C_6 - GA

Aplicații liniare

$(V_i, +, \cdot)/\mathbb{K}$, $i=\overline{1,2}$ sp. vect

$f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x+y) = f(x)+f(y) \\ f(ax) = a f(x) \end{cases}$

$\Leftrightarrow f(ax+by) = a f(x) + b f(y)$

$\forall x, y \in V_1, \forall a, b \in \mathbb{K}$

$\operatorname{Ker} f = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2}\} \subseteq V_1$

$\operatorname{Im} f = \{y \in V_2 \mid \exists x \in V_1$ a.î. $f(x) = y\} \subseteq V_2$.

Prop $f: V_1 \to V_2$ apl liniară

a) f injectivă $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_{V_1}\}$

b) f surjectivă $\Leftrightarrow \dim V_2 = \dim \operatorname{Im} f$.

Teorema dimensiunii

$f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară

$\Rightarrow \dim V_1 = \dim \operatorname{Ker} f + \dim \operatorname{Im} f$.

Dem. Fie $\mathcal{B}_0 = \{e_1, \dots, e_k\}$ bază în $\operatorname{Ker} f \subseteq V_1$.

Extindem la $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ bază în V_1.

Dem că $\mathcal{B} = \{f(e_{k+1}), \dots, f(e_n)\}$ bază în $\operatorname{Im} f$.

1) $\mathcal{B}$ este SLI

$\forall a_{k+1}, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ a.î. $\sum_{j=k+1}^{n} a_j f(e_j) = 0_{V_2} \overset{?}{\Longrightarrow} a_j = 0, j=\overline{k+1,n}$

$\Downarrow$ f liniară

$f\left(\sum_{j=k+1}^{n} a_j e_j\right)$

$\Rightarrow \sum_{j=k+1}^{n} a_j e_j \in \operatorname{Ker} f = \langle \mathcal{B}_0 \rangle$

$\Rightarrow \exists a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$ a.î. $\sum_{j=k+1}^{n} a_j e_j = \sum_{i=1}^{k} a_i e_i \Rightarrow$

$\sum_{i=1}^{k} a_i e_i - \sum_{j=k+1}^{n} a_j e_j = 0_{V_1} \underset{\mathcal{B}_1 \text{ bază} \Rightarrow \text{SLI}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} a_i = 0, i=\overline{1,k} \\ a_j = 0, j=\overline{k+1,n} \end{array}$

2) $\mathcal{B}$ este SG $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f \overset{\text{"}\supseteq\text{" (din constr)}}{=} \langle \mathcal{B} \rangle$.

$\forall y \in \operatorname{Im} f \Rightarrow \exists x \in V_1 = \langle \mathcal{B}_1 \rangle$ a.î. $f(x) = y$

Scanned with CamScanner

$\exists\, a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}$ ai $y = f(x) = f\left(\sum_{i=1} a_i e_i\right) = f\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{k} a_i e_i}_{\in \ker f} + \sum_{j=k+1}^{n} a_j e_j\right)$

$= f\left(\sum_{j=k+1}^{n} a_j e_j\right) = \sum_{j=k+1}^{n} a_j f(e_j)$

Deci $\mathcal{B} = \{f(e_{k+1}),\dots, f(e_n)\}$ bază în $\operatorname{Im} f$.

$\dim V_1 = n = \underbrace{k}_{\dim \ker f} + \underbrace{n-k}_{\dim \operatorname{Im} f}$.

Prop $f: V_1 \to V_2$ liniară

a) f injectivă $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim \operatorname{Im} f$

b) f surjectivă $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim \ker f + \dim V_2$.

c) f bijectivă $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$.

Teorema $V_1 \simeq V_2$ (sp. vect. izomorfe) $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2$.

Dem

"$\Rightarrow$" $\exists f: V_1 \to V_2$ izomorfism de sp vect $\Leftrightarrow$ 1) f liniară 2) f bijectie.

Prop c) $\Rightarrow \dim V_1 = \dim V_2$

"$\Leftarrow$" $\dim V_1 = \dim V_2 = n$.

$R_1 = \{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V_1, $R_2 = \{e'_1,\dots,e'_n\}$ reper în V_2.

$f: V_1 \to V_2$, $f(e_i) = e'_i$, $i = \overline{1,n}$ liniară

Extindem f prin liniaritate.

$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i e'_i = x'$

f bij: $\forall x' \in V_2$, $x' = \sum_{i=1}^{n} x_i e'_i$, $\exists!\, x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ai $f(x) = x'$

f izom. sp vect.

Prop $f: V_1 \to V_2$ liniară.

