$\boxed{C_8 - GA}$

Forme biliniare. Forme pătratice. Formă canonică

$(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp vect

Def Aplicația $g: V\times V \longrightarrow \mathbb{K}$ s.n. formă biliniară
$\Leftrightarrow$ g este liniară în fiecare argument

i.e. 1) $g(ax+by,z) = ag(x,z)+bg(y,z)$

2) $g(x,ay+bz) = a g(x,y) + bg(x,z)$, $\forall x,y,z\in V$
$\forall a,b\in\mathbb{K}$

Not $L(V,V;\mathbb{K})$ = mult. formelor biliniare.

Def $g: V\times V\longrightarrow\mathbb{K}$ s.n. formă simetrică $\Leftrightarrow g(x,y)=g(y,x)$

-//- antisimetrică $\Leftrightarrow g(x,y)=-g(y,x)$
$\forall x,y\in V$

Not $L^s(V,V;\mathbb{K})$ = mult. formelor simetrice

$L^a(V,V;\mathbb{K})$ = -//- antisimetrice.

OBS $g\in L^s(V,V;\mathbb{K})$ și g este liniară într-un argument
at g este biliniară.

Matricea asociată unei forme biliniare

$R=\{e_1,\dots,e_n\}$ reper în V, $G=(g_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea asociată lui $g\in L(V,V;\mathbb{K})$ în raport cu R, unde

$g_{ij} = g(e_i,e_j)$, $\forall i,j=\overline{1,n}$

$$g(x,y) = g\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i, \sum_{j=1}^n y_je_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_iy_j \underbrace{g(e_i,e_j)}_{g_{ij}} = X^TGY$$

$$= \underset{(1,n)}{(x_1 \dots x_n)} \underset{(n,n)}{\begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \dots & g_{nn}\end{pmatrix}} \underset{(n,1)}{\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}}$$

$\mathcal{R}=\{e_1,\dots,e_n\} \xrightarrow{C} \mathcal{R}'=\{e_1',\dots,e_n'\}$ repere în V

$G=(g_{ij})_{i,j}$ $\qquad G'=(g'_{kl})_{k,l}$

$g_{ij}=g(e_i,e_j)$ $\qquad g'_{kl}=g(e'_k,e'_l)$

$g'_{kl}=g\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ik}e_i, \sum_{j=1}^{n} c_{jl}e_j\right)=\sum_{i,j=1}^{n} c_{ik}\,g_{ij}\,c_{jl}$

$G'=C^TGC$

Prop $\operatorname{rang} G' = \operatorname{rang} G \overset{\operatorname{rang}(g)}{=}$ invariant la schimbarea reperului

Def $Q:V\to\mathbb{K}$ s.n. formă pătratică $\Leftrightarrow$ $\exists\, g\in L^s(V,V;\mathbb{K})$ a.î. $Q(x)=g(x,x), \forall x\in V$

(Q s.n. formă pătratică asociată formei biliniare simetrice g)

Prop $\exists$ o corespondență bijectivă între mult. formelor pătratice și mult. formelor biliniare simetrice. ($\operatorname{ch}\mathbb{K}\neq 2$)

Dem

- Fie $g\in L^s(V,V;\mathbb{K})$, at construim $Q:V\to\mathbb{K}$ forma pătratică a.î. $Q(x)=g(x,x), \forall x\in V$
- Fie $Q:V\to\mathbb{K}$ forma pătratică.

Construim $g\in L^s(V,V;\mathbb{K})$ a.î. $g(x,x)=Q(x), \forall x\in V$

$Q(x+y)=g(x+y,x+y)=g(x,x)+g(y,y)+2g(x,y)$

$Q(x+y)=Q(x)+Q(y)+2g(x,y) \Rightarrow$

$g(x,y)=2^{-1}\left[Q(x+y)-Q(x)-Q(y)\right]$

$g=$ forma polară asociată lui Q

Def $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică

$rg\, Q = rg\, g$, g = forma polară asoc. lui Q.

$\boxed{\text{OBS}}$ $\mathcal{R} = \{e_1, \dots, e_n\}$, $g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$ $(\Rightarrow G = G^T)$

$$g(x, y) = X^T G Y = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$$

$$Q(x) = g(x, x) = X^T G X = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} g_{ii} (x_i)^2 + 2 \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j$$

Def

$g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$

$\operatorname{Ker} g = \{x \in V \mid g(x, y) = 0, \forall y \in V\}$ nucleul lui g.

