Relaţii Binare

SEMINAR DE LOGICĂ MATEMATICĂ ŞI COMPUTAŢIONALĂ

Claudia MUREŞAN

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică

Semestrul I, 2019-2020

Relaţii Binare între Două Mulţimi

Obs.: Fie $A \neq \emptyset$ și $B \neq \emptyset$ mulțimi, iar $R \subseteq A \times B$ (i.e. $R \rightarrow$ relație binară de la A la B).

Atunci $R^{-1} \subseteq B \times A$, definită prin: $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(b R^{-1} a \Leftrightarrow a R b)$.

Așadar $(R^{-1})^{-1} \subseteq A \times B$, definită prin: $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a (R^{-1})^{-1} b \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b R^{-1} a \Leftrightarrow a R b)$

$$a (R^{-1})^{-1} b \overset{\text{(not.)}}{\Updownarrow} (a,b) \in (R^{-1})^{-1}$$

$$a R b \overset{\text{(not.)}}{\Updownarrow} (a,b) \in R,$$

Prin urmare, $(\forall (a,b) \in A \times B)$ $((a,b) \in R \Leftrightarrow (a,b) \in (R^{-1})^{-1})$, așadar, cum $R \subseteq A \times B \supseteq (R^{-1})^{-1}$, rezultă: $(R^{-1})^{-1} = R$.

Exerc.: Fie A și B mulțimi, $A \neq \emptyset$ și $B \neq \emptyset$, iar $R \subseteq A \times B$.

Dem. că:

1

(1.1) $R \to$ injectivă $\Leftrightarrow R^{-1} \to$ funcțională

$R^{-1} \to$ injectivă $\Leftrightarrow R \to$ funcțională (i.e. funcție parțială)

(1.2) $R \to$ surjectivă $\Leftrightarrow R^{-1} \to$ totală;

$R^{-1} \to$ surjectivă $\Leftrightarrow R \to$ totală;

(1.3) $R \to$ injectivă și surjectivă $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow R^{-1} \to$ funcție; $R^{-1} \to$ injectivă și surjectivă $\Leftrightarrow R \to$ funcție;

(1.4) $R \to$ funcție bijectivă $\Leftrightarrow R^{-1} \to$ funcție bijectivă;

(1.5) dacă $R \to$ funcție, atunci: $R^{-1} \to$ funcție $\Leftrightarrow R \to$ injectivă și surjectivă $\Leftrightarrow R \to$ funcție bijectivă $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow R^{-1} \to$ funcție bijectivă;

dacă $R^{-1} \to$ funcție, atunci: $R \to$ funcție $\Leftrightarrow R^{-1} \to$ injectivă și surjectivă $\Leftrightarrow R^{-1} \to$ funcție bijectivă $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow R \to$ funcție bijectivă.

(2)

(a) $R \to$ injectivă $\Leftrightarrow R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$;

(b) $R \to$ totală $\Leftrightarrow \Delta_A \subseteq R^{-1} \circ R$;

(c) $R \to$ injectivă și totală $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow R^{-1} \circ R = \Delta_A$.

(a') $R \to$ funcțională $\Leftrightarrow R \circ R^{-1} \subseteq \Delta_B$;

(b') $R \to$ surjectivă $\Leftrightarrow \Delta_B \subseteq R \circ R^{-1}$;

(c') $R \to$ funcțională și surjectivă $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R \circ R^{-1} = \Delta_B$.

REZ.: Dem. primele echivalențe; aplicându-le pt. R^{-1} în locul lui R, rezultă celelalte echivalențe, folosind observația anterioară.

① (1.1) $R \to$ injectivă $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall a_1, a_2 \in A)(\forall b \in B)(a_1 R b$ și $a_2 R b \Rightarrow a_1 = a_2) \overset{(dem.)}{\Leftrightarrow}$
$\Leftrightarrow (\forall b \in B)(\forall a_1, a_2 \in A)(b R^{-1} a_1$ și $b R^{-1} a_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_1 = a_2) \overset{def}{\Leftrightarrow} R^{-1} \to$ funcțională;

(1.2) $R \to$ surjectivă $\overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall b \in B)(\exists a \in A)(a R b)$
$\overset{(dem.)}{\Leftrightarrow} (\forall b \in B)(\exists a \in A)(b R^{-1} a) \overset{def}{\Leftrightarrow} R^{-1} \to$ totală.

