$\boxed{C_2 - GA}$

Transformări elementare. Forma eșalon
Sisteme liniare

Def Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $(\mathbb{K},+,\cdot)$ corp comutativ.
S.n. transformări elementare asupra liniilor lui A

T_1: transformările prin care se „$\cdot$" o linie cu o ct $\neq 0$

T_2: transformările prin care se schimbă 2 linii între ele

T_3: transformările prin care la elem. unei linii se adună el. altei linii, eventual „$\cdot$" cu o ct $\neq 0$

$$T_1: A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{T_1} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ \alpha L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{K}^*, \forall i = \overline{1,m}$$

$$T_2: A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{T_2} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \quad \forall i,j = \overline{1,m}, i \neq j$$

$$T_3: A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \xrightarrow{T_3} \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \alpha L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \quad -\shortparallel-$$

Analog se def. transf. elem. asupra coloanelor.

Def Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ s.n. echivalente pe linii $A \sim B$ dacă B se obț. din A printr-un nr finit de transf. elementare asupra liniilor.

(T) $A \sim B \Rightarrow rg A = rg B$

Def O matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ este în forma eșalon (pe linii) dacă

$$\left[A = \begin{pmatrix} x & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & x & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & x & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right]$$

1) Toate liniile nule se află sub liniile nenule

2) Pe fiecare linie nenulă elementul din stâng s.n. pivot
Pivotul de pe L_{i+1} se află la dreapta pivotului de pe L_i

Spunem că matricea A este în forma eșalon redusă dacă, în plus:

3) Toți pivoții sunt 1

4) Deasupra pivoților toate elementele sunt nule.

OBS. Mathlab : forma eșalon (pe linii) ref(A)
forma eșalon redusă (pe linii) rref(A)

Prop $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ se poate transforma într-o matrice în forma eșalon (pe linii) printr-un nr finit de transformări elementare.

OBS a) forma eșalon nu este unică
b) forma eșalon redusă este unică
c) $rg A =$ nr. de pivoți

Analog se def. forma eșalon pe coloane.

Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 10 & 7 \\ -4 & 4 & -8 & 4 \\ 4 & -1 & 14 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2-L_1 \\ L_3+2L_1 \\ L_4-2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & 6 & 9 \\ 0 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3-L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{2} & -2 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

forma eșalon

<u>Forma eșalon redusă</u>

$$A \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2-3L_3 \\ L_1+L_3}}{\overset{(\text{rescalare})}{\sim}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1+L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 4 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rg A = 3$

<u>Algoritmul Gauss-Jordan pt calcul A^{-1}</u>

Fie matrice dublă $(A|I_n) \sim (C|B)$ (transf. elem. pe linii)

Dacă A este inversabilă, at $C = I_n$ (forma eșalon redusă pt A) și $B = A^{-1}$

<u>Exemplu</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9 \neq 0$$

A este inversabilă.

$5 - \frac{1}{2}$

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{9}{2}} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right)$$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{18} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$; $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9} \; ; \; \frac{1}{3} - \frac{10}{9} = -\frac{7}{9} \; ; \; -\frac{2}{3} + \frac{2}{9} = -\frac{4}{9}$$

Deci $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{7}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$

Sisteme de ecuații algebrice de ordinul 1 cu mai multe necunoscute

$\circledast$ $AX = B$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$

$$\Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \; \forall i = \overline{1,m}$$

(m ecuații cu n necunoscute)

Int. geometrică: $\circledast$ $\cap$ a m hiperplane în $\mathbb{R}^n$.

