CURS 1 SERIA 14 ①

REGULI DE SCRIERE A DEMONSTRAȚIILOR

① NU DEMONSTRĂM DECÂT ADEVĂR! (a.î. cei „instrumentele de care dispunem ne permit doar să pornim de la niște afirmații (pe care le interpretăm ca fiind „adevărate") și să ajungem, în acord cu anumite reguli, la alte afirmații (pe care le vom interpreta ca fiind adevărate)

MORALA: Ca să demonstrăm că o afirmație p e falsă, demonstrez de fapt (că e adevărată) ⌉p.

2

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\vdash \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \wedge \neg q) \equiv$

$\neg p \vee (\neg(\neg q)) \equiv$

$\neg p \vee q \overset{def}{\equiv} p \Rightarrow q$

$P(x): x \in \mathbb{Z} \quad 3x+4=10$

$Q(x,y): x \in \mathbb{R} \; y \in \mathbb{R} \quad 2x+5y>19$

„există valoare $x \in \mathbb{Z}$ pt care $3x+4=10$”

se notează $(\exists x)P(x)$ (dacă $\exists x \in \mathbb{Z} \; 3x+4=10$)

e prop!

„pt orice valoare $x \in \mathbb{Z}$ $3x+4=10$" (3)

e prop.

se notează $(\forall x)P(x)$ sau $\forall x \in \mathbb{Z}\ 3x+4=10$

$\neg((\exists x)P(x))$ e echivalent cu

$(\forall x)\neg P(x)$

$\neg((\forall x)P(x))$ e echivalent cu

$(\exists x)\neg P(x)$

~~ex~~ • Dacă într-un enunț apar mai multe variabile cuantificate, el se neagă aplicând regulile anterioare în mod iterat.

ex: $\neg(\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{Q}\ \boxed{x = 5y-1})$

e echivalent cu

$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{Q}\ x \neq 5y-1$

② În scrierea demonstrațiilor (4) trebuie mers cu implicații argumentate de la CE ȘTIM la CE VREM SĂ DEMONSTRĂM

ex: $\forall x \in \mathbb{R}, \; x^4 + 94 > 16x^2$

dem: Fie $x \in \mathbb{R}$

Atunci $(x^2-8)^2 \geq 0 \Rightarrow$

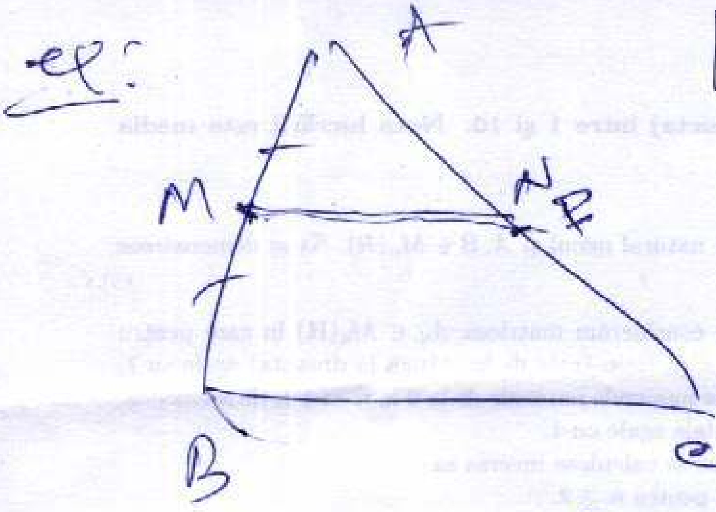
$x^4 - 16x^2 + 64 \geq 0 \Rightarrow$

$$\boxed{x^4 + 94 > x^4 + 64 \geq 16x^2}$$

APARENTĂ excepție: Metoda reducerii la absurd

(ea se aplică așa: presupunem că e falsă concluzia și, pe baza unui raționament corect, ajungem să aflăm că e falsă ipoteza (sau la contradicție cu un fapt matematic cunoscut).)

ex:



$[AM] \equiv [MB]$

$MN \parallel BC$

$[AN] \equiv [NC]$

p

dem: Presupunem prin absurd că $[AN] \not\equiv [NC]$.

Notăm cu P mijlocul lui $[AC]$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Evident, } N \neq P \Rightarrow MN \neq MP \\ \text{cf T. liniei mijlocii, } MP \parallel BC \\ \underset{p}{\Longrightarrow}\ MN \parallel BC \end{array}\right\} \text{contradicție cu Postulatul lui Euclid}$$

Rămâne, deci, că $[AN] \equiv [NC]$.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \neg q \Rightarrow \neg p & p \Rightarrow q \\ \equiv & \equiv \\ \neg(\neg q) \vee \neg p & \neg p \vee q \\ \equiv & \\ q \vee \neg p \equiv \neg p \vee q & \end{array} \right.$$

(3) Dacă avem de ~~arătat~~ demonstrat o prop. de forma

$(\exists x)\, P(x)$, considerăm o valoare (adevărată!) CONVENABILĂ („considerăm"/„fie") pt x și facem demonstrația cu ea

ex: $\exists x \in \mathbb{Q} \quad x^2+209=30x$

dem: fie $x=11$.

Evident, $x=\frac{11}{1}\in\mathbb{Q}$.

Atunci $x^2+209=11^2+209=330=30\cdot 11=30x$

ex: $\exists x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R} \quad 5x+4y>17$

dem: fie $x=5$

fie $y=5$

Atunci $\boxed{5x+4y=5\cdot 5+4\cdot 5=45>17}$

(7)

(4) Dacă avem de demonstrat o prop de forma $(\forall x)P(x)$, considerăm o valoare cadină x(aΓ) ARBITRARĂ („fixe") pt x şi facem demonstraţia pe baza proprietăţilor generali ai variabilelor de tipul lui x.

Ionescu Valeria-Maria

Grupa 106

5

Se vede?

CURS 2 ALG seria 14 (1)

Pare în regulă.
Acum mai vă uitați? Nu!

Continuăm/finalizăm ordinea de idei de data trecută.

$x \in \mathbb{R}$ $y \in \mathbb{R}$ $3x+4y=5$

• puneți toate cuantificatorii posibile de cuantificatori, „ghiciți" dacă prop. obținute sunt adevărate sau false, demonstrați!

I $\underline{\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R},\ 3x+4y=5}$ (A)

<u>dem</u>: Luăm $x = \frac{5}{3}$, $y=0$.
Atunci $3x+4y = 3\cdot\frac{5}{3}+4\cdot 0 = 5$ $\square$

~~$\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ 3x+4y=5$ (A)~~

(3) $x := \frac{5-4y}{3}$;

real(y) ;

pare cea mai ușoară [illegible]

Încercăm și noi :

$\exists x\in\mathbb{R}\ \forall y\in\mathbb{R}\ 3x+4y=5$ (F)

Corectă !

~~$\forall y\in\mathbb{R}$~~ $\exists y\in\mathbb{R}\ 3x+4y\neq 5$

dem Fie $x\in\mathbb{R}$

luăm $y=-\frac{3x}{4}$.

Atunci $3x+4y = 3x+4\cdot\left(-\frac{3x}{4}\right)=0\neq 5$.

(5) Dacă într-un enunț ce trebuie demonstrat apar mai multe variabile cuantificate, ele vor fi abordate

în demonstrație ÎN ORDINEA ÎN CARE APAR ÎN ENUNȚ. 3

(6) Alegerea în demonstrații a valorilor pe care le atribuim variabilelor cuantificate „$\exists$" se poate face NUMAI în funcție de acele variabile care LE PRECED ÎN ENUNȚ.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ 3x+4y=5$ (A)

dem: Fie $x \in \mathbb{R}$

Luăm $y = \frac{5-3x}{4}$.

Atunci $3x+4y = 3x+4 \cdot \frac{5-3x}{4} = 5$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ 3x+4y=5$ (F)

dem: Luăm $x=0, y=0$.

Atunci $3x+4y = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0 \neq 5$.

$M = \{A : A \notin A\}$ ← mulțime

$M \in M \Rightarrow M$ nu verifică cond $\Rightarrow M \notin M$

$M \notin M \Rightarrow M$ verifică cond $\Rightarrow M \in M$

$\{1, 7\} + \{10, 20, 30\} = \{11, 21, 31, 17, 27, 37\}$

$\{1, 7\} + \{30, 20, 10\}$

$\{1, 2, 3\} + \mathbb{N} = \mathbb{N}^*$ $\quad (2\mathbb{N}+1) \cap (3\mathbb{N}+2) = 6\mathbb{N}+5$

dem. „$\subset$" Fie $x \in \{1, 2, 3\} + \mathbb{N} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists a \in \{1, 2, 3\}\ \exists b \in \mathbb{N}\ \ x = a + b \quad (1)$

$a \in \{1, 2, 3\} \Rightarrow a \in \mathbb{N} \wedge a \geq 1 \overset{b \in \mathbb{N}}{\Longrightarrow}$

$a + b \in \mathbb{N} \wedge a + b \geq 1 \overset{(1)}{\Rightarrow} x \in \mathbb{N}^*$

„$\supset$" Fie $x \in \mathbb{N}^*$. Atunci $x - 1 \in \mathbb{N}$, și

$x = 1 + (x - 1) \in \{1, 2, 3\} + \mathbb{N}$. □

Determinați $A = \{x \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{R}\ x = \frac{a+5}{a^2 - a + 1}\}$

dem: Fie $x \in A \Leftrightarrow$

$\exists a \in \mathbb{R}\ \ x = \frac{a+5}{a^2 - a + 1} \overset{a^2 - a + 1 \neq 0\ \forall a \in \mathbb{R}}{\Longleftrightarrow}$

$\exists a \in \mathbb{R}\ \ (a^2 - a + 1)x = a + 5 \Leftrightarrow$

$\exists a \in \mathbb{R} \quad xa^2 - (x+1)a + x - 5 = 0 \iff$ (5)

$\cancel{x=0 \land \exists}\ (\exists a \in \mathbb{R} \quad x = 0 \land a = -5) \lor$

$\cancel{\exists a \in \mathbb{R}}\ \ x \neq 0 \land (x+1)^2 - 4x(x-5) \geq 0 \iff$

$x = 0 \lor (x \neq 0 \land 3x^2 - 22x - 1 \leq 0) \iff$

$x = 0 \lor \left(x \neq 0 \land x \in \left[\frac{11-2\sqrt{31}}{3}, \frac{11+2\sqrt{31}}{3}\right]\right) \iff$

$x \in \left[\frac{11-2\sqrt{31}}{3}, \frac{11+2\sqrt{31}}{3}\right]$

$A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$

Fie E o mulțime cu $A, B \subset E$.
Fie $x \in E$.

~~Atunci~~ $x \in A \setminus (A \setminus B) \iff x \in A \land \neg(x \in A \setminus B)$

$\iff \underbrace{x \in A}_{p} \land \neg(x \in A \land \underbrace{x \notin B}_{\neg q}) \iff (1)$

p	q	$\neg q$	$p \land \neg q$	$\neg(p \land \neg q)$	$\overbrace{p \land \neg(p \land \neg q)}^{r}$	$\overbrace{p \land q}^{n}$	$r \iff n$
0	0	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1	1	1

Conform tabelei, $(p \land \neg(p \land \neg q)) \iff p \land q$ e tautologie, deci

$(1) \iff x \in A \land x \in B \iff x \in A \cap B$

SVD ? + ONEA RADU ANDREI 143

CURS 3 ALGEBRĂ S14 (1)

două demonstrații care ilustrează aplicarea principiilor de inducție formulate în T14 și T15 din cursul 2:

I ~~Arătați~~ că suma măsurilor unghiurilor oricărui poligon convex cu n laturi este $(n-2)\pi$.

dem. Notăm $P(n)$: suma măsurilor unghiurilor oricărui poligon convex cu n laturi e $(n-2)\cdot\pi$.

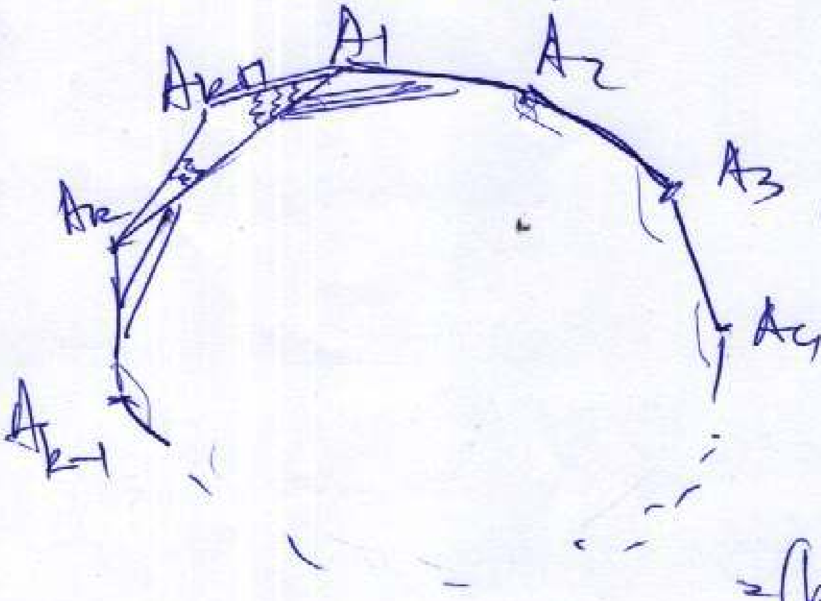
Se știe că suma măsurilor unghiurilor oricărui triunghi e π, deci $P(3)$ e adevărată.

Fie $k \geq 3$. Presupunem că ~~P(3), P(4)~~, ..., $P(k)$ ~~sunt toate~~ e adevărată $\Rightarrow$

orice poligon convex are k laturi are suma măsurilor $(k-2)\cdot\pi$.

Fie $A_1A_2\ldots A_{k+1}$ un poligon convex ~~pt care suma~~ cu $k+1$ laturi. (2)

(vom nota pt fiecare poligon convex Π suma măsurilor unghiurilor sale cu $S(\Pi)$).



Atunci:

$\boxed{S(A_1A_2\ldots A_{k+1})}=$

$=\boxed{S(A_1A_2\ldots A_k)}+$

$S(A_1A_kA_{k+1})=$

$=(k-2)\cdot\pi+\pi=((k+1)-2)\cdot\pi$

$\Rightarrow P(k+1)$ e adevărată.

[Cf principiului inducției matematice $P(n)$ e adevărată pt orice $n\geq 3$]

II Considerăm șirul $(x_n)_n$ definit prin: $x_1=5$, $x_2=35$ și

$x_n=6x_{n-1}+7x_{n-2}$ $\forall n\geq 3$.

Arătați că $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*}$ $x_n=5\cdot 7^{n-1}$

Dem: Notam $P(n)$: $x_n = 5\cdot 7^{n-1}$ (3)

din l_1, $x_1 = 5 = 5\cdot 7^0 = 5\cdot 7^{1-1} \Rightarrow P(1)$ e adev.

Fie $k \geq 1$. Presupunem că $P(1), P(2), \ldots,$ $P(k)$ sunt adevărate.

Atunci: Dacă $k \geq 2$, $x_{k+1} = 6x_k + 7x_{k-1} =$

$6\cdot 5\cdot 7^{k-1} + 7\cdot 5\cdot 7^{k-2} = 5\cdot 7^{k-1}(6+1) =$

$= 5\cdot 7^{(k+1)-1} \Rightarrow P(k+1)$ e adevărată.

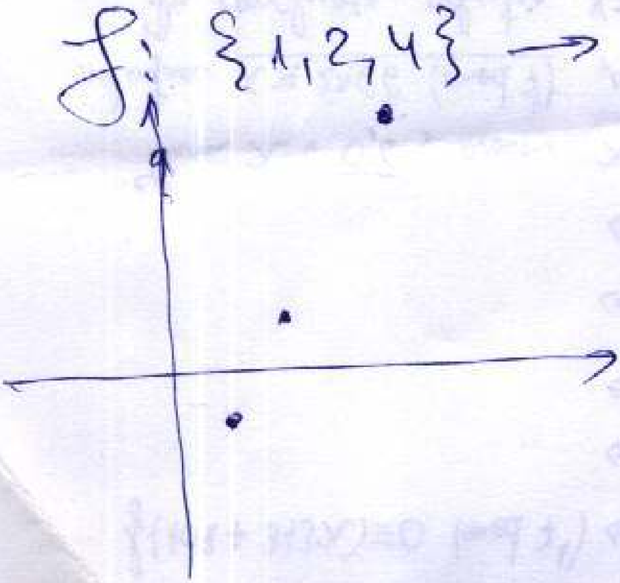
Dacă $k = 1$,

$x_{k+1} = x_2 = 35 = 5\cdot 7 = 5\cdot 7^{2-1} = 5\cdot 7^{k-1} \Rightarrow$

$P(k+1)$ e adevărată,

[PASTE],

$f: \{1,2,4\} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = 2n-3$

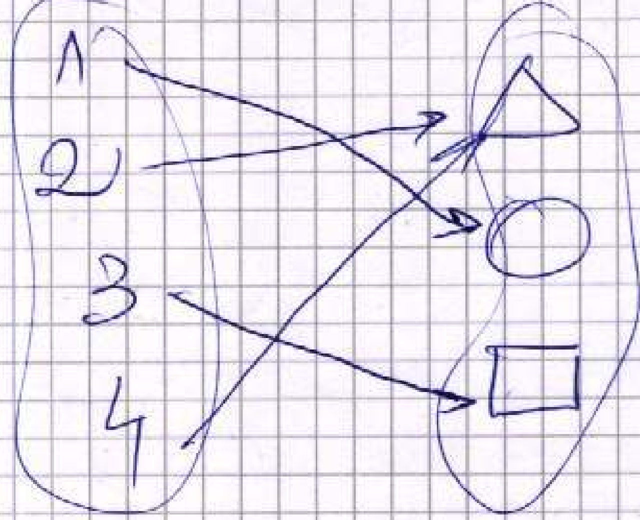


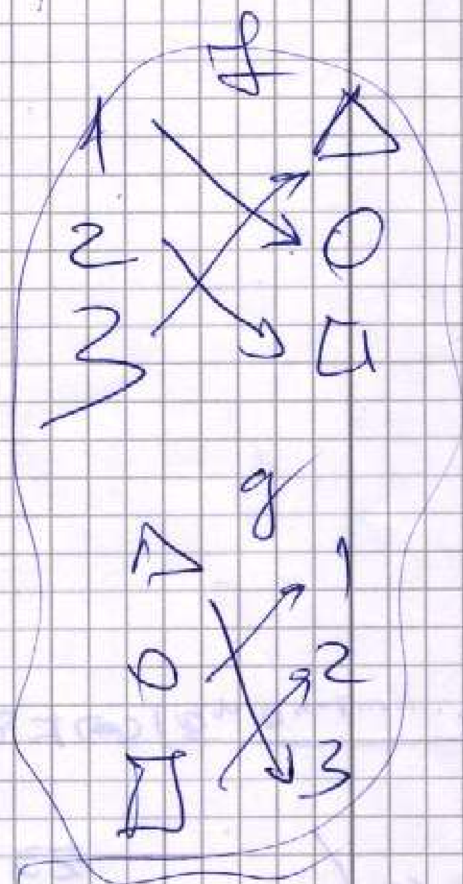
$\boxed{G_f = \{(1,-1), (2,1), (4,5)\}} =$

