UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Seminar 8

1. Să se studieze convergența următoarea serii de funcții și să se decidă dacă se pot deriva termen cu termen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}$; $x \in \mathbb{R}$.

Soluție: Avem că $\left| \frac{\sin nx}{2^n} \right| \leq \frac{1}{2^n}$ $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Cum $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, utilizând criteriul lui Weierstrass rezultă că seria $\sum \frac{\sin nx}{2^n}$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.

Seria derivatelor $\sum_n \left(\frac{\sin nx}{2^n} \right)' = \sum_n \frac{n \cos nx}{2^n}$

Cum $\left| \frac{n \cos nx}{2^n} \right| \leq \frac{n}{2^n}$ $(\forall) x \in \mathbb{R}$ iar $\sum_n \frac{n}{2^n}$ este convergentă din criteriul lui Weierstrass avem că $\sum \frac{n \cos nx}{2^n}$ converge uniform pe $\mathbb{R}$, deci seria se poate deriva termen cu termen.

b) $\sum_{n\geq 1} \frac{(x+n)^2}{n^4}$; $x \in [a,b]$, $0 < a < b$

Soluție: Cum $0 < a < b$ și $a \leq x \leq b \Rightarrow (x+n)^2 \leq (b+n)^2$

Cum $\left|\frac{(x+n)^2}{n^4}\right| \le \frac{(b+n)^2}{n^4}$; $(\forall)\, x\in[a,b]$.

Deoarece $\sum_n \frac{(b+n)^2}{n^4}$ este convergentă, aplicând criteriul lui Weierstrass, rezultă că seria este uniform convergentă pe $[a,b]$.

Seria derivatelor $\sum_n \left(\frac{(x+n)^2}{n^4}\right)' = \sum_n \frac{2(x+n)}{n^4}$

Folosind criteriul lui Weierstrass $\Rightarrow$ că $\sum_n \frac{2(x+n)}{n^4}$ este uniform convergentă pe $[a,b]$; deci seria se poate deriva termen cu termen.

(2) Să se arate că seria de funcții $\sum_n \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}$ converge uniform

Soluție: Deoarece $-\frac{1}{n^2} \le \frac{2x}{x^2+n^4} \le \frac{1}{n^2}$, deducem că

$\left|\operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}\right| \le \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2}$ $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$

Cum $\lim_n \frac{\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 1$ și $\sum_n \frac{1}{n^2}$ este convergentă (criteriul de comparație) concluzionăm că $\sum_n \operatorname{arctg}\frac{1}{n^2}$ este convergentă, de unde în conformitate cu Criteriul lui Weierstrass (M-Test), deducem că seria de funcții $\sum_n \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^4}$ converge uniform.

③ Fie seria de funcții $\sum_{n\geq 1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^2+n}{n^2}$; $x \in \mathbb{R}$.

a) Să se studieze convergența punctuală (simplă) pentru $(\forall) x \in \mathbb{R}$ și convergența uniformă pe orice interval $[a,b]$.
Este seria uniform convergentă pe $\mathbb{R}$?
b) Să se studieze absolut convergența pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
c) Să se studieze continuitatea sumei seriei (acolo unde ea există).
d) Se poate deriva seria termen cu termen?

Soluție.

a) Fie $x \in \mathbb{R}$ seriile numerice $\sum_n (-1)^n \frac{x^2}{n^2}$ și $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ sunt ambele convergente, deci seria dată este simplu convergentă $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
Studiem acum convergența uniformă pe intervalul $[a,b]$.
• Seria $\sum_n (-1)^n \frac{x^2}{n^2}$ este uniform convergentă pe $[a,b]$
În adevăr, aplicând criteriul lui Weierstrass de convergență uniformă avem:

$$\left|(-1)^n \frac{x^2}{n^2}\right| \leq \frac{b^2}{n^2} \quad (\forall) x \in [a,b],$$

iar seria numerică $\sum_n \frac{1}{n^2}$ e convergentă

• Seria nu este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$.
În adevăr, fie A suma seriei $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^2}$ și B suma seriei $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}$
evident, seria dată converge punctual la funcția $f(x) = Ax^2+B$; $(\forall) x \in \mathbb{R}$.
Fie $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$

