GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 10
Matrice şi morfisme ortogonale. Geometrie analitică

Metoda transformărilor ortogonale

A treia metodă de aducere la forma canonică a unei forme pătratice Q este metoda transformărilor ortogonale.

Ce înseamnă aducerea la forma canonică a unei forme pătratice la nivel de matrice? Înseamnă aducerea la forma diagonală a matricei A asociate formei pătratice, care este o matrice simetrică. Ştim din **teorema 15** din cursul 7, că orice matrice simetrică este diagonalizabilă, deci Q poate fi adusă la forma canonică.

Forma canonică pentru Q, va fi $Q(v) = \lambda_1\overline{x}_1^2 + \lambda_2\overline{x}_2^2 + \ldots + \lambda_n\overline{x}_n^2$, unde λ_i sunt valorile proprii ale matricei A.

Metodă constă în aflarea valorilor proprii dar şi a vectorilor proprii asociaţi acestora. Aceşti vectori proprii formează bază pentru spaţiul vectorial pe care este definită forma pătratică. Un ultim pas în această metodă constă în obţinea unei baze ortonormate de vectori proprii din vectorii proprii deja obţinuţi. Obţinem nu numai forma canonică, dar şi baza în care este exprimată această formă canonică. Această metodă funţionează numai pentru spaţii euclidiene.

Sigur că şi în cazul metodelor Gauss şi Jacobi se poate obţine baza în care este exprimată forma canonică, dar prin această metodă obţinem o bază ortonormată.

Voi descrie metoda pe un exemplu.

Exemplul 1. Considerăm forma pătratică $Q(v) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3$ pe $\mathbb{R}^3$, cu matricea asociată $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Metoda Gauss: $Q(v) = (x_1 + x_3)^2 + x_2^2$. Deci $Q(v) = \overline{x}_1^2 + \overline{x}_2^2$. Schimbarea de coordonate este $\overline{x}_1 = x_1 + x_3$, $\overline{x}_2 = x_2$, $\overline{x}_3 = x_3$. Matricea formei Q în baza $\overline{\mathcal{B}}$ este $M_{\overline{\mathcal{B}}}(Q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Doresc să specific în acest caz baza în care am obţinut forma canonică. Considerăm A scrisă în baza canonică $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$. Pentru orice vector $v \in \mathbb{R}^3$ legătura dintre coordonatele lui v în baza $\mathcal{B}$ şi baza $\overline{\mathcal{B}}$ este $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}} \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 \end{pmatrix}$. Rezolvăm sistemul $\overline{x}_1 = x_1 + x_3$, $\overline{x}_2 = x_2$, $\overline{x}_3 = x_3$

în funcţie de x_i-uri şi obţinem $x_1 = \overline{x}_1 - \overline{x}_3, x_2 = \overline{x}_2, x_3 = \overline{x}_3$, de unde $M_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Astfel $\overline{\mathcal{B}} = \{\overline{e}_1 = e_1, \overline{e}_2 = e_2, \overline{e}_3 = -e_1 + e_3\}$. Se verifică relaţia între matricele formei pătratice în cele două baze (menţionată în **propoziţia 5** din cursul 9) $M_{\overline{\mathcal{B}}}(Q) = {}^tM_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(Q) M_{\overline{\mathcal{B}},\mathcal{B}}$, adică

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

.

2. Metoda Jacobi nu se poate aplica pentru că $\Delta_3 = \det(A) = 0$. $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$.

3. Metoda transformărilor ortogonale

Polinomul caracteristic este $P_A(X) = X(X-1)(X-2)$ cu rădăcinile $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Vectorii proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ cu $||v_1|| = \sqrt{2}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cu $||v_2|| = 1$, şi $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ cu $||v_3|| = \sqrt{2}$. Se vede imediat că $< v_i, v_j >= \delta_{ij}$, deci $\{v_1, v_2, v_3\}$ este bază ortogonală. Baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ unde $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1, e'_2 = v_2, e'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$. Matricea $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Avem ${}^tS \cdot S = I_3$, deci $S^{-1} = {}^tS$, şi $A = SDS^{-1}$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să mai facem o observaţie legat de matricea S. $S = (e'_1\ e'_2\ e'_3)$ şi astfel matricea transpusă, ${}^tS = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix}$. Fiecare componentă a produsului $({}^tS \cdot S)_{ij} =< e'_i, e'_j >= \delta_{ij}$ (δ_{ij} este simbolul Kronecker şi este 1 pentru $i = j$ şi 0 pentru $i \neq j$), adică ${}^tS \cdot S = I_3$, de unde $S^{-1} = {}^tS$.

