4.03.2021

SEMINAR 3

Spații vectoriale. SLI, SLD, SG. Baze

Preliminarii

$(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$, $S \subset V$ subm. $\neq \phi$

• S s.n. SLI $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\forall x_1,\dots,x_n \in S \\ \forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}\end{array} : \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0_V \Rightarrow a_1 = \dots = a_n = 0_{\mathbb{K}}\right]$

SLI = sistem liniar independent

• S s.n. sistem liniar dependent (SLD) $\Leftrightarrow$

$\left\{\begin{array}{l}\exists x_1,\dots,x_n \in S \\ \exists a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}, \text{ nu toți nuli}\end{array}\right.$ a.î. $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0_V$

• S s.n. sistem de generatori (SG) $\Leftrightarrow$

$\forall x \in V, \exists \begin{array}{l} x_1,\dots,x_n \in S \\ a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}\end{array}$ a.î. $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

Not $V = \langle S \rangle$

Dacă S este SG finit, atunci V s.n. sp. vect. finit generat.

• S s.n. bază $\Leftrightarrow$ 1) S este SLI
2) S este SG

(T) Fie $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect. finit generat

B_1, B_2 baze $\Rightarrow \operatorname{card} B_1 = \operatorname{card} B_2 = n = \dim_{\mathbb{K}} V$

OBS1 n = nr. max de vect din SLI
= nr. min. de vect din SG.

OBS2
a) $\forall$ subm $\neq \phi$ a unui SLI este SLI
b) $\forall$ supram. a unui SLD este SLD.
c) $\forall$ supram. a unui SG este SG
d) Din $\forall$ SG (finit) se poate extrage o bază
e) $\forall$ SLI (finit) se poate completa la o bază

OBS3 $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$

UAE 1) B bază ; 2) B e SLI ; 3) B e SG.

Ex1 $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $S = \{(1, m, 1), (m, 1, 1), (1, 0, m)\} \subset \mathbb{R}^3$, $m \in \mathbb{R}$

1) $m = ?$ aî S este SLI

2) $m = ?$ aî S este SLD

3) $m = 2 \Rightarrow$ S este bază

b) $S' = \{(1, a_1, a_1^2), (1, a_2, a_2^2), (1, a_3, a_3^2)\} \subset \mathbb{R}^3$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$. Ce relație verifică a_1, a_2, a_3 aî S' bază?

SOL

a) $\mathcal{B}_0 = \{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$ bază canonică în $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$

1) S este SLI

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ aî $a(1, m, 1) + b(m, 1, 1) + c(1, 0, m) = 0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0)$

$(a, am, a) + (bm, b, b) + (c, 0, cm) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$(a + bm + c, am + b, a + b + cm) = (0,0,0)$

$$(*) \begin{cases} a + bm + c = 0 \\ am + b = 0 \\ a + b + cm = 0 \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{array}\right) \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

$(*)$ are sol unică nulă $(a, b, c) = (0,0,0) \Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1-m & m & 1 \\ m-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1) \begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix}$$

$$c_1' = c_1 - c_2 \quad = (m-1) \begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 0 & m+1 & 1 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = -(m-1)(m^2 + m - 1)$$

$m_1 \neq 1$; $m_{2,3} \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

S este SLI $\Leftrightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

2) S este SLD $\Leftrightarrow m \in \left\{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

3) $m=2 \Rightarrow S=\{(1,2,1),(2,1,1),(1,0,2)\}$.

(M1) cf 1) $\Rightarrow S$ este SLI
dar $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3 = \text{card}\, S$ $\Big\} \overset{OBS\,3}{\Longrightarrow}$ S e SG și bază

