$R' = \{(0,1,1)\}$ $\left.\begin{array}{l} R' \text{ SLi} \\ R' \text{ SG} \end{array}\right\} \Rightarrow R'$ este reper în $\mathbb{R}^1$

Seminar 4

Repere. Coordonate. Op. cu subspații vectoriale. Sumă directă.

1) $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$ și $R_0=\{e_1,e_2,e_3\}$ reperul canonic.

$R'=\{e_1'=e_1+2e_2+e_3,\ e_2'=e_1+7e_2+e_3,$

$e_3'=-e_1+e_2+e_3\}$

a) R' reper în $\mathbb{R}^3$

$R_0 \xrightarrow{A} R'$ $A=?$ (matricea de trecere)

b) coordonatele lui $x=(3,2,1)$ în raport cu R'

a) $\underset{R_0\to R'}{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ matricea componentelor R' în raport cu R_0

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 10 \neq 0 \Rightarrow rg A = 3 =$ maxim $\Rightarrow R'$ este un SLi $\left.\begin{array}{l} \\ \text{card } R' = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow R'$ este bază $\Rightarrow$ reper.

OBS: R_0 și R' sunt la fel orientate, deoarece $\det A > 0$

b). $x = (3,2,1) = x_1'(1,2,1) + x_2'(1,7,1) +$

$+ x_3'(-1,1,1) = (x_1' + x_2' - x_3', 2x_1' + 7x_2' + x_3',$

$x_1' + x_2' + x_3')$

$$\begin{cases} x_1' + x_2' - x_3' = 3 \\ 2x_1' + 7x_2' + x_3' = 2 \\ x_1' + x_2' + x_3' = 1 \end{cases}$$

$2x_3' = -2$

$x_3' = -1$

$$\begin{cases} x_1' + x_2' = 2 \;\; | \cdot (-2) \\ 2x_1' + 7x_2' = 3 \end{cases}$$

$5x_2' = -1$

$x_2' = \frac{-1}{5}$

$x_1' = 2 + \frac{1}{5} = \frac{11}{5}$

$(x_1', x_2', x_3') = \left(\frac{11}{5}, \frac{-1}{5}, -1\right)$

2) $(\mathbb{R}_2[X], +, \cdot)|\mathbb{R}$, $R_0 = \{e_1 = 1, e_2 = X, e_3 = X^2\}$

$R' = \{-1 + 2X + 3X^2, X - X^2, X - 2X^2\}$

a) R' reper în $\mathbb{R}_2[X]$

$R_0 \xrightarrow{A} R'$, $A = ?$

b) coordonatele lui $P = 3 - X + X^2$ în raport cu R'

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 3 = \max$ (*)

$\mathbb{R}_2[X] \cong \mathbb{R}^3 \Rightarrow R' = \{(-1, 2, 3), (0, 1, -1), (0, 1, -2)\}$

(*) $\xrightarrow[CL_i]{} R'$ SLi, $|R'| = 3 \Rightarrow R'$ rep.

b) $(3, -1, 1) = a(-1, 2, 3) + b(0, 1, -1) + c(0, 1, -2) =$

$= (-a, 2a + b + c, 3a - b - 2c)$

$$\begin{cases} -a = 3 \Rightarrow a = -3 \\ 2a + b + c = -1 \Rightarrow b + c = -1 + 6 = 5 \\ 3a - b - 2c = 1 \Rightarrow -b - 2c = 1 + 9 = 10 \end{cases}$$

(+) $-c = 15 \Rightarrow c = -15$

$b = 20$

$(a, b, c) = (-3, 20, -15)$

4). $(\mathbb{R}_3[X], +, \cdot) / \mathbb{R}$

$V_1 = P \in \{\mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = 0\}$

$V_2 = P \in \{\mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$

$V_3 = P \in \{\mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\} = V_1 \cap V_2$

a). $V_i \subset \mathbb{R}_3[X]$, subspat vec $(\forall) i = \overline{1,3}$

b) reper R_i în V_i, $i = \overline{1,3}$

c) Aflați coord lui $P_1 = X + 2X^2 + 3X^3$ în raport cu R_1.

$P_2 = 1 + 2X^2 - 3X^3$ în raport cu R_2

$P_3 = X + 3X^2 - 4X^3$ în raport cu R_3

Up $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$

$P(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0 \Rightarrow P = a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 \in \langle \underbrace{\{x, x^2, x^3\}}_{R_1} \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow R_1$ este SG pentru V_1

$R_0 = \{1, x, x^2, x^3\} \to$ baza $\Rightarrow$ SLi $\Rightarrow R_1 \subset R_0$ este SLi $\Rightarrow$

$\Rightarrow R_1$ reper în V_1

$(\forall) P, Q \in V_1$, $(\forall)$ $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow aP + bQ$

$a(a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3) + b(b_1 X + b_2 X^2 + b_3 X^3)$

$V_1 \subset \mathbb{R}_3[X]$ e subspațiu vectorial

$P \in V_2 \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_1 - a_2 - a_3$

$P = -a_1 - a_2 - a_3 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 = a_1(X-1) + a_2(X^2-1) + a_3(X^3-1)$

$P \in \langle \{x-1, x^2-1, x^3-1\} \rangle = R_2$

R_2 S.G pentru V_2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rang}_A A = 3 = \text{maxim} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \mathcal{R}_2 \text{ SLi} \\ \mathcal{R}_2 \text{ SG} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathcal{R}_2$ reper în V_2

$a_0 = 0$

$a_1 + a_2 + a_3 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2 - a_3$

$P = -(a_2 + a_3) X + a_2 X^2 + a_3 X^3$

$a_2(X^2 - X) + a_3(X^3 - X) \in \langle \underbrace{\{x^2 - x, x^3 - x\}}_{\mathcal{R}_3} \rangle$

$\mathcal{R}_3$ SG în V_3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{rang} A = 2 \Rightarrow \mathcal{R}_3$ SLi $\Rightarrow \mathcal{R}_3$ reper în V_3

c) $\mathcal{R}_1 = \{x, x^2, x^3\}$ $\dim_{\mathbb{R}} V_1 = 3$

$\mathcal{R}_2 = \{x - 1, x^2 - 1, x^3 - 1\}$ $\dim_{\mathbb{R}} V_2 = 3$

$\mathcal{R}_3 = \{x^2 - x, x^3 - x\}$ $\dim_{\mathbb{R}} V_3 = 2$.

