# CURSUL 8: GRUPURI DE PERMUTĂRI

SAI

## 1. Grupuri de permutări

Reamintim că, dată fiind o mulţime nevidă $A$,

$$S_A = \{f \in A^A \mid f \text{este bijectivă}\}$$

este grup în raport cu operaţia de compunere.

Noi vom face în acest curs referire la grupurile $S_n \overset{\text{not}}{=} S_{\{1,2,\ldots,n\}}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

**Observaţia 1.** Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $|S_n| = n!$.

**Observaţia 2.** $S_n$ este ciclic pentru $n \in \{1, 2\}$.
$S_n$ este necomutativ pentru orice $n \geq 3$.

## 2. Descompuneri ale permutărilor

**Definiţia 3.** O permutare $\sigma \in S_n$ se numeşte *ciclu* dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ şi $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ astfel încât $\sigma(i_r) = i_{r+1}$ pentru orice $r \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, $\sigma(i_k) = i_1$, iar $\sigma(j) = j$ pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, n\} \backslash \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$. Notăm un astfel de ciclu prin $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, numărul $k$ se numeşte *lungimea* ciclului, iar mulţimea $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ poartă numele de *orbita* ciclului.

**Observaţia 4.** $(i_1, i_2, \ldots, i_k)^{-1} = (i_k, i_{k-1}, \ldots, i_1)$.

**Observaţia 5.** Permutarea inversă unui ciclu este tot un ciclu!

**Definiţia 6.** Numim *transpoziţie* orice ciclu de lungime doi.

**Observaţia 7.** $(i_1, i_2, \ldots, i_k) = (i_1, i_2)(i_2, i_3) \ldots (i_{k-1}, i_k)$, deci orice ciclu este produs de transpoziţii.

**Definiţia 8.** Două cicluri din $S_n$ se numesc *disjuncte* dacă orbitele lor sunt disjuncte.

**Propoziţia 9.** Orice două cicluri disjuncte comută.

*Demonstraţie:* Fie $c_1, c_2 \in S_n$ două cicluri disjuncte şi $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Întrucât orbitele ciclurilor considerate sunt disjuncte, $i$ nu poate aparţine ambelor orbite.

Dacă $c_1(i) = i$, atunci $(c_1c_2)(i) = c_1(c_2(i)) = c_2(i) = c_2(c_1(i)) = (c_2c_1)(i)$.
Dacă $c_2(i) = i$, atunci $(c_2c_1)(i) = c_2(c_1(i)) = c_1(i) = c_1(c_2(i)) = (c_1c_2)(i)$. $\square$

**Observaţia 10.** Calcule similare celor din demonstraţia propoziţiei 9 conduc la concluzia că pentru orice cicluri disjuncte[1] $c_1, c_2, \ldots, c_r$ şi pentru orice $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ există $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ astfel încât $(c_1c_2 \ldots c_r)(k) = c_j(k)$.

**Teorema 11.** Orice permutare din $S_n$ se poate scrie ca produs de cicluri disjuncte. Abstracţie făcând de ordinea factorilor, această scriere este unică.