(1.1), (1.2) $\overset{def}{\Rightarrow}$ (1.3) $\Rightarrow$ (1.4) $\Rightarrow$ (1.5).

② (a) "$\Rightarrow$": Fie $(a, c) \in R^{-1} \circ R$, cu $a, c \in A \Leftrightarrow (\exists b \in A)(a R b$ și $\underbrace{b R^{-1} c}_{\Leftrightarrow c R b}) \Leftrightarrow (\exists b \in B)(a R b$ și $c R b) \xrightarrow{(R \to inj.)} a = c \Leftrightarrow (a, c) \in \Delta_A \Rightarrow$
$\Rightarrow R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$.

"$\Leftarrow$": Fie $a_1, a_2 \in A$ și $b \in B$, a.î. $a_1 R b$ și $\underbrace{a_2 R b}_{(\Leftrightarrow b R^{-1} a_2)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a_1 R b$ și $b R^{-1} a_2 \Rightarrow (a_1, a_2) \in R^{-1} \circ R$.

$\left.\begin{array}{l} (a_1,a_2) \in \underbrace{R^{-1} \circ R}_{\subseteq \Delta_A} \end{array}\right\} \Rightarrow (a_1, a_2) \in \Delta_A \Leftrightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow R \to$ „inj"

(b) $\underline{\text{"}\Rightarrow\text{"}}$ Fie $a \in A \xRightarrow{R \to \text{totală}} (\exists b \in B)(a R b) \Leftrightarrow (b R^{-1} a) \Rightarrow (a, a) \in R^{-1} \circ R \Rightarrow \Delta_A \subseteq R^{-1} \circ R$,

$\underline{\text{"}\Leftarrow\text{"}}$ Fie $a \in A \Leftrightarrow (a, a) \in \underbrace{\Delta_A}_{\subseteq R^{-1} \circ R} \Rightarrow (a,a) \in R^{-1} \circ R \Leftrightarrow (\exists b \in B)(a R b$ și $b R^{-1} a) \Leftrightarrow (\exists b \in B)(a R b) \Rightarrow R \to$ totală.

(c) $R \to$ injectivă și totală $\overset{(a),(b)}{\Leftrightarrow} R^{-1} \circ R \subseteq \Delta_A$ și $\Delta_A \subseteq R^{-1} \circ R \Leftrightarrow R^{-1} \circ R = \Delta_A$.

(a') $\Leftarrow$ (a), (1.1) și „obs."
(b') $\Leftarrow$ (b), (1.2) și „obs."
(c') $\Leftarrow$ (a'), (b').

Punctul (2) al observaţiei următoare repetă observaţia de mai sus.

Obs.: $A, B, C, D \to$ mulțimi; $Q \subseteq A^2 (= A \times A)$;
$R \subseteq A \times B$; $S \subseteq A \times B$; $P \subseteq A \times A$; $T \subseteq B \times C$. Atunci:

(1) $\Delta_A^{-1} = \Delta_A$;

(2) $(R^{-1})^{-1} = R$;

(3) $(Q^2)^{-1} = (Q^{-1})^2$;

(4) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ (e valabilă chiar pt. $\cup$ arbitrare);

(5) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ (e valabilă chiar pt. $\cap$ arbitrare)

(rămân)

(6) $R \subseteq S \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$;

(7) $R = S \Leftrightarrow R^{-1} = S^{-1}$;

(8) $R \subseteq S \Rightarrow \begin{cases} R \circ P \subseteq S \circ P \\ T \circ R \subseteq T \circ S. \end{cases}$

Dem.:

(1) Fie $a, b \in A$, arbitrare, fixate,
$(a, b) \in \Delta_A^{-1} \Leftrightarrow (b, a) \in \Delta_A \Leftrightarrow b = a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow (a, b) \in \Delta_A. \Rightarrow \Delta_A^{-1} = \Delta_A$.

