CURS 8. 8.04.2020.

# Forme pătratice. Formă canonică. Teorema Gauss. Metoda Jacobi

**Def.** Aplicația $Q: V \to \mathbb{K}$ s.n. formă pătratică $\Leftrightarrow$ $\exists\, g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară simetrică a.î. $Q(x) = g(x,x)$, $\forall x \in V$.

**Prop.** Există o corespondență bijectivă între mulțimea formelor pătratice și mulțimea formelor biliniare simetrice, asociate unui spațiu vectorial $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$.

**Dem**

- Fie $g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară simetrică. Considerăm $Q: V \to \mathbb{K}$, $g(x,x) = Q(x)$, $\forall x \in V$
- Fie $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică. Construim $g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară simetrică

$Q(x+y) = g(x+y, x+y) = g(x,x) + g(y,y) + \underline{g(x,y) + g(y,x)}$

$Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + 2g(x,y)$

$g(x,y) = 2^{-1}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)$, $\forall x,y \in V$ (ch $\mathbb{K} \neq 2$)
$1+1\neq 0$

$g$ s.n. formă polară asociată formei pătratice $Q$

**OBS.** Aplicația $g: V\times V \to \mathbb{K}$ este formă biliniară $\Leftrightarrow$ $\exists\, R$ reper în $V$, $\exists\, G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a.î. coordonatele lui $x, y$ în raport cu $R$ verifică: $g(x,y) = X^T G Y = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$,
$R = \{e_1,..,e_n\}$

unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$,

$g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $\forall i,j = \overline{1,n}$

$g$ simetrică $\Leftrightarrow G = G^T$

**Def** $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică $\Rightarrow$ rg $Q$ = rg $g$ = rg $G$ (invariant la schimbarea reperului)

$R \xrightarrow{C} R'$, $G' = C^T G C$, rg $G'$ = rg $G$ )

**OBS** $Q(x) = g(x,x) = X^T G X = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j = g_{11} x_1^2 + \ldots + g_{nn} x_n^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2 g_{n-1\,n} x_{n-1} x_n$.

<u>Def.</u> $(V,+,\cdot)/\mathbb{R}$ sp. vect real, $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală. $Q$ s.n. <u>pozitiv definită</u> $\Leftrightarrow$

1) $Q(x) > 0$, $\forall x \in V \setminus \{0_V\}$
2) $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

$g: V \times V \to \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică s.n. <u>pozitiv definită</u> $\Leftrightarrow$ forma pătratică asociată $Q: V \to \mathbb{R}$ este poz def.

<u>Exemplu</u>

Fie $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.
Să se determine $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată
Este $Q$ poz def?

$Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = g(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

- $Q(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
- $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$

$g$, $Q$ sunt poz def.

<u>Prop.</u> Fie $g: V \times V \to \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică. Dacă $g$ este pozitiv definită, atunci $g$ este nedegenerată (i.e. $\operatorname{Ker} g = \{0_V\} \Leftrightarrow G \in GL(n, \mathbb{R})$)

<u>Dem</u>

Fie $x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g(x,y) = 0$, $\forall y \in V$

Fie $y = x \Rightarrow \underbrace{g(x,x)}_{Q(x)} = 0 \xRightarrow[Q \text{ p. def}]{} x = 0_V \Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\}$

$\Rightarrow g$ este nedegenerată.

<u>Problemă</u> Fie $Q: V \to K$ formă pătratică. $\exists$ un reper $R$ în $V$ a.î. matricea asociată lui $Q$ este diagonală

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & a_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad r = \operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} g \text{ (invariant)}$$

$Q(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2$ (formă canonică).

<u>Teorema Gauss</u>

Fie $(V,+,\cdot)/K$ sp. vect, $Q: V \to K$ formă pătratică $\Rightarrow \exists$ un reper $R = \{e_1, \ldots, e_n\}$ în $V$ în raport cu care $Q$ are ~~o~~ formă canonică.

Scanned with CamScanner

Dem 1) Dacă $Q(x)=0, \forall x\in V$ (f. canonică)

2) Dacă $Q(x)\neq 0$, putem considera $g_{11}\neq 0$

Într-un reper arb, $G=\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ & g_{ij} & \\ g_{n1} & \dots & g_{nn}\end{pmatrix}={}^tG$

- Dacă $g_{11}=0$.

a) $\exists\, i=\overline{2,n}$ aî $g_{ii}\neq 0$. Renumerotăm indicii (schimbare de reper) $\Rightarrow g_{11}\neq 0$

b) $\forall i=\overline{1,n}$ : $g_{ii}=0$.

