GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 13
Cuadrice

Voi enumera cuadricele specificându-le ecuaţiile reduse.
Elipsoidul Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$, $a,b,c>0$.

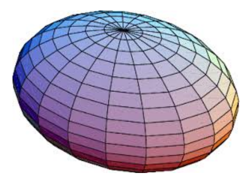

Figure 1. Elipsoid

Pentru $a=b=c=r>0$, obţinem sfera de rază r, ce are ecuaţia $x^2+y^2+z^2=r^2$. Sfera este locul geometric al punctelor din spaţiu egal depărtate de un punct dat. Atât elipsoidul cât şi sfera descrise prin ecuaţiile de mai sus au centrul $O(0,0,0)$. Elisoidul de centru (x_0,y_0,z_0) are ecuaţia $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}-1=0$, şi similar sfera de centru (x_0,y_0,z_0) şi rază r are ecuaţia $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$. Intersecţia elipsoidului cu un plan paralel cu unul dintre planele de coordonate este o elipsă. Intersecţia sferei cu un plan paralel cu unul dintre planele de coordonate este un cerc. Sfera se intersectează cu orice plan ce trece prin origine într-un cerc mare. Mai mult, sfera este o suprafaţă de rotaţie.

Hiperboloidul cu o pânză

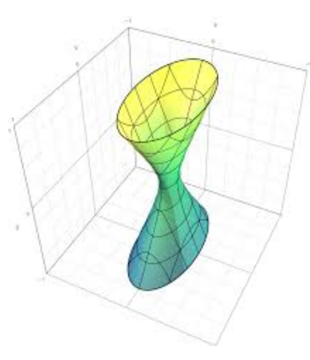

Figure 2. Hiperboloid cu o pânză

Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, cu $a, b, c > 0$.

Pentru $a = b$ este o suprafaţă care se poate obţine prin rotaţia unei drepte în jurul axei verticale. Prin orice punct al hiperboloidului trec două drepte distincte ce sunt conţinute în suprafaţă. O astfel de suprafaţă se numeşte *dublu riglată*.

Intersecţia cu un plan orizontal $z = \alpha$ este o elipsă, iar intersecţia cu plane paralele cu Oxz şi Oyz sunt hiperbole. Să descriem intersecţia cu un plan orizontal. Aceasta este soluţia sistemului $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \\ z = \gamma \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - (\frac{\gamma^2}{c^2} + 1) = 0$, ceea ce reprezintă ecuaţia unei elipse.

Hiperboloidul cu două pânze Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, cu $a, b, c > 0$.

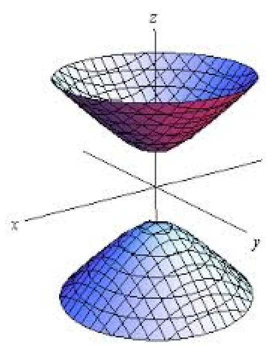

Figure 3. Hiperboloid cu o pânze

Intersecţia cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: mulţimea vidă pentru $|\gamma| < c$, un punct pentru $|\gamma| = c$ şi o elipsă pentru $|\gamma| > c$.

Intersecţiile cu plane paralele cu atât cu Oxz cât şi cu Oyz sunt hiperbole. Punctele $V_1(0, 0, c)$ şi $V_2(0, 0, -c)$ se numesc *vârfurile hiprboloidului.*

Paraboloidul eliptic Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$, cu $a, b, > 0$.

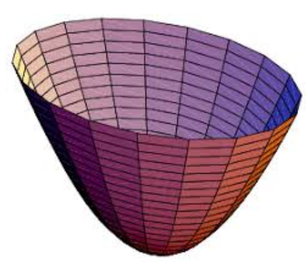

Figure 4. Paraboloid eliptic

Intersecţia acestei suprafeţe cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: o elipsă pentru $\gamma > 0$, un punct pentru $\gamma = 0$, şi mulţimea vidă pentru $z < 0$. Intersecţia cu orice plan paralel cu Oxz sau Oyz este o parabolă. Punctul $O(0,0,0)$ se numeşte vârful paraboloidului.

Paraboloidul hiperbolic sau şa Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$, cu $a, b, > 0$.

