$f^{-1}(\{0,1\}) = [0,1]$ $\quad x\in A$ sau $y = f(z)$, $z\in B$ $\Rightarrow y \in f(A\cup B)$

Continuare Curs 3 funcții speciale

(18.10.2021)

5) Fct parte întreagă ($\lfloor x\rfloor$, $\lceil x\rceil$) $[x]$ → fct parte fracționară $\{x\}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ $\quad f(x) = [x]$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$g: \mathbb{R} \to [0,1)$ $\quad g(x) = \{x\}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$x = [x] + \{x\}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}$

6) Dacă $A = \{1,2 \ldots n\}$ atunci $S_n = \{f \mid f:\{1,2\ldots n\} \to \{1,2\ldots n\}, f - \text{bij}\}$

$f\in S_n$ permutare a mulțimii $\{1,2\ldots n\}$

$(|S_n| = n!)$ (ind matem)

Obs $(S_n, \circ) \to$ grup (neabelian pt $n\geq 3$) $\forall n\geq 1$

$\circ$ op de compunere a fct

Orice grup finit $(G,*)$ poate fi "scufundat" într-un $(S_n,\circ)$. (există un morfism injectiv de la $(G,*)$ în $(S_n,\circ)$)

↳ Thm Cayley

Proprietăți. Fie $f, f': A\to B$ și $g, g': B\to C$. Atunci

① f, g injective $\Rightarrow g\circ f$ e inj

② f, g surj $\Rightarrow g\circ f$ e surj

③ f, g bij $\Rightarrow g\circ f$ bij

④ $g\circ f$ injectivă $\Rightarrow f$ e injectivă

⑤ $g\circ f$ surj $\Rightarrow g$ e surj

⑥ $g\circ f$ bijectivă $\Rightarrow g$ e surj și f e inj

Dați exemple de g, f a.î. $g\circ f$ e inj și g nu e inj

$g\circ f$ e surj și f nu e surj

Dem ① + ② $\Rightarrow$ ③ $\quad$ ④ + ⑤ $\Rightarrow$ ⑥

⑤ $g \circ f$ e surj. Vr să arăt că g e surj $\Leftrightarrow$ Img = C

Fie $c \in C$. Deoarece $g\circ f : A \to C$ e surj

$\Rightarrow \exists\, a \in A$ a.î. $(g\circ f)(a) = c$

$g(f(a)) = c$

$f(a) = b \in B$ ($f: A \to B$ fct)

$g(b) = c \Rightarrow g$ e surj

<u>Prop</u> Fie $f: A \to B$ o fcție. Atunci f e bij $\Leftrightarrow$
$(\exists)$ o fct $g: B \to A$ a.î. $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$
(pt o mulț C, $1_C : C \to C$)
funcția identitate

$1_C(x) = x \;\; \forall\, x \in C$

<u>Obs</u> Dacă f este bij, atunci fct g (de mai sus) este unică; g s.n <u>inversa lui f</u> și s.n cu f^{-1}

<u>Propr</u>: Fie $f: A \to B$ funcție, $X, W \subseteq A$ și $Y, Z \subseteq B$. At

① $X \subseteq W \Rightarrow f(X) \subseteq f(W)$

② $Y \subseteq Z \Rightarrow f^{-1}(Y) \subseteq f^{-1}(Z)$

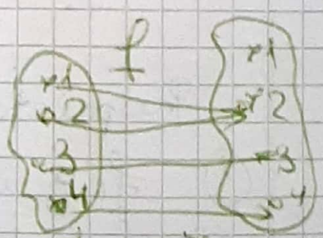
③ $f(X \cup W) = f(X) \cup f(W)$

④ $f(X \cap W) \subseteq f(X) \cap f(W)$ (cu egalitate de f e inj)

