Forma normală Skolem

Skolemizarea este o procedură prin care se elimină cuantificatorii existențiali din formule de ordinul întâi în formă normală prenex, prin introducerea de noi simboluri de funcții/constante, numite simboluri de funcții/constante Skolem.

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi și φ un enunț al lui $\mathcal{L}$ care este în formă normală prenex:

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \, \theta,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile distincte două câte două și θ este formulă liberă de cuantificatori.

Forma normală Skolem

Asociem lui φ un enunț universal φ^{Sk} într-un limbaj extins $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$:
Dacă φ este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi$ și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = \mathcal{L}$.
Altfel, φ are una din formele:

- $\varphi = \exists x \, \psi$. Introducem un nou simbol de constantă c și considerăm $\varphi^1 = \psi_x(c)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{c\}$.
- $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_k \exists x \, \psi$ $(k \geq 1)$. Introducem un nou simbol de funcție f de aritate k și considerăm $\varphi^1 = \forall x_1 \ldots \forall x_k \, \psi_x(fx_1 \ldots x_k)$, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L} \cup \{f\}$.

În ambele cazuri, φ^1 are cu un cuantificator existențial mai puțin decât φ.
Dacă φ^1 este liberă de cuantificatori sau universală, atunci $\varphi^{Sk} = \varphi^1$. Dacă φ^1 nu este universală, atunci formăm $\varphi^2, \varphi^3, \ldots,$ până ajungem la o formulă universală și aceasta este φ^{Sk}.

φ^{Sk} este o formă normală Skolem a lui φ.

Forma normală Skolem

Exemple

- Fie θ o formulă liberă de cuantificatori a.î. $FV(\theta) = \{x\}$ și $\varphi = \exists x \, \theta$. Atunci $\varphi^1 = \theta_x(c)$, unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț liber de cuantificatori, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \theta_x(c)$.
- Fie R un simbol de relație de aritate 3 și $\varphi = \exists x \forall y \forall z \, R(x, y, z)$. Atunci
$$\varphi^1 = \forall y \forall z \, (R(x, y, z))_x(c) = \forall y \forall z \, R(c, y, z),$$
unde c este un nou simbol de constantă. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y \forall z \, P(c, y, z)$.
- Fie P un simbol de relație de aritate 2 și $\varphi = \forall y \exists z \, P(y, z)$. Atunci $\varphi^1 = \forall y \, (P(y, z))_z(f(y)) = \forall y \, P(y, f(y))$, unde f este un simbol nou de funcție unară. Deoarece φ^1 este un enunț universal, rezultă că $\varphi^{Sk} = \varphi^1 = \forall y \, P(y, f(y))$.

Forma normală Skolem

Exemplu

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj care conține un simbol de relație binară R și un simbol de funcție unară f. Fie

$$\varphi := \forall y \exists z \forall u \exists v \, (R(y, z) \wedge f(u) = v).$$

$$\begin{aligned}
\varphi^1 &= \forall y \forall u \exists v \, (R(y, z) \wedge f(u) = v)_z(g(y)) \\
&= \forall y \forall u \exists v \, (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v), \\
& \text{ unde } g \text{ este un nou simbol de funcție unară} \\
\varphi^2 &= \forall y \forall u \, (R(y, g(y)) \wedge f(u) = v)_v(h(y, u)) \\
&= \forall y \forall u \, (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)), \\
& \text{ unde } h \text{ este un nou simbol de funcție binară.}
\end{aligned}$$

Deoarece φ^2 este un enunț universal, rezultă că
$$\varphi^{Sk} = \varphi^2 = \forall y \forall u \, (R(y, g(y)) \wedge f(u) = h(y, u)).$$

Forma normală Skolem

Teorema 2.43 (Teorema de formă normală Skolem)

Fie φ un enunț în formă normală prenex.

(i) $\vDash \varphi^{Sk} \to \varphi$, *deci* $\varphi^{Sk} \vDash \varphi$ *în* $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

(ii) φ *este satisfiabilă ddacă* φ^{Sk} *este satisfiabilă.*

Dem.:

(i) Se aplică faptul că $\vDash \varphi_x(t) \to \exists x\varphi$, $\vDash \varphi$ implică $\vDash \forall x\varphi$ și $\vDash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$ pentru a conclude că $\vDash \varphi^1 \to \varphi$, $\vDash \varphi^2 \to \varphi^1$, etc..

(ii) "$\Leftarrow$" Se aplică (i). "$\Rightarrow$" Exercițiu suplimentar. $\square$

Forma normală Skolem

Observație

În general, φ și φ^{sk} nu sunt logic echivalente ca enunțuri în $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$.