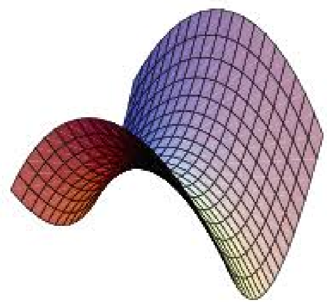

Figure 5. Paraboloid hiperbolic

Intersecţia paraboloidului hiperbolic cu un plan $z = \gamma$, este o hiperbolă pentru $\gamma \neq 0$ şi o reuniune de drepte concurente pentru $\gamma = 0$, $(z = 0, y = \pm\frac{b}{a}x)$. Intersecţia cu un plan paralel cu Oxz $(y = \beta)$ sau cu Oyz $(x = \alpha)$ este o parabolă. Originea $O(0,0,0)$ este vârful sau punctul şa al paraboloidului hiperbolic. Acoperişul gării din Predeal este o astfel de suprafaţă.

Prin orice punct al paraboloidului hiperbolic trec două drepte distincte conţinute în suprafaţă. Deci şi aceasta este o suprafaţă dublu riglată.

Conul Ecuaţia redusă a conului este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, cu $a, b, c > 0$.

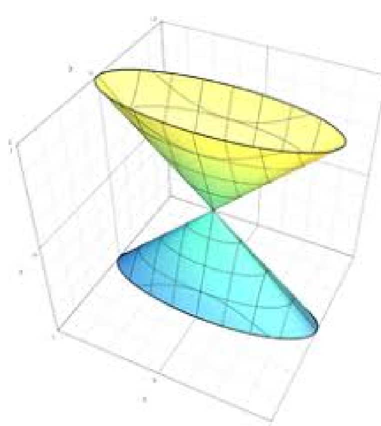

Figure 6. Con

Intersecţia conului cu un plan orizontal $z = \gamma$ este: punctul $O(0,0,0)$ pentru $\gamma = 0$ şi o elipsă pentru $\gamma \neq 0$. Intersecţia cu un plan $y = \beta$ este o reuniune de drepte concurente pentru $\beta = 0$ şi o hiperbolă pentru $\beta \neq 0$. La fel, intersecţia cu un plan $x = \gamma$ este o reuniune de drepte concurente pentru $\gamma = 0$ şi o hiperbolă pentru $\gamma \neq 0$.

Dacă $a \neq b$ conul se numeţe *eliptic* iar dacă $a = b$ avem un con *circular*. Punctul $O(0,0,0)$ se numeşte *vârful* conului.

Conul este asimptotic atât hiperboloidului cu o pânză cât şi celui cu două pânze. Hiperboloidul cu o pânză este exterior conului, iar hiperboloidul cu două pânze este interior conului.

Cilindru eliptic Ecuaţia redusă a cilindrului eliptic este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a, b > 0$. Intersecţia unui cilindru eliptic cu un plan orizontal $z = \gamma$ este o elipsă.

Intersecţia cu un plan $y = \beta$ este o reuniune de drepte paralele pentru $|\beta| < b$, o dreaptă pentru $|\beta| = b$ şi mulţimea vidă pentru $|\beta| > b$. Similar, intersecţia cu un plan $x = \alpha$ este o reuniune de drepte paralele pentru $|\alpha| < a$, o dreaptă pentru $|\alpha| = a$ şi mulţimea vidă pentru $|\alpha| > a$.

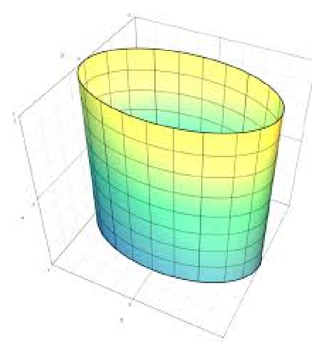

FIGURE 7. Cilindru eliptic

Dacă $a = b = r$, suprafaţa este un cilindru circular cu ecuaţia $x^2 + y^2 = r^2$. Intersecţia unui cilindru circular cu un plan orizontal $z = \gamma$ este un cerc. Intersecţiile cu plane paralele cu Oxz şi Oyz sunt la fel ca în cazul cilindrului eliptic.

