CURS 4

9.03.2021

Repere. Coordonate. Subspații vectoriale

Preliminarii

$(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ spațiu vect, $S \subset V$ subm $\neq \emptyset$

- S este sistem liniar independent (SLI) $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\forall x_1,\dots,x_n \in S \\ \forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}\end{array} : a_1x_1+\dots+a_nx_n = 0_V \Rightarrow a_1=\dots=a_n=0_{\mathbb{K}}\right]$$

- S este sistem liniar dependent (SLD) $\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\exists x_1,\dots,x_n \in S \\ \exists a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}, \text{ nu toți nuli}\end{array}\right. \text{ aî } a_1x_1+\dots+a_nx_n = 0_V$$

- S este sistem de generatori (SG) $\Leftrightarrow V = \langle S \rangle$

i.e. $\forall x \in V$, $\begin{array}{l}\exists x_1,\dots,x_n \in S \\ \exists a_1,\dots,a_n \in \mathbb{K}\end{array}$ aî $x = a_1x_1+\dots+a_nx_n$.

Dacă S este finit, atunci V s.n. finit generat

- S este bază $\Leftrightarrow$ 1) S este SLI
  2) S este SG.

(T) $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect f. generat

B_1, B_2 baze $\Rightarrow |B_1| = |B_2| = n = \dim_{\mathbb{K}} V$.

n = nr. max de vect SLI
= nr. min de vect SG.

- $\forall$ SLI se poate extinde la o bază
- Din $\forall$ SG se poate extrage o bază

OBS $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ n-dim, $B = \{v_1,\dots,v_n\}$

B este bază $\Leftrightarrow$ B este SLI $\Leftrightarrow$ B este SG

Def $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect f. generat, $\dim_{\mathbb{K}} V = n$.

Fie. $\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$ bază

$\mathcal{R}$ s.n. reper $\iff$ $\mathcal{R}$ este o bază ordonată

Prop Fie $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect n-dim şi $\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$ un reper în V.

$\Rightarrow \forall x \in V, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ (coordonatele sau componentele lui x în raport cu $\mathcal{R}$)

a.î. $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Dem. $V = \langle \mathcal{R} \rangle$

$\forall x \in V, \exists x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ a.î. $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

Pp. prin absurd că $\exists x_1', \dots, x_n' \in \mathbb{K}$ a.î. $x = x_1' e_1 + \dots + x_n' e_n$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i') e_i = 0 \xrightarrow[\mathcal{R} \in SLI]{}$$

$$\Rightarrow x_i - x_i' = 0, \forall i = \overline{1,n}$$

Modificarea coordonatelor la schimbarea reperului

$\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\} \xrightarrow{A} \mathcal{R}' = \{e_1', \dots, e_n'\}$ repere,

$A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea de trecere de la $\mathcal{R}$ la $\mathcal{R}'$

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j, \forall i = \overline{1,n}$$

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' \sum_{j=1}^{n} a_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i' \right) e_j$$

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j \Rightarrow x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i', \forall j = \overline{1,n}$$

$$X = AX', \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

5S) $\underline{A} \in GL(n, \mathbb{K})$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "A"] \arrow[rr, bend right, "I_n"'] & R' \arrow[r, "B"] & R \end{tikzcd} \qquad AB = I_n.$$

$$\Rightarrow B = A^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} R' \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "I_n"'] & R \arrow[r, "A"] & R' \end{tikzcd} \qquad BA = I_n$$

$$\boxed{X' = A^{-1}X}$$

<u>Teoremă</u> (<u>criteriu de LI</u>)

$(V, +, \cdot)/\mathbb{K}$ sp vect n-dim.

Fie $S = \{v_1, .., v_m\} \subset V$ sistem de vect. $m \le n$

S este SLI $\Leftrightarrow$ rg. matricei componentelor vect. din S în raport cu $\forall$ reper din V este maxim iem.

<u>Dem</u>. $R = \{e_1, .., e_n\}$ reper în V, $\langle R \rangle = V$

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} v_{ji} e_j, \ \forall i = \overline{1,m} \qquad C = (v_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}}$$

$S = \{v_1, .., v_m\}$ este SLI $\Leftrightarrow$

$[\forall a_1, .., a_m \in \mathbb{K} : a_1 v_1 + ... + a_m v_m = 0_V \Rightarrow a_1 = .. = a_m = 0_{\mathbb{K}}]$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i v_i = 0_V \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i \left(\sum_{j=1}^{n} v_{ji} e_j \right) = 0_V$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} v_{ji} a_i \right) e_j = 0_V \xRightarrow[R \text{ SLI}]{} \sum_{i=1}^{m} v_{ji} a_i = 0_V, \ \forall j = \overline{1,n}$$

$$(*) \begin{cases} v_{11} a_1 + ... + v_{1m} a_m = 0_V \\ \vdots \\ v_{n1} a_1 + ... + v_{nm} a_m = 0_V. \end{cases}$$

