Seminar 1

1. $\underbrace{\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{a+1}{2a+1},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}\}}_{A} = \underbrace{\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}}_{B}.$

$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B$ și $B \subseteq A$

Rez:

"$\subseteq$" $x \in A \Rightarrow x = \frac{a+1}{2a+1},\ a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

$x = \frac{1}{2}$?

$\frac{a+1}{2a+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2a+2 = 2a+1 \Leftrightarrow 1 = 0$ Fals

abs

$\Rightarrow A \subseteq B$

"$\supseteq$" Fie $b \in B$.

$b = \frac{a+1}{2a+1} \Leftrightarrow 2ab + b = a+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2ab - a = 1 - b \Leftrightarrow a(2b-1) = 1-b \Leftrightarrow a = \frac{1-b}{2b-1} \in \mathbb{R}$

$a = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1-b}{2b-1} = -\frac{1}{2} \Rightarrow 1 = 0$ abs.

$\Rightarrow B \subseteq A$

2. Câte elemente are mulțimea:

$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{m^2+1}{2m^2+m+1},\ m \in \{1, 2, \dots, 1000\}\}$?

Rez:

$$\frac{m^2+1}{2m^2+m+1} = \frac{n^2+1}{2n^2+n+1}$$

$\Leftrightarrow 2m^2n^2 + m \cdot n^2 + m^2 + 2n^2 + n + 1 =$

$= 2n^2m^2 + n \cdot m^2 + n^2 + 2m^2 + m + 1$

$\Leftrightarrow m \cdot n^2 - n \cdot m^2 + m^2 - n^2 + m - n = 0$

$mn(n-m) + (m-n)(m+n) + (m-n) = 0$

$$(n-m)\left[mn-(m+n)-1\right]=0$$

$n-m=0 \Rightarrow m=n$

sau

$mn-(m+n)-1=0$

$mn-m-n-1=0$

$mn-m-n+1-1-1=0$

$m(n-1)-(n-1)-2=0$

$(n-1)(m-1)-2=0 \Rightarrow (n-1)(m-1)=2$

$\Rightarrow \begin{cases} n=2 \\ m=3 \end{cases}$ sau $\begin{cases} n=3 \\ m=2 \end{cases}$

$\text{card}(A) \overset{\text{not.}}{=} |A| = 999$

$$\frac{2^2+1}{2\cdot 2^2+2+1}=\frac{3^2+1}{2\cdot 3^2+3+1} \qquad f(2)=f(3)$$

$f(1)=\frac{1}{2}$, $f(2)=\frac{5}{11}=f(3)$, $f(4)=\frac{17}{37}$

$\text{Im} f = \left\{\frac{1}{2}, \frac{5}{11}, \frac{17}{37}\right\}$

3. $\overbrace{(3\mathbb{N}+2)}^{A} \cap \overbrace{(5\mathbb{N}+1)}^{B} = \overbrace{15\mathbb{N}+11}^{C}$.

Rez:

"$\supseteq$" $x \in C \Rightarrow x = 15n+11 \begin{cases} =15n+9+2=3(5n+3)+2 \Rightarrow x\in A \\ =15n+10+1=5(3n+2)+1 \Rightarrow x \in B \end{cases}$

$\Rightarrow C \subseteq A$ și $C \subseteq B \Rightarrow C \subseteq A \cap B$

"$\subseteq$" $x \in A\cap B \Rightarrow x = 3m+2 = 5n+1$

$\left(3n+2=5n+1 \Rightarrow n=\frac{1}{2} \notin \mathbb{N}\right)$

$3m+2=5n+1 \Rightarrow 5n=3m+1 \Rightarrow 5 \mid 3m+1$

$m=5k \Rightarrow 3m+1=15k+1 \not\vdots\, 5$

$m=5k+1 \Rightarrow 3m+1=15k+4 \not\vdots\, 5$

$m=5k+2 \Rightarrow 3m+1=15k+7 \not\vdots\, 5$

$\boxed{m=5k+3} \Rightarrow 3m+1=15m+10 \,\vdots\, 5$

$m=5k+4 \Rightarrow 3m+1=15m+13 \not\vdots\, 5$

$n = 5k + 3$

$x = 3n + 2 = 3(5k+3) + 2 = 15k + 11$.