1) f injectivă $\Leftrightarrow$ f transformă $\forall$ SLI din V_1 într-un SLI din V_2

2) f surjectivă $\Leftrightarrow$ —"— SG —"— SG —"—

3) f bijectivă $\Leftrightarrow$ —"— reper —"— reper —"—

Scanned with CamScanner

Dem

1) "$\Rightarrow$" Ip: f injectivă

Fie $S = \{v_1, .., v_n\}$ SLI în V_1. Dem că $f(S) = \{f(v_1), .., f(v_n)\}$ SLI în V_2.

$\forall a_1, .., a_n \in K$ aî $\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i)}_{f(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i)} = 0_{V_2} \overset{?}{\Rightarrow} a_i = 0, \forall i = \overline{1,n}$

$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in \operatorname{Ker} f = \{0_{V_1}\} \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0_{V_1} \overset{S \text{ e SLI}}{\Longrightarrow} a_i = 0, \forall i = \overline{1,n}$

"$\Leftarrow$" f transf $\forall$ SLI din V_1 într-un SLI din V_2

Ip. abs $\exists \underset{\neq 0_{V_1}}{x} \in \operatorname{Ker} f \Rightarrow S = \{x\}$ este SLI $\overset{ip}{\Rightarrow} f(S) = \{\underset{0_{V_2}}{f(x)}\}$ SLI Contrad.

Ip. este falsă $\rightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_{V_1}\} \Rightarrow f$ inj

2) "$\Rightarrow$" Ip: f surjectivă

Fie $S = \{v_1, .., v_n\}$ SG în V_1 i.e $V_1 = \langle S \rangle$. Dem că

$f(S) = \{f(v_1), .., f(v_n)\}$ SG în V_2 i.e $V_2 = \langle f(S) \rangle$.
"$\supseteq$" (din constr)
"$\subseteq$" (dem)

Fie $y \in V_2$. $\overset{f \text{ surj}}{\Longrightarrow} \exists x \in V_1 = \langle S \rangle$ aî $f(x) = y \overset{f \text{ lin}}{\Longrightarrow}$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$, $f(x) = f(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i)$

$\sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = y \Rightarrow V_2 \subseteq \langle f(S) \rangle$

Deci $V_2 = \langle f(S) \rangle$.

"$\Leftarrow$" Ip: $\forall S$ SG în V_1 i.e $V_1 = \langle S \rangle \Rightarrow f(S)$ e SG în V_2 i.e $V_2 = \langle f(S) \rangle$

Dem că f e surj. i.e. $\forall y \in V_2, \exists x \in V_1$ aî $f(x) = y$.

$S = \{v_1, .., v_n\}$.

$\forall y \in V_2 = \langle \{f(v_1), .., f(v_n)\} \rangle$, $\exists a_1, .., a_n \in K$ aî

$y = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) \overset{f \text{ lin}}{=} f(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} a_i v_i}_{x \in V_1})$ $\quad \exists x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ aî $f(x) = y$

3) f bij $\Leftrightarrow$ [$\forall R$ reper în $V_1 \Rightarrow f(R)$ reper în V_2]

Aplicăm 1), 2).

Scanned with CamScanner

Matricea asociată unei aplicații liniare

$f: V_1 \to V_2$ aplicație liniară

$R_1 = \{e_1, .., e_n\} \longrightarrow R_2 = \{e'_1, .., e'_m\}$

reper în V_1 reper în V_2.

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j, \forall i = \overline{1,n}, \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ji} e'_j\right)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i\right) e'_j \\ y &= \sum_{j=1}^{m} y_j e'_j \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i, \forall j = \overline{1,m}$$

$$Y = AX$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$[f]_{R_1, R_2} = A$ matricea asociată lui f.

Prop. de caracterizare a apl. liniare

$f: V_1 \to V_2$

f liniară $\Leftrightarrow \exists A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ aî coord. lui x în raport cu reperul $R_1 = \{e_1, .., e_n\}$ din V_1 și coord. lui $y = f(x)$ în raport cu reperul $R_2 = \{e'_1, .., e'_m\}$ din V_2 verifică $Y = AX$,

unde $y = \sum_{j=1}^{m} y_j e'_j$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $A = (a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,m} \\ i=\overline{1,n}}}$

OBS

$$\begin{array}{ccc} R_1 = \{e_1, .., e_n\} & \longrightarrow & R_2 = \{e'_1, .., e'_m\} \\ \text{repere în } V_1 \ \downarrow C & & \downarrow D \ \text{repere în } V_2 \\ R'_1 = \{\bar{e}_1, .., \bar{e}_n\} & \longrightarrow & R'_2 = \{\bar{e}'_1, .., \bar{e}'_m\} \end{array}$$

