Breviar pentru Cursurile I şi II de Logică Matematică şi Computaţională

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

Cuprinsul cursului de Logică Matematică şi Computaţională

Capitolul 1: Preliminarii algebrice:

- Mulţimi, funcţii şi relaţii. Relaţii binare. Relaţii de echivalenţă
- Relaţii de ordine. Mulţimi (parţial) ordonate
- Latici
- Algebre Boole. Morfisme de algebre Boole. Filtre şi congruenţe în algebre Boole. Ultrafiltre. Teorema de reprezentare a lui Stone *(algebra Boole cu exact două elemente determină structura tuturor algebrelor Boole)*. Structura algebrelor Boole finite

Capitolul 2: Logica propoziţională clasică:

- Sintaxa *(o primă prezentare pentru logica propoziţională clasică: sistemul Hilbert)*
- Algebra Lindenbaum–Tarski *(o algebră Boole asociată logicii propoziţionale clasice)*
- Semantica *(calcul cu valori de adevăr, în algebra Boole cu exact două elemente:* $0 =$ *fals,* $1 =$ *adevărat)*
- Teorema de completitudine *(deducţia sintactică, coincide cu deducţia semantică)*
- Rezoluţia propoziţională *(echivalentă cu sistemul Hilbert)*
- Deducţia naturală *(echivalentă cu sistemul Hilbert)*

Capitolul 3: Logica clasică a predicatelor *(predicat = propoziţie cu variabile)*:

- Structuri de ordinul I *(structuri algebrice în care iau valori variabilele din predicate)*
- Sintaxa
- Semantica
- Teorema de completitudine *(deducţia sintactică, coincide cu deducţia semantică)*
- Rezoluţia în logica clasică a predicatelor

A se vedea **bibliografia** acestui curs, în Cursul I.
Prescurtări uzuale:

- **i. e.** = id est = adică
- **ddacă** = dacă şi numai dacă
- **a. î.** = astfel încât
- **ş. a. m. d.** = şi aşa mai departe
- ":=": abreviere pentru: $\stackrel{\text{definiţie}}{=}$, $\stackrel{\text{notaţie}}{=}$
- $\underline{\ \ /\!/\ \ }$: notaţie pentru: "să se demonstreze că"

1 Teoria mulţimilor: teorie naivă versus teorie axiomatică

- O definiţie din **teoria naivă a mulţimilor**: o *mulţime* este o colecţie de obiecte **bine determinate** şi **distincte**, numite *elementele mulţimii.*
- **distincte**: o mulţime nu conţine un acelaşi obiect de mai multe ori; un element apare într-o mulţime o singură dată
- **bine determinate**: orice mulţime are o descriere precisă, care o identifică în mod unic, adică îi identifică în mod unic elementele

A se vedea în Cursul I Paradoxul lui Bertrand Russell, care arată că **nu există mulţimea tuturor mulţimilor**. Totalitatea mulţimilor nu formează o mulţime, ci o **clasă**.

Din punctul de vedere al teoriei naive a mulţimilor, nu se pot spune multe lucruri despre noţiunea de *clasă*, decât că este "ceva mai vag/mai mare/mai cuprinzător decât o mulţime". Se consideră că orice mulţime este o clasă, dar nu şi invers. Clasele care nu sunt mulţimi se numesc *clase proprii.*

Semnul (simbolul) de apartenenţă **nu** poate apărea la dreapta unei clase proprii, adică nu se consideră a avea sens faptul că o clasă proprie aparţine unui alt obiect.

Aşadar **nu există clasa tuturor claselor**, din simplul motiv că nu există un obiect care să aibă clase proprii ca elemente.

- O *axiomă* este un fapt **dat** ca fiind adevărat într-o teorie matematică.
- O **axiomă** nu se demonstrează, ci pur şi simplu este **dată** ca fiind adevărată.
- Faptul de a fi axiomă **nu este o proprietate intrinsecă** a unei afirmaţii.
- *formalizare*: exprimare folosind **numai** simboluri matematice
- *metalimbaj*: "limbajul natural", "vorbirea curentă (obişnuită)", "exprimarea în cuvinte", "fără simboluri matematice"

2 Echivalenţe logice între diferite tipuri de enunţuri

Lucrăm numai cu enunţuri care sunt **fie false, fie adevărate**.

Conectorii logici: folosiţi pentru a lega enunţuri, formând astfel *enunţuri compuse:*

- *disjuncţia:* sau
- *conjuncţia:* şi
- *negaţia:* non
- *implicaţia:* $\Rightarrow$
- *echivalenţa:* $\Leftrightarrow$

Pentru orice enunţuri (propoziţii, afirmaţii, proprietăţi) p, q şi r, au loc echivalenţele următoare:

- $[p \text{ sau } (q \text{ şi } r)] \ \Leftrightarrow\ [(p \text{ sau } q) \text{ şi } (p \text{ sau } r)]$
- $[p \text{ şi } (q \text{ sau } r)] \ \Leftrightarrow\ [(p \text{ şi } q) \text{ sau } (p \text{ şi } r)]$
- $\text{non } (p \text{ sau } q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \text{ şi } (\text{non } q)]$
- $\text{non } (p \text{ şi } q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \text{ sau } (\text{non } q)]$
- $(p \Rightarrow q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \text{ sau } q]$
- $(p \Rightarrow q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } q) \Rightarrow (\text{non } p)]$ (**principiul reducerii la absurd**)
- $(p \Leftrightarrow q) \ \Leftrightarrow\ [(\text{non } p) \Leftrightarrow (\text{non } q)]$ (consecinţă imediată a principiului reducerii la absurd şi a faptului că $(p \Leftrightarrow q) \overset{\text{def.}}{=} [(p \Rightarrow q) \text{ şi } (q \Rightarrow p)]$)

- implicaţia $[p \Rightarrow q]$ este echivalentă cu [(non p) sau q]

Cuantificatorii:

- *cuantificatorul universal:* $\forall$
- *cuantificatorul existenţial:* $\exists$

Dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate referitoare la x (mai precis o proprietate referitoare la elementele pe care le parcurge/le poate denumi x), atunci:

- non $[(\forall\, x)\,(p(x))] \ \Leftrightarrow\ (\exists\, x)\,(\text{non } p(x))$
- non $[(\exists\, x)\,(p(x))] \ \Leftrightarrow\ (\forall\, x)\,(\text{non } p(x))$

Notaţia 2.1. Alăturarea de simboluri $\exists\,!$ semnifică "există un unic", "există şi este unic".

Observaţia 2.1. $\exists!$ nu este un cuantificator, ci este o notaţie prescurtată pentru enunţuri compuse: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ este o proprietate asupra lui x, atunci scrierea $(\exists\,!\,x)\,(p(x))$ este o abreviere pentru enunţul scris, desfăşurat, astfel:

$$(\exists\, x)\,(p(x)) \text{ şi } (\forall\, y)\,(\forall\, z)\,[(p(y) \text{ şi } p(z)) \Rightarrow y = z],$$

unde y şi z sunt variabile.

Cuantificatori aplicaţi fixând un domeniu al valorilor:
Fie M o mulţime, x o variabilă, iar $p(x)$ o proprietate referitoare la elementele lui M. Atunci următoarele scrieri sunt abrevieri pentru scrierile fără domeniu al valorilor lângă cuantificatori:

- $(\forall\, x \in M)\,(p(x)) \overset{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,(x \in M \Rightarrow p(x))$
- $(\exists\, x \in M)\,(p(x)) \overset{\text{not.}}{\Leftrightarrow} (\exists\, x)\,(x \in M \text{ şi } p(x))$

Toate proprietăţile logice pentru enunţuri cuantificate din acest curs se scriu la fel şi sunt valabile şi pentru cuantificatori urmaţi de un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată.

Cuantificatorii de acelaşi fel comută, cei diferiţi nu:
Fie x şi y variabile, iar $p(x, y)$ o proprietate asupra lui x şi y. Atunci:

- $(\forall\, x)\,(\forall\, y)\,(p(x, y)) \ \Leftrightarrow\ (\forall\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$
- $(\exists\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \ \Leftrightarrow\ (\exists\, y)\,(\exists\, x)\,(p(x, y))$
- $(\forall\, x)\,(\exists\, y)\,(p(x, y)) \ \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\ (\exists\, y)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$ (pentru fiecare valoare a lui x, valoarea lui y pentru care e satisfăcut enunţul din stânga depinde de valoarea lui x)

Analog, dacă A şi B sunt mulţimi, avem:

- $(\forall\, x \in A)\,(\forall\, y \in B)\,(p(x, y)) \ \Leftrightarrow\ (\forall\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x, y))$
- $(\exists\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x, y)) \ \Leftrightarrow\ (\exists\, y \in B)\,(\exists\, x \in A)\,(p(x, y))$
- $(\forall\, x \in A)\,(\exists\, y \in B)\,(p(x, y)) \ \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\ (\exists\, y \in B)\,(\forall\, x \in A)\,(p(x, y))$

Desigur, la fel pentru cazul în care doar unul dintre cuantificatori este aplicat cu un domeniu al valorilor pentru variabila cuantificată: $(\forall\, x)\,(\forall\, y \in B)\,(p(x, y)) \ \Leftrightarrow\ (\forall\, y \in B)\,(\forall\, x)\,(p(x, y))$ etc..

