Seminar 7 - 17.11.2021

Ex. 1: Pe $\mathbb{R}$ definim legea de compoziție $x \circ y = x + y - xy$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

Studiați proprietățile legii și det. elem. simetrizabile (dacă există).

Rez:

Asociat.: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$(x \circ y) \circ z = (x + y - xy) \circ z = x + y - xy + z - z(x + y - xy) =$

$= x + y + z - xy - xz - yz + xyz$

$x \circ (y \circ z) = x \circ (y + z - yz) = x + y + z - xy - xz - yz + xyz$

$\Rightarrow$ „$\circ$" este asoc.

Com: $x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

$x \circ y = x + y - xy = y + x - yx = y \circ x \Rightarrow$ „$\circ$" este com.

Elem neutru: $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Pentru că „$\circ$" este com. este suficient să căutăm e a.î.

$x \circ e = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x}} + e - xe = \underline{\underline{x}}$, $\forall x$

$\Rightarrow e(1 - x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e = 0 \in \mathbb{R}$.

Elem. simetrizabile: $x \in \mathbb{R}$ $\exists\, y \in \mathbb{R}$ a.î. $x \circ y = y \circ x = e$

$x \circ y = e \Rightarrow x + y - xy = 0$

$y(1-x) = -x \Rightarrow y = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}$, $\forall x \neq 1$.

Dacă $x = 1$, $1 \circ y = 1$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

$(\mathbb{R}, \circ)$ - monoid comutativ

Întrebare: $(\mathbb{R} \setminus \{1\}, \circ)$ este grup comutativ?

Trebuie verif. dacă $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ este parte stabilă în rap. cu „$\circ$".

Ex. 2: Pe $\mathbb{R}$ se def. legile de comp:

$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ și $x \circ y = x + y + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a. Studiați propr. legilor + elem. sim.

b. Rezolvați sistemul: $\begin{cases} x * y = -1 \\ x \circ y = 0 \end{cases}$

$x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

Asoc.: Da

Com.: Da

Elem. neutru: $e = 0$

Elem. sim.: $\forall x \in \mathbb{R}$

$\exists\ y = -x \ (= x^{-1})$

$x \circ y = x + y + 1$

Asoc: Da

Com: Da

Elem neutru: $e = -1$

Elem. sim: $\forall x \in \mathbb{R}$

$\exists\ y = -2 - x.$

$(\mathbb{R}, *)$, $(\mathbb{R}, \circ)$ sunt grupuri com.

b. $\begin{cases} x * y = -1 \\ x \circ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x^3 + y^3} = -1 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Big|^3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 = -1 \\ x + y = -1 \end{cases}$

V. 1: $x = -y - 1$

$x^3 + y^3 = -1 \Rightarrow (-y-1)^3 + y^3 = -1$

$\cancel{-y^3} - 3y^2 - 3y \cancel{-1} + \cancel{y^3} = \cancel{-1} \quad | \cdot (-1)$

$3y^2 + 3y = 0 \Rightarrow y^2 + y = 0 \Rightarrow y(y+1) = 0$

$\Rightarrow \underset{x=-1}{y = 0}$ sau $y = -1$, $x = 0$.

V2 : $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

V3 : Ex. cu rel. lui Viete : $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$\begin{cases} xy=0=P \\ x+y=-1=s \end{cases} \rightsquigarrow x^2-sx+p=0$

Ex. 3 : Fie mulțimea $M=\left\{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix} \middle| n\in\mathbb{Z}\right\}$. Arătați că:

a. $(M,\cdot)$ este grup com. („·" înmulțirea matr.)

b. $(M,\cdot)$ este izomorf cu $(\mathbb{Z},+)$.

Rez :

a. Parte stabilă:

$$\underset{A(n)}{\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\cdot\underset{A(m)}{\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}}=\underset{A(n+m)}{\begin{pmatrix}1 & n+m\\ 0 & 1\end{pmatrix}}\in M$$

Asoc.: $(A(n)\cdot A(m))\cdot A(p)=A(n)\cdot(A(m)\cdot A(p))\ (=A(n+m+p))$

Obs: Înmulțirea matr. pe $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este asoc.
$\mathbb{Z},\mathbb{Q}$

Comm: $A(n)\cdot A(m) = A(n+m) = A(m+n) = A(m)\cdot A(n)$

Elem. neutru: $I_2 = A(0) \in M$.

