

CURSUL 6: NUMERE CARDINALE

G. MINCU

1. NUMERE CARDINALE

Așa cum am precizat încă de la al doilea curs, considerarea unei mulțimi a tuturor mulțimilor conduce la paradoxuri. Vom conveni că toate mulțimile alcătuiesc un alt tip de entitate, pe care o vom numi **clasă**. Fără a intra în detalii tehnice, vom considera că definițiile pe care le-am dat pentru relațiile de ordine și relațiile de echivalență pot fi utilizate și în contextul claselor.

Definim relația \sim între două mulțimi astfel: $A \sim B$ dacă și numai dacă există o funcție bijectivă de la A la B .

Propoziția 1. Relația \sim este de echivalență.

Temă: Demonstrați propoziția 1!

Definiția 2. Dacă pentru mulțimile A și B avem $A \sim B$, unde \sim este relația introdusă mai sus, spunem că A și B sunt **cardinal echivalente** sau **echipotente**.

Definiția 3. Clasa de echivalență cardinală a unei mulțimi A se numește **numărul cardinal al lui A** . În acest text, vom folosi pentru numărul cardinal al mulțimii A notațiile $|A|$ sau $\text{Card } A$.

Definiția 4. O mulțime se numește **numărabilă** dacă ea este cardinal echivalentă cu \mathbb{N} .

Definiția 5. O mulțime se numește **cel mult numărabilă** dacă ea este finită sau numărabilă.

Definiția 6. O mulțime se numește **nenumărabilă** dacă nu este cel mult numărabilă.

Vom nota numărul cardinal al mulțimii \mathbb{N} cu \aleph_0 , iar numărul cardinal al mulțimii \mathbb{R} cu \mathfrak{c} .

Propoziția 7. Mulțimea \mathbb{Z} este numărabilă.

Demonstrație: Funcția $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ care trimite numerele pare în jumătățile lor, iar pe cele impare în numerele întregi negative, luate la rând, începând cu -1 și în ordine descrescătoare este bijectivă. Lăsăm verificările calculatorii în grija cititorului. \square

2. INEGALITĂȚI PENTRU NUMERE CARDINALE

Definim pe clasa numerelor cardinale relația $|A| \preceq |B|$ dacă și numai dacă există o funcție injectivă $f : A \rightarrow B$. Vom scrie $|A| \prec |B|$ dacă $|A| \preceq |B|$ și $|A| \neq |B|$.

Observația 8. Relația \preceq este corect definită deoarece dacă $f : A \rightarrow B$ este injectivă, $|A| = |A'|$, iar $|B| = |B'|$, atunci există funcții bijective $\alpha : A \rightarrow A'$ și $\beta : B \rightarrow B'$; în consecință, $\beta \circ f \circ \alpha^{-1} : A' \rightarrow B'$ este injectivă.

Observația 9. Deoarece pentru orice mulțime funcția sa identică este injectivă, relația \preceq este reflexivă.

Observația 10. Deoarece compusa oricăror două funcții injective este injectivă, relația \preceq este tranzitivă.

Teorema 11. (Cantor, Bernstein, Schröder)

Fie două mulțimi A și B . Dacă există funcțiile injective $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow A$, atunci există o funcție bijectivă $h : A \rightarrow B$.

Corolarul 12. Relația \preceq este antisimetrică.

Cele precedente demonstrează

Propoziția 13. Relația \preceq este de ordine.

Utilizând cele precedente, putem proba:

Propoziția 14. Mulțimea \mathbb{Q} este numărabilă.

Temă: Demonstrați propoziția 14 utilizând eventual funcția $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f\left(\frac{a}{b}\right) = \operatorname{sgn} a \cdot 2^{|a|} \cdot 3^b$, unde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, $(a, b) = 1$.

Propoziția 15. Mulțimile \mathbb{R} și \mathbb{C} sunt nenumărabile.

3. OPERAȚII CU NUMERE CARDINALE

3.1. Înmulțirea numerelor cardinale. Observația că pentru $|A| = a \in \mathbb{N}$ și $|B| = b \in \mathbb{N}$ avem $|A \times B| = ab$ ne sugerează:

Definiția 16. Prin **produsul** numerelor cardinale $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$ înțelegem numărul cardinal $\alpha\beta \stackrel{\text{def}}{=} |A \times B|$.