Cuantificatori, disjuncţii şi conjuncţii logice:
Să observăm şi următoarele proprietăţi logice: dacă x este o variabilă, iar $p(x)$ şi $q(x)$ sunt enunţuri referitoare la x, atunci:

- $(\forall\, x)\,(p(x) \text{ şi } q(x)) \ \Leftrightarrow\ (\forall\, x)\,(p(x)) \text{ şi } (\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \ \Leftrightarrow\ (\exists\, x)\,(p(x)) \text{ sau } (\exists\, x)\,(q(x))$
- $(\forall\, x)\,(p(x) \text{ sau } q(x)) \ \overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\ (\forall\, x)\,(p(x)) \text{ sau } (\forall\, x)\,(q(x))$
- $(\exists\, x)\,(p(x) \text{ şi } q(x)) \ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\ (\exists\, x)\,(p(x)) \text{ şi } (\exists\, x)\,(q(x))$

Scoaterea de sub un cuantificator a unui enunţ care nu depinde de variabila cuantificată:

Dacă, în enunţurile compuse cuantificate de mai sus, în locul lui $q(x)$ avem un enunţ q care nu depinde de x, atunci:

$$(\forall\, x)\, q \;\Leftrightarrow\; q \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\, q,$$

aşadar, în acest caz, din proprietăţile anterioare obţinem:

- $(\forall\, x)\, (p(x)$ şi $q) \;\Leftrightarrow\; (\forall\, x)\, (p(x))$ şi q
- $(\exists\, x)\, (p(x)$ sau $q) \;\Leftrightarrow\; (\exists\, x)\, (p(x))$ sau q
- $(\forall\, x)\, (p(x)$ sau $q) \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; (\forall\, x)\, (p(x))$ sau q
- $(\exists\, x)\, (p(x)$ şi $q) \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; (\exists\, x)\, (p(x))$ şi q

Acum fie p, q şi r enunţuri. Atunci, din proprietăţile: $[p$ sau $(q$ şi $r)] \Leftrightarrow [(p$ sau $q)$ şi $(p$ sau $r)]$, $[p$ şi $(q$ sau $r)] \Leftrightarrow [(p$ şi $q)$ sau $(p$ şi $r)]$, non $(p$ sau $q) \;\Leftrightarrow\; [($non $p)$ şi $($non $q)]$, non $(p$ şi $q) \;\Leftrightarrow\; [($non $p)$ sau $($non $q)]$ şi $(p \Rightarrow q) \;\Leftrightarrow\; [($non $p)$ sau $q]$, se pot deduce următoarele proprietăţi:

- $[p \Rightarrow (q$ şi $r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \Rightarrow q)$ şi $(p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q$ şi $r)] \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; [(p \Rightarrow q)$ sau $(p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q$ sau $r)] \;\Leftrightarrow\; [(p \Rightarrow q)$ sau $(p \Rightarrow r)]$
- $[p \Rightarrow (q$ sau $r)] \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; [(p \Rightarrow q)$ şi $(p \Rightarrow r)]$
- $[(q$ sau $r) \Rightarrow p] \;\Leftrightarrow\; [(q \Rightarrow p)$ şi $(r \Rightarrow p)]$
- $[(q$ sau $r) \Rightarrow p] \;\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\; [(q \Rightarrow p)$ sau $(r \Rightarrow p)]$
- $[(q$ şi $r) \Rightarrow p] \;\Leftrightarrow\; [(q \Rightarrow p)$ sau $(r \Rightarrow p)]$
- $[(q$ şi $r) \Rightarrow p] \;\overset{\not\Rightarrow}{\Leftarrow}\; [(q \Rightarrow p)$ şi $(r \Rightarrow p)]$

3 Operaţii cu mulţimi şi relaţii între mulţimi

Notaţia 3.1.

- Păstrăm notaţia consacrată $\in$ pentru **simbolul de apartenenţă**, ce indică faptul că un obiect este element al altui obiect (mulţime, clasă).
- Păstrăm notaţia clasică, folosind acolade, pentru specificarea elementelor unei mulţimi (fie prin enumerare, fie printr–o proprietate a lor).

Amintim că are sens să ne referim la obiecte (elemente, mulţimi, clase) arbitrare, pentru care nu specificăm un domeniu al valorilor.

Notaţia 3.2. Păstrăm notaţiile cunoscute $\cup$, $\cap$, $\setminus$ şi Δ pentru **reuniunea**, **intersecţia**, **diferenţa** şi, respectiv, **diferenţa simetrică** între mulţimi.

Amintim că, pentru orice mulţimi A şi B, se definesc:

- $A \cup B \overset{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A$ sau $x \in B\}$;
- $A \cap B \overset{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A$ şi $x \in B\}$;
- $A \setminus B \overset{\text{def.}}{=} \{x \mid x \in A$ şi $x \notin B\}$;
- $A \,\Delta\, B \overset{\text{def.}}{=} (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

A se revedea proprietăţile operaţiilor cu mulţimi demonstrate la seminar, precum şi cele lăsate ca temă pentru acasă în cursul orelor de seminar!

Vom face mereu apel şi la cunoştinţe din gimnaziu şi liceu, dintre care pe unele le vom aminti, de regulă doar enunţându–le.

Notaţia 3.3. Păstrăm notaţiile $\subseteq$, $\subsetneq$, $\supseteq$ şi $\supsetneq$ pentru **incluziunile** şi **incluziunile stricte** dintre mulţimi **în fiecare sens**. Vom mai nota incluziunile stricte şi cu $\subset$ şi respectiv $\supset$, dar numai atunci când precizarea că este vorba de o incluziune strictă şi nu poate avea loc egalitatea de mulţimi nu ne foloseşte în cele prezentate.

Amintim că, pentru orice mulţimi A şi B:

- $A = B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ (prin definiţie, două mulţimi sunt egale ddacă au aceleaşi elemente);
- $A \subseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} (\forall\, x)\,[x \in A \Rightarrow x \in B]$;
- $A \supseteq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subseteq A$;
- $A \subsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} [A \subseteq B$ şi $A \neq B]$;
- $A \supsetneq B \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} B \subsetneq A$.

Notaţia 3.4. Vom nota cu $\emptyset$ **mulţimea vidă**, adică mulţimea fără elemente, i.e. unica (conform definiţiei egalităţii de mulţimi) mulţime care satisface: $(\nexists\, x)\,(x \in \emptyset)$, sau, echivalent: $(\forall\, x)\,(x \notin \emptyset)$.

Definiţia 3.1. Dacă A şi B sunt mulţimi, atunci A se numeşte:

- *submulţime a lui* B (sau *parte a lui* B) ddacă $A \subseteq B$;
- *submulţime proprie* (sau *strictă*) *a lui* B ddacă $A \subsetneq B$.

Notaţia 3.5. Pentru orice mulţime T, vom nota cu $\mathcal{P}(T)$ **mulţimea părţilor lui** T, i. e. **mulţimea submulţimilor lui** T: $\mathcal{P}(T) = \{X \mid X \subseteq T\}$.

Să notăm cu **xor** conectorul logic *sau exclusiv*, definit astfel: pentru orice enunţuri p şi q, enunţul (p xor q) este adevărat exact atunci când **exact unul** dintre enunţurile p şi q este adevărat, adică exact atunci când [(p e adevărat şi q e fals) sau (q e adevărat şi p e fals)]. Formal:

- $(p$ xor $q) \Leftrightarrow [(p$ şi non $q)$ sau $(q$ şi non $p)]$

Remarca 3.1. Definiţia diferenţei simetrice arată că, pentru orice mulţimi A şi B:

- $A \Delta B = \{x \mid x \in A \text{ xor } x \in B\}$.

A se vedea, în Cursul I, proprietăţile logice (cu enunţuri) în care se transcriu următoarele proprietăţi pentru calculul cu mulţimi.