Not $S(A) = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid AX = B \} \subset \mathbb{R}^n$

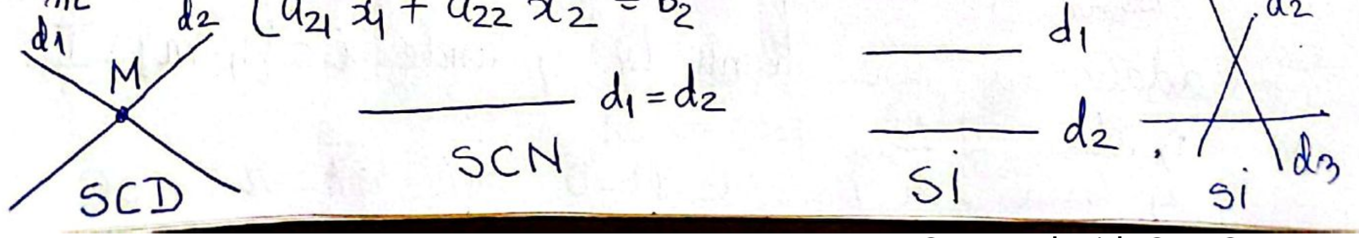
mulțimea soluțiilor sist $\circledast$.

① $S(A) \neq \emptyset$ → SCD (sistem compatibil determinat) (soluție unică)
→ SCN (sistem compatibil nedeterminat, mai multe soluții (o infinitate))

② $S(A) = \emptyset$ SI (sistem incompatibil) $\nexists$ soluție.

Cazuri particulare

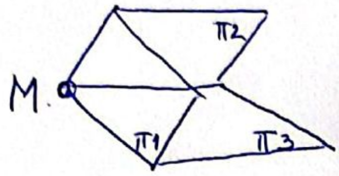
I. $n = 2 = m$ $\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$ $\cap$ a 2 drepte în plan.



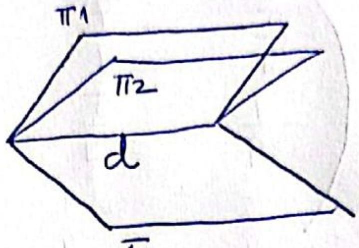
locca

II. $n = m = 3$ $\cap$ a 3 plane în $\mathbb{R}^3$

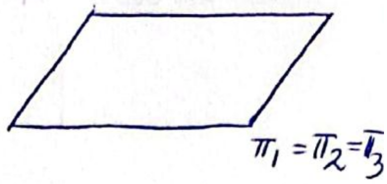
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$



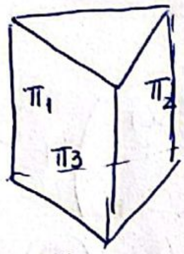
SCD



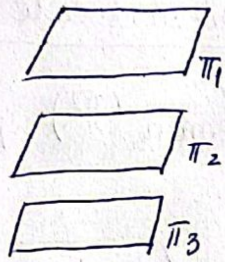
SCN (simplu)



SC(dublu)N.

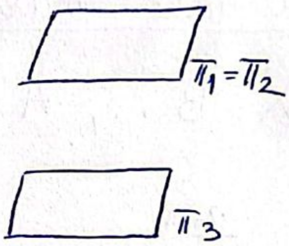


SI



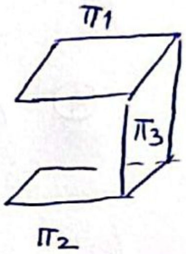
$\pi_1 \parallel \pi_2 \parallel \pi_3$

SI



$\pi_1 \parallel \pi_3$

SI



$\pi_1 \parallel \pi_2$

SI

III Cazul general $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$(*)$ $AX = B$ $\quad \bar{A} = (A|B)$

<u>Teorema Kronecker-Capelli</u>

$(*)$ este sistem compatibil $\Leftrightarrow rg A = rg \bar{A}$

<u>Teorema Rouché</u>

$(*)$ este sistem compatibil $\Leftrightarrow$ toți minorii caracteristici (dacă $\exists$) sunt nuli.

<u>Algoritm</u>

$rg A = r$, $\Delta_p = \det(A_{I,J})$ $\quad I = \{i_1, \dots, i_r\}$ $\quad 1 \le i_1 < \dots < i_r \le m$

$J = \{j_1 \dots j_r\}$ $\quad 1 \le j_1 < \dots < j_r \le n$

Δ_{car} se obține prin bordarea coloanei term. liberi și adăugarea unei linii L_i, unde $i \in \{1, .., m\} \setminus I$.

