Seminar 4

27.10.2020

Ex 1 Def. pe $\mathbb{R}$ relația binară "$\sim$" $x \sim y \overset{def}{\iff} x^2-3x=y^2-3y$. Arătați că "$\sim$" este rel. de echivalență, calculați $\mathbb{R}/_\sim$, determinați un SCR. E bine definită funcția $f:\mathbb{R}/_\sim \to \mathbb{R}$, $f(\hat{t})=-t^2+3t+7$; dar $g:\mathbb{R}/_\sim \to \mathbb{R}$, $g(\hat{t})=t^2+t+1$? (Exc!)

$x \sim y \overset{def}{\underset{"\sim"}{\iff}} x^2-3x=y^2-3y$ (*)

Pt a vedea că "$\sim$" este rel. de echivalență tb. să verific că "$\sim$" e:

1) reflexivă; 2) simetrică; 3) tranzitivă.

Deoarece $x^2-3x=x^2-3x$ $(\forall)\, x\in\mathbb{R} \overset{(*)}{\Rightarrow} x\sim x \Rightarrow$ "$\sim$" e reflexivă (1)

Fie $x,y\in\mathbb{R}$ a.î. $x\sim y \overset{(*)}{\Rightarrow} x^2-3x=y^2-3y \Rightarrow y^2-3y=x^2-3x \overset{(*)}{\Rightarrow} y\sim x \Rightarrow$ "$\sim$" e simetrică. (2)

Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ a.î. $x\sim y$, $y\sim z \overset{(*)}{\Rightarrow} x^2-3x=\underline{y^2-3y}$; $\underline{y^2-3y=z^2-3z} \Rightarrow$ $x^2-3x=z^2-3z \overset{(*)}{\Rightarrow} \underline{x\sim z} \Rightarrow$ "$\sim$" e tranzitivă. (3)

Din (1), (2) și (3) $\Rightarrow$ "$\sim$" e relație de echivalență.

Pt un $x\in\mathbb{R}$ $\quad [x]=\{y\in\mathbb{R} \mid x\sim y\} = \{y\in\mathbb{R}\mid x^2-3x=y^2-3y\}$.

$x^2-3x=y^2-3y \Rightarrow x^2-y^2=3x-3y \Rightarrow (x-y)(x+y)=3(x-y) \Rightarrow$

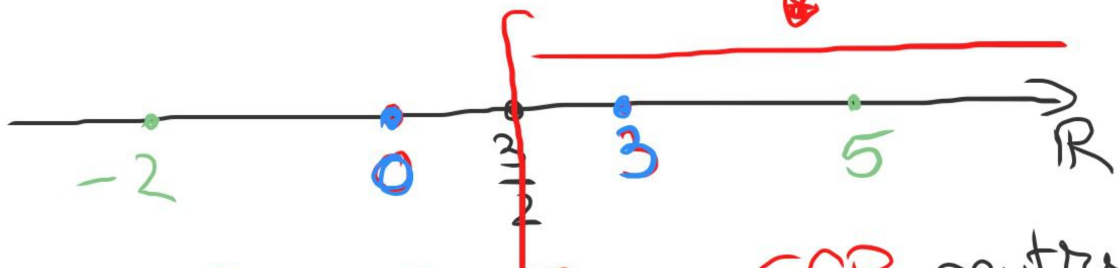
$\Rightarrow (x-y)(x+y-3)=0 \Rightarrow x=y$ sau $x+y=3$ $(\Leftrightarrow y=3-x)$.

$[x]=\{x,3-x\}$ $(\forall)\, x\in\mathbb{R}\setminus\{3/2\}$ și $\left[\frac{3}{2}\right]=\left\{\frac{3}{2}\right\}$ ← mulțimea cu elem. $3/2$

clasa de echiv a lui $\frac{3}{2}$

$\mathbb{R}/_{\sim} = \{[x]\mid x\in\mathbb{R}\} = \{[x]\mid x\in S\}$

SCR.



$[-2]=\{-2,5\}$

$[0]=\{0,3\}$

$[3/2]=\{3/2\}$.

Afirmație $\quad S=[3/2;+\infty)$ este un SCR pentru $\sim$.