$Q(x)\neq 0 \Leftrightarrow G\neq O_n \Rightarrow \exists\, g_{ij}\neq 0, i\neq j$

Fie schimbarea de reper:

$$\begin{cases} y_i = x_i + x_j \\ y_j = x_i - x_j \\ y_l = x_l, \forall l\in\{1,..,n\}\setminus\{i,j\}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i = \frac{1}{2}(y_i+y_j) \\ x_j=\frac{1}{2}(y_i-y_j)\end{cases}$$

$$Q(x)=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}x_ix_j = 2\sum_{i<j} g_{ij}x_ix_j$$

$$2g_{ij}x_ix_j = 2\frac{g_{ij}}{4}(y_i^2-y_j^2) = \underline{\frac{1}{2}g_{ij}}\,y_i^2 - \frac{1}{2}g_{ij}y_j^2$$

coef. nenul

Se aplică cazul a)

Deci $g_{11}\neq 0$.

$1\le m\le n$.

Dem. prin inducție după nr. $m$ al coordonatelor lui $x$ care apar în $Q$, $x=\sum_{i=1}^{n} x_ie_i$

Pasul de verificare: $m=1$.

$Q(x) = g_{11}x_1^2 = a_1x_1^2$ (f. canonică)

Pp. adev. $P_{k-1}$: Dacă $Q$ conține $x_1,..,x_{k-1}$ dintre coordonatele lui $x \Rightarrow \exists$ un reper în $V$ aî $Q$ are o formă canonică

Dem $P_{k-1}\Rightarrow P_k$: Dacă $Q$ conține $x_1,..,x_k$ dintre coordonatele lui $x \Rightarrow \exists$ un reper în $V$ aî $Q$ are o formă canonică.

$$Q(x) = g_{11}x_1^2+2g_{12}x_1x_2+\dots+2g_{1k}x_1x_k + Q'(x)$$

apar $x_2,..,x_k$.

$$=\frac{1}{g_{11}}\left(g_{11}^2x_1^2+2g_{12}g_{11}x_1x_2+\dots+2g_{1k}g_{11}x_1x_k\right)+Q'(x) =$$

$$=\frac{1}{g_{11}}\left(g_{11}x_1+g_{12}x_2+\dots+g_{1k}x_k\right)^2 + Q''(x)$$ ← conține $x_2,..,x_k$

Fie sch. de reper: $\begin{cases} y_1 = g_{11}x_1 + \dots + g_{1k}x_k \\ y_i = x_i, \ \forall i = \overline{2,n} \end{cases}$

$Q(x) = \frac{1}{g_{11}} y_1^2 + Q''(x)$

↳ apar $y_2, \dots, y_k$.

$Q''$ conține $k-1$ coordonate, aplicăm $P_{k-1}$ de inducție $\Rightarrow \exists$ un reper în $V$ a.î. $Q''$ are o formă canonică

$Q''(x) = a_2 z_2^2 + \dots + a_r z_r^2$

$Q(x) = \frac{1}{g_{11}} z_1^2 + a_2 z_2^2 + \dots + a_r z_r^2$, $r = rg\, Q$, $G = \begin{pmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \ 0 \end{pmatrix}$

$z_1 = y_1$; Not $a_1 = \frac{1}{g_{11}}$

<u>Def</u> $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală

$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ <u>formă normală</u>.

$(p, r-p)$ s.n. <u>signatură</u>

$(\underset{\text{nr } ,,+"}{p}, \underset{\text{nr } ,,-"}{r-p})$

<u>Teoremă</u> Fie $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală $\Rightarrow \exists$ un reper $R$ în $V$ a.î. $Q$ are formă normală.

<u>Dem</u> cf. Th. Gauss: $\exists$ un reper în $V$ a.î. $Q$ are o formă canonică: $Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$, $r = rg\,Q$.

Renumerotăm indicii (i.e. schimbăm reperul) a.î.

$a_1, \dots, a_p > 0$; $a_{p+1}, \dots, a_r < 0$.

