GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 12
Conice

Voi începe prin a enumera conicele şi în primul rând cele ce pot fi descrise ca locuri geometrice.

Elipsa se defineşte ca fiind locul geometric al punctelor din plan ce au suma distanţelor la două puncte fixate (numite focare, notate în figura de mai jos cu F_1 şi F_2) constantă. Notăm constanta cu $2a$. Ecuaţia elipsei ce rezultă din această definiţie este $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Trecem radicalul ce conţine $(x-c)^2$ în membrul drept, ridicăm la pătrat, reducem termenii asemenea şi obţinem $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx$. Ridicăm din nou la pătrat, reducem termenii asemenea şi ajungem la ecuaţia $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. Avem $a>c>0$ şi facem notaţia $b^2=a^2-c^2>0$. Cu această notaţie ecuaţia devine $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$. Împărţind cu a^2b^2 obţinem $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Această ecuaţie se numeşte *ecuaţia redusă* a elipsei. În figura de mai jos avem o elipsă orizontală cu $a>b$. Semiaxa majoră, mai lungă, de lungime a, este pe Ox. Semiaxa minoră, mai scurtă, este de lungime b şi este pe axa Oy. În afară de elipsă, punctat, am figurat şi dreptunghiul de laturi $2a$ şi $2b$, centrat în $O(0,0)$, dreptunghi în care înscriem elipsa. Cantitatea $0<e=\frac{c}{a}<1$ se numeşte *excentricitatea elipsei.* Elipsa este o conică cu centru.

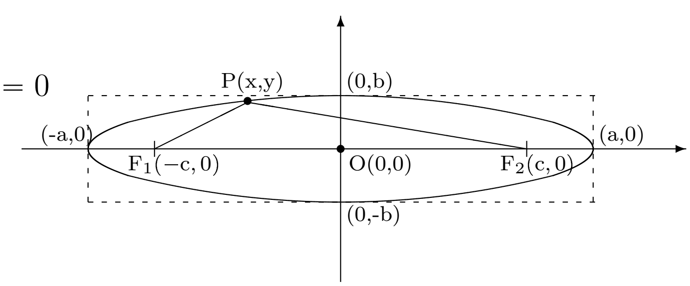
Elipsa

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$

centru: O(0,0)

lungime semiaxe: a, b

$b^2=a^2-c^2, a>c>0$



Cercul este elipsa pentru care focarele F_1 şi F_2 coincid. În acest caz, cele două focare se confundă cu centrul cercului. Deci pentru $c=0$ semiaxele sunt egale şi ecuaţia cercului de centru $O(0,0)$ este $x^2+y^2=r^2$, unde r este raza cercului. Cercul este deci locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fixat, numit centrul cercului.

Hiperbola este locul geometric al punctelor din plan pentru care diferenţa distanţelor la două puncte fixate este constantă. Notăm constanta cu $2a$. Folosind definiţia scriem ecuaţia $\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$. Făcând calcule similare ca şi în cazul elipsei ajungem la relaţia $(c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)$. $c > a > 0$ şi notăm $b^2 = c^2 - a^2$. Împărţind la a^2b^2 obţinem *ecuaţia redusă* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Hiperbola are două asimptote, anume dreptele de ecuaţii $y = \pm\frac{b}{a}x$. În figură, în afară de hiperbolă am reprezentat punctat dreptunghiul centrat în $O(0,0)$ de laturi $2a$ şi $2b$, dreptunghi ale cărui diagonale sunt cele două asimptote. Hiperbola este conică cu centru. *Excentricitatea hiperbolei* este $e = \frac{c}{a} > 1$.