(2) Fie $a \in A$ și $b \in B$, arbitrare, fixate.
$(R \subseteq A \times B \Rightarrow R^{-1} \subseteq B \times A \Rightarrow (R^{-1})^{-1} \subseteq A \times B)$
$(a, b) \in R \Leftrightarrow (b, a) \in R^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in (R^{-1})^{-1}$;
$\Rightarrow R = (R^{-1})^{-1}$,

(3) $(Q^2)^{-1} = (Q \circ Q)^{-1} = Q^{-1} \circ Q^{-1} = (Q^{-1})^2$;
La curs am dem. chiar că: $(\forall n \in \mathbb{Z})$
$((Q^n)^{-1} = (Q^{-1})^n)$.

(4) Fie $a\in A$ și $b\in B$, arb., fixate.

$(b,a)\in(R\cup S)^{-1} \Leftrightarrow (a,b)\in R\cup S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(a,b)\in R$ sau $(a,b)\in S] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(b,a)\in R^{-1}$ sau $(b,a)\in S^{-1}] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b,a)\in R^{-1}\cup S^{-1}. \Rightarrow (R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}.$

(5) Fie $a\in A$ și $b\in B$, arb., fixate.

$(b,a)\in(R\cap S)^{-1} \Leftrightarrow (a,b)\in R\cap S \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(a,b)\in R$ și $(a,b)\in S] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [(b,a)\in R^{-1}$ și $(b,a)\in S^{-1}] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b,a)\in R^{-1}\cap S^{-1}. \Rightarrow (R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}.$

(6) $R\subseteq S \Leftrightarrow (\forall a\in A)(\forall b\in B)(aRb \Rightarrow$

$\Rightarrow aSb) \xLeftrightarrow[\text{aceluiași fel comută}]{\text{cuantif. de}} (\forall b\in B)(\forall a\in A)$

$(bR^{-1}a \Rightarrow bS^{-1}a) \Leftrightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}.$

(7) $R=S \Leftrightarrow (R\subseteq S$ și $S\subseteq R) \overset{(6)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow (R^{-1}\subseteq S^{-1}$ și $S^{-1}\subseteq R^{-1}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R^{-1}=S^{-1}.$

(8) $R\circ P\subseteq D\times B\supseteq S\circ P;$

$T\circ R\subseteq A\times C\supseteq T\circ S.$

Presupunem că $R\subseteq S$.

Fie $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, $d\in D$, arbitrare, fixate.

$(d,b)\in R\circ P \Leftrightarrow (\exists x\in A)((d,x)\in P$

și $\underbrace{(x,b)\in R}_{\xRightarrow[(R\subseteq S)]{} (x,b)\in S}) \Rightarrow (\exists x\in A)((d,x)\in P$

și $(x,b)\in S) \Leftrightarrow (d,b)\in S\circ P$. Așadar

$R\circ P\subseteq S\circ P.$

$(a,c)\in T\circ R \Leftrightarrow (\exists y\in B)(\underbrace{(a,y)\in R}_{\Downarrow (R\subseteq S)\ (a,y)\in S}$ și

$(y,c)\in T) \Rightarrow (\exists y\in B)((a,y)\in S$ și $(y,c)\in T) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (a,c)\in T\circ S$. Așadar $T\circ R\subseteq T\circ S$.

Obs.: $I \to$ mulțime; $I \neq \emptyset$ (de fapt poate fi și vidă)

$A, B \to$ mulțimi, $(R_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{P}(A\times B)$.

Atunci:
- $\left(\bigcup_{i\in I} R_i\right)^{-1} = \bigcup_{i\in I} R_i^{-1}$;
- $\left(\bigcap_{i\in I} R_i\right)^{-1} = \bigcap_{i\in I} R_i^{-1}$.