Cilindru hiperbolic Ecuaţia redusă a cilindrului hiperbolic este $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, cu $a, b > 0$.

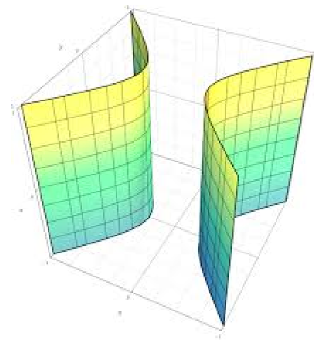

FIGURE 8. Cilindru hiperbolic

În figură este reprezentat un cilindru hiperbolic de ecuaţie $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$
Intersecţia acestuia cu un plan $z=\gamma$ este o hiperbolă. Intersecţia cilindrului hiperbolic cu un plan $y=\beta$ este mulţimea vidă pentru $|\beta|<b$, o dreaptă pentru $|\beta|=b$ şi reuniunea a două drepte paralele pentru $|\beta|>b$, iar intersecţia cu un plan $x=\alpha$ este o pereche de drepte paralele

Cilindru parabolic Ecuaţia redusă este $y^2=2px$ cu $p>0$

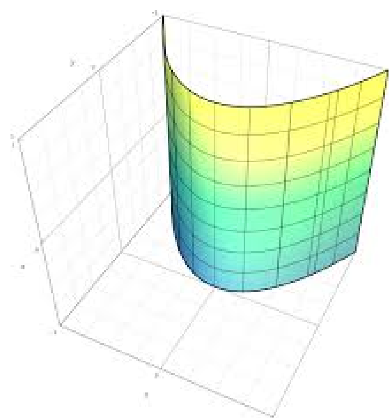

FIGURE 9. Cilindru parabolic

Intersecţia cu un plan orizontal $z=\gamma$ este o parabolă. Intersecţia cu un plan $y=\beta$ este dreapta de ecuaţie $x=\frac{\beta^2}{2p}$, iar intersecţia cu un plan $x=\alpha$ este mulţimea vidă dacă $\alpha<0$, dreapta $y=0$ pentru $\alpha=0$, şi o reuniune de drepte $y=\pm\sqrt{2p\alpha}$ pentru $\alpha>0$.

Reuniune de plane secante Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$

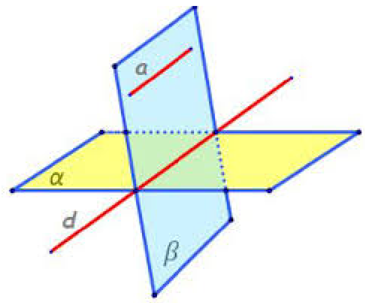

FIGURE 10. Plane secante

Reuniune de plane paralele Ecuaţia redusă este $x^2 - a^2 = 0$.

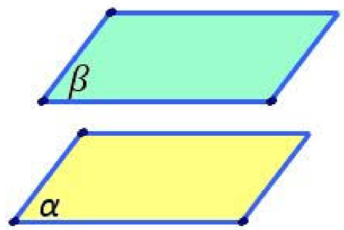

FIGURE 11. Plane paralele

Reuniune de plane confundate Ecuaţia redusă: $x^2 = 0$.

O dreaptă Ecuaţia redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Fiind în $\mathbb{R}^3$, z fiind un parametru.

Un punct Ecuaţia redusă: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

Mulţimea vidă Ecuaţia redusă este $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, $a, b, c > 0$.

Ecuaţia generală prin care este dată o cuadrică este
$\mathcal{S} : a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$
unde $a_{ij} \in \mathbb{R}, (\forall)i, j = \overline{1,4}$ şi $a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0$.

Cuadricei $\mathcal{S}$ îi asociem matricea simetrică $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$. Notăm cu $A_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$ submatricea din colţul stânga sus, $\Delta = \det(A), \delta =$

$\det(A_3), I = \mathrm{tr}(A_3) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ şi $J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$ se numesc invarianţii metrici ai cuadricei $\mathcal{S}$.