$C \in GL(n, \mathbb{K})$, $[f]_{R_1, R_2} = A$ $\quad A' = D^{-1} A C$

$D \in GL(m, \mathbb{K})$ $\quad [f]_{R'_1, R'_2} = A'$ $\quad \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg}(D^{-1} A C) = \operatorname{rg} A$

(invariant la sch. reperelor)

Scanned with CamScanner

OBS $f \in End(V)$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_1 = \{e_1, \dots, e_n\} & \longrightarrow & \mathcal{R}_1 = \{e_1, \dots, e_n\} \\ C \downarrow & & \downarrow C \\ \mathcal{R}_1' = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} & \longrightarrow & \mathcal{R}_1' = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \end{array}$$

$A' = C^{-1}AC$ $\quad [f]_{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_1} = A, \quad [f]_{\mathcal{R}_1', \mathcal{R}_1'} = A'$

Exercițiu 2

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \ f(x) = (x_1 + x_2, \ 2x_2)$

$\mathcal{R}_0 = \{ e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \}$ reperul canonic în $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{R}' = \{ e_1' = e_1 - 2e_2, \ e_2' = e_1 + e_2 \}$.

a) $[f]_{\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_0}$; b) $[f]_{\mathcal{R}', \mathcal{R}'}$

Sol

a) $y = f(x) \iff \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

SAU

$f(e_1) = f(1,0) = (1,0) = e_1 = 1 e_1 + 0 e_2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$f(e_2) = f(0,1) = (1,2) = (1,0) + (0,2) = 1 e_1 + 2 e_2$

b) $f(e_1') = f(e_1 - 2e_2) = f(1,-2) = (-1, -4) = a e_1' + b e_2'$

$= a(1,-2) + b(1,1) = (a+b, -2a+b)$

$\begin{cases} a + b = -1 \\ -2a + b = -4 \end{cases} \ominus$ $\qquad a = 1, \ b = -2. \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$3a \ / = 3$

$f(e_2') = f(1,1) = (2,2) = c e_1' + d e_2' = (c+d, -2c+d)$

$\begin{cases} c + d = 2 \\ -2c + d = 2 \end{cases} \ominus$ $\qquad c = 0, \ d = 2.$

$3c \ / = 0$

SAU

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_0 & \xrightarrow{A} & \mathcal{R}_0 \\ C \downarrow & & \downarrow C \\ \mathcal{R}' & \xrightarrow{A'} & \mathcal{R}' \end{array}$$

$\boxed{A' = C^{-1} A C}$

$e_1' = e_1 - 2e_2$

$e_2' = e_1 + e_2$

$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

Prop $f: V_1 \to V_2$ liniară

a) f injectivă $\Leftrightarrow \dim V_1 = rg A$, $A = [f]_{R_1, R_2}$.

b) f surjectivă $\Leftrightarrow \dim V_2 = rg A$

c) f bijectivă $\Leftrightarrow A \in GL(n, \mathbb{K})$, $\dim V_1 = \dim V_2 = n$

Dem

a) f injectivă $\Leftrightarrow \ker f = \{0_{V_1}\}$

$\ker f = \{x \in V_1 \mid f(x) = 0_{V_2}\} = \{x \in V_1 \mid AX = 0\} = S(A)$

$$\left.\begin{array}{l} \dim \ker f = \dim V_1 - rg A \\ \ker f = \{0_V\} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \dim V_1 = rg A.$$

b) f surjectivă $\Leftrightarrow \dim V_2 = \dim \operatorname{Im} f$.

T. dim: $\dim V_1 = \underbrace{\dim \ker f}_{\dim V_1 - rg A} + \dim \operatorname{Im} f \Rightarrow \dim V_2 = \dim \operatorname{Im} f = rg A$

c) f bij $\Leftrightarrow \dim V_1 = \dim V_2 = rg A \Leftrightarrow A \in GL(n, \mathbb{K})$

OBS

a) $V_1 \xrightarrow{f} V_2 \xrightarrow{g} V_3$, f, g liniare, $h = g \circ f$

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "h"] & V_2 \arrow[r, "g"] & V_3 \end{tikzcd}$$

$x \to f(x) = y \to g(f(x)) = g(y) = z$

$$\left.\begin{array}{l} Z = A_g Y = A_g A_f X \\ Z = A_h X \end{array}\right\} \Rightarrow A_h = A_g \cdot A_f$$

$$A_h = A_{g \circ f}$$

b) $V \xrightarrow{f} V \xrightarrow{f^{-1}} V$, $V \xrightarrow{f^{-1}} V \xrightarrow{f} V$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "id_V"] & V \arrow[r, "f^{-1}"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "id_V"] & V \arrow[r, "f"] & V \end{tikzcd}$$

