Seminar 1

Not ① A - mulțime $\quad |A| \left(\overset{not}{=} card(A)\right) \overset{def}{=}$ nr. de elementele al unei mulțimi

A - mr. finită $\iff |A| < \infty$ (în caz contrar A infinită)

② A, B - mulțimi $\quad A \not\subset B \iff A \setminus B \neq \emptyset \iff (\exists)\, x \in A$ și $x \notin B$)

$A = B \iff (A \subseteq B$ și $B \subseteq A) \overset{OK}{\iff} (A \cap B = A$ și $A \cap B = B.)$

$\emptyset \subseteq A$ (mulțime)

Ex 1 $A := \left\{ x \mid x = \frac{a+1}{2a+1} \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \right\} = \mathbb{R} \setminus \{1/2\} =: B$

"$\subseteq$" $\quad \frac{a+1}{2a+1} = \frac{1}{2} \iff 2a+2 = 2a+1 \iff 0 = 1$ Fals $\Rightarrow A \subseteq B^{(1)} \left((\forall)\, x \in A,\ x \neq \frac{1}{2}\right)$

"$\supseteq$" Fie $b \in \mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ $\quad b = \frac{a+1}{2a+1} \iff 2ab + b = a + 1 \iff a(2b-1) = 1 - b$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{a = \frac{1-b}{2b-1}} \Rightarrow$$

$B \subseteq A \quad (2)$

Din (1) și (2) $\Rightarrow \underline{A = B}$

Ex. 2 $\underbrace{(3\mathbb{N}+2)}_{A} \cap \underbrace{(5\mathbb{N}+1)}_{B} = \underbrace{15\mathbb{N}+11}_{C}$

"$\supseteq$" Fie $a \in 15\mathbb{N} + 11$ $(a \in C)$ $\Rightarrow a = 15 \cdot m + 11$ pt. $m \in \mathbb{N}$.

$= 5(3m+2) + 1 \Rightarrow a \in B$

$= 3(5m+3) + 2 \Rightarrow a \in A$

$\Rightarrow C \subseteq A \cap B \quad (1)$

"$\subseteq$" Fie $a \in A \cap B \Rightarrow a = 3m+2 = 5n+1$ pt $n, m \in \mathbb{N}$
$(a \in A)$ $(a \in B)$

$3m+2 = 5n+1 \Rightarrow 3m = 5n-1 \Rightarrow 3 \mid 5n-1 \Rightarrow$

($n \in 3\mathbb{N}$ sau $n \in 3\mathbb{N}+1$ sau $n \in 3\mathbb{N}+2$)
$n = 3k$ $\quad$ $n = 3k+1$ $\quad$ $\boxed{n = 3k+2}$

$5(3k+2) - 1 = 15k+9 = 3(5k+3)$

$\Rightarrow n = 3k+2$ pt un $k \in \mathbb{N}$ $\quad$ ($3m = 5(3k+2) - 1 = 3(5k+3) \Rightarrow m = 5k+3$)

$\Rightarrow a = 5n+1 = 5(3k+2)+1 = 15k+11 \Rightarrow a \in C \Rightarrow A \cap B \subseteq C$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow A \cap B = C$.

Exc 3 Det A, B știind că: $A \cup B = \{1,2,3,4,5\}$, $A \setminus B = \{1,3\}$, $A \cap B \not\subset \{3,4,5\}$.

$A \setminus B = \{1,3\} \Rightarrow \{1,3\} \subseteq A$ și $1 \notin B, 3 \notin B$.

$A \cap B \not\subset \{3,4,5\} \Rightarrow 2 \in A, 2 \in B$

$4 \in B, 5 \in B$
$4 \notin A, 5 \notin A$

Exc! (Det. toate mulțimile)

$A = \{1,3,2\}$
$B = \{2,4,5\}$

Exc 4 $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{m^2+1}{2m^2+m+1} \mid m \in \{1,2,\dots,1000\}\}$. Cine e $|A|$?