4. Det. A și B a.î. $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \setminus B = \{1,3\}$ și $A \cap B \not\subseteq \{3,4,5\}$.

Rezolvare:

$A = \{1,3,2,4,5\}$

$B = \{2,4,5\}$

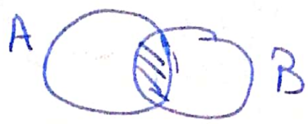
$A \cap B \not\subseteq \{3,4,5\}$

$C \not\subseteq D \iff (\exists)\ x \in C \setminus D$

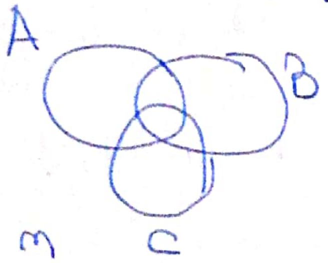
$\{2\} \subseteq A \cap B \subseteq \{2,4,5\}$

Principiul includerii și excluderii

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^{n-1} \left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|$$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n$

Dem. prin. ind. matem.

Pas inducție: $\left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cup A_n\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right| + |A_n| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n\right|$

$\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) \cap A_n = \bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)$

$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

Scanned with CamScanner

5. Se dă mulțimea $\{1,2,\dots,n\}=A$.

a. Câți multipli de 5 sunt în A?

b. Câte nr. din A sunt divizibile cu 2 și 3? Dar cu 2 sau 3?

c. Câte nr. din A nu sunt divizibile cu 2 sau 5?

Rez:

a. $\left[\frac{n}{5}\right]\left(=\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor\right)$

b. 2 și 3 : $\left[\frac{n}{6}\right]$

2 sau 3 : $\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]-\left[\frac{n}{6}\right]$

c. $k=\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{5}\right]-\left[\frac{n}{10}\right]$ nr. div. cu 2 sau 5

Val. cerută $n-k$.

6. Câte nr. de forma x^2, x^3 sau x^5 se află în mulțimea $\{1,2,\dots,10^6\}$?

Rez:

A: $x^2\le 10^6 \Rightarrow x\le 1000$ – 1000 nr.

B: $x^3\le 10^6 \Rightarrow x\le 100$ – 100 nr.

C: $x^5\le 10^6 \Rightarrow x\le 15$ – 15 nr.

$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$

$A\cap B$: $x^6 \Rightarrow |A\cap B|=10$

$A\cap C$: $x^{10} \Rightarrow |A\cap C|=3$

$x^{10}\le 10^6 \Leftrightarrow x^5\le 10^3 \Rightarrow$

$B\cap C$: $x^{15}\le 10^6 \Rightarrow x^5\le 10^2 \Rightarrow |B\cap C|=2$

$A\cap B\cap C$: $x^{30}\le 10^6 \Rightarrow x^5\le 1 \Rightarrow$ 1 nr.

$|A\cup B\cup C|=1000+100+15-10-3-2+1=1101$

7. Din 40 elevi, 14 au preocupări pentru matematică, 16 pt. info și 11 pt. fizică. De asemenea, 7 au preocupări pt. mate și info, 8 pt. info și fizică 5 pt. mate și fizică, iar 4 pt. toate cele 3 materii.

a. Câți nu au preocupări pt. mate, info sau fizică?

b. Câți au preocupări pt. mate și info, dar nu și fizică?

a. $40 - |M \cup I \cup F|$

$|M \cup I \cup F| = 14 + 16 + 11 - 7 - 8 - 5 + 4 = 25$

$40 - 25 = 15$

b. $7 - 4 = 3$.