**FMI, Info, Anul I**
**Logică matematică şi computaţională**

# Seminar 5

**(S5.1)** Să se demonstreze că, pentru orice formule $\varphi, \psi$,

(i) $\psi \vDash \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \to \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ dacă şi numai dacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

**Demonstraţie:**

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
\psi \vDash \varphi &\iff \text{orice model al lui } \psi \text{ este şi model pentru } \varphi \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{dacă } e^+(\psi) = 1,\ \text{atunci } e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) \leq e^+(\varphi) \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \vDash \psi \to \varphi.
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\psi \sim \varphi &\iff Mod(\psi) = Mod(\varphi) \\
&\iff Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi) \text{ şi } Mod(\varphi) \subseteq Mod(\psi) \\
&\iff \psi \vDash \varphi \text{ şi } \varphi \vDash \psi \\
&\overset{\text{(i)}}{\iff} \vDash \psi \to \varphi \text{ şi } \vDash \varphi \to \psi \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \to \psi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \to \psi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi \to \varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1 \\
&\iff \vDash \psi \leftrightarrow \varphi.
\end{aligned}$$

$\square$

**(S5.2)** Confirmaţi sau infirmaţi:

(i) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \wedge \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ şi $\vDash \psi$;

(ii) pentru orice $\varphi, \psi \in Form$, $\vDash \varphi \vee \psi$ dacă şi numai dacă $\vDash \varphi$ sau $\vDash \psi$.

**Demonstraţie:**

(i) Este adevărat. Avem:

$$\begin{aligned}
\vDash \varphi \wedge \psi \quad &\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi \wedge \psi) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) \mathbin{\pmb{\wedge}} e^+(\psi) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi } e^+(\psi) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\varphi) = 1 \text{ şi} \\
&\phantom{\Longleftrightarrow} \quad \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\}, e^+(\psi) = 1 \\
&\Longleftrightarrow \quad \vDash \varphi \text{ şi} \vDash \psi.
\end{aligned}$$

(ii) Nu este adevărat! Dacă luăm $e_1 : V \to \{0,1\}$, $e_1(x) = 1$, pentru orice $x \in V$, şi $e_2 : V \to \{0,1\}$, $e_2(x) = 0$, pentru orice $x \in V$, avem că $e_1 \not\vDash \neg v_0$ şi $e_2 \not\vDash v_0$, deci $v_0$ şi $\neg v_0$ nu sunt tautologii, pe când $v_0 \vee \neg v_0$ este tautologie.

$\square$

**(S5.3)** Arătaţi că pentru orice $\varphi$, $\psi$, $\chi \in Form$, avem:

(i) $\psi \vDash \varphi \to \psi$;

(ii) $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vDash \varphi \to \chi$;

(iii) $\varphi \to (\psi \to \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \to \chi$;

(iv) $\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$;

(v) $\varphi \wedge \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)$;

(vi) $\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))$.

**Demonstraţie:** Vom folosi în demonstraţii următoarele: pentru orice $a, b \in \{0,1\}$,

$$
\begin{aligned}
a \to b = 1 &\iff a \le b, \\
1 \to a = a, &\qquad a \to 1 = 1 \\
0 \to a = 1, &\qquad a \to 0 = \neg a \\
1 \wedge a = a, &\qquad 0 \wedge a = 0, \\
1 \vee a = 1, &\qquad 0 \vee a = a.
\end{aligned}
$$

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e^+(\psi) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \psi) = 1$. Dar:

$$e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = e^+(\varphi) \to 1 = 1.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ cu $e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = 1$. Vrem să arătăm că $e^+(\varphi \to \chi) = 1$. Avem că

$$1 = e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi)) = (e^+(\varphi) \to e^+(\psi)) \wedge (e^+(\psi) \to e^+(\chi)),$$

de unde tragem concluzia că $e^+(\varphi) \to e^+(\psi) = 1$ şi $e^+(\psi) \to e^+(\chi) = 1$. Prin urmare, $e^+(\varphi) \le e^+(\psi)$ şi $e^+(\psi) \le e^+(\chi)$. Obţinem atunci, din tranzitivitatea lui $\le$, că $e^+(\varphi) \le e^+(\chi)$. Aşadar,

$$e^+(\varphi \to \chi) = e^+(\varphi) \to e^+(\chi) = 1.$$

(iii) Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \to (\psi \to \chi) = 1 \text{ dacă şi numai dacă } e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = 1,$$

ceea ce este echivalent cu a arăta că $e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) = e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$.

**Metoda 1:** Ne folosim de următorul tabel:

| $e^+(\varphi)$ | $e^+(\psi)$ | $e^+(\chi)$ | $e^+(\psi \to \chi)$ | $e^+(\varphi \to (\psi \to \chi))$ | $e^+(\varphi \wedge \psi)$ | $e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |

**Metoda 2:** Raţionăm direct. Observăm că

$$
\begin{aligned}
e^+(\varphi \to (\psi \to \chi)) &= e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)), \\
e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) &= e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi).
\end{aligned}
$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= 0 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1, \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) &= 0 \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) = 0 \to e^+(\chi) = 1. \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} e^+(\varphi) \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= 1 \to (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = e^+(\psi) \to e^+(\chi), \\ e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) &= 1 \wedge e^+(\psi) \to e^+(\chi) = e^+(\psi) \to e^+(\chi). \end{aligned}$$

