Seminar 3 20.10.2020

Prb 1 Fie $f: A \to B$ o funcție. Să se arate că:

① f e surj $\Leftrightarrow$ $(\exists)\ g: B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_B$. $\quad (1_B: B \to B,\ 1_B(x) = x\ (\forall)\ x \in B)$

$\overset{evid}{\Leftarrow}$

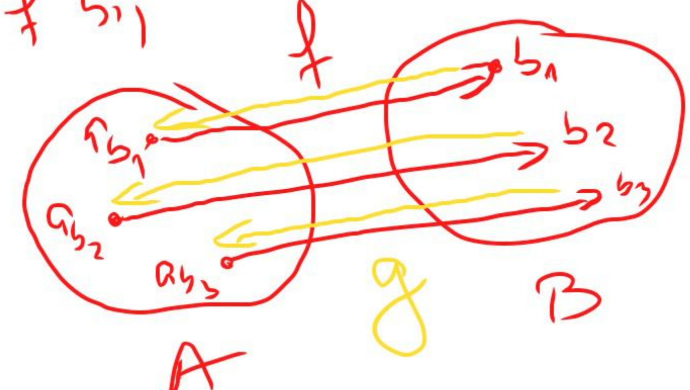
Exc ② f e inj $\Leftrightarrow$ $(\exists)\ h: B \to A$ a.î. $h \circ f = 1_A$.

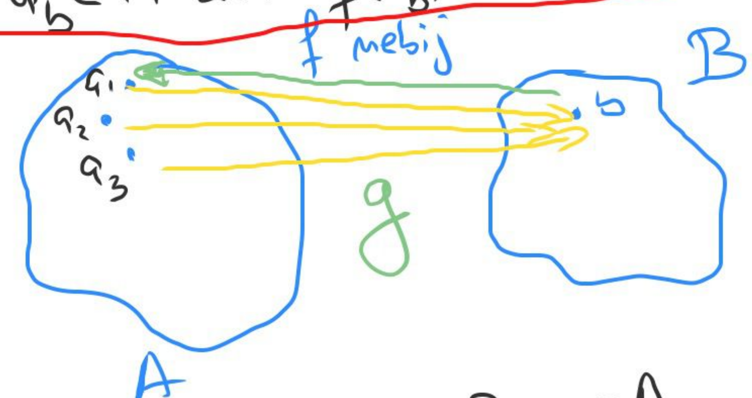
① ($\Rightarrow |B| \le |A|$) "$\Leftarrow$" $f \circ g = 1_B \Rightarrow f \circ g$ bijecție $\overset{C2}{\Longrightarrow}$ f surj ($+ g$ inj).

"$\Rightarrow$" f e surjectivă $\Rightarrow (\forall)\ b \in B\ (\exists)\ a_b \in A$ a.î. $f(a_b) = b$.

Cum construiesc g?

f bij





$g: B \to A$

Pt fiecare $b \in B$ alegem un element, notat a_b din $f^{-1}(\{b\})$. $\ne \emptyset$

preimaginea prin f a $\{b\}$.

Definim $g: B \to A$.
$g(b) = a_b$. $(\forall)\ b \in B$.

$(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(a_b) = b\ (\forall)\ b \in B$.

Def $f: A \to B$ funcție, $X \subseteq B$ $\quad f^{-1}(X) = \{a \in A \mid f(a) \in X\}$.

preimag. prin f a submulțimii X a lui B

Ex $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\quad f(a,b) = a$ $\quad f^{-1}(\{0\}) = \{(0,a) \mid a \in \mathbb{N}\}$ $\quad f(0,a) = 0$

surj (nu e inj)

Un g cu proprietatea că $f\circ g = 1_{\mathbb{N}}$ se definește astfel:

$g_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\quad g_1(0) = (0,0)$, $g_1(1) = (1,1)$, $g_1(2) = (2,2)$, ...

$g_1(n) = (n,n)$ $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ $\qquad (f\circ g_1)(n) = f(n,n) = n$. $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$.

