Relații de echivalență

Def.: O relație „$\sim$" pe mulțimea A se numește RELAȚIE DE ECHIVALENȚĂ dacă îndeplinește simultan condițiile:

1. REFLEXIVITATE: $a \sim a$, $\forall a \in A$
2. SIMETRIE: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$, $\forall a, b \in A$
3. TRANZITIVITATE: $a \sim b$ și $b \sim c \Rightarrow a \sim c$, $\forall a, b, c \in A$.

Ex. 1: Verificați care dintre următoarele relații pe $\mathbb{R}$ sunt relații de echivalență pe $\mathbb{R}$:

a. $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

b. $x \sim y \Leftrightarrow |x - y| < 2$

c. $x \sim y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$.

Rez:

a. $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$

1. reflexivitatea:

$x - x = 0 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \sim x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

2. Simetria: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

$x \sim y \Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \Rightarrow -(x - y) \in \mathbb{Z} \Rightarrow y - x \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \sim x$.

3. tranzitivitatea: $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} x \sim y &\Rightarrow x - y \in \mathbb{Z} \\ y \sim z &\Rightarrow y - z \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x - y) + (y - z) \in \mathbb{Z} \Rightarrow \underbrace{x - z \in \mathbb{Z}}_{\Updownarrow \; x \sim z}$$

b. $x \sim y \Leftrightarrow |x - y| < 2$.

1. reflexivitatea: $x \sim x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$|x - x| = 0 < 2$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \sim x$.

2. Simetria: $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

$$\left.\begin{array}{l} |x-y| = |y-x| \\ |x-y| < 2 \end{array}\right\} \Rightarrow |y-x| < 2 \Rightarrow y \sim x.$$

3. tranzitivitatea: $x \sim y$ și $y \sim z \Rightarrow x \sim z$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

$x \sim y \Rightarrow |x-y| < 2$,

$y \sim z \Rightarrow |y-z| < 2$,

$x = 2$, $y = 1$, $z = 0$

$$\left(\begin{array}{l} |x-y| = 1 < 2 \\ |y-z| = 1 < 2 \end{array}\right.$$

$\cdot\ |x-z| = 2 < 2$ (F)

$\Rightarrow$ „$\sim$" nu este tranzitivă $\Rightarrow$ „$\sim$" nu este rel. de echiv.

c. $x \sim y \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$.

1. reflexivitate: $x \sim x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Nu este reflexivă.

$x = \sqrt{2}$,

$x + x = 2\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ „$\sim$" nu este rel. de echiv.

Ex. 2: Pe $\mathbb{C}$ definim relația „$\sim$" prin:

$z \sim w \Leftrightarrow z - w \in \mathbb{R}$

Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv.

Rez:

1. reflexivitate: $z \sim z$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

$z - z = 0 \in \mathbb{R}$.

2. simetrie: $z \sim w \Rightarrow w \sim z$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

$z - w \in \mathbb{R} \Rightarrow -(z - w) \in \mathbb{R} \Rightarrow w - z \in \mathbb{R}$.

3. tranzitivitate: $z \sim w$ și $w \sim v \Rightarrow z \sim v$, $\forall z, w, v \in \mathbb{C}$.

$$\left.\begin{array}{l} z \sim w \Rightarrow Im(z) = Im(w) \\ w \sim v \Rightarrow Im(w) = Im(v) \end{array}\right\} \Rightarrow Im(z) = Im(v) \Rightarrow z \sim v.$$

Ex. 3: Pe $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ definim relația:

$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow ad = bc$.

Arătați ca „$\sim$" este rel. de echivalență.

Rez:

1. reflexivă: $(a, b) \sim (a, b)$

$ab = ba$ OK

2. simetrică: $(a, b) \sim (c, d) \Rightarrow (c, d) \sim (a, b)$

$ad = bc \Rightarrow cb = da$ OK.

3. tranzitivă: $(a, b) \sim (c, d)$ și $(c, d) \sim (e, f) \Rightarrow (a, b) \sim (e, f)$

$$\left.\begin{array}{l} (a,b) \sim (c,d) \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \\ (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow cf = de \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \Rightarrow af = be.$$

$\Downarrow$

$(a, b) \sim (e, f)$.

Ex. 4: Fie A o mulțime nevidă și $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f: A \to A$. Pe $\mathcal{F}$ definim relația:

$$f \sim g \iff (\exists)\ u \in \mathcal{F} \text{ bijectivă a.î. } f \circ u = u \circ g.$$

Arătați „$\sim$" este rel. de echiv.

Rez:

1. reflexivă: $f \sim f$

$f \circ u = u \circ f$

$u = 1_A\ (= id_A)$ $\quad [1_A \in \mathcal{F}$ bij.$]$

$f \circ 1_A = 1_A \circ f = f.$

2. simetrică: $f \sim g \Rightarrow g \sim f$

$f \sim g \Rightarrow \exists u \in \mathcal{F}$ bij $\quad f \circ u = u \circ g.$

u bij $\Rightarrow u^{-1}$ inversa sa

$u^{-1} \circ \mid f \circ u = u \circ g \mid \circ u^{-1}$

$u^{-1} \circ f \circ \underbrace{u \circ u^{-1}}_{1_A} = \underbrace{u^{-1} \circ u}_{1_A} \circ g \circ u^{-1}$

$u^{-1} \circ f = g \circ u^{-1} \Rightarrow g \circ u^{-1} = u^{-1} \circ f \Rightarrow g \sim f$

3. tranzitivă: $f \sim g$ și $g \sim h \Rightarrow f \sim h$.