Dem.: Fie $\mathcal{L} = (R)$, unde R este simbol de relație binară și $\varphi = \forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2)$. Atunci $\varphi^{Sk} = \forall v_1 R(v_1, f(v_1))$ (unde f este un nou simbol de funcție unară) și $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi) = (f, R)$. Fie $\mathcal{L}^{Sk}(\varphi)$-structura $\mathcal{A} = (\mathbb{Z}, <, f^{\mathcal{A}})$, unde $f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Atunci $\mathcal{A} \vDash \varphi$, deoarece pentru orice număr întreg m există un număr întreg n a.î. $m < n$. Pe de altă parte, $\mathcal{A} \nvDash \varphi^{Sk}$, deoarece pentru orice $n \in \mathbb{Z}$, avem că $n \geq f^{\mathcal{A}}(n) = n - 1$. $\square$

Mulțimi de enunțuri

Fie φ enunț al lui $\mathcal{L}$ și Γ o mulțime de enunțuri.

Definiția 2.44

Spunem că Γ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \gamma \text{ pentru orice } \gamma \in \Gamma.$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ este un model al lui Γ. Notație: $\mathcal{A} \vDash \Gamma$

Definiția 2.45

Spunem că φ este consecință semantică a lui Γ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \Gamma \implies \mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\Gamma \vDash \varphi$

Mulțimi de enunțuri

Notație: Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, notăm

$$Mod(\Gamma) := \text{clasa modelelor lui } \Gamma.$$

Notăm $Mod(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

Lema 2.46

Pentru orice mulțimi de enunțuri Γ, Δ și orice enunț ψ,

(i) $\Gamma \vDash \psi \iff Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\psi)$.

(ii) $\Gamma \subseteq \Delta \implies Mod(\Delta) \subseteq Mod(\Gamma)$.

(iii) Γ *este satisfiabilă* $\iff Mod(\Gamma) \neq \emptyset$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Teorii

Definiția 2.47

O $\mathcal{L}$-teorie este o mulțime T de enunțuri ale lui $\mathcal{L}$ care este închisă la consecința semantică, adică:

$$\text{pentru orice enunț } \varphi, \quad T \vDash \varphi \implies \varphi \in T.$$

Definiția 2.48

Pentru orice mulțime de enunțuri Γ, teoria generată de Γ este mulțimea

$$\begin{aligned} Th(\Gamma) &:= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } \Gamma \vDash \varphi\} \\ &= \{\varphi \mid \varphi \text{ este enunț și } Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)\}. \end{aligned}$$

Teorii

Propoziția 2.49

(i) $Mod(\Gamma) = Mod(Th(\Gamma))$.

(ii) $Th(\Gamma)$ este cea mai mică teorie T a.î. $\Gamma \subseteq T$.

Dem.: Exercițiu.

- O teorie prezentată ca $Th(\Gamma)$ se numește teorie axiomatică sau teorie prezentată axiomatic. Γ se numește mulțime de axiome pentru $Th(\Gamma)$.
- Orice teorie poate fi prezentată axiomatic, dar suntem interesați de mulțimi de axiome care satisfac anumite condiții.

Teorii

Definiția 2.50

O teorie T este finit axiomatizabilă dacă $T = Th(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri finită Γ.

Definiția 2.51

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime de enunțuri Γ. Spunem și că Γ axiomatizează $\mathcal{K}$.

Definiția 2.52

O clasă $\mathcal{K}$ de $\mathcal{L}$-structuri este finit axiomatizabilă dacă $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$ pentru o mulțime finită de enunțuri Γ.

Exemple - Teoria grafurilor

Un graf este o pereche $G = (V, E)$ de mulțimi a.î. E este o mulțime de submulțimi cu 2 elemente ale lui V. Elementele lui V se numesc vârfuri, iar elementele lui E se numesc muchii.

