FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Seminar 4

(S4.1) Să se arate că pentru orice formulă φ, numărul parantezelor deschise care apar în φ coincide cu numărul parantezelor închise care apar în φ.
Demonstraţie: Notăm, pentru orice $\varphi \in Form$, cu $l(\varphi)$ numărul parantezelor deschise şi cu $r(\varphi)$ numărul parantezelor închise care apar în φ. Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ dacă şi numai dacă } l(\varphi) = r(\varphi).$$

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducţiei pe formule. Avem următoarele cazuri:

- Formula φ este în V, deci există $n \in \mathbb{N}$ cu $\varphi = v_n$. Atunci $l(\varphi) = l(v_n) = 0 = r(v_n) = r(\varphi)$.
- Există $\psi \in Form$ cu $\varphi = (\neg\psi)$. Presupunem că ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Obţinem
$$l(\varphi) = l(\psi) + 1 = r(\psi) + 1 = r(\varphi).$$
- Există $\psi, \chi \in Form$ cu $\varphi = (\psi \to \chi)$. Presupunem că ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Obţinem
$$l(\varphi) = l(\psi) + l(\chi) + 1 = r(\psi) + r(\chi) + 1 = r(\varphi).$$

$\square$

$\square$

(S4.2) Să se dea o definiţie recursivă a mulţimii variabilelor unei formule.
Demonstraţie: Se observă că $Var : Form \to 2^V$ satisface următoarele condiţii:

$$\begin{array}{lrl} (R0) & Var(v) & = \{v\} \\ (R1) & Var(\neg\varphi) & = Var(\varphi) \\ (R2) & Var(\varphi \to \psi) & = Var(\varphi) \cup V(\psi). \end{array}$$

Aplicăm Principiul recursiei pe formule pentru $A = 2^V$ şi pentru

$$\begin{aligned} G_0 : V \to A, &\quad G_0(v) = \{v\}, \\ G_\neg : A \to A, &\quad G_\neg(\Gamma) = \Gamma, \\ G_\to : A \times A \to A, &\quad G_\to(\Gamma, \Delta) = \Gamma \cup \Delta. \end{aligned}$$

pentru a concluziona că Var este unica funcţie care satisface (R0), (R1) şi (R2). $\square$

(S4.3) Să se demonstreze că pentru orice x_0, x_1, x_3, x_4 din $\{0, 1\}$ avem:

(i) $((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0 = 1$;

(ii) $(x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)) = 1$.

Demonstraţie:

(i)

x_0	x_1	$x_0 \to x_1$	$(x_0 \to x_1) \to x_0$	$((x_0 \to x_1) \to x_0) \to x_0$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

(ii) Notăm $f(x_1, x_3, x_4) := (x_3 \to x_4) \to ((x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1))$.

x_1	x_3	x_4	$x_3 \to x_4$	$x_4 \to x_1$	$x_3 \to x_1$	$(x_4 \to x_1) \to (x_3 \to x_1)$	$f(x_1, x_3, x_4)$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

$\square$

(S4.4) Să se arate că pentru orice $e : V \to \{0, 1\}$ şi pentru orice formule φ, ψ avem:

(i) $e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi)$;

(ii) $e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi)$;

(iii) $e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \boldsymbol{\leftrightarrow} e^+(\psi)$.

Demonstraţie:

(i)

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\neg\varphi \to \psi) = e^+(\neg\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) = \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi) \overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \boldsymbol{\vee} e^+(\psi).$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0,1\}$, avem $\boldsymbol{\neg} x \boldsymbol{\to} y = x \boldsymbol{\vee} y$:

x	y	$\boldsymbol{\neg} x$	$\boldsymbol{\neg} x \boldsymbol{\to} y$	$x \boldsymbol{\vee} y$
1	1	0	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

(ii)

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \wedge \psi) &= e^+(\neg(\varphi \to \neg\psi)) \\ &= \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi \to \neg\psi) \\ &= \boldsymbol{\neg}(e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\neg\psi)) \\ &= \boldsymbol{\neg}(e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} \boldsymbol{\neg} e^+(\psi)) \\ &\overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0,1\}$, avem $\boldsymbol{\neg}(x \boldsymbol{\to} \boldsymbol{\neg} y) = x \boldsymbol{\wedge} y$:

x	y	$\boldsymbol{\neg} y$	$x \boldsymbol{\to} \boldsymbol{\neg} y$	$\boldsymbol{\neg}(x \boldsymbol{\to} \boldsymbol{\neg} y)$	$x \boldsymbol{\wedge} y$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	0

(iii)

$$\begin{aligned} e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) &= e^+((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} e^+(\varphi \to \psi) \boldsymbol{\wedge} e^+(\psi \to \varphi) \\ &= (e^+(\varphi) \boldsymbol{\to} e^+(\psi)) \boldsymbol{\wedge} (e^+(\psi) \boldsymbol{\to} e^+(\varphi)) \\ &\overset{(*)}{=} e^+(\varphi) \boldsymbol{\leftrightarrow} e^+(\psi). \end{aligned}$$

Pentru (*), demonstrăm că pentru orice $x, y \in \{0,1\}$, avem $(x \to y) \land (y \to x) = x \leftrightarrow y$:

x	y	$x \to y$	$y \to x$	$(x \to y) \land (y \to x)$	$x \leftrightarrow y$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1

□

(S4.5) Să se găsească câte un model pentru fiecare din formulele:

(i) $v_0 \to v_2$;

(ii) $v_0 \land v_3 \land \neg v_4$.

Demonstraţie:

(i) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_2 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$e^+(v_0 \to v_2) = e^+(v_0) \to e^+(v_2) = e(v_0) \to e(v_2) = 0 \to 1 = 1.$$

(ii) Fie funcţia $e : V \to \{0,1\}$, definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$e(x) := \begin{cases} 1, & \text{dacă } x = v_0 \\ 1, & \text{dacă } x = v_3 \\ 0, & \text{dacă } x = v_4 \\ 1, & \text{altfel.} \end{cases}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} e^+(v_0 \land v_3 \land \neg v_4) &= e^+(v_0) \land e^+(v_3) \land \neg e^+(v_4) \\ &= e(v_0) \land e(v_3) \land \neg e(v_4) \\ &= 1 \land 1 \land \neg 0 \\ &= 1 \land 1 \land 1 \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\square$

(S4.6) Să se demonstreze că, pentru orice formulă φ,

(i) φ este tautologie dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă dacă şi numai dacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Demonstraţie:

(i) Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ este tautologie} &\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că }\ e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că există } e : V \to \{0,1\} \text{ cu }\ e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \text{nu avem că } \neg\varphi \text{ e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\
&\iff \neg\varphi \text{ e nesatisfiabilă.}
\end{aligned}$$

(ii) Avem:

$$\begin{aligned}
\varphi \text{ este nesatisfiabilă} &\iff \varphi \text{ nu e satisfiabilă} \\
&\iff \text{nu avem că } \varphi \text{ e satisfiabilă} \\
&\iff \text{nu avem că există } e : V \to \{0,1\} \text{ cu }\ e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \text{nu avem că }\ e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\varphi) = 0 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ \boldsymbol{\neg} e^+(\varphi) = 1 \\
&\iff \text{pentru orice } e : V \to \{0,1\},\ e^+(\neg\varphi) = 1 \\
&\iff \neg\varphi \text{ este tautologie.}
\end{aligned}$$

$\square$