UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

Seminar 3:

(A) Definiția seriei convergente

a). Să se afle suma seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

Soluție: Deoarece $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$ $(\forall) k \in \mathbb{N}^*$ avem că

$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ $(\forall) n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Prin urmare seria dată este convergentă și suma ei este 1.

b) Să se afle suma seriei: $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cdot\cos\frac{1}{n+1}}$

Soluție: Deoarece $\sin\frac{1}{k(k+1)} = \sin\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \sin\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1} - \cos\frac{1}{k}\sin\frac{1}{k+1}$

rezultă că $\frac{\sin\frac{1}{k(k+1)}}{\cos\frac{1}{k}\cdot\cos\frac{1}{k+1}} = tg\frac{1}{k} - tg\frac{1}{k+1}$ $(\forall) k\in\mathbb{N}^*$. Prin urmare.

$S_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin\frac{1}{k(k+1)}}{\cos\frac{1}{k}\cos\frac{1}{k+1}} = tg 1 - tg\frac{1}{n+1}$ $(\forall) n\in\mathbb{N}^*$. Deci seria considerată este convergentă și are suma $tg 1$.

c). Să se afle suma seriei $\sum_{n\geq 0} arctg \frac{1}{n^2+n+1}$.

Soluție: Deoarece $arctg\frac{1}{k^2+k+1} = arctg\frac{\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}}{1+\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k+1}} = arctg\frac{1}{k} - arctg\frac{1}{k+1}$ $(\forall) k$ deducem că $\sum_{k=0}^{n} arctg\frac{1}{k^2+k+1} = 2\, arctg 1 - arctg\frac{1}{n+1}$ $(\forall) n\in\mathbb{N}$. Drept urmare seria este convergentă și are suma $\frac{\pi}{2}$

(B) Termenul general al unei serii convergente tinde la 0.

a). Fie $f:(0,a)\longrightarrow[0,\infty)$, unde $a>0$, a.î. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}\neq 0$. Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n}\sqrt[n]{n!\,f(a)\cdot f(\frac{a}{2})\cdots f(\frac{a}{n})}$.

Soluție:

Deoarece $\lim\limits_{n}\frac{(n+1)!\,f(a)f(\frac{a}{2})\cdots f(\frac{a}{n})\cdot f(\frac{a}{n+1})}{n!\,f(a)\cdot f(\frac{a}{2})\cdots f(\frac{a}{n})}=\lim\limits_{n} a\frac{f(\frac{a}{n+1})}{\frac{a}{n+1}}\neq 0$,

rezultă că $\lim\limits_{n}\sqrt[n]{n!\,f(a)\cdot f(\frac{a}{2})\cdots f(\frac{a}{n})}\neq 0$, deci seria considerată este divergentă

b). Să se studieze natura seriei $\sum\limits_{n}\sin n$.

Soluție: Deoarece șirul $(\sin n)_n$ nu este convergent, seria considerată este diverg.

c). Să se studieze natura seriei: $\sum\limits_{n\geq 1}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}$; $\alpha\in(0,\pi)$

Soluție:

Deoarece $x_n=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2^2}\cdots\cos\frac{\alpha}{2^n}\Longleftrightarrow x_n=\frac{\frac{1}{2^n}\cdot\sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2^n}}\longrightarrow\frac{\sin\alpha}{\alpha}\neq 0$

deci seria considerată este divergentă.

(C) Criteriul lui Cauchy pentru serii

Există o bijecție $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ a.î. seria $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{f(n)}{n^2}$ să fie converg?

Soluție: Prin absurd $(\exists)$ $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ bijectivă

Avem: $\|S_{2p}-S_p\|=\sum\limits_{k=p+1}^{2p}\frac{f(k)}{k^2}\geq\sum\limits_{k=p+1}^{2p}\frac{f(k)}{4p^2}\geq\frac{1+2+\cdots+p}{4p^2}=\frac{p(p+1)}{8p^2}\geq\frac{1}{8}$

$(\forall)\,p\in\mathbb{N}^*$ $\cancel{\forall}$

D. Criterii de comparație.

1. Să se stabilească natura seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{a^n+n}$ unde $a>0$

Soluție:

i) Dacă $a>1$ avem $\frac{1}{a^n+n} < \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$ $(\forall) n\in\mathbb{N}^*$. Cum $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{a}\right)^n$ este convergentă, deducem, cu unul din criteriile de comparație, că seria inițială este convergentă

ii) $a=1$ obținem seria $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n}$ - care este divergentă

iii) Dacă $a<1$ deoarece $\lim_n \frac{\frac{1}{a^n+n}}{\frac{1}{n}} = 1$ și cum $\sum_n \frac{1}{n}$ este divergentă găsim că seria considerată este divergentă

2. Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{2n^3-1}$

Soluție: Știu $\ln n \leq n$ $(\forall) n\geq 1$. De aici $\frac{\ln n}{2n^3-1} \leq \frac{n}{2n^3-1}$ $(\forall) n\geq 1$

Cum $2n^3-1\geq n^3$ $(\forall) n\geq 1$ avem $\frac{1}{2n^3-1} \leq \frac{1}{n^3}$ $(\forall) n\geq 1$ deci

$\frac{n}{2n^3-1} \leq \frac{n}{n^3}$ $(\forall) n\geq 1$

Drept urmare avem $\frac{\ln n}{2n^3-1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ $(\forall) n\geq 1$. Cum $\sum_n \frac{1}{n^2}$ e. convergentă ne asigură că seria considerată este convergentă.

3. Să se studieze natura seriei $\sum_n \frac{\ln n}{n^2+3}$

Soluție: Avem evident (vezi și ex 2 de mai sus): $\frac{\ln n}{n^2+3} \leq \frac{\ln n}{n^2}$ $(\forall) n\geq 1$

Deci $n^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\ln n}{n^2+3} \leq \frac{\ln n}{n^2}\cdot n^{\frac{3}{2}}$ $(\forall) n\geq 1 \iff n^{\frac{3}{2}} \frac{\ln n}{n^2+3} \leq \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ $(\forall) n\geq 1$

Cum $\lim_n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ avem că $\lim_n \frac{\frac{\ln n}{n^2+3}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = 0$

și deoarece $\sum_n \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ este convergentă, avem că $\sum_n \frac{\ln n}{n^2+3}$ este de asemenea convergentă

④ Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1} e^{-n^2}$

Soluție: Deoarece $\lim_n \frac{e^{-n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 0$ și $\sum_n \frac{1}{n^2}$ e convergentă $\Rightarrow$ că $\sum_n e^{-n^2}$ e convergentă

⑤ Să se studieze natura seriei $\sum_n \sin \pi (2+\sqrt{3})^n$

Soluție:

Deoarece $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ este un număr natural par, cu notația:

$x_n = \sin \pi (2+\sqrt{3})^n$, găsim că $x_n = -\sin \pi (2-\sqrt{3})^n$ $(\forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}$

Deoarece $\lim_n \frac{\sin \pi (2-\sqrt{3})^n}{\pi (2-\sqrt{3})^n} = 1$ și seria $\sum_n (2-\sqrt{3})^n$ e convergentă

deducem că seria $\sum_n \sin \pi (2+\sqrt{3})^n$ e convergentă.

⑥ Să se studieze natura seriei $\sum_n x_n$, unde șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este dată de relația de recurență $x_n = \frac{e^{-x_{n-1}}}{n}$

Soluție: Cum $x_n > 0$ $(\forall n \geq 1)$ avem că $x_n = \frac{e^{-x_{n-1}}}{n} < \frac{1}{n}$ $(\forall n \geq 1$

deducem că $\lim_n x_n = 0$. Folosind relația de recurență găsim $\lim_n n x_n = 1$

sau încă: $\lim_n \frac{x_n}{\frac{1}{n}} = 1$ și cum $\sum_n \frac{1}{n}$ e divergentă, găsim că

$\sum_n x_n$ e divergentă.

(7) Să se studieze natura seriei $\sum_{n} \frac{\sqrt{x_1+\dots+x_n}}{\sqrt{x_1}+\dots+\sqrt{x_n}}$; unde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de numere reale strict pozitive.

Soluție:

În conformitate cu ineg. C.B.S. avem:

$$\left(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\dots+\sqrt{x_n}\right)^2 \le (1+\dots+1)(x_1+x_2+\dots+x_n) = n(x_1+x_2+\dots+x_n).$$

sau încă $\frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{\sqrt{x_1+x_2+\dots+x_n}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\dots+\sqrt{x_n}}$ $(\forall) n\in\mathbb{N}$.

Cum $\sum_{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$ e divergentă avem că $\sum_{n} \frac{\sqrt{x_1+x_2+\dots+x_n}}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\dots+\sqrt{x_n}}$ e diverg.