- $\mathcal{L}_{Graf} = (\dot{E}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{E})$
- $\mathcal{L}_{Graf}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, E)$, unde E este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (SIM)\}$, unde

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg \dot{E}(x, x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (\dot{E}(x, y) \to \dot{E}(y, x)). \end{aligned}$$

Definiție

Teoria grafurilor este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt grafurile.
- Γ axiomatizează clasa grafurilor. Prin urmare, clasa grafurilor este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii parțiale

- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}} = (\dot{\leq}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{\leq})$
- $\mathcal{L}_{\dot{\leq}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \leq)$, unde $\leq$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (ANTISIM), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{aligned} (REFL) &:= \forall x (x \dot{\leq} x) \\ (ANTISIM) &:= \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} x \rightarrow x = y) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{\leq} y \wedge y \dot{\leq} z \rightarrow x \dot{\leq} z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii parțiale este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile parțial ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor parțial ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor parțial ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii totale

Fie $\Gamma := \{(ANTISIM), (TRANZ), (TOTAL)\}$, unde

$$(TOTAL) := \forall x \forall y (x \dot{\leq} y \vee y \dot{\leq} x)$$

Definiție

Teoria ordinii totale este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile total ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor total ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor total ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii stricte

- $\mathcal{L}_{\dot{<}} = (\dot{<}, \emptyset, \emptyset) = (\dot{<})$
- $\mathcal{L}_{\dot{<}}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, <)$, unde $<$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{aligned} (IREFL) &:= \forall x \neg (x \dot{<} x) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot{<} y \wedge y \dot{<} z \rightarrow x \dot{<} z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii stricte este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile strict ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor strict ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor strict ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria ordinii dense

Fie $\Gamma := \{(IREFL), (TRANZ), (TOTAL), (DENS)\}$, unde

$$\begin{aligned} (TOTAL) &:= \forall x \forall y (x = y \vee x \dot{<} y \vee y \dot{<} x) \\ (DENS) &:= \forall x \forall y \big(x \dot{<} y \rightarrow \exists z (x \dot{<} z \wedge z \dot{<} y)\big). \end{aligned}$$

Definiție

Teoria ordinii dense este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- modelele lui T sunt mulțimile dens ordonate.
- Γ axiomatizează clasa mulțimilor dens ordonate. Prin urmare, clasa mulțimilor dens ordonate este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- $\mathcal{L}_{\dot\equiv} = (\dot\equiv, \emptyset, \emptyset) = (\dot\equiv)$
- $\mathcal{L}_{\dot\equiv}$-structurile sunt $\mathcal{A} = (A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație binară.

Fie $\Gamma := \{(REFL), (SIM), (TRANZ)\}$, unde

$$\begin{aligned} (REFL) &:= \forall x (x \dot\equiv x) \\ (SIM) &:= \forall x \forall y (x \dot\equiv y \to y \dot\equiv x) \\ (TRANZ) &:= \forall x \forall y \forall z (x \dot\equiv y \land y \dot\equiv z \to x \dot\equiv z) \end{aligned}$$

Definiție

Teoria relațiilor de echivalență este $T := Th(\Gamma)$.

- T este finit axiomatizabilă.
- Fie $\mathcal{K}$ clasa structurilor $(A, \equiv)$, unde $\equiv$ este relație de echivalență pe A.
- $\mathcal{K} = Mod(\Gamma)$, așadar Γ axiomatizează $\mathcal{K}$. Prin urmare, $\mathcal{K}$ este finit axiomatizabilă.

Exemple - Teoria relațiilor de echivalență

- Dacă adăugăm axioma:

$$\forall x \exists y (\neg(x = y) \land x \dot\equiv y \land \forall z (z \dot\equiv x \to (z = x \lor z = y))),$$

obținem teoria relațiilor de echivalență cu proprietatea că orice clasă de echivalență are exact două elemente.

Exemple - Teoria egalității

Pentru orice $n \geq 2$, notăm următorul enunț cu $\exists^{\geq n}$:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n (\neg(x_1 = x_2) \land \neg(x_1 = x_3) \land \ldots \land \neg(x_{n-1} = x_n)),$$

pe care îl scriem mai compact astfel:

$$\exists^{\geq n} = \exists x_1 \ldots \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \right).$$

Propoziția 2.53

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\mathcal{A} \vDash \exists^{\geq n} \iff A \text{ are cel puțin } n \text{ elemente.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Exemple - Teoria egalității

Notații

- Pentru uniformitate, notăm $\exists^{\geq 1} := \exists x (x = x)$.
- $\exists^{\leq n} := \neg \exists^{\geq n+1}$
- $\exists^{= n} := \exists^{\leq n} \land \exists^{\geq n}$

Propoziția 2.54

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \exists^{\leq n} &\iff A \text{ are cel mult } n \text{ elemente} \\ \mathcal{A} \vDash \exists^{= n} &\iff A \text{ are exact } n \text{ elemente.} \end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Propoziția 2.55

Fie $T := Th(\{\exists^{\geq n} \mid n \geq 1\})$. Atunci pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash T \iff A \text{ este mulțime infinită.}$$

Dem.: Exercițiu ușor.