Şi a se observa faptul că, pentru operaţii comutative, precum reuniunea şi intersecţia de mulţimi, distributivitatea la stânga faţă de alte operaţii este echivalentă cu distributivitatea la dreapta.

Pentru orice mulţimi A, B, C, D, au loc:

- $A = B$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \subseteq A]$
- **idempotenţa reuniunii:** $A \cup A = A$
- **idempotenţa intersecţiei:** $A \cap A = A$
- $A \setminus A = \emptyset$
- $A \Delta A = \emptyset$
- **comutativitatea reuniunii:** $A \cup B = B \cup A$
- **comutativitatea intersecţiei:** $A \cap B = B \cap A$
- **comutativitatea diferenţei simetrice:** $A \Delta B = B \Delta A$
- **asociativitatea reuniunii:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
- **asociativitatea intersecţiei:** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- **asociativitatea diferenţei simetrice:** $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$

- **distributivitatea la stânga a reuniunii faţă de intersecţie:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- **distributivitatea la dreapta a reuniunii faţă de intersecţie:** $(B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A)$
- **distributivitatea la stânga a intersecţiei faţă de reuniune:** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- **distributivitatea la dreapta a intersecţiei faţă de reuniune:** $(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A)$
- $A \subsetneq B$ ddacă $[(\forall x)\,(x \in A \Rightarrow x \in B)$ şi $(\exists x)\,(x \in B \setminus A)]$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \setminus A \neq \emptyset]$ ddacă $[A \subseteq B$ şi $B \nsubseteq A]$
- $A \subseteq B$ ddacă $(A \subsetneq B$ sau $A = B)$
- $A \subseteq A$
- non$(A \subsetneq A)$
- **tranzitivitatea incluziunii nestricte**: $(A \subseteq B$ şi $B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$
- $(A \subsetneq B$ şi $B \subseteq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $(A \subseteq B$ şi $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- **tranzitivitatea incluziunii stricte**: $(A \subsetneq B$ şi $B \subsetneq C) \Rightarrow A \subsetneq C$
- $A \subseteq A \cup B$; $B \subseteq A \cup B$
- $A \cap B \subseteq A$; $A \cap B \subseteq B$
- $A \cup B = B$ ddacă $A \subseteq B$ ddacă $A \cap B = A$
- $\emptyset \subseteq A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \setminus \emptyset = A$
- $A \setminus B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq B$
- $\emptyset \setminus A = \emptyset$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, adică: $A \subseteq \emptyset$ ddacă $A = \emptyset$
- $A \Delta B = \emptyset$ ddacă $A = B$
- $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \setminus B = A$ ddacă $B \setminus A = B$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D) \Rightarrow A \cup B \subseteq C \cup D$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D) \Rightarrow A \cap B \subseteq C \cap D$
- $(A \subseteq C$ şi $B \subseteq C)$ ddacă $A \cup B \subseteq C$
- $(A \subseteq B$ şi $A \subseteq C)$ ddacă $A \subseteq B \cap C$
- $A \subseteq B \Rightarrow (A \setminus C \subseteq B \setminus C)$
- $A \subseteq B \Rightarrow (C \setminus B \subseteq C \setminus A)$
- $(A \subseteq B$ şi $C \subseteq D) \Rightarrow (A \setminus D \subseteq B \setminus C)$

- $A \setminus B \subseteq A$
- $A \cap (A \setminus B) = A \setminus B$
- $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$

Considerăm o mulţime T, iar $A, B \in \mathcal{P}(T)$. Pentru orice $X \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu $\overline{X} = T \setminus X$ (*complementara lui X faţă de T*). Au loc:

- $\overline{A} \in \mathcal{P}(T)$, adică $\overline{A} \subseteq T$
- $\overline{\emptyset} = T$
- $\overline{T} = \emptyset$
- $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- **operaţia de trecere la complementară este autoduală:** $\overline{\overline{A}} = A$
- **legile lui De Morgan:** $\begin{cases} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$
- $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ (uşor de demonstrat folosind proprietăţile de mai sus)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}$
- $A = B \Leftrightarrow \overline{A} = \overline{B}$
- $A \subsetneq B \Leftrightarrow \overline{B} \subsetneq \overline{A}$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; mai mult:
- $A \cap B = \emptyset$ ddacă $A \subseteq \overline{B}$ ddacă $B \subseteq \overline{A}$
- $A \cup \overline{A} = T$; mai mult:
- $A \cup B = T$ ddacă $A \supseteq \overline{B}$ ddacă $B \supseteq \overline{A}$
- **A şi B sunt părţi complementare ale lui T ddacă fiecare este complementara celeilalte faţă de T:** $\begin{cases} A \cup B = T \\ \text{şi} \\ A \cap B = \emptyset \end{cases}$ ddacă $A = \overline{B}$ ddacă $B = \overline{A}$

4 Alte operaţii cu mulţimi

Produsul direct a două mulţimi:

Notaţia 4.1 (a se vedea definiţia axiomatică a unei perechi ordonate în CURSUL I). Pentru orice elemente a şi b, notăm cu (a, b) **perechea ordonată** formată din a şi b.

Definiţia 4.1 (egalitatea de perechi semnifică egalitatea pe componente). Pentru orice elemente a_1, a_2, x_1, x_2:

$$(a_1, a_2) = (x_1, x_2) \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_1 = x_1 \\ \text{şi} \\ a_2 = x_2 \end{cases}$$

Definiţia 4.2. Pentru orice mulţimi A şi B, se defineşte *produsul cartezian* dintre A şi B (numit şi *produsul direct* dintre A şi B) ca fiind mulţimea de perechi ordonate $\{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$, notată $A \times B$:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ şi } b \in B\}$$

Remarca 4.1 (produsul cartezian cu $\emptyset$ este $\emptyset$; produsul cartezian este distributiv faţă de reuniunea, intersecţia, diferenţa şi diferenţa simetrică între mulţimi (şi la stânga, şi la dreapta). Pentru orice mulţimi A, B şi C, au loc egalităţile:

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ şi $(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ şi $(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$
- $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$ şi $(B \setminus C) \times A = (B \times A) \setminus (C \times A)$
- $A \times (B \,\Delta\, C) = (A \times B) \,\Delta\, (A \times C)$ şi $(B \,\Delta\, C) \times A = (B \times A) \,\Delta\, (C \times A)$

Reuniunea disjunctă a două mulţimi:

Definiţia 4.3. Fie A şi B două mulţimi. Se defineşte *reuniunea disjunctă* a mulţimilor A şi B ca fiind mulţimea notată $A \coprod B$ şi definită prin:

$$A \coprod B := (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}).$$

Observaţia 4.1. Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulţimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin ataşarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulţimi a unui indice corespunzător mulţimii respective (un element diferit de cel ataşat elementelor celeilalte mulţimi) (vom vorbi despre **indici** într–o discuţie despre **familii arbitrare de mulţimi**).

5 Mulţimi şi funcţii

Definiţia 5.1. Fie A şi B mulţimi oarecare. Se numeşte *funcţie* de la A la B un triplet $f := (A, G, B)$, unde $G \subseteq A \times B$, a. î., pentru orice $a \in A$, există un unic $b \in B$, cu proprietatea că $(a, b) \in G$.

Formal: $(\forall\, a \in A)\,(\exists\,!\, b \in B)\,((a, b) \in G)$.

Faptul că f este o funcţie de la A la B se notează cu $f : A \to B$ sau $A \xrightarrow{f} B$.

Mulţimea A se numeşte *domeniul* funcţiei f, B se numeşte *codomeniul* sau *domeniul valorilor* lui f, iar G se numeşte *graficul* lui f.

Pentru fiecare $a \in A$, unicul $b \in B$ cu proprietatea că $(a, b) \in G$ se notează cu $f(a)$ şi se numeşte *valoarea funcţiei f în punctul a*.

Remarca 5.1 ($(a, b) \in G \;\Leftrightarrow\; f(a) = b$). Dacă $f = (A, G, B)$ este o funcţie ($f : A \to B$), atunci graficul G al lui f este mulţimea de perechi: $G = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subseteq A \times B$.

Definiţia 5.2. Fie $f = (A, F, B)$ şi $g = (C, G, D)$ două funcţii ($f : A \to B$, iar $g : C \to D$).

