Geometrie

Spaţii vectoriale

Definiţia 9. Un spaţiu vectorial peste un corp comutativ $\mathbb{K}$ (vom lucra peste $\mathbb{R}$) este un grup abelian (comutativ) $(V, +)$ ce are şi o multiplicare externă cu scalari din $\mathbb{K}$ ($(\alpha, v) \longmapsto \alpha v \in V$, cu $\alpha \in \mathbb{K}$ şi $v \in V$), înmulţire ce îndeplineşte următoarele proprietăţi:

(1) $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$, pentru $(\forall)\alpha \in \mathbb{K}$ şi $(\forall)v_1, v_2 \in V$,
(2) $(\alpha_1 + \alpha_2)v = \alpha_1 v + \alpha_2 v$, pentru $(\forall)\alpha_j \in \mathbb{K}$ şi $(\forall)v \in V$,
(3) $\alpha_1(\alpha_2 v) = (\alpha_1\alpha_2)v$, pentru $(\forall)\alpha_j \in \mathbb{K}$ şi $(\forall)v \in V$,
(4) $1 \cdot v = v$.

Morfisme de spaţii vectoriale

Definiţia 17. Se numeşte morfism de spaţii vectoriale $f : V \longrightarrow W$ o funcţie omogenă şi aditivă.

- aditivă: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, pentru $(\forall)v_1, v_2 \in V$.
- omogenă: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ pentru $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)v \in V$.

Propoziţia 18. *$f : V \longrightarrow W$ este morfism de spaţii vectoriale dacă şi numai dacă pentru $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ şi $(\forall)v_1, v_2 \in V$ avem $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.*

Observaţia 19. *$f : V \longrightarrow W$ morfism, atunci $f(0_V) = 0_W$.*

Definiţia 8. Se numeşte matrice eşalon o matrice cu proprietăţile:

- liniile nule (dacă) există se află sub liniile nenule
- primul element nenul (de la stânga la dreapta) de pe fiecare linie nenulă este 1; acesta numindu-se pivotul liniei
- pivotul de pe linia $i + 1$ este la dreapta pivotului de pe linia i, pentru orice i
- orice pivot este singurul element nenul de pe coloana sa

Exemplul 1. Fie matricea
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix}$. Vedem că primul element de pe prima linie este 1, deci din definiţia pivotului acesta este pivotul primei linii. Cum pivotul este singurul nenul pe coloana sa vom elimina elementele de pe prima coloană folosind acest pivot. Astfel $L_2' = L_2 + L_1$ şi $L_3' = L_3 - 4L_1$. Avem

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$. Vedem că elementul de pe a doua linie şi a doua coloană este nenul. Acesta va fi pivotul celei de-a doua linii. Pentru a obţine 1 în acea poziţie trebuie să împărţim linia a doua cu 4, deci facem transformarea $L_2' = \frac{1}{4}L_2$. Astfel obţinem matricea $\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -10 & -12 \end{pmatrix}$. Cu pivotul al doilea, cel de pe linia a doua, facem eliminări astfel încât acesta să rămână singurul nenul pe coloana sa. Eliminările sunt $L_1' = L_1 - L_2, L_3' = L_3 + L_1$. Obţinem matricea $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & -12 \end{pmatrix}$. Elementul nenul de pe linia 3 este -9, pe coloana a treia. Aici obţinem al treilea pivot împărţind L_3 cu -9. După această operaţie matricea devine $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$. În sfârşit vom face ultimele eliminări pe coloana a treia a.î. pivotul să rămână singurul nenul pe coloana sa.

Transformările sunt $L_1' = L_1 - L_3$ şi $L_2' = L_2 - L_3$. Forma eşalon a matricii este

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}.$$

Exemplul 1. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1)$. Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Vectorii proprii asociaţi acestor valori proprii fiind liniar independenţi şi fiind în număr de trei, în $\mathbb{R}^3$, formează bază. Deci matricea este diagonalizabilă. Vectori proprii sunt:

$A \cdot v_1 = 0 \cdot v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z = 0$. Deci $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(A-1I_3)\cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = z$, de unde $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(A+1I_3)\cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = -z$, şi rezultă $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Deci $A = QDQ^{-1}$, unde $Q = (v_1\ v_2\ v_3)$, este matricea ce are coloanele vectorii proprii asociaţi valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Adică $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ cu inversa $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Avem $D = Q^{-1}AQ$. Ce reprezintă

.

2. Metoda Jacobi nu se poate aplica pentru că $\Delta_3 = \det(A) = 0$. $\Delta_1 = \Delta_2 = 1$.
3. Metoda transformărilor ortogonale

Polinomul caracteristic este $P_A(X) = X(X-1)(X-2)$ cu rădăcinile $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$. Vectorii proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ cu $||v_1|| = \sqrt{2}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cu $||v_2|| = 1$, şi $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ cu $||v_3|| = \sqrt{2}$. Se vede imediat că $< v_i, v_j >= \delta_{ij}$, deci $\{v_1, v_2, v_3\}$ este bază ortogonală. Baza ortonormată $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ unde $e'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_1, e'_2 = v_2, e'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}v_3$. Matricea $S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Avem ${}^tS \cdot S = I_3$, deci $S^{-1} = {}^tS$, şi $A = SDS^{-1}$, unde $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Să mai facem o observaţie legat de matricea S. $S = (e'_1\ e'_2\ e'_3)$ şi astfel matricea transpusă, ${}^tS = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{pmatrix}$. Fiecare componentă a produsului $({}^tS \cdot S)_{ij} =< e'_i, e'_j >= \delta_{ij}$ (δ_{ij} este simbolul Kronecker şi este 1 pentru $i = j$ şi 0 pentru $i \neq j$), adică ${}^tS \cdot S = I_3$, de unde $S^{-1} = {}^tS$.

Relaţia $A = SDS^{-1}$ se mai scrie $D = S^{-1}AS = {}^tSAS$, exact relaţia de transformare între matricele formei Q în bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$, menţionată la metoda Gauss. Forma canonică a formei pătratice este asociată matricei D, adică l $Q(v') = x_2'^2 + 2x_3'^2$ expresie ce se obţine în baza ortonormată $\mathcal{B}'$.

Teorema 1. $\Delta = \det(A), \delta = \det(A_2), I = \mathrm{tr}(A_2)$ *sunt invarianţi la translaţii şi transformări ortogonale.*

Clasificarea conicelor

Putem da o clasificare a conicelor folosind invarianţii Δ, δ, I.

(1) Dacă $\Delta \neq 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *nedegenerată*.

a) dacă $\delta > 0$, atunci $\mathcal{C}$ este $\begin{cases} \textit{elipsă} & \text{dacă} \quad \Delta \cdot I < 0 \\ \textit{mulţimea vidă} & \text{dacă} \quad \Delta \cdot I > 0 \end{cases}$

b) dacă $\delta = 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *parabolă*

c) dacă $\delta < 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *hiperbolă*

(2) Dacă $\Delta = 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este conică *degenerată*

a) dacă $\delta > 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este *un punct*,

b) dacă $\delta = 0$, atunci conica este o reuniune de *drepte paralele* sau *confundate* sau *mulţimea vidă*,

c) dacă $\delta < 0$, atunci conica $\mathcal{C}$ este o reuniune de *drepte concurente*.