(dar aici o considerăm nevidă)

Dem.: $(\forall\, i\in I)(R_i \subseteq A\times B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall\, i\in I)(R_i^{-1} \subseteq B\times A)$.

$\Downarrow$

$\bigcup_{i\in I} R_i^{-1} \subseteq B\times A \supseteq \bigcap_{i\in I} R_i^{-1}$;

$\bigcap_{i\in I} R_i \subseteq \bigcup_{i\in I} R_i \subseteq A\times B \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\bigcup_{i\in I} R_i\right)^{-1} \subseteq B\times A \supseteq \left(\bigcap_{i\in I} R_i\right)^{-1}$.

Dacă $A=\emptyset$ sau $B=\emptyset$, atunci $A\times B=\emptyset$, $\Rightarrow (\forall\, i\in I)(R_i=\emptyset) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall\, i\in I)(R_i^{-1}=\emptyset). \Rightarrow$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I} R_i^{-1} = \bigcap_{i\in I} R_i^{-1} = \emptyset = \emptyset^{-1} =$

$= \left(\bigcup_{i\in I} R_i\right)^{-1} = \left(\bigcap_{i=1} R_i\right)^{-1}$.

Astfel se poate trata separat cazul mulțimilor vide în toate aceste observații.

Acum presupunem că $A\neq\emptyset$ și $B\neq\emptyset$, astfel că putem aplica axioma alegerii.

Fie $a\in A$ și $b\in B$, arbitrare, fixate.

$(b,a)\in\left(\bigcup_{i\in I} R_i\right)^{-1} \Leftrightarrow (a,b)\in\bigcup_{i\in I}R_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, i\in I)\left((a,b)\in R_i\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\exists\, i\in I)\left((b,a)\in R_i^{-1}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b,a)\in\bigcup_{i\in I}R_i^{-1}$.

Așadar $\left(\bigcup_{i\in I}R_i\right)^{-1}=\bigcup_{i\in I}R_i^{-1}$.

$(b,a)\in\left(\bigcap_{i\in I} R_i\right)^{-1} \Leftrightarrow (a,b)\in\bigcap_{i\in I}R_i \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall\, i\in I)\left((a,b)\in R_i\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\forall\, i\in I)\left((b,a)\in R_i^{-1}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (b,a)\in\bigcap_{i\in I}R_i^{-1}$.

Așadar $\left(\bigcap_{i\in I}R_i\right)^{-1}=\bigcap_{i\in I}R_i^{-1}$.

<u>Obs.:</u> Cu notațiile din observația anterioară, fie C, D mulțimi, $P\subseteq D\times A$ și $T\subseteq B\times C$. Atunci:

- $T\circ\left(\bigcup_{i\in I}R_i\right)=\bigcup_{i\in I}(T\circ R_i)$;
- $\left(\bigcup_{i\in I}R_i\right)\circ P=\bigcup_{i\in I}(R_i\circ P)$;
- $T\circ\left(\bigcap_{i\in I}R_i\right)\subseteq\bigcap_{i\in I}(T\circ R_i)$;
- $\left(\bigcap_{i\in I}R_i\right)\circ P\subseteq\bigcap_{i\in I}(R_i\circ P)$.

(Avem egalitate, de exemplu dacă $(\forall\, i,j\in I)(R_i=R_j)$.)

A se vedea contraexemplul din curs pt. egalitate, un

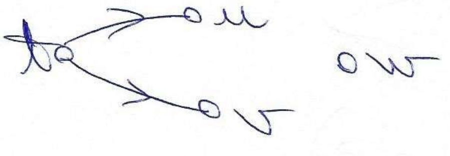
<u>Dem.:</u>

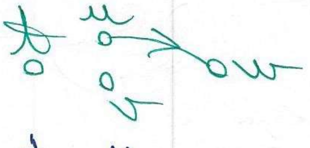
contraexemplu similar pt. egalitate în ultima incluziune: fie $D=A=B=$