$A_{f^{-1}} \cdot A_f = I_n$ $\qquad$ $A_f \cdot A_{f^{-1}} = I_n \Rightarrow$

$A_{f^{-1}} = (A_f)^{-1}$

c) $(GL(V), \circ) \xrightarrow{\varphi} (GL(n, \mathbb{K}), \cdot)$

$GL(V) = \{f: V \to V \mid \text{izom spv}\}$ $\qquad$ $GL(n, \mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$

$\varphi(f) = A_f$ izom. de grupuri, $\begin{cases} \varphi(f \circ g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g) \\ \varphi \text{ bij} \end{cases}$

Scanned with CamScanner

Def $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp vect, $(V^* = \{f : V \to \mathbb{K},\ f \text{ liniară}\}, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vectorial dual

$+ : V^* \times V^* \to V^*$, $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$, $\forall x \in V$

$\cdot : \mathbb{K} \times V^* \to V^*$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x \in V$.

$f, g \in V^*$

Teoremă $V \simeq V^*$ (sp. vect. izomorfe)

Dem

$R = \{e_1, .., e_n\}$ reper în V.

Construim $R^* = \{e_1^*, .., e_n^*\}$, $e_i^* : V \to \mathbb{K}$, $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

$e_1^*(e_1) = 1, .., e_1^*(e_n) = 0$

$\vdots$

Extindem prin liniaritate: $e_n^*(e_1) = 0, \dots, e_n^*(e_n) = 1$

$e_i^*(x) = e_i^*\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \underbrace{e_i^*(e_j)}_{\delta_{ij}} = x_i$, $\forall i = \overline{1,n}$.

Dem că R^* este reper în V^*.

1) R^* este SLI.

$\forall a_1, .., a_n \in \mathbb{K}$ aî $\sum_{i=1}^n a_i e_i^* = 0 \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i \overbrace{e_i^*(e_j)}^{\delta_{ij}}}_{a_j} = 0$, $\forall j = \overline{1,n}$

$\Rightarrow$ SLI

$\supset$ (din constr)

2) R^* e SG i.e. $V^* \overset{"}{=} \langle R^* \rangle$.

$\subset$ (dem)

$\forall f \in V^*$, dem că $\exists f_i \in \mathbb{K}$ aî $f = \sum_{i=1}^n f_i e_i^*$

$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^n f(e_i) e_i^*(x)$, $\forall x \in V$

$f = \sum_{i=1}^n \underbrace{f(e_i)}_{f_i \in \mathbb{K}} e_i^* = \sum_{i=1}^n f_i e_i^*$

În concluzie $R^* = \{e_1^*, .., e_n^*\}$ reper în $V^* \Rightarrow \dim_{\mathbb{K}} V^* = n \overset{"}{=} \dim_{\mathbb{K}} V$

$\Rightarrow V \simeq V^*$

Exemple de endomorfisme (proiecții și simetrii)

Def $V = V_1 \oplus V_2$ $p : V \to V$ liniară

$p(v) = p(v_1 + v_2) = v_1$, p = proiecția pe V_1, de-a lungul lui V_2

Scanned with CamScanner

Prop $p \in End(V)$

p proiecție $\Leftrightarrow p \circ p = p$.

Def $s : V \to V$ liniară

s s.n simetrie $\Leftrightarrow s \circ s = id_V$ (involuție)

Prop $p : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$ proiecție pe V_1 de-a lungul lui V_2

$\Leftrightarrow s : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$, $s = 2p - id_V$ ($ch\,\mathbb{K} \neq 2$)

simetrie față de V_1.

$s(v_1 + v_2) = 2v_1 - (v_1 + v_2) = v_1 - v_2$

Exemplu $V_1 = <\{(1,2,3)\}>$, $\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.

$p : V_1 \oplus V_2 \to V_1$ pr. pe V_1, de-a lungul lui V_2.

$p(1,5,0) = ?$, $s(1,5,0) = ?$ s = simetrie față de V_1.

$V_2 = <\{e_1, e_2\}>$

$rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$

$R = \{(1,2,3), e_1, e_2\}$ reper in $\mathbb{R}^3$

$(1,5,0) = a(1,2,3) + b(1,0,0) + c(0,1,0)$

$(1,5,0) = (a+b, 2a+c, 3a)$ $\begin{cases} a+b = 1 \\ 2a + c = 5 \\ 3a = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = 1, \ c = 5 \end{cases}$

$(1,5,0) = \underbrace{0\,(1,2,3)}_{v_1 \in V_1} + \underbrace{1 \cdot (1,0,0) + 5(0,1,0)}_{v_2 \in V_2}$

$p((1,5,0)) = (0,0,0)$, $s(1,5,0) = 2p(1,5,0) - (1,5,0) = (-1,-5,0)$