Curs 4

27.10.2020

Reamintesc

Def Fie $A \neq \emptyset$ și "$\sim$" o relație pe mulțimea A. "$\sim$" s.n. relație de echivalență pe A dacă îndeplinește simultan condițiile:

1) reflexivă: $a \sim a \ (\forall) a \in A$
2) simetrică: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
3) tranzitivă: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

O relație (binară) pe mulțimea A reprezintă o submulțime a lui $A \times A$.

Obs Dacă $|A| = n \rightsquigarrow$ avem 2^{n^2} rel. pe mult. A. Câte sunt relații de echivalență?

(Răspuns seminar)

Exemple (Rel de echiv)

1) Geometrie
- Relația de paralelism pe mulțimea dreptelor din plan
- Relația de asemănare/congruență pe mulțimea Δ din plan

2) Algebră
- Rel de egalitate pe o mulțime nevidă
- Rel de echivalență asociată unei funcții $f: A \to B$ "$\sim_f$" rel pe A:

$$x \sim_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y).$$

- Rel. de congruență modulo n pe $\mathbb{Z}$, unde $n \in \mathbb{N}$, notată cu "$\equiv \pmod n$":

$$a \equiv b \pmod n \Leftrightarrow n \mid a - b.$$

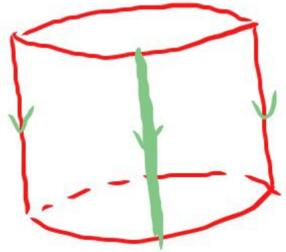
Verif

1) $n = 0$: $a \equiv b \pmod 0 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} 0 \mid a - b \Leftrightarrow a = b \rightsquigarrow$ "$\equiv \pmod 0$" este "$=$" pe $\mathbb{Z}$

2) $n = 1$: $a \equiv b \pmod 1 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} 1 \mid a - b$ (adev.) $\rightsquigarrow (\forall) a, b \in \mathbb{Z} \ a \equiv b \pmod 1$.

3) $n \geq 2$: $a \equiv b \pmod n \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} n \mid a - b \Leftrightarrow a, b$ dau același rest la împărțirea cu n.

Geometric

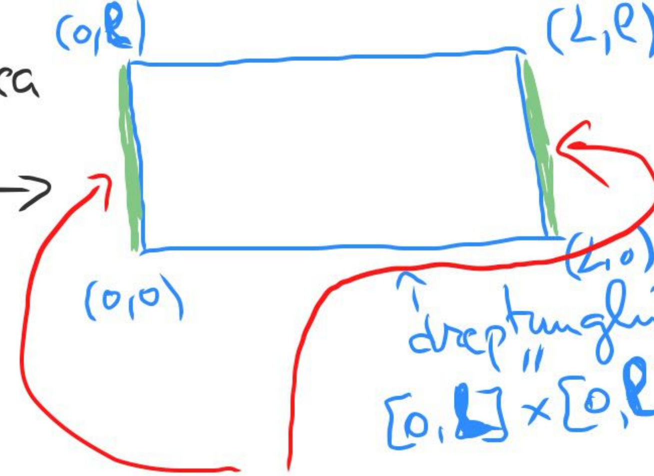


cilindrul "=" $A/_{\sim} = [0,L]\times[0,\ell]/_{\sim}$ → e o mulțime factor a unui dreptunghi

unde $(0,a) \sim (L,a)\ (\forall)\ a \in [0,\ell]$

(geometric "$\sim$" e rel. de echivalență care identifică laturile $\square$.

îl "decupez" cu foarfeca după | și îl "întind" $\longrightarrow$



dreptunghi "=" $[0,L]\times[0,\ell] = A$

Def ① <u>partiție</u> a unei mulțimi $A \neq \emptyset$ este o familie de submulțimi nevide, disjuncte 2 câte 2, și a cărei reuniune este mulțimea A.

Exemple

1) $A = \mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$) $\quad \mathcal{A} = (\{3n, 3n+1, 3n+2\})_{n\in\mathbb{N}\ (\mathbb{Z})}$ este o partiție a lui $\mathbb{N}$ ($\mathbb{Z}$) $(=A)$

$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{3n, 3n+1, 3n+2\} = \mathbb{N}$.

$(\forall)\ n \neq m \Rightarrow \{3n,3n+1,3n+2\} \cap \{3m,3m+1,3m+2\} = \emptyset$

2) $A = \{1,2,3,4\}$ $\quad (\{1,2\},\{3\},\{4\}) \rightarrow$ este o partiție a lui A.

