Curs 3

20.10.2020

Prb Fie M și N 2 mulțimi finite, $|M| = m$, $|N| = n$. Atunci, dacă $m \geq n$, nr. surjecțiilor de la M la N este $n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^{n-1}$.

Obs $f: M \to N$ f surj, M, N - finite $\left(\overset{def}{\underset{surj}{\Longrightarrow}} \underset{|M|}{m} \geq \underset{|N|}{n}\right)$.

$X = \{f: M \to N \mid f$ surjectivă$\} \subseteq T = \{f: M \to N \mid f$ funcție$\}$ $\boxed{|T| = n^m.}$

$T \setminus X = \{f: M \to N \mid f$ funcție nesurjectivă$\}$ (nesurjectivă = nu e surjectivă)

(1) $|X| = \underset{n^m}{|T|} - |T \setminus X|$

f nesurjectivă $\Rightarrow$ (*) $Im f \subsetneq N \Rightarrow (\exists)\, b \in N$ a.î. $f(a) \neq b$ $(\forall)\, a \in M$.

$N = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Notez cu $A_i = \{f: M \to N \mid f$ funcție a.î. $b_i \notin Im f\}$, $i = \overline{1,n}$

$f: M \to N$ nu e surj $\Rightarrow f \in A_i$ pt un $i = \overline{1,n}$. $\Rightarrow$

$T \setminus X = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$. Aplic P.I.E. pt a calcula $|T \setminus X|$

$$|T \setminus X| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|. \quad (\square)$$

$A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k} = \{f: M \to N \mid f$ funcție a.î. $Im f \subseteq N \setminus \{b_{i_1}, \ldots, b_{i_k}\}\}$

$|A_i| = (n-1)^m$ $(\forall)\, i = \overline{1,n}$

$\boxed{|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)^m}$ $(\forall)\, 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$. $(1 \leq k \leq n)$

$$|T \setminus X| = C_n^1 (n-1)^m - C_n^2 (n-2)^m + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} \cdot \underbrace{(n-(n-1))^m}_{=1}$$

înlocuind în (1) obținem formula dorită.

Def 1) Spunem că 2 mulțimi A și B sunt echipotente (sau au același cardinal) dacă $(\exists)\ f : A \to B$ bijecție. Scriem $|A| = |B|$ dacă A și B au același cardinal.

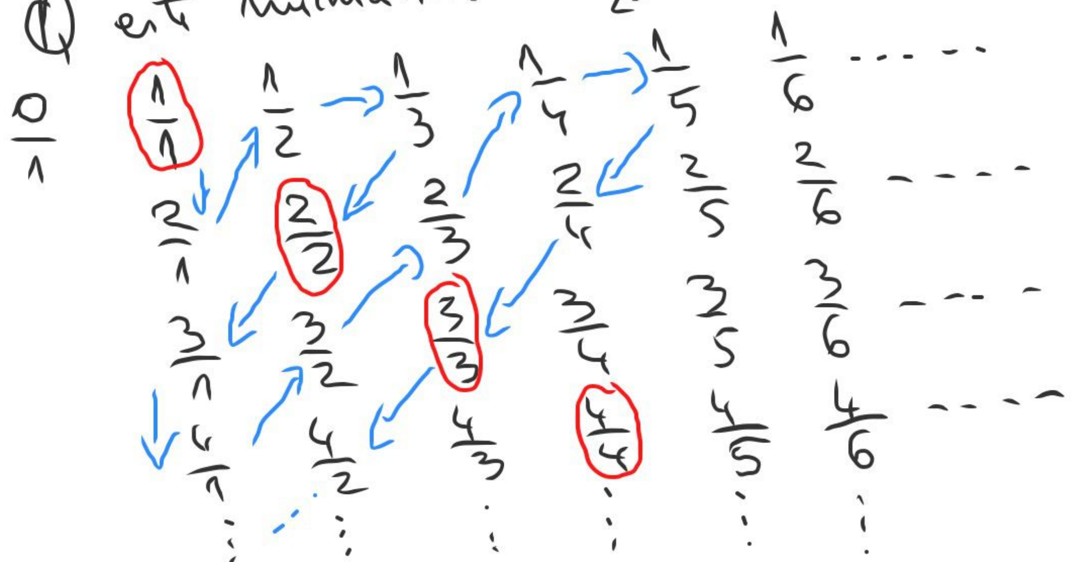
Obs 1) 2 mulțimi finite A și B sunt echipotente $\iff$ A, B au același nr. de elemente

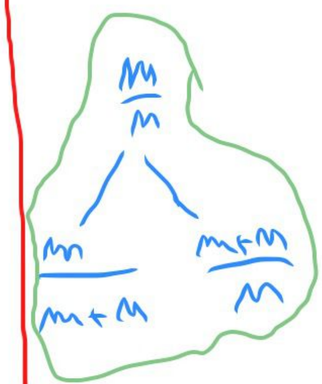
(Dc $|A| = |B| = n$ $\quad |\{f \mid f : A \to B,\ f \text{ bijecție}\}| = n!$)