$\neq$

$g_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ $\quad g_2(n) = (n,0)$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$ $\quad (f\circ g_2)(n) = f(n,0) = n$ $(\forall)\, n\in\mathbb{N}$.

---

2) "$\Rightarrow$" f inj $\quad f : A \to B$ $\quad (\forall)\, a_1 \neq a_2 \rightsquigarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

$(\forall)\, a \in A$ $\quad b_a :\underset{not}{=} f(a)$ $\quad$ inj $\quad (\forall)\, a_1 \neq a_2 \rightsquigarrow b_{a_1} \neq b_{a_2}$

$h(b_a) = a$ $(\forall)\, b_a \in B$.

Vrem să construim $h : B \to A$.

construiesc $h : B \to A$

(Verificați $h\circ f = 1_A$)

Cazul 1 $\quad f(A) = B$ $(\Rightarrow f$ bij$)$;

$\{f(a) \mid a\in A\} = \{b_a \mid a\in A\}$

Def. $h : B \to A$ astfel $\quad h(b) = \begin{cases} a, & \text{dacă } b = b_a \\ a_0, & (\forall)\, b \in B\setminus f(A) \end{cases}$

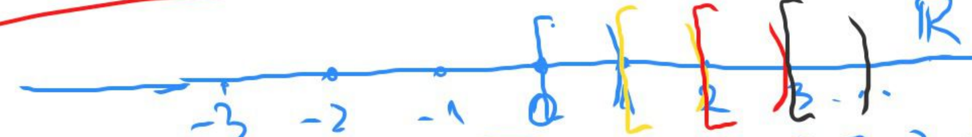
Cazul 2 $\quad f(A) \neq B$

$\{b_a \mid a\in A\}$

unde a_0 este un element fixat din A.

$(h\circ f)(a) = h(f(a)) = h(b_a) = a \quad (\forall)\, a\in A. \Rightarrow h\circ f = 1_A.$

Prb 2 Arătați că nu există $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu propr. că $|f(x)-f(y)|>1$ $(\forall)x,y\in\mathbb{R}$ $(x\neq y)$.



$$\mathbb{R}=\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}[m,m+1) \quad (1)$$

$x=[x]+\{x\}$

$[x]\le x<[x]+1$

Pp red. abs. că există un astfel de $f \Rightarrow f$ inj $\Rightarrow |f(\mathbb{R})|=|\mathbb{R}| \overset{C_3}{\Longrightarrow} f(\mathbb{R})$ nenumărabilă

$(g:\mathbb{R}\to f(\mathbb{R}),\ g(x)=f(x)\ (\forall)x\in\mathbb{R})$

$$|f(\mathbb{R})\cap[m,m+1)|\le 1\ (\forall)m\in\mathbb{Z} \quad (2)$$

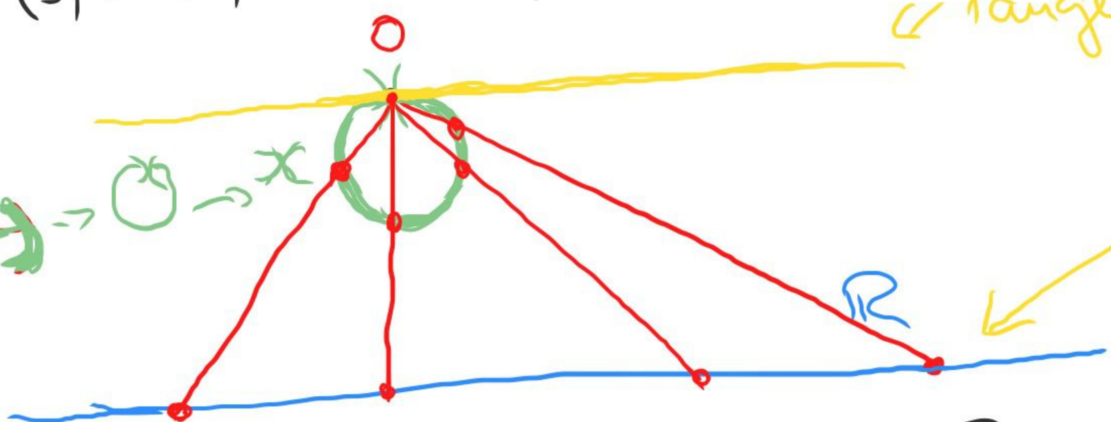
$$f(\mathbb{R})=f(\mathbb{R})\cap\mathbb{R}\overset{(1)}{=}f(\mathbb{R})\cap\Big(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}[m,m+1)\Big)=\bigcup_{m\in\mathbb{Z}}\big([m,m+1)\cap f(\mathbb{R})\big)\overset{(2)}{\Longrightarrow} f(\mathbb{R}) \text{ e finită sau numărabilă } ↯$$