- Egalitatea $f = g$ semnifică egalitatea de triplete $(A, F, B) = (C, G, D)$, i. e. spunem că $f = g$ ddacă:

  $A = C$ (are loc egalitatea domeniilor),
  $B = D$ (are loc egalitatea codomeniilor) şi
  $F = G$ (are loc egalitatea graficelor celor două funcţii, ceea ce, conform scrierii acestor grafice din remarca anterioară, se transcrie în egalitate punctuală, adică egalitate în fiecare punct: pentru orice $a \in A = C$, $f(a) = g(a)$).

- Dacă X este o mulţime a. î. $X \subseteq A$ şi $X \subseteq C$, atunci spunem că *f şi g coincid pe X* ddacă f şi g au aceleaşi valori în elementele lui X, adică: oricare ar fi $x \in X$, $f(x) = g(x) \in B \cap D$.

Notaţia 5.1 (putere de mulţimi). Pentru orice mulţimi A şi B, se notează cu B^A mulţimea funcţiilor de la A la B:

$$B^A = \{f \mid f : A \to B\}$$

Remarca 5.2 (există o unică funcţie de la $\emptyset$ la o mulţime arbitrară). Fie B o mulţime oarecare (**poate fi vidă şi poate fi nevidă**). Atunci $B^{\emptyset} = \{(\emptyset, \emptyset, B)\}$.

Remarca 5.3 (nu există nicio funcţie de la o mulţime nevidă la $\emptyset$). Fie A o mulţime a. î. $A \neq \emptyset$). Atunci $\emptyset^A = \emptyset$.

Definiţia 5.3. Pentru orice mulţimi A şi B, orice funcţie $f : A \to B$ şi orice submulţimi $X \subseteq A$ şi $Y \subseteq B$, se definesc:

- *imaginea lui X prin f* sau *imaginea directă a lui X prin f*, notată $f(X)$, este submulţimea lui B:

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq B$$

- $f(A)$ se mai notează cu $Im(f)$ şi se numeşte *imaginea lui f*:

$$Im(f) = f(A) = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$$

- *preimaginea lui Y prin f* sau *imaginea inversă a lui Y prin f*, notată $f^{-1}(Y)$ ($f^*(Y)$ în unele cărţi, pentru a o deosebi de imaginea lui Y prin inversa f^{-1} a lui f, care există numai atunci când f este inversabilă, deci numai atunci când f este bijectivă – a se vedea în cele ce urmează –, pe când preimaginea unei submulţimi a codomeniului poate fi definită pentru orice funcţie), este submulţimea lui A:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \subseteq A$$

Definiţia 5.4. Fie A şi B mulţimi şi $f : A \to B$ o funcţie. f se zice:

- *injectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există cel mult un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $a_1 \neq a_2$, atunci $f(a_1) \neq f(a_2)$
  - pentru orice $a_1, a_2 \in A$, dacă $f(a_1) = f(a_2)$, atunci $a_1 = a_2$
- *surjectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  - pentru orice $b \in B$, există (cel puţin un) $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists\, a \in A)\,(f(a) = b))$
  - $f(A) = B$
- *bijectivă* ddacă are loc oricare dintre următoarele condiţii echivalente:
  - f este simultan injectivă şi surjectivă
  - pentru orice $b \in B$, există exact un $a \in A$, astfel încât $f(a) = b$ (formal: $(\forall\, b \in B)\,(\exists!\, a \in A)\,(f(a) = b))$

Funcţiile injective, surjective, respectiv bijective se mai numesc *injecţii*, *surjecţii*, respectiv *bijecţii*.

Când notăm $f : A \to B$, subînţelegem că A şi B sunt mulţimi.

Remarca 5.4. Pentru orice funcţie $f : A \to B$:

- $f^{-1}(B) = A$;
- $f(\emptyset) = \emptyset$ şi $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$;
- dacă $X \subseteq Y \subseteq A$, atunci $f(X) \subseteq f(Y)$;
- dacă $V \subseteq W \subseteq B$, atunci $f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$;
- pentru orice $M \subseteq A$, $f^{-1}(f(M)) \supseteq M$, cu egalitate pentru f injectivă;
- pentru orice $N \subseteq B$, $f(f^{-1}(N)) \subseteq N$, cu egalitate pentru f surjectivă;
- în schimb, pentru orice $N \subseteq f(A) = Im(f)$, $f(f^{-1}(N)) = N$.

Definiţia 5.5 (funcţia identitate a unei mulţimi). Pentru orice mulţime A, notăm cu id_A *funcţia identică a lui A* (numită şi *funcţia identitate a lui A* sau *identitatea lui A*): $id_A : A \to A$, pentru orice $a \in A$, $id_A(a) = a$.

Definiţia 5.6 (compunerea de funcţii). Dacă A, B, C sunt mulţimi, iar $f : A \to B$ şi $g : B \to C$ sunt funcţii, atunci *compunerea funcţiei* g *cu funcţia* f este funcţia notată cu $g \circ f$ şi definită astfel: $g \circ f : A \to C$, pentru orice $a \in A$, $(g \circ f)(a) := g(f(a))$.

Definiţia 5.7 (inversa unei funcţii). Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$. f se zice *inversabilă* ddacă există o funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$.

Remarca 5.5 (dacă există, inversa unei funcţii este unică). Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$ o funcţie inversabilă. Atunci există o unică funcţie $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$.

Definiţia 5.8. Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$ o funcţie inversabilă. Atunci unica funcţie $g : B \to A$ cu proprietăţile $g \circ f = id_A$ şi $f \circ g = id_B$ se notează cu f^{-1} ($f^{-1} = g : B \to A$) şi se numeşte *inversa lui* f.

Remarca 5.6. Fie A şi B mulţimi, iar $f : A \to B$. Atunci: f este inversabilă ddacă este bijectivă.

Exerciţiul 5.1 (caracterizarea surjectivităţii prin existenţa unei inverse la dreapta, şi a injectivităţii prin existenţa unei inverse la stânga – temă). Fie A şi B mulţimi nevide, iar $f : A \to B$. Atunci:

(i) f este surjectivă ddacă $(\exists\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, conform (iii) de mai jos, în caz afirmativ, g este injectivă;

(ii) f este bijectivă ddacă $(\exists!\, g : B \to A)\,(f \circ g = id_B)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la dreapta g a lui f este $g = f^{-1}$, care este simultan inversă la dreapta şi inversă la stânga pentru f;

(iii) f este injectivă ddacă $(\exists\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, conform (i) de mai sus, în caz afirmativ, h este surjectivă;

(iv) f este bijectivă ddacă $(\exists!\, h : B \to A)\,(h \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, unica inversă la stânga h a lui f este $h = f^{-1}$, care este simultan inversă la stânga şi inversă la dreapta pentru f;

(v) după cum ştim, f este bijectivă ddacă este inversabilă, i. e. f este bijectivă ddacă $(\exists\, j : B \to A)\,(f \circ j = id_B$ şi $j \circ f = id_A)$; în plus, în caz afirmativ, j este unică, se notează cu f^{-1} şi se numeşte *inversa lui* f; dar, conform (i) şi (iii), avem şi următoarea caracterizare a bijectivităţii: f este bijectivă ddacă $(\exists\, g, h : B \to A)\,(f \circ g = id_B$ şi $h \circ f = id_A)$; în plus, conform (ii) şi (iv), în caz afirmativ, g şi h sunt unice şi $g = h = f^{-1}$.

Exerciţiul 5.2 (funcţiile imagine directă şi imagine inversă – temă). Fie A şi B mulţimi nevide, iar $f : A \to B$. Considerăm funcţiile:

$$\begin{cases} f_* : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B), & (\forall\, M \subseteq A)\,(f_*(M) := f(M)); \\ f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A), & (\forall\, N \subseteq B)\,(f^*(M) := f^{-1}(M)). \end{cases}$$

Atunci au loc următoarele echivalenţe:

(i) f este injectivă ddacă f_* este injectivă ddacă f^* este surjectivă ddacă $f^* \circ f_* = id_{\mathcal{P}(A)}$ (i. e. $(\forall\, M \subseteq A)\,(f^{-1}(f(M)) = M)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \subseteq B \setminus f(M))$;

(ii) f este surjectivă ddacă f_* este surjectivă ddacă f^* este injectivă ddacă $f_* \circ f^* = id_{\mathcal{P}(B)}$ (i. e. $(\forall\, N \subseteq B)\,(f(f^{-1}(N)) = N)$) ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) \supseteq B \setminus f(M))$;

(iii) din (i) şi (ii), obţinem: f este bijectivă ddacă f_* este bijectivă ddacă f^* este bijectivă ddacă f^* şi f_* sunt inverse una alteia ddacă $(\forall\, M \subseteq A)\,(f(A \setminus M) = B \setminus f(M))$.

