GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Lecţia 9

Pentru început voi face câteva comentarii legate de ceea ce am predat la ultimul curs.

Am definit în cursul trecut ce înseamnă un morfism diagonalizabil. Similar o matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte *diagonalizabilă* dacă există o bază în $\mathbb{R}^n$ de vectori proprii ai matricei A. Punând aceşti vectori proprii $v_1, \ldots, v_n$ într-o matrice $Q = (v_1 \ldots v_n)$, ca şi coloanele acestei matrice, obţinem relaţia $AQ = QD \Leftrightarrow A = QDQ^{-1}$, unde D este o matrice diagonală formată din valori proprii carora le sunt asociate vectorii proprii $v_1, \ldots, v_n$.

De fapt relaţia $AQ = QD$ reprezintă toate egalităţile $Av_j = \lambda_j v_j, 1 \leqslant j \leqslant n$. Să vedem acest lucru. Vom identifica coloanele celor doi membri. Fie $1 \leqslant j \leqslant n$ arbitrar.

În membrul stâng avem $C_j(AQ) = AC_j(Q) = Av_j$ iar în membrul drept $C_j(QD) = QC_j(D) = 0C_1(Q) + 0C_2(Q) + \ldots + \lambda_j C_j(Q) + \ldots + 0C_n(Q) = 0v_1 + 0v_2 + \ldots + \lambda_j v_j + \ldots + 0v_n = \lambda_j v_j$.

Exemplul 1. Fie

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$P_A(X) = \det(XI_3 - A) = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2-1) = X(X-1)(X+1)$. Deci valorile proprii sunt $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = -1$. Vectorii proprii asociaţi acestor valori proprii fiind liniar independenţi şi fiind în număr de trei, în $\mathbb{R}^3$, formează bază. Deci matricea este diagonalizabilă. Vectori proprii sunt:

$A \cdot v_1 = 0 \cdot v_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = z = 0$. Deci $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$(A - 1I_3) \cdot v_2 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = z$, de unde $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$(A + 1I_3) \cdot v_3 = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x = 0, y = -z$, şi rezultă $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Deci $A = QDQ^{-1}$, unde $Q = (v_1\ v_2\ v_3)$, este matricea ce are coloanele vectorii proprii asociaţi valorilor proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Adică $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ cu inversa $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ şi $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Avem $D = Q^{-1}AQ$. Ce reprezintă această relaţie ?

Matricea $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, este matricea unei transformări liniare (endomorfism) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, într-o anumită bază $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$. $D = M_{\mathcal{B}'}(f)$, matricea aceleeaşi transformări liniare f, dar în baza $\mathcal{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$, formată din vectorii proprii (vedeţi definiţia morfismului diagonalizabil).

Relaţia $D = Q^{-1}AQ$ este exact relaţia $M_{\mathcal{B}'}(f) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})^{-1} M_{\mathcal{B}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})$, unde $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_{\mathbb{R}^3})$ este matricea de trecere din baza $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{B}'$.

Diagonalizarea unei matrice înseamnă, după cum am spus la începutul cursului, găsirea unei baze de vectori proprii. Nu toate matricele cu coeficienţi reali sunt diagonalizabile. Cele simetrice sunt.

Forme biliniare, forme pătratice

Considerăm un spaţiu vectorial V peste corpul $\mathbb{R}$ cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$.

Definiţia 2. $F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ se numeşte *biliniară* dacă este liniară în fiecare argument. În plus se numeşte *simetrică* dacă $F(x, y) = F(y, x)$. Forma biliniară se numeşte *pozitiv semidefinită* dacă $F(x, x) \geqslant 0$ pentru $\forall x \in V$, şi *pozitiv definită* dacă în plus $F(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0_V$. Similar forma F este *negativ semidefinită*, respectiv *negativ definită*.

Exemplul 3.
- dacă $f_1, f_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt forme liniare atunci $F(x,y) = f_1(x)f_2(y)$ este o formă biliniară.
- fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, definim $F(x,y) = x^t \cdot A \cdot y = \sum_{i,j}^n a_{i,j}x_iy_j$.

  Considerăm $n = 3$ şi $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Forma biliniară asociată acestei matrice este $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $F(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1y_3 + x_2y_3 + x_3y_2$.

Dacă alegem o bază $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ a spaţiului V, şi pe V avem o formă biliniară F, considerăm matricea $F(e_i, e_j) = a_{i,j}$. În funcţie de această matrice exprimăm valorile lui F pentru orice vectori. $F(x,y) = \sum_{i,j}^n a_{i,j}x_iy_j$.