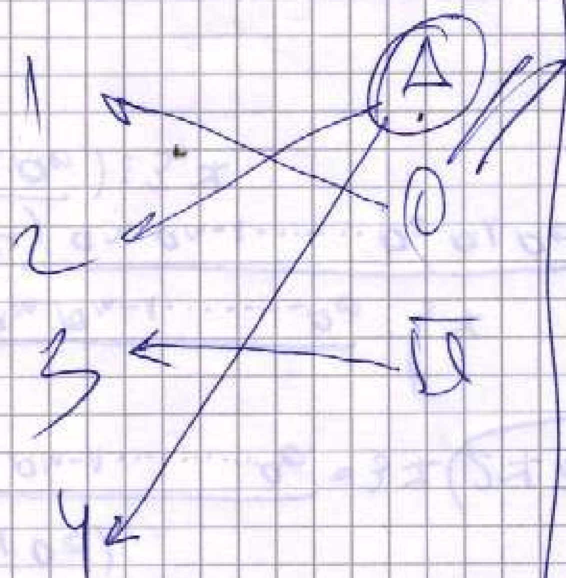
$= \{(a, f(a)) : a \in \{1,2,4\}\}$

$\boxed{G_f = \{(a, f(a)) : a \text{ ed} \text{om } f\}}$

4





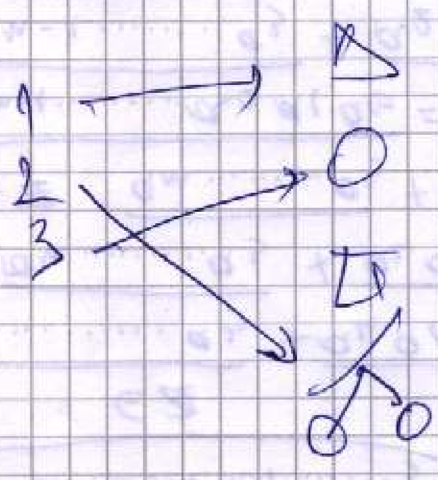


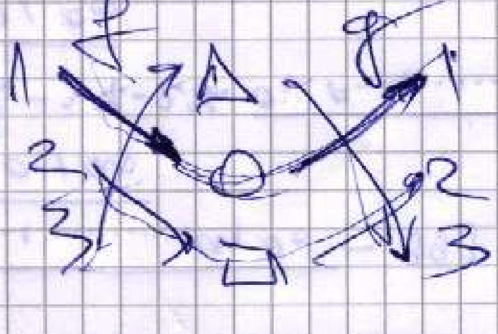
$1 \xrightarrow{f} \circ \xrightarrow{g} 1$

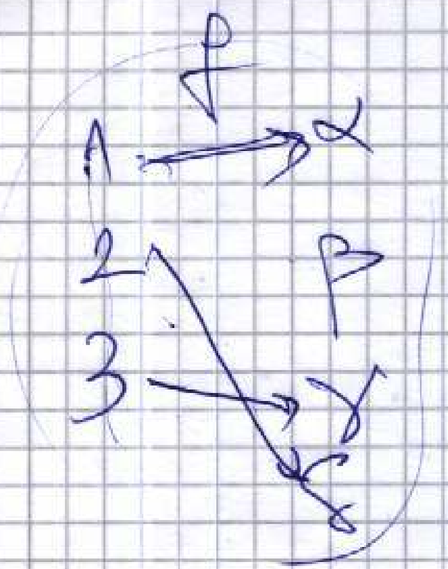
$2 \xrightarrow{f} \square \xrightarrow{g} 2$

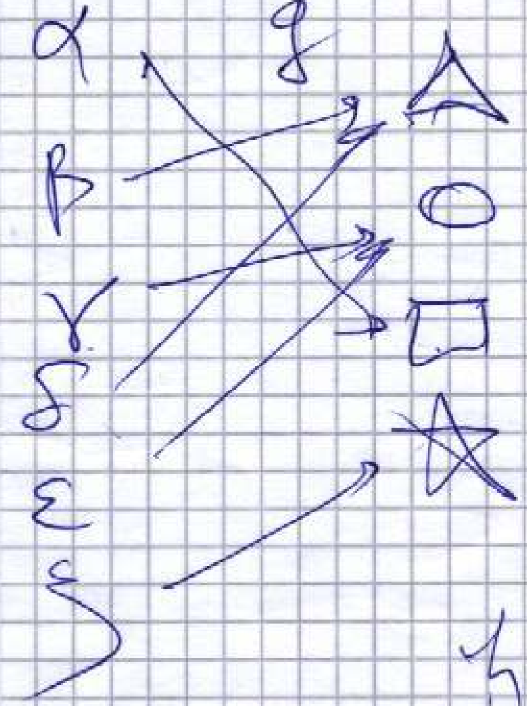
$g(f(1)) = 1$

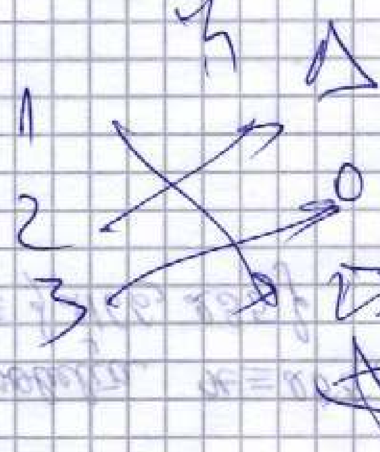
$\boxed{g(f(a)) = a} \quad \forall a \in \{1, 2, 3\}$









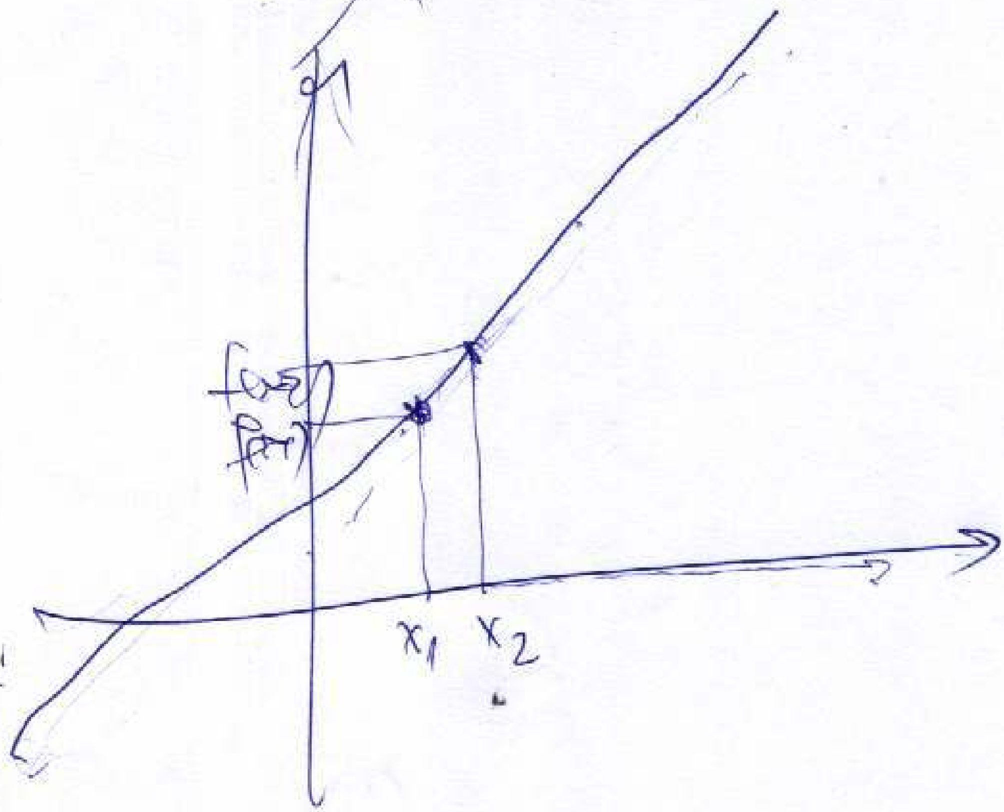


$h(1) = g(f(1))$

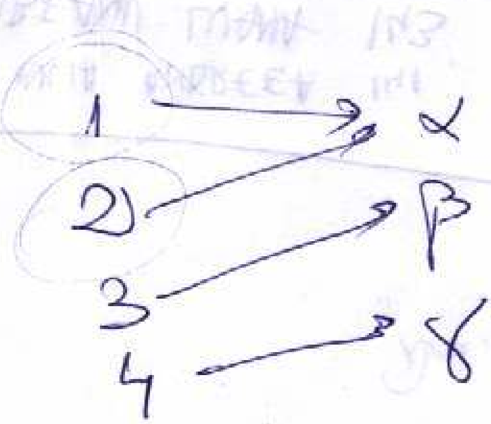
$h(2) = g(f(2))$

$h(3) = g(f(3))$

$$\boxed{\begin{array}{l} A \xrightarrow{f} B \subset C \xrightarrow{g} D \\ g \circ f : A \to D \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)) \end{array}}$$

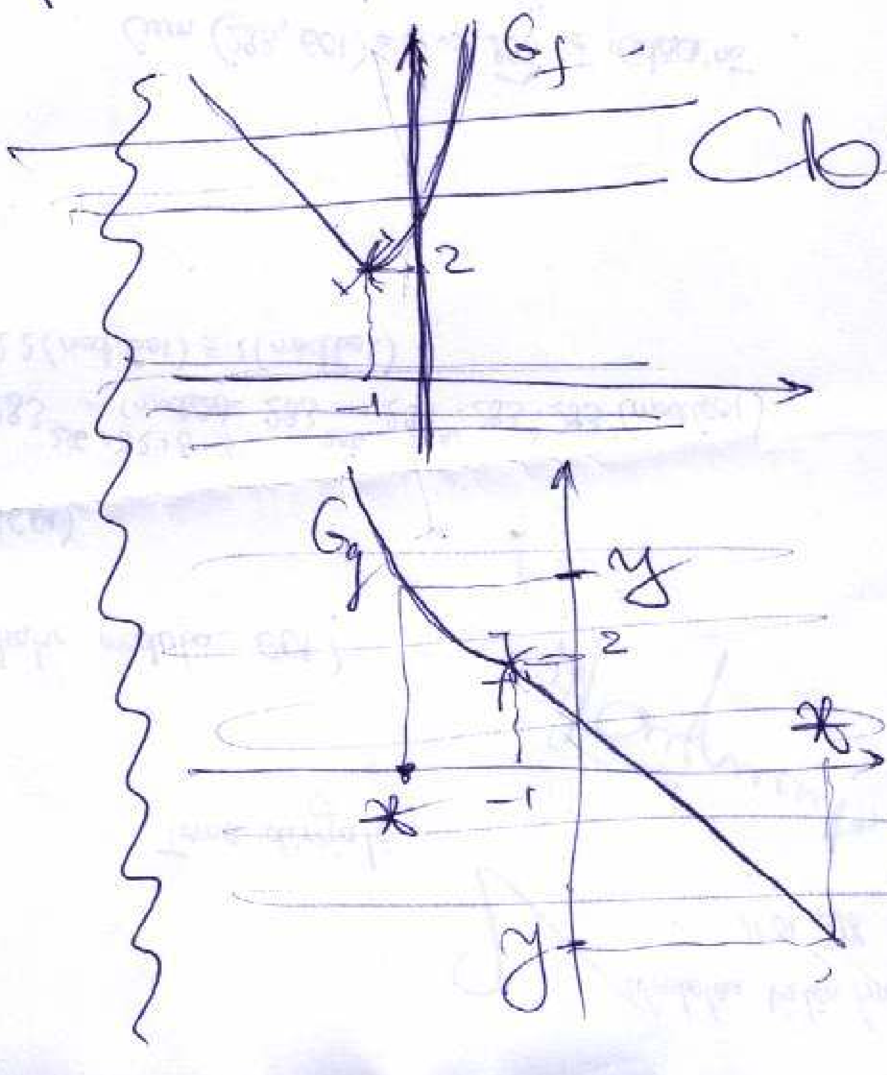

f(x2)
f(x1)
x1
x2

CURS 4 ALGEBRĂ S14

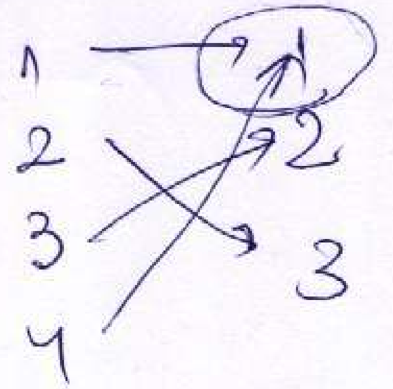


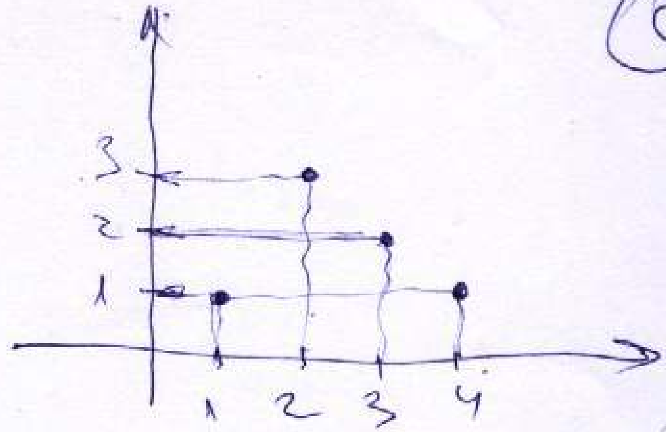
$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+3, & x > -1 \\ 1 - x, & x \le -1 \end{cases}$

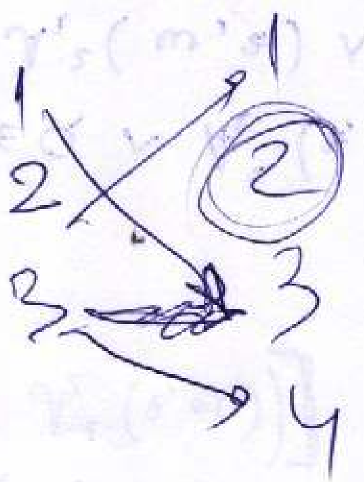
$g(x) = \begin{cases} x^2+2x+3, & x \le -1 \\ 1 - x, & x > -1 \end{cases}$

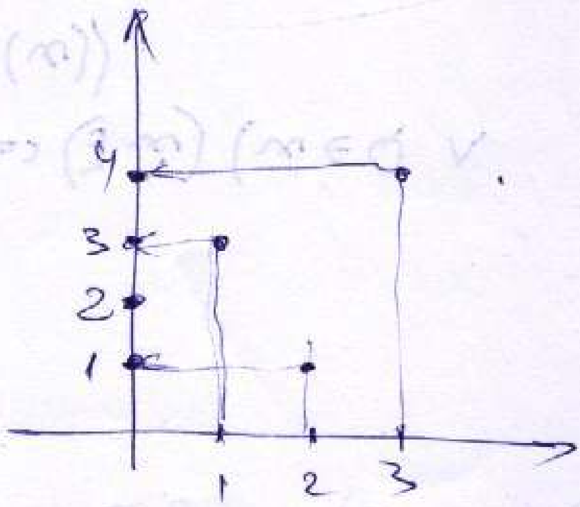


CIORNĂ









f nu e injectivă: $\left\{ \exists\, x_{1,2} \in dom f,\ x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2) \right.$

dem: Luăm $x_1 = -5$, $x_2 = 1$.

Evident, $x_1 \neq x_2$.

$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = f(-5) = 1-(-5) = 6 \\ f(x_2) = f(1) = 1^2+2\cdot 1+3 = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. □

f nu e surjectivă:

dem: Iau $y = 0$. Fie $x \in \mathbb{R}$

Dacă $x \leq -1$, $f(x) = 1 - x \geq 2 > 0 = y \Rightarrow f(x) \neq y$

Dacă $x > -1$,

$f(x) = \boxed{x^2 + 2x + 3} = \underbrace{(x+1)^2}_{\geq 0} + 2 > 2 > 0 = y$

$\Rightarrow f(x) \neq y$

$\underline{g \text{ e injectivă}}$: $\left\{ \forall x_{1,2} \in \mathbb{R} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \right.$

dem: Fie $x_{1,2} \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$

pentru a fixa ideile, ~~presupunem~~ considerăm că $x_1 < x_2$

I Dacă $x_1 < x_2 \leq -1$,

atunci $x_1 + 1 < x_2 + 1 \leq 0 \Rightarrow$

$-(x_1+1) > -(x_2+1) \geq 0 \Rightarrow$

$(x_1+1)^2 > (x_2+1)^2 \Rightarrow$

$g(x_1) = (x_1+1)^2 + 2 > (x_2+1)^2 + 2 = g(x_2) \Rightarrow$

$g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$.

II Dacă $x_1 \leq -1 < x_2$,

atunci $g(x_1) = x_1^2 + 2x_1 + 3 = (x_1+1)^2 + 2 \geq 2$

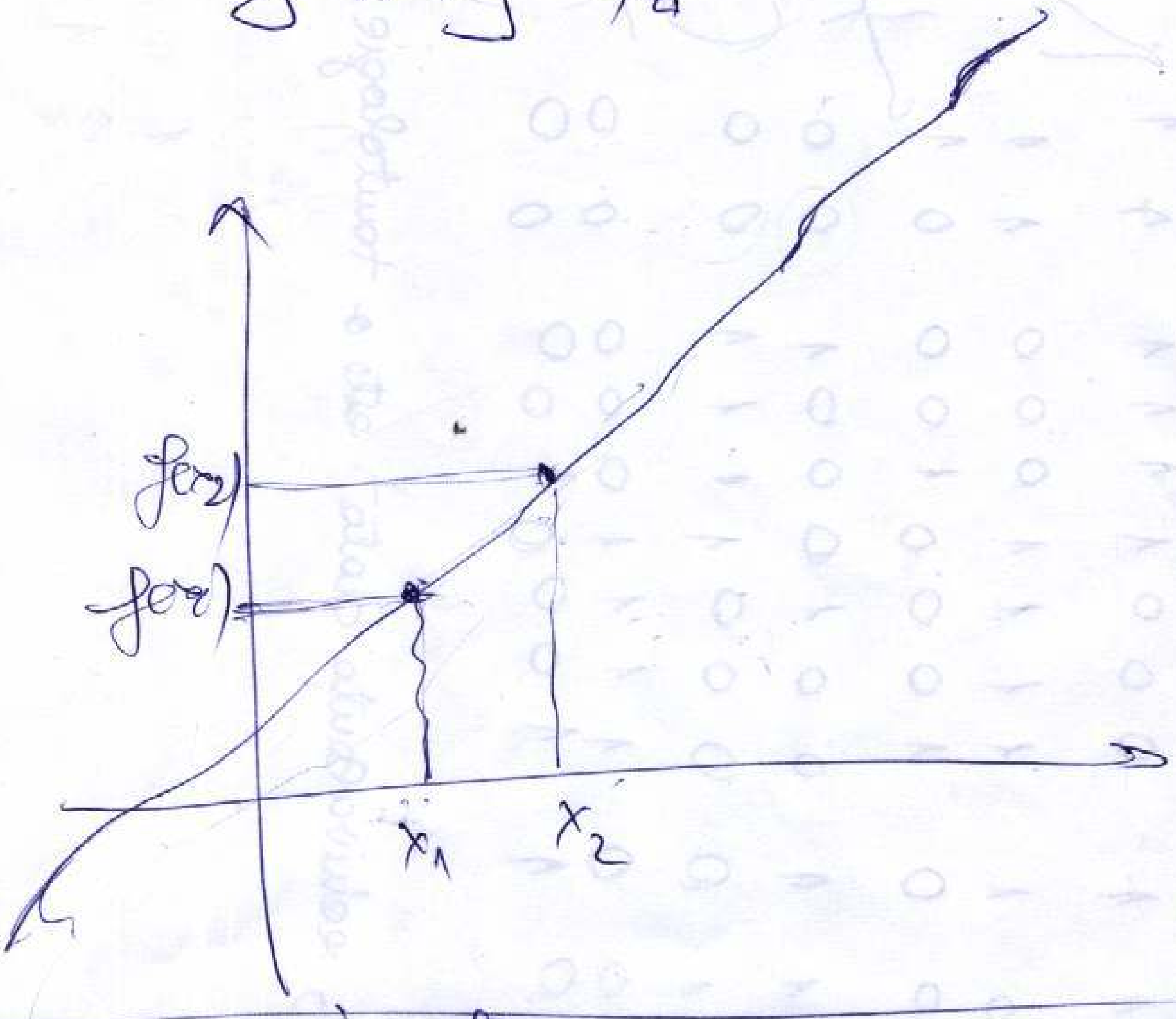
$g(x_2) = 1 - x_2 < 1 + 1 = 2$

$g(x_1) > g(x_2) \Rightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$

III) Dacă $-1 < x_1 < x_2$,

atunci $g(x_1) = 1 - x_1 > 1 - x_2 = g(x_2) \Rightarrow$

$g(x_1) \neq g(x_2)$.



g e surjectivă $\left\{ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R} \quad g(x) = y. \right.$

Dem: Fie $y \in \mathbb{R}$.