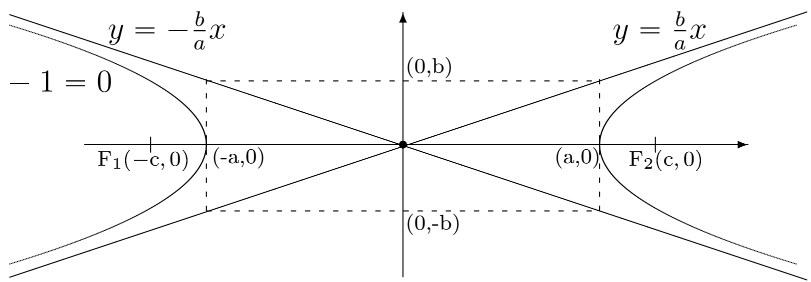
Hiperbola

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

centru: O(0,0)

asimptote: $y = \pm\frac{b}{a}x$

$b^2 = c^2 - a^2, c > a > 0$



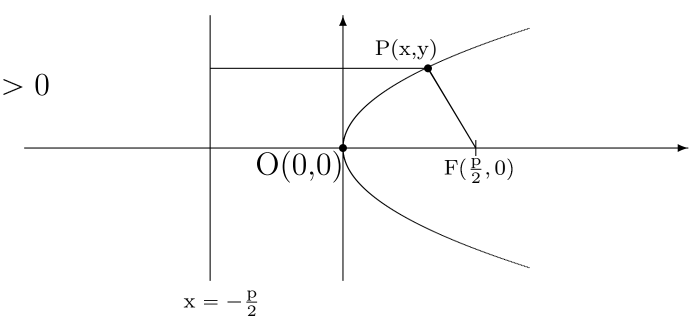
Parabola este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fixat numit *focar* şi de o dreaptă fixată, numită *directoare*. Scriind ecuaţia ce reiese din definiţie şi făcând calculele algebrice ca şi în cazurile anterioare obţinem *ecuaţia redusă* $2px = y^2$, sau $2py = x^2$. În primul caz dreapta directoare este verticală, iar în al doilea caz este orizontală. Parabola nu are centru. *Excentricitatea parabolei = 1.*

Parabola

ecuaţie redusă: $2px = y^2, p > 0$

fără centru

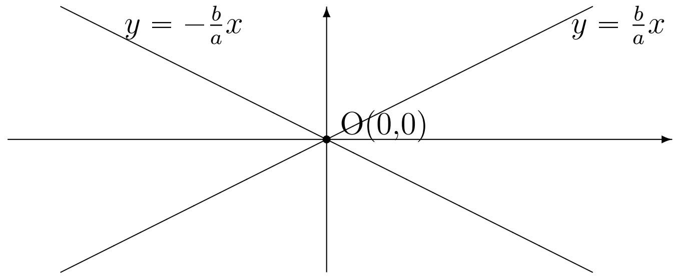
axă de simetrie: $y = 0$



Reuniune de drepte concurente

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$

centru: O(0,0)

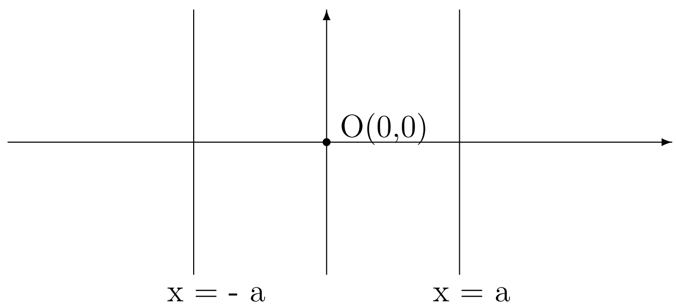


Cele două drepte concurente au ca centru punctul lor de intersecţie, în acest caz, punctul $O(0, 0)$.

