Seminar 7

17.11.2020

Exc 1 Arătați că un grup $(G, \cdot)$ în care $x^2 = 1$ $(\forall)\, x \in G$, este un grup abelian.

Dem Vrem să dem. că $x \cdot y = y \cdot x$ $(\forall)\, x, y \in G$.

$\boxed{(\forall)\, x}$, $x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = x^{-1}\ (\forall)\, x \in G.}$

$x \cdot y = x^{-1} \cdot y^{-1}$ $(\forall)\, x, y \in G$

$x^{-1} \cdot y^{-1} \underset{\text{de calcul în grup}}{\overset{\text{Reguli}}{=}} (yx)^{-1} = yx$ $\Rightarrow$

$xy = yx$ $(\forall)\, x, y \in G$.

$\Downarrow$ G e abelian

$(abcd)^{-1} = d^{-1} \cdot c^{-1}\, b^{-1} \cdot a^{-1}$

SAU

$1 = x^2 \cdot y^2 = (xy)^2 \Rightarrow xx \cdot y \cdot y = xyxy \mid \cdot_s x^{-1}$

$\Downarrow$

$xyy = yxy \mid \cdot_d y^{-1}$

$\Downarrow$

$xy = yx$ $(\forall)\, x, y \in G$

Fie $G_1 = (\mathbb{Z}_4, +)$, $G_2 = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$, $G_3 = (\mathbb{Z}_8, +)$

$G_1 = (\mathbb{Z}_4, +)$

$ord(\hat{1}) = 4$ $ord(\hat{3}) = 4$

$ord(\hat{2}) = 2$

$G_1 = \langle \hat{1} \rangle = \langle \hat{3} \rangle$

tabla lui G_1 →

+	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{0}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$
$\hat{1}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$
$\hat{2}$	$\hat{2}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$
$\hat{3}$	$\hat{3}$	$\hat{0}$	$\hat{1}$	$\hat{2}$

$G_2 = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +) \to$ grupul lui Klein

$+$	$(\hat{0},\hat{0})$	$(\hat{0},\hat{1})$	$(\hat{1},\hat{0})$	$(\hat{1},\hat{1})$
$(\hat{0},\hat{0})$	$(\hat{0},\hat{0})$	$(\hat{0},\hat{1})$	$(\hat{1},\hat{0})$	$(\hat{1},\hat{1})$
$(\hat{0},\hat{1})$	$(\hat{0},\hat{1})$	$(\hat{0},\hat{0})$	$(\hat{1},\hat{1})$	$(\hat{1},\hat{0})$
$(\hat{1},\hat{0})$	$(\hat{1},\hat{0})$	$(\hat{1},\hat{1})$	$(\hat{0},\hat{0})$	$(\hat{0},\hat{1})$
$(\hat{1},\hat{1})$	$(\hat{1},\hat{1})$	$(\hat{1},\hat{0})$	$(\hat{0},\hat{1})$	$(\hat{0},\hat{0})$

$G_2 = \{(\hat{0},\hat{0}), (\hat{0},\hat{1}), (\hat{1},\hat{0}), (\hat{1},\hat{1})\}$

$\Rightarrow \operatorname{ord}((\hat{0},\hat{1})) = 2 = \operatorname{ord}((\hat{1},\hat{0})) = \operatorname{ord}((\hat{1},\hat{1}))$

$\operatorname{ord}((\hat{0},\hat{0})) = 1$

$\Downarrow$

G nu e ciclic

$G \overset{?}{\underset{\text{evid}}{=}} \langle (\hat{0},\hat{1}), (\hat{1},\hat{1}) \rangle$.

$\Uparrow$

$(\hat{0},\hat{1}) + (\hat{1},\hat{1}) = (\hat{1},\hat{0})$, $\underline{(\hat{0},\hat{1})}$, $\underline{(\hat{1},\hat{1})}$, $(\hat{0},\hat{1}) + (\hat{0},\hat{1}) = \underline{(\hat{0},\hat{0})}$

Obs În orice grup $(G,\cdot)$ $\boxed{\operatorname{ord}(1_G) = 1}$.

Exc 2 Fie grupurile $U(\mathbb{Z}_8,\cdot)$ și $(U_4 \doteq \{z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1\}, \cdot)$. Identificați cu cine sunt izomorfe grupurile și precizați dacă sunt izomorfe între ele.

$U(\mathbb{Z}_8,\cdot) \overset{\text{vezi}}{\underset{C7}{=}} \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$

$U(\mathbb{Z}_8,\cdot) = \langle \bar{3}, \bar{5} \rangle = \langle \bar{3}, \bar{7} \rangle = \langle \bar{5}, \bar{7} \rangle$

$\operatorname{ord}(\bar{3}) = \operatorname{ord}(\bar{5}) = \operatorname{ord}(\bar{7}) = 2$

tabla lui $U(\mathbb{Z}_8, \cdot)$

$\cdot$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$
$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$
$\overline{5}$	$\overline{5}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$
$\overline{7}$	$\overline{7}$	$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{1}$

tabla lui $(U_4, \cdot)$

$\cdot$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

$U_4 = \{\pm 1, \pm i\}$

$i^2 = -1$

Se observă că $U(\mathbb{Z}_8, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ și $(U_4, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}_4, +)$ (prin suprapunerea tablelor via (identificarea) bijecțiile

$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +) \simeq (U(\mathbb{Z}_8), \cdot)$

$(\hat{0}, \hat{0}) \xrightarrow{f} \overline{1}$

$(\hat{0}, \hat{1}) \xrightarrow{f} \overline{3}$

$(\hat{1}, \hat{0}) \xrightarrow{f} \overline{5}$

$(\hat{1}, \hat{1}) \xrightarrow{f} \overline{7}$

Exc! f morf. $\Downarrow$ $\underline{f \text{ izom.}}$

$(\mathbb{Z}_4, +) \simeq (U_4, \cdot)$

$\tilde{0} \xrightarrow{g} 1$

$\tilde{1} \xrightarrow{g} i$

$\tilde{2} \xrightarrow{g} -1$

$\tilde{3} \xrightarrow{g} -i$

Exc! g morf. $\Downarrow$ g izomorf.

