S_8 - [redacted] [redacted].

Forme pătratice. Formă canonică. Metoda Gauss. Metoda Jacobi

Ex1 Fie $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

a) G = matricea asociată în raport cu $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$.

b) $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma polară asociată

c) Să se aducă Q la o formă canonică, utilizând metoda Gauss, resp. Jacobi. Este Q poz. definită?

Generalizare.

Ex2 Fie $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1x_2 - 6x_1x_3 - 6x_2x_3$.

Să se aducă la o formă canonică (met. Gauss / Jacobi)

Precizați signatura.

Ex3 Fie $Q:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_4^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_1x_4 + 2x_2x_3 - 4x_2x_4$.

Să se aducă la o f. canonică.

Ex4 Fie $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă pătratică și

$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ matricea asociată în rap. cu $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$

Să se diagonalizeze Q.

Ex5 Fie $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă pătratică

$G' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ matricea asociată în raport cu

$R' = \{e_1' = (1,1,1),\ e_2' = (0,1,0),\ e_3' = (1,0,0)\}$

Să se aducă Q la o f. canonică.

Ex6. $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

a) $G = ?$ în rap cu R_0

b) $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ f. polară asociată

c) Să se aducă la o f. canonică prin diverse metode și să se verifice Th. inerției Sylvester

Ex7. Fie $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ forma pătratică și $G = AA^T$ = matricea asociată în raport cu R_0, unde $A \in GL(n, \mathbb{R})$.
Să se arate că Q este poz definită

Ex8. Fie $g: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$

$$g(X, Y) = 2\,Tr(X \cdot Y) - Tr(X)\,Tr(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

a) $g \in L^s(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \mathcal{M}_2(\mathbb{R}); \mathbb{R})$

b) $G = ?$ matricea în rap cu $R_0 = \{E_{ij}\}_{i,j=\overline{1,2}}$

c) Să se afle expresia analitică a lui $Q: \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată

d) Să se aducă Q la o f. canonică.

Ex9 $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$, $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ matricea în rap cu R_0.
$Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată lui $g^s \in L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$
(unde $G^s = \frac{1}{2}(G + G^T)$ este matr. asoc. în rap cu R_0)
Să se aducă Q la o f. canonică

Scanned with CamScanner

II. Forme biliniare.

(7) Fie $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ formă biliniară antisimetrică, $R_0 = \{e_1, e_2\}$ reperul canonic în $\mathbb{R}^2$ și $g(e_1, e_2) = 5$.
Precizați matricea asoc. lui g în raport cu R_0.

(8) Fie $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$

a) $g \in L^{s}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

b) Precizați matricea G asociată lui g în rap cu $R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$?

c) $\ker g = ?$. Este g nedegenerată?

d) Să se afle matricea G' asociată lui g în rap. cu reperul $R' = \{e_1' = (1,1,1), e_2' = (1,2,1), e_3' = (0,0,1)\}$.

Scanned with CamScanner

Ex9. Fie $f \in End(\mathbb{R}^3)$, $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

Fie $g_f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g_f(x,y) = g(f(x), y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$

a) $g_f \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

b) Dacă $G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

sunt matricele asociate lui g și f, în raport cu reperul canonic R_0 să se afle $\tilde{G}$ matricea asociată lui g_f în raport cu R_0.

Ex10 Fie $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 + x_1y_3 + 3x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_1 - x_3y_2 + x_3y_3$, G matricea asoc. în rap cu R_0.

Fie $G^s = \frac{1}{2}(G + G^T)$, $G^a = \frac{1}{2}(G - G^T)$

Să se det $g^s : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g^a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a.î. G^s, G^a sunt matricele asoc. în rap cu R_0

$$g = \underset{L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})}{\underset{\cap}{g^s}} + \underset{L^a(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})}{\underset{\cap}{g^a}}$$