Logică Matematică și Computațională

Anul I, Semestrul I 2017/2018

Laurențiu Leuștean

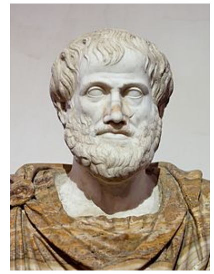
Pagina web: http://unibuc.ro/~lleustean/

În prezentarea acestui curs sunt folosite parțial slideurile Ioanei Leuștean din Semestrul I 2014/2015.

Ce este logica?

logiké tékhné = știința raționamentelor; logos = cuvânt, raționament

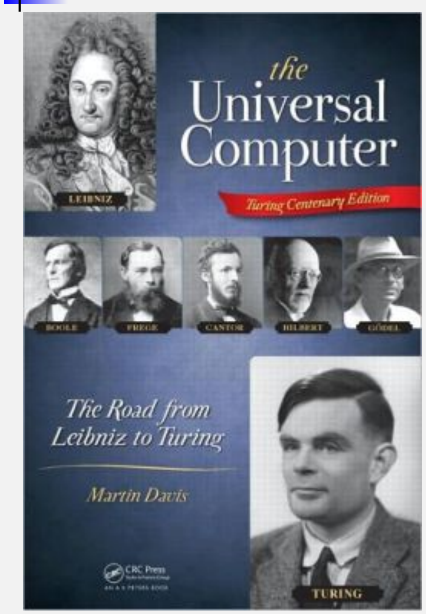
Aristotel (IV î.e.n.)



- http://plato.stanford.edu/entries/aristotle-logic/
- primul studiu formal al logicii
- a studiat silogismele, deducții formate din două premize și o concluzie.

	Barbara
Premiză	Toți oamenii sunt muritori.
Premiză	Grecii sunt oameni.
Concluzie	Deci grecii sunt muritori.

Logică și Informatică

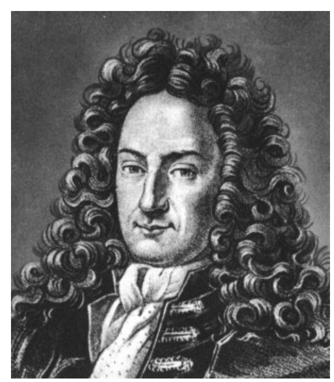


"... a computing machine is really a logic machine. Its circuits embody the distilled insights of a remarkable collection of logicians, developed over century. Nowadays, as computer technology advances with such breathtaking rapidity, as we admire the truly accomplishments of the engineers, it is all too easy to overlook the logicians whose ideas made it all possible. This book tells their story."

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 -1716)

Visul lui Leibniz

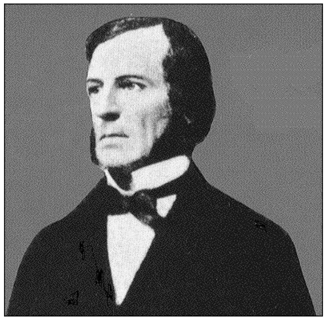
- un limbaj matematic universal (lingua characteristica universalis) în care toată cunoașterea umană poate fi exprimată și reguli de calcul (calculus ratiocinator) pentru a deriva, cu ajutorul mașinilor, toate relațiile logice:



"If controversies were to arise, there would be no more need of disputation between two philosophers than between two accountants. For it would suffice to take their pencils in their hands, and say to each other: Calculemus - Let us calculate."

George Boole (1815-1864)

- The Mathematical Analysis of Logic (1847), The Laws of Thought (1854): a inițiat analiza raționamentelor logice prin metode asemănătoare calculului algebric.
- Silogismele lui Aristotel sunt despre clase de obiecte, care pot fi studiate algebric.



"The design of the following treatise is to investigate the fundamental laws of the operations of the mind by which reasoning is performed; to give expressions to them in the symbolic language of calculus, and upon this foundation to establish the science of logic and constructs its methods."

Gottlob Frege (1848-1925)

Begriffschrift (1879)

- A introdus sintaxa formală: obiecte, predicate, funcții; conectori propoziționali; cuantificatori.
- A inventat logica de ordinul întâi.
- van Heijenoort, From Frege to Godel, 1967: *"perhaps the most important single work ever written in logic."*

Exemplu:

- Toți oamenii sunt muritori.
- Pentru orice x, dacă x este om, atunci x este muritor.
- $\forall x(Om(x) \rightarrow Muritor(x))$.

Georg Cantor (1848-1925)

- A inventat teoria mulțimilor.
- A definit numerele cardinale, ordinale.
- A dezvoltat o teorie matematică a infinitului.

Hilbert:

"No one shall be able to expel us from the paradise that Cantor created for us."