*Demonstraţie:* Pentru $\sigma \in S_n$ notăm $\mathcal{M}_\sigma = \{k : \sigma(k) \neq k\}$. Vom demonstra prin inducţie după $m = |\mathcal{M}_\sigma|$ că orice permutare $\sigma$ se poate scrie în mod unic ca produs de cicluri disjuncte ale căror orbite sunt conţinute în $\mathcal{M}_\sigma$.
Dacă $e = c_1c_2 \ldots c_r$ cu factorii din membrul drept cicluri disjuncte, atunci, conform observaţiei 10, $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = e$. Acest lucru probează afirmaţia teoremei pentru $m = 0$.
Să considerăm acum o permutare $\sigma \in S_n$ cu $m = |\mathcal{M}_\sigma| > 0$. Există atunci $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ cu $\sigma(k) \neq k$. Cum $k_\sigma \overset{\text{def}}{=} \{\sigma(k), \sigma^2(k), \ldots\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$, $k_\sigma$ este finită, deci există $i < j$ astfel încât $\sigma^i(k) = \sigma^j(k)$, de unde $\sigma^{j-i}(k) = k$. Prin urmare, $\{t \in \mathbb{N}^* : \sigma^t(k) = k\} \neq \emptyset$; fie $s$ cel mai mic element al acestei mulţimi. Este uşor de probat (temă!) relaţia $k_\sigma = \{k, \sigma(k), \ldots, \sigma^{s-1}(k)\}$; punând $c \overset{\text{not}}{=} (k, \sigma(k), \ldots, \sigma^{s-1}(k))$, constatăm că avem $\mathcal{M}_{c^{-1}\sigma} \subset \mathcal{M}_\sigma \setminus \{k\}$, deci $|\mathcal{M}_{c^{-1}\sigma}| < |\mathcal{M}_\sigma|$. Conform ipotezei de inducţie, $c^{-1}\sigma$ se scrie ca un produs $c_1c_2 \ldots c_r$ de cicluri disjuncte cu orbitele conţinute în $\mathcal{M}_{c^{-1}\sigma}$; drept urmare, $cc_1c_2 \ldots c_r$ este o descompunere a lui $\sigma$ în produs de cicluri disjuncte cu orbitele incluse în $\mathcal{M}_\sigma$.
Pentru partea de unicitate, păstrând semnificaţiile de mai sus pentru $k$ şi $c, c_1, \ldots, c_r$, considerăm şi scrierea $\sigma = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_t$ ca produs de cicluri disjuncte. Având în vedere observaţia 10, există $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pentru care $\sigma(k) = \gamma_j(k)$. După o eventuală renumerotare, putem considera că $j = 1$. Ciclurile $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ fiind disjuncte, $c^u(k) = \sigma^u(k) = \gamma_1^u(k)$ pentru orice $u \in \mathbb{Z}$, de unde $\gamma_1 = c$. Compunând acum relaţia $cc_1c_2 \ldots c_r = \gamma_1\gamma_2 \ldots \gamma_t$ cu $c^{-1}$, obţinem $c_1c_2 \ldots c_r = \gamma_2\gamma_3 \ldots \gamma_t$.

[1] sau chiar permutări arbitrare disjuncte, noţiunea definindu-se ca şi în cazul ciclurilor

În virtutea ipotezei de inducţie, $\{c_1, c_2, \ldots, c_r\} = \{\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_t\}$. Ţinând cont şi de unicitatea deja probată a scrierii lui $e$, demonstraţia se încheie. $\square$

**Corolarul 12.** Orice permutare din $S_n$ se poate scrie ca produs de transpoziţii.

**Observaţia 13.** Spre deosebire de descompunerea în produs de cicluri disjuncte, descompunerea unei permutări în produs de transpoziţii nu este unică.

**Observaţia 14.** $S_n = \langle\{(i,j) : 1 \leq i < j \leq n\}\rangle$.

**Temă:** Demonstraţi că:
i) $S_n = \langle(1,2),(1,3),\ldots,(1,n)\rangle$.
ii) $S_n = \langle(1,2),(2,3),\ldots,(n-1,n)\rangle$.
iii) $S_n = \langle(1,2),(1,2,\ldots,n)\rangle$.

## 3. Permutări pare şi impare. Signatură

**Definiţia 15.** Fie $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$. O pereche $(i,j)$, unde $1 \leq i < j \leq n$ se numeşte *inversiune* a lui $\sigma$ dacă $\sigma(i) > \sigma(j)$.

**Definiţia 16.** Permutarea $\sigma \in S_n$ se numeşte *pară* dacă are un număr par de inversiuni; $\sigma$ se numeşte *impară* dacă are un număr impar de inversiuni.

**Propoziţia 17.** Orice transpoziţie este permutare impară.

*Demonstraţie:* Inversiunile transpoziţiei $(i,j)$, unde $1 \leq i < j \leq n$, sunt $(i,k)$, $k \in \{i+1, i+2, \ldots, j\}$ şi $(l,j)$, $l \in \{i+1, i+2, \ldots, j-1\}$; numărul acestora este $(j-i)+(j-1-i) = 2(j-i)-1$, care este impar. $\square$

**Definiţia 18.** Prin *signatura* permutării $\sigma \in S_n$, $n \geq 2$, înţelegem numărul

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}.$$

**Observaţia 19.** În produsul din definiţia 18 se simplifică de fapt toţi numitorii şi toţi numărătorii, la numărători rămânând câte un -1 de fiecare dată când $\sigma(j)-\sigma(i) < 0$. Prin urmare,

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\text{Numărul inversiunilor lui } \sigma}$$

**Corolarul 20.** a) $\sigma \in S_n$ este pară dacă şi numai dacă $\varepsilon(\sigma) = 1$.
b) $\sigma \in S_n$ este impară dacă şi numai dacă $\varepsilon(\sigma) = -1$.