1). Dacă $\exists\ \Delta_{car} \neq 0 \Rightarrow$ SI

2) Dacă toți Δ_{car} (dc $\exists$) $= 0$ $\quad rg A = rg \bar{A} = r$ $\quad$ SC

a) Dacă $m \geq n$ (nr ec $\geq$ nr. necun)

a₁) $rg A = rg \bar{A} = n$ SCD ($x_1, \dots, x_n$ var pr, $\nexists$ var sec)

a₂) $rg A = \underset{\overset{\|}{r}}{rg \bar{A}} < n$ SCN

$x_1, \dots, x_r$ var principale ; $\underbrace{x_{r+1} = \lambda_1, \dots, x_n = \lambda_{n-r} = \lambda_p}_{\text{var secundare}}$ $n-r=p$

$(\underbrace{x_1, \dots, x_r}, \lambda_1, \dots, \lambda_p)$

se exprimă în funcție de $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

b) Dacă $m < n$ (nr ec < nr nec).

$rg A = rg \bar{A} = r \leq m$ SCN.

$\boxed{\text{OBS}}$ (*) $AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sistem liniar și omogen.

$A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

- $m = n$ $\to$ $\Delta = \det A \neq 0 \Rightarrow \exists! (0, \dots, 0)$ sol nulă (SCD)
  $\to$ $\Delta \neq 0$ $\exists$ și sol nenule (SCN)
- $m \neq n$ $\to$ $m > n$ $\to$ $rg A = rg \bar{A} = n$ SCD
  $\to$ $rg A = rg \bar{A} = r < n$ SCN.
  $\to$ $m < n$ SCN.
  $rg A = rg \bar{A} = r \leq m$.

Aplicație

Fie sistemul: $\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}$ $A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a \end{array}\right)$

Discuție

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a+2 & a+2 & a+2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a+2) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 \end{vmatrix}$

$= (a+2)(a-1)^2$

1) $\Delta \neq 0 \Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ $rg A = rg \bar{A} = 3$ SCD.

(sistem de tip Cramer) $x = \frac{\Delta x}{\Delta}$, Δ_x se obține din Δ înlocuind col x cu col term. liberi.

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & a \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_z = \Delta$ deci

$(0,0,1)$ este sol unică

2) $\Delta = 0 \Rightarrow a \in \{-2, 1\}$

2a) $a = -2$ $\quad A = \left(\begin{array}{ccc} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -2 \end{array}\right.$

$\Delta_p = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, $rg A = 2$

$\Delta_c = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \Delta = 0 \Rightarrow rg \bar{A} = 2$

SC simplu N

x, y = var principale

$z = \alpha$ var secundară

$$\begin{cases} -2x + y = 1 - \alpha \\ x - 2y = 1 - \alpha \quad | \cdot 2 \end{cases} \quad \oplus$$

$/ \quad -3y = 3 - 3\alpha$

$y = \alpha - 1$

$x = 1 - \alpha + 2\alpha - 2 = \alpha - 1.$

$(x, y, z) \in \{(\alpha - 1, \alpha - 1, \alpha), \alpha \in \mathbb{R}\}$

2b) $a = 1$ $\quad A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\right.$

$\Delta_p = |1| \neq 0$, $\Delta_{c_1} = \Delta_{c_2} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rg A = rg \bar{A} = 1$

SC (dublu) N

x = var principală , $y = \alpha, z = \beta$ var secundare

$x = 1 - \alpha - \beta$, $(x, y, z) \in \{(1 - \alpha - \beta, \alpha, \beta), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Def. 2 sisteme s.n echivalente $\Leftrightarrow$ au aceeași mulțime de sol

(T) Prin aplicarea transformărilor elementare asupra liniilor matricei extinse $\bar{A} = (A | B)$ se obțin matrice extinse ale unor sistem. echivalente.

Metoda eliminării Gauss-Jordan

Exemplu

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -2 \\ 2x - 6y + 9z = 3 \\ -3x + 2y + 2z = -3. \end{cases}$$

...ctură de spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{K}$ dacă

$$\bar{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & -6 & 9 & 3 \\ -3 & 2 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 11 & 3 \end{array}\right)$$

$$\ldots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$