(M2) Altfel, se dem. că S este SG i.e.
$\forall x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3, \exists a,b,c\in\mathbb{R}$ aî
$x=a(1,2,1)+b(2,1,1)+c(1,0,2) \Rightarrow$

$$(**)\begin{cases} a+2b+c=x_1 \\ 2a+b=x_2 \\ a+b+2c=x_3\end{cases} \qquad A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & x_1 \\ 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 1 & 1 & 2 & x_3\end{array}\right)$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow (**)$ este SCD $\Rightarrow \exists!(a,b,c)$

b) $S'=\{(1,a_1,a_1^2),(1,a_2,a_2^2),(1,a_3,a_3^2)\}$
S' bază $\Rightarrow S'$ este SLI
$\forall a,b,c\in\mathbb{R}$ aî $a(1,a_1,a_1^2)+b(1,a_2,a_2^2)+c(1,a_3,a_3^2)=0_{\mathbb{R}^3}$
$\Rightarrow a=b=c=0_{\mathbb{R}}$

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ aa_1+ba_2+ca_3=0 \\ aa_1^2+ba_2^2+ca_3^2=0\end{cases} \qquad A=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & 0\end{array}\right)$$

sist. este SCD $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow (a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_2-a_1)\neq 0$
a_1,a_2,a_3 sunt distincte 2 câte 2

Ex2 $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$

a) $S_1=\{(1,1,0),(1,-1,-1),(2,0,-1)\}$
Să se extragă din S_1 un SLI maximal S_1'
și să se extindă acesta la o bază

b) $S_2 = \{(1,2,3)\}$

Să se arate că S_2 nu este SG și e SLI

Să se extindă S_2 la o bază

Sol

a) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $a(1,1,0) + b(1,-1,-1) + c(2,0,-1) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{cases} a+b+2c = 0 \\ a-b = 0 \\ -b-c = 0 \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & -1 \end{matrix} & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\det A = 0 \quad (c_3 = c_1 + c_2)$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

sistem SCN $\Rightarrow$ are și sol nenule.

$\Rightarrow S_1$ este SLD.

$S_1' = \{(1,1,0), (1,-1,-1)\}$ este SLI maximal.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a(1,1,0) + b(1,-1,-1) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$$\begin{cases} a+b = 0 \\ a-b = 0 \\ -b = 0 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & -1 \end{matrix} & 0 \end{array}\right)$$

Sist este SCD $\Rightarrow a = b = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}_1 \text{ este SLI} \\ \text{dar } \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = \operatorname{card} \mathcal{B}_1 = 3 \end{array}\right\} \xrightarrow{OBS3}$$

$\mathcal{B}_1 = \{(1,1,0), (1,-1,-1), (0,0,1)\}$ bază

b) $$\left.\begin{array}{l} \underset{\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3}{\overset{\shortparallel}{3}} = \text{nr. min de vect din SG} \\ |S_2| = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow S_2 \text{ nu e SG}$$

$(1,2,3) \neq 0_{\mathbb{R}^3} \Rightarrow \{(1,2,3)\}$ e SLI

$\det\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}\neq 0 \Rightarrow \mathcal{B}_2=\{(1,2,3),(0,1,0),(0,0,1)\}$ SLI

$\dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^3 = 3 = \mathrm{card}\,\mathcal{B}_2 \overset{OBS3}{\Longrightarrow}$ SG și bază.

EX3 $(\mathbb{R}_2[X]=\{P\in\mathbb{R}[X] \mid \mathrm{grad}\,P\leq 2\},+,\cdot)/\mathbb{R}$.

a) $f=2X^2-3X+1 \Rightarrow \mathcal{B}_1 \overset{?}{=} \{f,f',f''\}$ bază. Generalizare.

b) $\mathcal{B}_2=\{1,X-1,(X-1)^2\}$ bază. Generalizare

SOL

a) $\mathcal{B}_0=\{1,X,X^2\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}_2[X]$

$\Rightarrow \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]=3$.

$P=a_0+a_1X+a_2X^2 \longrightarrow (a_0,a_1,a_2)\in\mathbb{R}^3$

$f(x)=2x^2-3x+1,\ f'(x)=4x-3,\ f''(x)=4$.

OBS $f=\tilde{f}$ (fcția polinomială asociată).