**Propoziţia 21.** Pentru orice $\sigma, \tau \in S_n$ are loc relaţia $\varepsilon(\sigma\tau) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau)$.

**Corolarul 22.** $\varepsilon$ este morfism de grupuri de la $S_n$ la $(\{-1, 1\}, \cdot)$.

**Corolarul 23.** *i)* $\varepsilon(e) = 1$.
*ii)* Pentru orice $\sigma \in S_n$ avem $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$.

**Observaţia 24.** $\ker \varepsilon$ constă în permutările pare din $S_n$.

**Corolarul 25.** Permutările pare din $S_n$ constituie un subgrup normal al lui $S_n$.

**Notăm** subgrupul permutărilor pare din $S_n$ cu $A_n$.

**Definiţia 26.** $A_n$ se numeşte *grupul altern* de grad $n$.

**Corolarul 27.** $\dfrac{S_n}{A_n} \simeq \{-1, 1\}$.

*Demonstraţie:* Aplicăm corolarul 22, observaţia 24 şi teorema fundamentală de izomorfism pentru grupuri. $\square$

**Corolarul 28.** Pentru orice $n \geq 2$ avem $|A_n| = \dfrac{n!}{2}$.

**Corolarul 29.** i) Orice ciclu de lungime pară este impar.
ii) Orice ciclu de lungime impară este par.

*Demonstraţie:* Aplicăm observaţia 7 şi propoziţiile 17 şi 21. $\square$

## 4. Ordinul unei permutări

**Observaţia 30.** Ordinul oricărui ciclu este egal cu lungimea sa.

*Demonstraţie:* Considerând un ciclu $\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_k) \in S_n$, constatăm că $\sigma^j(i_1) = i_{j+1}$, deci $\sigma^j \neq e$, pentru orice $j < k$. Demonstraţia se încheie observând că $\sigma^k = e$. $\square$

**Corolarul 31.** Orice transpoziţie are ordinul 2.

**Propoziţia 32.** Ordinul unei permutări $\sigma \in S_n$ este egal cu cel mai mic multiplu comun al ordinelor ciclurilor disjuncte din descompunerea sa standard.

*Demonstraţie:* Fie $\sigma \in S_n$ şi $\sigma = c_1 c_2 \ldots c_r$ descompunerea acesteia în produs de cicluri disjuncte. Notăm $t_j = \text{ord } c_j$, $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, şi $m = [t_1, t_2, \ldots, t_r]$. Conform propoziţiei 9, avem $\sigma^t = c_1^t c_2^t \ldots c_r^t$ pentru orice $t \in \mathbb{Z}$. Prin urmare, $\sigma^m = e$, iar $\sigma^t = e$ dacă şi numai dacă $c_j^t = e$ pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ dacă şi numai dacă $\text{ord } c_j | t$ pentru orice $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ dacă şi numai dacă $m | t$. Afirmaţia este acum consecinţă a propoziţiei 30 din cursul 10. $\square$

## 5. Orice grup se scufundă într-un grup de permutări

Aşa cum arată şi titlul paragrafului, orice grup poate fi regăsit ca subgrup al unui grup de permutări. Acest lucru este consecinţă a următoarei teoreme a lui Cayley:

**Teorema 33.** Orice grup $G$ este izomorf cu un subgrup al lui $S_G$.

*Demonstraţie:* Considerăm funcţia $\varphi : G \to S_G$, $\varphi(g) = h_g$, unde $h_g : G \to G$, $h_g(x) = gx$. Întrucât $h_{g^{-1}} = h_g^{-1}$, $h_g$ este într-adevăr un element al lui $S_G$, deci $\varphi$ este corect definită.
Pentru $g, g', x \in G$ avem $h_{gg'}(x) = (gg')x = g(g'x) = h_g(h_{g'}(x)) = (h_g h_{g'})(x)$, de unde $h_{gg'} = h_g \circ h_{g'}$. De aici obţinem faptul că $\varphi$ este morfism de grupuri.
Dacă $g, g' \in G$ sunt astfel încât $h_g = h_{g'}$, atunci $g = h_g(e) = h_{g'}(e) = g'$, deci morfismul $\varphi$ este injectiv. $\square$

**Corolarul 34.** Orice grup cu $n$ elemente este izomorf cu un subgrup al lui $S_n$.

## Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] I. D. Ion, N. Radu, *Algebră*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.