= ALGORITMICA GRAFURILOR =

= NOȚIUNI INTRODUCTIVE =

1) • MULTISET = MULȚIME FINITĂ NEVIDĂ (ÎN CARE SE POT REPETA ELEMENTE).

$R(\text{MULTISET}) = (S, r) = \{x^{r(x)} / x \in S\}$, UNDE:

* S = MULȚIME FINITĂ ($\neq \emptyset$)
* $r: S \to \mathbb{N}$ (FUNCȚIA DE MULTIPLICITATE)

EX: $S = \{1,2,3\} \to R' = \{1,1,2,2,2,2\} = \{1^2, 2^{④}\}$ → de câte ori apare!

$|R|$ (Cardinal) $= 2 + 4 = 6$ (SUMĂ MULTIPLICITĂȚI)

2) • GRAF ORIENTAT: $G = (V, E)$, UNDE:

* $V (\neq \emptyset)$ = MULȚIMEA VÂRFURILOR (FINITĂ)
* $E \subseteq V \times V$ = MULȚ. ARCELOR (PERECHI ORDONATE)

NOTAȚII: $v \in V$ (VÂRF)

$e = (u, v) \in E$ (MUCHIE ORIENTATĂ) $\Rightarrow uv$ = ARC

* $u = e^-$ (VF. INIȚIAL / ORIGINE)
* $v = e^+$ (VF. FINAL / TERMINUS)

FIE GRAFUL ORIENTAT $G = (V, E)$:

$d_G^-(u) = |\{e \in E / u = \text{TERMINUS PT. } e\}|$ → GRAD INTERIOR "u"

$d_G^+(u) = |\{e \in E / u = \text{ORIGINE PT. } e\}|$ → GRAD EXTERIOR "u"

$d_G(u) = d_G^-(u) + d_G^+(u)$ → GRAD "u"

$$\boxed{\sum_{u \in V} d_G^-(u) = \sum_{u \in V} d^+(u) = |E|}$$!

$S^-(G) = \{d_G^-(v_1), \ldots, d_G^-(v_n)\}$ → MULTISET GRADE INTERIOARE

$S^+(G)$ → " —— " —— " EXTERIOARE

3) • GRAF NEORIENTAT (idem 2, DAR FĂRĂ ARCE ⇒ MUCHII)

4) • MULTIGRAF (NE / ORIENTAT) = GRAF (NE / ORIENTAT) CU BUCLE.

$e = (u, u) \in E$ → BUCLĂ

$d_G(u) = |\{e \in E / e \neq \text{BUCLĂ}, u = \text{EXTREMITATE } e\}| +$

$+ 2 \cdot |\{e \in E / e = \text{BUCLĂ}, \text{" —— " —— "}\}|$

5) • ADIACENȚĂ, INCIDENȚĂ:

$G=(V,E)$ NEORIENTAT

* $u, v \in V$ SUNT NODURI ADIACENTE $\Leftrightarrow (u,v)\in E \Rightarrow$ "u" E VECIN PT. "v"

NOT: $N_G(u)$ = MULȚIMEA VECINILOR LUI "u"

* $e \in E$ ESTE O MUCHIE INCIDENTĂ CU UN NOD "u" $\Leftrightarrow$ "u" EXTREMITATE PT. "e"
* $e, f \in E$ SUNT ADIACENTE $\Leftrightarrow$ AU O EXTREMITATE COMUNĂ.

6) • DRUM, LANȚ, CIRCUIT, CICLU:

a) $G=(V,E)$ ORIENTAT:

* UN DRUM $P=[v_1, v_2 \dots v_k]$ UNDE $v_{i=\overline{1,k}} \in V$ și $(v_i, v_{i+1}) \in E$

" — " — " SIMPLU: NU CONȚINE UN ARC DE MAI MULTE ORI.

" — " — " ELEMENTAR: " — " — " VÂRF " — " — ".

LUNGIME(P) = K−1 (= NR. ARCE) = $\underset{\text{NOT.}}{\ell(P)}$

* DISTANȚA DINTRE 2 VÂRFURI:

$$d_G(u,v) = \begin{cases} 0, & u=v \\ \infty, & (\not\exists) \text{ DRUMUL } u-v \\ \min\{\ell(P) \mid P = \text{DRUM } u-v\} \end{cases}$$

* UN CIRCUIT: DRUM CU CAPETE IDENTICE $C=[v_1 \dots v_k, v_1]$

" — " — " ELEMENTAR: NU SE REPETĂ VÂRFURILE.

b) $G=(V,E)$ NEORIENTAT:

NOȚIUNILE SUNT IDENTICE: $\begin{cases} \text{DRUM} \Rightarrow \text{LANȚ} \\ \text{CIRCUIT} \Rightarrow \text{CICLU} \end{cases}$

7) GRAF PARȚIAL, SUBGRAF:

$G=(V,E)$

* GRAF PARȚIAL: ARE TOATE VÂRFURILE, DAR NU TOATE MUCHIILE LUI G.
  NOT: $G_1 \leq G$ $(V_1 = V; E_1 \subseteq E)$
* SUBGRAF: NU TOATE VÂRFURILE, NU TOATE MUCHIILE LUI G.
  NOT: $G_1 < G$ $(V_1 \subseteq V; E_1 \subseteq E)$
* SUBGRAF INDUS DE V_1 ÎN G: TOATE ARCE/MUCHII CU EXTREMITĂȚILE ÎN V_1.
  NOT: $G_1 = G[V_1]$ $(V_1 \subseteq V;\ E_1 = \{e \in E(G) \mid e$ ARE AMBELE EXTREMITĂȚI ÎN $V_1\})$

8) • CONEXITATE:

a) $G=(V,E)$ NEORIENTAT

↳ CONEX $\Leftrightarrow (\forall)$ 2 VÂRFURI DISTINCTE $(\exists)$ UN LANȚ.

b) $G=(V,E)$ ORIENTAT

↳ TARE-CONEX $\Leftrightarrow$ " — " — " DRUM.

* COMPONENTĂ CONEXĂ A LUI G = SUBGRAF INDUS CONEX MAXIMAL (i.e. NU E "⊂" ÎN ALT SUBGRAF CONEX)

= PARCURGERI =

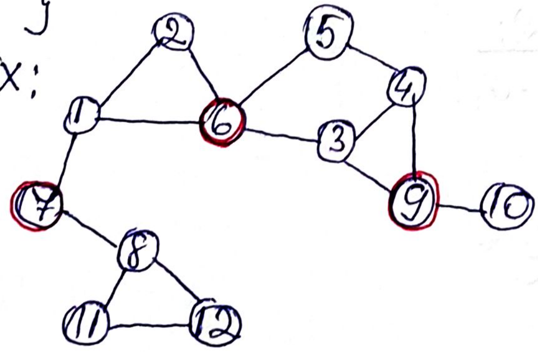
- **DFS** (nod v)

```
{ v.vizitat = true;
  PT. TOTI w ∈ N_G(v) // VECINII
  | if (w.vizitat == false)
  |   { w.tata = v;
  |     DFS(w);
  |   }
}
```

- **BFS** (nod st)

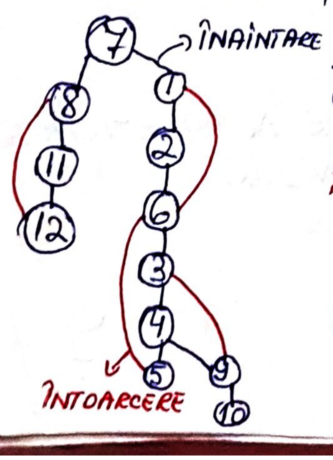
```
{ queue Q = ∅; Q.push(st);
  st.vizitat = true; st.distanta = 0
  while (Q ← NOT EMPTY)
  { x ← Q.pop();
    PT. TOTI y ∈ N_G(x)
    { y.tata = x;
      y.distanta = x.distanta + 1;
      y.vizitat = true; Q.push(y);
    }
  }
}
```

EX:



BFS(7): 7, 1, 8, 2, 6, 11, 12, 3, 5, 4, 9, 10

DFS (7): 7, 1, 2, 6, 3, 4, 5, 9, 10, 8, 11, 12



{ MUCHIILE CARE SUNT ÎN ARBORELE DFS: DE ÎNAINTARE.
{ " —— " —— " NU " —————— " —— ": DE ÎNTOARCERE.

PUNCT CRITIC: NOD, PE CARE, DACĂ-L ELIMINĂM (ÎMPREUNĂ CU MUCHIILE INCIDENTE), NR. DE COMPONENTE CONEXE CREȘTE.

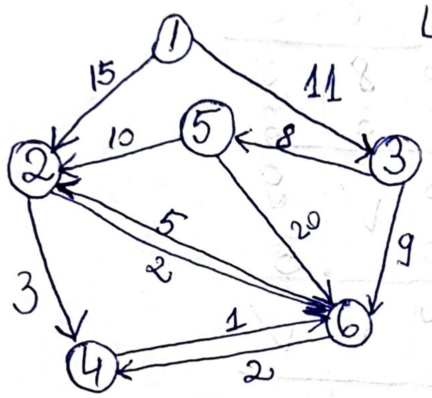
OBS: • DACĂ RĂDĂCINA ARB. DFS ARE CEL PUȚIN 2 FII, E PUNCT CRITIC.

8/15

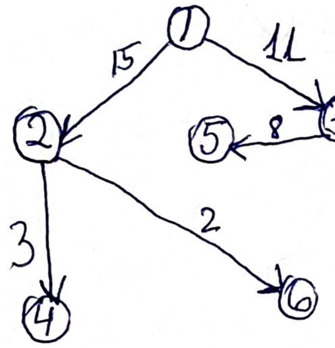
DIJKSTRA

• EXEMPLU:

$\boxed{S=1}$



$\Downarrow$



	1	2	3	4	5	6
0) d:	0	∞	∞	∞	∞	∞
t:	0	0	0	0	0	0
1) d:	—	15	11			
t:		1	1			
3) d:	—	15	—		19	20
t:		1			3	3
2) d:	—	—	—	18	19	17
t:				2	3	2
6) d:	—	—	—	18	19	—
t:				2	3	
4) d:	—	—	—	—	19	—
t:					3	