Ex1) $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$, $V' = \langle \{(1,5,11),(2,1,-2)\} \rangle$

a) V' printr-un S.E.L.

b) $V'' = ?$ a.î. $\mathbb{R}^3 = V' \oplus V''$.

a) $V' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, a,b \in \mathbb{R}$ a.î. $(x,y,z) = a(1,5,11) + b(2,1,-2)\}$

$$(x,y,z) = (a+2b,\ 5a+b,\ 11a-2b)$$

$$\begin{cases} a+2b = x \\ 5a+b = y \\ 11a-2b = z \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \\ 11 & -2 \end{pmatrix} \left|\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right.$$

$\mathrm{rg}\, A = 2$

Sist are soluție $\overset{\text{Capelli}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{rg}\, \bar{A} = 2$

$$rg\,\bar{A} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 5 & 1 & y \\ 11 & -2 & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow z - 10x + 22y - 11x + 2y - 10z = 0$$

$$-21x + 24y - 9z = 0 \;/ :3$$

$$-7x + 8y - 3z = 0$$

$$V' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -7x + 8y - 3z = 0\}$$

b) T. Dimensiunii $\Rightarrow \dim V'' = 1$

$\mathcal{R}' = \{(1, 5, 11), (2, 1, -2)\}$ reper în V'

extindem la un reper din $\mathbb{R}^3$

$$rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \\ 11 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{ maxim} \overset{SLi}{\Rightarrow} SLi$$

$$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = \text{card}(\mathcal{R}' \cup \{e_1\})$$

$\Rightarrow \mathcal{R}' \cup \{e_1\}$ reper în $\mathbb{R}^3$

$$V'' = \langle \{(1, 0, 0)\} \rangle$$

Teorie

Proiecții și Simetrii

$p: V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$ liniară

p proiecție pe V_1 de-a lungul lui V_2 dacă $p(v_1+v_2)=v_1$ ⊛

p proiecție $\Leftrightarrow p\circ p = p$

$s \in End(V)$, $V = V_1 \oplus V_2$

s se numește simetrie/involuție $\Leftrightarrow s\circ s = id_V$.

p proiecție $\Leftrightarrow s = 2p - id_V$ ⊛ simetrie

Problema -part 2-

$$\begin{cases} a+b=1 \Rightarrow b=-3/2 \\ 2a=5 \Rightarrow a=5/2 \\ 3a+c=0 \Rightarrow c=-15/2 \end{cases}$$

$$(1,5,0)=\frac{5}{2}(1,2,3)+\left(\frac{-3}{2}\right)(1,0,0)+\left(-\frac{15}{2}\right)(0,0,1)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{5}{2},5,\frac{15}{2}\right)}_{V_1}+\underbrace{\left(\frac{-3}{2},0,\frac{-15}{2}\right)}_{V_2}$$

$$p(1,5,0)=\left(\frac{5}{2},5,\frac{15}{2}\right)$$

b) $s(1,5,0)=2\,p(1,5,0)-(1,5,0)=(5,10,15)-(1,5,0)=(4,5,15)$

Ex2 $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)_{\mathbb{R}}$, $V_1 = \langle\{(1,2,3)\}\rangle$

Problemă part 1

I) a) $p(1,5,0)$, $p: \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 = V_1 \oplus V_2$

p = proiecția pe V_1 de-a lungul lui V_2

b) $s(1,5,0)$, s = simetria față de V_1

II) a) $rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3$ maxim $\xRightarrow{SLi} R = \{(1,2,3), e_1, e_3\}$ SLi