Relaţia $A = SDS^{-1}$ se mai scrie $D = S^{-1}AS = {}^tSAS$, exact relaţia de transformare între matricele formei Q în bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$, menţionată la metoda Gauss. Forma canonică a formei pătratice este asociată matricei D, adică l $Q(v') = x_2'^2 + 2x_3'^2$ expresie ce se obţine în baza ortonormată $\mathcal{B}'$.

Această metodă se numeşte a transformărilor ortogonale datorită faptului că trecerea de la baza $\mathcal{B}$ la baza ortonormată $\mathcal{B}'$ se face prin matricea $S = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ cu proprietatea ${}^tSS = I_n$ (în exemplu ${}^tSS = I_3$). O matrice cu această proprietate se numeşte *ortogonală*.

Matrice şi morfisme ortogonale

Notăm pentru orice spaţiu vectorial V, $\mathrm{End}(V) = \{f : V \longrightarrow V \mid f \text{morfism}\}$.

Definiţia 2. O matrice $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte *ortogonală* dacă ${}^tSS = I_n$. Un endomorfism $f : (V, <,>) \longrightarrow (V, <,>)$ al unui spaţiu euclidian se numeşte *ortogonal* dacă pentru $(\forall)v \in V$, $< f(v), f(v) >=< v, v >$ (adică păstrează produsul scalar).

Exemplul 3. $\mathrm{id}_V : V \longrightarrow V$ este un endomorfism ortogonal, oricare ar fi V spaţiul euclidian.

Teorema 4 (de caracterizare a endomorfismelor ortogonale)**.** *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu vectorial real şi $f \in \mathrm{End}(V)$. f este ortogonal dacă şi numai dacă pentru $(\forall)v \in V, ||f(v)|| = ||v||$.*

Teorema spune că un endomorfism este ortogonal (păstrează produsul scalar) dacă şi numai dacă păstrează norma.

Propoziţia 5. *Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune finită şi $f \in \mathrm{End}(V)$. Atunci f este injectiv $\Leftrightarrow$ f este surjectiv $\Leftrightarrow$ f este bijectiv.*

Demonstraţie: f injectiv $\Rightarrow$ f surjectiv. Aplicăm teorema rang-defect lui $f : V \longrightarrow V$. Avem $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$.$f$ injectiv $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(f) = 0_V \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Deci $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(V)$, iar $\mathrm{Im}(f)$ este subspaţiu în V, deci $\mathrm{Im}(f) = V$, adică f surjectiv.

Pentru f surjectiv $\Rightarrow$ f bijectiv trebuie să arătăm că f este injectiv. Argumentul este similar cu cel de mai sus.

f bijectiv $\Rightarrow$ f injectiv din definiţie.

□

Propoziţia 6. *Fie $f \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfism ortogonal al unui spaţiu euclidian. Atunci f este bijectiv.*

Demonstraţie: Folosind propoziţia anterioară trebuie să arătăm că f este injectiv. $v \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(v) = 0_V$, dar $||v|| = ||f(v)|| = ||0_V|| = 0 \Leftrightarrow v = 0_V$.

□

Pentru $(V, <,>)$ spaţiu euclidian notăm $\mathcal{O}(V) = \{f : V \longrightarrow V \mid \text{f morfism ortogonal}\}$. $\mathcal{O}(V)$ formează grup în raport cu compunerea endomorfismelor spaţiului V.

Următorul rezultat face legătura între endomorfisme şi matrice ortogonale.

Notăm $O_n(\mathbb{R}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) | \ {}^tSS = I_n\}$. Acesta este subgrup al grupului $GL_n(\mathbb{R})$. Parte stabilă: fie $A, B \in O_n(\mathbb{R})$, ${}^t(AB)AB = {}^tB\,{}^tAAB = {}^tBI_nB = {}^tBB = I_n$. Restul axiomelor grupului se verifică uşor.

Teorema 7. *Fie V un spaţiu euclidian, cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Atunci $f \in \mathcal{O}(V)$ dacă şi numai dacă $M_{\mathcal{B}}(f) \in O_n(\mathbb{R})$ pentru $\mathcal{B}$ o bază ortonormată a spaţiului V.*

Pentru $S \in O_n(\mathbb{R})$ avem $\det({}^tSS) = \det(I_n) \Leftrightarrow \det({}^tS)\det(S) = 1 \Leftrightarrow \det(S)^2 = 1 \Rightarrow \det(S) = \pm 1$. Deci pentru orice $S \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \det(S) = \pm 1$.

Notăm $SO_n(\mathbb{R}) = \{S \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(S) = 1\}$. Este clar că $SO_n(\mathbb{R})$ este subgrup al grupului $O_n(\mathbb{R})$.

Se arată uşor că toate matricele din $SO_2(\mathbb{R})$ sunt de forma $R = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$. (Considerăm o matrice $R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, punemi condiţiile ca aceasta să fie în $SO_2(\mathbb{R})$. Rezultă $d = a$, $c = -b$, şi $a^2 + b^2 = 1$) Acestea sunt rotaţii.