Reuniune de drepte paralele

ecuaţie redusă: $x^2 - a^2 = 0$

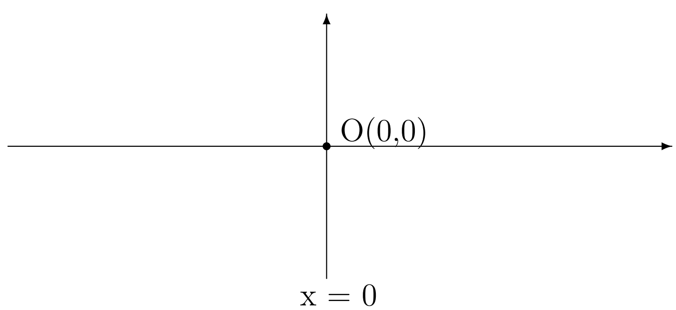
infinitate de centre



Două drepte confundate

ecuaţie redusă: $x^2 = 0$

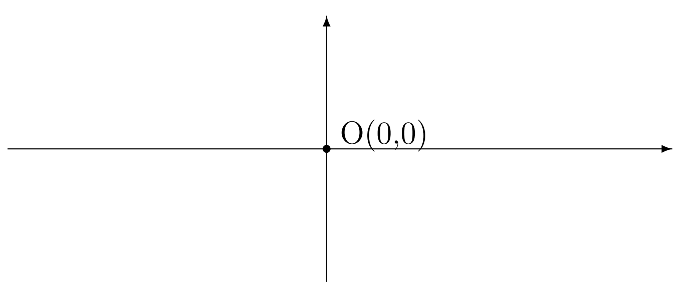
infinitate de centre



Un punct

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

centru: O(0,0)



Mulţimea vidă

ecuaţie redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$

Până aici am descris ecuaţiile reduse ale conicelor. O conică este descrisă printr-o ecuaţie de tipul:

$$\mathcal{C} : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

unde $a_{ij} \in \mathbb{R}, (\forall)i, j = \overline{1,3}$ şi $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$.

Conicei i se asociază matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Submatricea de ordin 2 din stânga sus $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ este matricea unei forme pătratice pe $\mathbb{R}^2$.

Notăm $\Delta = \det(A), \delta = \det(A_2), I = \mathrm{tr}(A_2) = a_{11} + a_{22}$.

Teorema 1. $\Delta = \det(A), \delta = \det(A_2), I = \mathrm{tr}(A_2)$ *sunt invarianţi la translaţii şi transformări ortogonale.*

Clasificarea conicelor

Putem da o clasificare a conicelor folosind invarianţii Δ, δ, I.

(1) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *nedegenerată*.
  a) dacă $\delta > 0$, atunci $\mathcal{C}$ este $\begin{cases} \textit{elipsă} & \text{dacă} \quad \Delta \cdot I < 0 \\ \textit{mulţimea vidă} & \text{dacă} \quad \Delta \cdot I > 0 \end{cases}$
  b) dacă $\delta = 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *parabolă*
  c) dacă $\delta < 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *hiperbolă*

(2) Dacă $\Delta = 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este conică *degenerată*
  a) dacă $\delta > 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *un punct*,
  b) dacă $\delta = 0$, atunci conica este o reuniune de *drepte paralele* sau *confundate* sau *mulţimea vidă*,
  c) dacă $\delta < 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este o reuniune de *drepte concurente*.

În cele ce urmează voi descrie metoda roto-translaţiei de aducere la forma redusă a ecuaţiei unei conice.

0. Din invarianţii Δ, δ, I se deduce tipul conicei

1. Se aduce la forma canonică forma pătratică dată de matricea A_2. Pentru aceasta se foloseşte metoda transformărilor ortogonale. Coeficienţii pătratelor perfecte sunt valorile proprii.

2. Se forţează pătratele perfecte în x şi y şi se obţine forma redusă.

Exemplul 2. Să se determine tipul conicei dată de ecuaţia $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 2x - 2y + 2 = 0$ şi să se aducă la forma redusă.

Matricea asociată conicei este $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\Delta = 16, \delta = \det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 9 = 16, I = 10$.

$\Delta = 16 \neq 0, \delta \cdot I = 160 > 0$, deci avem conică nedegenerată, care este de fapt mulţimea vidă.

Considerăm $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ pe care o aducem la forma diagonală folosind metoda transformărilor ortogonale.

$P_{A_2}(X) = X^2 - IX + \delta = X^2 - 10X + 16$. Rădăcinile sunt $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2$.

Vectorii proprii: $(A_2 - 8I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(A_2 - 2I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = -y \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Am ales în $v_2, x = -1$ şi $y = 1$ pentru ca matricea formată cu coloanele v_1, v_2 să aibă det > 0. Matricea $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, are proprietatea ${}^tSS = I_2$, şi $\det(S) = 1$, deci S este matricea unei rotaţii în plan.

