FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 8

(S8.1) Să se demonstreze Teorema de completitudine tare - versiunea 2, dar fără a se folosi, precum în curs, Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Fie $\varphi \in Form$, $\Gamma \subseteq Form$. Avem că:

$\Gamma \vdash \varphi$	$\Leftrightarrow$	există $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma$ cu $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vdash \varphi$	Propoziţia 1.44
	$\Leftrightarrow$	există $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma$ cu $\vdash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi$	Propoziţia 1.62.(i)
	$\Leftrightarrow$	există $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma$ cu $\vDash (\varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_n) \to \varphi$	T. completitudine 1.56
	$\Leftrightarrow$	există $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Gamma$ cu $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \vDash \varphi$	din Propoziţia 1.31.(ii)
	$\Leftrightarrow$	$\Gamma \vDash \varphi$	T. compacitate - versiunea 3

$\square$

(S8.2) Să se arate că Teorema de completitudine tare - versiunea 2 implică Teorema de completitudine tare - versiunea 1.
Demonstraţie: Fie $\Gamma \subseteq Form$. Vrem să arătăm că Γ este consistentă dacă şi numai dacă Γ este satisfiabilă. Avem că:

Γ este consistentă	$\Leftrightarrow$	$\Gamma \nvdash \bot$	Propoziţia 1.60
	$\Leftrightarrow$	$\Gamma \nvDash \bot$	Teorema de completitudine tare - versiunea 2
	$\Leftrightarrow$	Γ este satisfiabilă	Propoziţia 1.29.

$\square$

(S8.3) Să se arate că pentru orice formule φ, ψ, χ avem:

(i) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \varphi$;

(ii) $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \psi$;

(iii) $\{\varphi, \psi\} \vdash \varphi \wedge \psi$;

(iv) $\{\varphi, \psi\} \vdash \chi$ ddacă $\{\varphi \wedge \psi\} \vdash \chi$.

Demonstraţie: Reamintim că $\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$. De asemenea, oriunde folosim o

teoremă formală cunoscută, aplicăm implicit Propoziţia 1.39.(ii).
Demonstrăm (i):

(1)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.37.(ii)
(2)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S7.2).(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash (\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi)$	(S7.3)
(4)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$	(MP): (2), (3)
(5)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi$	(MP): (1), (4)
(6)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi$	(S7.2).(iii)
(7)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	(MP): (5), (6).

Demonstrăm (ii):

(1)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(A1)
(2)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg\psi$	Propoziţia 1.37.(ii)
(3)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.37.(ii)
(5)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi) \to ((\varphi \to \neg\psi) \to \bot)$	(S7.2).(ii)
(6)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash (\varphi \to \neg\psi) \to \bot$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi), \neg\psi\}$	$\vdash \bot$	(MP): (3), (6)
(8)	$\{\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	(7) şi (S7.1).

Demonstrăm (iii) :

(1)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi$	Propoziţia 1.37.(ii)
(2)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi$	Propoziţia 1.37.(ii)
(3)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)$	Propoziţia 1.37.(ii)
(4)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\psi) \to (\varphi \to \neg\psi)$	(S7.2).(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \varphi \to \neg\psi$	(MP): (3), (4)
(6)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi$	(MP): (1), (5)
(7)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \bot)$	(S7.2).(ii)
(8)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \psi \to \bot$	(MP): (6), (7)
(9)	$\{\varphi, \psi, \neg\neg(\varphi \to \neg\psi)\}$	$\vdash \bot$	(MP): (2), (8)
(10)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \neg(\varphi \to \neg\psi)$	(9) şi (S7.1).

Demonstrăm (iv), implicaţia "$\Rightarrow$":

(1)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	ipoteză
(2)	$\{\varphi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)		$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	Teorema deducţiei
(4)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	(3)
(5)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \varphi$	(i)
(6)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \psi \to \chi$	(MP): (4), (5)
(7)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \psi$	(ii)
(8)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (6), (7).

Demonstrăm (iv), implicaţia "$\Leftarrow$":

(1)	$\{\varphi \wedge \psi\}$	$\vdash \chi$	ipoteză
(2)		$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	Teorema deducţiei
(3)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \chi$	(2)
(4)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \varphi \wedge \psi$	(iii)
(5)	$\{\varphi, \psi\}$	$\vdash \chi$	(MP): (3), (4).

$\square$

(S8.4)

(i) Să se arate că mulţimea modelelor unei mulţimi satisfiabile şi finite de formule este infinită.

(ii) Găsiţi o mulţime infinită de formule care nu este semantic echivalentă cu nicio mulţime finită de formule.

Demonstraţie:

(i) Fie Γ o mulţime de formule ca în enunţ. Dat fiind că Γ este satisfiabilă, admite un model şi fie acesta e. Pe de altă parte, dat fiind că Γ este finită, există un $n \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $\bigcup_{\varphi\in\Gamma} Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$.

Fie, atunci, pentru orice $k \in \mathbb{N}$, câte o funcţie $e_k : V \to \{0, 1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e_k(x) := \begin{cases} e(x), & \text{dacă } x \in \{v_0, \ldots, v_n\} \\ 1, & \text{dacă } x \in \{v_{n+1}, \ldots, v_{n+k}\} \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci, pentru $k \neq l$ avem $e_k \neq e_l$. Prin urmare, $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ este o mulţime numărabilă. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ şi $\varphi \in \Gamma$, aplicând Propoziţia 1.13 pentru φ, e şi e_k, avem că $e_k^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $e_k \vDash \varphi$.

Am obţinut astfel că $\{e_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq Mod(\Gamma)$. Aşadar, $Mod(\Gamma)$ este infinită.

(ii) Considerăm $\Gamma := V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, o mulţime infinită de formule. Demonstrăm că Γ nu este echivalentă cu nicio mulţime finită de formule. Observăm că o evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă şi numai dacă $e(v_n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ dacă şi numai dacă e este funcţia constantă $\mathbf{1}$. Prin urmare, $Mod(\Gamma) = \{\mathbf{1}\}$.

Fie acum Δ o mulţime finită de formule. Avem două cazuri:

(a) Δ nu este satisfiabilă. Atunci $Mod(\Delta) = \emptyset$.

(b) Δ este satisfiabilă. Atunci aplicăm (i) pentru a concluziona că $Mod(\Delta)$ este infinită.

În ambele cazuri, obţinem că $Mod(\Delta) \neq Mod(\Gamma)$, deci Γ nu este echivalentă cu Δ.

$\square$