

## ~ Seminar 5 ~

**EX\_1:** Aplicați algoritmul de reducere (pasul 1) pe gramatica:

$S \rightarrow A \mid B$

$A \rightarrow aB \mid bS \mid b$

$B \rightarrow AB \mid Ba$

$C \rightarrow AS \mid b$

**Rezolvare:**

**a)** Calculăm  $N_1$  mulțimea neterminalelor *utilizabile*.

$A \in N_1$  (pentru că  $A \rightarrow b$  și  $b \in T^*$ )

$C \in N_1$  (pentru că  $C \rightarrow b$  și  $b \in T^*$ )

$S \in N_1$  (pentru că  $S \rightarrow A$  și  $A \in (T \cup N_1)^*$ )

$B \notin N_1$  (pentru că B nu are nicio producție cu membrul drept în  $(T \cup N_1)^*$ )  $\Rightarrow$  eliminăm din gramatică neterminalul B și toate producțiile în care apare acesta și obținem:

$S \rightarrow A$

$A \rightarrow bS \mid b$

$C \rightarrow AS \mid b$

**b)** Calculăm  $N_2$  mulțimea neterminalelor *accesibile*.

$S \in N_2$  (pentru că S este simbolul de start al gramaticii)

$A \in N_2$  (pentru că  $S \in N_2$  și  $S \rightarrow A$ )

$C \notin N_2$  (pentru că nu există niciun neterminal în  $N_2$  care să aibă o producție în care să apară C în membrul drept)  $\Rightarrow$  eliminăm din gramatică neterminalul C și toate producțiile în care apare acesta și obținem:

$S \rightarrow A$

$A \rightarrow bS \mid b$

**EX\_2:** Aplicați tot algoritmul de transformare în F.N.Chomsky pe gramatica:

$S \rightarrow aABa \mid CD \mid bbAC$

$A \rightarrow bc \mid d \mid \lambda$

$B \rightarrow \lambda \mid E$

$C \rightarrow A \mid dcabb \mid S$

$D \rightarrow BAd \mid B$

$E \rightarrow Ea \mid bbE$

$F \rightarrow abc$

**Rezolvare:**

**Pas 1:** Aplicăm *algoritmul de reducere*.

**a)** Calculăm  $N_1$  mulțimea neterminalelor *utilizabile*.

$A \in N_1$  (pentru că A are cel puțin o producție cu membrul drept în  $T^*$ , de fapt are 3)

$B \in N_1$  (pentru că  $B \rightarrow \lambda$  și  $\lambda \in T^*$ )

$C \in N_1$  (pentru că  $B \rightarrow dcabb$  și  $dcabb \in T^*$ )

$F \in N_1$  (pentru că  $F \rightarrow abc$  și  $abc \in T^*$ )

$S \in N_1$  (pentru că  $S \rightarrow aABa$  și  $aABa \in (T \cup N_1)^*$ , la fel și pentru  $S \rightarrow bbAC$ )

$D \in N_1$  (pentru că  $D \rightarrow B$  și  $B \in T^*$ , la fel și pentru  $D \rightarrow BAd$ )

$E \notin N_1$  (pentru că E nu are nicio producție cu membrul drept în  $(T \cup N_1)^*$ )  $\Rightarrow$  eliminăm din gramatică neterminalul E și toate producțiile în care apare acesta și obținem:

$S \rightarrow aABa \mid CD \mid bbAC$   
 $A \rightarrow bc \mid d \mid \lambda$   
 $B \rightarrow \lambda$   
 $C \rightarrow A \mid dcabb \mid S$   
 $D \rightarrow BAd \mid B$   
 $F \rightarrow abc$

**b)** Calculăm  $N_2$  mulțimea neterminalelor *accesibile*.

$S \in N_2$  (pentru că  $S$  este simbolul de start al gramaticii)

$A \in N_2$  și  $B \in N_2$  (pentru că  $S \in N_2$  și  $S \rightarrow aABa$ )

$C \in N_2$  și  $D \in N_2$  (pentru că  $S \in N_2$  și  $S \rightarrow CD$ )

