Seminar 5 - 113

Legi de compoziție. Grupuri

Ex. 1: Pe $\mathbb{R}$ definim legea de comp:

$x*y = x+y-xy$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Arătați că „$*$" este asoc., comutativă și are elem. neutru. Det. elem. simetrizabile.

Rez:

Asociativitate: $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $x*(y*z) = (x*y)*z$

Comutativitate: $\forall x,y \in \mathbb{R}$, $x*y = y*x$.

Element neutru: $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x*e = e*x = x$

$x*e = x \Rightarrow x+e-x\cdot e = x \Rightarrow e(1-x) = 0 \Rightarrow e = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Elemente simetrizabile: $x \in \mathbb{R}$ $\exists y \in \mathbb{R}$ a.î. $x*y = y*x = e$

$x*y = e \Rightarrow x+y-xy = 0 \Rightarrow y(1-x) = -x \Rightarrow y = \frac{x}{x-1}$

$1*y = 1+y-y = 1$ $\forall y$. $\qquad \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Obs: $(\mathbb{R}, *)$ este monoid comutativ

$(\mathbb{R}\setminus\{1\}, *)$ este grup abelian?

$x*y = (x-1)(y-1)+1 = 1 \quad (\Leftrightarrow) (x-1)(y-1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ sau $y = 1$

Ex. 2: Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de comp:

$x*y = x+2y$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$. Să se studieze proprietățile legii.

Rez:

Asoc.: NU

Com.: NU

Elem. neutru: $x*e = e*x = x$

$\begin{cases} x+2e = x & \forall x \\ e+2x = x \end{cases}$ Nu are elem. neutru

$(x*y)*z = (x+2y)*z = x+2y+2z$

$x*(y*z) = x+2(y+2z) = x+2y+4z$

(T) $\forall a \in \mathbb{R}$ se consideră șirul $(a_n)_{n\geq1}$ dat prin $a_1 = a$, $a_n = a * a_{n-1}$. Calculați a_2, a_3 și a_n. ($*$ legea de la Ex. 2)

Scanned with CamScanner

Ex. 3: Pe $[0,\infty)$ definim legea de comp:

$$x \top y = \frac{x+y+|x-y|}{2}, \quad \forall x,y \in [0,\infty).$$

Să se studieze propr. legii.

Rez.:

Asoc.: $(x \top y) \top z = x \top (y \top z)$

(*) cazuri

$$\frac{x+y+|x-y|+2z+|x+y+|x-y|-2z|}{2} =$$

$$= \frac{2x+y+z+|y-z|+|y+z+|y-z|-2x|}{2}$$

$x>y>z, \quad x>z>y \ldots$

Com.: OK.

Elem. neutru:

$x \top y \geq 0$. (Parte stabilă).

$\underbrace{x}_{\geq 0}+\underbrace{y}_{\geq 0}+\underbrace{|x-y|}_{\geq 0} \geq 0$

$x \top e = e \top x = x, \quad e \in [0,\infty)^{\geq 0}$

$x+e+|x-e| = 2x \Rightarrow |x-e| = x-e \Rightarrow x \geq e, \ \forall x \in [0,\infty)$

$\Rightarrow e = 0.$

Elem. simetrizabile:

$x \top y = y \top x = 0$

$x+y+|x-y| = 0$

$\underbrace{|x-y|}_{\geq 0} = \underbrace{-(x+y)}_{\leq 0} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} |x-y| = 0 \Rightarrow x = y \\ x+y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = y = 0.$

Sg. element simetrizabil este $e=0$.

Obs.: $x \top y = \max\{x, y\}$.

Ex. 4: Fie G un grup necomutativ. Dacă $a, b \in G$ a.î. $a^{-1}ba = b^{-1}$ și $b^{-1}ab = a^{-1}$, să se arate că $a^2b^2 = b^2a^2 = e$, $a^2 = b^2$ și $a^4 = b^4 = e$.

Rez:

Obs: Dacă G ar fi comutativ:

$a^{-1}ba = b^{-1} \Leftrightarrow b^2 = e$ $(a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow b = b^{-1} \Rightarrow b^2 = e)$

$b^{-1}ab = a^{-1} \Leftrightarrow a^2 = e$

$a^2b^2 = b^2a^2 = e$

$a \cdot | \, a^{-1}ba = b^{-1} \Rightarrow ba = ab^{-1}$

$b \cdot | \, ba = ab^{-1} \, | \cdot a$

$b^2a^2 = bab^{-1}a$

$b^{-1}ab = a^{-1} \Rightarrow b^{-1}a = a^{-1}b^{-1}$ $\Bigg\} \Rightarrow b^2a^2 = b\underbrace{aa^{-1}}_{e}b^{-1} = e.$

Analog se arată: $a^2b^2 = e$.

$a^2 = b^2$, $a^4 = b^4$ (ex)

Ex. 5: Fie mulțimea $M = \left\{ A(n) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, n \in \mathbb{Z} \right\}$.