6 Teoria cardinalelor

Definiţia 6.1. Două mulţimi A şi B se zic *echipotente* sau *cardinal echivalente* ddacă există o funcţie bijectivă de la A la B, fapt notat prin: $A \cong B$.

Definiţia 6.2. Pentru orice mulţime A, se numeşte *cardinalul lui* A sau *numărul cardinal al lui* A clasa tuturor mulţimilor B cu $A \cong B$, notată $|A|$.

Să observăm că:

- pentru orice mulţime A, $A \cong A$ (pentru că $id_A : A \to A$ este o bijecţie), deci $A \in |A|$

- pentru orice mulţimi A şi B, dacă $A \cong B$, atunci $B \cong A$ şi $|A| = |B|$, i. e. orice mulţime C satisface $A \cong C$ ddacă satisface $B \cong C$; aşadar avem chiar echivalenţele: $A \cong B$ ddacă $B \cong A$ ddacă $|A| = |B|$

- pentru orice mulţimi A şi B, dacă $A \ncong B$, atunci nu există nicio mulţime C cu proprietăţile: $C \in |A|$ (i. e. $A \cong C$) şi $C \in |B|$ (i. e. $B \cong C$); aşadar avem chiar echivalenţele: $A \ncong B$ ddacă $|A| \neq |B|$ ddacă $|A| \cap |B| = \emptyset$

Definiţia 6.3 (suma, produsul şi puterea de numere cardinale). Pentru orice mulţimi A şi B, avem, prin definiţie:

- $|A| + |B| := |A \coprod B|$
- $|A| \cdot |B| := |A \times B|$
- $|B|^{|A|} := |B^A|$

Propoziţia 6.1 (independenţa de reprezentanţi a operaţiilor cu numere cardinale). *Operaţiile cu numere cardinale, definite ca mai sus,* **nu depind de reprezentanţii claselor de cardinal echivalenţă**, *adică: pentru orice mulţimi A, A', B şi B' astfel încât $|A| = |A'|$ şi $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ şi $B \cong B'$), au loc:*

- $|A \coprod B| = |A' \coprod B'|$
- $|A \times B| = |A' \times B'|$
- $|B^A| = |(B')^{(A')}|$

Definiţia 6.4 (inegalităţi între numere cardinale). Pentru orice mulţimi A şi B, notăm cu:

- $|A| \leq |B|$ faptul că există o injecţie $j : A \to B$
- $|A| < |B|$ faptul că $|A| \leq |B|$ şi $|A| \neq |B|$, i. e. există o injecţie $j : A \to B$, dar nu există nicio bijecţie $f : A \to B$

Remarca 6.1. Definiţia anterioară este **independentă de reprezentanţii claselor de cardinal echivalenţă**, i. e., pentru orice mulţimi A, A', B şi B' astfel încât $|A| = |A'|$ şi $|B| = |B'|$ (adică $A \cong A'$ şi $B \cong B'$):

- există o injecţie de la A la B ddacă există o injecţie de la A' la B';
- $A \cong B$ ddacă $A' \cong B'$, aşadar: $A \ncong B$ ddacă $A' \ncong B'$.

Remarca 6.2. Dacă A şi B sunt mulţimi şi $A \subseteq B$, atunci $|A| \leq |B|$, întrucât **funcţia incluziune:** $i : A \to B$, $i(a) := a$ pentru orice $a \in A$, este injectivă.

Remarca 6.3 (definiţii echivalente pentru inegalităţi între numere cardinale). Pentru orice mulţimi A şi B:

- $|A| \leq |B|$ ddacă există o surjecţie $t : B \to A$ ddacă [există o mulţime C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]
- $|A| < |B|$ ddacă [există o surjecţie $t : B \to A$, dar nu există nicio bijecţie $g : B \to A$] ddacă [există o mulţime nevidă C, a. î. $|B| = |A| + |C|$]

Remarca 6.4. Inegalitatea $\leq$ este corect definită ca mai sus, în sensul că, pentru orice mulţimi A şi B, $|A| = |B|$ ddacă [$|A| \leq |B|$ şi $|B| \leq |A|$].

Notaţia 6.1. Desigur, folosim şi notaţiile $\geq$ şi $>$, cu semnificaţia: $|B| \geq |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| \leq |B|$, respectiv $|B| > |A| \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} |A| < |B|$, pentru orice mulţimi A şi B.

Teorema 6.1 (Cantor). *Pentru orice mulţime X, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.*

O construcţie pentru mulţimea numerelor naturale:

Numerele naturale pot fi construite cu ajutorul cardinalelor (al numerelor cardinale), printr–o construcţie echivalentă cu cea menţionată în primul curs:

$$\begin{cases} 0 := |\emptyset|, \\ 1 := |\{\emptyset\}|, \\ 2 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}\}|, \\ 3 := |\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}|, \\ \vdots \end{cases}$$

Mereu se consideră mulţimea având drept elemente toate mulţimile de la paşii anteriori: succesorul unui n este $n+1 := |\{0, 1, 2, \dots, n\}|$. Iar mulţimea tuturor elementelor construite astfel, denumite *numere naturale*, se notează cu $\mathbb{N}$.

În **definiţiile** de mai sus pentru **numerele naturale** trebuie rezolvată, într–un fel sau altul, problema următoare: cu definiţia de mai sus, orice $n \in \mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ este o clasă proprie, care nu poate aparţine unei mulţimi sau clase. Putem înlocui aceste clase cu etichete ale lor, de exemplu chiar cu, reprezentanţii lor de mai sus: $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$.

Definiţia de mai sus pentru **mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale** arată corectitudinea **principiului inducţiei matematice**: dacă o submulţime $S \subseteq \mathbb{N}$ satisface:

- $0 \in S$,
- pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $[n \in S \Rightarrow n + 1 \in S]$,

atunci $S = \mathbb{N}$.

Având mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale, se construiesc $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ şi se definesc operaţiile şi relaţiile de ordine pe aceste mulţimi în modul cunoscut din liceu.

Mulţimea numerelor naturale, $\mathbb{N}$, este o mulţime infinită, mai precis o mulţime numărabilă.

Notaţia 6.2 ($\aleph_0 := |\mathbb{N}|$). Cardinalul mulţimii numerelor naturale se notează cu $\aleph_0$, pronunţat "alef 0".

Definiţia 6.5. O mulţime X se zice *numărabilă* ddacă $|X| = \aleph_0$, i. e. ddacă $X \cong \mathbb{N}$.

Remarca 6.5. Orice $n \in \mathbb{N}$ satisface $n < \aleph_0$.

Definiţia 6.6. O mulţime X se zice *infinită*:

(i) *în sens Dedekind*, ddacă există $S \subsetneq X$ a. î. $S \cong X$

(ii) *în sens Cantor*, ddacă există $S \subseteq X$, a. î. S este numărabilă

(iii) *în sens obişnuit*, ddacă, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $X \ncong \{1, 2, \dots, n\}$

Teorema 6.2. *Cele trei definiţii de mai sus ale mulţimilor infinite sunt echivalente.*

Desigur, o *mulţime finită* este, prin definiţie, o mulţime care nu este infinită, adică, în conformitate cu definiţia de mai sus a mulţimilor infinite *în sens obişnuit*:

Definiţia 6.7. O *mulţime finită* este o mulţime X cu proprietatea că $X \cong \{1, 2, \dots, n\}$ pentru un anumit $n \in \mathbb{N}$.

Remarca 6.6. Conform definiţiei anterioare, **cardinalele finite**, i. e. cardinalele mulţimilor finite, sunt exact numerele naturale.

Remarca 6.7. Definiţia mulţimilor infinite în sens Cantor arată că $\aleph_0$ (i. e. cardinalul mulţimilor numărabile) este cel mai mic cardinal infinit, unde *cardinal infinit* (sau *cardinal transfinit*) înseamnă cardinal al unei mulţimi infinite.

Definiţia 6.8. O *mulţime cel mult numărabilă* este o mulţime finită sau numărabilă (adică având cardinalul mai mic sau egal cu $\aleph_0$).

Notaţia 6.3. Amintim următoarele notaţii consacrate pentru un segment al mulţimii $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi: pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, $\overline{a, b} := [a, b] := \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\} = \begin{cases} \{a, a+1, \dots, b\}, & \text{dacă } a \leq b; \\ \emptyset, & \text{dacă } a > b. \end{cases}$

Remarca 6.8. Mulţimea $\mathbb{Z}$ a numerelor întregi este numărabilă.

Mulţimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raţionale este numărabilă.