Schimbarea de variabile este $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, adică $x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$ şi $y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$.

Ecuaţia conicei în x' şi y' devine $\mathcal{C} : 8x'^2 + 2y'^2 - 2\sqrt{2}y' + 2 = 0$. De aici deducem ecuaţia redusă $8x'^2 + 2(y' - \frac{1}{\sqrt{2}})^2 + 1 = 0$. Suma a două pătrate perfecte plus 1, este mulţimea vidă. Coeficienţii pătratelor perfecte sunt valorile proprii ale matricii A_2.

Voi mai da un exemplu.

Exemplul 3. Să se determine tipul conicei dată de ecuaţia $3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$ şi să se aducă la forma redusă.

Matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Invarianţii metrici ai conicei sunt $\Delta = 8 \neq 0, \delta = \det(A_2) = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4, I = 3$. Avem o conică nedegenerată, care este o hiperbolă.

Considerăm forma pătratică $3x^2 - 4xy$ în $\mathbb{R}^2$ pe care o aducem la forma canonică. Matricea asociată este $A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. $P_{A_2}(X) = X^2 - 3X - 4$. Rădăcinile sunt $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$.

Vectorii proprii: $(A_2 - 4I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$ $x = -2y \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$(A_2 + I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x = y \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Matricea formată cu vectorii e_1, e_2 (coloanele matricei), este $S = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. S este o matrice ortogonală de determinant 1, deci matricea unei rotaţii. Schimbarea de variabile este $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y'), y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y')$.

Ecuaţia conicei în noile coordonate devine $\mathcal{C} : 4x'^2 - y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0$.

Formăm pătrate perfecte şi obţinem $4(x' - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 - (y' - \frac{3}{\sqrt{5}})^2 - 2 = 0$.

Notăm $X = x' - \frac{1}{\sqrt{5}}, Y = y' - \frac{3}{\sqrt{5}}$. Aceasta reprezintă o translaţie. Împărţim cu 2 şi obţinem ecuaţia redusă a hiperbolei.

$$\mathcal{C} : 2X^2 - \frac{1}{2}Y^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} - \frac{Y^2}{(\sqrt{2})^2} - 1 = 0$$

unde $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi $b = \sqrt{2}$. Centrul hiperbolei este intersecţia dreptelor $X = 0$ şi $Y = 0$ iar noile coordonate în funcţie de x şi y sunt $X = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x - y) - \frac{1}{\sqrt{5}}, Y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) - \frac{3}{\sqrt{5}}$. Acestea se obţin folosind $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tS\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ cât şi formulele pentru X şi Y în funcţie de x' şi y'. Matricea ${}^tS = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dreapta $X = 0$ în sistemul Oxy are ecuaţia $y = 2x - 1$ iar dreapta $Y = 0$ are ecuaţia $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. Intersecţia acestora este punctul $o(1, 1)$. Acesta este centrul sistemului de coordonate oXY. În acest sistem de axe se reprezintă hiperbola. Asimptotele hiperbolei sunt $Y = \pm\frac{b}{a}X = \pm 2X$. În sistemul Oxy aceste drepte au ecuaţiile $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ şi respectiv $x = 1$.

Voi adăuga teorema Sylvester de caracterizare a formelor pătratice. Considerăm V un spaţiu vectorial real cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n < \infty$ şi $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică. Reamintesc că forma pătratică Q este *pozitiv (negativ) definită* dacă $Q(v) > 0$ ($Q(v) < 0$), pentru orice $v \in V \backslash \{0_V\}$.

Teorema 4 (Sylvester)**.** *Fie $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică ca mai sus şi $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V în care forma pătratică are matricea $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. Fie $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ minorii principali ai matricei A. Atunci:*

1) Q este pozitiv definită dacă şi numai dacă $\Delta_i > 0$, pentru $(\forall) i = \overline{1, n}$,

2) Q este negativ definită dacă şi numai dacă $(-1)^i \Delta_i > 0$, pentru $(\forall) i = \overline{1, n}$.