$\mathcal{B}_1=\{2X^2-3X+1,\ 4X-3,\ 4\}$ bază

$\downarrow$

$\{(1,-3,2),(-3,4,0),(4,0,0)\}$

• $\mathcal{B}_1$ este SLI

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ aî $a(2X^2-3X+1)+b(4X-3)+c\cdot 4=0$

$a-3b+4c+X(-3a+4b)+2aX^2=0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}a-3b+4c=0\\-3a+4b=0\\2a=0\end{cases}\qquad A=\left(\begin{array}{ccc}1&-3&4\\-3&4&0\\2&0&0\end{array}\right)\left|\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}\right.$$

$\det A\neq 0 \Rightarrow$ SCD $\Rightarrow$ sol unică nulă: $a=b=c=0$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \mathcal{B}_1 \text{ este SLI}\\ \dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R}_2[X]=3=\mathrm{card}\,\mathcal{B}_1\end{array}\right\}\overset{OBS3}{\Longrightarrow} \mathcal{B}_1$ SG și bază.

SAU dem că $\mathcal{B}_1$ e SG cu def.

$\forall P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$, $\exists\, a, b, c \in \mathbb{R}$ aî $P = af + bf' + cf''$

$$\begin{cases} a - 3b + 4c = a_0 \\ -3a + 4b = a_1 \\ 2a = a_2 \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 4 & a_1 \\ -3 & 4 & 0 & a_2 \\ 2 & 0 & 0 & a_3 \end{array}\right)$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow$ SCD $\Rightarrow \exists!$ sol $(a, b, c) \Rightarrow \mathcal{B}_1$ e SG.

Generalizare $\quad P \in \mathbb{R}_2[X]$, grad $P = 2$

$\{P, P', P''\}$ bază.

b) $\mathcal{B}_2 = \{1, X-1, (X-1)^2\}$ bază în $\mathbb{R}_2[X]$.

Dezvoltare în serie Taylor în jurul lui x_0

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \ldots$$

$\mathcal{B}_2$ este SG $\Leftrightarrow \mathbb{R}_2[X] = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$

$\forall P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$

$P(x) = P(1) + P'(1)(x-1) + \frac{P''(1)}{2!}(x-1)^2$; $P(1) = a_0 + a_1 + a_2$

$P'(1) = a_1 + 2a_2$

$P = a \cdot 1 + b(X-1) + c(X-1)^2$ $\qquad P''(1) = 2a_2$

$$\begin{cases} a = a_0 + a_1 + a_2 \\ b = a_1 + 2a_2 \\ c = a_2 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{B}_2 \text{ este SG}$$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[X] = 3 = \text{card}\, \mathcal{B}_2$

$\overset{\text{OBS3}}{\Longrightarrow} \mathcal{B}_2$ e SLI și bază

Generalizare: $\{1, X-a, (X-a)^2\}$ bază în $\mathbb{R}_2[X]$

Ex4 $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$.

a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\alpha = ?$ aî $\mathcal{B}$ este bază

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

S este SLI şi să se completeze la o bază

c) $S' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1) $\dim \langle S' \rangle$

2) Să se extragă din S' un SLI max şi acesta să se extindă la o bază.

SOL

a) $\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ baza canonică în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$.

$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{R}^4$

$\mathcal{B}_0 \longrightarrow \{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ baza canonică în $\mathbb{R}^4$.

$\text{card}\, \mathcal{B} = 4 = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\mathcal{B}$ bază $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ SLI $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ SG.

$\mathcal{B}$ este SLI $\Leftrightarrow \{(1,1,1,-1), (0,5,-1,-1), (-1,0,3,-1), (\alpha,1,1,-1)\}$ SLI în $\mathbb{R}^4$.

$\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}$

$a(1,1,1,-1) + b(0,5,-1,-1) + c(-1,0,3,-1) + d(\alpha,1,1,-1) = 0_{\mathbb{R}^4}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$(a,b,c,d) = 0_{\mathbb{R}^4} \Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha-1 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -(\alpha-1) \begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\alpha) \begin{vmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (\alpha-1) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 6(\alpha-1) \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha \neq 1}$$

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$\{(1,0,1,1), (2,3,1,0)\}$

$rg \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow S$ este SLI

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} a + 2b = 0 \\ 3b = 0 \\ a + b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$ SCD $(a, b) = (0, 0)$.