$(*)$ este un SLO de n ecuații cu m nec. $(m \le n)$

$(*)$ are sol unică nulă $\Leftrightarrow$ rg $C = m$ (maxim) $a_1 = . = a_m = 0_{\mathbb{K}}$ (SCD, $\nexists$ var secundare)

Scanned with CamScanner

Rangul nu depinde de reperul ales

$\mathcal{R} = \{e_1, ..., e_n\} \xrightarrow{A} \mathcal{R}' = \{e_1', ..., e_n'\}$ repere.

$$v_i = \sum_{k=1}^{n} v_{ki}' \underline{e_k'} = \sum_{k=1}^{n} v_{ki}' \left(\sum_{j=1}^{n} a_{jk} e_j \right) =$$

$$\left.\begin{array}{l} = \sum_{j=1}^{n} \left(\underline{\sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_{ki}'} \right) e_j \\ v_i = \sum_{j=1}^{n} \underline{v_{ji}} e_j \end{array}\right\} \Rightarrow v_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} v_{ki}' \quad \forall j = \overline{1,n}$$

$C = (v_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}}$; $C' = (v_{ki}')_{\substack{k=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}}$.

$$\left.\begin{array}{l} C = AC' \\ \text{dar } A \in GL(n, \mathbb{K}) \end{array}\right\} \Rightarrow rg\,C = rg(AC') = rg\,C'$$

Exemplu $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$, $\mathcal{R}_0 = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$ reperul canonic

Fie $\mathcal{R}' = \{e_1' = (2,1), e_2' = (3,0)\}$

a) $\mathcal{R}'$ este reper în $\mathbb{R}^2$

b) $\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$, $\mathcal{R}' \xrightarrow{B} \mathcal{R}_0$ $\quad A, B = ?$

c) Fie $x = (1,2)$

Să se afle coordonatele lui x în raport cu $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}'$.

SOL

a) $e_1' = (2,1) = (2,0) + (0,1) = 2e_1 + e_2$ $\qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$e_2' = (3,0) = 3e_1 + 0e_2$

$$\left.\begin{array}{l} rg\,A = 2 = \max \Rightarrow \mathcal{R}' \text{ este SLI} \\ \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2 = 2 = |\mathcal{R}'| \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{R}' \text{ este reper}$$

$\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$, $\mathcal{R}' \xrightarrow{A^{-1}} \mathcal{R}_0$

$\det A = -3$; $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A^* = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$x = (1,2) = (1,0) + (0,2) = e_1 + 2e_2$.

$(1,2)$ coordonatele lui x în rap cu R_0.

$$X' = A^{-1}X \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Verificare

$(1,2) = x_1'(2,1) + x_2'(3,0) = (2x_1' + 3x_2', x_1')$

$$\begin{cases} 2x_1' + 3x_2' = 1 \\ x_1' = 2 \end{cases} \Rightarrow x_2' = \frac{1}{3}(1-4) = -1$$

$(x_1', x_2') = (2, -1)$

OBS $\mathcal{R}'' = \{e_2', e_1'\}$

coord. lui x în rap cu $\mathcal{R}''$ sunt $(-1, 2)$

Operații cu subspații vectoriale

- $(V, +, \cdot)|_{K}$ sp. vect, $V' \subset V$ subm. nevidă

$V' \subset V$ subspațiu vectorial $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in V'$, $\forall a, b \in K$: $ax + by \in V'$

OBS $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)|_{\mathbb{R}}$

$V' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$. Este V' subspațiu vectorial?

NU

$0_V \in V'$ (V' subspațiu vect)

Prop $(V, +, \cdot)|_{K}$ sp vect

Dacă V_1, V_2 subspații vect, at $V_1 \cap V_2$ e subsp. vect

Dem

$\forall x, y \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow$ $x, y \in V_1 \Rightarrow ax + by \in V_1$ și $x, y \in V_2 \Rightarrow ax + by \in V_2$ $\Rightarrow$

$\forall a, b \in K$

$\Rightarrow ax + by \in V_1 \cap V_2$

OBS În general, $V_1 \cup V_2 \subset V$ nu este subspațiu vect.