$F \notin N_2$  (pentru că nu există niciun neterminal în  $N_2$  care să aibă o producție în care să apară  $F$  în membrul drept)  $\Rightarrow$  eliminăm din gramatică neterminalul  $F$  și toate producțiile în care apare acesta și obținem:

$S \rightarrow aABa \mid CD \mid bbAC$   
 $A \rightarrow bc \mid d \mid \lambda$   
 $B \rightarrow \lambda$   
 $C \rightarrow A \mid dcabb \mid S$   
 $D \rightarrow BAd \mid B$

**Pas 2:** Se elimină  $\lambda$ -producțiile.

**Caz (i)**  $\rightarrow$  Eliminăm  $B \rightarrow \lambda$  și neterminalul  $B \Rightarrow$  în toate producțiile în care apare  $B$  în membrul drept, *înlocuim*  $B$  cu  $\lambda$  (în cuvintele de lungime 1) sau îl *eliminăm* de tot pe  $B$  (în cuvintele de lungime  $\geq 2$ ).

$S \rightarrow aAa \mid CD \mid bbAC$   
 $A \rightarrow bc \mid d \mid \lambda$   
 $C \rightarrow A \mid dcabb \mid S$   
 $D \rightarrow Ad \mid \lambda$

**Caz (ii)**

$\rightarrow$  Eliminăm  $A \rightarrow \lambda \Rightarrow$  pentru toate producțiile în care apare  $A$  în membrul drept, *păstrăm* și variantele cu  $A$  (pentru că  $A$  are și alte producții non-lambda), dar *adăugăm* și producțiile în care înlocuim  $A$  cu  $\lambda$  (în cuvintele de lungime 1) sau îl eliminăm de tot pe  $A$  (în cuvintele de lungime  $\geq 2$ ).

$S \rightarrow aAa \mid aa \mid CD \mid bbAC \mid bbC$   
 $A \rightarrow bc \mid d$   
 $C \rightarrow A \mid \lambda \mid dcabb \mid S$   
 $D \rightarrow Ad \mid d \mid \lambda$

$\rightarrow$  Eliminăm  $C \rightarrow \lambda \Rightarrow$  pentru toate producțiile în care apare  $C$  în membrul drept, *păstrăm* și variantele cu  $C$  (pentru că  $C$  are și alte producții non-lambda), dar *adăugăm* și producțiile în care înlocuim  $C$  cu  $\lambda$  (în cuvintele de lungime 1) sau îl eliminăm de tot pe  $C$  (în cuvintele de lungime  $\geq 2$ ).

$S \rightarrow aAa \mid aa \mid CD \mid D \mid bbAC \mid bbA \mid bbC \mid bb$   
 $A \rightarrow bc \mid d$   
 $C \rightarrow A \mid dcabb \mid S$   
 $D \rightarrow Ad \mid d \mid \lambda$

$\rightarrow$  Eliminăm  $D \rightarrow \lambda \Rightarrow$  pentru toate producțiile în care apare  $D$  în membrul drept, *păstrăm* și variantele cu  $D$  (pentru că  $D$  are și alte producții non-lambda), dar *adăugăm* și producțiile în care înlocuim  $D$  cu  $\lambda$  (în cuvintele de lungime 1) sau îl eliminăm de tot pe  $D$  (în cuvintele de lungime  $\geq 2$ ).

$S \rightarrow aAa \mid aa \mid CD \mid C \mid D \mid \lambda \mid bbAC \mid bbA \mid bbC \mid bb$   
 $A \rightarrow bc \mid d$   
 $C \rightarrow A \mid dcabb \mid S$   
 $D \rightarrow Ad \mid d$

**!!** Gramatica trebuie să genereze  $\lambda$  (pentru că avem  $S \rightarrow \lambda$ ), dar simbolul de start NU are voie să apară în membrul drept al nici unei producții (avem  $C \rightarrow S$ ).  $\Rightarrow$  **Adăugăm un nou simbol de start  $S'$**  cu producțiile ( $S' \rightarrow S \mid \lambda$ ).