(iv) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \vee (\varphi \wedge \psi)) = e^+(\varphi), \quad \text{deci că} \quad e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = e^+(\varphi).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee (1 \wedge e^+(\psi)) = 1 \vee e^+(\psi) = 1.$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$e^+(\varphi) \vee (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee (0 \wedge e^+(\psi)) = 0 \vee 0 = 0.$$

(v) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să demonstrăm că

$$e^+(\varphi \wedge \psi \to \chi) = e^+((\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi)),$$

deci că

$$(e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) = (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = e^+(\psi) = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= 1 \to e^+(\chi) = e^+(\chi), \\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (1 \to e^+(\chi)) \vee (1 \to e^+(\chi)) \\ &= e^+(\chi) \vee e^+(\chi) = e^+(\chi). \end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned} (e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) &= (0 \wedge e^+(\psi)) \to e^+(\chi) \\ &= 0 \to e^+(\chi) = 1, \\ (e^+(\varphi) \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) &= (0 \to e^+(\chi)) \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) \\ &= 1 \vee (e^+(\psi) \to e^+(\chi)) = 1. \end{aligned}$$

(c) $e^+(\psi) = 0$. Similar cu cazul precedent.

(vi) Fie $e : V \to \{0, 1\}$ o evaluare arbitrară.

$$e^+(\neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi))) = \neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))).$$

Avem cazurile:

(a) $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ şi, prin urmare,

$$\begin{aligned}\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi)))\\ &= 1.\end{aligned}$$

(b) $e^+(\varphi) = 0$. Atunci

$$\begin{aligned}\neg e^+(\varphi) \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to e^+(\varphi))) &= \neg 0 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0))\\ &= 1 \to (\neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0))\\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow (e^+(\psi) \to 0)\\ &= \neg e^+(\psi) \leftrightarrow \neg e^+(\psi)\\ &= 1.\end{aligned}$$

□

**(S5.4)** Să se arate că

$$\{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\} \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$$

**Demonstraţie:** Fie $e : V \to \{0, 1\}$ cu $e \vDash \{v_0, \neg v_0 \vee v_1 \vee v_2\}$. Atunci $e^+(v_0) = 1$ (deci $e(v_0) = 1$) şi $e^+(\neg v_0 \vee v_1 \vee v_2) = 1$. Aşadar,

$$1 = \neg e(v_0) \vee e(v_1) \vee e(v_2) = \neg 1 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = 0 \vee e(v_1) \vee e(v_2) = e(v_1) \vee e(v_2).$$

Conform definiţiei lui $\vee$, avem că $v_1 \vee v_2 = \neg v_1 \to v_2$, deci

$$e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_1 \vee v_2) = e(v_1) \vee e(v_2) = 1.$$

Prin urmare,

$$e^+((v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)) = e^+(v_3 \to v_2) \vee e^+(\neg v_1 \to v_2) = e^+(v_3 \to v_2) \vee 1 = 1,$$

adică $e \vDash (v_3 \to v_2) \vee (\neg v_1 \to v_2)$. □

**(S5.5)** Să se găsească toate modelele fiecăreia din mulţimile de formule:

(i) $\Gamma = \{v_n \to v_{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$;

(ii) $\Gamma = \{v_0\} \cup \{v_n \to v_{n+1} \mid 0 \leq n \leq 7\}$.

**Demonstraţie:**

(i) Fie $e : V \to \{0,1\}$ şi $n \in \mathbb{N}$. Atunci $e \vDash v_n \to v_{n+1}$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n \to v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e^+(v_n) \boldsymbol{\to} e^+(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \boldsymbol{\to} e(v_{n+1}) = 1$ dacă şi numai dacă $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$. Prin urmare,

$e \vDash \Gamma$ dacă şi numai dacă pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $e(v_n) \leq e(v_{n+1})$
dacă şi numai dacă $e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_n) \leq e(v_{n+1}) \leq \ldots$
dacă şi numai dacă $(e(v) = 0$ pentru orice $v \in V)$
sau $(e(v) = 1$ pentru orice $v \in V)$
sau (există $k \geq 1$ a.î. $e(v_i) = 0$ pentru orice $i < k$ şi $e(v_i) = 1$ pentru orice $i \geq k$).

Definim $e^0 : V \to \{0,1\}$, $e^0(v) = 0$, $e^1 : V \to \{0,1\}$, $e^1(v) = 1$ şi, pentru orice $k \geq 1$,

$$e_k : V \to \{0,1\}, \quad e_k(v_n) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } n < k \\ 1 & \text{dacă } n \geq k. \end{cases}$$

Atunci

$$Mod(\Gamma) = \{e_k \mid k \geq 1\} \cup \{e^0, e^1\}.$$

(ii) Fie $e : V \to \{0,1\}$. Atunci

$e \vDash \Gamma$ dacă şi numai dacă $e \vDash v_0$ şi $e \vDash v_n \to v_{n+1}$ pentru orice $0 \leq n \leq 7$
dacă şi numai dacă $e(v_0) = 1$ şi $e(v_0) \leq e(v_1) \leq \ldots \leq e(v_7) \leq e(v_8)$
dacă şi numai dacă $e(v_n) = 1$ pentru orice $n \in \{0, 1, \ldots, 8\}$.

Aşadar,

$$Mod(\Gamma) = \{e : V \to \{0,1\} \mid e(v_n) = 1 \text{ pentru orice } 0 \leq n \leq 8\}.$$

$\square$