Def $\langle V_1 \cup V_2 \rangle = \{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ x_i \in V_1 \cup V_2,\ a_i \in \mathbb{K},\ i=\overline{1,n},\ n \in \mathbb{N}^* \}$

$\overset{\text{not}}{=}$ $V_1 + V_2$ = sp. vect. generat de $V_1 \cup V_2$

Prop $(V, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect

$V_1, V_2 \subset V$ subsp. vect.

$$V_1 + V_2 = \{ v_1 + v_2,\ v_1 \in V_1,\ v_2 \in V_2 \}$$

Dem

„$\subseteq$" Fie $x \in V_1 + V_2 = \langle V_1 \cup V_2 \rangle$

$\Rightarrow x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ x_i \in V_1 \cup V_2,\ i = \overline{1,n}$

Considerăm (eventual renumerotăm)

$x_1, \dots, x_m \in V_1, \dots, x_{m+1}, \dots, x_n \in V_2$

$$x = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} a_i x_i}_{\in V_1} + \underbrace{\sum_{j=m+1}^{n} a_j x_j}_{\in V_2} = x_1 + x_2$$

„$\supseteq$" Fie $x = \underset{\in V_1}{v_1} + \underset{\in V_2}{v_2} \in \langle V_1 \cup V_2 \rangle$

Teorema Grassmann

$(V, +, \cdot)/_{\mathbb{K}}$ sp. vect finit generat și fie $V_1, V_2 \subset V$ ssp. vect.

$\Rightarrow \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$

Dem

$\dim_{\mathbb{K}} V = n,\ \dim_{\mathbb{K}} V_1 = n_1,\ \dim_{\mathbb{K}} V_2 = n_2,\ \dim_{\mathbb{K}} V_1 \cap V_2 = p$

Fie $\mathcal{B}_0 = \{e_1, .., e_p\}$ bază în $V_1 \cap V_2 \Rightarrow \mathcal{B}_0$ este SLI

Extindem la $\mathcal{B}_1 = \{e_1, .., e_p, f_{p+1}, ..., f_{n_1}\}$ bază în V_1

— " — $\mathcal{B}_2 = \{e_1, .., e_p, g_{p+1}, .., g_{n_2}\}$ — " — V_2

Dem că $\mathcal{B} = \{e_1, .., e_p, f_{p+1}, .., f_{n_1}, g_{p+1}, .., g_{n_2}\}$ bază în $V_1 + V_2$

1) $\mathcal{B}$ este SLI

$\forall\, a_1, .., a_p, b_{p+1}, .., b_{n_1}, c_{p+1}, .., c_{n_2} \in \mathbb{K}$ ai

$$\sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j + \sum_{k=p+1}^{n_2} c_k g_k = 0_V$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j}_{\in V_1} = \underbrace{- \sum_{k=p+1}^{n_2} c_k g_k}_{\in V_2} \in V_1 \cap V_2 = \langle \mathcal{B}_0 \rangle$$

$$- \sum_{k=p+1}^{n_2} c_k g_k = \sum_{i=1}^{p} a_i' e_i$$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j = \sum_{i=1}^{p} a_i' e_i \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{p} (a_i - a_i') e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j = 0_V \underset{\mathcal{B}_1 \text{ e SLI}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} a_i - a_i' = 0, \forall i = \overline{1,p} \\ b_j = 0, \forall j = \overline{p+1, n_1} \end{array}$$

- $\displaystyle - \sum_{k=p+1}^{n_2} c_k g_k = \sum_{i=1}^{p} a_i' e_i \Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{p} a_i' e_i + \sum_{k=p+1}^{n_2} c_k g_k = 0_V \underset{\mathcal{B}_2 \text{ e SLI}}{\Longrightarrow} \begin{array}{l} a_i' = 0, \forall i = \overline{1,p} \\ c_k = 0, k = \overline{p+1, n_2} \end{array}$$

$\Longrightarrow a_i = a_i' = 0, \forall i = \overline{1,p}, b_j = 0, \forall j = \overline{p+1, n_1}, c_k = 0, \forall k = \overline{p+1, n_2}$

2) $\mathcal{B}$ este SG pt $V_1 + V_2$

$$\forall x \in V_1 + V_2 \overset{PROP.}{\Longrightarrow} x = \underset{\in V_1}{x_1} + \underset{\in V_2}{x_2} =$$

$V_1 = \langle B_1 \rangle$
$V_2 = \langle B_2 \rangle$

$$= \sum_{i=1}^{p} a_i e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j + \sum_{i=1}^{p} a_i' e_i + \sum_{k=p+1}^{n_2} c_k g_k$$

$$= \sum_{i=1}^{p} (a_i + a_i') e_i + \sum_{j=p+1}^{n_1} b_j f_j + \sum_{k=p+1}^{n_2} c_k g_k$$

Deci $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_p, f_{p+1}, \dots, f_{n_1}, g_{p+1}, \dots, g_{n_2}\}$ bază în $V_1 + V_2$

$$\dim(V_1+V_2) = \cancel{p} + n_1 - \cancel{p} + n_2 - p = n_1 + n_2 - p$$
$$= \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Def $V_1 + V_2$ s.n. sumă directă și se notează $V_1 \oplus V_2$
$\Leftrightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$.