⑤ $f^{-1}(Y \cup Z) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Z)$

⑥ $f^{-1}(Y \cap Z) = f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Z)$

⑦ $f^{-1}(f(X)) \supseteq X$
↳ cu egalitate dacă f e inj



$X = \{2,3\}$
$f(X) = \{2,3\}$
$f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(\{2,3\})$
$\{1,2,3\}$
$\supsetneq X$
$\{2,3\}$

⑧ $f(f^{-1}(Y)) \subseteq Y$
(cu egalitate dacă f e surj)

$Y = \{1,2,3\}$

unde $f(X) = \{f(a) \mid a \in X\}$

$f^{-1}(Y) = \{1,2,3\}$

$\operatorname{Im} f = f(A)$

$f(f^{-1}(Y)) = f(\{1,2,3\}) = \{2,3\} \subsetneq Y$

și $f^{-1}(Y) \overset{def}{=} \{a \in A \mid f(a) \in Y\} \to$ preimaginea lui Y

Scanned with CamScanner

prin f

Comentariu: Preimaginea unei submulțimi a codomeniului prin funcția f există întotdeauna (a nu se confunda $f^{-1}(y)$ cu "obligativitatea" ca f^{-1} să fie inversa lui f, adică f să fie bij)

$\boxed{\text{Obs}}$ Fie $f: A \to B$ fct bij și $f^{-1}: B \to A$ inversa

$f^{-1}(y)$ — preimag lui y prin f

$f^{-1}(y) = \{f^{-1}(b) \mid b \in y\}$ — imaginea lui y prin f^{-1}

$a \in A \quad \underset{b}{\underset{\|}{f(a)}} \in y \overset{f}{\underset{bij}{\Longrightarrow}} a = f^{-1}(b)$

→ vladou@fmi.unibuc.ro

Ex Fie M, N 2 mulțimi finite.
Calc nr fct inj def pe M cu val în N
surj
bij
strict cresc
strict descresc

Def 1) Spunem că 2 mulțimi A și B s.n echipotente (sau au ac cardinal) dacă $\exists f: A \to B$ bijecție
Scriem $|A| = |B|$ dacă A, B au ac ~~nr de elemente~~ cardinal.

Obs 1) 2 mulțimi sunt finite A, B sunt echipotente
$\iff$ A, B au ac număr de elemente
(Dc $|A| = |B| = n \Rightarrow |\{f \mid f: A \to B,\ f - \text{bijecție}\}| = n!$)

2) O mulțime echipotentă cu $\mathbb{N}$ s.n mulțime numărabilă (prin construcție axiomatică $\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \ldots\}$, noi vom nota $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$)

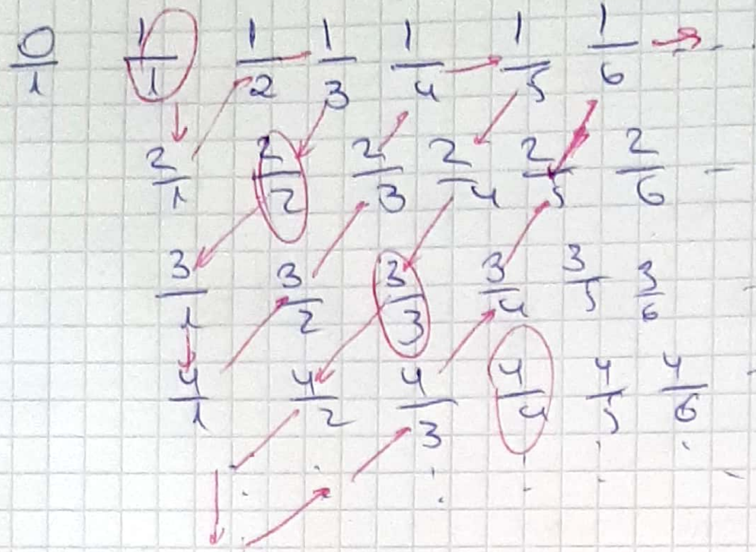
Exemple 1) $\mathbb{Z}$ este numărabilă

$f: \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ f bijecție $\quad f(x) = \begin{cases} 2x, & x \geq 0 \\ 2|x| - 1, & x < 0 \end{cases}$

