

SUBIECTE (Geometrie).

- ① Fie  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}$  spatiul vectorial canonic. Considerăm  $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  forma pătratică, unde  $G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  este matricea asociată lui  $Q$  în raport cu reperul canonic al lui  $\mathbb{R}^3$ .
- a)  $Q$  este pozitiv definită; b)  $Q$  este negativ definită;  
 c)  $Q$  are semnatura  $(2, 1)$ ; d)  $Q$  are semnatura  $(1, 2)$ .
- ② În spatiul vectorial euclidian canonic  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  se consideră sistemul de vectori  $S = \{u = (1, 2, 3), v = (-1, 2, 0)\}$ .  
 Să se calculeze produsul vectorial  $w = u \times v$ .
- a)  $w = (-6, -3, 4)$ ; b)  $w = (6, -3, 4)$ ; c)  $w = (6, 3, -4)$ ; d)  $w = (1, 2, 1)$
- ③ Fie  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot) / \mathbb{R}$  spatiul vectorial canonic și endomorfismul  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x) = (x_1, x_1, x_1 + x_2 + x_3)$ .
- a)  $\dim \text{Ker } f = 1$ ; b)  $\dim \text{Ker } f = 2$ ; c)  $\dim \text{Im } f = 1$ ; d)  $f \in \text{Aut}(\mathbb{R}^3)$ .
- ④ În spatiul vectorial euclidian canonic  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  se consideră subspatiul vectorial  $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$  și  $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ .
- a)  $U^\perp = \langle \{(1, 1, -1)\} \rangle$ ; b)  $U^\perp = \{(a, -a, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$   
 c)  $U^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}\}$ ; d) a, b, c false.



- 5) Fie  $(\mathbb{R}^3, \cdot)$  spațiul vectorial canonic. Considerăm  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x) = (3x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 2x_1 - 2x_2 + 3x_3)$  și vectorii  $u_1 = (1, 1, 0)$ ,  $u_2 = (0, 1, 1)$ ,  $u_3 = (1, 1, 1)$ ,  $u = (1, 2, 1)$ .
- a) Arătați că  $u_1, u_2, u_3$  sunt vectori proprii ai lui  $f$ . Precizați valorile proprii corespunzătoare.
- b) Arătați că  $R = \{u_1, u_2, u_3\}$  este un reper al lui  $\mathbb{R}^3$ . Precizați coordonatele lui  $f(u)$  în raport cu reperul  $R$ .

- 6) Fie  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  spațiul vectorial euclidian canonic. Considerăm  $U = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}\}$  și  $\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp$ .
- a) Să se determine un reper ortonormat al lui  $U^\perp$ .
- b) Fie  $p \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$  proiecția ortogonală pe  $U$ . Să se afle  $p(1, 0, -1)$ .

- 7) Fie  $(\mathbb{R}^3, g_0)$  spațiul vectorial euclidian canonic. și  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f(x) = (x_1 + x_3, x_2, x_1 + x_3)$ .
- a) Să se scrie matricea asociată lui  $f$  în raport cu reperul canonic ortonormat al lui  $\mathbb{R}^3$ . Arătați că  $f$  este un endomorfism simetric.
- b) Precizați câte un reper ortonormat în  $\text{Ker } f$  și  $\text{Im } f$ .

- 8) În planul euclidian  $E_2$  se consideră conica  $\Gamma: f(x) = 5x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2 - 18x_1 - 18x_2 + 9 = 0$ .
- a) Să se afle centrul conicei și invariantii metrici.
- b) Precizați tipul conicei. Justificare.

- 9) În spațiul euclidian  $E_3$  se consideră

$$d: \frac{x_1 - 1}{1} = \frac{x_2 - 2}{2} = \frac{x_3}{3} \quad \text{și } A(0, 1, 2)$$

- a) Să se scrie ecuația dreptei  $d'$ , unde  $d' \parallel d$  și  $A \in d'$ .
- b) Să se afle ecuația planului  $\pi$ , unde  $d \perp \pi$  și  $A \in \pi$ .



-3-

**OBS** (Cititi cu atentie!)

- La începutul examenului faceți prezenta la grupa corespunzătoare; treceți pe forum la discuții grupa.
  - Timp de lucru 2 ore (8:00 - 10:00).
  - Timp de încărcare pe Moodle 30 min (10:00 - 10:30).
  - Scanati și trimiteți UN SINGUR FISIER PDF,  
numit: Nume- Prenume- grupa - examen. 13.06.2020.pdf
  - Utilizați numai foi albe A4.
  - Se trec: nume, prenume, grupa, seria, data, examen
  - Subiectele se scriu și se rezolvă ÎN ORDINE (1,2,3,4,5,6,7,8,9) - respectați ordinea din fișierul cu subiecte!
  - La subiectele grila 1,2,3,4 se precizează NUMAI VARIANTA CORECTĂ
  - La subiectele 5,6,7,8,9 rezolvările sunt COMPLETE
  - Scrieți de mână, ordonat, mare și clar, cu stilou sau pix negru sau albastru
  - NU tehnoredactați
  - Foile se NUMEROTEAZĂ
  - Scanati (cu CamScanner) fiecare pagină numerotată, renumiți fișierul ca mai sus și trimiteți ca fișier PDF, pe moodle.
  - **PUNCTAJ**: { fiecare subiect are 1 punct  
se acordă 1 punct din oficiu
- Succes!