Definiția 16 este corectă în virtutea observației următoare:

Observația 17. Dacă $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$, atunci $|A \times B| = |A' \times B'|$.

Demonstrație: Date fiind bijecțiile $f : A \rightarrow A'$ și $g : B \rightarrow B'$, funcția $f \times g : A \times B \rightarrow A' \times B'$, $f \times g(a, b) = (f(a), g(b))$ este bijecție (temă!). Prin urmare, $|A \times B| = |A' \times B'|$. \square

3.2. Ridicarea la putere a numerelor cardinale. Observația că pentru $|A| = a \in \mathbb{N}$ și $|B| = b \in \mathbb{N}$ avem $|\{f : A \rightarrow B\}| = b^a$ ne-a condus în cursul 2 la notația $B^A = \{f : A \rightarrow B\}$. În contextul discuției de față, ea ne sugerează:

Definiția 18. Date fiind numerele cardinale $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$,

$$\beta^\alpha \stackrel{\text{def}}{=} |B^A|.$$

Definiția 18 este corectă în virtutea observației următoare:

Observația 19. Dacă $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$, atunci $|B^A| = |(B')^{A'}|$.

Demonstrație: Date fiind bijecțiile $f : A \rightarrow A'$ și $g : B \rightarrow B'$, funcția $h : B^A \rightarrow (B')^{A'}$, $h(\varphi) = g \circ \varphi \circ f^{-1}$ este bijecție (temă!). Prin urmare, $|B^A| = |(B')^{A'}|$. \square

3.3. Adunarea numerelor cardinale. Ordinea întrucâtva nefirească a prezentării operațiilor cu numere cardinale este cauzată de faptul că, în timp ce pentru înmulțirea și ridicarea la putere a numerelor cardinale am putut utiliza operații binecunoscute cu mulțimi, pentru adunare sunt necesare câteva pregătiri. Începem prin a constata că, dacă $|A| = a \in \mathbb{N}$, $|B| = b \in \mathbb{N}$ și $A \cap B = \emptyset$, atunci $|A \cup B| = a + b$, relația nerămânând valabilă dacă $A \cap B \neq \emptyset$.

Este instructiv să precizăm în acest punct, abătându-ne un moment de la direcția prezentării, că în condițiile descrise mai sus avem

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Această relație se generalizează după cum urmează:

Propoziția 20 (Principiul includerii și excluderii). Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și mulțimile finite A_1, A_2, \dots, A_n . Atunci

$$(1) \quad |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{i=1}^n |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\ + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n|.$$

Demonstrație: Fie $x \in A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Elementul x contribuie cu o unitate la membrul stâng al relației (1). Dacă x se află în m dintre mulțimile A_1, A_2, \dots, A_n , el contribuie la suma din membrul drept al relației (1) cu

$$\mathbf{C}_m^1 - \mathbf{C}_m^2 + \dots + (-1)^{m-1} \mathbf{C}_m^m = 1 - (1-1)^m,$$

adică tot cu o unitate. \square

Revenind acum pe direcția principală a prezentării, constatăm, inspirându-ne din abordările de la definițiile operațiilor de înmulțire și de ridicare la putere a numerelor cardinale, că ne-ar conveni în acest moment să avem la dispoziție o operație cu mulțimi care să asocieze la două mulțimi date nu reuniunea lor, ci mai degrabă reuniunea a două mulțimi cardinal echivalente cu ele și disjuncte. Aceste considerații conduc la:

Definiția 21. Prin reuniunea disjunctă a mulțimilor A și B înțelegem mulțimea $A \sqcup B \stackrel{\text{def}}{=} (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\})$.

Observația 22. (i) $f : A \rightarrow A \times \{1\}$, $f(a) = (a, 1)$ și $g : B \rightarrow B \times \{2\}$, $g(b) = (b, 2)$ sunt bijective, deci $|A \times \{1\}| = |A|$ și $|B \times \{2\}| = |B|$.
(ii) Evident, $(A \times \{1\}) \cap (B \times \{2\}) = \emptyset$.