3) $\mathbb{R}$ $\quad \mathcal{A} = ([n,n+1))_{n\in\mathbb{Z}}$ este o partiție a lui $\mathbb{R}$.

Teoremă Fie "$\sim$" o rel. de echivalență pe mulțimea $A \neq \emptyset$. Atunci:

1) $a \in [a]$ $(\forall) a \in A$

2) 2 clase de echivalență sunt ori egale ori disjuncte, i.e. $[a] = [b] \iff a \sim b$ (altfel, dacă $a \not\sim b$ $[a] \cap [b] = \emptyset$).

3) Mulțimea claselor de echivalență repr. o partiție a lui A.

Dem 1) $\Leftarrow$ reflexivitatea lui $\sim$; 2) Pp $(\exists)$ $c \in [a] \cap [b]$ (vream $[a] = [b]$)

"$\subset$" (similar "$\supset$") Fie $d \in [a] \Rightarrow d \sim a$; $a \sim c$; $c \sim b$ $\overset{\text{tranzitivit. lui } \sim}{\Longrightarrow}$ $d \sim b \Rightarrow d \in [b] \Rightarrow$

$[a] = [b]$ $(\Leftrightarrow a \sim b)$; 3) $\Leftarrow$ 2), 1).

Dată o mulțime $A \neq \emptyset$ vs.

Partițiile lui A

Fie $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ o partiție a lui A $\rightsquigarrow$

Teoremă $\mathcal{A} = ([a])_{a \in A}$

partiție a lui A

$[a]$ clasa lui a asociată lui $\sim$

Rel. de echiv. pe mulțimea A

Def "$\sim_A$" pe A astfel:

$x \sim_A y \iff (\exists) i \in I$ a.î. $x, y \in A_i$

Exc "$\sim_A$" este o rel. de echiv având clasele de echiv exact mult. A_i

• Dc $\sim$ este o rel de echiv pe A

Def Fie "$\sim$" o rel. de echivalență pe mulțimea $A \neq \emptyset$. Dacă $a \in A \rightsquigarrow$ $[a]$ (sau $\hat{a}$, $\tilde{a}$, etc.) $= \{b \in A \mid a \sim b\}$, s.n. clasa de echivalență a lui a. ($[a] \neq \emptyset$ deoarece $a \in [a]$). Mulțimea claselor de echivalență s.n. mulțimea factor a lui A modulo $\sim$ și se notează cu $A/_\sim$. ($A/_\sim = \{[a] \mid a \in A\}$)

$p = p_\sim : A \to A/_\sim \quad p_\sim(a) = [a] \quad p_\sim$ s.n. surjecția canonică asociată lui $\sim$.

Motivație: Mulțimea factor ($\rightsquigarrow$ o nouă modalitate de a construi noi mulțimi cu proprietăți "controlate" plecând de la unele cunoscute)

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \to$ sunt construite ca mulțimi factor

$\mathbb{Z}$ poate fi identificat cu $\mathbb{N}\times\mathbb{N}/_\sim$ (e în bijecție) mult. factor, unde $(a,b) \sim (c,d) \overset{def}{\Longleftrightarrow} a+d = b+c$; "$\sim$" e rel. de echiv pe $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$

$\mathbb{Q}$ e în bijecție cu $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*/_\sim$, $(a,b) \sim (c,d) \overset{def}{\Longleftrightarrow} ad = bc$; "$\sim$" rel. de echiv

$\mathbb{R}$ e în bijecție cu $\mathcal{C}/_\sim$; $\mathcal{C}$ repr. mult. șirurilor Cauchy de nr. rat. și "$\sim$" e rel. de echiv: $(a_n)_{n\geq 1} \sim (b_n)_{n\geq 1} \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

Teorema 2 Fie A o mulțime $\neq \emptyset$. Aplicațiile anterioare sunt bijecții (inverse una celeilalte) între relațiile de echivalență pe A și partițiile lui A!

Obs Dacă A e mulțime finită atunci a calcula nr. rel. de echiv. pe A este același lucru cu a calcula nr. partițiilor lui A.

Exemplu $A = \{1,2,3\}$. Care e nr. rel. de echiv. pe A (descrieți-le! Exr)?