$\rightarrow$  Eliminăm  $S \rightarrow \lambda \Rightarrow$  pentru toate producțiile în care apare  $S$  în membrul drept, **păstrăm** și variantele cu  $S$  (pentru că  $S$  are și alte producții non-lambda), dar **adăugăm** și producțiile în care înlocuim  $S$  cu  $\lambda$  (în cuvintele de lungime 1) sau îl eliminăm de tot pe  $S$  (în cuvintele de lungime  $\geq 2$ ).

- *Observăm* că ar fi reapărut  $\lambda$ -producția  $C \rightarrow \lambda$ , dar nu o mai introducem pentru că am avut-o deja și am eliminat-o, deci am obținut deja toate producțiile care rezultau din eliminarea ei.

$S' \rightarrow S \mid \lambda$   
 $S \rightarrow aAa \mid aa \mid CD \mid C \mid D \mid bbAC \mid bbA \mid bbC \mid bb$   
 $A \rightarrow bc \mid d$   
 $C \rightarrow A \mid dcabb \mid S$   
 $D \rightarrow Ad \mid d$

**Pas 3:** Se elimină redenumirile.

$\rightarrow$  Eliminăm  $C \rightarrow A \Rightarrow$  Pentru toate producțiile  $A \rightarrow \alpha$ , adăugăm producțiile  $C \rightarrow \alpha$ .

$S' \rightarrow S \mid \lambda$   
 $S \rightarrow aAa \mid aa \mid CD \mid C \mid D \mid bbAC \mid bbA \mid bbC \mid bb$   
 $A \rightarrow bc \mid d$   
 $C \rightarrow bc \mid d \mid dcabb \mid S$   
 $D \rightarrow Ad \mid d$

$\rightarrow$  Eliminăm  $S \rightarrow D \Rightarrow$  Pentru toate producțiile  $D \rightarrow \alpha$ , adăugăm producțiile  $S \rightarrow \alpha$ .

$S' \rightarrow S \mid \lambda$   
 $S \rightarrow aAa \mid aa \mid CD \mid C \mid Ad \mid d \mid bbAC \mid bbA \mid bbC \mid bb$   
 $A \rightarrow bc \mid d$   
 $C \rightarrow bc \mid d \mid dcabb \mid S$   
 $D \rightarrow Ad \mid d$

$\rightarrow$  Eliminăm  $S \rightarrow C \Rightarrow$  Pentru toate producțiile  $C \rightarrow \alpha$ , adăugăm producțiile  $S \rightarrow \alpha$  (atenție, adăugăm doar producțiile care nu există deja).

*Observăm* că ar apărea și producția  $S \rightarrow S$ , dar nu o adăugăm pentru că e inutilă.

$S' \rightarrow S \mid \lambda$   
 $S \rightarrow aAa \mid aa \mid CD \mid bc \mid dcabb \mid Ad \mid d \mid bbAC \mid bbA \mid bbC \mid bb$   
 $A \rightarrow bc \mid d$   
 $C \rightarrow bc \mid d \mid dcabb \mid S$   
 $D \rightarrow Ad \mid d$

$\rightarrow$  Eliminăm  $C \rightarrow S \Rightarrow$  Pentru toate producțiile  $S \rightarrow \alpha$ , adăugăm producțiile  $C \rightarrow \alpha$  (care nu există deja).

$S' \rightarrow S \mid \lambda$   
 $S \rightarrow aAa \mid aa \mid CD \mid bc \mid dcabb \mid Ad \mid d \mid bbAC \mid bbA \mid bbC \mid bb$   
 $A \rightarrow bc \mid d$   
 $C \rightarrow bc \mid d \mid dcabb \mid aAa \mid aa \mid CD \mid Ad \mid bbAC \mid bbA \mid bbC \mid bb$   
 $D \rightarrow Ad \mid d$