$\dim \mathbb{R}^3 = 3 = card(R)$

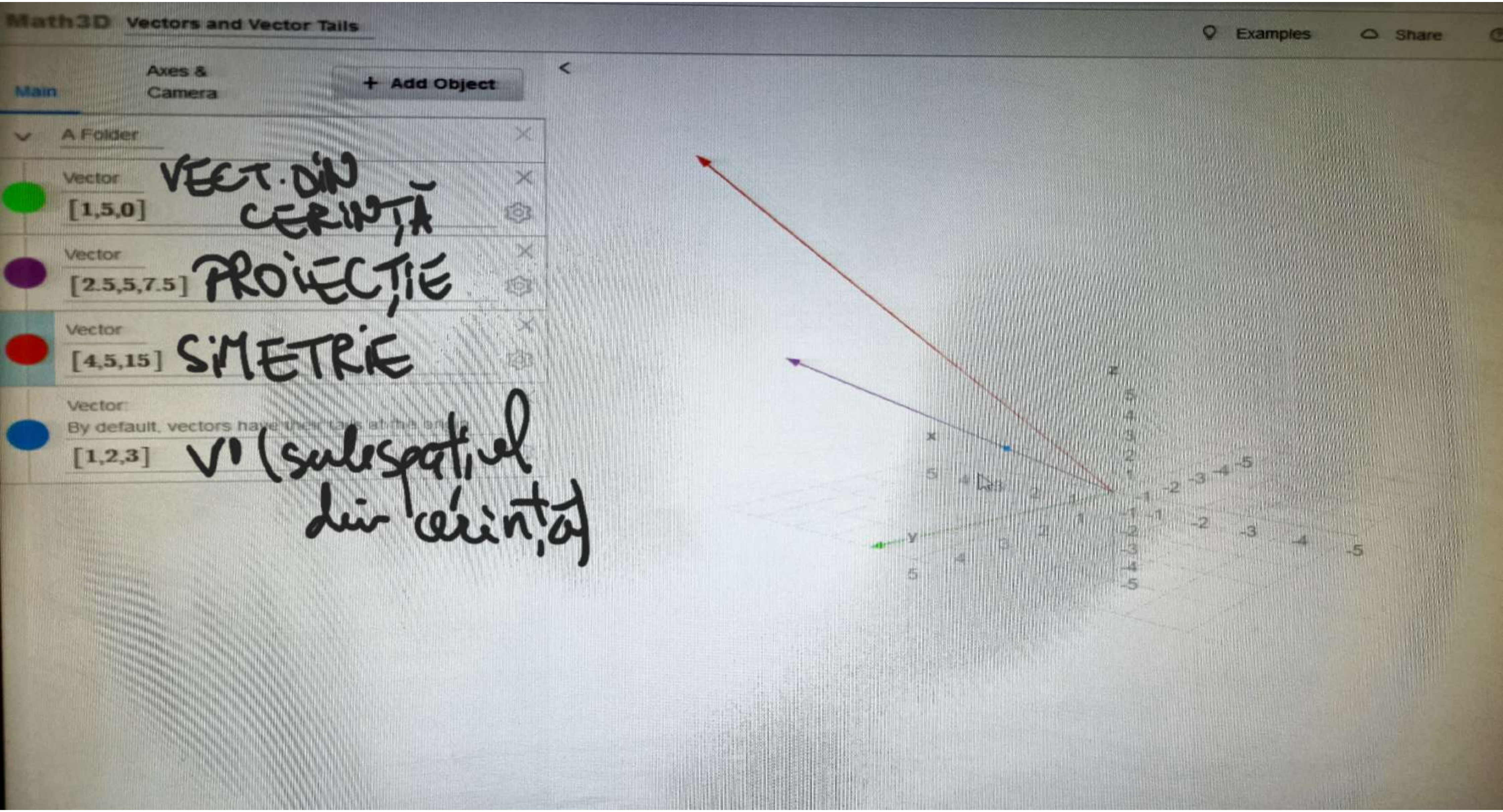
$\Rightarrow R$ = reper în $\mathbb{R}^3$

$R_1 = \{(1,2,3)\}$ reper în V_1

$R_2 = \{e_1, e_3\}$ reper în V_2

$(1,5,0) = \underbrace{a(1,2,3)}_{V_1} + \underbrace{b(1,0,0) + c(0,0,1)}_{V_2} = (a+b, 2a, 3a+c)$

$\frac{15}{2}$) $(0,0,1)$



Math3D
Vectors and Vector Tails
Examples
Share
Main
Axes & Camera
+ Add Object
A Folder
Vector
[1,5,0]
VECT. DIN CERINȚĂ
Vector
[2.5,5,7.5]
PROIECȚIE
Vector
[4,5,15]
SIMETRIE
Vector
By default, vectors ha
[1,2,3]
V' (subspațiul din cerință)

Vectori și valori proprii

Problema: Diagonalizarea: $f \in (V,+,\cdot)_{/K}$, $f \in End(V)$

$\exists R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V cu

$[f]_{R,R} = A$ diagonală

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} f(e_1) = \lambda_1 e_1 + 0e_2 + \dots + 0e_n \\ f(e_2) = 0e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + 0e_n \\ f(e_n) = 0e_1 + 0e_2 + \dots + \lambda_n e_n \end{array}$$