Definiţia 6.9. O *mulţime nenumărabilă* este, prin definiţie, o mulţime infinită care nu este numărabilă, i. e. o mulţime având cardinalul strict mai mare decât $\aleph_0$.

Remarca 6.9. Mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale este nenumărabilă.

Definiţia 6.10 ($\mathcal{C} := |\mathbb{R}|$). Cardinalul lui $\mathbb{R}$ se notează cu $\mathcal{C}$ şi se numeşte *puterea continuumului.*

- Conform celor de mai sus, $\aleph_0 < \mathcal{C}$.

Vom vedea că $|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}$ pentru orice mulţime M.

Remarca 6.10 ($\mathcal{C} = 2^{\aleph_0}$). $\mathbb{R} \cong \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Remarca 6.11. Oricare ar fi mulţimile A şi B:

- după cum am observat mai sus, $A \subseteq B$ implică $|A| \leq |B|$;
- dacă B este finită şi $A \subsetneq B$, atunci $|A| < |B|$.

În plus, după cum arată definiţia lui Cantor a mulţimilor infinite:

- dacă $|A| \leq |B|$ şi A este infinită, atunci B este infinită;
- dacă $|A| \leq |B|$ şi B este finită, atunci A este finită.

Observaţia 6.1. Conform celor de mai sus, faptul că o mulţime A este finită se exprimă, în simboluri, prin: $|A| < \aleph_0$. Pentru comoditate, vom folosi şi notaţia $|A| < \infty$ pentru faptul că o mulţime A este finită.

7 Familii arbitrare de mulţimi

Definiţia 7.1 (familie de elemente ale lui A indexată de I: $(x_i)_{i\in I} \subseteq A$). Fie I şi A mulţimi arbitrare.

O *familie de elemente ale lui A indexată de I* este o funcţie $f : I \to A$. Pentru orice $i \in I$, se notează $x_i := f(i) \in A$, astfel că familia f se mai notează sub forma $(x_i)_{i\in I} \subseteq A$.

Elementele mulţimii I se numesc *indicii* familiei $(x_i)_{i\in I}$.

- Există o singură familie vidă de elemente ale unei mulţimi arbitrare A, pentru că există o singură funcţie de la $\emptyset$ la A (a se vedea şi mai jos).
- Familia vidă nu este egală cu nicio familie nevidă, ci este egală doar cu ea însăşi.

Fie I şi A două mulţimi nevide, iar $(a_i)_{i\in I}$ şi $(b_i)_{i\in I}$ două familii de elemente din A indexate de I:

- $I \neq \emptyset$, $A \neq \emptyset$
- $(a_i)_{i\in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $a_i \in A$
- $(b_i)_{i\in I} \subseteq A$, i. e., pentru orice $i \in I$, $b_i \in A$

Cele două familii sunt egale ddacă sunt egale pe componente:

$$(a_i)_{i\in I} = (b_i)_{i\in I} \quad \text{ddacă}, \quad \text{pentru orice } i \in I,\ a_i = b_i.$$

Familii arbitrare de mulţimi:

Definiţia 7.2. Fie T şi I două mulţimi arbitrare. Se numeşte *familie de submulţimi ale lui T indexată de I* o funcţie $f : I \to \mathcal{P}(T)$. Pentru fiecare $i \in I$, se notează $A_i := f(i) \in \mathcal{P}(T)$, iar familia de submulţimi ale lui T se notează cu $(A_i)_{i\in I}$. Scriem $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ cu semnificaţia că, pentru fiecare $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(T)$. Elementele mulţimii I se numesc *indicii* familiei $(A_i)_{i\in I}$.

Pentru a generaliza definiţia anterioară la familii de mulţimi oarecare avem nevoie de acea definiţie mai cuprinzătoare a noţiunii de funcţie (a se vedea sistemul axiomatic pentru teoria mulţimilor din Cursul I), care permite unei funcţii f definite pe I să aibă drept codomeniu o clasă (nu neapărat o mulţime), anume clasa tuturor mulţimilor în acest caz.

Operaţii cu familii arbitrare de mulţimi:

Definiţia 7.3. Fie I o mulţime arbitrară şi $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi (părţi ale unei mulţimi T sau mulţimi arbitrare) indexată de I.

Se definesc următoarele operaţii:

- *reuniunea familiei* $(A_i)_{i\in I}$ este mulţimea notată $\bigcup_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \mid (\exists\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\exists\, i)\,(i \in I \text{ şi } x \in A_i)\}$$

- *intersecţia familiei* $(A_i)_{i\in I}$ este mulţimea notată $\bigcap_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \mid (\forall\, i \in I)\,(x \in A_i)\} = \{x \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow x \in A_i)\}$$

- *produsul cartezian al familiei* $(A_i)_{i\in I}$ (numit şi *produsul direct al familiei* $(A_i)_{i\in I}$) este mulţimea notată $\prod_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\prod_{i\in I} A_i = \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i \in I)\,(a_i \in A_i)\} =$$
$$= \{(a_i)_{i\in I} \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i \mid (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow a_i \in A_i)\},$$

sau, altfel scris (cu definiţia unei familii de elemente exemplificate mai sus pe familii de numere reale):

$$\prod_{i\in I} A_i = \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A_i)\} =$$

$$= \{f \mid f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i, (\forall\, i)\,(i \in I \Rightarrow f(i) \in A_i)\}.$$

Notaţia 7.1. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi mulţimile $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Produsul direct $\prod_{i\in\overline{1,n}} A_i$ se mai notează cu $\prod_{i=1}^{n} A_i$, iar un element $(a_i)_{i\in\overline{1,n}}$ al acestui produs direct se mai notează cu $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. În cazul particular în care $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$, $\prod_{i\in\overline{1,n}} A \overset{\text{notaţie}}{=} \prod_{i=1}^{n} A \overset{\text{notaţie}}{=} A^n$.

Remarca 7.1 (puterile unei mulţimi: caz particular al produsului direct). În definiţia anterioară, dacă $I \neq \emptyset$ şi, pentru orice $i \in I$, $A_i = A$, atunci $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} A = A$, aşadar $\prod_{i\in I} A = \{f \mid f : I \to A, (\forall\, i \in I)\,(f(i) \in A)\} = \{f \mid f : I \to A\} = A^I$. În particular, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, dacă $|I| = n$, avem: $A^n = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid (\forall\, i \in \overline{1,n})\,(a_i \in A)\} = \{f \mid f : \overline{1,n} \to A\} = A^{\overline{1,n}} = A^I$.

Remarca 7.2. Pentru orice mulţimi A, I şi J, dacă $I \cong J$, atunci $A^I \cong A^J$. Acest fapt rezultă direct din independenţa de reprezentanţi a operaţiei de exponenţiere asupra numerelor cardinale.

Exerciţiul 7.1 (temă – distributivitatea produsului cartezian faţă de reuniuni şi intersecţii arbitrare). Fie A o mulţime, I o mulţime nevidă (de fapt poate fi şi vidă – vom vedea), iar $(B_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi. Să se demonstreze că:

- $A \times (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \times B_i)$ şi $(\bigcup_{i\in I} B_i) \times A = \bigcup_{i\in I}(B_i \times A)$
- $A \times (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \times B_i)$ şi $(\bigcap_{i\in I} B_i) \times A = \bigcap_{i\in I}(B_i \times A)$

Exerciţiul 7.2 (temă – distributivitatea generalizată a produsului cartezian faţă de intersecţie). Fie I şi J o mulţimi nevide (de fapt pot fi şi vide – vom vedea), iar $(A_{i,j})_{i\in I, j\in J}$ o familie de mulţimi (indexată de $I \times J$; poate fi scrisă şi sub forma: $(A_{(i,j)})_{(i,j)\in I\times J}$). Să se demonstreze că:

$$\prod_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{i,j} = \bigcap_{j\in J}\prod_{i\in I} A_{i,j}$$

Amintesc că asociativitatea unei operaţii binare, cum sunt reuniunea şi intersecţia a două mulţimi, permite scrierea unui şir de astfel de operaţii fără paranteze: pentru orice mulţimi A_1, A_2, A_3:

- $(A_1 \cup A_2) \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3) \stackrel{\text{notaţie}}{=} A_1 \cup A_2 \cup A_3$
- $(A_1 \cap A_2) \cap A_3 = A_1 \cap (A_2 \cap A_3) \stackrel{\text{notaţie}}{=} A_1 \cap A_2 \cap A_3$

Propoziţia 7.1 (asociativitatea produsului direct ca operaţie binară). *Fie A_1, A_2, A_3 mulţimi arbitrare. Atunci: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \cong (A_1 \times A_2) \times A_3 \cong \prod_{i=1}^{3} A_i$, întrucât următoarele funcţii sunt bijecţii: $A_1 \times (A_2 \times A_3) \xrightarrow{\varphi} (A_1 \times A_2) \times A_3 \xrightarrow{\psi} \prod_{i=1}^{3} A_i$, pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ şi orice $a_3 \in A_3$, $\varphi(a_1, (a_2, a_3)) := ((a_1, a_2), a_3)$ şi $\psi((a_1, a_2), a_3) := (a_1, a_2, a_3)$.*

În plus, fiecare dintre bijecţiile φ şi ψ se identifică cu identitatea (i. e. cu egalitatea), adică se stabilesc prin convenţie egalităţile: $(a_1, (a_2, a_3)) = ((a_1, a_2), a_3) = (a_1, a_2, a_3)$ pentru orice $a_1 \in A_1$, orice $a_2 \in A_2$ şi orice $a_3 \in A_3$.