Dacă $y < 2$, luăm $x = 1 - y > -1$.

Atunci $g(x) = 1 - x = 1 - (1 - y) = y$

5

Dacă $y \geq 2$, luăm $x = -1 - \sqrt{y-2}$ (are sens, căci $y-2 \geq 0$)

$y \geq 2 \Rightarrow \sqrt{y-2} \geq 0 \Rightarrow -\sqrt{y-2} \leq 0 \Rightarrow$

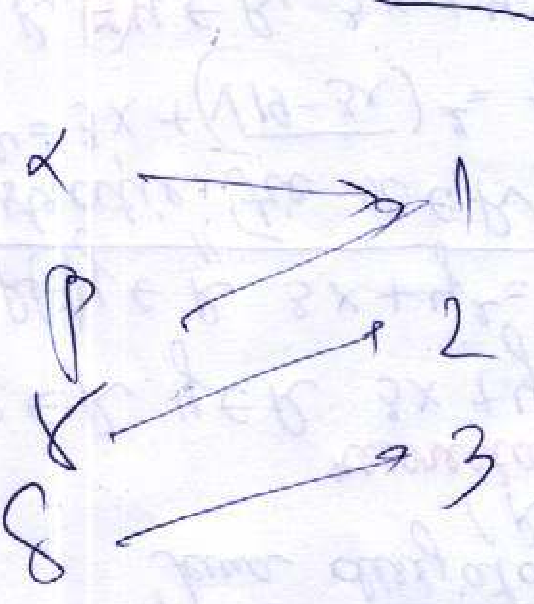
$x = -1 - \sqrt{y-2} \leq -1$,

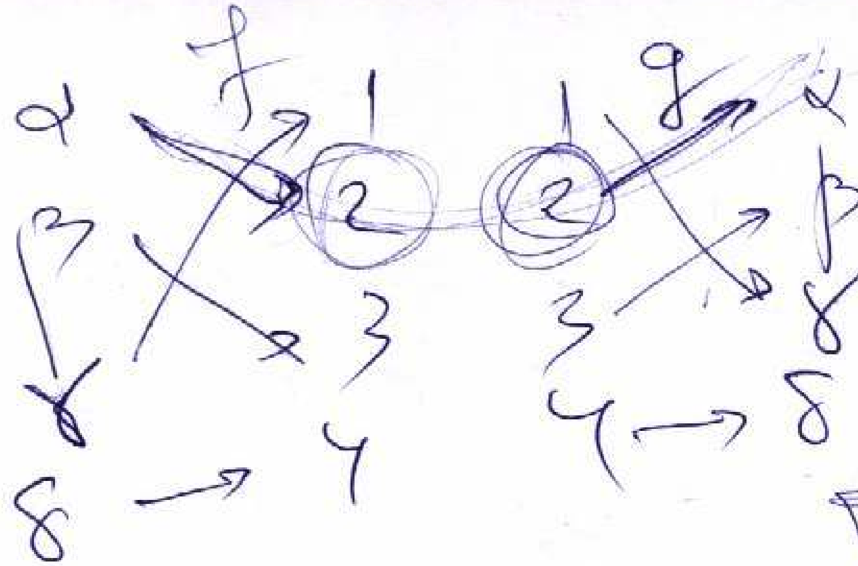
deci $f(x) = x^2+2x+3 =$

$(-1-\sqrt{y-2})^2 + 2(-1-\sqrt{y-2}) + 3 =$

$= \cancel{1} + \cancel{2\sqrt{y-2}} + y \cancel{-2} \cancel{-2} - \cancel{2\sqrt{y-2}} + \cancel{3} = y$ □

$$\begin{aligned} & x^2+2x+3 = y \Leftrightarrow \\ & (x+1)^2+2 = y \Leftrightarrow \\ & (x+1)^2 = y-2 \end{aligned}$$





$g(f(\alpha)) = \alpha$

$g(f(\beta)) = \beta$

$\boxed{g(f(x)) = x}$

$f(g(t)) = t$

---

* Care e inversa lui g?

Sol: fie $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(t) = \begin{cases} 1 - t, & t < 2 \\ 1 - \sqrt{t-2}, & t \geq 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g(h(t)) = t \\ 1 - h(t) = t \\ h(t)^2 + 2h(t) + 3 = t \end{cases}$$

(A)

$h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$(h \circ g)(x) = h(g(x)) =$

$= \begin{cases} 1 - g(x), & g(x) < 2 \\ -1 - \sqrt{g(x) - 2}, & g(x) \geq 2 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 1 - (x^2 + 2x + 3), & \begin{cases} x^2 + 2x + 3 < 2 \iff (x+1)^2 < 0 \\ x \leq -1 \end{cases} \quad \Downarrow \ x \in \emptyset \\ 1 - (1 - x), & \begin{cases} 1 - x < 2 \iff x > -1 \\ x > -1 \end{cases} \\ -1 - \sqrt{x^2 + 2x + 3 - 2}, & \begin{cases} x^2 + 2x + 3 \geq 2 \iff (x+1)^2 \geq 0 \\ x \leq -1 \end{cases} \quad \Downarrow \ x \in \mathbb{R} \\ -1 - \sqrt{1 - x - 2} & \begin{cases} 1 - x \geq 2 \iff x \leq -1 \\ x > -1 \end{cases} \end{cases}$

$= \begin{cases} x, & x > -1 \\ \cancel{-1 - \sqrt{(x+1)^2}, \ x \leq -1} \\ -1 - \sqrt{(x+1)^2}, & x \leq -1 \end{cases} = \begin{cases} x, & x > -1 \\ -1 - |x+1|, & x \leq -1 \end{cases} =$

$= \begin{cases} x, & x > -1 \\ -1 - (-x-1), & x \leq -1 \end{cases} = x,$

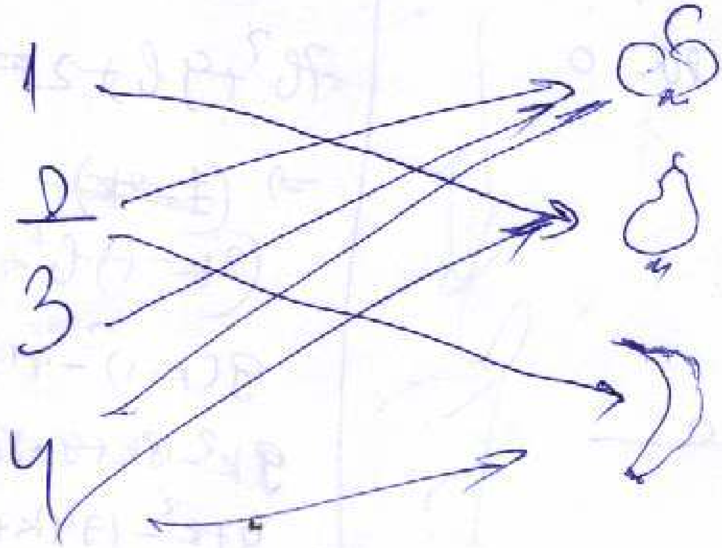
(B)

Deci, $h \circ g = id_{\mathbb{R}}$

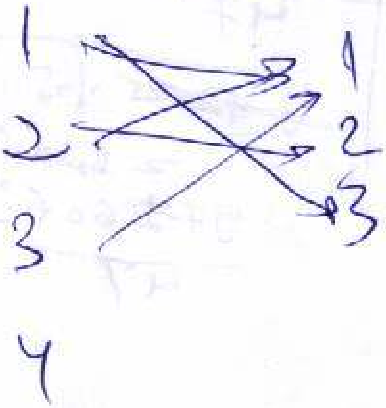
Analog (Similar) $g \circ h = id_{\mathbb{R}}$

Deci, $h = g^{-1}$.

CURS 5 ALGEBRĂ S14

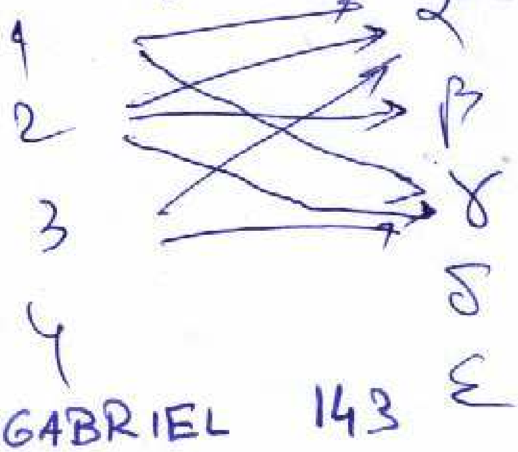


K

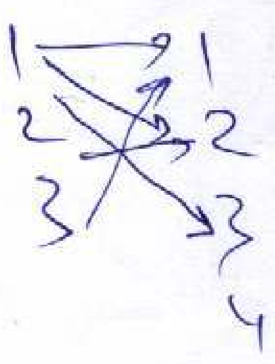


L

L∘K



k^{-1}



BĂEȘU RAREȘ-GABRIEL 143

GUȚĂ RĂZVAN-ALEXANDRU-GRUPA 141

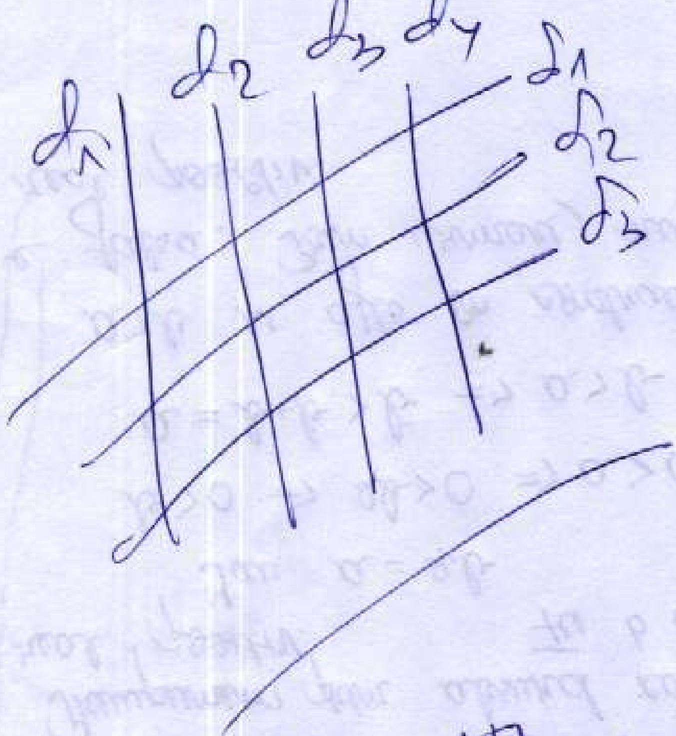
STRÎMBEANU LUANA 143

ADAM ADRIAN-CLAUDIU 142

a, b sunt drepte în plan.

D = mulțimea dreptelor din plan

$\parallel$ = rel. de paralelism pe D



~~$(d_1, d_2) \in \parallel$~~ $d_1 \parallel d_2$

$(\delta_3, \delta_1) \in \parallel$

ρ e tranzitivă

$\Updownarrow$

ρ^{-1} e tranzitivă

Fie $a, b, c \in M$ a.î. $a\rho^{-1}b$ și $b\rho^{-1}c$.

Atunci $b\rho a$ și $c\rho b$.

Cum ρ e tranzitivă, obținem $c\rho a$,

deci $a\rho^{-1}c$

pe $\{1,2,3,4,5\} \overset{not}{=} M$

$\rho = \{(1,2), (3,5)\}$.

③

Închiderea reflexivă a lui ρ e

$\{(1,2),(3,5),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$

$(= \rho \cup \Delta_M)$

Închiderea simetrică a lui ρ

~~este~~: $\{(1,2),(2,1),(3,5),(5,3)\}$.

Închiderea tranz. a lui ρ', ~~este:~~

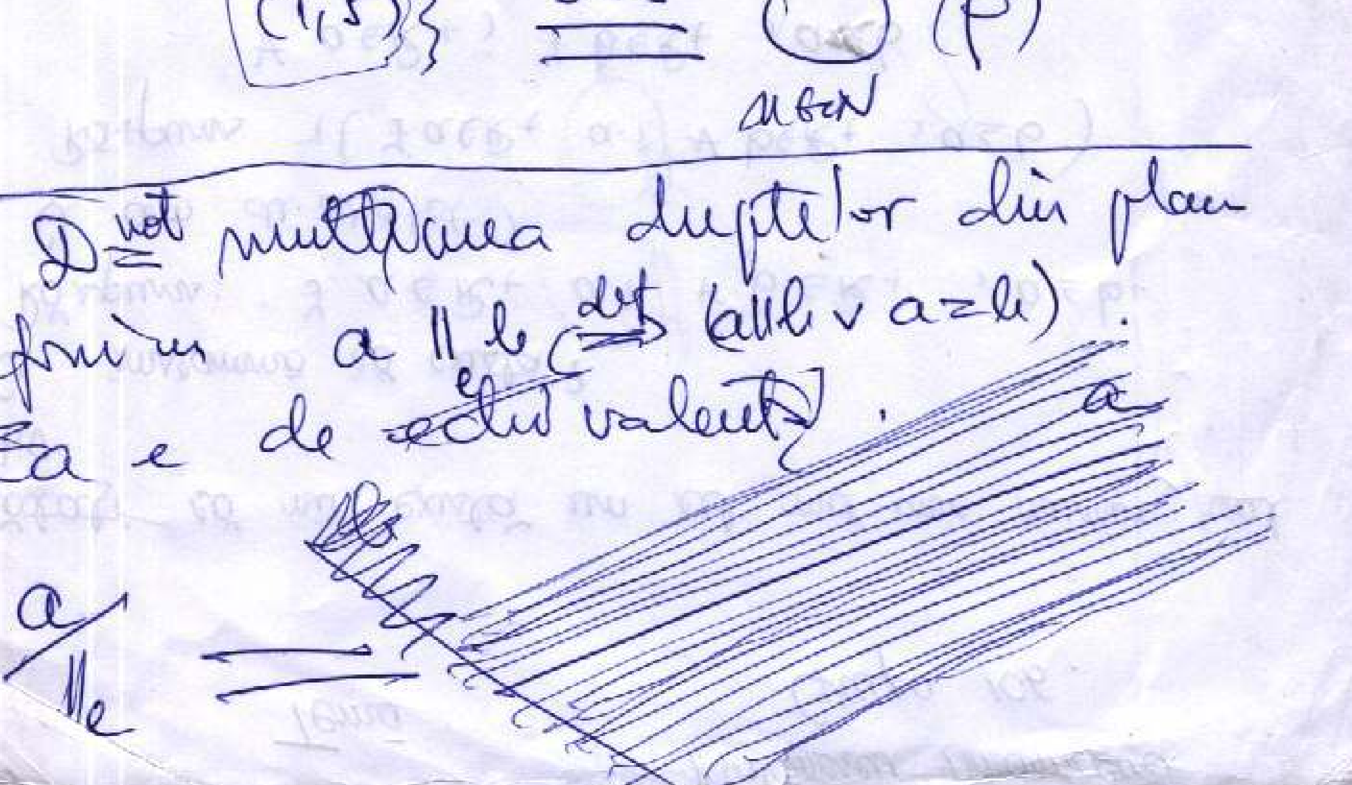
~~$\{(1,2),(3,5)\}$~~ pt $\rho' = \{(1,2),(2,3),(3,5)\}$

este: $\{(1,2),(2,3),(3,5),$
$\boxed{(1,3),(2,5)},$
$\boxed{(1,5)}\} \overset{def}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\rho')^n$

Pe $D \overset{not}{=}$ mulțimea dreptelor din plan

definim $a \parallel_e b \overset{def}{\Longleftrightarrow} (a \parallel b \vee a = b)$.

Ea e de echivalență.



note: $\mathbb{Z}$

$\boxed{n=3}$ $x \rho_n y \overset{def}{\iff} n \mid x-y$

$$\hat{0} \left(= \frac{0}{\rho_3}\right) = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\} = 3\mathbb{Z}$$

$$\hat{1} = \frac{1}{\rho_3} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\} = 3\mathbb{Z}+1$$

$$\frac{2}{\rho_3} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, 11, \ldots\} = 3\mathbb{Z}+2$$

Deci, $\frac{\mathbb{Z}}{\rho_3} = \{3\mathbb{Z}, 3\mathbb{Z}+1, 3\mathbb{Z}+2\}$
$= \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$

Mai general,

$$\frac{\mathbb{Z}}{\rho_n} = \{\hat{0}, \hat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\} \overset{not}{=} \mathbb{Z}_n$$

5

μ $M = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$

$a \rho b \Longleftrightarrow a - b \,\vdots\, 3$

$\frac{-4}{\rho} = \{-4, -1, 2\}$

$\frac{-3}{\rho} = \{-3, 0\}$

$\frac{-2}{\rho} = \{-2, 1\}$

$\frac{M}{\rho} = \{\{-4, -1, 2\}, \{-3, 0\}, \{-2, 1\}\}$,

S.C.I.R: • $\{-4, 0, 1\}$ | $\frac{M}{\rho} = \{\hat{-4}, \hat{0}, \hat{1}\}$.