Elementele $S \in O_2(\mathbb{R})$ pentru care $\det(S) = -1$, au forma $S = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}$. Sunt simetrii (reflecţii). De exemplu pentru $t = \frac{\pi}{2}$ obţinem $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ care este simetria în prima bisectoare a axelor de coordonate. Este clar că $S^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Pentru $t = \pi$ obţinem $S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, simetria în axa Oy.

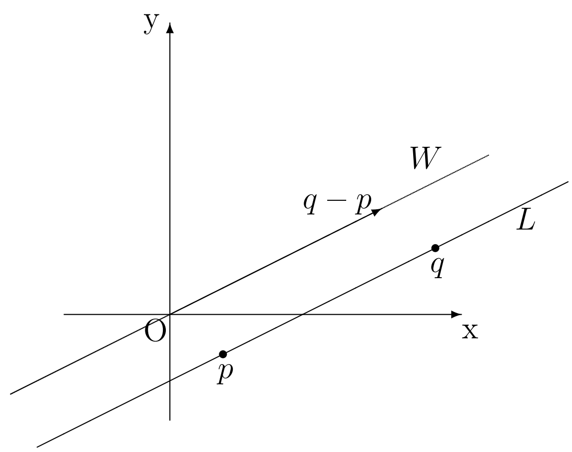
Dacă matricele ortogonale corespund operatorilor ortogonali, pentru matrice simetrice există o clasă specială de operatori cu care acestea sunt asociate.

Definiţia 8. Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian şi $f \in \mathrm{End}(V)$, f se numeşte *autoadjunct* dacă pentru $(\forall) v, w \in V, < f(v), w >=< v, f(w) >$.

Teorema 9. *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian finit dimensional şi $f \in \mathrm{End}(V)$. Fie $\mathcal{B}$ bază ortonormată în V şi $S = M_{\mathcal{B}}(f)$. f este autoadjunct dacă şi numai dacă $S = {}^tS$.*

Geometrie analitică

Am lucrat până acum cu spaţii şi subspaţii vectoriale. Considerăm dreptele paralele L şi W incluse în planul $\mathbb{R}^2$.



Cele două submulţimi ale planului sunt $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x\}$ şi respectiv $L = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{2}x - 1\}$. W conţine originea, este deci un subspaţiu vectorial al planului $\mathbb{R}^2$. L nu este subspaţiu vectorial neconţinând elementul $0_{\mathbb{R}^2}$. Şi totuşi L este o linie, este descris de o ecuaţie liniară. Este de fapt o varietate liniară.

Definiţia 10. O *varietate liniară* în $\mathbb{R}^n$ este o submulţime $L = p + W = \{p + w \mid w \in W\}$ unde $p \in \mathbb{R}^n$ şi $W \subset \mathbb{R}^n$ este un subspaţiu vectorial.

Bineînţeles definiţia se poate da pentru orice spaţiu vectorial V, orice $p \in V$ şi orice $W \subset V$ subspaţiu vectorial. Vom lucra însă numai în $\mathbb{R}^n$.

Este evident că o varietate liniară L este subspaţiu vectorial dacă şi numai dacă $0_{\mathbb{R}^n} \in L$.

Propoziţia 11. *Dacă $p + W = p' + W'$, cu W, W' subspaţii vectoriale în $\mathbb{R}^n$, atunci $W = W'$.*

Deci în reprezentarea unei varietăţi liniare nevide sub forma $p + W$, subspaţiul vectorial W este unic determinat.

În figura anterioară $L = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + W$, $p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Definiţia 12. Pentru orice $L \subset \mathbb{R}^n$ varietate liniară, există un unic subspaţiu vectorial $W \subset \mathbb{R}^n$, numit *subspaţiul director al lui* L, a.î. $(\forall) p_0 \in L$, avem $L = p_0 + W$. *Dimensiunea* unei varietăţi liniare este dimensiunea spaţiului director, şi se notează $\dim_{\mathbb{R}}(L)$.

O varietate liniară de dimensiune 1 se numeşte *dreaptă*. O varietate liniară de dimensiune 2 se numeşte *plan*, iar dacă varietatea are dimensiune $n-1$ în $\mathbb{R}^n$ aceasta se numeşte *hiperplan*.

Dacă $p \in \mathbb{R}^n$, atunci $L = \{p\}$ are subspaţiul director $0_{\mathbb{R}^n}$, şi deci $\dim\{p\} = 0$.