Propoziţia 4. *$F : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ este simetrică dacă şi numai dacă matricea asociată lui F într-o bază este simetrică.*

Deci avem o corespondenţă bijectivă între mulţimea aplicaţiilor biliniare şi $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, care se restricţionează la o bijecţie între mulţimea aplicaţiilor biliniare simetrice şi mulţimea matricelor simetrice.

Legătura matricelor formei biliniare F la schimbarea bazei este dată de

Propoziţia 5. *Fie $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ două baze ale spaţiului vectorial V şi $M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ matricea de trecere din baza $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{C}$ şi $A_{\mathcal{B}}$ şi respectiv $A_{\mathcal{C}}$ matricele asociate formei biliniare F în cele două baze. Atunci avem $A_{\mathcal{C}} = M^t_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \cdot A_{\mathcal{B}} \cdot M_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.*

Exemplul 6. $F : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, F(x,y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$ este biliniară. matricea asociată în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. $F(x,x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 = (x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + x_3^2$. Se vede că este pozitiv definită.

Definiţia 7. Forma *pătratică* asociată unei forme biliniare simetrice F, este $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$, $Q(x) = F(x,x)$.

F se numeşte *polara* formei pătratice. Dintr-o formă pătratică obţinem polara acesteia prin formula $F(x,y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)$, care este simetrică.

Avem deci o bijecţie între forme pătratice şi matrice simetrice.

Exemplul 8. $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 5x_2x_3$. Matricea A asociată lui Q în baza canonică este $A = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 7 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$.

Definiţia 9. Spunem că forma pătratică Q este redusă la forma canonică dacă într-o bază avem $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i^2$.

Voi prezenta două metode pentru aducerea formelor pătratice la forma canonică.

Metoda 1

Teorema 10 (Gauss)**.** *Fie V un spaţiu vectorial cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$ şi $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ o formă pătratică. Există o bază în care Q are forma canonică.*

Demonstraţie: Presupunem $Q \neq 0$. Pentru forma nulă nu avem ce demonstra. Demonstraţia ne va da algoritmul de obţinere a formei canonice. Fie $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza în care $Q(x) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j$. Avem două cazuri.

(1) $\exists i$ a.î. $a_{i,i} \neq 0$. Renumerotăm şi presupunm că $a_{1,1} \neq 0$. Cu acesta vom forţa un pătrat perfect.

Rescriem $Q(x) = a_{1,1} x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} a_{1,j} x_1 x_j + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j =$

$= \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n)^2 - \frac{1}{a_{1,1}} \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a_{1,i} a_{1,j} x_i x_j + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j =$

$= \frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n)^2 + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{i,j} x_i x_j,$

unde $a'_{i,j} = a_{i,j} - \frac{a_{1,i}a_{1,j}}{a_{1,1}}$.

Facem notaţa $x'_1 = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n, x'_2 = x_2, \ldots, x'_n = x_n$ şi obţinem $Q(x') = \frac{1}{a_{1,1}}(x'_1)^2 + \sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{i,j} x'_i x'_j$.

$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ sunt componentele vectorului x în baza $\mathcal{B}' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$, în care forma pătratică Q este reprezentată de ecuaţia de mai sus. În această scriere suma $\sum_{2 \leqslant i,j \leqslant n} a'_{i,j} x'_i x'_j$ este o formă pătratică în $n-1$ variabile căreia i se aplică cazul (1) sau/şi cazul (2) de mai jos.

(2) $a_{i,i} = 0, (\forall) i \in \{1, \ldots, n\}$. $(\exists) i \neq j$ a.î. $a_{i,j} \neq 0$ $(Q \neq 0)$. Renumerotând putem presupune că $a_{1,2} \neq 0$. Facem următoarea schimbare de coordonate $x_1 = x'_1 + x'_2, x_2 = x'_1 - x'_2, x_3 = x'_3, \ldots, x_n = x'_n$ şi obţinem

$Q(x') = 2a_{1,2}[(x'_1)^2 - (x'_2)^2] + \ldots$, formă care este în cazul (1).

După o repetare de un număr finit de ori a acestor cazuri vom ajunge la forma canonică.

□

Exemplul 11. Fie $Q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, Q(x) = x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3$. Folosind algoritmul Gauss obţinem $Q(x) = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_2x_3 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4(x_2^2 + x_2x_3 + \frac{1}{4}x_3^2) - x_3^2 = (x_1 + x_2 + 2x_3)^2 - 4(x_2 + \frac{1}{2}x_3)^2 - x_3^2$.

Deci $Q(\overline{x}) = \overline{x}_1{}^2 - 4\overline{x}_2{}^2 - \overline{x}_3{}^2$, unde $\overline{x}_1 = x_1 + x_2 + 2x_3, \overline{x}_2 = x_2 + \frac{1}{2}x_3, \overline{x}_3 = x_3$.