• $\{-4, 0, -2\}$

• $\{2, -3, 1\}$

$f : \mathbb{Z}_3 \to \mathbb{Z}_7 \quad f(\hat{a}) = 2a + 5$

$f(\hat{0}) = 2 \cdot 0 + 5 = 5$

$\parallel$

$f(\hat{12}) = 2 \cdot 12 + 5 = 29$

(16)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"'] & \frac{A}{\rho} \arrow[dl, dashed, "u"] \\ B & \end{tikzcd}$$

$f = u \circ \pi$,

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "\pi_6"] \arrow[dr, "f \overset{not}{=} \pi_3"'] & \mathbb{Z}_6 = \frac{\mathbb{Z}}{\equiv (\mathrm{mod}\, 6)} \\ & \mathbb{Z}_3 \end{tikzcd}$$

$\rho_{\pi_6} = \equiv (\mathrm{mod}\, 6)$

$\rho_f = \equiv (\mathrm{mod}\, 3)$

Obs: $\equiv (\mathrm{mod}\, 6) \subset \rho_f$,

deci există $u: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$

pt care $f = u \circ \pi_6$,

adică $g: \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_3$,

$g(\hat{a}) = \bar{a}$ e corect definită!

CURS 6 ALGEBRĂ SI Y

$+ : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\cancel{+((2,7)) = 9}$ $\quad 2+7=9$

$+(+(3,4), +(2,-1)) = +(7,1) = 8$

$(3+4) + (2+(-1)) = 7+1 = 8.$

$\mathcal{E}_5$ $\quad \hat{x}\cdot\hat{y} = \widehat{x\cdot y}$

$\hat{2}\cdot\widehat{19} = \widehat{2\cdot 19} = \widehat{38} = \hat{3}$

$\widehat{172}\cdot\widehat{(-31)}$ îmi dă la fel?

$'' \; \widehat{-5332} = \hat{3}.$

$\hat{x}' = \hat{x}$ $\quad \hat{4}$ $\quad \hat{y}' = \hat{y}$

$5 \mid x - x'$ $\quad 5 \mid y - y'$

$xy - x'y' = x(y-y') + xy' - x'y' =$

$= x(y-y') + (x-x')y' \;\vdots\; 5 \Rightarrow$

$\widehat{xy} = \widehat{x'y'}$

În $\mathbb{Z}_8$ $\boxed{\hat{3} \cdot \hat{4} = \widehat{3 \cdot 4} = \widehat{12}}$ $= \hat{2}$. (2)

Obs în $\mathbb{Z}_n$,

$\hat{a} + \hat{b}$ = restul împărțirii lui $a+b$ la n

$\hat{a} \cdot \hat{b}$ = ————— $a \cdot b$ la n

---

pe $\mathbb{C}$: $x \ast y = xy + ix + iy - (1+i)$

$(29 + (97) + 203)$

Pe $\mathbb{R}$ $x \ast y = xy + 7x + 7y + 42$.

Arătați că $\ast$ admite e.n.

AȘA DA | AȘA NU

AȘA DA	AȘA NU
Dacă $e = -6$,	$x \ast e = xe + 7x + 7e + 42 = x$
Atunci	$\Rightarrow xe + 6x + 7e + 42 = 0$
$x \ast e = x \cdot (-6) + 7x + 7(-6) + 42$	$\Rightarrow e(x+7) = -6(x+7)$
$= x$,	$\Rightarrow e = -6$,
$e \ast x = (-6) \cdot x + 7 \cdot (-6) + 7x + 42 = x$.	
Deci, $e = -6$ e e.n. pt $\ast$.	
Ca urmare, $\ast$ admite e.n.	

$N \overset{not}{=} \max N$

Atunci $\left.\begin{matrix} N \geq N^2 \\ N \in \mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} N \in [0,1] \\ N \in \mathbb{N} \end{matrix}\right\} \Rightarrow N = 1,$

$$\left\{\begin{matrix} e \square 0 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 7e + 42 = 0 \\ \Rightarrow e = -6 \end{matrix}\right.$$

pe $\mathbb{Z}$: $x \square y = xy + 7x + 7y + 42$.

$\boxed{e = -6}$

Care sunt elementele lui $\mathbb{Z}$ simetrizabile în rap cu $\square$?

<u>Sol</u>: Fie $x \in \mathbb{Z}$ $\square$-simetrizabil.

Atunci $\exists y \in \mathbb{Z}$ $x \square y = -6 \Rightarrow$

$xy + 7x + 7y + 48 = 0 \Leftrightarrow$

$(x+7)(y+7) = 1 \Rightarrow x + 7 \in \{-1, 1\} \Rightarrow$

$x \in \{-8, -6\}$.

(4)

Reciproc:

$(-8) \ast (-8) = (-8)\cdot(-8) + 7\cdot(-8) + 7(-8) + 42 =$

$= 64 - 112 + 42 = -6$, deci

-8 e simetrizabil

$(-6) \ast (-6) = (-6)(-6) + 7(-6) + 7(-6) + 42 =$

$= 36 - 42 = -6$, deci -6 e simetrizabil

Ca urmare, elementele lui $\mathbb{Z}$ care sunt simetrizabile în raport cu $\ast$ sunt -8 și -6.

(G, Δ) grup; A mulțime nevidă.

Pe G^A definim operația Δ așa:

$(f \Delta g)(a) \overset{def}{=} f(a) \Delta g(a)$.

(G^A, Δ) e grup

Dem:

Fie $f, g, h \in G^A$ și $a \in A$.

$[(f \Delta g) \Delta h](a) = (f \Delta g)(a) \Delta h(a) = (f(a) \Delta g(a)) \Delta h(a) \underset{\text{e asoc pe } G}{\overset{\Delta}{=}}$

$f(a) \Delta (g(a) \Delta h(a)) = f(a) \Delta [(g \Delta h)(a)] = [f \Delta (g \Delta h)](a)$,

deci $(f \Delta g) \Delta h = f \Delta (g \Delta h)$.

Ca urmare, Δ e asociativă pe G^A $\boxed{A}$ $\boxed{I}$

Fie $E: A \to G$, $E(a) = e$ ← elementul neutru al lui G.

~~Fie $a \in A$~~ Fie $f \in G^A$, $a \in A$.

Atunci $(f \Delta E)(a) = f(a) \Delta E(a) = f(a) \Delta e = f(a)$,

deci $f \Delta E = f$.

$(E \Delta f)(a) = E(a) \Delta f(a) = e \Delta f(a) = f(a)$,

deci $E \Delta f = f$.

Ca urmare, E este e.n. pt. Δ pe G^A $\boxed{EN}$

Fie $f \in G^A$.

Luăm $g: A \to G$, $g(a) = f(a)'$ ← simetricul din G al lui $f(a)$

Fie $a \in A$.

$(g \Delta f)(a) = g(a) \Delta f(a) = f(a)' \Delta f(a) = e = E(a)$,

deci $g \Delta f = E$

$(f \Delta g)(a) = f(a) \Delta g(a) = f(a) \Delta f(a)' = e = E(a)$,

deci $f \Delta g = E$.

Ca urmare:

- g e simetrica lui f în rap cu Δ de pe G^A, deci
- f e simetrizabilă în rap cu Δ de pe G^A.

Cum f a fost aleasă arbitrar,

Toate elem lui G^Δ sunt Δ - simetrizabile (TES)

$\boxed{A}$, $\boxed{EN}$, $\boxed{TES}$ $\Rightarrow$ (G^Δ, Δ) este grup.

Asa ne : Δ e asociativa pe G^Δ

~~[illegible]~~) $(f \Delta g) \Delta h = f \Delta (g \Delta h)$.

Δ are e.n. pe G^Δ $f \Delta e = e \Delta f = f$

CURS 7 ALGEBRA SERIA 14 (1)

Exemple "standard" de monoizi

- $(\mathbb{N},+)$, $(\mathbb{N},\cdot)$, $(\mathbb{Z},\cdot)$, $(\mathbb{Q},\cdot)$ $(\mathbb{R},\cdot)$, $(\mathbb{C},\cdot)$
- $(\mathbb{Z}_n,\cdot)$
- $(A^A,\circ)$ ... (sau $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ...)
- $(M_n(\mathbb{C}),\cdot)$ — ?

+ ONEA RADU-ANDREI 143
++ STRÎMBEANU LUANA 143
+ COICULESCU VERONICA 141
+ NANLI ALEXANDRA 143

$A = \{u, 3, a, \Delta, b\}$

uu u3aaΔ aaaaaa

3aΔ, baba, bau, abba, ...

$FM(A)$ = mulțimea acestor „cuvinte”

uuu3aaΔ baubabe babaubau

$(a_1 a_2 \dots a_7 b_1 b_2 \dots b_{19}) \cdot (c_1 c_2 \dots c_{34}) =$

$(GL_n(\mathbb{C}),\cdot)$ = grupul multiplicativ matricelor inversabile din $M_n(\mathbb{C})$

②

φ

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Δ	α	β	γ
α	α	β	γ
β	β	γ	α
γ	γ	α	β

$$\boxed{\varphi(1+2)} = \cancel{\varphi(0)} = \alpha = \beta \Delta \gamma = \boxed{\varphi(1)\Delta\varphi(2)}$$

$$\varphi(u+v) = \varphi(u)\Delta\varphi(v) \quad \forall u,v .$$

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\not\to$

#	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$$f(a+b) = f(a) \# f(b) \quad \forall a,b .$$

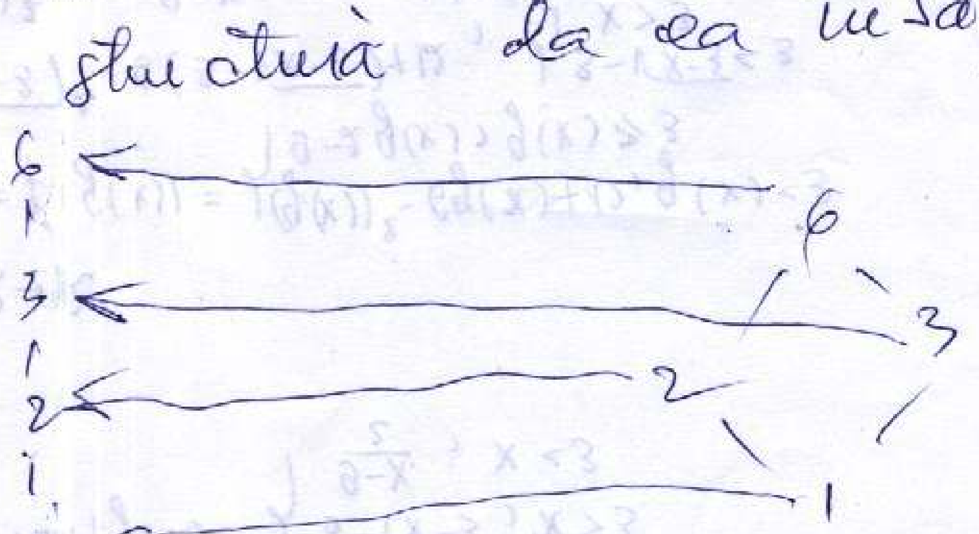
"Def" STRUCTURI IZOMORFE = structuri care "arată la fel".

"Def" MORFISM = Funcție care "poartă forma cu structura".

Def IZOMORFISM = MORFISM INVERSABIL AL CĂRUI INVERS E TOT MORFISM.

Def ENDOMORFISM = morfism de la o structură la ea însăși.

Def AUTOMORFISM = Izomorfism de la o structură la ea însăși.



(G_1, Δ), $(G_2, \circ)$, $G \overset{not}{=} G_1 \times G_2$ (4)

pe G $(x_1, x_2) \perp (y_1, y_2) = (x_1 \Delta y_1, x_2 \circ y_2)$

$(G, \perp)$ e grup.

Fie $x, y \in 5\mathbb{Z} \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}$ $x = 5k$,
$y = 5l$
~~Atunci~~ $x - y = 5(k-l) \in 5\mathbb{Z}$.
Prin urmare, $5\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$.

$(\pi(a) = \hat{a})$

$$\begin{array}{ccc} n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{Z}_n \\ \text{ker } \pi & & \text{VI} \\ \text{VI} & & \\ H = \pi^{-1}(H) & \xrightarrow{\varphi} & H \\ & & \| \\ & \longrightarrow & \hat{k} \cdot \mathbb{Z}_n \end{array}$$

$k | n$

Subgrupurile lui $\mathbb{Z}_n$
sunt ~~...~~ ale din
$\{\hat{d}\mathbb{Z}_n : d | n\}$.

Sî Vieghi?

①

CURS 8 ALGEBRĂ S 14

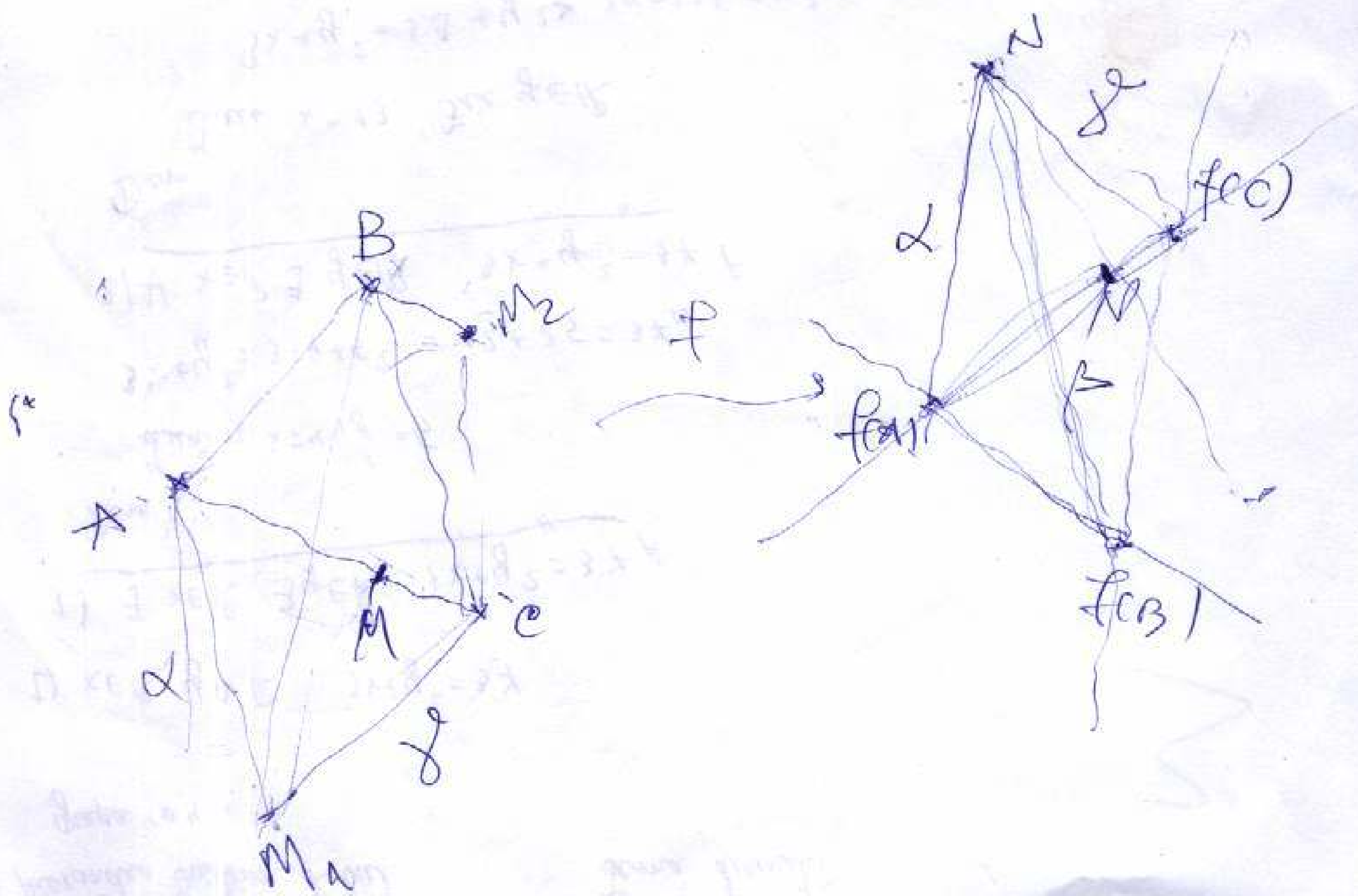
~~Dacă~~ $M \neq \emptyset$,

$(S(M) = \{f : M \to M : f \text{ e bijectivă}\}, \circ)$

este grup.

Particularizăm: $M = \mathcal{P}$ ← planul!

$\text{izom}(\mathcal{P}) \overset{\text{not}}{=} \{f : \mathcal{P} \to \mathcal{P} : \forall A, B \in \mathcal{P}$
$f(A)f(B) = AB\}$



Deci $Izom(\mathcal{P}) \subset S(\mathcal{P})$. ②

Fie $f, g \in Izom(\mathcal{P})$. Fie $A, B \in \mathcal{P}$.

Atunci $(g\circ f)(A)(g\circ f)(B) = g(f(A))g(f(B)) \xrightarrow[\text{izometrie}]{g\ e} f(A)f(B)$ $\xrightarrow[\text{izom}]{f\ e} AB$, deci $g\circ f \in Izom(\mathcal{P})$.

$AB = f(f^{-1}(A))f(f^{-1}(B)) = \underline{f^{-1}(A)f^{-1}(B)}$

Deci $f^{-1} \in Izom(\mathcal{P})$

Așadar, $Izom(\mathcal{P}) \leq (S(\mathcal{P}), \circ)$,

deci $(Izom(\mathcal{P}), \circ)$ e grup.

Alegem o figură $\mathcal{F}$ în plan.

Notăm $S(\mathcal{F}) = \{f \in Izom(\mathcal{P}) : f(\mathcal{F}) = \mathcal{F}\}$

(mulțimea izometriilor ce invariază $\mathcal{F}$)

Fie $f, g \in S(\mathcal{F})$.

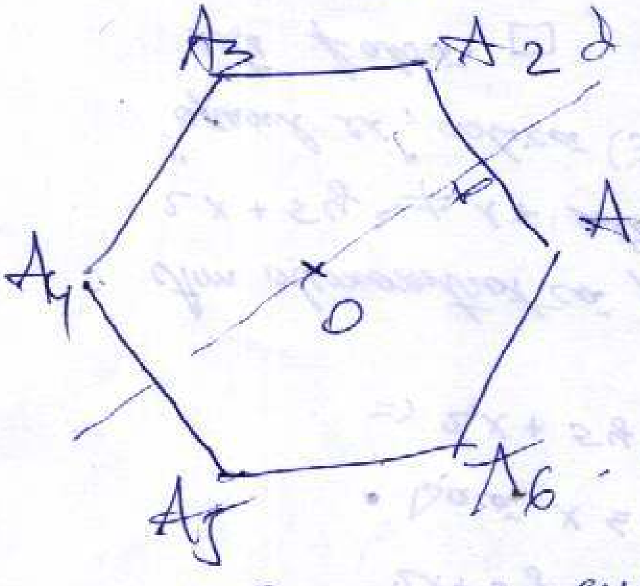
$(g\circ f)(\mathcal{F}) = g(f(\mathcal{F})) = g(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

$\mathcal{F} = f^{-1}(f(\mathcal{F})) = f^{-1}(\mathcal{F})$.