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0.$

$\left. \begin{array}{l} \mathcal{B}_1 = S \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ SLI} \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4 = \operatorname{card} \mathcal{B}_1 \end{array} \right\} \overset{\text{OBS 3}}{\Longrightarrow}$ SG și bază

c) $S' = \left\{ \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{C}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{D}{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{E}{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \right\}$

$D = B + C$; $E = B - C$

$\left. \begin{array}{l} \langle S' \rangle = \langle \{B, C\} \rangle \\ \{B, C\} \text{ SLI} \end{array} \right\} \Rightarrow \dim \langle S' \rangle = 2.$

$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0$

$\left. \begin{array}{l} \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ SLI} \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4 = \operatorname{card} \mathcal{B}_2 \end{array} \right\}$

$\Longrightarrow \mathcal{B}_2$ bază

$\langle S' \rangle = \{bB + cC + dD + eE,\ b,c,d,e \in \mathbb{R}\}$
$= \{\alpha B + \beta C,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$.

$\{B,C\}$ e SG pt $\langle S' \rangle$
$\{B,C\}$ e SLI pt $\langle S' \rangle$ $\Rightarrow$ $\{B,C\}$ bază pt $\langle S' \rangle$

$\dim_{\mathbb{R}} \langle S' \rangle = 2$

Ex5 $(\mathcal{C}(\mathbb{R}),+,\cdot)_{/\mathbb{R}}$.

a) $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$
SLI

SOL Fie $a,b,c \in \mathbb{R}$ ai $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0$

$af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$a + b\sin x + c\cos x = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

1) $x = 0 \Rightarrow a + c = 0$

2) $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a + b = 0$

3) $x = \pi \Rightarrow a - c = 0$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists!\ (a,b,c) = (0,0,0) \Rightarrow S$ este SLI

b) $S' = \{g_1, g_2, g_3\}$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = \cos x$, $g_3(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$

S' este SLD.

$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} \Rightarrow \underset{a}{1} \cdot 1 + \underset{b}{(-1)}\cos x + \underset{c}{(-2)}\sin^2\frac{x}{2} = 0$

$\Rightarrow S'$ este SLD.

c) $S'' = \{h_1, h_2, h_3\}$, $h_1(x) = e^x$; $h_2(x) = e^{-x}$, $h_3 = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

S'' SLD $\quad h_3(x) = \frac{1}{2}(h_1(x) + h_2(x)) \Rightarrow h_1(x) + h_2(x) - 2h_3(x) = 0$

$a = 1,\ b = 1,\ c = -2$

Ex6

a) $(\mathbb{C}, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $\mathcal{B}' = \{1-i, 1+i\}$ bază

b) $(\mathbb{C}, +, \cdot)/\mathbb{C}$; $\mathcal{B}'' = \{2+i\}$ bază

Sol

a) $(\mathbb{C}, +, \cdot)/\mathbb{R}$, $\mathcal{B}_0 = \{1, i\}$

$z = x + iy \longrightarrow (x, y)$

$\mathcal{B}_0 = \{1, i\} \longrightarrow \{(1,0), (0,1)\}$ baza can. în $\mathbb{R}^2$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

Dem că $\mathcal{B}'$ este SLI.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ a.î. $a(1-i) + b(1+i) = 0$

$a+b+i(-a+b) = 0 \iff \begin{cases} a+b=0 \\ -a+b=0 \end{cases}$ $\quad A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\det A \neq 0 \Rightarrow \exists (a,b) = (0,0)$.

$|\mathcal{B}'| = 2 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \Rightarrow$ SG

Deci $\mathcal{B}'$ e bază.

b) $(\mathbb{C}, +, \cdot)/\mathbb{C}$ $\quad \mathcal{B}_0 = \{1\}$ b. canonică.

$2+i \neq 0 \Rightarrow \{2+i\}$ SLI

$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1 \Rightarrow \mathcal{B}'' = \{2+i\}$ bază.