Exemplul 12. Fie $Q(x) = 2x_2x_3$. Matricea acestei forme pătratice este cea din **exemplul 1**, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Folosind schimbarea de coordonate $x_2 = \overline{x}_2 + \overline{x}_3, x_3 = \overline{x}_2 - \overline{x}_3$, obţinem $Q(\overline{x}) = 2\overline{x}_2{}^2 - 2\overline{x}_3{}^2$.

Metoda 2

Teorema 13 (Jacobi)**.** *Fie V un spaţiu vectorial cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$, şi $Q : V \longrightarrow \mathbb{R}$, o formă pătratică $Q(x) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}x_ix_j$ într-o bază $\mathcal{B}$. Dacă matricea $A = (a_{i,j})_{i,j=\overline{1,n}}$ are toţi minorii principali $\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det(A)$ nenuli, atunci există o bază $\overline{\mathcal{B}}$ a lui V în care $Q(\overline{x}) = \frac{1}{\Delta_1}\overline{x}_1{}^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2}\overline{x}_2{}^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}\overline{x}_n{}^2$.*

Exemplul 14. Considerăm forma pătratică Q care într-o bază $\mathcal{B}$ a spaţiului $\mathbb{R}^3$ are matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ pentru care $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 3, \Delta_3 = -1$. Toţi sunt nenuli, deci conform teoremei Jacobi forma canonică a formei pătratice Q este $Q(\overline{x}) = \overline{x}_1{}^2 + \frac{1}{3}\overline{x}_2^2 + \frac{3}{-1}\overline{x}_3^2$.

Spaţii euclidiene

Considerăm ca şi mai sus un spaţiu vectorial V peste corpul $\mathbb{R}$ cu $\dim_R(V) = n$.

Definiţia 15. $<,>: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, o aplicaţie biliniară, simetrică, pozitiv definită se numeşte *produs scalar* pe V. $(V, <,>)$ spaţiul vectorial V pe care avem definit un produs scalar se numeşte *spaţiu euclidian*.

Exemplul 16.
- Produsul scalar standard pe $\mathbb{R}^n$ este $< x, y >= \sum_{i=1}^n x_iy_i$, unde $x, y \in \mathbb{R}^n$.Matricea asociată este matricea identitate I_n. Este clar biliniar, simetric şi pozitiv semidefinit. Dacă $< x, x >= 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0, x_i \in \mathbb{R}$. De aici rezultă că $x_i = 0, (\forall)1 \leqslant i \leqslant n$, adică $x = 0$. Deci acest produs este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.
- Fie $\mathcal{C}([a, b]) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}|\ f \text{continuă}\ \}$. Pe acest spaţiu considerăm $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$. Se verifică faptul că acesta este un produs scalar pe $\mathcal{C}([a, b])$.

Propoziţia 17 (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)**.** *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian şi $x, y \in V$. Atunci are loc $| < x, y > | \leqslant \sqrt{< x, x >< y, y >}$.*

Definiţia 18. Doi vectori x, y din spaţiul euclidian $(V, <,>)$ se numesc *ortogonali* dacă $< x, y >= 0$.

Exemplul 19. Considerăm $\mathbb{R}^2$ cu produsul scalar canonic şi vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Avem $< v_1, v_2 >= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 0$, adică aceştia sunt ortogonali. Acest fapt îl ştim deja. v_1 stă în plan pe prima bisectoare a axelor (având coordonatele egale), iar v_2 stă pe a doua bisectoare a axelor. Ştim că cele două bisectoare sunt ortogonale.

Mai uşor de văzut este că $< e_1, e_2 >= 0$, unde $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ şi $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sunt vectorii din baza canonică a planului $\mathbb{R}^2$.

Propoziţia 20. *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real de dimensiune n. Orice sistem de vectori nenuli ce sunt ortogonali doi câte doi este sistem de vectori liniar independenţi..*

Definiţia 21. Fie $L_1, L_2 \subset V$, submulţimi ale spaţiului euclidian $(V, <,>)$. Spunem că L_1 este *ortogonal* pe L_2 dacă $< v, w >= 0$ pentru $(\forall)\ v \in L_1$ şi $(\forall)\ w \in L_2$. Scriem $L_1 \perp L_2$. În particular dacă $L_1 = \{x\} \neq \{0_V\}$, atunci $x \perp L_2 \Leftrightarrow < x, w >= 0, (\forall)\ w \in L_2$.

Ortogonalitatea este suficient să fie testată pe o bază. Mai precis.

Propoziţia 22. *Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real de dimensiune n, şi L un subspaţiu vectorial al lui V. Considerăm $\mathcal{B} \subset L$, o bază a subspaţiului L. Atunci $x \perp L \Leftrightarrow x \perp \mathcal{B}$.*

Demonstraţie: "$\Rightarrow$" Clar pentru că $\mathcal{B} \subset L$.