Ca urmare, $S(\mathcal{F}) \leq (Izom(\mathcal{P}), \circ)$

Deci $(S(\mathcal{F}), \circ)$.

particularizăm $\mathcal{F}$ la cazul unui hexagon regulat $A_1A_2\ldots A_6$:



Dacă $f \in S(\mathcal{F})$, atunci $f(A_1)$ și $f(A_2)$ determină complet f (căci și $f(O)=O$)

pt $f(A_1)$ avem 6 variante.

Odată fixat $f(A_1)$, pt $f(A_2)$ avem 2 var, deci nu putem avea în $S(\mathcal{F})$ mai mult de 12 izometrii.

Pe de altă parte, notăm $\rho = \rho_{O,\frac{\pi}{3}}$, atunci $\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4, \rho^5, \rho^6 = 1 \in S(\mathcal{F})$.

$\sigma \overset{not}{=}$ simetria în raport cu d.

considerăm și

$\sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \rho^3\sigma, \rho^4\sigma, \rho^5\sigma$.

Avem : $\rho^i \neq \rho^j \ \forall 1 \le i \neq j \le 6$

$\sigma\rho^i \neq \sigma\rho^j$ — " —

$\sigma\rho^i \neq \rho^j$ — " —

$\sigma\rho(A_1) = A_1$
$\sigma\rho(A_2) = A_6$

$\rho^5\sigma(A_1) = A_1$
$\rho^5\sigma(A_2) = A_6$

$\sigma\rho = \rho^5\sigma$

$\sigma\rho^2 = (\sigma\rho)\rho = \rho^5(\sigma\rho) = \rho^5\rho^5\sigma = \rho^4\sigma$

Considerând un poligon regulat, $\Pi \overset{not}{=} A_1A_2\ldots A_n$ cu $\underline{n}$ laturi $(n\geq 3)$,

$D_n = S(\Pi) = \{1, \rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-1}, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma, \ldots, \rho^{n-1}\sigma\}$

"cu relațiile" $\rho^n = 1$, $\sigma^2 = 1$, $\sigma\rho = \rho^{n-1}\sigma$

"Grupul DIEDRAL D_n"

Obs: $|D_n| = 2n$, $(\forall n \geq 3)$

$\sim\ D_n \ni f \overset{\phi}{\longmapsto} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_n \\ f(A_1) & f(A_2) & \ldots & f(A_n) \end{pmatrix}$.

$\phi : D_n \to S_n$ e morfism injectiv de grupuri,

deci, $\forall n \geq 3$ D_n "se scufundă în" S_n".

pt $\underline{n=3}$ $D_3 \hookrightarrow S_3$.

$6 = 2\cdot 3 = |D_3| \leq |S_3| = 3! = 6$,

deci $\boxed{D_3 \simeq S_3}$

Prin urmare

$S_3 = \{1, \rho, \rho^2, \sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}$ cu relațiile $\rho^3 = 1$, $\sigma^2 = 1$ și $\sigma\rho = \rho^2\sigma$.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$.

$\boxed{\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4}$, $\boxed{\{(\hat{0}, \bar{0})\}}$

$\underbrace{\hat{0}}_{0+2\mathbb{Z}}$, $\underbrace{\bar{0}}_{0+4\mathbb{Z}}$

$\{(\hat{1}, \bar{0})\}$

$\boxed{\{(\hat{1}, \bar{0}), (\hat{0}, \bar{0})\}}$ ✓

$\boxed{\{(\hat{0}, \bar{1}), (\hat{0}, \bar{2}), (\hat{0}, \bar{3}), (\hat{0}, \bar{0})\}}$.

$\boxed{\{(\hat{1}, \bar{3}), (\hat{0}, \bar{2}), (\hat{1}, \bar{1}), (\hat{0}, \bar{0})\}}$.

+	13	02	11	00
13	02	11	00	13
02	11	00	13	02
11	00	13	02	11
00	13	02	11	00

Prop 2.5 $M = \{x_1 x_2 \dots x_n : n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \{1, 2, \dots n\}\ x_i \in M \vee y_i^{-1} \in M\}$ 6

$\left(M = \{x_1\} \right.$. $e, x_1, x_1^2, x_1^3, \dots, x_1^n,$
$x_1^{-1}, x_1^{-2}, x_1^{-3}, \dots$

$(x_1 x_1 x_1) \cdot (x_1 x_1 x_1 x_1 x_1)$.

$\langle x_1 \rangle \overset{not}{=} \langle \{x_1\} \rangle = \{x_1^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}\}$.

$M = \{x, y\}$. $x^\alpha, \alpha \in \mathbb{Z}$
$y^\beta, \beta \in \mathbb{Z}$

$\{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{Z}\} \cup \{y^\beta : \beta \in \mathbb{Z}\}$.

$\cancel{\{x^\alpha y^\beta : \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}}$

$x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2} \dots x^{\alpha_k} y^{\beta_k}$

$x^3 y^{-4} z^2 z^3 x^3 y z = xxx y^{-1} y^{-1} y^{-1} y^{-1} xx zzzzz xxx y z$.

În $\mathbb{Z}^n$ considerăm elementele (7)

$e_1 = (1,0,0,\dots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\dots,0)$, …

$e_n = (0,0,\dots,0,1)$.

Fie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$

~~Atunci~~ $x = (x_1, 0, 0, \dots 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, 0, x_n) =$

$\cancel{x_1 \cdot (1,0,0,\dots,0)}$ $x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n =$

Λ_{-1} corespondenta în notație aditivă

$\langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$. a expresiei

$e_1^{x_1} \cdot e_2^{x_2} \dots e_n^{x_n}$ din notație multiplicativă.

Deci $\mathbb{Z}^n = \langle e_1, e_2, \dots, e_n \rangle$,

prin urmare $\mathbb{Z}^n$ e finit generat.

Presupunem că grupul $\mathbb{Q}$ e finit generat

Fie $x_1 = \frac{a_1}{n}, x_2 = \frac{a_2}{n}, \ldots, x_n = \frac{a_n}{n}$ (8)

un sistem (finit!) de generatori pt $\mathbb{Q}$.

Atunci există $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{Z}$

$$\frac{1}{2n} = \boxed{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n},$$

$$= \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n}{n} \Rightarrow$$

$$1 = 2(\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n)$$

impar par

Rămâne deci că $(\mathbb{Q}, +)$ NU e finit generat.

CURS 9 ALG S14

$\mathbb{Z}_n$ $\quad n\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z}$

$\hat{a} = \hat{b}$ în $\mathbb{Z}_n \Leftrightarrow$

(restul împ. lui a la n = restul împ. lui b la n)

$\Leftrightarrow n \mid a-b \Leftrightarrow \boxed{a-b \in n\mathbb{Z}}$

$\Updownarrow$ $\quad$ $\Downarrow$ H

$n \mid -a+b$ $\quad$ (în not. multiplicativă, „$a, b^{-1} \in H$")

$\Updownarrow$

„$a^{-1}b \in H$"

Fie $a \in G$.

Atunci $a^{-1}a = e \in H$, deci $a \equiv_s a \pmod H$

deci $\equiv_s$ este reflexivă.

Fie $a, b \in G$ a.î. $a \equiv_s b \pmod H \Rightarrow$

$a^{-1}b \in H \Rightarrow b^{-1}a = (a^{-1}b)^{-1} \in H$,

deci $b \equiv_s a \pmod H$

Ca urmare, $\equiv_s$ este simetrică

Fie $a, b, c \in G$ a.î. $a \equiv_d b$ și $b \equiv_d c$ (mod H)

~~Atunci~~ $a^{-1}b \in H$ și $b^{-1}c \in H$, de unde

$a^{-1}c = a^{-1}b \cdot b^{-1}c \in H$. Deci $a \equiv_d c$ (mod H)

Ca urmare, $\equiv_d$ e tranzitivă.

Deci $\equiv_d$ e rel. de echivalență.

Cum arată clasele de echivalență/

mulțimile factor ($G/\equiv_d$ (mod H),

$G/\equiv_d$ (mod H))?

Fixăm $a \in G$,

Fie $x \in G$,

Avem $x \equiv_d a$ (mod H) $\Leftrightarrow$

$a \equiv_d x$ (mod H) $\Leftrightarrow a^{-1}x \in H \Leftrightarrow \boxed{x \in aH}$

Ca urmare, $\dfrac{a}{\equiv_d (\text{mod } H)} = aH$.

(Deci $(G/H)_d = \dfrac{G}{\equiv_d (\text{mod } H)} = \{aH : a \in G\}$)

Considerăm grupul

$S_3=\{1,\rho,\rho^2,\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\}$ (cu rel. $\rho^3=1$, $\sigma^2=1$, $\sigma\rho=\rho^2\sigma$)

	1	ρ	ρ^2	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
1	1	ρ	ρ^2	σ	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$
ρ	ρ	ρ^2	1	$\rho\sigma$	$\rho^2\sigma$	σ
ρ^2	ρ^2	1	ρ	$\rho^2\sigma$	σ	$\rho\sigma$
σ	σ	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	1	ρ^2	ρ
$\rho\sigma$	$\rho\sigma$	σ	$\rho^2\sigma$	ρ	1	ρ^2
$\rho^2\sigma$	$\rho^2\sigma$	$\rho\sigma$	σ	ρ^2	ρ	1

Subgrupuri

$\{1\}$

$\{1,\rho,\rho^2\}$.

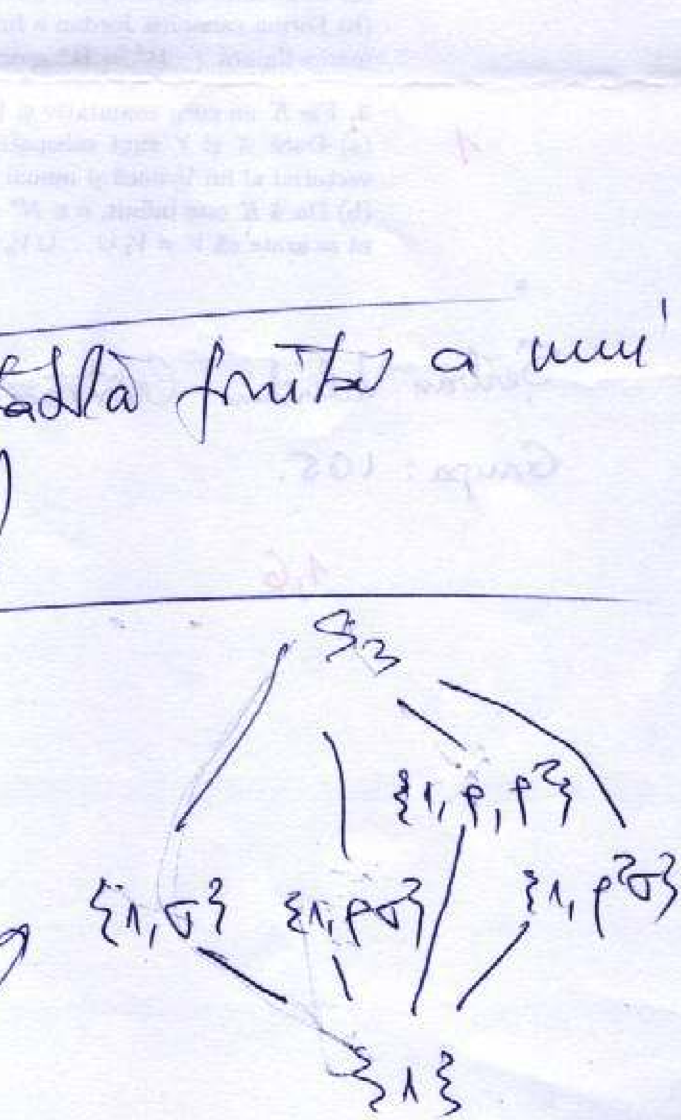
P.S. Orice parte stabilă finită a unui grup e subgrup!

$\{1,\sigma\}$

$\{1,\rho\sigma\}$

$\{1,\rho^2\sigma\}$.

LATICEA SUBGRUPURILOR!



$H_\sigma \overset{not}{=} \{1, \sigma\}$. (4)

$(G/H_\sigma)_s = \{\{1,\sigma\}, \{\rho, \rho\sigma\}, \{\rho^2, \rho^2\sigma\}\}$

$(G/H_\sigma)_d = \{\{1,\sigma\}, \{\rho, \rho^2\sigma\}, \{\rho^2, \rho\sigma\}\}$

deci, $\boxed{(G/H_\sigma)_s \neq (G/H_\sigma)_d}$

$H_\rho \overset{not}{=} \{1, \rho, \rho^2\}$. $\{H, G \setminus H\}$

$(G/H_\rho)_s = \{\{1, \rho, \rho^2\}, \{\sigma, \rho^2\sigma, \rho\sigma\}\}$.

$(G/H_\rho)_d = \{\{1, \rho, \rho^2\}, \{\sigma, \rho\sigma, \rho^2\sigma\}\}$,

deci, $\boxed{(G/H_\rho)_s = (G/H_\rho)_d}$.

$g(f(xH)) = g(Hx^{-1}) = (x^{-1})^{-1}H = xH$,

la fel $f(g(Hx)) = Hx$.

De ce $f(xH) = Hx^{-1}$??

$xH = yH \Rightarrow \underline{x^{-1}y \in H} \Leftrightarrow x^{-1}(y^{-1})^{-1} \in H \Leftrightarrow$

$\underline{Hx^{-1} = Hy^{-1}}$! R: Că e imediată corecta definire a lui f.

„Reuniune disjunctă"

$G = \bigsqcup xH \Rightarrow$

$xH \in (G/H)_s$

$|G| = \sum_{xH \in (G/H)_s} |xH| = (1)$

Card. deci sunt bijecții

$G \ni x$ fixat

$H \underset{x^{-1}\cdot}{\overset{x\cdot}{\rightleftarrows}} xH$

$|xH| = |H|$, deci

$(1) = |H| \cdot |(G/H)_s| = |H|[G:H]$

$(\mathbb{Z}_6, +) \ni \hat{2}$

$<\hat{2}> = \{\hat{0}, \hat{2}, \hat{4}\}$.

$<\hat{3}> = \{\hat{0}, \hat{3}\}$

$<\hat{4}> = \{\hat{0}, \hat{4}, \hat{2}\}$.

$<\hat{5}> = \{\hat{0}, \hat{5}, \hat{4}, \hat{3}, \hat{2}, \hat{1}\}$.

Palaghia Cristian-Marius

Grupa 105

⑥

$x \in G$:

$\{\dots x^{-2}, x^{-1}, e, x, x^2, x^3, x^4, \dots\} = \langle x \rangle$

$\qquad \parallel$

$\{x^n : n \in \mathbb{Z}\}$.

Dacă $|\{x^n : n \in \mathbb{Z}\}| = d$,

• $\{x^n : n \in \mathbb{Z}\} = \underline{\underline{\{1, x, x^2, \dots, x^{d-1}\}}}$.

• ~~și~~ $\underline{x^d = 1}$.

Dacă $t = qd + r$,

$x^t = x^{qd+r} = (x^d)^q \cdot x^r = x^r$

Dacă $\underline{\underline{\delta =}} \min\{n \in \mathbb{N}^* : x^n = 1\}$,

$\langle x \rangle = \underline{\underline{\{1, x, \dots, x^{\delta - 1}\}}}$.

$$\boxed{|\langle x \rangle| = \min\{n \in \mathbb{N}^* : x^n = 1\}}.$$

Fie $x \in G$, $n \overset{\text{not}}{=} \operatorname{ord}_G x$.

$\operatorname{ord}(x^k) = ?$

$d \overset{\text{not}}{=} (n, k)$, $n = n_1 d$, $k = k_1 d$ $((n_1, k_1) = 1)$

Obs: 1) $(x^k)^{\frac{n}{d}} = (x^k)^{n_1} = x^{k_1 d n_1} = (x^n)^{k_1} = e$.

(7)

2) Dacă $\forall\, m \in \mathbb{Z}$ $(x^k)^m = e$, atunci $x^{km} = e$, deci $n \mid km \Leftrightarrow$ $n_1 d \mid k_1 d m \Leftrightarrow n_1 \mid k_1 m \overset{(n_1,k_1)=1}{\Longleftrightarrow} n_1 \mid m$, deci $\frac{n}{(n,k)} \mid m$.

Deci $\operatorname{ord}(x^k) = \dfrac{\operatorname{ord}(x)}{(k, \operatorname{ord}(x))}$.

Dacă $\operatorname{ord}_{G_1} x = m$, $\operatorname{ord}_{G_2} y = n$,

$(x,y)^q = (e_1, e_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^q = e_1 \\ y^q = e_2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$m \mid q \wedge n \mid q \Leftrightarrow [m,n] \mid q$.

Revenim la $H = \{1, \rho, \rho^2\} \leq S_3$.

$\{1,\rho,\rho^2\} \cdot \{1,\rho,\rho^2\} = \{1,\rho,\rho^2\}$

$\{1,\rho,\rho^2\} \cdot \{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\} = \{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\}$.

$\{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\} \cdot \{1,\rho,\rho^2\} = \{\sigma,\rho^2\sigma,\rho\sigma\}$.

$\{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\} \cdot \{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\} = \{1,\rho^2,\rho\}$.

	$\{1,\rho,\rho^2\}$	$\{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\}$
$\{1,\rho,\rho^2\}$	$\{1,\rho,\rho^2\}$	$\{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\}$
$\{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\}$	$\{\sigma,\rho\sigma,\rho^2\sigma\}$	$\{1,\rho,\rho^2\}$

8

~~$\{\ldots\}$~~

$\{\rho, \rho\sigma\} \cdot \{\rho^2, \rho^2\sigma\} = \{1, \sigma, \rho^2\sigma, \rho^2\}$.

~~Obs~~ $(G/H)_s = (G/H)_d \iff \boxed{\forall x \in G \quad xH = Hx}$

$\underline{xH \cdot yH} = x(Hy)H = x(yH)H =$
$= (xy)(HH) = (xy) \cdot H$

Dacă $H \trianglelefteq G$,

$((G/H)_s, \cdot)$ $\left((xH)(yH) = (xy)H\right)$

s.n. GRUPUL FACTOR al lui G în raport cu H.

$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{x + n\mathbb{Z} : x \in \mathbb{Z}\}$

$= \{n\mathbb{Z}, 1+n\mathbb{Z}, \ldots (n-1)+n\mathbb{Z}\}$

cu op. $(x+n\mathbb{Z}) + (y+n\mathbb{Z}) = (x+y)+n\mathbb{Z}$

$\underset{\mathbb{Z}_{640}}{\text{ord}}\ \widehat{54} = ?$

---

① $\underset{\mathbb{Z}_{640}}{\text{ord}}\ \widehat{54} = \underset{\mathbb{Z}_{640}}{\text{ord}}(54\cdot\hat{1}) = \dfrac{\text{ord}_{\mathbb{Z}_{640}}(\hat{1})}{(54, \text{ord}_{\mathbb{Z}_{640}}(\hat{1}))} =$

$= \dfrac{640}{(54,640)} = 320.$

---

② a) Determinați elementele de ordin 49 din $\mathbb{Z}_{576}$.