Prin urmare, putem scrie: $A_1 \times (A_2 \times A_3) = (A_1 \times A_2) \times A_3 = \prod_{i=1}^{3} A_i$.

Ca şi la funcţii aplicate unor perechi de elemente, folosim **licenţa de scriere (convenţia):** pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, orice mulţimi $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$, orice funcţie $f : \prod_{i=1}^{n} A_i \to B$ şi orice elemente $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n$, se notează $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) := f((a_1, a_2, \ldots, a_n))$ (i. e. una dintre perechile de paranteze se poate elimina din scriere).

Când va fi convenabil să folosim următoarea **convenţie**, şi va fi clar la elementele căror mulţimi ne vom referi, prin notaţii de forma:

- $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ vom subînţelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_i)_{i\in I} \in A^I$ vom subînţelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in I$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ vom subînţelege: $a_i \in A_i$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a_1, a_2, \ldots a_n) \in A^n$ vom subînţelege: $a_i \in A$ pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$,
- $(a, b) \in A \times B$ vom subînţelege: $a \in A$ şi $b \in B$,
- $(a, b) \in A^2$ vom subînţelege: $a, b \in A$,

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $A, B, A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulţimi, I este o mulţime nevidă, iar $(A_i)_{i\in I}$ este o familie (nevidă) de mulţimi.

Definiţia 7.4. Fie I o mulţime arbitrară şi $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulţimi (părţi ale unei mulţimi T sau mulţimi arbitrare) indexată de I.

Se defineşte *reuniunea disjunctă* a familiei $(A_i)_{i\in I}$ ca fiind mulţimea notată $\coprod_{i\in I} A_i$ şi definită prin:

$$\coprod_{i\in I} A_i := \bigcup_{i\in I} (A_i \times \{i\})$$

Observaţia 7.1. Reuniunea disjunctă este "un fel de reuniune" în care mulţimile care se reunesc sunt "făcute disjuncte", prin ataşarea la fiecare element al uneia dintre aceste mulţimi a indicelui mulţimii respective.

Notaţia 7.2. Adesea, elementele reuniunii disjuncte se notează fără indicii ataşati, considerând că, atunci când se specifică, despre un element x al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$, că $x \in A_{i_0}$, pentru un anumit $i_0 \in I$, atunci se înţelege că este vorba despre elementul (x, i_0) al reuniunii disjuncte $\coprod_{i\in I} A_i$ (se identifică x cu (x, i_0)).

Notaţia 7.3. La fel ca la produsul direct, dacă avem o familie finită şi nevidă de mulţimi, $(A_i)_{i\in\overline{1,n}}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, atunci avem notaţiile echivalente pentru reuniunea disjunctă a acestei familii:

$$\coprod_{i\in\overline{1,n}} A_i \stackrel{\text{notaţie}}{=} \coprod_{i=1}^{n} A_i \stackrel{\text{notaţie}}{=} A_1 \coprod A_2 \coprod \ldots \coprod A_n$$

Remarca 7.3. Ultima dintre notaţiile de mai sus este permisă datorită **asociativităţii reuniunii disjuncte** ca operaţie binară (adică aplicată unei familii formate din două mulţimi): pentru orice mulţimi A_1, A_2, A_3, se arată imediat (folosind definiţia reuniunii disjuncte şi câte o identificare de indici, i. e. câte o bijecţie între mulţimile de indici care apar) că are loc legea de asociativitate: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) \cong (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 \cong \coprod_{i=1}^{3} A_i$, adică, prin identificarea acestor bijecţii cu identitatea, putem scrie: $A_1 \coprod (A_2 \coprod A_3) = (A_1 \coprod A_2) \coprod A_3 = \coprod_{i=1}^{3} A_i$.

Aritatea unei operaţii a unei structuri algebrice (cu o singură *mulţime suport*, o singură mulţime de elemente) este **numărul argumentelor (operanzilor, variabilelor) acelei operaţii**. Dacă structura algebrică are mulţimea suport A, iar f este o operaţie n–ară pe A, cu $n \in \mathbb{N}$, atunci $f : \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ de } A} \to A$ (f este o funcţie cu n argumente din A, cu valori tot în A).

Remarca 7.4 (reuniunea familiei vide este vidă). Dacă recitim definiţia reuniunii unei familii arbitrare, observăm că reuniunea familiei vide este mulţimea elementelor pentru care există un $i \in \emptyset$ cu o anumită proprietate, condiţie care este întotdeauna falsă, deci reuniunea familiei vide este $\emptyset$.

Remarca 7.5 (produsul direct al familiei vide este un singleton). Cele de mai sus arată că produsul direct al familiei vide este mulţimea cu unicul element dat de unica funcţie de la $\emptyset$ la $\emptyset$, anume $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$, adică produsul direct al familiei vide este singletonul $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$.

Operaţiile zeroare sunt constantele structurilor algebrice: de exemplu, elementul neutru al unui grup G este o funcţie φ de la un singleton (anume $\{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\}$) la G: $\varphi : \{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)\} \to G$, iar o funcţie definită pe un singleton are o singură valoare ($\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) \in G$), deci poate fi identificată cu această unică valoare a ei, care este un element distins, o constantă din G: $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset) = e \in G$, şi identificăm $\varphi = e$.

Remarca 7.6 (reuniunea disjunctă a familiei vide este vidă). Definiţia reuniunii disjuncte a unei familii arbitrare de mulţimi arată că reuniunea disjunctă a familiei vide de mulţimi este egală cu, reuniunea familiei vide de mulţimi, care este $\emptyset$.

Exemplul 7.1. Dacă A şi B sunt mulţimi, iar $f : A \to B$ şi $g : A \to B$, iar pe mulţimea B avem, de exemplu, o operaţie binară $+$ şi o **relaţie binară** (vom vedea) $\leq$, atunci putem defini, **punctual**, operaţia $+$, respectiv relaţia $\leq$, între funcţiile f şi g, astfel:

- $f + g : A \to B$, pentru orice $x \in A$, $(f+g)(x) \stackrel{\text{definiţie}}{=} f(x) + g(x)$
- prin definiţie, $f \leq g$ ddacă, pentru orice $x \in A$, $f(x) \leq g(x)$.

Definiţia 7.5 (familii de funcţii între două mulţimi fixate A şi B). Fie I, A şi B mulţimi arbitrare. O *familie de funcţii de la A la B indexată de I* este o familie de elemente ale mulţimii B^A indexată de I, i. e. o funcţie $h : I \to B^A$ (pentru orice $i \in I$, $f_i \stackrel{\text{notaţie}}{=} h(i) : A \to B$).

Se pot defini şi operaţii cu familii arbitrare de funcţii, tot **punctual**:

Exemplul 7.2. Dacă I, A şi B sunt mulţimi nevide, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii de la A la B (adică, pentru orice $i \in I$, $f_i : A \to B$), B este o **mulţime ordonată** (vom vedea) şi, pentru orice $x \in A$, submulţimea $\{f_i(x) \mid i \in I\} \subseteq B$ are un cel mai mare element (un **maxim**), atunci putem defini funcţia:

$$\max\{f_i \mid i \in I\} : A \to B,$$

astfel: pentru orice $x \in A$,

$$(\max\{f_i \mid i \in I\})(x) \stackrel{\text{definiţie}}{=} \max\{f_i(x) \mid i \in I\}.$$

Definiţia 7.6 (familii de funcţii – cazul general – material facultativ). Fie I o mulţime arbitrară, iar $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ familii de mulţimi indexate de I.