"$\Leftarrow$" Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ bază în L. Considerăm $w \in L$ arbitrar, $w = \sum_{i=1}^k a_i v_i$ cu $a_i \in \mathbb{R}$. $< x, w >=< x, \sum_{i=1}^k a_i v_i >= \sum_{i=1}^k a_i < x, v_i >= 0$ pentru că $< x, v_i >= 0$ pentru $(\forall) i$.

$\square$

Definiţia 23. Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real şi $L \neq \emptyset$, o submulţime a lui V. Mulţimea notată $L^\perp = \{x \in V \mid x \perp L\}$ se numeşte *complementul ortogonal* al lui L în V.

Definiţia 24. Într-un spaţiu euclidian $(V, <,>)$, numim *normă* a vectorului $x \in V$ şi notăm $||x|| = \sqrt{< x, x >}$.

Din definiţie $||x|| \geqslant 0$. Din proprietăţile produsului scalar rezultă următoarele proprietăţi ale normei.

(1) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$, pentru $(\forall) x \in V$ şi $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$
(2) $||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0_V$,
(3) $| < x, y > | \leqslant ||x|| \cdot ||y||$, $(\forall) x, y \in V$, (Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz)

(4) $||x+y|| \leqslant ||x||+||y||$, $(\forall)x, y \in V$, (inegalitatea Minkowski sau a triunghiului),
(5) $|\ ||x|| - ||y||\ | \leqslant ||x-y||$, $(\forall)x, y \in V$.

Definiţia 25. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$, o bază a spaţiului euclidian V. Aceasta se numeţe *ortogonală* dacă $v_i \perp v_j$, $(\forall)i, j$. Dacă în plus $||v_i|| = 1$, $(\forall)i$ atunci baza se numeşte *ortonormată*.

Dacă $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ este bază ortogonală în V, atunci $\mathcal{B}' = \{\frac{v_1}{||v_1||}, \ldots, \frac{v_n}{||v_n||}\}$ este o bază ortonormată.

În **exemplul 19** $\{v_1, v_2\}$ este bază ortogonală. Din aceasta, obţinem $\{\frac{1}{\sqrt{2}}v_1, \frac{1}{\sqrt{2}}v_2\}$ bază ortonormată. Baza canonică $\{e_1, e_2\}$ este bază ortonormată.

Definiţia 26. Fie $(V, <,>)$ un spaţiu euclidian real, L un subspaţiu a lui V şi $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k\} \subset L$, o bază a lui L. Fie $x \in V$. Vectorul $\sum_{i=1}^{k} < x, v_i > v_i$ se numeşte *proiecţia* vectorului x pe L şi se notează $\mathrm{pr}_L\, x$.

Există un algoritm de a obţine din orice bază a unui spaţu euclidian o bază ortonormată.

Teorema 27 (Gram-Schmidt)**.** *Fie $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ o bază a spaţiului euclidian real $(V, <,>)$ cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = n$. Atunci există o bază ortonormată $\{e_1, \ldots, e_n\}$, astfel încât sistemele de vectori $\{v_1, \ldots, v_k\}$ şi $\{e_1, \ldots, e_k\}$ generează acelaşi subspaţiu a lui V, pentru $(\forall)k = \overline{1, n}$.*

Demonstraţie: Obţinem mai întâi o bază ortogonală $\{x_1, \ldots, x_n\}$, pe care o normăm.

Definim $x_1 = v_1, x_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{<v_j, x_i>}{<x_i, x_i>} x_i$, pentru $(\forall)j = \overline{2, n}$. Vectorii $x_1, \ldots, x_n$ sunt ortogonali doi câte doi, deci conform **propoziţiei 20**, liniar independenţi.

Definim $e_i = \frac{x_i}{||x_i||}$. Din definiţia vectorilor x_i, şi deci ai vectorilor e_i rezultă că subspaţiul generat de $\{v_1, \ldots, v_k\}$ este egal cu subspaţiul generat de $\{e_1, \ldots, e_k\}$, pentru orice k.

□

Exemplul 28. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\} = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^3$, bază. Dorim să obţinem o bază ortonormată folosind algoritmul Gram-Schmidt.

$$x_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = v_2 - \frac{<v_2, x_1>}{<x_1, x_1>} x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = v_3 - \frac{<v_3, x_1>}{<x_1, x_1>} x_1 - \frac{<v_3, x_2>}{<x_2, x_2>} x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

$||x_1|| = \sqrt{2}, ||x_2|| = 1, ||x_3|| = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Deci $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x_1, e_2 = x_2, e_3 = \sqrt{2} x_3$ este baza ortonormată.