Observaţia 13. *Dat un punct $p \in \mathbb{R}^n$ şi W un subpaţiu vectorial al spaţiului $\mathbb{R}^n$, există o unică varietate liniară ce trece prin p şi are ca spaţiu director W.*

Exemplul 14. Fie $L = \{v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 = 1, 2x_1 - x_2 - x_3 = 3\}$. Arătăm că L este varietate liniară. $L = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\}$, adică L este mulţimea soluţiilor sistemului $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, unde $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

O soluţie a acestui sistem este $\begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Deci $L = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + W$, unde $W = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. W este subspaţiu vectorial în $\mathbb{R}^3$. Este spaţiul soluţiilor sistemului omogen $A \cdot v = 0_{\mathbb{R}^2}$. $\dim(W) = \text{defect}(A) = 1 =$ numărul variabilelor secundare. L este o dreaptă în $\mathbb{R}^3$. Rezolvând sistemul $A \cdot v = 0_{\mathbb{R}^2}$ obţinem $x_1 = 0, x_2 = -x_3, x_3 \in \mathbb{R}$ este parametru. $W =< \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} >= \{t\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$, este spaţiul generat de $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Obţinem $L = \{\begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\} = \{\begin{pmatrix} 4/3 \\ -1/3 - t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Ecuaţiile prin care am definit L se numesc *implicite*. Ecuaţiile la care am ajuns se numesc *parametrice*, acestea depind de parametrul $t \in \mathbb{R}$.

În general o dreaptă (varietate liniară de dimensiune 1) are un parametru, un plan are doi parametri iar un hiperplan în $\mathbb{R}^n$ are $n-1$ parametri.

- **Ecuaţii ale dreptei**

O dreaptă este o varietate liniară de dimensiune 1, adică subspaţiul vectorial director este $< v >, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$. Orice alt vector λv, cu $\lambda \neq 0, \lambda \in \mathbb{R}$ generează $< v >$ $(< v >=< \lambda v >)$.

Voi descrie ecuaţiile parametrice şi implicite ale unei drepte $L \subset \mathbb{R}^n$ ce trece prin p şi are $< v >= \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$ (subspaţiul generat de v) ca subspaţiu director, cu $p = {}^t(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ şi $v = {}^t(v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.

$L = p + < v >$. Deci $(\forall) x \in L, x = p + tv$, pentru un $t \in \mathbb{R}$.

De aici obţinem ecuaţiile parametrice

$$x_1 = p_1 + tv_1, x_2 = p_2 + tv_2, \ldots, x_n = p_n + tv_n.$$

Ecuaţiile implicite ale dreptei L se obţin eliminând parametrul t din ecuaţiile de mai sus. Obţinem

$$L : \tfrac{x_1 - p_1}{v_1} = \ldots = \tfrac{x_n - p_n}{v_n}.$$

Dacă pentru un indice $j, v_j = 0$, atunci ecuaţia corespunzătoare indicelui j este $x_j - p_j = 0$.

Ecuaţiile dreptei $L(p,q)$ ce trece prin $p = {}^t(p_1, p_2, \ldots, p_n) \neq q = {}^t(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, două puncte distincte din $\mathbb{R}^n$.

Observăm că $v = q - p$ este un vector director al dreptei $L(p,q)$. Este un vector în spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$, deci originea sa este în $0_{\mathbb{R}^n}$. În figura cu care am început consideraţiile geometrice am descris acest fapt.

$L(p,q) = p + < q-p >$. Deci $(\forall)x \in L, x = p+t(q-p) = (1-t)p+tq$, cu $t \in \mathbb{R}$. O combinaţie liniară $\alpha p + \beta q$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha + \beta = 1$, se numeşte combinaţie convexă. Am obţinut $L(p,q) = \{(1-t)p + tq \mid t \in \mathbb{R}\}$, muţimea combinaţiilor convexe dintre p şi q.

Dacă $t \in [0,1]$, atunci combinaţia convexă $(1-t)p+tq$ reprezintă segmentul dintre p şi q de pe dreapta $L(p,q)$. Îl putem nota $[p,q] = \{(1-t)p + tq \mid t \in [0,1]\}$.

Ecuaţiile parametrice ale dreptei $L(p,q)$ sunt

$x_1 = p_1 + t(q_1 - p_1) = (1-t)p_1 + tq_1,$

$x_2 = p_2 + t(q_2 - p_2) = (1-t)p_2 + tq_2, \quad \ldots,$

$x_n = p_n + t(q_n - p_n) = (1-t)p_n + tq_n.$

De aici, eliminând parametrul t, obţinem ecuaţiile implicite

$$\frac{x_1-p_1}{q_1-p_1} = \ldots = \frac{x_n-p_n}{q_n-p_n}.$$

Dacă pentru un indice $j, q_j - p_j = 0$, atunci ecuaţia corespunzătoare indicelui j este $x_j - p_j = 0$.