Deoarece $\lim_n \sup_{x\in\mathbb{R}} |S_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} x^2 \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} - A\right| = \infty$

deducem că seria nu converge uniform pe $\mathbb{R}$ la f

b). Seria nu converge absolut pentru niciun $x \in \mathbb{R}$, deoarece seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2+n}{n^2}$ este divergentă (se compară cu seria armonică)

c) Evident, funcția f (suma seriei) este continuă pe $\mathbb{R}$ (deși seria nu converge uniform pe $\mathbb{R}$).

d). Să remarcăm că seria nu verifică ipotezele teoremei de derivare termen cu termen pe $\mathbb{R}$

Fie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{n^2}$ seria derivatelor, care evident nu este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$. $\left(\lim_{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| 2x \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2} - 2Ax \right| = \infty \right)$

Totuși, seria derivatelor converge uniform pe orice compact din $\mathbb{R}$. Seria dată se poate deriva termen, egalitatea

$$\left(x^2 \sum_{n} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2} + \sum_{n} (-1)^n \frac{1}{n} \right)' = 2x \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad (\forall) x \in \mathbb{R}$$

fiind adevărată

Concluzie:

Așadar condițiile din teorema de derivare termen cu termen sunt condiții suficiente nu și necesare.

Diferențiabilitate

Derivata după o direcție (vector) și derivate parțiale.

① Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$ pentru:

a). $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$; $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ $(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$

b) $f:\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x>0\}\longrightarrow\mathbb{R}$; $f(x,y)=xy\ln x$ $(\forall)\ y\in\mathbb{R};x>0$.

Soluție:

a). Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $(x,y)\neq(0,0)$.

$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y(\ln x+1)$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x\ln x$; $y\in\mathbb{R},x>0$

deci $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=1$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=0$

② Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$; $f(x,y)=\begin{cases}0 & ; xy=0\\ 1 & xy\neq0\end{cases}$

are următoarele proprietăți

a). există $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

b). $(\forall)\ v=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, unde $\alpha\beta\neq0$, $(\nexists)\ \frac{df}{dv}(0,0)$.

c) nu este continuă în $(0,0)$.

d) este mărginită

Soluție:

a) Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(1,0)) - f(0,0)}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}$

$= 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$

Prin urmare f are derivate parțiale în origine.

b) Fie $v=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, $\alpha\beta\neq 0$. Pentru $t\neq 0$ avem:

$\frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t} = \frac{1}{t}$, deci nu există $\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t}$

i.e nu există $\frac{df}{dv}(0,0)$.

c) Fie $(\frac{1}{n},0)\longrightarrow(0,0)$ și $(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\longrightarrow(0,0)$. Deoarece

$f(\frac{1}{n},0)=0\longrightarrow 0$ și $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n})=1\longrightarrow 1$, deducem că nu

există $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$, deci f - nu este continuă în (0,0).

d) Cum $f(\mathbb{R}^2)=\{0,1\} \Rightarrow f$ este mărginită

<u>Concluzie</u>: Există funcții care au derivate parțiale într-un punct, nu au derivata după orice direcție în acel punct și nu sunt continue în punctul respectiv.

(3) Să se arate că funcția $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x}{y} & ; y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$

are următoarele proprietăți:

a) există $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) $(\forall)$ $v=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, unde $\alpha\cdot\beta\neq 0$, $(\nexists)$ $\frac{df}{dv}(0,0)$

c) nu este mărginită pe nicio vecinătate a lui $(0,0)$.
d) nu este continuă în $(0,0)$.

Soluție:

a) Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}$ $= 0$. Așadar f are derivate parțiale în origine.

b) Fie $v=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ a.î. $\alpha\beta\neq 0$. Pentru $t\neq 0$ avem:

$$\frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t} = \frac{\alpha}{t\beta},$$ deci nu există $\lim_{t\to 0}\frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t}$, i.e. nu există $\frac{df}{dv}(0,0)$.

c) Deoarece $f(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})=n$, $(\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\lim_n (\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})=(0,0)$ și $\lim_n f(\frac{1}{n},\frac{1}{n^2})=\infty$, deducem că f nu este mărginită pe nicio vecinătate a lui $(0,0)$.

d) evident rezultă din c) că f nu e continuă în $(0,0)$.