Coordonatele lui P_1 în raport cu $\mathcal{R}_1$ sunt $(1, 2, 3)$

$P_2 = -3(x^3 - 1) + 2(x^2 - 1) + 0(x - 1)$

Coordonatele lui P_2 în raport cu $\mathcal{R}_2$ sunt $(0, 2, -3)$

$P_3 = -4(x^3 - x) + 3(x^2 - x)$

Coordonatele lui P_3 în raport cu $\mathcal{R}_3$ sunt $(3, -4)$

d) $\mathbb{R}_3[X] = V_i \oplus V_i'$, $i = \overline{1,3}$ V_i' subsp. complementar lui V_i

$V_i' = ?$

e) $\mathbb{R}_3[X] = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3 = W_1 \oplus W_2 \oplus W_3 \oplus W_4$

d) $rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 = Max$

Am extins R_1 la un reper în $\mathbb{R}_3[X]$

V_1' e sp. generat de $<\{1\}>$

$rg\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 4 = max$

$V_2' = V_1' =$ sp. generat de $<\{1\}>$

$rg\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4 = max$

V_3' sp generat de $< \{1, X\} >$

$R_0 = \{1, x, x^2, x^3\}$ partiționăm R_0 în 3 submulțimi, respectiv 4 submulțimi

$U_1 = \langle\{1, x\}\rangle$ | $W_1 = \langle\{1\}\rangle$

$U_2 = \langle\{x^2\}\rangle$ | $W_2 = \langle\{x\}\rangle$

$U_3 = \langle\{x^3\}\rangle$. | $W_3 = \langle\{x^2\}\rangle$

$W_4 = \langle\{x^3\}\rangle$

(6) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)|_{\mathbb{R}}$

$V' = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases} \} = S(A)$

a) Precizați o bază în V'

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) Precizați ~~o~~ ~~s~~ un subspațiu complementar V'' lui V' i.e $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

c) Să se descompună $x = (1, 1, 2)$ în raport cu $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$

a) $\dim_{\mathbb{R}} V' = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 - rg A = 3 - 1 = 1$

$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 = -4\alpha \end{cases} \Big| \cdot 2$

$2x_1 = -8\alpha$

$x_2 = 8\alpha$

$x_1 = -4\alpha$

$(-4\alpha, 8\alpha, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}.$

$V' = \langle \underbrace{\{(-4, 8, 1)\}}_{\mathcal{R}'} \rangle \Rightarrow \mathcal{R}'$ rep in V'

$rg \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = max \Rightarrow V'' = \langle \{(0,1,0),(0,0,1)\} \rangle$

$$X = (1,1,2) = \underset{\substack{\cap \\ V'}}{x'} + \underset{\substack{\cap \\ V''}}{x'} = \overbrace{a(-4,8,1)}^{x'} + \overbrace{b(0,1,0) + c(0,0,1)}^{x''}$$

$= (-4a, 8a+b, a+c) = (1,1,2)$

$$\begin{cases} -4a = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{4} \\ 8a + b = 1 \Rightarrow b = 1 + \frac{8}{4} = 3 \\ a + c = 2 \Rightarrow c = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$x' = \left(1, -2, -\frac{1}{4}\right)$

$x'' = \left(0, 3, \frac{9}{4}\right)$

Scanned with CamScanner

8) $(\mathbb{R}^4,+,\cdot)/\mathbb{R}$ $\exists$ $V' = \langle\{(1,2,-1,0),(1,0,0,3)\}\rangle$

a) Să se descrie V' printr-un sistem de ec. liniare

b) $\mathbb{R}^4 = V' \oplus V''$, $V'' = ?$

Să se descrie V' printr-un sistem de ec. liniare

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 2 = \max \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V' = 2$$

$\forall\, x \in V'$, $\exists\, a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $x = a(1,2,-1,0) + b(1,0,0,3)$

$x = (a+b, 2a, -a, 3b) = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{cases} a+b = x_1 \\ 2a = x_2 \\ -a = x_3 \\ 3b = x_4 \end{cases}$$

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ -1 & 0 & x_3 \\ 0 & 3 & x_4 \end{array}\right) \quad SCD$$

$$\Delta c_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ 0 & 3 & x_4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 3 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & x_2 - 2x_1 \\ 3 & x_4 \end{vmatrix}$$

$= -2x_4 + 6x_1 - 3x_2 = 0$

$$A_{c_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & x_1 \\ 2 & 0 & x_2 \\ -1 & 0 & x_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2x_3 + x_2 = 0$$

$$V' = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{matrix} 6x_1 - 3x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

c) $$rg \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 4 = max$$

$$V'' = \langle \{ (0,0,1,0), (0,0,0,1) \} \rangle$$

$\forall x \in V''$, $\exists a, b \in \mathbb{R}$ a.i. $x = a(0,0,1,0) + b(0,0,0,1)$

$\Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, a, b)$

$$V'' = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \right\}$$