OBS $\dim_{\mathbb{K}} \{0_V\} = 0$.

Caz particular T. Grassman $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$

OBS 1) $V_1 \oplus V_2$ $\quad \mathcal{B}_i$ bază în V_i, $i = \overline{1,2}$ $\Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ bază în $V_1 \oplus V_2$

2) V sp. vect f. generat și $\mathcal{B}$ bază în V
Partiționăm $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$, $V_1 = \langle \mathcal{B}_1 \rangle$, $V_2 = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$
$\Rightarrow V = V_1 \oplus V_2$.

Prop $V_1 + V_2$ este sumă directă $\Leftrightarrow$
$\forall v \in V_1 + V_2$, $\exists!\, v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$ a.î. $v = \underline{v_1 + v_2}$

Dem
"$\Rightarrow$" Ip: $V_1 \oplus V_2 \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{0_V\}$
Pp. prin absurd că $v = \underset{V_1}{v_1} + \underset{V_2}{v_2} = \underset{V_1}{v_1'} + \underset{V_2}{v_2'} \Rightarrow \underset{V_1}{v_1 - v_1'} = \underset{V_2}{v_2' - v_2}$
$V_1 \cap V_2 = \{0_V\} \Rightarrow v_1 - v_1' = 0_V$
$v_2 - v_2' = 0_V \Rightarrow$ Scrierea e unică

Scanned with CamScanner

$\forall v \in V_1 + V_2$ se scrie unic : $v = \underset{V_1}{\underset{\cap}{v_1}} + \underset{V_2}{\underset{\cap}{v_2}}$

Pp. abs. $\exists\, x \in V_1 \cap V_2$, $x \neq 0_V$ $\Rightarrow v = \underbrace{v_1 - x}_{\in V_1} + \underbrace{v_2 + x}_{\in V_2}$ abs

$\Rightarrow x = 0_V$.

Def $(V,+,\cdot)/_{\mathbb{K}}$ f. generat, V_1, V_2 subsp vect.

Dacă $V = V_1 \oplus V_2$, at V_2 s.n. subspațiu complementar lui V_1

V_1 —||— V_2

OBS. Subspațiul complementar nu este unic

Exemplu

$V = (\mathbb{R}^3,+,\cdot)/_{\mathbb{R}}$, $V_1 = \{(x,y,0),\ x,y \in \mathbb{R}\}$

$V_2 = \{(0,0,z),\ z \in \mathbb{R}\}$

$V_2' = \{(t,t,t),\ t \in \mathbb{R}\}$

$V = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_2'$

$V_1 = \{x(1,0,0) + y(0,1,0),\ x,y \in \mathbb{R}\} = \langle\{(1,0,0),(0,1,0)\}\rangle$

$B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$

$$\left.\begin{array}{l} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 = |B_1| \xRightarrow{crit\ LI} B_1 \text{ este SLI} \\ \qquad\qquad \text{dar } V_1 = \langle B_1 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow$$

B_1 bază în V_1.

• completăm la o bază în $\mathbb{R}^3$.

1) $B_2 = \{(0,0,1)\}$ bază în V_2

2) $B_2' = \{(1,1,1)\}$ bază în V_2'

$$\left.\begin{array}{l} rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow B = B_1 \cup B_2 \text{ e SLI} \\ \qquad\qquad \text{dar } |B| = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow B \text{ bază în } \mathbb{R}^3$$

Analog $B' = B_1 \cup B_2'$ bază în $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_2'$

$\boxed{T_2 \text{ curs}}$

Ex1 a) Să se arate că $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_n^a(\mathbb{R})$

$A \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) \iff A = A^T$; $A \in \mathcal{M}_n^a(\mathbb{R}) \iff A = -A^T$

b) Precizați $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$ și $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_n^a(\mathbb{R})$

Ex2 a) $V' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid tg\, y = 0\} \subset \mathbb{R}^3$

b) $V'' = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}) \mid f \text{ bij}\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ funcție}\}$

c) $V''' = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid \text{grad } P = 2\} \subset \mathbb{R}_3[X]$

Precizați dacă V', V'', V''' sunt subsp. vect.

Ex3. $(\mathcal{M}_2^s(\mathbb{R}), +, \cdot)$, $\mathcal{R}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ reperul canonic

$\mathcal{R}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

a) $\mathcal{R}'$ reper în $\mathcal{M}_2^s(\mathbb{R})$

b) $\mathcal{R}_0 \xrightarrow{A} \mathcal{R}'$, $\mathcal{R}' \xrightarrow{B} \mathcal{R}_0$

c) Să se afle coordonatele lui $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ în raport cu $\mathcal{R}'$.