C10 (continuare) - AG

Forma Jordan

OBS

$A, A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sunt <u>echivalente</u> $A \sim A' \Leftrightarrow$
$\exists\, C \in GL(n, \mathbb{K})$ a.î. $A' = C^{-1}AC$

„$\sim$" este o relație de echivalență.

OBS

$(End(V), +, \cdot) \overset{\varphi}{\simeq} (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ izomorfism de inele.

$\mathcal{R} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ reper în V, $A = (a_{ji})_{j,i=\overline{1,n}}$ matricea asociată lui $f \in End(V)$ în raport cu $\mathcal{R}$.

$\varphi(f) = A$

Problemă $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\exists\, C \in GL(n, \mathbb{C})$ a.î.

$A' = C^{-1}AC$ este a) diagonală

b) „aproape" diagonală.

SAU

$\forall\, f \in End(V)$, $\exists$ un reper $\mathcal{R}$ în V a.î. matricea asociată lui f în raport cu $\mathcal{R}$ este

a) diagonală

b) „aproape" diagonală

Def Fie $\lambda \in \mathbb{C}$.

- S.n. <u>bloc Jordan</u> de ordinul p asociat lui λ matricea

$$J_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \lambda & \\ 0 & \ddots & 1 \quad \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \; p \geq 2$$

$$J_1(\lambda) = (\lambda)$$

- S.n. <u>matrice Jordan</u> de ord n o matrice

$$J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{p_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}, \quad p_1 + \ldots + p_t = n.$$

<u>Teoremă</u> $(V,+,\cdot)/\mathbb{C}$ sp. vectorial $\forall f \in End(V)$, $\exists$ un reper în V a.î. matricea asociată lui f în raport cu R este matrice Jordan

$$J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{p_t}(\lambda_t) \end{pmatrix}, \quad p_1 + \dots + p_t = n = \dim V$$

SAU $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\exists C \in GL(n, \mathbb{C})$ a.î. $A' = C^{-1}AC$ este o matrice Jordan J.

Scrierea blocurilor Jordan pe diagonală este unică, modulo permutarea blocurilor Jordan pe diagonală.

<u>PAS 1</u> $f \in End(V)$ a.î. $\exists m \in \mathbb{N}^*$ a.î. $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_{m \text{ ori}} = f^m = O$.

i.e. <u>endomorfism nilpotent</u>.

<u>Prop.</u> $\exists$ un reper a.î. matricea asociată lui f este matricea Jordan.

$$J = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & & & O \\ & J_{p_2}(0) & & \\ & & \ddots & \\ O & & & J_{p_t}(0) \end{pmatrix}, \text{ unde } p_1 + \dots + p_t = n.$$

n_1 = nr. blocurilor Jordan de ord 1
n_2 = —//— 2
$\vdots$
n_r = —//— r

$1 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + \dots + r n_r = n$,

$n_i = rg(A^{i-1}) - 2rg(A^i) + rg(A^{i+1}), \forall i = \overline{1,r}$

$A^0 = I_n$, A matricea asoc. lui f în rap. cu un reper $\forall$.

PAS2 $f \in End(V)$ cu o singură valoare proprie λ.

$P_f(X) = (-1)^n (X-\lambda)^n$, $n =$ multiplicitatea lui λ.

(polinomul caracteristic)

$(X-\lambda)^n = 0 \Rightarrow (f - \lambda id_V)^n = 0$

$(A - \lambda I_n)^n = 0$ (T. Hamilton-Cayley)

$g \in End(V)$, $\underline{g = f - \lambda id_V}$ este endomorfism nilpotent

$\xRightarrow{PAS1}$ $\exists$ un reper în V ai matricea asociată lui g este matricea Jordan $J_g = \begin{pmatrix} J_{p_1}(0) & \dots & 0 \\ & 0 & J_{p_t}(0) \end{pmatrix}$

$f = g + \lambda id_V \Rightarrow$

$J_f = \begin{pmatrix} J_{p_1}(\lambda) & \dots & 0 \\ 0 & & J_{p_t}(\lambda) \end{pmatrix}$

PAS 3 $f \in End(V)$ arbitrar

$\lambda_1, \dots, \lambda_r$ = valori pr. distincte

$m_1, \dots, m_r$ = multiplicitățile coresp.

$P_f(X) = (X-\lambda_1)^{m_1} \dots (X - \lambda_r)^{m_r}$.

Not $V_i = Ker((f - \lambda_i id)^{m_i})$, $i = \overline{1,r}$

$f_i := f/V_i$, $\forall i = \overline{1,r}$

$f_i \in End(V_i)$ cu val. proprie unică λ_i, $\forall i = \overline{1,r}$

Aplicăm PAS2 pt fiecare f_i, $i = \overline{1,r}$

$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_r$.

În reperul $R = R_1 \cup \dots \cup R_r$ matricea asociată lui f este o matrice Jordan.

Aplicatie

$f \in End(\mathbb{R}^4)$

$f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x) = (x_2+x_3, -x_1+2x_2+x_4, -x_1-2x_3+x_4, -x_2-$

Să se det. matricea Jordan asociată lui f.

Sol

$R_0 = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ reperul canonic

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$ matricea asociată lui f în rap. cu R_0.

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_4) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2-\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^4 = 0.$$

$f^4 = 0 \Rightarrow f$ endom. nilpotent

$A^4 = 0$

$n_i = rg(A^{i-1}) - 2rg(A^i) + rg(A^{i+1})$, $i = \overline{1,r}$

$$\boxed{rg A = 2,\ rg A^2 = 1,\ rg A^3 = rg A^4 = 0,\ A^0 = I_4.}$$

$n_1 = rg(I_4) - 2rg(A) + rg(A^2) = 4 - 2\cdot 2 + 1 = 1$

$n_2 = rg(A^1) - 2rg(A^2) + rg(A^3) = 2 - 2\cdot 1 + 0 = 0$

$n_3 = rg(A^2) - 2rg(A^3) + rg(A^4) = 1 - 2\cdot 0 + 0 = 1$

$n_i = 0, \ \forall i \geq 4$

$$J = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} J_1(0) & 0 \\ \hline 0 & J_3(0) \end{array}\right)$$