R: Nu există, căci $49 \nmid 576$.

b) ~~Det~~ u — 48 din $\mathbb{Z}_{576}$.

Sol: Fie $\hat{x} \in \mathbb{Z}_{576}$.

$\text{ord}\ \hat{x} = 48 \Leftrightarrow \text{ord}(x\cdot\hat{1}) = 48 \Leftrightarrow$

$\dfrac{\text{ord}(\hat{1})}{(x, \text{ord}(\hat{1}))} = 48 \Leftrightarrow \dfrac{576}{(x, 576)} = 48 \Leftrightarrow$

$(x, 576) = 12 \Leftrightarrow (x, 12\cdot 48) = 12 \Leftrightarrow$

$\exists h \in \{0, 1, \ldots, 47\}\quad x = 12h \wedge (h, 48)$

2'

$$\Longrightarrow \hat{x} \in \{\widehat{12\cdot 1}, \widehat{12\cdot 5}, \widehat{12\cdot 7}, \widehat{12\cdot 11}, \widehat{12\cdot 13}, \widehat{12\cdot 17}, \widehat{12\cdot 19}, \widehat{12\cdot 23}, \widehat{12\cdot 25}, \widehat{12\cdot 29}, \widehat{12\cdot 31}, \widehat{12\cdot 35}, \widehat{12\cdot 37}, \widehat{12\cdot 41}, \widehat{12\cdot 43}, \widehat{12\cdot 47}\}.$$

---

(3) Determinați $\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_8\times\mathbb{Z}_{20}}((\hat{6}, \overline{12}))$

Sol: ordinul cerut este

$$[\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_8}(\hat{6}), \mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_{20}}(\overline{12})] = [4,5] = 20.$$

(3') Determinați elementele de ordin 12 din $\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_4$.

Sol: Fie $z \overset{not}{=} (\hat{x}, \bar{y}) \in \mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_4$.

$$\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_4} z = 12 \Longleftrightarrow [\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_6}(\hat{x}), \mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_4}(\bar{y})] = 12$$

$$\xLeftrightarrow[\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_4}(\bar{y}) \mid 4]{\mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_6}(\hat{x}) \mid 6} \begin{cases} \mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_6}(\hat{x}) = 3 \\ \mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_4}(\bar{y}) = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} \mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_6}(\hat{x}) = 6 \\ \mathrm{ord}_{\mathbb{Z}_4}(\bar{y}) = 4 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow z \in \{(\hat{2}, \bar{1}), (\hat{2}, \bar{3}), (\hat{4}, \bar{1}), (\hat{4}, \bar{3})\} \cup \{(\hat{1}, \bar{1}), (\hat{1}, \bar{3}), (\hat{5}, \bar{1}), (\hat{5}, \bar{3})\}.$$

$f: M \to N$ surj.

Pe M $xRy \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

Fie $x \in M$. Atunci $f(x) = f(x) \to xRx$.

Deci, R e reflexivă (R)

Fie $x, y \in M$ a.î. xRy.

~~Atunci~~ $f(x) = f(y)$, deci $f(y) = f(x)$, de unde yRx.

Deci, R e simetrică (S)

Fie $x, y, z \in M$ a.î. $(xRy \wedge yRz) \Rightarrow$

$(f(x) = f(y) \wedge f(y) = f(z)) \Rightarrow f(x) = f(z) \Rightarrow$

xRz.

Deci R e tranzitivă (T)

(R), (S), (T) $\to$ R e de echivalență.

Punem $g: \frac{M}{R} \to N$, $g(\hat{x}) = f(x)$

Dacă $x, y \in M$ ~~și xRy, atunci~~ și $\hat{x} = \hat{y}$,

atunci xRy, deci $f(x) = f(y)$.

Deci g e corect def.

Fie $\hat{x}, \hat{y} \in \frac{M}{R}$. $g(\hat{x}) = g(\hat{y}) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow$

$xRy \Rightarrow \hat{x} = \hat{y}$. 4'

Deci g e inj.

Fie $y \in N$, cum f e surj, $\exists\, a \in M$ $f(a) = y$, Atunci $g(\hat{a}) = f(a) = y$.

Alternativ:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & M/R \arrow[d, "g"] \\ & N \end{tikzcd}$$

$x \rho_\pi y \Leftrightarrow$
$\pi(x) = \pi(y) \Leftrightarrow$
$\hat{x} = \hat{y} \Leftrightarrow$
$x R y \Leftrightarrow$
$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \rho_f y$,

deci $\rho_\pi = \rho_f$.

Pr.f. conform PUMF, $\exists!\, g : M/R \to N$

$f = g\pi$, Tu

$\rho_\pi = \rho_f \Rightarrow g$ e inj, f e surj $\Rightarrow g$ e surj $\Big\} \Rightarrow g$ e bij

Pe $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ $(a,b)\alpha(c,d) \Leftrightarrow ad=bc$,

α e de echiv

5

Vrem că $\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}{\alpha}$ „se identifică cu $\mathbb{Q}$".

TRADUCERE:

$\exists\ \varphi : \frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}{\alpha} \to \mathbb{Q}$ bijectivă.

Definim $\varphi : \frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}{\alpha} \to \mathbb{Q}$,

$$\varphi(\widehat{(a,b)}) = \frac{a}{b}.$$

Dacă $\widehat{(a,b)} = \widehat{(e,t)}$, atunci

$at = be$, deci $\frac{a}{b} = \frac{e}{t}$.

Ca urmare, φ e corect def.

Fie $\psi : \mathbb{Q} \to \frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}{\alpha}$,

$$\psi\left(\frac{u}{v}\right) = \widehat{(u,v)}.$$

Dacă $\frac{u}{v} = \frac{m}{w}$, atunci $uw = m\cdot v$,

deci $\widehat{(u,v)} = \widehat{(m,w)}$, deci ψ e corect def.

6'

$\psi\varphi: \frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}{\alpha} \to \frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}{\alpha}$, $(\psi\varphi)(\widehat{(a,b)}) = \psi(\varphi(\widehat{(a,b)})) = \psi(\frac{a}{b}) = \widehat{(a,b)}$

Deci $\psi\varphi = 1_{\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*}{\alpha}}$ (1)

$\varphi\psi: \mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$, $(\varphi\psi)(\frac{a}{b}) = \varphi(\psi(\frac{a}{b})) = \varphi(\widehat{(a,b)}) = \frac{a}{b}$ deci

$\left.\begin{array}{l}\varphi\psi = 1_{\mathbb{Q}} \\ (1)\end{array}\right\} \Rightarrow \psi = \varphi^{-1}$, deci φ e inversabilă,

deci φ e bijectivă

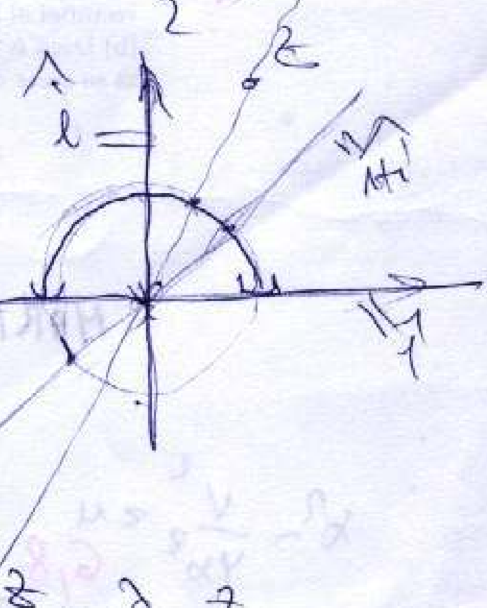
Pe $\mathbb{C}^*$ $x \beta y \iff x, 0$ și y sunt coliniare

Definim

$\frac{\mathbb{C}^*}{\beta} \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \{\cos y + i\sin y : y\in[0,\pi)\}$

$\varphi(\hat{d}) = \begin{cases} \frac{z}{|z|}, & Re\, z>0,\ z\in d \\ -\frac{z}{|z|}, & Re\, z<0,\ z\in d \\ 1, & z\in\mathbb{R}\cap d. \end{cases}$

$\hat{l} =$



$\psi(z) = $ (dreapta Oz) $\setminus \{0\}$.

Dacă $z, w \in d$, atunci

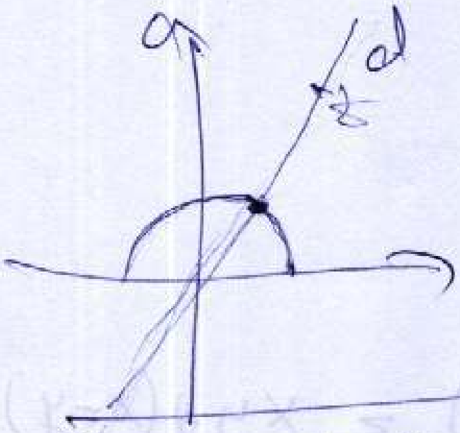
$\exists \lambda\in\mathbb{R}^*$ $w=\lambda z$. Atunci $\frac{w}{|w|} = \frac{\lambda z}{|\lambda z|} = \frac{\lambda}{|\lambda|}\frac{z}{|z|}$,

cu variantele: $\lambda>0 \Rightarrow \begin{cases} Re\, w, Re\, z >0 \\ \frac{w}{|w|} = \frac{z}{|z|} \end{cases}$

sau $\lambda<0 \Rightarrow \begin{cases} Re\, w, Re\, z<0 \\ \frac{w}{|w|} = -\frac{z}{|z|} \end{cases}$

(pt $z, w\in\mathbb{R}$ mi dă 1 cu oricare din ele).

Deci φ e corect definită.



$\psi\varphi: d \mapsto d$

$\varphi\psi: z \mapsto z$

O definiție mai „pretențioasă" pt φ era

$\varphi(d) = d \cap \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \wedge 0 \leq \arg z < \pi\}$.

$(\mathbb{Q}, +) \not\simeq (\mathbb{Q}^*, \cdot)$

Presupunem că ele sunt izomorfe;
fie $f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}^*, \cdot)$ un izomorfism.
Atunci, punând $\alpha = f^{-1}(5)$, avem

$$5 = f(\alpha) = f\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = f\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Cum $f(\frac{\alpha}{2}) \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, obținem (în $\mathbb{R}$) $f(\frac{\alpha}{2}) = \pm\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$,

4.

~~$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$~~

	00	01	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	00	01
11	11	10	01	00

$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(\underbrace{x+iy}_{x,y\in\mathbb{R}}) = xy + (x-y)i$

inj? surj?

$\left.\begin{array}{l} f(1+i) = 1 \\ f(-1-i) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f$ nu e injectivă.

Pp $\exists\ z = u+iv \quad f(z) = -\frac{2}{3}i. \ (u,v\in\mathbb{R})$

~~Atunci~~ $\begin{cases} uv = -\frac{2}{3} \\ u - v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v+1 \\ v^2+v+\frac{2}{3} = 0 \end{cases} (*)$

$\begin{cases} u = v+1 \\ (v+\frac{1}{2})^2 + \frac{5}{12} = 0 \end{cases}$, contradicție.

Rămâne deci că f nu e surj.

∂	∂	h	f
∂	∂	x	x
h	α	∂	∂
b	x	∂	

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$ 9'

- inj? • surj?

Obs: $f(-1,0) = \cancel{f(1,0)}\ (1,0) \cancel{=} f(1,0)$,

deci f nu e inj.

Fie $w = (u,v) \in \mathbb{R}^2$. Dacă $v \geq 0$,

iau $x = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}\right)$

Atunci $f(x) = \left(\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2} - \frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}, 2\sqrt{\frac{(\sqrt{u^2+v^2}+u)(\sqrt{u^2+v^2}-u)}{2}}\right)$

$= (u, |v|) = (u,v)$.

Dacă $v<0$, iau $x = \left(\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}+u}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{u^2+v^2}-u}{2}}\right)$,

și atunci $f(x) = (u, -|v|) = (u,v)$.

Deci f e surjectivă.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = x^2+3x+(x^2+1)i$

Fie $x_{1,2} \in \mathbb{R}$ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow$

$x_1^2+3x_1+(x_1^2+1)i = x_2^2+3x_2+(x_2^2+1)i \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x_1^2+3x_1 = x_2^2+3x_2 \\ x_1^2+1 = x_2^2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 = 3x_2 \\ x_1^2 = x_2^2 \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2$.

Deci f e injectivă.

CURS 10 ALGEBRĂ SKP

Aș vrea să definesc un morfism $f: \mathbb{Z}_n \to U_n$, (unde $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$)

$$f(\hat{a}) = \cos\frac{2a\pi}{n} + i\sin\frac{2a\pi}{n}$$

Pot? (i.e. e corect def? e morfism de gr?)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "g"'] & \mathbb{Z}_n = \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \\
 & U_n
\end{tikzcd}$$

$g: \mathbb{Z} \to U_n$, $g(a) = \cos\frac{2a\pi}{n} + i\sin\frac{2a\pi}{n}$

Pre calcule

$$g(a+b) = \cos\frac{2(a+b)\pi}{n} + i\sin\frac{2(a+b)\pi}{n} =$$

$$= \left(\cos\frac{2a\pi}{n} + i\sin\frac{2a\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2b\pi}{n} + i\sin\frac{2b\pi}{n}\right) =$$

$$= g(a)\,g(b)$$

Deci g e morfism de gr.

$\ker g = \{a \in \mathbb{Z} : g(a) = 1\} = \{a \in \mathbb{Z} : n \mid a\}$

$= n\mathbb{Z}$.

Ca urmare, există un morfism injectiv $f : \frac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}} \to U_n$ cu propr. $f \circ \pi = g$, adică

$f(\hat{a}) = \cos\frac{2a\pi}{n} + i \sin\frac{2a\pi}{n}$

Dacă $f : G \to \Gamma$ e un morfism de grupuri, atunci există un unic izomorfism $\bar{f}$ care face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & \Gamma \\ \pi \downarrow & & \uparrow j \\ \frac{G}{\ker f} & \xrightarrow{\bar{f}} & \operatorname{Im} f \end{array}$$

(unde π e pr. canonică a lui $G/\ker f$, iar j e injecția canonică a lui $\operatorname{Im} f$ în Γ)

i.e., $j \circ \bar{f} \circ \pi = f$

$(j \circ \bar{f} \circ \pi)(g) = j(\bar{f}(\pi(g))) = \bar{f}(\hat{g})$; $f(g)$

Exemplu de aplicație a T.F. de izomorfism:

Arătați că $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \simeq S^1$

$(S^1 \stackrel{not}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\})$.

Dem: Considerăm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$,

$f(x) = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x$

Fie $x, y \in \mathbb{R}$. Atunci

$f(x+y) = \cos 2\pi(x+y) + i \sin 2\pi(x+y) =$

$= (\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x)(\cos 2\pi y + i \sin 2\pi y) = f(x) f(y)$,

deci f e morfism de grupuri.

$\ker f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = 1\} =$

$\{x \in \mathbb{R} : \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = 1\} =$

$\{x \in \mathbb{R} : \cos 2\pi x = 1 \wedge \sin 2\pi x = 0\} =$

$\cancel{\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = 2\pi\mathbb{Z}}$.

$\{k : k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$.

Fie $z \in \operatorname{Im} f$.

Atunci $\exists x \in \mathbb{R}$ $f(x) = z$ $\Leftrightarrow$

$\exists x \in \mathbb{R}$ $\cos 2\pi x + i \sin 2\pi x = z \Rightarrow |z| = 1$

$\Rightarrow z \in S^1$.

Reciproc, fie $z \in S^1$.

Atunci $\exists \alpha \in [0, 2\pi)$ $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$.

Atunci $z = f\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)$, deci $z \in \operatorname{Im} f$.

Ca urmare $\operatorname{Im} f = S^1$.

Conform teoremei fundamentale de izomorfism, $\frac{\mathbb{R}}{\ker f} \simeq \operatorname{Im} f$,

adică $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \simeq S^1$.

De lucrat exerciții cu grupul factor de grupuri!

Dacă G e un grup ciclic,

fie $g \in G$ a.î. $G = \langle g \rangle$.

Definim $f : \mathbb{Z} \to G$, $f(n) = g^n$.

Avem pt $m, n \in \mathbb{Z}$ $f(m+n) = g^{m+n} = g^m g^n = f(m) f(n)$,

deci f e morfism de grupuri, evident

(5)

injectiv.

cf T.F. Izom, $\boxed{\frac{\mathbb{Z}}{\ker f} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Im} f = G}$

	0	1
0	0	1
1	1	0

	u	v
u	u	v
v	v	u

	α	β
α	α	β
β	β	α

...

$\{1, x\}$ $\quad x^2 = 1,\ x \neq 1$

Mai am elemente; fie y nul.

Atunci $1, x, y$ și xy sunt $\neq$ 2 câte 2

	1	x	y	xy
1	1	x	y	xy
x	x	1	xy	y
y	y	xy	1	x
xy	xy	y	x	1

$yx = ?$

$yx = x \xrightarrow{\cdot x} y = 1$ ✗

$\cancel{yx = y} \xrightarrow{y\cdot} x = 1$ ✗

$\cancel{yx = 1} \xrightarrow{\cdot x} y = x$ ✗.