$Q(x) = (\sqrt{a_1}x_1)^2 + \dots + (\sqrt{a_p}x_p)^2 - (\sqrt{-a_{p+1}}\, x_{p+1})^2 - \dots - (\sqrt{-a_r}\, x_r)^2$

Considerăm sch. de reper:

$\begin{cases} y_i = \sqrt{a_i}\, x_i, & i = \overline{1,p} \\ y_j = \sqrt{-a_j}\, x_j, & j = \overline{p+1,r} \\ y_k = x_k, & k = \overline{r+1,n} \end{cases} \Rightarrow Q(x) = \underbrace{y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2}_{\text{f. normală}}$

$G = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \ \dots \ 1}^{p \text{ ori}} & & & 0 \\ & \underbrace{-1 \ \dots \ -1}_{r-p \text{ ori}} & & \\ 0 & & 0 & \dots \ 0 \end{pmatrix}$

<u>Teorema de inerție Sylvester</u>

Fie $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală. Atunci nr de „+" din forma normală este un invariant la schimbarea de reper ($\Rightarrow$ nr „−" este invar, signatura este inv).

<u>Dem</u>.

dem.

Fie $\mathcal{R}=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în $V$ a.î. $Q$ are formă normală

• $Q(x)=x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_r^2$, $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

Fie $\mathcal{R}'=\{e'_1,\dots,e'_n\}$ reper în $V$ a.î. $Q$ are formă normală

• $Q(x)=x_1'^2+\dots+x_{p'}'^2-x_{p'+1}'^2-\dots-x_r'^2$, $x=\sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$

Fie $U_1=\langle\{e_1,\dots,e_p, e_{r+1},\dots,e_n\}\rangle\subseteq V$ ssp vect, $\dim U_1=p+n-r$

$x\in U_1 \Rightarrow x_{p+1}=\dots=x_r=0$, $Q(x)=x_1^2+\dots+x_p^2$ (1)

Fie $U_2=\langle\{e'_{p'+1},\dots,e'_r\}\rangle\subseteq V$ ssp vect, $\dim U_2=r-p'$

$x\in U_2 \Rightarrow x'_1=\dots=x'_{p'}=x'_{r+1}=\dots=x'_n=0$,

$$Q(x)=-x_{p'+1}'^2-\dots-x_r'^2 \quad (2)$$

$$\dim(U_1+U_2)=\underbrace{\underbrace{\dim U_1}_{p+n-r}+\underbrace{\dim U_2}_{r-p'}}_{n+p-p'}-\dim(U_1\cap U_2)$$

Ip. abs $p>p'$

$\Rightarrow \dim(U_1\cap U_2)\geq 1 \Rightarrow \exists\, x \in U_1\cap U_2,\ x\neq 0_V \Rightarrow$

① $Q(x)\geq 0$. ↯

② $Q(x)<0$

Analog că $p<p'$ nu convine.

Considerăm $\tilde U_1=\langle\{e_{p+1},\dots,e_r\}\rangle$ $\dim \tilde U_1=r-p$.

$x\in\tilde U_1 \Rightarrow Q(x)=-x_{p+1}^2-\dots-x_r^2$ (1') ($x\in \tilde U_1 \Rightarrow x_1=\dots=x_p=x_{r+1}=\dots=x_n=0$)

Considerăm $\tilde U_2=\langle\{e'_1,\dots,e'_{p'}, e'_{r+1},\dots,e'_n\}\rangle$, $\dim\tilde U_2=p'+n-r$.

$x\in\tilde U_2 \Rightarrow Q(x)=x_1'^2+\dots+x_{p'}'^2$ (2') ($x\in\tilde U_2$ : $x'_{p'+1}=\dots=x'_r$)

$$\dim(\tilde U_1+\tilde U_2)=\underbrace{\underbrace{\dim \tilde U_1}_{r-p}+\underbrace{\dim \tilde U_2}_{n+p'-r}}_{n+p'-p}-\dim(\tilde U_1\cap\tilde U_2)$$

Ip. abs. $p'>p \Rightarrow \exists\, x\in\tilde U_1\cap\tilde U_2,\ x\neq 0_V \Rightarrow Q(x)<0$ (1') ↯ $Q(x)\geq 0$ (2')

Deci $p=p' \Rightarrow$ nr. "+" este un invar. ⇒ signatura este inv.
nr. "−" —"—

Exemple

① $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară, $G = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

matricea asociată în rap cu $R_0$.