Dem Tb. să arăt
1) $(\forall)\, a\in\mathbb{R}\ (\exists)\, s\in S$ a.î. $a\sim s$
și 2) $(\forall)\, s_1\neq s_2\in S$ avem $s_1\nsim s_2$.

Pt 1): Fie $a\in\mathbb{R}$. Dc
- $\to a\geq 3/2$ iau $s=a$ și $a\sim s$
- $\to a<3/2 \Rightarrow 3-a>3/2$; iau $s=3-a$ și $a\sim s$.

Pt 2): Fie $s_1,s_2\in S$ a.î. $s_1\sim s_2 \Rightarrow [s_2]=[s_1]\ (=\{s_1,3-s_1\}) \Rightarrow s_1=s_2$ sau $s_1=3-s_2$

Dc. $s_1 = 3 - s_2 \Rightarrow s_1 + s_2 = 3$

Dar $s_1, s_2 \in S = [3/2; +\infty) \Rightarrow s_1 + s_2 \geq \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3$ $\Big| \Rightarrow s_1 + s_2 = 3$ implică

$s_1 = s_2 = 3/2$ (• •) $\Rightarrow s_1 = s_2$

Deci $s_1 \sim s_2 \Rightarrow$ 2) este satisfăcut, deci S e SCR.

$\boxed{Q}$ E $f : \mathbb{R}/_\sim \to \mathbb{R}$ $f(\hat{t}) = -t^2 + 3t + 7$ o funcție?

Este $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ $f\left(\frac{a}{b}\right) = a$ o funcție? NU $\left(f\left(\frac{1}{3}\right) = 1 ; f\left(\frac{2}{6}\right) = 2 \quad \frac{1}{3} = \frac{2}{6} \right)$

Dar $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ $g\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$ este o funcție!

Dc $t = 3/2$ f e OK! Dc $t \neq \frac{3}{2} \Rightarrow [t] \overset{\text{not.}}{=} \hat{t} = \{t, 3-t\} \Rightarrow \hat{t} = \widehat{3-t}$

f e corect definită dacă $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$ $f(\hat{t})$ nu depinde de alegerea reprezentantului lui $\hat{t}$, i.e. $f(\hat{t}) = f(\widehat{3-t})$ $(\forall)\, \hat{t} \in \mathbb{R}/_\sim$.

$\left(f(\widehat{3-t}) = -(3-t)^2 + 3(3-t) + 7 = -\cancel{9} + 6t - t^2 + \cancel{9} - 3t + 7 = -t^2 + 3t + 7 = f(\hat{t}) \right)$ $(\forall)\, \hat{t} \in \mathbb{R}/_\sim$

$\Rightarrow$ f e <u>corect definită</u>.

Ex 2 Pe $\mathbb{C}$ definim "$\sim$" $z \sim y \iff |z| = |y|$. —||—
rel. de echivalență.

Exc! "$\sim$" este o rel. de echivalență.

Fie $z \in \mathbb{C} \Rightarrow [z] = \{y \in \mathbb{C} \mid y \sim z\} = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| = |z|\}$

Dc. $z = 0 \Rightarrow [z] = \{0\}$; dc. $z \neq 0 \Rightarrow |z| = r \neq 0$, $r \in \mathbb{R}_+$

$$\boxed{[z] = \{y \in \mathbb{C} \mid |y| = r\} = \{r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi)\}}$$