O *familie de funcţii* $(f_i)_{i\in I}$ *indexată de* I cu $f_i : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$ este un element al produsului direct $\prod\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, adică o familie de elemente ale mulţimii $\bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$ indexată de I cu elementul de indice i aparţinând lui $B_i^{A_i}$ pentru fiecare $i \in I$, i. e. o funcţie $h : I \to \bigcup\limits_{i\in I} B_i^{A_i}$, cu $f_i = h(i) : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$.

Definiţia 7.7 (operaţiile cu familii arbitrare de funcţii generalizează compunerea de funcţii – material facultativ). Dacă I este o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulţimi, C este o mulţime, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii şi g este o funcţie a. î., pentru fiecare $i \in I$, $f_i : A_i \to B_i$, iar $g : \prod\limits_{i\in I} B_i \to C$, atunci putem defini funcţia $g((f_i)_{i\in I}) : \prod_{i\in I} A_i \to C$ prin: oricare ar fi $(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, $g((f_i)_{i\in I}))((x_i)_{i\in I}) := g((f_i(x_i))_{i\in I})$: *operaţia* g (de aritate, i. e. număr de argumente, $|I|$) *aplicată familiei de funcţii* $(f_i)_{i\in I}$*, definită* **punctual**.

Cazul finit: $I = \overline{1,n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$: $g(f_1,\dots,f_n) : A_1 \times \ldots \times A_n \to C$, pentru orice $x_1 \in A_1,\dots,x_n \in A_n$, $g(f_1,\dots,f_n)(x_1,\dots,x_n) := g(f_1(x_1),\dots,f_n(x_n))$.

La fel se pot generaliza relaţiile binare între funcţii la relaţii de aritate arbitrară, chiar infinită, adică, pentru familia $(f_i)_{i\in I}$ de mai sus, submulţimi ale lui $\prod\limits_{i\in I} B_i$: relaţii de aritate (i. e. număr de argumente) $|I|$ – a se vedea în Cursul III definiţia unei relaţii n–are:

Definiţia 7.8 (material facultativ). Dacă I este o mulţime nevidă, $(A_i)_{i\in I}$ şi $(B_i)_{i\in I}$ sunt familii de mulţimi, $(f_i)_{i\in I}$ este o familie de funcţii cu $f_i : A_i \to B_i$ pentru fiecare $i \in I$, iar $R \subseteq \prod\limits_{i\in I} B_i$, atunci: *familia* $(f_i)_{i\in I}$ *de funcţii se află în relaţia* R, notat $(f_i)_{i\in I} \in R$, ddacă $(f_i(x_i))_{i\in I} \in R$ pentru fiecare $(x_i)_{i\in I} \in \prod\limits_{i\in I} A_i$.

Cazul finit: $I = \overline{1,n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, astfel că $R \subseteq B_1 \times \ldots \times B_n$ este o relaţie n–ară: $(f_1,\dots,f_n) \in R$ ddacă, pentru orice $x_1 \in A_1,\dots,x_n \in A_n$, $(f_1(x_1),\dots,f_n(x_n)) \in R$.

Exerciţiul 7.3 (imagini şi preimagini de reuniuni şi intersecţii arbitrare de mulţimi printr–o funcţie). Fie A, B, I şi J mulţimi nevide (de fapt, pot fi şi vide – vom vedea), $f : A \to B$, iar $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A)$ şi $(B_j)_{j\in J} \subseteq \mathcal{P}(B)$. Să se demonstreze că:

(i) $f^{-1}(\bigcup\limits_{j\in J} B_j) = \bigcup\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

(ii) $f(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \bigcup\limits_{i\in I} f(A_i)$;

(iii) $f^{-1}(\bigcap\limits_{j\in J} B_j) = \bigcap\limits_{j\in J} f^{-1}(B_j)$;

(iv) $f(\bigcap\limits_{i\in I} A_i) \subseteq \bigcap\limits_{i\in I} f(A_i)$;

(v) f este injectivă ddacă, pentru orice mulţime nevidă K şi orice $(M_k)_{k\in K} \subseteq \mathcal{P}(A)$, $f(\bigcap\limits_{k\in K} M_k) = \bigcap\limits_{k\in K} f(M_k)$.

(vi) Să se dea un exemplu pentru incluziune strictă la punctul (iv).

8 Funcţii caracteristice

Definiţia 8.1. Fie T o mulţime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, definim *funcţia caracteristică a lui* A *(raportat la* T*)*: $\chi_A : T \to \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $\chi_A(x) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } x \notin A, \\ 1, & \text{dacă } x \in A. \end{cases}$

În cazul particular în care mulţimea totală T este finită şi nevidă: $T = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, funcţia caracteristică χ_A poate fi dată prin vectorul valorilor sale: $(\chi_A(x_1), \chi_A(x_2), \dots, \chi_A(x_n))$; acest vector de valori din mulţimea $\{0,1\}$ se numeşte *vectorul caracteristic al lui A*. A se observa că suma valorilor din acest vector este egală cu, cardinalul lui A: $\chi_A(x_1) + \chi_A(x_2) + \ldots + \chi_A(x_n) = |A|$.

Propoziţia 8.1 (principiul includerii şi al excluderii). *Pentru orice n natural nenul şi orice mulţimi finite $M_1, M_2, \dots, M_n$, are loc egalitatea:*

$$|\bigcup_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |M_i \cap M_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |M_i \cap M_j \cap M_k| - \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cap M_2 \cap \ldots M_n| =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots i_s\leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \ldots M_{i_s}|.$$

Şi dual: $|\bigcap_{i=1}^{n} M_i| = \sum_{i=1}^{n} |M_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n} |M_i \cup M_j| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n} |M_i \cup M_j \cup M_k| - \ldots +$

$$+(-1)^{n-1} \cdot |M_1 \cup M_2 \cap \ldots M_n| = \sum_{s=1}^{n} \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots i_s\leq n} (-1)^{s-1} \cdot |M_{i_1} \cup M_{i_2} \cup \ldots M_{i_s}|.$$

Propoziţia 8.2 (proprietăţile funcţiilor caracteristice). *Fie T o mulţime nevidă arbitrară, fixată. Pentru orice $A \in \mathcal{P}(T)$, notăm cu χ_A funcţia caracteristică a lui A (raportat la T). Mai notăm funcţiile constante: $\mathbf{0} : T \to \{0,1\}$ şi $\mathbf{1} : T \to \{0,1\}$, pentru orice $x \in T$, $\mathbf{0}(x) = 0$ şi $\mathbf{1}(x) = 1$.*

Atunci au loc proprietăţile:

- $\chi_\emptyset = \mathbf{0}$ *şi* $\chi_T = \mathbf{1}$
- *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $A = \chi_A^{-1}(\{1\})$
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalenţa:* $A \subseteq B$ *ddacă* $\chi_A \leq \chi_B$ *(punctual, i. e.: pentru orice* $x \in T$, $\chi_A(x) \leq \chi_B(x)$*)*
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, *are loc echivalenţa:* $A = B$ *ddacă* $\chi_A = \chi_B$
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B = \min\{\chi_A, \chi_B\}$
- *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_A = \chi_A^2$
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_A \cdot \chi_B = \max\{\chi_A, \chi_B\}$
- *pentru orice* $A, B \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_A \cdot \chi_B$
- *pentru orice* $A \in \mathcal{P}(T)$, $\chi_{T\setminus A} = \mathbf{1} - \chi_A$
- $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2 \cdot \chi_A \cdot \chi_B$

Remarca 8.1. Fie T şi I două mulţimi nevide şi $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(T)$ o familie de părţi ale lui T indexată de I. Atunci au loc:

- $\chi_{\bigcup_{i\in I} A_i} = \max\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$
- $\chi_{\bigcap_{i\in I} A_i} = \min\{\chi_{A_i} \mid i \in I\}$

Remarca 8.2 (legile de distributivitate generalizată pentru $\cup$ şi $\cap$). Pentru orice mulţime nevidă I, orice mulţime A şi orice familie de mulţimi $(A_i)_{i\in I}$, au loc egalităţile:

- **distributivitatea generalizată a $\cup$ faţă de $\cap$:** $A \cup (\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i)$
- **distributivitatea generalizată a $\cap$ faţă de $\cup$:** $A \cap (\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I}(A \cap A_i)$

Propoziţia 8.3. *Pentru orice mulţime nevidă T, $\mathcal{P}(T) \cong \{0,1\}^T$.*

Corolarul 8.1. *Pentru orice mulţime T, $|\mathcal{P}(T)| = 2^{|T|}$.*

A se vedea precizările despre **examen** şi **temele obligatorii** de la sfârşitul Cursului II.