Funcții diferențiabile

(4) Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ;(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases}$

are următoarele proprietăți

a) Există $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) Este continuă

c) Nu există $\frac{df}{dv}(0,0)$; $v=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ cu $\alpha\beta\neq 0$

d) Nu e diferențiabilă în $(0,0)$

Soluție:

a) Pentru $(x,y)\neq(0,0)$ avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

În plus $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=0$ și

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t}=0.$

Așadar f are derivate parțiale

b) Este clar că f este continuă în orice punct $(x,y)\neq(0,0)$, deoarece pe o vecinătate a unui astfel de punct, funcția este descrisă de

$$f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Studiem continuitatea în $(0,0)$.

Deoarece $|f(x,y)|=\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\cdot|x|\leq|x|$ $(\forall)$ $(x,y)\neq(0,0)$

și $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|=0$, deducem că $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$; deci f este continuă în $(0,0)$. Prin urmare f este continuă pe $\mathbb{R}^2$

c) Fie $v=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ cu $\alpha\beta\neq0$. Avem $\frac{f(t\alpha,t\beta)-f(0,0)}{t}=\frac{f(t\alpha,t\beta)}{t}$

$=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\frac{t}{|t|}$; $t\neq0$.

Deci nu există $\lim\limits_{t\to0}\frac{f((0,0)+tv)-f(0,0)}{t}$; i.e nu există $\frac{df}{dv}(0,0)$.

d) P.A. (prin absurd) f ar fi diferențiabilă în origine, atunci avem

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-Df(0,0)((x,y)-(0,0))}{\|(x,y)-(0,0)\|}=0 \iff$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0.$$ Însă ultima egalitate ne conduce la contradicție deoarece pentru șirul $\left(\frac{1}{n};\frac{3}{n}\right) \longrightarrow (0,0)$ avem

$$\lim_{n} \frac{\frac{3}{n^2}}{\frac{10}{n^2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{10} = 0 \quad \not\exists$$

Concluzie:

Asadar există funcții care au derivate parțiale într-un punct, sunt continue în acel punct și nu sunt diferențiabile în punctul respectiv.

(5) Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ descrisă de:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^3-y^2}, & x^3-y^2\neq 0\\ 0 & x^3-y^2=0\end{cases}$$ are următoarele proprietăți

a) Există $\frac{df}{dv}(0,0)$ $(\forall)\ v\in\mathbb{R}^2$

b) Nu este continuă în $(0,0)$.

c) Nu este diferențiabilă în $(0,0)$.

Soluție:

a) Pentru orice $v=(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ cu $\beta\neq 0$ avem $\lim_{t\to 0}\frac{f(\alpha t,\beta t)-f(0,0)}{t} =$

$= \lim_{t\to 0}\frac{\alpha^2\beta}{-\beta^2} = -\frac{\alpha^2}{\beta}$ i.e există $\frac{df}{dv}(0,0)$ și $\frac{df}{dv}(0,0) = -\frac{\alpha^2}{\beta}$.

Pentru $v=(\alpha,0)\in\mathbb{R}^2$, avem $\lim_{t\to 0}\frac{f(\alpha t,0)-f(0,0)}{t} = 0$ i.e $(\exists)\ \frac{df}{dv}(0,0)$

și $\frac{df}{dv}(0,0)=0$

Așadar f are derivată după orice direcție în origine.

b) Deoarece:

$$\lim_{n} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{n^2}-\sqrt{\frac{1}{n^4}+\frac{4}{n^3}}\right)\right)=1\neq 0=f(0,0),$$ deducem

că f - nu este continuă în $(0,0)$.

c) Evident din b).

Concluzie:

Așadar există funcții care au derivată după orice direcție într-un punct dar nu sunt continue în acel punct (deci nici diferențiabile)

⑥ Să se demonstreze că funcția $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ descrisă de

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\sin\frac{x}{y} & ; y\neq 0 \\ 0 & y=0\end{cases}$$ are următoarele

Proprietăți

a) Este continuă în $(x_0,0)$; $(\forall)\, x_0\in\mathbb{R}$

b) $\exists\; \frac{\partial f}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$; $(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}$ este continuă în $(x_0,0)$; $(\forall)\, x_0\in\mathbb{R}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu este continuă în $(x_0,0)$ pentru $x_0\neq 0$ d) Este diferențiabilă în $(x_0,0)$ $(\forall)\, x_0\in\mathbb{R}$