**Observație:** sortăm alfabetic cuvintele de pe fiecare rând, pentru a fi mai ușor de urmărit în continuare.

$$S' \rightarrow S \mid \lambda$$

$$S \rightarrow aa \mid aAa \mid Ad \mid bb \mid bbA \mid bbAC \mid bbC \mid bc \mid CD \mid d \mid dcabb$$

$$A \rightarrow bc \mid d$$

$$C \rightarrow aa \mid aAa \mid Ad \mid bb \mid bbA \mid bbAC \mid bbC \mid bc \mid CD \mid d \mid dcabb$$

$$D \rightarrow Ad \mid d$$

Acum se vede clar că neterminalele S și C au exact aceleași producții, deci putem simplifica gramatica prin eliminarea neterminalului C și a producțiilor lui, și prin înlocuirea lui C cu S în toate celelalte apariții.

$$S' \rightarrow S \mid \lambda$$

$$S \rightarrow aa \mid aAa \mid Ad \mid bb \mid bbA \mid bbAS \mid bbS \mid bc \mid d \mid dcabb \mid SD$$

$$A \rightarrow bc \mid d$$

$$D \rightarrow Ad \mid d$$

→ Eliminăm  $S' \rightarrow S \Rightarrow$  Pentru toate producțiile  $S \rightarrow \alpha$ , adăugăm producțiile  $S' \rightarrow \alpha$ .

$$S' \rightarrow aa \mid aAa \mid Ad \mid bb \mid bbA \mid bbAS \mid bbS \mid bc \mid d \mid dcabb \mid SD \mid \lambda$$

$$S \rightarrow aa \mid aAa \mid Ad \mid bb \mid bbA \mid bbAS \mid bbS \mid bc \mid d \mid dcabb \mid SD$$

$$A \rightarrow bc \mid d$$

$$D \rightarrow Ad \mid d$$

**Pas 4:** Se aplică din nou *algoritmul de reducere* (vezi Pas 1).

Observăm că nu avem ce modifica, nu există neterminale neutilizabile sau inaccesibile.

**Pas 5:** Se adaugă neterminale noi pentru terminalele din cuvinte de lungime  $>1$ .

$$S' \rightarrow X_1X_1 \mid X_1AX_1 \mid AX_4 \mid X_2X_2 \mid X_2X_2A \mid X_2X_2AS \mid X_2X_2S \mid X_2X_3 \mid d \mid X_4X_3X_1X_2X_2 \mid SD \mid \lambda$$

$$S \rightarrow X_1X_1 \mid X_1AX_1 \mid AX_4 \mid X_2X_2 \mid X_2X_2A \mid X_2X_2AS \mid X_2X_2S \mid X_2X_3 \mid d \mid X_4X_3X_1X_2X_2 \mid SD$$

$$A \rightarrow X_2X_3 \mid d$$

$$D \rightarrow AX_4 \mid d$$

$$X_1 \rightarrow a \ ; \ X_2 \rightarrow b \ ; \ X_3 \rightarrow c \ ; \ X_4 \rightarrow d$$

**Pas 6:** Se adaugă neterminale noi pentru „spargerea” cuvintelor de lungime  $>2$ .

$$S' \rightarrow X_1X_1 \mid X_1Y_1 \mid AX_4 \mid X_2X_2 \mid X_2Y_2 \mid X_2Y_3 \mid X_2Y_5 \mid X_2X_3 \mid d \mid X_4Y_6 \mid SD \mid \lambda$$

$$S \rightarrow X_1X_1 \mid X_1Y_1 \mid AX_4 \mid X_2X_2 \mid X_2Y_2 \mid X_2Y_3 \mid X_2Y_5 \mid X_2X_3 \mid d \mid X_4Y_6 \mid SD$$

$$A \rightarrow X_2X_3 \mid d$$

$$D \rightarrow AX_4 \mid d$$

$$X_1 \rightarrow a \ ; \ X_2 \rightarrow b \ ; \ X_3 \rightarrow c \ ; \ X_4 \rightarrow d$$

$$Y_1 \rightarrow AX_1 \ ; \ Y_2 \rightarrow X_2A \ ; \ Y_3 \rightarrow X_2Y_4 \ ; \ Y_4 \rightarrow AS \ ; \ Y_5 \rightarrow X_2S$$

$$Y_6 \rightarrow X_3Y_7 \ ; \ Y_7 \rightarrow X_1Y_8 \ ; \ Y_8 \rightarrow X_2X_2$$