

Definiție

Dacă \leq este o relație de ordine parțială (totală) pe A , spunem că (A, \leq) este **mulțime parțial (total) ordonată**.

Orice relație de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulțime total ordonată este mulțime parțial ordonată.

Fie (A, \leq) o mulțime parțial ordonată.

- ▶ Relația $<$ definită prin $x < y \iff x \leq y$ și $x \neq y$ este relație de ordine strictă.
- ▶ Dacă $\emptyset \neq S \subseteq A$, atunci (S, \leq) este mulțime parțial ordonată.

Axioma alegerii (în engleză Axiom of Choice) (AC)

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci există o funcție f_C care asociază la fiecare $i \in I$ un element $f_C(i) \in A_i$.

- ▶ formulată de Zermelo (1904)
- ▶ a provocat discuții aprinse datorită caracterului său neconstructiv: nu există nicio regulă pentru a construi funcția alegere f_C .

Reformulare

Următoarea afirmație este echivalentă cu Axioma alegerii:

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci $\prod_{i \in I} A_i$ este o mulțime nevidă.

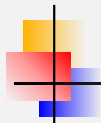
H. Rubin, J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice II, 1985

- ▶ Gödel (1940) a demonstrat că axioma alegerii este consistentă cu ZF.
- ▶ Cohen (1963) a demonstrat că negația axiomei alegerii este consistentă cu ZF. Prin urmare, axioma alegerii este independentă de ZF. Cohen a primit în 1966 Medalia Fields.

- ▶ O mulțime se numește **finită** dacă are un număr finit de elemente. O mulțime care nu este finită se numește **infinită**.
- ▶ Numărul elementelor unei mulțimi finite A se notează $|A|$ și se mai numește și **cardinalul** lui A .

Numerele cardinale sau **cardinalele** sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.

Există o definiție riguroasă în teoria mulțimilor a cardinalului unei mulțimi, datorată lui von Neumann. Pentru orice mulțime A , cardinalul lui A , notat $|A|$, este tot o mulțime. Colecția tuturor cardinalelor nu este mulțime, ci clasă.



- ▶ $|A| = |B|$ ddacă A și B sunt echipotente.
- ▶ Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele **transfinite** sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- ▶ $|\mathbb{N}|$ se notează \aleph_0 (se citește *alef zero*).
- ▶ $|\mathbb{R}|$ se notează \mathfrak{c} și se mai numește și **puterea continuumului**.
- ▶ O mulțime A este numărabilă ddacă $|A| = \aleph_0$.
- ▶ $|2^{\mathbb{N}}| \neq \aleph_0$.
- ▶ $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.



Definim următoarea relație pe clasa tuturor cardinalelor: pentru orice două mulțimi A, B ,

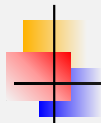
$$|A| \leq |B| \iff \text{există } f : A \rightarrow B \text{ funcție injectivă.}$$

Teorema Cantor-Schröder-Bernstein

Dacă există două funcții injective $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow A$, atunci A și B sunt echipotente. Altfel scris, dacă $|A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|$, atunci $|A| = |B|$.

Proprietăți

- ▶ \leq este o relație de ordine totală.
- ▶ Orice cardinal are un unic succesor, adică pentru orice cardinal κ există un unic cardinal κ^+ a.î. $\kappa < \kappa^+$ și nu există cardinale ν a.î. $\kappa < \nu < \kappa^+$.
- ▶ \aleph_0 este cel mai mic cardinal transfinit. Succesorul lui \aleph_0 se notează \aleph_1 .



Ipoteza continuumului (Continuum Hypothesis (CH))

Nu există nicio mulțime S a.î. $\aleph_0 < |S| < \mathfrak{c}$.

$$\Updownarrow \\ 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

- ▶ avansată de Cantor în 1878.
- ▶ prima problemă din lista lui Hilbert de 23 probleme prezentate în 1900.
- ▶ Gödel (1940) a demonstrat că (CH) este consistentă cu ZFC.
- ▶ Cohen (1963) a demonstrat că negația lui (CH) este consistentă cu ZFC. Prin urmare, (CH) este independentă de ZFC.



LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe **propoziții** sau **enunțuri declarative**, despre care se poate argumenta în principiu că sunt **adevărate** sau **false**.

Propoziții declarative

- ▶ Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- ▶ Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- ▶ Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- ▶ Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- ▶ Andrei este deștept.
- ▶ Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- ▶ Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- ▶ Pleacă!

9

Considerăm anumite propoziții ca fiind **atomice** și le notăm p, q, r, \dots sau p_1, p_2, p_3, \dots

Exemple: p =Numărul 2 este par. q =Mâine plouă. r =Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate $\varphi, \psi, \chi, \dots$) folosind conectorii logici \neg (negația), \rightarrow (implicația), \vee (disjuncția), \wedge (conjuncția), \leftrightarrow (echivalența).

Exemple:

- $\neg p$ = Numărul 2 **nu** este par.
- $p \vee q$ = Numărul 2 este par **sau** mâine plouă.
- $p \wedge q$ = Numărul 2 este par **și** mâine plouă.
- $p \rightarrow q$ = **Dacă** numărul 2 este par, **atunci** mâine plouă.
- $p \leftrightarrow q$ = Numărul 2 este par **dacă și numai dacă** mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).

Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

10

Exemplu:

Fie propoziția:

φ =Azi este marți, deci avem curs de logică.

Considerăm propozițiile atomice

p =Azi este marți. q =Avem curs de logică.

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$ =Azi este marți și nu avem curs de logică.

11

Exemplu:

Fie propoziția:

φ =Dacă trenul întârzie și nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.

Considerăm propozițiile atomice

- p = Trenul întârzie.
- q = Sunt taxiuri la gară.
- r = Ion întârzie la întâlnire.

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate și r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q ? **q este adevărată.**

12

Definiția 1.1

Limbajul logicii propoziționale LP este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de **variabile**;
- ▶ conectori logici: \neg (se citește **non**), \rightarrow (se citește **implică**)
- ▶ paranteze: $(,)$.

- Mulțimea **Sim** a **simbolurilor** lui LP este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \dots$

13

Definiția 1.2

Mulțimea **Expr** a **expresiilor** lui LP este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- ▶ Expresia vidă se notează λ .
- ▶ **Lungimea** unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ . Sim^n este mulțimea șirurilor de simboluri ale lui LP de lungime n .
- ▶ Prin convenție, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Sim^n$.

Exemple:

$(((((v_7, v_1 \neg \rightarrow (v_2), \neg v_1 v_2, ((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))), (\neg(v_1 \rightarrow v_2))).$

14

Definiția 1.3

Fie $\theta = \theta_0 \theta_1 \dots \theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in Sim$ pentru orice $i \in \{0, 1, \dots, k-1\}$.

- ▶ Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \dots \theta_j$ se numește **(i, j)-subexpresia** lui θ ;
- ▶ Spunem că o expresie ψ **apare** în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este **(i, j)-subexpresia** lui θ .

15

Definiția formulelor este un exemplu de **definiție inductivă**.

Definiția 1.4

Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

- (F0) Orice variabilă propozițională este formulă.
- (F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg \varphi)$ este formulă.
- (F2) Dacă φ și ψ sunt formule, atunci $(\varphi \rightarrow \psi)$ este formulă.
- (F3) Numai expresiile obținute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Notății: Mulțimea formulelor se notează **Form**. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \dots$

- ▶ Orice formulă se obține aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- ▶ $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

16

Exemple:

- ▶ $v_1 \neg \rightarrow (v_2)$, $\neg v_1 v_2$ nu sunt formule .
- ▶ $((v_1 \rightarrow v_2) \rightarrow (\neg v_1))$, $(\neg(v_1 \rightarrow v_2))$ sunt formule.

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci **exact** una din următoarele alternative are loc:

- ▶ $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- ▶ $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- ▶ $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Propoziția 1.5

Mulțimea *Form* a formulelor lui *LP* este numărabilă.

Dem.: Exercițiu.