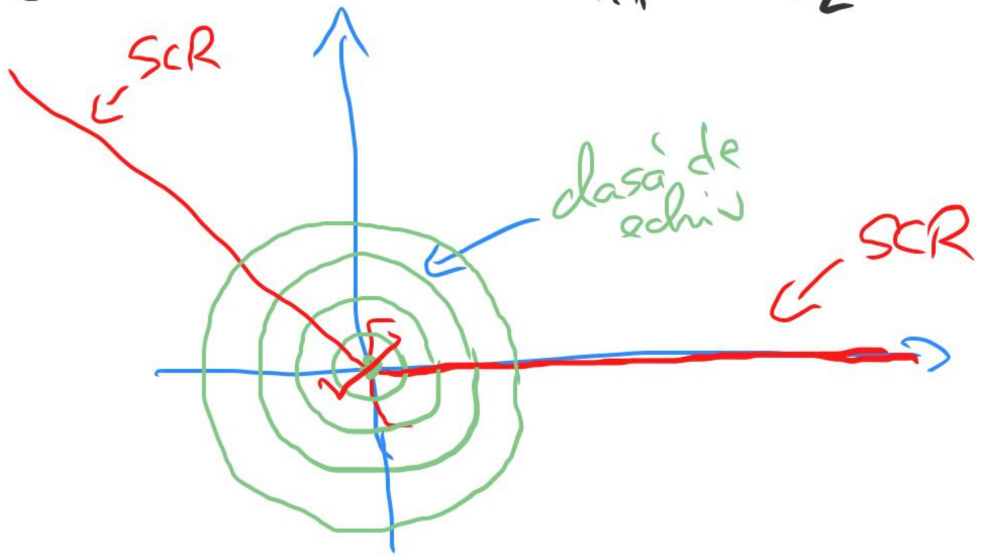
mult. nr. complexe ale căror afixe sunt pct. cercului $\mathcal{C}(0; r)$.

Deci, un SCR pentru $\sim$ este $S = \mathbb{R}_+ = \{r \in \mathbb{R} \mid r \geq 0\}$.

(Dem este simplă)

$(\forall) z \in \mathbb{C}$ $z \sim |z|$ $(||z|| = |z|)$ și $|z| \in \mathbb{R}_+ = S$ $\Rightarrow$ 1) pt SCR e satisf.

Fie $r_1, r_2 \in S$ $r_1 \neq r_2 \Rightarrow \underset{r_1}{|r_1|} \neq \underset{r_2}{|r_2|} \Rightarrow r_1 \not\sim r_2 \Rightarrow$ 2) pt SCR e satisf.

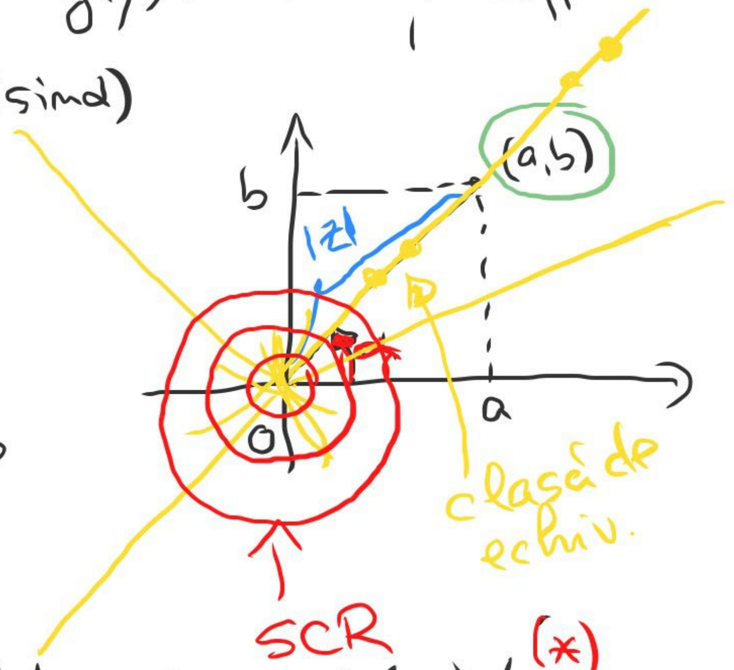


Ex 3 Pe $\mathbb{C}^*$ definim "$\sim$" $z \sim y \iff \mathrm{Arg}(z) = \mathrm{Arg}(y)$. Arătați —"—.

Exc! "$\sim$" e rel. de echiv.

Fie $z \in \mathbb{C}^*$ $\mathrm{Arg}(z) = \alpha \in [0, 2\pi)$ a.î. $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
$\overset{\shortparallel}{(a+ib)}$

$$[z] = \{ r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \mid r \in \mathbb{R}_+^* \}$$



SCR este orice cerc de centru O și rază $r > 0$, $(r \in \mathbb{R})$

i.e. $S = \{ r(\cos\alpha + i\sin\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi) \}$

Ex4 Fie $A \neq \phi$, $\phi \neq B \subseteq A$. Definim pe $\mathcal{P}(A)$ relația ρ: $X \rho Y \overset{(*)}{\iff} X \cap B = Y \cap B$. Să se arate că ρ e rel. de echiv. și $\mathcal{P}(A)/\rho$ este în bijecție cu $\mathcal{P}(B)$.