Def. $f \in End(V)$, $x \in V$ vector propriu $\Leftrightarrow \exists \lambda \in K$ cu $f(x) = \lambda x$

λ = valoarea proprie asociată vectorului propriu

$V_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda x\}$ = spațiul propriu asociat val. proprii λ

Polinom caracteristic: $P(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$

Val. proprii = rădăcinile polinomului caracteristic
$\underset{\text{din } \mathbb{K}}{}$

T. de diagonalizare: Fie $f \in End(V)$, $\exists R = \{e_1, \dots, e_n\}$ în V ai
$[f]_{RR} = A$ diagonalizabilă $\Leftrightarrow \dim V_{\lambda_i} = m_i$ (multiplicitatea)
//
de câte ori apare
soluția λ în $P(\lambda)$

Vectori și valori proprii

Ex 3 $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x) = (x_1, x_2+2x_3, 2x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$

Reper în $\mathbb{R}^3$ a.î. $[f]_{RR}$ diagonalizabilă

Notăm pe linie

$R_0 = \{e_1, e_2, e_3\}$ reper canonic.

!Notăm pe linie

$$A = [f]_{R_0 R_0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = 0$$

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

$\lambda_1 = 1, m_1 = 2$

$\lambda_2 = 2, m_2 = 1$

$$V_{\lambda_1} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid f(X) = \lambda_1 X\} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid f(X) = 1 \cdot X\}$$

$$A \cdot X = 1 \cdot X \Rightarrow A X - X = O_{3,1}$$

$$(A - I_3)X = O_{3,1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_3 = 0$$

$$V_{\lambda_1} = \{\underbrace{(x_1, x_2, 0)}_{=\,(x_1,0,0)+(0,x_2,0)} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = \langle \{(1,0,0),(0,1,0)\} \rangle$$

$\mathcal{B}_1 = \{(1,0,0),(0,1,0)\}$ reper în V_{λ_1}

$$\dim V_{\lambda_1} = 2 = m_1$$

$$V_{\lambda_2} = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid f(X) = 2X\}$$

$$A \cdot X = 2X \Rightarrow AX - 2X = O_{3,1} \Rightarrow (A - 2I_3)X = O_{3,1} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 + 2x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

Vectori și valori proprii

$$V_{\lambda_2} = \{(0, 2x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\} = <\{(0,2,1)\}>$$

$R_2 = \{(0,2,1)\}$ reper în V_{λ_2}

$\dim V_{\lambda_2} = 1 < m_2$

$R = R_1 \cup R_2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,2,1)\}$ reper în can

$$A = [f]_{RR} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Forme biliniare

$g : V \times V \to \mathbb{K} \iff g$ liniară în fiecare argument

Def. formă biliniară $g : V \times V \to \mathbb{K}$

$$\begin{cases} g(ax+by, z) = a\,g(x,z) + b\,g(y,z) \\ g(x, ay+bz) = a\,g(x,y) + b\,g(x,z) \end{cases} \qquad \forall a,b \in \mathbb{K},\ \forall x,y,z \in V$$

$\overset{not}{=} L(V,V;\mathbb{K})$

Def f. biliniară simetrică $\left(L^s(V,V;\mathbb{K})\right) \iff g(x,y) = g(y,x)$

ex $g(x,y) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 - 4x_2y_2$

f biliniare antisimetrice $\left(L^a(V,V;\mathbb{K})\right) \iff g(x,y) = -g(y,x)$

ex: $g(x,y) = 2x_1y_2 - 2x_2y_1$

Def: Fie $g \in L^2(V,V;K)$
$\ker g = \{x \in V \mid g(x,y) = 0 \ \forall y \in V\}$
$\ker g = \{0_V\} \Leftrightarrow g$ nedegenerat.

Mat asociată f. biliniare.
fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$.
$g(e_i, e_j) = g_{ij} \Rightarrow G(g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

$G = G^T \Leftrightarrow G$ simetrică

Ex: $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 - x_2y_2 - x_1y_3 - x_3y_1 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2$

G asociat lui R_0:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} y_1 & y_2 & y_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = G, \quad G^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = G \Rightarrow G \text{ simetric}$$