Soluție:

a) Cum $|f(x,y)|\leq y^2$ $(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$ deducem că $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} f(x,y)=0=$ $=f(x_0,0)$, deci f este continuă în $(x_0,0)$ $(\forall)\, x_0\in\mathbb{R}$.

b) Se găsește ușor că:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y\cos\frac{x}{y} & ; y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases} \quad \text{și}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} 2y\sin\frac{x}{y} - x\cos\frac{x}{y} & ; y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases}$$

c) Deoarece $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| = \left|y\cos\frac{x}{y}\right| \leq |y|$, $(\forall)(x,y)\in\mathbb{R}^2$ găsim că

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)$; $(\forall)(x_0,0)\in\mathbb{R}^2$. Deci $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ este continuă în $(x_0,0)$ $(\forall)\, x_0\in\mathbb{R}$

Fie $(x_0+\frac{1}{n}; \frac{1}{n}) \longrightarrow (x_0,0)$. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\tfrac{1}{n}; \tfrac{1}{n}) = \frac{2}{n}\sin(nx_0+1) - x_0\cos(nx_0+1) - \frac{1}{n}\cos(nx_0+1)$$

$(\forall)n\geq 1$; $n\in\mathbb{N}$. Cum $\lim\limits_{n} \frac{2}{n}\sin(nx_0+1) = \lim\limits_{n} \frac{1}{n}\cos(nx_0+1) = 0$

$\Rightarrow \lim\limits_{n} x_0\cos(nx_0+1) = 0$ ceea ce este fals; și ca atare $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu este continuă în $(x_0,0)$; pentru $x_0\neq 0$

d) Avem $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,0)} \dfrac{f(x,y) - f(x_0,0) - Df(x_0,0)((x,y)-(x_0,0))}{\|(x,y)-(x_0,0)\|} =$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{f(x,y) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)\, y\right]}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{y^2 \sin \frac{x}{y}}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} y \cdot \frac{y}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} \cdot \sin\frac{x}{y} = 0$$

(Am folosit că $\left|\frac{y}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}}\right| \le 1$ și $\left|\sin \frac{x}{y}\right| \le 1$.)

Prin urmare avem că f este diferențiabilă în $(x_0,0) \in \mathbb{R}^2$ $(\forall)\, x_0 \in \mathbb{R}$

(7) Să se demonstreze că $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dată de

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Au următoarele proprietăți

a) Este continuă în $(0,0)$

b) $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$ și nu sunt continue în $(0,0)$.

c) Este diferențiabilă în $(0,0)$.

Soluție

a) Deoarece $|f(x,y)| \le |xy| \to 0$ pentru $(x,y)\to(0,0)$

deducem că $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ deci f este continuă în $(0,0)$

b) Avem $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} y \cdot \sin \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2} \cos \frac{1}{x^2+y^2} & ; (x,y) \neq \\ 0 & ; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Deoarece $\lim_{n} \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{1}{2\sqrt{n\pi}}; \frac{1}{2\sqrt{n\pi}}\right) = -\infty \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ - nu e continuă

în $(0,0)$

Analog $\frac{\partial f}{\partial y}$ - nu este continuă în (0,0).

c) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\right]}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Deoarece $$\left|\frac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \le \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Cum $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} = 0$ deducem că

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy\sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ și prin urmare avem că f este diferențiabilă în (0,0) și $Df(0,0)=0$.

<u>Concluzie</u>

Adaosul condiția de continuitate impusă asupra derivatelor parțiale în criteriul de diferențiabilitate este suficientă dar nu și necesară pt. diferențiabilitatea funcției considerate

(8) Să se studieze diferențiabilitatea funcției $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dată de

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^4+y^4)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & ;\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ;\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Soluție: Clar că f. continuă pe $\mathbb{R}^2$

Se găsește ușor că:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} 4x^3 \sin\frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}(x^4+y^4)\cos\frac{1}{x^2+y^2} \\ 0 \qquad ; (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Cum $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 4|x|^3 + 2|x|$ $(\forall)$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ și

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (4|x|^3+2|x|) = 0 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ - continuă în $(0,0)$.

Analog $\frac{\partial f}{\partial y}$ - continuă în $(0,0)$.

Deci în conformitate cu criteriul de diferențiabilitate, deducem că f este diferențiabilă