(8) Să se studieze natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} x^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ unde $x>0$

Soluție: Deoarece $\lim_{n} \frac{x^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}}{x^{\ln n}} = x^{\gamma}$, unde $\gamma = \lim_{n}\left(1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$

Găsim că seria inițială are aceeași natură cu seria $\sum_{n} x^{\ln n}$ i.e cu seria $\sum \frac{1}{n^{-\ln x}}$

Prin urmare seria $\sum_{n} x^{1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n}}$ este convergentă $\Longleftrightarrow x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$

(E) Criteriul de condensare al lui Cauchy

a) Să se studieze natura seriei lui Bertrand $\sum_{n\ge 2} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ în funcție de parametrul $p\in\mathbb{R}$.

Soluție: Dacă $p\le 0$ avem $\frac{1}{n} \le \frac{1}{n(\ln n)^p}$ $(\forall) n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$, deci în acest caz, seria lui Bertrand este divergentă (deoarece $\sum \frac{1}{n}$ e divergentă).

Dacă $p>0$ șirul $\left(\frac{1}{n(\ln n)^p}\right)_{n\geq 2}$ este cu termeni pozitivi și descrescător și drept urmare, folosind criteriul de condensare al lui Cauchy, seria condiționată are aceiași natură cu seria $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln 2)^p}\cdot\frac{1}{n^p}$

Concluzionăm că seria lui Bertrand este divergentă pentru $p\leq 1$ și converg. pentru $p>1$.

(7) Criteriul raportului și criteriul radicalului

1. Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 0} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)}{(n+1)!}x^n$, $x\in(0,\infty)$.

Soluție:

Să observăm că $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}=3x$, unde $x_n=\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)}{(n+1)!}x^n$

Drept urmare criteriul raportului ne asigură că dacă $x<\frac{1}{3}$ seria dată este convergentă, iar dacă $x>\frac{1}{3}$ este divergentă

Studiem cazul $x=\frac{1}{3}$: deoarece $\frac{u_{n+1}}{u_n}-\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n+4}{3(n+2)(n+1)}>0$ deducem că $\frac{x_{n+1}}{x_n}>\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}$ sau $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}<\frac{x_{n+1}}{x_n}$. Cum $\sum \frac{1}{n}$ este divergentă împreună cu unul din criteriile de comparație ne asigură că seria în acest caz este divergentă

Observație 1) Se știe că dacă $(x_n)_n$ este un șir a.î. $x_n>0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$ atunci dc. există $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n}=l$, există și $\lim_n \sqrt[n]{x_n}$ și avem $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_n \sqrt[n]{x_n}=l$

2) Dc (7) $\lim_n \sqrt[n]{x_n}$ este posibil ca $\lim_n \frac{x_{n+1}}{x_n}$ să nu existe

Concluzii

1). Din cele de mai sus, deducem că dacă unul dintre cele două criterii (raportului sau radicalului), nu decide asupra naturii seriei date, este practic inutil să-l aplicăm pe celălalt

2) Observația 2) ne arată faptul că criteriul radicalului este mai general decât criteriul raportului

(2) Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1} \sigma(n) \cdot x^n$, $x>0$, iar $\sigma(n)$ - reprezintă numărul divizorilor lui n.

Soluție: Deoarece $x \leq \sqrt[n]{\sigma(n) x^n} \leq x \sqrt[n]{n}$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*$
(evident $1 \leq \sigma(n) \leq n$ $(\forall n \geq 1$. și deci $x^n \leq \sigma(n) x^n \leq n \cdot x^n$. $(\forall n \in \mathbb{N}^*$
sau $x \leq \sqrt[n]{\sigma(n) x^n} \leq x \cdot \sqrt[n]{n}$. $(\forall n \geq 1)$.
Deducem că $\lim_n \sqrt[n]{\sigma(n) \cdot x^n} = x$. Așadar dacă $x<1$, seria este convergentă iar dacă $x>1$, seria este divergentă (conform Criteriului radicalului).
Dacă $x=1$ seria este divergentă, căci $\lim_n \sigma(n) = \infty$.

(G) Criteriul Raabe-Duhamel

1. Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots (3n)} \right)^2$

Soluție: Notând cu x_n termenul general al seriei, un calcul simplu arată că $\lim_n n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1\right) = \frac{4}{3} > 1$, deci conform cu criteriul lui Raabe-Duhamel seria este convergentă

2. Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

Soluție: Vom aplica Criteriul lui Raabe-Duhamel. Cu notația $x_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

avem $n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=n\left[\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}-1\right]$. Deoarece $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}-1}{x}=\frac{1}{2}$

(se aplică de mai multe ori regula lui l'Hospital), deducem că seria este divergentă

3. Să se arate că seria $\sum\limits_{n\geq 1}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, unde $a\notin\{-n \mid n\in\mathbb{N}^*\}$

este convergentă pentru $a>1$ și divergentă pentru $a\leq 1$.