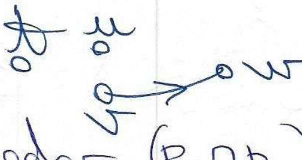
$=\{t, u, v, w\}$, cu $|A|=4$,

$I=\{1,2\}\subset\mathbb{N}$, $P=\{(t,u),(t,v)\}$,

$R_1=\{(u,w)\}$ și $R_2=\{(v,w)\}$:

P: 

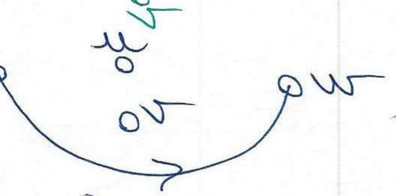
R_1: 

R_2: 

Atunci: $R_1\cap R_2=\emptyset$, așadar $(R_1\cap R_2)\circ P = \emptyset$ (presupunând că ar avea elemente $\Rightarrow \nexists$)

dar:

$R_1\circ P=\{(t,w)\}$:  și

$R_2\circ P=\{(t,w)\}$: ,

prin urmare $(R_1\circ P)\cap(R_2\circ P) =$

$=\{(t,w)\}\neq\emptyset=(R_1\cap R_2)\circ P$.

În ce privește incluziunea:

$I\neq\emptyset \Rightarrow (\forall k\in I)\left(\bigcap_{i\in I} R_i \subseteq R_k\right)$ (cf. obs. de mai sus) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\forall k\in I)\left(T\circ\left(\bigcap_{i\in I} R_i\right)\subseteq T\circ R_k\right) \\ \text{și} \\ (\forall k\in I)\left(\left(\bigcap_{i\in I} R_i\right)\circ P\subseteq R_k\circ P\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} T\circ\left(\bigcap_{i\in J} R_i\right) \subseteq \bigcap_{k\in J}\left(T\circ R_k\right) \\ \text{și} \\ \left(\bigcap_{i\in J} R_i\right)\circ P \subseteq \bigcap_{k\in J}\left(R_k\circ P\right) \end{cases}$$

(acum putem redenumi indicele din membrul drept)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T\circ\left(\bigcap_{i\in J} R_i\right) \subseteq \bigcap_{i\in J}\left(T\circ R_i\right) \\ \text{și} \\ \left(\bigcap_{i\in J} R_i\right)\circ P \subseteq \bigcap_{i\in J}\left(R_i\circ P\right). \end{cases}$$

Putem trata separat cazul $C=\emptyset$ sau $D=\emptyset$ ca mai sus, apoi să le presupunem nevide, pentru a putea aplica axioma alegerii.

Fie $a\in A$, $b\in B$, $c\in C$, $d\in D$, arbitrare, fixate.

$$(a,c)\in \overbrace{T\circ\left(\bigcup_{i\in J} R_i\right)}^{\subseteq A\times C} \Leftrightarrow (\exists x\in B)\left((a,x)\in \bigcup_{i\in J} R_i \text{ și } (x,c)\in T\right) \Leftrightarrow (\exists x\in B)\left[(\exists i\in J)((a,x)\in R_i) \text{ și } \underbrace{(x,c)\in T}_{\text{enunț în care nu apare } i}\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\exists x\in B)(\exists i\in J)\left((a,x)\in R_i \text{ și } (x,c)\in T\right)$$

$$\Leftrightarrow (\exists i\in J)(\exists x\in B)\left((a,x)\in R_i \text{ și } (x,c)\in T\right)$$

$$\Leftrightarrow (\exists i\in J)\left((a,c)\in T\circ R_i\right) \Leftrightarrow (a,c)\in \underbrace{\bigcup_{i\in J}\left(T\circ R_i\right)}_{\subseteq A\times C}.$$

Așadar, $T\circ\left(\bigcup_{i\in J} R_i\right) = \bigcup_{i\in J}\left(T\circ R_i\right)$.

Analog, $(d,b)\in \overbrace{\left(\bigcup_{i\in J} R_i\right)\circ P}^{\subseteq D\times B \supseteq} \Leftrightarrow (d,b)\in \bigcup_{i\in J}\left(R_i\circ P\right)$,

așadar $\left(\bigcup_{i\in J} R_i\right)\circ P = \bigcup_{i\in J}\left(R_i\circ P\right)$.

