polinomul caracteristic $P_A(X)$ este
A) $X(X-2)(X^2-2X+1)$ **B)** $X(X+2)(X^2-2X+1)$
C) $X(X+2)(X^2-1)$ **D)** $X(X-2)(X^2+2X+1)$

12. Fie morfismul $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dat de $f(v) = (A - I_4) \cdot v, (\forall) v \in \mathbb{R}^4$. $\dim(\mathrm{Im}(f))$ este

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4

Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11'. Polinomul caracteristic $P_A(X)$ este
A) $X(X+2)(X^2-2X+1)$ **B)** $X(X-2)(X^2+2X+1)$
C) $X(X-2)(X^2-2X+1)$ **D)** $X(X+2)(X^2-1)$

12'. Fie morfismul $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dat de $f(v) = (A - I_4) \cdot v, (\forall) v \in \mathbb{R}^4$. $\dim(\mathrm{Im}(f))$ este

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4

Pentru problemele **13** şi **14** considerăm forma pătratică

$$Q_\alpha(x, y, z) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + z^2 + 2\alpha xy + 2\alpha xz$$

13. Forma pătratică $Q_\alpha(x, y, z)$ este pozitiv definită pentru:

A) $\alpha > 1$ **B)** $\alpha > 0$ **C)** $\alpha < 1$ **D)** $\alpha \in \varnothing$

14. Pentru $\alpha = 1$ forma canonică, obţinută prin metoda transformărilor ortogonale, a formei pătratice $Q_1(x', y', z')$ este

A) $x'^2 + (1-\sqrt{3})y'^2 + (1+\sqrt{3})z'^2$ **B)** $x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2$
C) $x'^2 - \sqrt{2}y'^2 + \sqrt{2}z'^2$ **D)** $x'^2 + (1-\sqrt{2})y'^2 + (1+\sqrt{2})z'^2$

Pentru problemele **13'** şi **14'** considerăm forma pătratică

$$Q_\alpha(x,y,z) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2xz + 2\alpha yz$$

13'. Forma pătratică $Q_\alpha(x,y,z)$ este pozitiv definită pentru:

A) $\alpha > 1$ **B)** $\alpha > 0$ **C)** $\alpha \in \varnothing$ **D)** $\alpha > -1$

14'. Pentru $\alpha = 2$ forma canonică, obţinută prin metoda transformărilor ortogonale, a formei pătratice $Q_2(x', y', z')$ este

A) $x'^2 + (1-\sqrt{5})y'^2 + (1+\sqrt{5})z'^2$ **B)** $2x'^2 + (1-\sqrt{5})y'^2 + (1+\sqrt{5})z'^2$
C) $2x'^2 + (2+\sqrt{5})y'^2 + (2-\sqrt{5})z'^2$ **D)** $2x'^2 + (2-\sqrt{2})y'^2 + (2+\sqrt{2})z'^2$

Pentru problemele **15** şi **16** considerăm hiperplanul
$H = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 2\}$ şi punctul $P = {}^t(1,2,3,4)$

15. Hiperplanul H' care trece prin P şi este paralel cu H are ecuaţia

A) $x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 3$ **B)** $x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 6$
C) $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -6$ **D)** $x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 10$

16. Distanţa dintre hiperplanele H şi H' este

A) $3\sqrt{10}$ **B)** $\sqrt{10}$ **C)** $\frac{5\sqrt{10}}{4}$ **D)** $\frac{4\sqrt{10}}{5}$

Pentru problemele **15'** şi **16'** considerăm dreapta $d \subset \mathbb{R}^4$ ce are ecuaţia
$d : \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2-2}{-1} = \frac{x_3+1}{0} = \frac{x_4+2}{2}$ şi punctul $P = {}^t(2,1,0,-1)$

15'. Hiperplanul H care trece prin P şi are normala dreapta d are ecuaţia

A) $x_1 - x_2 + 2x_4 = -1$ **B)** $x_1 - x_2 + 2x_4 = 1$
C) $2x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 3$ **D)** $x_1 - x_2 + 2x_4 = 0$

16'. Distanţa de la punctul $Q(2,1,3,1)$ la hiperplanul H din problema **15'** este

A) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ **B)** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ **C)** $3\sqrt{6}$ **D)** $2\sqrt{6}$

17. Pentru ce valori $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ conica de ecuaţie $x^2 + \alpha y^2 - 2x + 2\beta y - 7 = 0$ reprezintă o hiperbolă ?
A) $(\alpha,\beta) = (-1,-1)$ **B)** $(\alpha,\beta) = (1,1)$ **C)** $(\alpha,\beta) = (0,1)$

D) $(\alpha,\beta) = (0,0)$

17'. Pentru ce valori $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ conica de ecuaţie $\alpha x^2 + y^2 - 2xy - 4\beta x + 2y - 3 = 0$ reprezintă o parabolă ?

A) $(\alpha, \beta) = (-1, 0)$ **B)** $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ **C)** $(\alpha, \beta) = (0, 1)$

D) $(\alpha, \beta) = (1, \frac{1}{2})$

18. Considerăm cuadrica de ecuaţie $x^2 - y^2 - 2pz = 0, p \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Intersecţia cuadricei date cu un plan paralel cu unul din planele de coordonate este o elipsă pentru

A) $p = 1$ **B)** $p = -1$ **C)** $p = 2$ **D)** $p \in \varnothing$

18'. Considerăm cuadrica de ecuaţie $x^2 + y^2 - 2pz = 0, p > 0$. Intersecţia cuadricei date cu un plan paralel cu unul din planele de coordonate este o hiperbolă pentru

A) $p = 1$ **B)** $p = 2$ **C)** $p \in \varnothing$ **D)** $p = 2,5$

RĂSPUNSURI

1D 2A 3C 4C 5D 6D 7B 8D 9B 10C 11A 12C 13D 14D 15C 16D 17A 18D

1'C 2'D 3'A 4'D 5'C 6'B 7'B 8'B 9'D 10'C 11'C 12'C 13'C 14'C 15'A 16'B 17'B 18'C