Să se arate că:

a. $(M, \cdot)$ este grup, unde „$\cdot$" = înmulțirea matricelor

b. $(M, \cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z}, +)$

Def: Fie $(G, *)$, $(H, \circ)$ două grupuri și $f: G \to H$ o funcție. Spunem că f este morfism dacă $\forall g_1, g_2 \in G$, $f(g_1 * g_2) = f(g_1) \circ f(g_2)$ $(+ f(e_1) = e_2$, unde e_1 = elem. neutru al lui G, e_2 = elem. neutru al lui H$)$. Mai mult, f este izomorfism dacă este morfism bijectiv.

Rez:

a. Parte stabilă:

$$A(m)\cdot A(n)=\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & m+n\\ 0 & 1\end{pmatrix}=A(m+n)$$

- Asoc. : $A(m)\cdot A(n)\cdot A(p)=A(m+n+p)\ \forall m,n,p\in\mathbb{Z}$
- Com. : OK.
- Elem. neutru: $A(0)=I_2$.
- Elem. simetrizabile: $(A(m))^{-1}=A(-m)$, $\forall m\in\mathbb{Z}$.

b. Fie funcția $f:\mathbb{Z}\to M$, $f(m)=A(m)$, $\forall m\in\mathbb{Z}$.

- f morfism:

$f(m+n)=f(m)\cdot f(n) \Leftrightarrow A(m+n)=A(m)\cdot A(n)$ OK.

- f bijectivă: ex

Ex. 6: Pe $\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}$ definim legile de comp:

$x * y=(m+n, ab)$, unde $x=(\underset{\in\mathbb{Z}}{m},\underset{\in\mathbb{Q}}{a})$ și $y=(n,b)$.
$x\circ y=(mn, a+b)$

a. Să se studieze proprietățile celor 2 legi.

b. Studiați distributivitatea legii „o" față de „*".

Rez:

a. Asoc. + com. ex

Operațiile „*" și „o" împrumută propr. „+" și „·" pe mulțimile respective.

Elem. neutru: „*" : $e=(0,1)$

„o" : $e=(1,0)$

Elem. simetrizabile: „*" : $x=(m,\underset{\in\mathbb{Q}}{a})$, $x^{-1}=(-m,\underset{\in\mathbb{Q}}{\frac{1}{a}})$, $a\neq 0$.

$x\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Q}^*$

„o" : $x=(\underset{\in\mathbb{Z}}{m},a)$, $x^{-1}=(\underset{\in\mathbb{Z}}{\frac{1}{m}},-a)$

$\Rightarrow m\in\{-1,1\}$, $x\in\{-1,1\}\times\mathbb{Q}$.

b. $[\,a(b+c) = ab + ac\,]$

$x \circ (y * z) = (x \circ y) * (x \circ z)$

$x \circ y = (mn, a+b)$ $\qquad x = (m, a)$

$x * y = (m+n, ab)$ $\qquad y = (n, b)$

$\qquad z = (p, c)$

$x \circ (y * z) = x \circ (n+p, bc) = (\underline{m(n+p)}, \underline{a+bc})$

$(x \circ y) * (x \circ z) = (mn, a+b) * (mp, a+c) = (\underline{mn + mp}, \underline{(a+b)(a+c)})$

- distributivitatea „∘" față de „+"
- „distributivitatea" „+" față de „∘"

$\Rightarrow$ „∘" nu este distributivă față de „*".

Ex 8: Pe $\mathbb{R}$ definim legile:

$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ și $x \circ y = x + y + 1$.

a. Să se studieze propr. legilor

b. Să se rezolve sistemul: $\begin{cases} x * y = -1 \\ x \circ y = 0 \end{cases}$.

Rez:

a. Asoc. + com. (ex)

Elem. neutru:

„*": $x * e = e * x = x$

$\sqrt[3]{x^3 + e^3} = x \Rightarrow x^3 + e^3 = x^3$

$\Downarrow$

$\boxed{e = 0}$

„∘": $x \circ e = e \circ x = x$

$x + e + 1 = x \Rightarrow e = -1$.

Elem. simetrizabile:

„*" $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

$\sqrt[3]{x^3 + (x^{-1})^3} = 0 \Rightarrow x^{-1} = -x$.

„∘": $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = -1$

$x + x^{-1} + 1 = -1$

$\Rightarrow x^{-1} = -x - 2$.

b. $\begin{cases} x * y = -1 \\ x \circ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^3+y^3} = -1 \,\big|^3 \\ x+y+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3 = -1 \\ x+y+1=0. \end{cases}$

$x^3+y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y)$

$x+y=-1$

$\begin{cases} x+y = -1 \\ (-1)^3 - 3xy(\cdot -1) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -1\ (=s) \\ xy = 0 .=(p) \end{cases}$

$\begin{cases} x=t_1 \\ y=t_2 \end{cases}$ $\boxed{t^2 - st + p = 0}$ $\Rightarrow t^2+t=0 \Rightarrow t(t+1)=0$

sau $\begin{cases} x=0 \Rightarrow y=-1 \\ y=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$