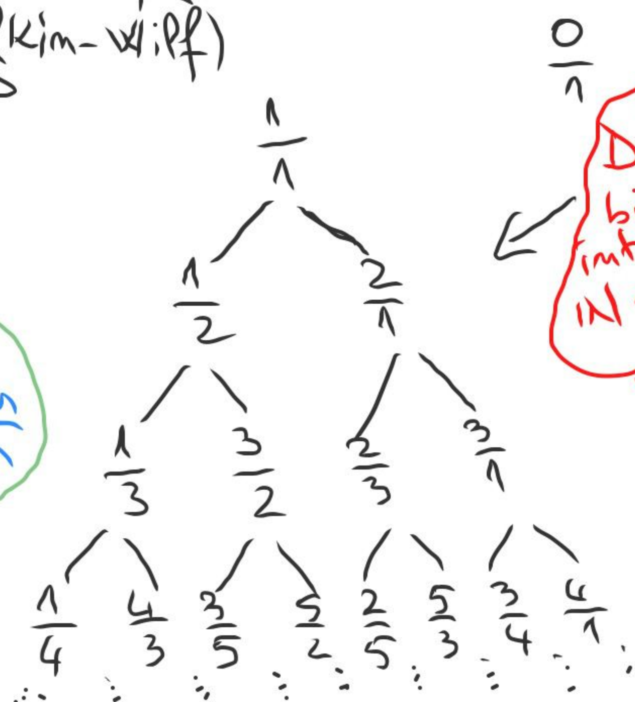
2) O mulțime echipotentă cu $\mathbb{N}$ s.n. mulțime numărabilă. ($\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$)

Exemple 1) $\mathbb{Z}$ este numărabilă $\quad f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ $\quad f(n) = \begin{cases} 2n, & n \geq 0 \\ 2(-n) - 1, & n < 0 \end{cases}$ f bij.

2) $\mathbb{Q}$ este numărabilă ($\mathbb{Q}_+$ e numărabilă) $\longrightarrow$ 2000 (Calkin-Wilf)







Dc bijecție între $\mathbb{N}$ și $\mathbb{Q}_+$

3) $\mathbb{R}$ nu este numărabilă (Cantor) ; $\mathbb{C}$ nu esti numărabilă.

<u>Dem</u> Pp. red. abs. că $\mathbb{R}$ e numărabilă $\rightsquigarrow$ $(0,1)$ este numărabil $\Rightarrow$ Pot scrie nr. din $(0,1)$ într-un şir $\{a_0, a_1, \dots, a_n, \dots\}$

$$a_0 = 0,a_{00}a_{01}a_{02}a_{03}\dots$$
$$a_1 = 0,a_{10}a_{11}a_{12}a_{13}\dots$$
$$a_2 = 0,a_{20}a_{21}a_{22}a_{23}\dots$$
$$\vdots$$
$$a_n = 0,a_{n0}a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots$$
$$\vdots$$

Pt fiecare n, aleg b_{nn} cifră diferită de $0, 9, a_{nn}$.

$b = 0,b_{00}b_{11}b_{22}b_{33}b_{44}\dots \in (0,1)$

şi e diferit de orice a_n $\Rightarrow$

$b \notin \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ ✗

<u>Def</u> Fie A, B 2 mulţimi. Spunem că $|A| \le |B|$ dc. $(\exists)$ $f : A \to B$ injectivă.
Dacă $|A| \le |B|$ şi A şi B nu sunt echipotente, atunci scriem $|A| < |B|$.

<u>Obs</u> 1) $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$.
$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{C}|$.

2) <u>Exc</u>! Orice mulţime infinită A conţine o "copie" a lui $\mathbb{N}$, i.e. $(\exists)$ $f : \mathbb{N} \to A$ inj.

3) <u>Exc</u>! Pentru orice mulţime A $\quad |A| < |\mathcal{P}(A)|$. $\quad \left(\mathbb{R} \underset{\text{bijecție}}{\simeq} 2^{\mathbb{N}}\right)$

4) <u>Exc</u>!

Thm (Cantor-Bernstein) Fie A, B 2 mulțimi. Avem $|A| = |B| \iff |A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|$

(adică: 2 mulțimi A, B sunt echipotente $\iff$ găsesc fct. injective $f: A \xrightarrow{inj} B$ și $g: B \xrightarrow{inj} A$)

Exemplu Arătați că $\mathbb{N}$ și $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{2020}$ sunt echipotente.

Aplic Cantor-Bernstein: $f: \mathbb{N} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{2020}$ $\quad f(n) = (n, n, n, \dots, n)$ inj.

$g: \underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{2020} \longrightarrow \mathbb{N}$

$$\boxed{g(n_1, n_2, \dots, n_{2020}) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_{2020}^{n_{2020}}}$$

$\Leftarrow$ inj (unicitatea desc. în factori primi), unde $p_1, p_2, \dots, p_{2020}$ sunt nr. prime $\neq$ 2 câte 2.

Euclid: Avem o infinitate de nr. prime în $\mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ $\mathbb{N}$ și $\underbrace{\mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{2020}$ sunt echipotente

---

Exc! ① Fie $f: A \to B$ funcție. f e surjectivă $\iff (\exists)\ g: B \to A$ a.î. $f \circ g = 1_B$

② f e injectivă $\iff (\exists)\ h: B \to A$ a.î. $h \circ f = 1_A$.

Obs Folosind ① și Cantor-Bernstein $\Rightarrow \mathbb{Q}_+$ e echipotentă cu $\mathbb{N}$ (prima dem)

Def Fie $A \neq \emptyset$. O relație "$\sim$" pe mulțimea A reprezintă o submulțime a lui $A \times A$. Dacă $(a,b) \in \sim$ vom scrie $a \sim b$.

Def O relație "$\sim$" pe mulțimea A s.n. <u>relație de echivalență</u> dacă îndeplinește simultan condițiile:

1) reflexivă: $a \sim a \ (\forall) a \in A$
2) simetrică: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
3) tranzitivă: $a \sim b$ și $b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

<u>Exemplu</u> Relația de congruență modulo n: $A = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ "$\sim$" = "$\equiv (\mathrm{mod}\ n)$"

$a \equiv b \pmod n \Leftrightarrow n \mid a - b$.

<u>Exc</u> Rel. $\equiv (\mathrm{mod}\ n)$ este o relație de echivalență pe $\mathbb{Z}$.