Γ-teoreme

Fie Γ o mulţime de formule. Definiţia Γ-teoremelor este un nou exemplu de definiţie inductivă.

Definiţia 1.35

Γ-teoremele sunt formulele lui LP definite astfel:

(T0) *Orice axiomă este Γ-teoremă.*

(T1) *Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.*

(T2) *Dacă φ şi $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.*

(T3) *Numai formulele obţinute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ-teoreme.*

Dacă φ este Γ-teoremă, atunci spunem şi că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Γ-teoreme

Notaţii

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulţimea Γ-teoremelor	Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ este Γ-teoremă	$\vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	$:\Leftrightarrow$	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.			

Definiţia 1.36

O formulă φ se numeşte teoremă a lui LP dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condiţiile (T0), (T1), (T2) folosind notaţia $\vdash$, obţinem

Propoziţia 1.37

(i) *dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;*

(ii) *dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;*

(iii) *dacă $\Gamma \vdash \varphi$ şi $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.*

Γ-teoreme

O definiţie alternativă a Γ-teoremelor:

Definiţia 1.38

Mulţimea $Thm(\Gamma)$ este intersecţia tuturor mulţimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăţi:

(i) *$Axm \subseteq \Sigma$;*

(ii) *$\Gamma \subseteq \Sigma$;*

(iii) *Σ este închisă la modus ponens:*

dacă $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Γ-teoreme

Definiţia Γ-teoremelor dă naştere la metoda de demonstraţie prin inducţie după Γ-teoreme.

Versiunea 1

Fie $\boldsymbol{P}$ o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ-teoremă satisface $\boldsymbol{P}$ astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea $\boldsymbol{P}$;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea $\boldsymbol{P}$;

(iii) demonstrăm că dacă φ şi $\varphi \to \psi$ au proprietatea $\boldsymbol{P}$, atunci ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Versiunea 2

Fie Σ o mulţime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă este în Σ;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ;

(iii) demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ şi $\varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Γ-teoreme

Propoziția 1.39

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

(i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

(ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$Thm(\Gamma) \vdash \varphi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Γ-demonstrații

Definiția 1.40

O Γ-demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) θ_i este axiomă;

(ii) $\theta_i \in \Gamma$;

(iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$.

O $\emptyset$-demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Lema 1.41

Dacă $\theta_1, \ldots, \theta_n$ este o Γ-demonstrație, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \quad \text{pentru orice } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dem.: Exercițiu.

Γ-demonstrații

Definiția 1.42

Fie φ o formulă. O Γ-demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ-demonstrației.

Propoziția 1.43

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ-demonstrație a lui φ.

Proprietăți sintactice

Propoziția 1.44

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ, $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.

Dem.: "$\Leftarrow$" Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziția 1.39.(i) obținem că $\Gamma \vdash \varphi$.
"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 1.43, φ are o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$ este o Σ-demonstrație a lui φ, deci $\Sigma \vdash \varphi$. $\square$

$\vdash \varphi \to \varphi$

Propoziția 1.45

Pentru orice formulă φ, $\vdash \varphi \to \varphi$.

Dem.:

(1) $\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$
(A2) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$, $\chi := \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)

(2) $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$
(A1) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)

(3) $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 1.37.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)

(4) $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$
(A1) (cu φ, $\psi := \varphi$) și Propoziția 1.37.(i)

(5) $\vdash \varphi \to \varphi$
(MP): (3), (4) □

Teorema deducției

Teorema 1.46 (Teorema deducției)

Fie $\Gamma \subseteq Form$ și $\varphi, \psi \in Form$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \quad \textit{ddacă } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Dem.: "$\Leftarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziția 1.39.(i)
(3)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$	Propoziția 1.37.(ii)
(4)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$	(MP): (2), (3).

Teorema deducției

"$\Rightarrow$" Fie

$$\Sigma := \{\psi \in Form \mid \Gamma \vdash \varphi \to \psi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după $\Gamma \cup \{\varphi\}$-teoreme.

- Fie ψ o axiomă sau o formulă din Γ. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \psi$	Propoziția 1.37.(i), (ii)
(2)	$\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	(A1) și Propoziția 1.37.(i)
(3)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	(MP): (1), (2).

Așadar $\psi \in \Sigma$.

- Fie $\psi = \varphi$. Atunci $\varphi \to \psi = \varphi \to \varphi$ este teoremă, conform Propoziției 1.45, deci $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Așadar $\psi \in \Sigma$.

Teorema deducției

- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens.

Presupunem că $\psi, \psi \to \chi \in \Sigma$ și trebuie să arătăm că $\chi \in \Sigma$. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză inducție
(2)	$\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	ipoteză inducție
(3)	$\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	(A2) și P.1.37.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (2), (3).
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (1), (4).

Așadar $\chi \in \Sigma$. □

Teorema deducției este un instrument foarte util pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Propoziția 1.47

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)). \tag{35}$$

Dem.: Folosind teorema deducției observăm că

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

(1)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$	Propoziția 1.37.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziția 1.37.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$	Propoziția 1.37.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$	(MP): (3), (4). □

Propoziția 1.48

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ,

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \ \text{ și } \ \Gamma \vdash \psi \to \chi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \chi.$$

Dem.:

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	P.1.47 și P.1.39.(ii)
(3)	$\Gamma \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (3), (4). □

Propoziția 1.49

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)) \tag{36}$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.50

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ,

$$\Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \neg(\varphi \to \varphi) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Exercițiu.

Câteva consecințe

Propoziția 1.51

Pentru orice formule φ, ψ,

$$
\begin{aligned}
\{\psi, \neg\psi\} &\vdash \varphi && (37)\\
&\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi) && (38)\\
&\vdash \psi \to (\neg\psi \to \varphi) && (39)\\
&\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi && (40)\\
&\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi && (41)\\
&\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi) && (42)\\
\{\psi, \neg\varphi\} &\vdash \neg(\psi \to \varphi) && (43)\\
&\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi && (44)\\
&\vdash (\neg\varphi \to \varphi) \to \varphi && (45)
\end{aligned}
$$

Dem.: Exercițiu.