= GĂSIREA MEDIANEI ÎN $O(n)$ =

(ÎMBUNĂTĂȚIRE QUICKSORT)

DATE GENERALE:

MEDIANA = AL $\left[\frac{n}{2}\right]$-LEA ELEMENT DINTR-UN VECTOR (CU "n" ELEMENTE) DEJA SORTAT. SOLUȚII PT. A GĂSI MEDIANA:

- $O(k\cdot n) \rightarrow$ TRIVIAL ($k = \frac{n}{2}$)
- $O(n\cdot \log n) \rightarrow$ SORTĂM CU MERGE/HEAP/QUICK-SORT ȘI ALEGEM AL $\left[\frac{n}{2}\right]$ EL..

CUM ALEGEM ÎN $O(n)$?

VARIANTA 1: ALG. PROBABILIST $\Rightarrow$ TIMP MEDIU $= O(n)$

```
selectie_aleator(A[], p, n, k)
{ if(p==n) return A[p]; -> MEDIANA
  q = partitie_aleatoare(A[], p, n); // DE LA QSORT
  k1 = q-p+1; // EL. "≤" PIVOT
  if(k==k1) return A[k];
  if(k1>k) return selectie_aleator(A, q+1, n, k-k1);
  return selectie_aleator(A, p, q-1, k);
}
```

$$T(n) \leq \frac{1}{n}\left(T(\max(1,n-1)) + \sum_{k=1}^{n-1} T(\max(k,n-k))\right) + O(n) \leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\left(T(n-1) + 2\sum_{k=[n/2]}^{n-1} T(k)\right) + O(n) = \frac{2}{n}\sum_{k=[n/2]}^{n-1} T(k) + O(n)$$

$\max(1, n-1) = n-1$

$$\max(k, n-k) = \begin{cases} k; \text{ dacă } k \geq [n/2] \\ n-k; \text{ dacă } k < [n/2] \end{cases}$$

DACĂ $\begin{cases} n = \text{IMPAR} \Rightarrow T([n/2]), T([n/2]+1) \dots T(n-1) \text{ APAR DE 2 ORI ÎN SUMĂ} \\ n = \text{PAR} \Rightarrow T([n/2]) \text{, " — " — "} \end{cases}$

$T([n/2])$ APARE O SINGURĂ DATĂ

ÎN CAZUL CEL MAI DEFAVORABIL, $T(n-1) = O(n^2) \Rightarrow \frac{1}{n}T(n-1) \in O(n)$

TB. SĂ DEM. $T(n) \in O(n) \Leftrightarrow T(n) \leq c\cdot n$

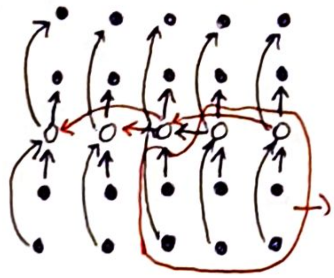
$$T(n) \leq \frac{2}{n}\sum_{k=[n/2]}^{n-1} c\cdot k + O(n) = \frac{2c}{n}\left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{[n/2]-1} k\right) + O(n) =$$

$$= \frac{2c}{n}\left(\frac{1}{2}(n-1)n - \frac{1}{2}\left(\left[\frac{n}{2}\right]-1\right)\left[\frac{n}{2}\right]\right) + O(n) \leq c(n-1) - \frac{c}{n}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}\right) + O(n) =$$

$$= c\left(\frac{3}{4}n - \frac{1}{2}\right) + O(n) \leq c\cdot n$$

VARIANTA 2: ALG. DETERMINIST $\Rightarrow$ WORST TIME: $O(n)$

1) SE ÎMPART ELEMENTELE ÎN GRUPE DE 5. $\to O(n)$
2) SE DETERMINĂ MEDIANA FIECĂRUI GRUP. $\to O(n)$
3) APELEX RECURSIV ALGORITMUL, PT. A DETERMINA MEDIANA MEDIANELOR. CONSIDER "X" = MEDIANA MEDIANELOR.
4) FOLOSESC "X" CA PIVOT ȘI ÎMPART FOLOSIND ALG. PROBABILIST.



AVEM $\frac{n}{5}$ GRUPE.

$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{n}{5} = \frac{3n}{10}$ ELEMENTE "≥" X

ASTFEL, ÎN CEL MAI DEFAVORABIL CAZ, VOI APELA RECURSIV ALG. PROBABILIST PT.

$n - \frac{3n}{10} = \frac{7n}{10}$ ELEMENTE.

$$T(n) = T(n/5) + T(7n/10) + O(n) \in O(n)$$

PRESUPUN $\begin{cases} T(\frac{n}{5}) \leq c \cdot \frac{n}{5} \\ T(\frac{7n}{10}) \leq c \cdot \frac{7n}{10} \end{cases}$

TB. SĂ DEM: $T(n) \leq c \cdot n$

$$T(n) = T(n/5) + T(7n/10) + n \leq c \cdot \frac{n}{5} + c \cdot \frac{7n}{10} + n = c \cdot \frac{9n}{10} + n = n\left(1 + \frac{9c}{10}\right) \leq$$

$\leq c \cdot n$, (A) pt $(\forall)$ $c \geq 10$

---

a) PT. GRUPE DE 3:

$\frac{n}{3}$ GRUPE $\Rightarrow \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{n}{3} = \frac{n}{3}$ EL. "≥" X $\Rightarrow n - \frac{n}{3} = \frac{2n}{3}$

$$T(n) = T(n/3) + T(2n/3) + O(n) \in O(n \cdot \log n)$$

b) PT. GRUPE DE 7:

$\frac{n}{7}$ GRUPE $\Rightarrow \cancel{4}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{n}{7} = \frac{2n}{7} \Rightarrow n - \frac{2n}{7} = \frac{5n}{7}$

$$T(n) = T(n/7) + T(5n/7) + O(n) \in O(n)$$