$n, m \in \{1,2,\dots,1000\} \overset{not}{=} [1000]$

(Not combinatorică, $m \in \mathbb{N}^*$
$\{1,\dots,m\} = [m]$)

$\frac{m^2+1}{2m^2+m+1} = \frac{n^2+1}{2n^2+n+1} \Rightarrow \cancel{2m^2n^2} + 2m^2 + mn^2 + m + n^2 + \cancel{1} = \cancel{2n^2m^2} + 2n^2 + nm^2 + n + m^2 + \cancel{1}$

$mn^2 - nm^2 + m^2 - n^2 + m - n = 0$

$mn^2 - nm^2 + m^2 - n^2 + (m-n) = 0$

$mn(n - m) + (m-n)(m+n) + (m-n) = 0$

$(m-n)(m+n-mn+1) = 0 \Rightarrow m = n$ sau $m + n - mn + 1 = 0$

$\Rightarrow m(1-n) - (1-n) + 2 = 0$

$(1-n)(m-1) = -2$ $(m-1)(n-1) = 2 \Rightarrow$ în $\mathbb{N}$

$\begin{cases} m-1 = 1 \\ n-1 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} m-1 = 2 \\ n-1 = 1 \end{cases}$

$\boxed{\begin{cases} m = 2 \\ n = 3 \end{cases}}$ $\boxed{\begin{cases} m = 3 \\ n = 2 \end{cases}}$ $\Rightarrow \boxed{|A| = 999}$

$m = 2$ $x = \frac{5}{8+2+1} = \frac{5}{11}$ $\parallel$

$n = 3$ $x = \frac{10}{18+3+1} = \frac{10}{22}$

B

Exc 5   Fie $A = \{1, 2, \dots, n\}$, $n = 1000$. 1) Câți multipli de 7 conține mulțimea A?

2) Câte elemente ale mulțimii A sunt divizibile cu 2 și cu 3? C

(sau) D

3) Câte elemente ale lui A nu sunt divizibile cu 2 și nici cu 3? E

---

1) $\left[\frac{n}{7}\right] = |B|$ 2) $|C| = \left[\frac{n}{6}\right]$; $|D| = |D_2 \cup D_3|$

$|D_2 \cap D_3| = |C|$

$D_2 = \{x \in A \mid 2 | x\}$ $D_3 = \{x \in A \mid 3 | x\}$. $D_2 \cap D_3 = \{x \in A \mid 6 | x\}$

$\boxed{\text{FAPT}}$ A, B mult. finite $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$$|D| = |D_2 \cup D_3| = |D_2| + |D_3| - \underbrace{|D_2 \cap D_3|}_{= C} = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n}{6}\right]$$

3) $E = \{x \in A \mid 2 \nmid x \text{ și } 3 \nmid x\} = (A \setminus D_2) \cap (A \setminus D_3) = \complement_A D_2 \cap \complement_A D_3 =$

$= \complement_A (D_2 \cup D_3) = A \setminus (D_2 \cup D_3) = A \setminus D \Rightarrow |E| = n - |D| =$

$= n - \dots$

Principiul includerii și excluderii $A_1, \dots, A_n$ mulțimi finite

1) $n = 3$; $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| -$

$- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.

2) $\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \sum_{i=1}^{m}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \dots + (-1)^{m-1}\left|\bigcap_{i=1}^{m} A_i\right|$

(Exc! Inducție după m)

$\left|\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right)\cup A_m\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right| + |A_m| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right)\cap A_m\right| =$

$\left(\bigcup_{i=1}^{m-1} A_i\right)\cap A_m = \bigcup_{i=1}^{m-1}(A_i\cap A_m)$

$\dfrac{\text{ip ip}}{\text{ind ind}}$ - - -)

Exc 6 ① Câte numere naturale mai mici sau egale cu 10^6 nu sunt de forma x^2 sau de forma x^3 sau de forma x^5, unde x este un număr natural?

② Într-un chestionar adresat la 100 copii, statistica arată că 61 joacă fotbal, 30 joacă handbal și 13 joacă volei. Dintre aceștia, 11 joacă fotbal și handbal, 3 joacă handbal și volei, 7 joacă fotbal și volei. Orice copil practică măcar un sport. Câți dintre elevi practică toate 3 sporturile? $|A_1\cap A_2\cap A_3|$

---

② A_1 = mult. copiilor care joacă fotbal $\quad |A_1| = 60$

A_2 = — || — handbal $\quad |A_2| = 30$

A_3 = — || — volei $\quad |A_3| = 13$

$|A_1\cup A_2\cup A_3| = 100$ $\quad |A_1\cap A_2| = 11$ $\quad |A_2\cap A_3| = 3$ $\quad |A_1\cap A_3| = 7$