$G = G^T \Rightarrow g$ simetrică

$Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asociată

$Q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

Aplicăm met. Gauss.

$Q(x) = \underline{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2} + \underline{\underline{x_2^2 - 2x_2x_3}} = (x_1+x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_3^2$

Fie sch de refer: $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

$(2,1)$ signatura; $Q$ nu e p.def.

$\quad$ nr. "+" $\quad$ nr. "−"

OBS $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală este poz def

$\Leftrightarrow Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \Leftrightarrow (n,0)$ signatura.

② $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x) = x_2y_1 + x_1y_2 + 2x_3y_1 + 2x_1y_3 = X^TGY$.

$G = G^T \Rightarrow g$ formă biliniară sim. $\quad G = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$.

Fie sch. de refer: $\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$Q(x) = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) + 2y_3(y_1 + y_2) = \underline{\frac{1}{2}y_1^2 + 2y_1y_3} - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3 =$

$= 2\left(\underline{\frac{1}{4}y_1^2 + y_1y_3}\right) - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3 = 2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)^2 - 2y_3^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3 =$

$= 2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)^2 \underbrace{- \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3 - 2y_3^2}$

$-2\left(\frac{1}{4}y_2^2 - y_2y_3\right) - 2y_3^2$

$-2\left(\frac{1}{2}y_2 - y_3\right)^2 + \cancel{2y_3^2} - \cancel{2y_3^2}$

$Q(x) = 2\underbrace{\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)}_{z_1}^2 - 2\underbrace{\left(\frac{1}{2}y_2 - y_3\right)}_{z_2}^2 = 2z_1^2 - 2z_2^2 = (\underbrace{\sqrt{2}z_1}_{u_1})^2 - (\underbrace{\sqrt{2}z_2}_{u_2})^2$

$z_3 = y_3 \qquad u_3 = z_3$

$Q(x) = u_1^2 - u_2^2 \quad (1,1)$ signatura, nu e p.def.

.choda Jacobi

$Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală. Fie $\mathcal{R} = \{e_1, .., e_n\}$ reper în $V$. Dacă matricea $G$ asociată lui $Q$ în raport cu $\mathcal{R}$ are minorii diagonali $\Delta_1 = |g_{11}|$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}$, ... $\Delta_n = \det(G)$ nenuli, atunci $\exists$ un reper $\mathcal{R}' = \{e_1', .., e_n'\}$ în $V$ ai $Q$ are formă canonică

$$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i' e_i'$$

$$G = \begin{pmatrix} \boxed{g_{11}} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \dots & g_{2n} \\ \vdots & & & \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}$$

OBS a) Met. Jacobi este restrictivă ( $\Delta_1 \neq 0, \dots \Delta_n \neq 0$ )

b) Met Gauss se poate aplica întotdeauna.

Exemplu $Q: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = x_1^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_3 x_4$

$\Delta_1 = 1$ ; $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}.$$

$$\det G = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16}$$

$\frac{1}{\Delta_1} = 1$; $\frac{\Delta_1}{\Delta_2} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$; $\frac{\Delta_2}{\Delta_3} = \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} = 1$ ; $\frac{\Delta_3}{\Delta_4} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{16}} = -4$

$\exists$ un reper $\mathcal{R}'$ în $\mathbb{R}^4$ ai $Q(x) = x_1'^2 - 4x_2'^2 + x_3'^2 - 4x_4'^2$

$\{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$

$\mathcal{R}'' = \{e_1', e_3', e_2', e_4'\}$ $\quad Q(x) = x_1''^2 + x_2''^2 - 4x_3''^2 - 4x_4''^2$

$(2,2)$ signatura, nu e pz. def.

# Tema 4

① Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfism, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} = [f]_{R_0, R_0}$

Să se arate că $f$ este diagonalizabil.

② Fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$

a) Să se det. forma polară asociată; Ker g.
Este g nedegenerată?

b) Să se aducă Q la o formă canonică utilizând metoda Gauss, metoda Jacobi, respectiv metoda valorilor proprii.

③ $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} x_i x_j$

Să se aducă la o formă canonică, utilizând metodele de la ex 2 /b)