$f \sim g \Rightarrow \exists u \in \mathcal{F}$ bij a.î. $f \circ u = u \circ g \mid \circ v$

$g \sim h \Rightarrow \exists v \in \mathcal{F}$ bij. a.î. $u \circ \mid g \circ v = v \circ h$

$\underline{u \circ g \circ v} = u \circ v \circ h$

$f \circ u \circ v = \underline{u \circ g \circ v} \Rightarrow f \circ (u \circ v) = (u \circ v) \circ h$

$\Downarrow$

$f \sim h$

Din 1), 2) și 3) $\Rightarrow$ „$\sim$" este rel. de echiv.

Ex. 5: Fie A o mulțime infinită și $\mathcal{F}$ mulțimea funcțiilor $f:A\to A$. Pe $\mathcal{F}$ definim relația:

$f\sim g \Leftrightarrow$ mulțimea $D_{fg}=\{a\in A \mid f(a)\neq g(a)\}$ este finită.

Arătați că „$\sim$" este rel. de echiv.

Rez: $D_{fg}\subseteq A$

1. reflexivitate: $f\sim f$

$D_{ff}=\{a\in A \mid f(a)\neq f(a)\}=\emptyset$ finită

2. Simetrie: $f\sim g \Rightarrow g\sim f$

$D_{fg}=\{a\in A \mid f(a)\neq g(a)\}$ finită

$D_{gf}=D_{fg}$ finită $\Rightarrow g\sim f$

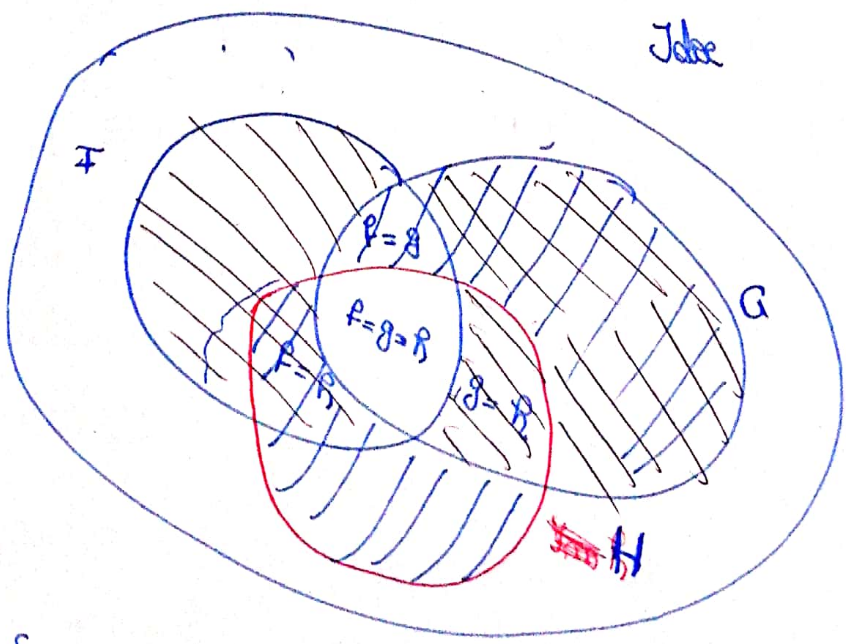
3. tranzitivitate: $f\sim g$ și $g\sim h \Rightarrow f\sim h$.

$D_{fg}=\{a\in A \mid f(a)\neq g(a)\}$ finită

$D_{gh}=\{b\in A \mid g(b)\neq h(b)\}$ finită

$D_{fh}=\{c\in A \mid f(c)\neq h(c)\}$.

Idee



$\{a\in A \mid f(a)=g(a)\}=C_A D_{fg}$

$(C_A D_{fg})\cap(C_A D_{gh})\subseteq(C_A D_{fh})$

$$\boxed{D_{fh} \subseteq D_{fg} \cup D_{gh}}$$

$D_{fg} = (F \cup G) \setminus (F \cap G) = (F \setminus (F \cap G)) \cup (G \setminus (F \cap G)) = (F \setminus G) \cup (G \setminus F)$

$D_{gh} = (G \cup H) \setminus (G \cap H) = (G \setminus (G \cap H)) \cup (H \setminus (G \cap H)) = (G \setminus H) \cup (H \setminus G)$

$D_{fh} = (F \cup H) \setminus (F \cap H) = (F \setminus (F \cap H)) \cup (H \setminus (F \cap H)) = (F \setminus H) \cup (H \setminus F)$

$D_{fh} \subseteq D_{fg} \cup D_{gh}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} D_{fg} \text{ finită} \\ D_{gh} \text{ finită} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{fg} \cup D_{gh} \text{ finită} \\ D_{fh} \subseteq D_{fg} \cup D_{gh} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{fh} \text{ finită}.$$

$$\boxed{D_{fh} \subseteq D_{fg} \cup D_{gh}}$$

Dem: $a \in D_{fh} \Rightarrow f(a) \neq h(a)$

Vrem $a \in D_{fg} \cup D_{gh} \Rightarrow f(a) \neq g(a)$ sau $g(a) \neq h(a)$

Pp. prin abs.

$f(a) = g(a)$ și $g(a) = h(a) \Rightarrow f(a) = h(a)$

Ex. $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(i,j) = \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j$ bijecție?

- injectivitate:

$f(i,j) = f(x,y) \Rightarrow \dfrac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j = \dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y$

$(i+j)(i+j+1) + 2j = (x+y)(x+y+1) + 2y$

$i^2 + ij + i + ij + j^2 + j + 2j = x^2 + xy + x + xy + y^2 + y + 2y$

$(i+j)^2 + i + 3j = (x+y)^2 + x + 3y$