$\boxed{\text{OBS}}$ $x \in \operatorname{Ker} g$

$$\begin{cases} g(x, e_1) = 0 \\ \vdots \\ g(x, e_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow (*) \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} g_{i1} x_i = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} g_{in} x_i = 0 \end{cases}$$

$(*)$ SLO are sol unică nulă $\iff$ $\det(G) \neq 0$.

Def g s.n. formă biliniară simetrică nedegenerată

$\iff$ $\operatorname{Ker} g = \{0_V\}$

Prop $g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$ nedegenerată $\iff$ $\det G \neq 0 \iff$ $rg(g) = n = \dim V$ (maxim)

$(V, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$ sp. vect real

Def $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică

Q s.n. pozitiv definită $\iff$ 1) $Q(x) > 0, \forall x \in V \setminus \{0_V\}$

2) $Q(x) = 0 \iff x = 0_V$.

$g \in L^s(V, V; \mathbb{R})$ s.n. pozitiv definită $\iff$ Q forma pătratică asociată este pozitiv definită.

Prop $g \in L^s(V, V; \mathbb{R})$

g poz. definită $\Rightarrow g$ nedegenerată

Dem Fie $x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g(x,y)=0, \forall y \in V$

$y=x$

$\underset{Q(x)}{\overset{\|}{g(x,x)}} = 0 \xRightarrow[g \text{ poz def}]{} x = 0_V \Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\} \Rightarrow g$ nedeg.

Exemplu $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$

$g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$, $R = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic din $\mathbb{R}^3$

a) G = matricea asociată lui g în raport cu R

b) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratica asociată

Este Q poz. definită?

Sol

a) $g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

b) $Q(x) = g(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

$Q(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$; $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{R}^3}$

Q p. def.

Problema $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratica

$\exists R = \{e_1, .., e_n\}$ reper în V a.î. $G = (g_{ij})_{i,j} = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$

(matricea asoc în rap cu R), $\operatorname{rg} Q = \operatorname{rg} G = r$

$Q(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2$ (forma canonica a lui Q)?

Teorema Gauss

Fie $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratica

$\exists$ un reper $R = \{e_1, .., e_n\}$ în V a.î. Q are o formă canonică.

Dem

a) $Q = 0 \Rightarrow$ are forma canonica

b) $Q \neq 0$:

- $g_{11} \neq 0_{\mathbb{K}}$. (putem considera)

1) $g_{11} \neq 0$. 2) Dacă $g_{11} = 0$

2a) Dacă $\exists\ i \in \{2, .., n\}$ aî $g_{ii} \neq 0$

Renumerotăm indicii (sch. de reper) aî $g_{11} \neq 0$.

2b) $g_{ii} = 0,\ \forall i = \overline{1,n}$

$Q \neq 0 \Rightarrow G \neq O_n \Rightarrow \exists\ g_{ij} \neq 0, i \neq j$

Fie schimbarea de reper

$$\begin{cases} y_i = x_i + x_j \\ y_j = x_i - x_j \\ y_k = x_k,\ \forall k \in \{1, .., n\} \setminus \{i, j\} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_i = \frac{1}{2}(y_i + y_j) \\ x_j = \frac{1}{2}(y_i - y_j) \end{cases}$$

$$Q(x) = 2 \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j$$

$$g_{ij} x_i x_j = g_{ij} \frac{1}{4}(y_i^2 - y_j^2) = \underbrace{\frac{1}{4} g_{ij}}_{\neq 0} y_i^2 - \frac{1}{4} g_{ij} y_j^2$$

(cazul 2a)

Dem prin inducție după nr de componente ale lui x, care apar în Q.

Pp. adev P_{k-1}: Q conține $x_1, .., x_{k-1}$, atunci $\exists$ un reper în V aî Q are o formă canonică

Dem P_k: Q conține $x_1, .., x_{k-1}, x_k$

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $\exists$ un reper în V aî Q are o formă canonică.

$$Q(x) = g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{1k} x_1 x_k + \underbrace{Q'(x)}_{\text{conține } x_2, .., x_k}$$

$$= \frac{1}{g_{11}} \left[g_{11}^2 x_1^2 + 2 g_{11} g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{11} g_{1k} x_1 x_k \right] + Q'(x)$$

$$= \frac{1}{g_{11}} (g_{11} x_1 + g_{12} x_2 + \dots + g_{1k} x_k)^2 + \underbrace{Q''(x)}_{\text{conține } x_2, .., x_k}$$

Fie schimbarea de reper: $\Rightarrow Q(x) = \frac{1}{g_{11}} y_1^2 + Q''(x)$

$$\begin{cases} y_1 = g_{11}x_1 + \dots + g_{1k}x_k \\ y_j = x_j \ , j = \overline{2,n} \end{cases}$$

apar $y_2, \dots, y_k$.