Teorema 1. $\Delta = \det(A), \delta = \det(A_3), I$ *şi* J *sunt invarianţi la translaţii şi transformări ortogonale.*

Aducerea la forma canonică a cuadricelor

Considerăm forma pătratică pe $\mathbb{R}^3$, $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$ a cărei matrice este A_3. Folosim metoda transformărilor ortogonale pentru a o aduce la forma normală. Deci calculăm valorile proprii şi vectorii proprii asociaţi, găsim matricea ortogonală S, care realizează rotaţia. Se forţează pătratele perfecte în ecuaţia cuadricei $\mathcal{S}$ în noile coordonate şi se pune în evidenţă translaţia.

Exemplul 2. Utilizând metoda roto-translaţiei să se aducă la forma canonică cuadrica $\mathcal{S} : x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 8y + 8 = 0$.

Matricea $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. $P_{A_3}(X) = \det(XI_3 - A) = (X-1)(X+1)(X-4)$. valorile proprii sunt $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$. Vectorii prprii asociaţi acestor valori proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ şi $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow e_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Am obţinut matricea $S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, cu $\det(S) = 1$, ${}^tSS = I_n$. Schimbarea de coordnate este $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. Astfel schimbarea de coordonate este $x = x', y = \frac{1}{\sqrt{5}}(y' - 2z'), z = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y' + z')$. Introducând în formula cuadricei $\mathcal{S}$ se obţine $x'^2 - y'^2 + 4z'^2 - 6x' + \frac{8}{\sqrt{5}}y' + \frac{16}{\sqrt{5}}z' + 8 = 0 \Leftrightarrow (x'-3)^2 - (y' - \frac{4}{\sqrt{5}})^2 + 4(z' + \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{7}{5} = 0$. Este un hiperboloid cu două pânze. Putem împărţi cu $\frac{7}{5}$. Ecuaţia redusă este $\frac{1}{\frac{7}{5}}X^2 - \frac{1}{\frac{7}{5}}Y^2 + \frac{1}{\frac{7}{20}}Z^2 + 1 = 0$. Coeficienţii $a = b = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}, c = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{20}}$.

Exemplul 3. Să se determine locul geometric al punctelor din spaţiu al căror raport al distannţelor la punctele $A(2,-2,3)$ şi $B(-2,2,-3)$ este constantă.

Punctul B este simetricul punctului A faţă de origine. Fie P un punct al locului geometric. Pentru un astfel de punct P avem $\frac{d(P,A)}{d(P,B)} = \sqrt{\lambda}$, pentru $\lambda > 0$. Distanţele sunt cantităţi pozitive, deci raportul este o cantitate pozitivă şi putem scrie membrul drept $\sqrt{\lambda} > 0$. Înlocuind coordonatele punctelor A şi B şi ridicând la pătrat obţinem

$\frac{(x-2)^2+(y+2)^2+(z-3)^2}{(x+2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2} = \lambda$. Înmulţind şi dând factori comuni vom obţine
$(1-\lambda)x^2+(1-\lambda)y^2+(1-\lambda)z^2-4(1+\lambda)x+4(1+\lambda)y-6(1+\lambda)z+17(1-\lambda) = 0.$

Avem următoarele două cazuri:

1. $\lambda = 1$ atunci ecuaţia este $-8x+8y-12z = 0 \Leftrightarrow -4x+4y-6z = 0$. Este ecuaţia unui plan ce trece prin origine. Este planul mediator al segmentului AB, adică este planul perpendicular pe AB ce trece prin mijlocul acestui segment $O(0,0,0)$. Dreapta normală la acest plan are vectorul director $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-4,4,-6)$, acestă dreptă AB care trece prin origine şi este complementul ortogonal al planului mediator.

2. Pentru $\lambda \neq 1$, adică $\lambda \in (0,1)\cup(0,\infty)$ obţinem sfera de centru $C(2\alpha,-2\alpha,3\alpha)$ şi rază $\frac{\sqrt{68\lambda}}{|1-\lambda|}$, unde $\alpha = \frac{1+\lambda}{1-\lambda}$. Ecuaţia sferei este $(x-2\alpha)^2+(y+2\alpha)^2+(z-3\alpha)^2 = \frac{68\lambda}{(1-\lambda)^2}$.