Prb 3 Arătați că oricare 2 din următoarele mulțimi sunt echipotente: $(-\infty,a]$, $(b,+\infty)$, $[c,d)$, $[c,d]$, $(c,d]$, (c,d), $(0,1)$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}_+^*$.

(1) $(0,1)$ → ○ → x

proiecție stereografică

tangenta este ∥ cu



y_{Ox}

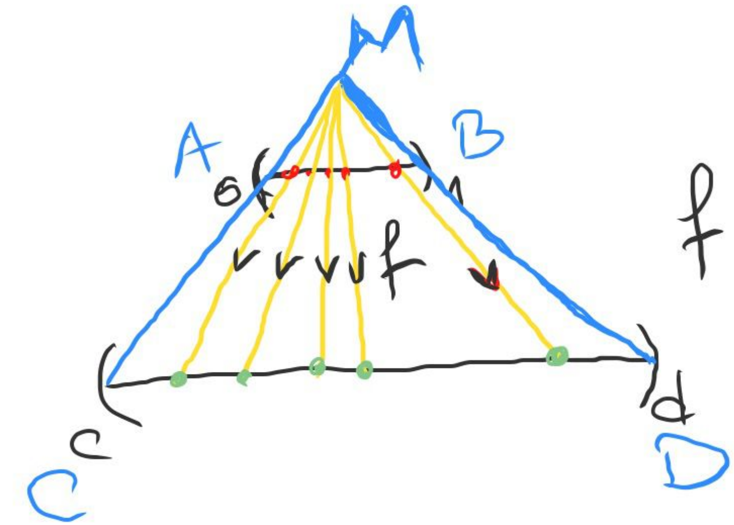
(∀) dr. care trece prin O ≠ tangenta taie cercul și dreapta în exact un punct

Definesc $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ astfel $f(x)=y_{Ox}$ $(\forall)\ x$.

$\boxed{\text{GEOMETRIC}}$ → f e bijectivă

Dem. geometrică pt bijecție între (c,d) și $\mathbb{R}$.

② Vreau bijecție între $(0,1)$ și (c,d)!



f bijecție

? Dem. geom.

$h:(0,1)\to(c,d)$

Caut $h(x)=mx+n$ a.î. e bijecție

m,n și $h(0)=c$ $(=n)$; $h(1)=d$ $(=m+n)$ ⟹ $m=d-c$

Definesc $h(x)=(d-c)x+c$

h e bijecție (Exc!)

$\mu:(c,d)\to(0,1)$ $\mu(x)=\dots\dots$ Exc!

③ Vreau bijecție între $\mathbb{R}$ și $\mathbb{R}^*_+$

$f:\mathbb{R}\xrightarrow[\text{bij}]{}\mathbb{R}^*_+$ $f(x)=e^x\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}$

$g:\mathbb{R}^*_+\xrightarrow[\text{bij}]{}\mathbb{R}$ $g(x)=\ln x\ (\forall)\,x\in\mathbb{R}$

① = ④ Vreau bijecție între $\mathbb{R}$ și (c,d)

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \arrow[r, "\text{arctg}"] \arrow[rrr, bend right, "\text{bijecție}"'] & \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \arrow[r, "②", "\mu"'] & (0,1) \arrow[r, "②", "h"'] & (c,d)
\end{tikzcd}$$

bijecții

$(c,d)\xrightarrow[\text{bij}]{}\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\xrightarrow[tg]{}\mathbb{R}$