CURS 11 ALGEBRĂ S 14

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 7 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}}_{\sigma_1} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}}_{\sigma_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 7 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

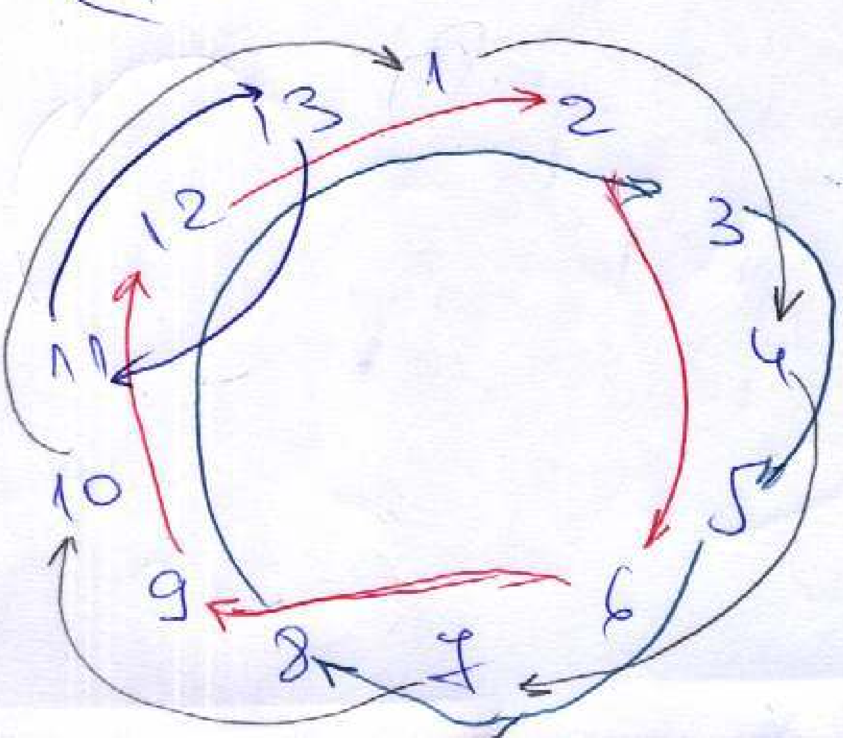
$$(\sigma_1 \circ \sigma_2)(4) = \boxed{\sigma_1(\sigma_2(4))}$$

$$\sigma_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 6 & 3 & 5 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

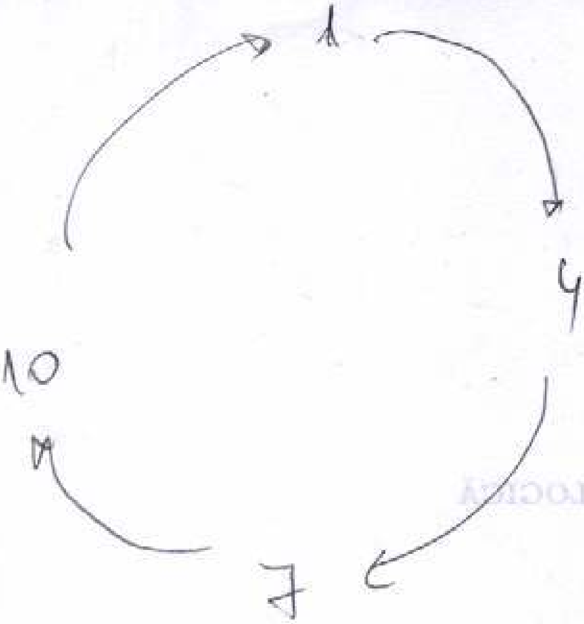
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 3 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & 3 & 2 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 1 & & \dots & & \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 4 & 6 & 5 & 7 & 8 & 9 & 10 & 3 & 12 & 1 & 13 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$



Omescu Iancu-Gabriel
142



3

0

$(11, 13) = (13, 11)$

$(3,5,8) = (5,8,3) = (8,3,5)$

$(1)(2)(3,5,8)(4)(6)(7)(9)(10)(11)(12)(13)$

not

$(i_1, i_2, \dots, i_r)$

$\shortparallel$

$(i_2, i_3, \dots, i_{r-1}, i_r, i_1)$

$\shortparallel$

$(i_3, i_4, \dots, i_r, i_1, i_2)$

$\shortparallel$

S_{14}:

$(1,3,5,7)(2,6,10)(11,13)(8,14,12,9) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 3 & 6 & 5 & 4 & 7 & 10 & 1 & 14 & 8 & 2 & 13 & 9 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$(1,4,7,10)(5,2,7,8)(3,4,2,12)(10,13,12) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 12 & 7 & 10 & 2 & 6 & 8 & 5 & 9 & 13 & 11 & 1 & 3 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 4 & 2 & 3 & 7 & 5 & 6 & 10 & 8 & 9 & 1 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 4 & 5 & 9 & 7 & 8 & 3 & 10 & 11 & 6 & 1 & 14 & 16 & 12 & 17 & 15 & 13 & 2 \end{pmatrix} \in S_{17}$$

Scrieți σ ca produs de cicluri disjuncte!

$\sigma = (1,4,7,10)(2,5,8,11,14,17)(3,9,6)(12,16,13)$

$= (1,4)(4,7)(7,10)(2,5)(5,8)(8,11)(11,14)(14,17)(3,9)(9,6) \circ$

$\circ (12,16)(16,13)$

4

$(1,7,4,12,5,8)(8,5,12,4,7,1)=e$

$(i,j)^2=(i,j)(i,j)=e$

$\boxed{(1,i)(1,j)(1,i)}=(i,j)$

$$\varepsilon(\sigma)\overset{def}{=}\prod_{i<j}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$$

Obs: În acest produs, pt $i<j$ fixați apare și factorul $\frac{\sigma(\sigma^{-1}(j))-\sigma(\sigma^{-1}(i))}{\sigma^{-1}(j)-\sigma^{-1}(i)}=$

$$=\frac{j-i}{\sigma^{-1}(j)-\sigma^{-1}(i)}$$

$$\varepsilon(\sigma\tau)=\prod_{i<j}\frac{\sigma\tau(j)-\sigma\tau(i)}{j-i}=$$

$$=\prod_{i<j}\left(\frac{\sigma(\tau(j))-\sigma(\tau(i))}{\tau(j)-\tau(i)}\cdot\frac{\tau(j)-\tau(i)}{j-i}\right)$$

$$= \prod_{i<j} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)} \cdot \boxed{\prod_{i<j} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}} =$$

$$(\varepsilon(\tau))$$

$$= \varepsilon(\tau) \cdot \prod_{\tau^{-1}(k) < \tau^{-1}(l)} \frac{\sigma(\tau(\tau^{-1}(l))) - \sigma(\tau(\tau^{-1}(k)))}{\tau(\tau^{-1}(l)) - \tau(\tau^{-1}(k))} =$$

$$= \varepsilon(\tau) \cdot \prod_{\tau^{-1}(k) < \tau^{-1}(l)} \frac{\sigma(l) - \sigma(k)}{l - k}$$

Obs: cum τ e bijectie,

$$\{(\tau(k), \tau(l)) : k, l \in \{1, 2, \dots, n\}, k \neq l\} =$$

$$= \{(i, j) : i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i \neq j\},$$

$$\boxed{= \varepsilon(\tau) \prod_{k<l} \frac{\sigma(l) - \sigma(k)}{l - k}} = \varepsilon(\tau)\, \varepsilon(\sigma).$$

$c = (i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$

$c^2 = (i_1, i_3, i_5, i_2, i_4)$

$c^3 = (i_1, i_4, i_2, i_5, i_3)$

$c^4 = (i_1, i_5, i_4, i_3, i_2)$

$c^5 = e$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 6 & 5 & 4 & 7 & 8 & 11 & 3 & 12 & 10 & 14 & 16 & 15 & 13 & 9 & 2 & 1 & 17 \end{pmatrix} \in S_{17}$$

6

1) Scrieți-o ca produs de transpoziții și ca produs de cicluri disjuncte.

Sol: $\sigma = (1,6,11,16)(2,5,8,12,15)(3,4,7)(9,10,14)$ (prod de cicluri disjuncte)
(cicli disjuncți)

$= (1,6)(6,11)(11,16)(2,5)(5,8)(8,12)(12,15)(3,4)(4,7) \cdot (9,10)(10,14)$ (prod de transpoziții)

2) Determinați signatura și ordinul.

Sol: $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{m}$, m = nr. de transpoziții din descompunere

$= (-1)^{11} = -1$. (deci σ e impară)

$\text{ord}(\sigma) =$ c.m.m.m.c. al lg. ciclurilor disj. din desc. lui $\sigma = [4,5,3,3] = 60$.

3) Calculați $\sigma^{-1}, \sigma^{7}, \sigma^{2019}$.

$\sigma^{-1} = (16,11,6,1)(15,12,8,5,2)(7,4,3)(9,14,10)$

$\sigma^{7} = (1,6,11,16)^{7}(2,5,8,12,15)^{7}(3,4,7)^{7}(9,10,14)^{7}$

$= (1,16,11,6)(2,8,15,5,12)(3,4,7)(9,10,14)$

ciclurile disjuncte comută

Știm că $\sigma^{60} = e$

Atunci $\sigma^{2019} = \sigma^{60 \cdot 33 + 39} = (\sigma^{60})^{33} \cdot \sigma^{39} =$

$= \sigma^{39} = (1,6,11,16)^{39}(2,5,8,12,15)^{39}(3,4,7)^{39} \cdot (9,10,14)^{39} =$

$= (1, 16, 11, 6)(3, 15, 12, 8, 5)$

4) Rezolvați în S_{17} ec $x^2 = \sigma$.

Sol. Pp că are sol; fie x una.

Atunci x^2 e pară, σ e impară, de

Răi mâne, deci că ec. nu are soluții.

CURS 12 ALGEBRĂ S14 (1)

$a\cdot 0 = a\cdot(0+0) = a\cdot 0 + a\cdot 0 \xrightarrow{-a\cdot 0} 0 = a\cdot 0$.

$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] \overset{not}{=} \{\alpha+\beta\sqrt{3} : \alpha,\beta\in\mathbb{Q}\}$

$(x_1,x_2)+(y_1,y_2) = (x_1 \underset{\text{„+" din } R_1}{+} y_1, x_2 \underset{\text{„+" din } R_2}{+} y_2)$

„+" nou definită pe mulțimea produs

A dă un „tablou" 5x4 cu elemente din R = „a preciza" pt fiecare poziție ij elementul corespunzător din R.

$(f\circ g)(xy) = f(g(xy)) = f(g(x)g(y)) = (f\circ g)(x)\cdot(f\circ g)(y)$.

$= f\circ g(x)\, f\circ g(y))$

$a^3 = a^2\cdot a = a\cdot a = a^2 = a$

$U(R) = U((R,\cdot))$

2

$$b \cdot a = 1$$
$$a \cdot nenul = 0 \Big\} \Rightarrow$$

$b \cdot a \cdot nenul = 0 \Rightarrow nenul = 0$ ↯

Știm deja: $U(\mathbb{Z}_n) = U(\mathbb{Z}_n, \cdot) =$
$= \{\hat{a} \in \mathbb{Z}_n : (a,n) = 1\}$.

Notăm ad-hoc $Div_0(R) = \{x \in R :$
x e divizor al lui zero$\}$.

Fie $\hat{a} \in \mathbb{Z}_n$. $\hat{a} \in Div_0(\mathbb{Z}_n) \Leftrightarrow \exists\, \hat{b} \in \mathbb{Z}_n \setminus \{\hat{0}\}$

$\hat{a}\hat{b} = \hat{0} \Leftrightarrow \exists\, b \in \mathbb{Z} \setminus n\mathbb{Z}$ $\quad n \mid ab \Big\} \Rightarrow n \mid b$ ↯.

Pp. $(n, a) = 1$

~~Deci, (n,a~~ Rămâne, deci, că $(a,n) \neq 1$.

Reciproc, dacă $(a,n) \neq 1$, punem
$d = (a,n)$ și $n_1 = \frac{n}{d}$. Atunci în
$\mathbb{Z}_n$ avem $\hat{a} \cdot \hat{n}_1 = \widehat{a \cdot n_1} = \widehat{\frac{a \cdot n}{d}} = \widehat{\frac{a}{d} \cdot n} = \hat{0}$,
$\frac{a}{d} \in \mathbb{Z}$

și $\hat{n}_1 \neq \hat{0}$

În concluzie, $Div_0(\mathbb{Z}_n) = \{\hat{a} \in \mathbb{Z}_n : (a,n) \neq 1\}$. (3)

Fie $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, ($p_i$ sunt nr.-re prime distincte 2 câte 2)

Fie $a \in \mathbb{Z}$. Atunci $\hat{a} \in N(\mathbb{Z}_n) \iff$

$\exists t \in \mathbb{N}^*$ $\hat{a}^t = \hat{0} \iff$

$\exists t \in \mathbb{N}^*$ $n \mid a^t \iff$

$\exists t \in \mathbb{N}^*$ $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r} \mid a^t \iff$

$p_i \mid a$ $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ $\overset{(p_i, p_j) = 1}{\iff}$

$p_1 p_2 \cdots p_r \mid a$

Reciproc, dacă $p_1 p_2 \cdots p_r \mid a$

atunci $\hat{a}^{\max\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}} = \widehat{(p_1 \cdots p_r)^{\max\{\alpha_1 \dots \alpha_r\}}} = \hat{0}$

Consecință:

$$\boxed{N(\mathbb{Z}_{n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}}) = \widehat{p_1 p_2 \cdots p_r} \cdot \mathbb{Z}_n}$$

Idemp$(\mathbb{Z}_n) = ?$ ④

Vom rezolva astfel de ex.
pt n „concret":

Idemp$(\mathbb{Z}_{360}) = ?$

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{Z}_{360} & \longrightarrow & \mathbb{Z}_{2^3}\times\mathbb{Z}_{3^2}\times\mathbb{Z}_5 \\
\hat{a} & \longmapsto & (\bar{a}, \bar{\bar{a}}, \mathring{a}) \\
\hat{0} & \text{———} & \bar{0}, \bar{\bar{0}}, \mathring{0} \\
\widehat{216} & \text{———} & \bar{0}, \bar{\bar{0}}, \mathring{1} \\
\widehat{280} & \text{———} & \bar{0}, \bar{\bar{1}}, \mathring{0} \\
 & & \bar{0}, \bar{\bar{1}}, \mathring{1} \\
 & & \bar{1}, \bar{\bar{0}}, \mathring{0} \\
 & & \bar{1}, \bar{\bar{0}}, \mathring{1} \\
 & & \bar{1}, \bar{\bar{1}}, \mathring{0} \\
 & & \bar{1}, \bar{\bar{1}}, \mathring{1}
\end{array}$$

Explicație: ① $N(R_1\times R_2) \ni (a,b) \Leftrightarrow$
$\exists\, t\ (a,b)^t = (0,0) \Leftrightarrow \exists\, t\ (a^t, b^t) = (0,0)$
$\Leftrightarrow \exists\, t\ \cancel{\exists u}\ a^t = 0 \wedge b^t = 0 \Leftrightarrow (a,b) \in N(R_1)\times N(R_2)$

2) $\mathrm{Idemp}(\mathbb{Z}_{p^\alpha}) \ni \hat{a} \Leftrightarrow \hat{a}^2 = \hat{a} \Leftrightarrow$ 5

$a^2 - a \,\vdots\, p^\alpha \Leftrightarrow a(a-1) \,\vdots\, p^\alpha \Leftrightarrow$

$p^\alpha | a \vee p^\alpha | (a-1) \Leftrightarrow \hat{a} = \hat{0} \vee$

$\hat{a} = \hat{1}$,

$\mathrm{Idemp}(R_1 \times R_2) \ni (a, b) \Leftrightarrow$

$(a, b)^2 = (a, b) \Leftrightarrow$

$(a^2, b^2) = (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = a \\ b^2 = b \end{cases}$

$\Leftrightarrow (a, b) \in \mathrm{Idemp}(R_1) \times \mathrm{Idemp}(R_2)$

1 ONEA RADU-ANDREI 143

2. Mihai Mihail 143

3. STRÎMBEANU LUANA 143

4. ONESCU IANCU-GABRIEL 142

CURS 13 ALGEBRĂ S14 ①

$i_1 : R \to R \times S$, $i_1(x) = (x, 0)$

$i_1(x+x') = (x+x', 0) = (x,0)+(x',0) = i_1(x) + i_1(x')$

$i_1(xx') = (xx', 0) = (x,0)(x',0) = i_1(x)\, i_1(x')$

$\pi_1 : R \times S \to R$, $\pi_1(x,y) = x$,

$\pi_1((x,y)+(x',y')) = \pi_1(x+x', y+y') = x+x' = \pi_1(x,y) + \pi_1(x',y')$.

$\pi_1((x,y)(x',y')) = \pi_1(xx', yy') = xx' = \pi_1(x,y) \cdot \pi_1(x',y')$

$R \xrightarrow{f} S \xrightarrow{g} T$

$(g \circ f)(x_1 + x_2) = g(f(x_1 + x_2)) = g(f(x_1) + f(x_2)) =$
$= g(f(x_1)) + g(f(x_2)) =$
$= (g \circ f)(x_1) + (g \circ f)(x_2)$

$(g \circ f)(x_1 x_2) = g(f(x_1 x_2)) = g(f(x_1) f(x_2)) = g(f(x_1)) g(f(x_2)) =$
$= (g \circ f)(x_1) \cdot (g \circ f)(x_2)$.

$(a+b)+c =$
$((a_0, a_1, \dots) + (b_0, b_1, \dots)) + (c_0, c_1, \dots) =$
$= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots) + (c_0, c_1, \dots) =$
$= ((a_0 + b_0) + c_0, (a_1 + b_1) + c_1, \dots) =$
$= (a_0 + (b_0 + c_0), a_1 + (b_1 + c_1), \dots) =$
$= (a_0, a_1, \dots) + (b_0 + c_0, b_1 + c_1, \dots) =$
$= a + ((b_0, b_1, \dots) + (c_0, c_1, \dots)) = a + (b+c)$

$$(ab)c = ((a_0, a_1, \dots)(b_0, b_1, \dots))(c_0, c_1, \dots) =$$

$$= (\underbrace{a_0 b_0}_{0}, \dots, \underbrace{\sum_{i+j=n} a_i b_j}_{n}, \dots) \cdot (c_0, c_1, c_2, \dots) =$$

$$= (\underbrace{a_0 b_0 c_0}_{0}, \dots, \sum_{i+j=n} t_i c_j, \dots) =$$

$$= (\underbrace{a_0 b_0 c_0}_{0}, \dots, \sum_{i+j=n} (\sum_{k+l=i} a_k b_l) c_j, \dots) =$$

$$= (\underbrace{a_0 b_0 c_0}_{0}, \dots, \sum_{k+l+j=n} a_k b_l c_j, \dots)$$

Analog,

$$a(bc) = (\underbrace{a_0 b_0 c_0}_{0}, \dots, \sum_{u+v+w=n} a_u b_v c_w, \dots),$$

deci $(ab)c = a(bc)$.

$$(1, 0, 0, 0, \dots)(a_0, a_1, a_2, \dots) = (a_0, a_1, a_2, \dots)$$

$$X = (0, \underset{1}{1}, 0, 0, \dots)$$

$$X^2 = (0, 0, \underset{2}{1}, 0, 0, \dots)$$

$$X^3 = (0, 0, 0, \underset{3}{1}, 0, \dots)$$

$$X^n = (\underset{0}{0}, 0, \dots, 0, \underset{n}{1}, 0, 0, \dots)$$

$\varphi: R \to R^{\mathbb{N}}$, $\varphi(a) = (a, 0, 0, 0, \dots)$

e morfism injectiv & unitar de inele

$$(2, 0, 0, \dots) \cdot X^3 = (2, 0, 0, 0, \dots)(0, 0, 0, \underset{3}{1}, 0, 0, \dots)$$

$$= (0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, \dots)$$

$$(a,0,0,\dots)\cdot X^n = (a,0,0,\dots)\cdot(0,0,\dots,0,\underset{n}{1},0,\dots)$$

3

$$(0,0,\dots,0,a,0,0,\dots)$$

$$(a_0,a_1,a_2,a_3,\dots) =$$

$$= \cancel{(a_0,0,0,\dots)\cdot(1,0,0,0\dots)} +$$

$$= (a_0,0,0,0,\dots) +$$

$$(0,a_1,0,0,0\dots) +$$

$$(0,0,a_2,0,0,\dots) +$$

$$(0,0,0,a_3,0,\dots) +$$

$$= (a_0,0,0,\dots)\cdot(1,0,0,\dots) +$$

$$(a_1,0,0,\dots)\cdot\underbrace{\boxed{(0,1,0,\dots)}}_{X} +$$

$$(a_2,0,0,\dots)\cdot\underbrace{\boxed{(0,0,1,0,\dots)}}_{X^2} +$$

$$=$$

$$= a_0\cdot 1 + a_1\cdot X + a_2 X^2 + \dots =$$

$$= a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3 + \dots$$

$$(1 - 5x^2 + 7x^3 - 2x^4 + 3x^5 - \dots) +$$

$$x^4 - 2x^5 + \dots$$

$$5x^2 + 7x^3 - x^4 + x^5 + \dots$$

$$(x^3 - 5x^4 + 2x^5 + \dots) +$$

$$(-x^3 + 5x^4 + 7x^5 + \dots)$$

④

vrei: $(a_0+a_1X+a_2X^2+\dots)(b_0+b_1X+b_2X^2+\dots)=1$

$\Updownarrow$

$a_0b_0=1 \iff b_0=a_0^{-1}$

$a_0b_1+a_1b_0=0 \iff b_1=\cancel{a_0^{-1}(a_1b_0)}-a_0^{-1}a_1b_0$,

$a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0 \iff b_2=-a_0^{-1}(a_1b_1+a_2b_0)$

$\boxed{2X+5X^2-7X^3+29X^5}$

$(a_0+a_1X+\dots+a_mX^m)(b_0+b_1X+\dots+b_nX^n)=1$

$\iff \begin{cases} a_0b_0=1 \Rightarrow b_0,a_0\in U(R) \\ \cancel{a_0b_1+a_1b_0=0 \Rightarrow b_0^{-1}} \Rightarrow a_m^{n+1}=0 \Rightarrow a_m\in N(R) \\ a_m^{n+1}b_0=0 \\ \text{Inductiv:} \\ a_mb_{n-2}+a_{m-1}b_{n-1}+a_{m-2}b_n=0 \xrightarrow{\cdot a_m^2} a_m^3\cdot b_{n-2}=0 \\ a_mb_{n-1}+a_{m-1}\cdot b_n=0 \xrightarrow{\cdot a_m} a_m^2\cdot b_{n-1}=0 \\ a_m\cdot b_n=0 \end{cases}$

$a_0+a_1X+\dots+a_{m-1}X^{m-1}=(a_0+\dots+a_mX^m)-a_mX^m$

$U \qquad U \qquad N$

$f\in R[[X]]$, $f=a_0+Xg$

$f^2=f \iff (a_0+Xg)^2=a_0+Xg \iff$

$a_0^2+\boxed{2a_0Xg}+X^2g^2=a_0+Xg \iff \begin{cases} a_0^2=a_0 \\ 2a_0g+Xg^2=g \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a_0^2=a_0 \\ 2a_0^2g-a_0g=-a_0Xg^2 \end{cases} \iff \begin{cases} a_0=a_0^2 \\ a_0g=-a_0Xg^2=-a_0g\cdot Xg \end{cases}$

$\underset{a_0}{\overset{\shortparallel}{a_0^2}}$ Dar $\underline{\mathrm{ord}(MD)}\geq 1+\mathrm{ord}(a_0g)=1+\mathrm{ord}(MS)$.