Elem. sim: $(A(n))^{-1} = A(-n)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$

$A(n)\cdot A(m) = A(0) \Rightarrow m = -n$.

$\Rightarrow (M,\cdot)$ grup com

b. $(M,\cdot) \simeq (\mathbb{Z},+)$

Fie $f: M \to \mathbb{Z}$, $f(A(n)) = n \in \mathbb{Z}$.

Verificăm dacă f este izomorfism.

f morfism $\Leftrightarrow$ $f(A(n)\cdot A(m)) = f(A(n)) + f(A(m))$, $\forall n,m \in \mathbb{Z}$

$$f(A(n+m)) = n+m \quad (A)$$

f bij:

f inj: Fie $A(n), A(m) \in M$ a.î. $f(A(n)) = f(A(m))$

$\Rightarrow n = m \Rightarrow A(n) = A(m)$

f surj: Fie $n \in \mathbb{Z}$. $\exists\, A(n) \in M$ a.î. $f(A(n)) = n$.

Obs: Uneori se pune cond. pt. morfism ca $f(e_1) = e_2$,

e_1: elem. neutru în grupul domeniu

e_2: ——— " ——— " ——— codom.

În acest caz, f. morfism unitar.

$(G, \cdot)$, $(H, +)$ grupuri, $f: G \to H$ morfism.

$$f(x \cdot x^{-1}) = f(x) + f(x^{-1})$$

$$f(e_1) = f(x) + f(x^{-1})$$

Dacă $f(e_1) = e_2 \Rightarrow f(x^{-1}) = -(f(x))$

Ex. 4: Pe $\mathbb{R}$ se def. legea de comp. $x \circ y = x + 2y$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

a. Să se studieze propr. legii

b. Fie $a \in \mathbb{R}$. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ dat prin $a_1 = a$, $a_n = a \circ a_{n-1}$. Calculați a_2, a_3 și a_n.

Rez:

a. Com: $x \circ y = y \circ x$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$x + 2y = y + 2x \Leftrightarrow x = y \Rightarrow$ „$\circ$" nu este com.

Contraex.: $0 \circ 1 = 2$, $1 \circ 0 = 1$.

Asoc.: $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{aligned} (x \circ y) \circ z &= (x+2y) \circ z = x + 2y + 2z \\ x \circ (y \circ z) &= x \circ (y + 2z) = x + 2y + 4z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{„}\circ\text{" nu este asoc.}$$

Elem. neutru: $\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $x \circ e = e \circ x = x$?

$$\left\{\begin{aligned} x + 2e &= x \quad (1) \\ e + 2x &= x \end{aligned}\right. \quad \forall x \qquad \begin{aligned} (1) &\Rightarrow e = 0 \\ (2) &\Rightarrow e = -x \end{aligned} \quad \Bigg| \; \forall x \Rightarrow \text{„}\circ\text{" nu are elem. neutru}$$

b. $a \in \mathbb{R}$, $a_1 = a$, $a_n = a \circ a_{n-1}$

$a_2 = a \circ a_1 = a \circ a = a + 2a = 3a$

$a_3 = a \circ a_2 = a \circ 3a = a + 6a = 7a$

$a_4 = a \circ a_3 = a \circ 7a = a + 14a = 15a$

$a_n = (2^n - 1)a$ - dem. prin ind.

$a_1 = (2^1 - 1)a = a$ OK.

Pas de inducție: $a_k = (2^k - 1)a$

$a_{k+1} = a \circ a_k = a + 2a_k = a + 2(2^k - 1)a =$

$= a + (2^{k+1} - 2)a = (1 + 2^{k+1} - 2)a = (2^{k+1} - 1)a.$

Ex. 5: Fie $G = \left\{ \overset{I_3}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \overset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}, \overset{A_2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}, \right.$

$\left. \overset{A_3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

a. $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

b. $(G, \cdot) \simeq (S_3, \circ)$, $(S_3, \circ)$ grupul permutărilor

$$I_3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$A_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}$$

$$A_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \\ z \end{pmatrix}$$

$$A_3 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

$$A_4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A_5 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix}$$