Relaţii Binare pe o Mulţime

Obs.: $A \to$ mulţime; $R \subseteq A^2 (= A\times A)$.

Atunci:

(a) $R \to$ reflexivă $\Leftrightarrow \Delta_A \subseteq R$;

(b) $R \to$ simetrică $\Leftrightarrow R \subseteq R^{-1} \Leftrightarrow R^{-1} \subseteq R \Leftrightarrow R = R^{-1}$;

(c) $R \to$ tranzitivă $\Leftrightarrow R^2 \subseteq R$;

(d) $R \in \underset{(\text{not.})}{Eq}(A) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_A \subseteq R \\ \text{şi} \\ R = R^{-1} \\ \text{şi} \\ R^2 \subseteq R; \end{cases}$ (mult. rel. de echiv. pe A)

(e) $R \to$ preord. $\Rightarrow R = R^2$.

Dem.:

(a) $R \to$ reflexivă $\overset{(\text{def.})}{\Leftrightarrow} (\forall a \in A)(aRa) \Leftrightarrow \{(a,a) \mid a \in A\} \subseteq R \Leftrightarrow \Delta_A \subseteq R$.

(b) $R \to$ simetrică $\overset{(\text{def.})}{\Leftrightarrow} (\forall a,b \in A)(aRb \Rightarrow bRa) \overset{(\text{def. } R^{-1})}{\Leftrightarrow} (\forall a,b \in A)(aRb \Rightarrow aR^{-1}b) \Leftrightarrow R \subseteq R^{-1} \overset{(\text{obs. anter. (6)})}{\Longleftrightarrow} R^{-1} \subseteq (R^{-1})^{-1} \overset{(\text{obs. anter. (2)})}{\Leftrightarrow} R^{-1} \subseteq R \Leftrightarrow R \subseteq R^{-1}$ şi $R^{-1} \subseteq R \Leftrightarrow R = R^{-1}$,

dacă $p, q \to$ proprietăţi, a.î. $p \Leftrightarrow q$, atunci: $(p \text{ sau } q) \Leftrightarrow p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \text{ şi } q)$

(c) $R \to$ tranzitivă $\overset{(\text{def.})}{\Leftrightarrow} (\forall a,b,c \in A)(aRb \text{ şi } bRc \Rightarrow aRc)$.

$R^2 \subseteq R \Leftrightarrow (\forall a,c \in A)(aR^2c \Rightarrow aRc) \overset{(\text{def. } R^2 = R\circ R)}{\Longleftrightarrow} (\forall a,c \in A)[(\exists b \in A)(aRb \text{ şi } bRc) \Rightarrow aRc]$.

"$\Rightarrow$": Fie $a,c \in A$ a.î. aR^2c, $\overset{(\text{def. } R^2)}{\Leftrightarrow} (\exists b \in A)(aRb \text{ şi } bRc) \overset{(R \to \text{tranz.})}{\Longrightarrow} aRc$,

"$\Leftarrow$": Fie $a, b, c \in A$ a.î. aRb şi $bRc \xRightarrow{(\text{def } R^2)} aR^2c \xRightarrow{(R^2 \subseteq R)} aRc \xRightarrow{(\text{def})}$

$\Rightarrow R \to$ tranzitivă.

(d) $R \in Eq(A) \xLeftrightarrow{\text{def}} R \to$ refl., sim. şi tranz. $\xLeftrightarrow{(a),(b),(c)} \left(\Delta_A \subseteq R,\ R = R^{-1} \text{ şi } R^2 \subseteq R\right)$.

(e) $R \to$ preordine $\xLeftrightarrow{\text{def}} R \to$ refl. şi tranz.

$\xRightarrow[(c)]{(a)} \left\{\begin{array}{l} \Delta_A \subseteq R \,/\, \circ R \xRightarrow[\text{anter., } (*)]{\text{obs.}} R \subseteq R^2 \\ \text{şi} \\ R^2 \subseteq R \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = R^2$.