$\mathrm{ord}(MS)=$ deci $\boxed{a_0g=0}$;

din $a_0^2 + 2a_0Xg + X^2g^2 = a_0 + Xg$ obținem ⑤

$a_0^2 + X^2g^2 = a_0 + Xg \overset{a_0 = a_0^2}{\Longrightarrow} X^2g^2 = Xg \Rightarrow$

$(Xg)^2 = Xg$. Atunci, $\operatorname{ord}(Xg)^2 = \operatorname{ord}(Xg)^2 \geq$

$2\operatorname{ord}(Xg)$, deci $\boxed{Xg = 0 \Rightarrow g = 0}$,

Ca urmare, $f = a_0$

---

⑧ Determinați nr. polinoamelor inversabile de grad ≤ 4 din $\mathbb{Z}_{40}[X]$.

Sol: $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4 \in \mathbb{Z}_{40}[X]$ e inv.

$\Leftrightarrow$ $a_0 \in U(\mathbb{Z}_{40})$ și $a_1, \dots, a_4 \in N(\mathbb{Z}_{40})$.

Dar $|U(\mathbb{Z}_{40})| = \varphi(40) = 40\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = 16$;

$|N(\mathbb{Z}_{40})| = |\hat{10}\mathbb{Z}_{40}| = 4$.

Ca urmare, în $\mathbb{Z}_{40}[X]$ găsim

$16 \cdot 4^4 = 2^{12} = 4096$ pol. inversabile de grad ≤ 4.

$\mathbb{Z}_3[X]$ $\quad f = \hat{1} \neq g = X^3 - X + \hat{1}$;

$\tilde{f}(\hat{0}) = \hat{1} = \tilde{g}(\hat{0})$

$\tilde{f}(\hat{1}) = \hat{1} = \tilde{g}(\hat{1})$

$\tilde{f}(\hat{2}) = \hat{1} = \tilde{g}(\hat{2})$

$\mathbb{Q}(X) = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in \mathbb{Q}[X],\ g \neq 0 \right\}$

CURS 14 ALGEBRA S1/4

$\mathbb{Z}[i\sqrt{5}] = \{a+bi\sqrt{5} : a, b \in \mathbb{Z}\}$.

$2 \cdot 3 = 6 = (1+i\sqrt{5})(1-i\sqrt{5})$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$I \trianglelefteq R$; $J \trianglelefteq S$.

Fie $u_1 = (x_1, y_1)$, $u_2 = (x_2, y_2) \in I \times J$.

$u_1 - u_2 = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in I \times J$

Fie $\alpha = (\beta, \gamma) \in R \times S$

$\alpha \cdot u_1 = (\beta, \gamma)(x_1, y_1) = (\beta x_1, \gamma y_1) \in I \times J$.

Deci $I \times J \trianglelefteq R \times S$.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

	00	01	10	11
00	00	01	10	11
01	01	00	11	10
10	10	11	00	01
11	11	10	01	00

{00}

{00, 01, 10, 11}

{00, 01}

{00, 10}

{00, 11}

Fie $J \leq^{0} R_1 \times R_2$.

Consider $I_1 \overset{not}{=} \{ a \in R_1 : \exists b \in R_2 \ (a,b) \in J \}$

$I_2 \overset{not}{=} \{ b \in R_2 : \exists a \in R_1 \ (a,b) \in J \}$.

Dacă $a, a' \in I_1$, $\exists b, b' \in R_2$ $(a,b)(a',b') \in J$

Atunci $(a-a', b-b') = (a,b) - (a',b') \in J$,

deci $a - a' \in I_1$.

Fie $a \in I_1$, $r \in R_1$. Atunci $\exists b \in R_2$ $(a,b) \in J$.

De aici $(r,0) \cdot (a,b) \in J \Rightarrow (ra, 0) \in J$,

deci $ra \in I_1$.

Ca urmare, $I_1 \leq^{P} R_1$.

Analog, $I_2 \leq^{P} R_2$

Evident, dacă $(a,b) \in J$, atunci $a \in I_1$ și $b \in I_2$. Deci, $\underline{J \subset I_1 \times I_2}$ (1)

Fie $(x_1, x_2) \in I_1 \times I_2$.

Atunci: • $x_1 \in I_1 \Rightarrow \exists y_1 \in R_2$ $(x_1, y_1) \in J$

• $x_2 \in I_2 \Rightarrow \exists \xi_1 \in R_1$ $(\xi_1, x_2) \in J$.

De aici, $(x_1, x_2) = (1,0)(x_1,y_1) + (0,1)(\xi_1, x_2) \in J$

Deci, $\left.\begin{array}{l} I_1 \times I_2 \subset J \\ (1) \end{array}\right\} \Rightarrow J = I_1 \times I_2$ □

$\mathbb{Z}_n \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}_d$ $\quad$ $d \mid n$ $\quad$ 3

$\varphi(\hat{a}) = \bar{a}$.

($\hat{a} = \hat{b} \Rightarrow n \mid b-a \Rightarrow d \mid n \mid b-a$
$\to \bar{a} = \bar{b}$, deci φ
e corect def).

Avem: $\forall\, \bar{c} \in \mathbb{Z}_d$, $\bar{c} = \varphi(\hat{c})$, deci
$\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{Z}_d$.

Evident, $\varphi(\hat{a} + \hat{b}) = \varphi(\widehat{a+b}) = \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} = \varphi(\hat{a}) + \varphi(\hat{b})$,

$\varphi(\hat{a} \cdot \hat{b}) = \varphi(\widehat{ab}) = \overline{ab} = \bar{a}\,\bar{b} = \varphi(\hat{a})\varphi(\hat{b})$.

Deci φ e morfism de inele (chiar unitar, căci $\varphi(\hat{1}) = \bar{1}$)

$\ker \varphi = \{\hat{a} \in \mathbb{Z}_n : \varphi(\hat{a}) = \bar{0}\} = \{\hat{a} \in \mathbb{Z}_n : \bar{a} = \bar{0}\}$
$= \{\hat{a} \in \mathbb{Z}_n : d \mid a\} = \hat{d}\mathbb{Z}_n$.

cf TF Izom, $\dfrac{\mathbb{Z}_n}{\ker \varphi} \simeq \operatorname{Im} \varphi$, i.e.,

$\dfrac{\mathbb{Z}_n}{\hat{d}\mathbb{Z}_n} \simeq \mathbb{Z}_d$.

(4)

$R\times S \xrightarrow{f} \frac{R}{I}\times\frac{S}{J}$

$f(r,s)=(\hat{r},\bar{s})$ $\quad$ $\left(\begin{array}{l}\hat{r}=r+I\\ \bar{s}=s+J\end{array}\right)$

$f((r_1,s_1)+(r_2,s_2))=f(r_1+r_2,s_1+s_2)=$

$=(\widehat{r_1+r_2},\overline{s_1+s_2})=(\hat{r}_1+\hat{r}_2,\bar{s}_1+\bar{s}_2)=$

$=(\hat{r}_1,\bar{s}_1)+(\hat{r}_2,\bar{s}_2)=f(r_1,s_1)+f(r_2,s_2)$.

$f((r_1,s_1)\cdot(r_2,s_2))=f(r_1r_2,s_1s_2)=$

$=(\widehat{r_1r_2},\overline{s_1s_2})=(\hat{r}_1\hat{r}_2,\bar{s}_1\bar{s}_2)=$

$=(\hat{r}_1,\bar{s}_1)\cdot(\hat{r}_2,\bar{s}_2)=f(r_1,s_1)f(r_2,s_2)$

Prin urmare, f e morfism de inele

(dacă unitar e: $f(1,1)=(\hat{1},\bar{1})$ deci f e unitar)

Fie $\hat{x}\in\frac{R}{I}$, $\bar{y}\in\frac{S}{J}$. Atunci $(\hat{x},\bar{y})=f(x,y)$,

deci f e surjectivă.

Fie $(r,s)\in R\times S$. $f(r,s)=(\hat{0},\bar{0})\Leftrightarrow$

$(\hat{r},\bar{s})=(\hat{0},\bar{0})\Leftrightarrow r\in I\wedge s\in J\Leftrightarrow(r,s)\in I\times J$

Deci $\ker f=I\times J$. Cf TFI, avem,

$\frac{R\times S}{I\times J}\simeq\frac{R}{I}\times\frac{S}{J}$.

Aplicație: Determinați idealele și până la izomorfism, inelele factor ale inelului $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{C}$. (1)

Soluție: Aplicații:

- Orice ideal al lui $R \times S$ e de forma $I \times J$ cu $I \trianglelefteq R$ și $J \trianglelefteq S$.
- $\frac{R \times S}{I \times J} \simeq \frac{R}{I} \times \frac{S}{J}$.
- Idealele lui $\mathbb{Z}_n$ sunt $d\mathbb{Z}_n$ cu $d \mid n$
- $\frac{\mathbb{Z}_n}{d\mathbb{Z}_n} \simeq \mathbb{Z}_d$.
- Orice corp are exact 2 ideale: $\{0\}$ și k, (deci, idealele lui $\mathbb{C}$ sunt $\{0\}$ și $\mathbb{C}$.
- $\frac{R}{R} \simeq \{0\}$; $\frac{R}{\{0\}} \simeq R$.
- $\{0\} \times R \simeq R$; $R \times \{0\} \simeq R$.

Idealele lui:

Ideale	Inele factor
$\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{C}$	$\frac{\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{C}}{\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{C}} \simeq \frac{\mathbb{Z}_6}{\mathbb{Z}_6} \times \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{C}} \simeq \{\hat{0}\} \times \{0\} \simeq \{0\}$,
$\mathbb{Z}_6 \times \{0\}$	$\frac{\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{C}}{\mathbb{Z}_6 \times \{0\}} \simeq \frac{\mathbb{Z}_6}{\mathbb{Z}_6} \times \frac{\mathbb{C}}{\{0\}} \simeq \{\hat{0}\} \times \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}$.
$\hat{2}\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{C}$	$\frac{\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{C}}{\hat{2}\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{C}} \simeq \frac{\mathbb{Z}_6}{\hat{2}\mathbb{Z}_6} \times \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \{0\} \simeq \mathbb{Z}_2$
$\hat{2}\mathbb{Z}_6 \times \{0\}$	
$\hat{3}\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{C}$	
$\hat{3}\mathbb{Z}_6 \times \{0\}$	$\frac{\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{C}}{\hat{3}\mathbb{Z}_6 \times \{0\}} \simeq \frac{\mathbb{Z}_6}{\hat{3}\mathbb{Z}_6} \times \frac{\mathbb{C}}{\{0\}} \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{C}$.
$\{\hat{0}\} \times \mathbb{C}$	
$\{\hat{0}\} \times \{0\}$	

$\boxed{\text{Prop}}$ Dacă R e inel unitar, ~~atunci~~ atunci idealele bilaterale ale lui $M_n(R)$ sunt exact cele de forma $M_n(J)$ cu $J \trianglelefteq R$. În plus, dacă $J \trianglelefteq R$, atunci $\frac{M_n(R)}{M_n(J)} \simeq M_n\left(\frac{R}{J}\right)$

Determinați idealele bilat. și, până la izomorfism, inelele factor ale lui $M_3(\mathbb{Z}_4)$, respectiv ale lui $M_4(\mathbb{C})$.

CURS 1 SERIA 14 (1)

REGULI DE SCRIERE A DEMONSTRAȚIILOR

(1) NU DEMONSTRĂM DECÂT ADEVĂR! (a.î. cetiți „instrumentele de care dispunem ne permit doar să pornim de la niște afirmații (pe care le interpretăm ca fiind „adevărate") și să ajungem, în acord cu anumite reguli, la alte afirmații (pe care le vom interpreta ca fiind adevărate)

MORALA: Ca să demonstrăm că o afirmație p e falsă, demonstrez de fapt că ⌉p (e adevărată).

②

$\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$

$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ $\vdash \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$\neg(p \wedge \neg q) \equiv$

$\neg p \vee (\neg(\neg q)) \equiv$

$\neg p \vee q \overset{def}{\equiv} p \Rightarrow q$

$P(x): x \in \mathbb{Z} \quad 3x+4=10$

$Q(x,y): x \in \mathbb{R} \; y \in \mathbb{R} \quad 2x+5y > 19$

„există valoare $x \in \mathbb{Z}$ pt care $3x+4=10$"

se notează $(\exists x) P(x)$ (dacă $\exists x \in \mathbb{Z} \; 3x+4=10$)

e prop!

4 pt orice valoare $x \in \mathbb{Z}$ $3x+4=10$ ③

e prop.

se notează $(\forall x) P(x)$ sau $\forall x \in \mathbb{Z}\ 3x+4=10$

$\neg((\exists x) P(x))$ e echivalent cu

$(\forall x) \neg P(x)$

$\neg((\forall x) P(x))$ e echivalent cu

$(\exists x) \neg P(x)$

~~ex~~ • Dacă într-un enunț apar mai multe variabile cuantificate, el se neagă aplicând regulile anterioare în mod iterat.

ex: $\neg(\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{Q}\ \boxed{x \geq 5y-1})$

e echivalent cu

$\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{Q}\ x < 5y-1$

① În scrierea demonstrațiilor ④ trebuie mers cu IMPLICAȚII ARGUMENTATE de la CE ȘTIM la CE VREM SĂ DEMONSTRĂM

ex: $\forall x \in \mathbb{R},\ x^4+94 > 16x^2$

dem: Fie $x \in \mathbb{R}$

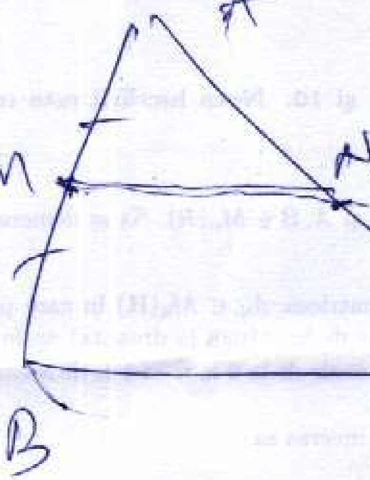
Atunci $(x^2-8)^2 \geq 0 \Rightarrow$

$$x^4-16x^2+64 \geq 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{x^4+94 > x^4+64 \geq 16x^2} \ \square$$

APARENTĂ excepție: Metoda reducerii la absurd

(ea se aplică așa: presupunem că e falsă concluzia și, pe baza unui raționament corect, ajungem să arătăm că e falsă ipoteza (sau la contradicție cu un fapt matematic cunoscut).)

ex: 

$[AM] \equiv [MB]$

$MN \parallel BC$

$[AN] \equiv [NC]$

(5)

dem: Presupunem prin absurd că $[AN] \not\equiv [NC]$.

Notăm cu P mijlocul lui $[AC]$.

Evident, $N \neq P \Rightarrow MN \neq MP$

cf T. liniei mijlocii, $MP \parallel BC$

ip $\Rightarrow MN \parallel BC$

} contradicție cu Postulatul lui Euclid

Rămâne, deci, că $[AN] \equiv [NC]$.

$\neg q \Rightarrow \neg p$ $\qquad$ $p \Rightarrow q$

$\equiv$ $\qquad\qquad\qquad$ $\equiv$

$\neg(\neg q) \vee \neg p$ $\qquad$ $\neg p \vee q$

$\equiv$

$q \vee \neg p$ $\equiv$ $\neg p \vee q$

(3) Dacă avem de ~~arătat~~ demonstrat (6)
o prop. de forma
$(\exists x)\ P(x)$, considerăm o valoare (ADMISIBILĂ!) CONVENABILĂ („convine”/„dau”) pt x și facem demonstrația cu ea

ex: $\exists x \in \mathbb{Q}\ \ x^2+209=30x$

dem: Dau $x=11$.
Evident, $x=\frac{11}{1}\in\mathbb{Q}$.
Atunci $x^2+209=11^2+209=330=30\cdot 11=30x$ □

ex: $\exists x\in\mathbb{R}\ \exists y\in\mathbb{R}\ \ 5x+4y>17$

dem: Dau $x=5$
Dau $y=5$
Atunci $\boxed{5x+4y=5\cdot 5+4\cdot 5=45>17}$ □

(4) Dacă avem de demonstrat o prop de forma $(\forall x)P(x)$, considerăm o valoare (adică [illegible]) ARBITRARĂ („fixe") pt x și facem demonstrația pe baza proprietăților generali ai variabilelor de tipul lui x.

(7)

Iancu Valeria-Mădălina
Grupa 106
5