Soluție:

Pentru $a=0$ avem seria divergentă $\sum\limits_{n} 1$

Pentru $a>0$, notând cu x_n termenul general al seriei considerate, avem $\lim\limits_{n} n\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}-1\right)=a$. Așadar apelând la criteriul lui Raabe-Duhamel pentru $a>1$, seria este convergentă, iar pentru $a\in(0,1)$ ea este divergentă

Pentru $a=1$ avem seria $\sum\limits_{n}\frac{1}{n+1}$ divergentă

Pentru $a<0$ există $k\in\mathbb{N}$ a.î. $k<-a<k+1$. Neglijând primii k termeni ai seriei date, trebuie să analizăm seria $\sum\limits_{n\geq k}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$

adică $\sum\limits_{n\geq k}\frac{(-1)^k n!}{(-a-1)\cdots(-a-k)(a+k+1)\cdots(a+n)}$, serie care are aceiași natură

cu seria cu termeni pozitivi $\sum\frac{n!}{(a+k+1)\cdots(a+n)}$. Notând $y_n=\frac{n!}{(a+k+1)\cdots(a+n)}$

deoarece $\lim\limits_{n} n\left(\frac{y_n}{y_{n+1}}-1\right)=a<0<1$, deducem (cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel) că seria $\sum\limits_{n\geq k} y_n$ este divergentă. Așadar, pentru $a<0$ seria $\sum\limits_{n\geq 1} x_n$ este divergentă

(H) Criteriul Abel-Dirichlet și Criteriul lui Leibniz

(1) Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$, unde $x\in\mathbb{R}$, $\alpha\in(0,\infty)$

Soluție: Dacă există $k\in\mathbb{Z}$ a.î. $x=2k\pi$, atunci seria dată devine $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^\alpha}$, care este convergentă dacă $\alpha>1$ și divergentă dc. $\alpha\leq 1$

Dacă $x\neq 2k\pi$ $(\forall) k\in\mathbb{Z}$, atunci $\frac{\cos nx}{n^\alpha}=x_n\cdot y_n$, unde $x_n=\frac{1}{n^\alpha}$ și $y_n=\cos nx$.

Evident $\lim_n x_n=0$ și $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător. De asemenea, $\left|\sum_{k=1}^{n} y_n\right|\leq\frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$ $(\forall)n\in\mathbb{N}$. Conform criteriului lui Abel-Dirichlet în acest caz seria considerată este convergentă

(2) Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{\cos n\cdot\cos\frac{1}{n}}{n}$

Soluție: Se observă că avem $\frac{\cos n\cdot\cos\frac{1}{n}}{n}=x_n\cdot y_n$, unde $x_n=\cos\frac{1}{n}$ și $y_n=\frac{\cos n}{n}$

Seria $\sum_{n\geq 1} y_n$ este convergentă (vezi ex 1. de mai sus), iar $(x_n)_n$ e monoton și mărginit. Așadar în conformitate cu Criteriul lui Abel-Dirichlet, seria considerată este convergentă

(3) Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\sqrt{n}+1}{n}$

Soluție. Deoarece seria $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n}$ este convergentă (Criteriul lui Leibniz) iar seria $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ este divergentă, concluzionăm că seria considerată este divergentă

④ Să se studieze natura seriei $\sum_{n\geq 1} \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

Soluție: Avem $\sin(\pi\sqrt{n^2+1}) = \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n + n) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+1} - n)$
$= (-1)^n \sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ $(\forall)n\in\mathbb{N}$. Folosind criteriul lui Leibniz, deducem că seria considerată este convergentă.

⑤ În seria convergentă: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$

să se permute ordinea termenilor a.î. să se obțină o serie convergentă, dar cu o altă sumă

Soluție: Seria $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ este convergentă și suma ei este $\ln 2$

Fie deci $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \ln 2$. Înmulțind cu $\frac{1}{2}$ avem

$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + = \frac{1}{2}\ln 2$. Însumând cele două egalități și grupând termenii astfel: $1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5} + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) +$
$+ \frac{1}{7} + \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{10}\right) + \frac{1}{11} + \dots = \frac{3}{2}\ln 2$

Seria de mai sus este (după efectuarea calculelor din paranteze):

$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots = \frac{3}{2}\ln 2$ și este o permutare a seriei inițiale