Vreau ρ rel. de echiv. Tb să verific că ρ e 1) reflexivă, 2) simetrică, 3) tranzitivă

$X \cap B = X \cap B \overset{(*)}{\Longrightarrow} X \rho X \Rightarrow \rho$ e reflexivă (1)

Fie $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ a.î. $X \rho Y \underset{(*)}{\Longrightarrow} X \cap B = Y \cap B \Rightarrow Y \cap B = X \cap B \overset{(*)}{\Longrightarrow} Y \rho X \Rightarrow$ ρ e simetrică (2)

Fie $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$ a.î. $X \rho Y$ și $Y \rho Z \Rightarrow X \cap B = Y \cap B$ și $Y \cap B = Z \cap B$

$\Rightarrow X \cap B = Z \cap B \Rightarrow X \rho Z \Rightarrow \rho$ e tranzitivă (3) (*)

Din (1), (2) și (3) $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ ρ este relație de echivalență.

$\mathcal{P}(A)/\rho \overset{=}{\text{def}} \{ [X] \mid X \in \mathcal{P}(A) \}$ $\quad [X] = \{ Y \subseteq A \mid \underbrace{Y \cap B = X \cap B}_{Y \rho X} \}$

$(\forall) X \subseteq A$ avem că $X \cap B = (X \cap B) \cap B \overset{(*)}{\Rightarrow} X \rho (X \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow [X] = [X \cap B]$.

Afirmație Funcția $\boxed{f : \mathcal{P}(A)/\rho \longrightarrow \mathcal{P}(B)}$ $f([X]) = X \cap B$ este o bijecție.

Dem • f bine definită: fie $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ a.î. $X \rho Y \overset{(*)}{\Rightarrow}$

$X \cap B = Y \cap B \Longrightarrow f([X]) = f([Y]) \Rightarrow f$ e bine definită.

•• Fie $[X], [Y] \in \mathcal{P}(A)/\rho$ a.î. $f([X]) = f([Y]) \Rightarrow X \cap B = Y \cap B \Longrightarrow$

$X \rho Y \xrightarrow[C4]{\text{Teorema}} [X] = [Y] \overset{(*)}{\Rightarrow} f$ e injectivă

(⁘) f e surjectivă: Fie $Y \in \mathcal{P}(B) \Rightarrow Y \cap B = Y$

$Y \subseteq B \subseteq A \Rightarrow Y \in \mathcal{P}(A)$, $f([Y]) = Y \cap B = Y \Rightarrow f$ e surjectivă.

Din (·), (··) și (⁘) $\Rightarrow f$ e fct. bijectivă.

Ex 5 Scrieți toate partițiile (rel. de echiv.) pe o mulțime cu 4 elemente.

Pot pp că $A = \{1,2,3,4\}$

Partițiile lui A

I. $(\{1,2,3,4\})$ → partiție cu 1 mulțime — 1

II. $(\{1\},\{2,3,4\})$, $(\{2\},\{1,3,4\})$, $(\{3\},\{1,2,4\})$, $(\{4\},\{1,2,3\})$ — 7
$(\{1,2\},\{3,4\})$, $(\{1,3\},\{2,4\})$, $(\{1,4\},\{2,3\})$ → partițiile cu 2 mulțimi

III. $(\{1\},\{2\},\{3,4\})$, $(\{1\},\{3\},\{2,4\})$, $(\{1\},\{4\},\{2,3\})$ → —"— cu 3 mulțimi
$(\{2\},\{3\},\{1,4\})$, $(\{2\},\{4\},\{1,3\})$, $(\{3\},\{4\},\{1,2\})$ — 6

IV. $(\{1\},\{2\},\{3\},\{4\})$ → partiție cu 4 mulțimi — 1

$\#$ partiții ale lui $A = 1+7+6+1 = 15 \xlongequal[C4]{\text{Teorema 2}} \#$ rel. de echiv. pe A $\left(\dfrac{\text{Exc!}}{\text{Scrieți-le!}}\right)$

ρ e def. astfel $a,b \in A$ $a \rho b \Leftrightarrow a = b$