Scanned with CamScanner

② $\mathbb{Q}$ este numărabilă (vezi că $\mathbb{Q}_+$ este numărabilă)

2000 (Calkin – Wilf) → au dat bijecția dintre $\mathbb{N}$ și $\mathbb{Q}_+^*$



$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}_+$

f surj

$f(0)=\frac{0}{1}$ $f(1)=\frac{1}{1}$

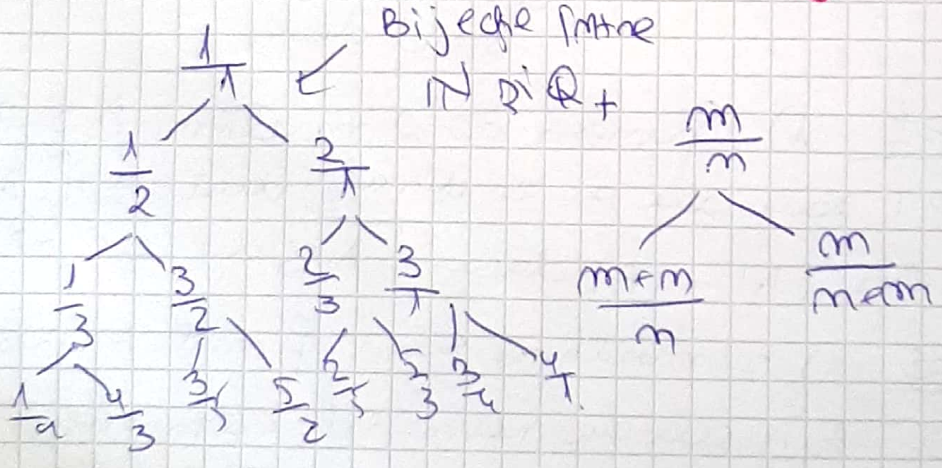
$f(2)=\frac{2}{1}$ $f(3)=\frac{1}{2}$

$f(4)=\frac{1}{3}$

$f(5)=\frac{2}{2}$ ...

Exc $f:A\to B$ surj $\Leftrightarrow \exists\ g:B\to A$ a.î. $g\circ f=1_B$

$f:A\to B$ inj $\Leftrightarrow \exists\ h:B\to A$ a.î. $h\circ f=1_A$



Def Fie A, B 2 mulțimi. Spunem că $|A|\le|B|$ dc $\exists\ f:A\to B$ injectivă. Dacă $|A|\le|B|$ și A și B nu sunt echipotente atunci $|A|<|B|$

Obs 1) $|\mathbb{N}|<|\mathbb{R}|$ ($\mathbb{R}$ nu e numărabilă)

2) $|\mathbb{N}|=|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Q}|<|\mathbb{R}|=|\mathbb{C}|$

3) Orice mulțime infinită conține o copie a lui $\mathbb{N}$ i.e. $\exists\ f:\mathbb{N}\to A$ inj $|\mathbb{N}|\le|A|$ $\forall$ A inf.

4) $\forall$ A mulțime $|A| < |P(A)|$ $(\mathbb{R} \simeq 2^{\mathbb{N}})$
bijecție

Thm (Cantor-Bernstein) Fie A, B 2 mulțimi. Avem $|A| = |B| \Leftrightarrow |A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|$ (adică 2 mulțimi sunt echipotente (există bijecție $f: A \to B$) $\Leftrightarrow$ găsesc fcție inj $g: A \to B$ și $h: B \to A$)

Obs (*) fct f constr $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ surj $\Rightarrow$
$\exists\, g: \mathbb{Q}_+ \to \mathbb{N}$ inj. Cum $i: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ este inj
$i(n) = n$

Thm Cantor-Bernstein $(\exists)\ h: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_+$ bijecție

$\Rightarrow \mathbb{Q}_+$ e numărabilă