Partițiile lui A $\rightsquigarrow$ $(\{1,2,3\})$

$(\{1\},\{2,3\})$; $(\{2\},\{1,3\})$; $(\{3\},\{1,2\})$

$(\{1\},\{2\},\{3\})$.

5 partiții

$\Downarrow$ Teorema 2

pe A pot fi definite 5 rel. de echiv.

Def Fie "$\sim$" o rel. de echiv. pe mult. $A \neq \emptyset$. O submulțime $S \subseteq A$ s.n. **SCR** (= "sistem complet de reprezentanți) pentru "$\sim$" dacă S conține exact câte un element din fiecare clasă de echivalență. Deci, S e **SCR** dacă:

1) $(\forall)\, a \in A\ (\exists)\, s \in S$ a.î. $a \sim s$ $(\Leftrightarrow [a] = [s])$

2) $(\forall)\, s_1 \neq s_2$; $s_1, s_2 \in S$ atunci $s_1 \nsim s_2$ $(\Leftrightarrow [s_1] \cap [s_2] = \emptyset)$.

Exemple ① Fie "$\equiv (\mathrm{mod}\, n)$" pe $\mathbb{Z}$ $(n \geq 2)$.

rel. de echiv

$a \equiv b \pmod n \Leftrightarrow n \mid a-b$

De. $a = nk + r$, $0 \leq r < n \Rightarrow$

$a - r = nk \,\vdots\, n \Rightarrow a \equiv r \pmod n$

$\Rightarrow [a] = [r] = \{mk+r \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Deci, un SCR pentru "$\equiv (\text{mod } m)$" este $\{0, 1, \dots, m-1\}$.

Mulțimea factor a lui $\mathbb{Z}$ via "$\equiv(\text{mod } m)$" este $\mathbb{Z}/_{\equiv(\text{mod } m)} \overset{not}{=} \mathbb{Z}_m$, i.e.

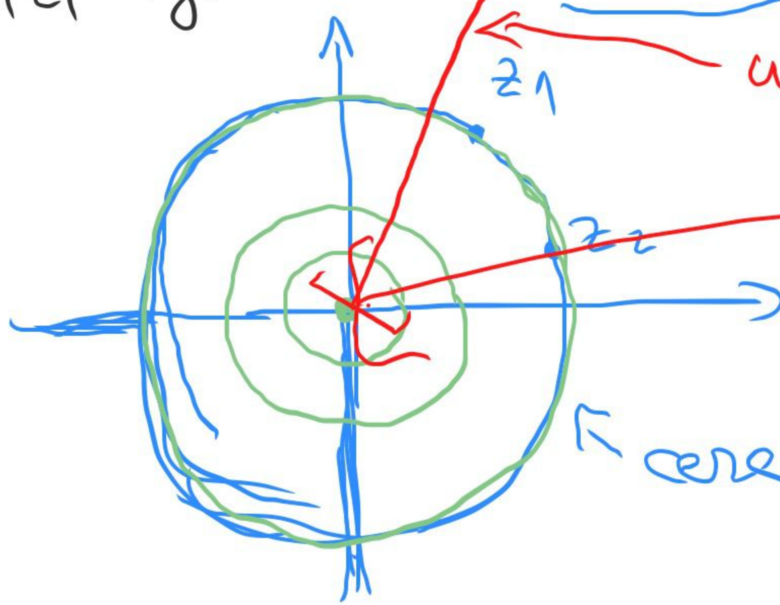
$\mathbb{Z}_m = \{\hat{0}, \hat{1}, \dots, \widehat{m-1}\}$, unde $\hat{a} = [a]$. $\quad \hat{r}\,(=[r]) = \{mk+r \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$\hat{0} = \{\dots, -2m, -m, 0, m, 2m, \dots\}$

Dc $\underline{m=3}$ $\quad \mathbb{Z}_3 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$ $\quad \hat{2} = \{3k+2 \mid k\in\mathbb{Z}\}$. $\quad$ SCR pt $\equiv(\text{mod } 3)$ e: $\{0,1,2\}$; $\{3,4,5\}$

② Pe $\mathbb{C}$ $\quad z \sim y \Leftrightarrow |z| = |y|$. Ar. că "$\sim$" e rel de echiv și calculați un SCR.

Clasele de echiv pt "$\sim$" sunt cercurile de centru O și rază $r \geq 0$



un SCR

alt SCR.

cerc

$(\forall)$ 2 pct. de pe cerc sunt "$\sim$"