Pt Q'' aplicăm pasul P_{k-1} de inducție

$\exists$ un reper aî $Q''(x) = a_2 z_2^2 + \dots + a_r z_r^2$

$Q(x) = a_1 z_1^2 + \dots + a_r z_r^2$, $r = rg\, Q$, $y_1 = z_1$, $a_1 = \frac{1}{g_{11}}$.

<u>Def</u>. $Q: V \to \mathbb{R}$ f. pătratică reală

$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$, $r = rg\, Q$

forma normală a lui Q. $(p, r-p)$ <u>signatura</u> lui Q

p ↓ nr. „+", $r-p$ ↓ nr. „−"

<u>Prop</u> $Q: V \to \mathbb{R}$ f. pătratică reală.

$\Rightarrow \exists$ un reper în V aî Q are forma normală

<u>Dem</u> Cf Th. Gauss $\Rightarrow \exists R$ reper în V aî

$Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$, $r = rg\, Q$.

Printr-o sch. de reper, putem considera $a_1 > 0, \dots, a_p > 0$, $a_{p+1} < 0, \dots, a_r < 0$.

Fie sch. de reper

$$\begin{cases} y_i = \sqrt{a_i}\, x_i \ , i = \overline{1,p} \\ y_j = \sqrt{-a_j}\, x_j \ , j = \overline{p+1,r} \\ y_k = x_k \ , \quad k = \overline{r+1,n} \end{cases} \qquad Q(x) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2$$

<u>Teorema de inerție Sylvester</u>

$Q: V \to \mathbb{R}$ f. pătratică reală.

Nr. „+" și nr. „−" din forma normală reprezintă invarianți la sch. de reper.

<u>OBS</u> $Q: V \to \mathbb{R}$ f. pătratică reală pozitiv definită

$\Leftrightarrow Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2 \Leftrightarrow$ signatura $(n, 0)$

$g: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

matricea asoc. în rap cu R_0 = reperul canonic

a) $g \in L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

b) Să se det $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ f. pătratică asociată lui g

c) Să se aducă Q la o formă canonică. Este Q poz def?

SOL

a) g sim $\Leftrightarrow G = G^T$; g bilin. $\Big| \Rightarrow g \in L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

b) $Q(x) = \sum_{i=1}^{3} g_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3$

c) $Q(x) = \underbrace{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2}_{(x_1+x_2)^2} + x_2^2 - 2x_2x_3$

$= (x_1+x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 - x_3^2$

Fie sch. de reper:

$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases}$

$Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

Signatura $(2, 1)$

Q nu este poz. def.

OBS

a) $g(x, y) = 2^{-1}[Q(x+y) - Q(x) - Q(y)]$

b) $g(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_1y_2 + x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j$

EX2 $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = x_1y_2 + 2x_1y_3 + x_2y_1 + 2x_3y_1$

$G = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Să se scrie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ forma pătratică asoc. lui g

Care este forma normală a lui Q?

Scanned with CamScanner

$Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$

$g_{12} = 1 \neq 0$ Fie sch. de reper $\begin{cases} y_1 = \cancel{x_1} + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1+y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ x_3 = y_3 \end{cases}$

$Q(x) = \frac{1}{2}(y_1^2 - y_2^2) + 2y_1y_3 + 2y_2y_3$.

$Q(x) = 2\left(\frac{1}{4}y_1^2 + y_1y_3\right) - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3$

$= 2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)^2 - \frac{1}{2}y_2^2 + 2y_2y_3 - 2y_3^2$

$= 2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}y_2^2 - y_2y_3\right) - 2y_3^2$

$= 2\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}y_2 - y_3\right)^2$.

Fie sch. de reper:

$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}y_1 + y_3\right) \\ z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}y_2 - y_3\right) \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

$Q(x) = z_1^2 - z_2^2$

Signatura: $(1,1)$

Q nu e poz def.

Metoda Jacobi

$Q: V \to \mathbb{R}$ f. pătratică reală

Fie R un reper în V (arbitrar). Dacă matricea G asociată în rap cu R verifică:

minorii diagonali $\Delta_1 = \det(g_{11})$, $\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}, \dots, \Delta_n = \det G$

sunt nenuli,

atunci există un reper ai

$Q(x) = \frac{1}{\Delta_1} x_1'^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} x_2'^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} x_n'^2$

Dacă, în plus, $\Delta_i > 0$, $\forall i = \overline{1,n}$, at Q este poz def.

OBS
a) metoda Jacobi este restrictivă
b) metoda Gauss se poate aplica totdeauna.