$f((\hat{0}, \hat{1}) + (\hat{1}, \hat{0})) \overset{??}{=} f((\hat{0}, \hat{1})) \cdot f((\hat{1}, \hat{0})) = \overline{3} \cdot \overline{5} = \overline{7}$

$\parallel$

$f((\hat{1}, \hat{1})) = \overline{7}$

Arătați că $(\mathbb{Z}_4,+)$ nu este izomorf cu $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$!

Pp absurd că există un izom de grupuri $f:(\mathbb{Z}_4,+)\to(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$. $f(\tilde{1})\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \Rightarrow$

$f(\tilde{1})$ are ordin 1 (dc $f(\tilde{1})=(\hat{0},\hat{0})$) sau $f(\tilde{1})$ are ordin 2 (dacă $f(\tilde{1})\neq(\hat{0},\hat{0})$)

$\hookrightarrow f(\tilde{1})+f(\tilde{1})=(\hat{0},\hat{0})$

$\parallel$ f morf de grupuri

$f(\tilde{1}+\tilde{1})=f(\tilde{2})=(\hat{0},\hat{0})$

$\to f(\tilde{0})=(\hat{0},\hat{0})$.

f nu e injectivă ✗

$\Downarrow$

Pp e falsă $\Rightarrow$ $(\mathbb{Z}_4,+)$ nu e izomorf cu $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$

SAU

Pp abs că $(\exists)$ f izom $\quad \operatorname{ord}(\tilde{1})=4 \rightsquigarrow$ Afirm: $\operatorname{ord} f(\tilde{1})=4$ ✗ (în $(\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2,+)$ nu am elemente de ordin 4

$$f(\tilde{1})+f(\tilde{1})=f(\tilde{2}) \overset{f}{\underset{\text{izom.}}{\Longrightarrow}} f(\tilde{1})+f(\tilde{1})\neq(\hat{0},\hat{0}) \text{ ✗}$$

$f(\tilde{0})=(\hat{0},\hat{0})$

$\left(f(\tilde{1})\in\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2 \right.$

$\Downarrow$

$\left. f(\tilde{1})+f(\tilde{1})=(\hat{0},\hat{0}) \right)$

$\boxed{\text{Propr}}$ Fie $(G_1,\circ)$ și $(G_2,\bullet)$ 2 grupuri izomorfe și $x\in G_1$ a.î. $\operatorname{ord}(x)=n$. Dacă $f:(G_1,\circ)\to(G_2,\circ)$ este un izom. $\Rightarrow \operatorname{ord}(f(x)) = n$.

Dem $f:(G_1,\cdot)\to(G_2,\cdot)$ $\boxed{\text{izom. de gr.}}$

$\boxed{ord(x)=n} \Rightarrow x^n=1_{G_1}$ şi $x^t\neq 1_{G_2}\ \forall t\in\mathbb{N}^*\ t<n.$

$f(x^n)=f(\underbrace{x\cdot x\cdot\ldots\cdot x}_{n\text{ ori}})=f(x)\cdot f(x)\cdot\ldots\cdot f(x)=f(x)^n$ $\Big/ \Rightarrow f(x)^n=1_{G_2} \Rightarrow$

$\|$

$f(1_{G_1}) = 1_{G_2}$

ord $f(x)\leq n.$

Pp abs că $(\exists)\,t\in\mathbb{N}^*$ $t<n$ a.î. $f(x)^t=1_{G_2}\Rightarrow f(x^t)=1_{G_2}$, $f(1_{G_1})=1_{G_2}$ $\Big| \xrightarrow[\text{izom (bij)}]{f}$

$x^t=1_{G_1} \Rightarrow ord(x)<n$ ~~δ~~ $\Rightarrow$ presupunerea e falsă $\Rightarrow \boxed{ord(f(x))=n}$

Ex Arătaţi că $(\mathbb{Z}_6,+)\not\cong(S_3,\circ)$. (studiaţi tablele celor 2 grupuri)

Temă! Uitaţi-vă la ordinele elementelor (vezi C7)

$(\mathbb{Z}_6,+)$ e grup abelian ; $(S_3,\circ)$ nu e grup abelian

$(1\ 2)\circ(1\ 3)\neq(1\ 3)\circ(1\ 2)$

$\boxed{\text{Exc}}$ Arătați că un grup cu 4 elemente este izomorf sau cu $(\mathbb{Z}_4, +)$ sau cu $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$. (Cu alte cuvinte, există doar 2 grupuri "distincte" neizomorfe cu 4 elemente)

$\boxed{\text{Exc}}$ Arătați că un grup cu 6 elemente este izomorf sau cu $(\mathbb{Z}_6, +)$ sau cu $(S_3, \circ)$.

$\boxed{\text{Exc}}$ Arătați că un grup cu p elemente, unde p e prim, este izomorf cu $(\mathbb{Z}_p, +)$.