Definiția 23. Date fiind numerele cardinale $\alpha = |A|$ și $\beta = |B|$,

$$\alpha + \beta \stackrel{\text{def}}{=} |A \sqcup B|.$$

Definiția 23 este corectă în virtutea observației următoare:

Observația 24. Dacă $|A| = |A'|$ și $|B| = |B'|$, atunci $|A \sqcup B| = |A' \sqcup B'|$.

Demonstrație: Date fiind bijecțiile $f : A \rightarrow A'$ și $g : B \rightarrow B'$, funcția

$$h : A \sqcup B \rightarrow A' \sqcup B', \quad h(x) = \begin{cases} (f(a), 1) & \text{dacă } x = (a, 1) \\ (g(b), 2) & \text{dacă } x = (b, 2) \end{cases}$$

este bijecție (temă!). Prin urmare, $|A \sqcup B| = |A' \sqcup B'|$. \square

4. CATEVA PROPRIETĂȚI ALE OPERAȚIILOR CU NUMERE CARDINALE

Prezentăm aici câteva proprietăți ale operațiilor cu numere cardinale definite în capitolul precedent. Cu două excepții, marcate cu asterisc, ele sunt ușor de demonstrat și vi le propunem ca temă. Menționăm și că bună parte dintre aceste proprietăți pot fi enunțate și demonstrate în forme mult mai generale; trimitem cititorul interesat, de pildă, la [4].

Propoziția 25. (i) $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$.

(ii) $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

(iii) $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$.

(iv) $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

(v) $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

(vi) $\mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

(vii) $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

(viii) $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$.

Corolarul 26. $|\mathbb{C}| = \mathfrak{c} = |\mathbb{R}|$.

Propoziția 27. Date fiind numerele cardinale α, β, γ au loc relațiile:

(i) $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$.

(ii) $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

(iii) $\alpha + 0 = \alpha$.

(iv)* Dacă α este infinit, $\alpha + \alpha = \alpha$.

Propoziția 28. Date fiind numerele cardinale α, β, γ au loc relațiile:

(i) $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

(ii) $\alpha\beta = \beta\alpha$.

(iii) $\alpha \cdot 0 = 0$.

(iv) $\alpha \cdot 1 = \alpha$.

(v)* Dacă α este infinit, $\alpha \cdot \alpha = \alpha$.

(vi) $\alpha(\beta + \gamma) = (\alpha\beta) + (\alpha\gamma)$.

Propoziția 29. Date fiind numerele cardinale α, β, γ au loc relațiile:

(i) $\alpha^{\beta+\gamma} = (\alpha^\beta)(\alpha^\gamma)$.

(ii) $(\alpha\beta)^\gamma = (\alpha^\gamma)(\beta^\gamma)$.

(iii) $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$.

(iv) $\alpha^0 = 1$.

(v) $\alpha^1 = \alpha$.

5. NUMERELE CARDINALE NU CONSTITUIE O MULȚIME

Teorema 30 (Cantor). Pentru orice mulțime A avem $\mathcal{P}(A) \approx A$.

Demonstrație: Presupunem că $\mathcal{P}(A) \sim A$. Există deci o bijecție $f : A \rightarrow \mathcal{P}(A)$. Notăm $M = \{a \in A : a \notin f(a)\}$; fie $m \in A$ astfel încât $f(m) = M$ (există, căci f e surjectivă!).

Dacă $m \in M$, atunci $m \notin f(m) = M$, contradicție.

Dacă $m \notin M$, atunci $m \in f(m) = M$, contradicție.

Rămâne așadar că $\mathcal{P}(A) \not\sim A$. \square

Corolarul 31. Pentru orice număr cardinal α are loc relația $\alpha < 2^\alpha$.

Teorema 32. Numerele cardinale nu constituie o mulțime.

Demonstrație: Presupunem că numerele cardinale constituie o mulțime, fie ea \mathcal{M} . Notăm cu R reuniunea mulțimii formate din câte un reprezentant al fiecărui element al lui \mathcal{M} . Atunci $2^{|R|}$ este un număr cardinal și avem relațiile $2^{|R|} \preceq |R| \prec 2^{|R|}$, contradicție. \square

REFERENCES

- [1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universității din București, 2006.
- [2] P. Halmos, *Naive set theory*, Springer Verlag, 1960.
- [3] C. Năstăsescu, C. Niță, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, București, 1986.
- [4] C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulțimilor*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1974.