Georg Cantor (1848-1925)

- Aristotel: *"Infinitum Actu Non Datur"* - nu există infinit actual.
- Leibniz: *"I am so in favor of the actual infinite that instead of admitting that Nature abhors it, I hold that Nature makes frequent use of it everywhere."*
- Gauss: *"I protest above all the use of an infinite quantity as a completed one, which in mathematics is never allowed."*
- Frege: *"For the infinite will eventually refuse to be excluded from arithmetics . . . Thus we can foresee that this issue will provide for a momentous and decisive battle."*
- Poincaré: *"grave disease infecting mathematics"*.
- Kronecker despre Cantor: *"scientific charlatan"*, *"corrupter of youth"*
- Wittgenstein: *"utter nonsense"*
- Mittag-Leffler despre lucrările lui Cantor: *"about one hundred years too soon."*

Criza fundamentelor matematicii

Scrisoarea lui Bertrand Russell către Frege (16 iunie, 1902):

> *"I find myself in agreement with you in all essentials . . . I find in your work discussions, distinctions, and definitions that one seeks in vain in the work of other logicians . . . There is just one point where I have encountered a difficulty."*

Frege, apendix la The Fundamental Laws of Arithmetic, Vol. 2:

> *"There is nothing worse that can happen to a scientist than to have the foundation collapse just as the work is finished. I have been placed in this position by a letter from Mr. Bertrand Russell."*

Criza fundamentelor matematicii

Conform teoriei naive a mulțimilor, orice colecție definibilă este mulțime. Fie U mulțimea tuturor mulțimilor.

Paradoxul lui Russel (1902)

Fie $R = \{A \in U \mid A \notin A\}$. Atunci R este mulțime, deci $R \in U$. Obținem că $R \notin R \iff R \in R$.

Criza fundamentelor matematicii

- Paradoxul lui Russel $\Rightarrow$ Sistemul logic al lui Frege inconsistent
- a declanșat criza fundamentelor matematicii ("foundations of mathematics")
- s-a dezvoltat teoria axiomatică a mulțimilor: Zermelo-Fraenkel (ZF), ZFC: ZF+ Axioma alegerii (*Axiom of Choice*)

David Hilbert (1862-1943)

- unul dintre matematicienii de vârf ai generației sale
- unul dintre fondatorii teoriei demonstrației și logicii matematice
- lista sa de 23 probleme deschise (1902) a influențat foarte mult matematica secolului XX

Programul lui Hilbert

Programul lui Hilbert (1921)

Să se formalizeze matematica și să se stabilească următoarele:

- Matematica este consistentă: un enunț matematic și negația sa nu pot fi demonstrate simultan.
- Matematica este completă: toate enunțurile matematice adevărate pot fi demonstrate.
- Matematica este decidabilă: există o regulă mecanică pentru a determina dacă un enunț matematic dat este adevărat sau fals

Programul lui Hilbert

Hilbert a fost convins că aceste obiective pot fi atinse:

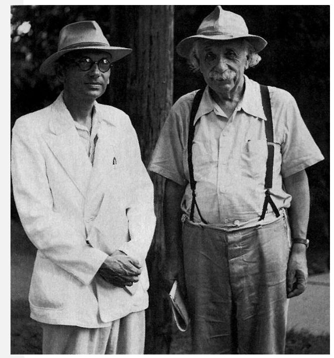
"Every mathematical problem must necessarily be susceptible to an exact statement either in the form of an actual answer to the question asked, or by the proof of the impossibility of its solution".

"Once a logical formalism is established one can expect that a systematic, so-to-say computational, treatment of logic formulas is possible, which would somewhat correspond to the theory of equations in algebra."

Kurt Gödel (1906-1978)

Teoremele de incompletitudine ale lui Gödel (1931-33)

- Incompletitudinea aritmeticii obișnuite.
- Imposibilitatea de a demonstra consistența teoriei mulțimilor.
- Au marcat eșecul programului lui Hilbert.



- Este considerat cel mai mare logician al secolului XX.
- A introdus funcțiile calculabile.
- A demonstrat teorema de completitudine a logicii de ordinul I.
- A demonstrat că Axioma Alegerii și Ipoteza Continuumului sunt consistente cu axiomele teoriei mulțimilor.

Kurt Gödel (1906-1978)

John von Neumann:

"Kurt Gödel's achievement in modern logic is singular and monumental - indeed it is more than a monument, it is a landmark which will remain visible far in space and time .... The subject of logic has certainly completely changed its nature and possibilities with Gödel's achievement."

Revista TIME (19 martie 1999)

Gödel a fost inclus in lista cu cei mai importanți 20 oameni de știință și gânditori ai secolului XX.

Problema de decizie (Entscheidungsproblem)

- Hilbert și Ackermann (1928): Există un algoritm pentru a verifica dacă o anumită formulă din logica de ordinul întâi este adevărată?
- Cu alte cuvinte: Este logica de ordinul întâi decidabilă?

Alan Turing(1912-1954)

Turing, *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*, Proc. London Math. Soc. 42 (1936).

- a demonstrat că logica de ordinul întâi este nedecidabilă (rezultat obținut independent de Church (1936)).
- a introdus mașina Turing (universală) pentru a formaliza noțiunea de algoritm.

- părintele informaticii și inteligenței artificiale
- mașina Turing universală este model al calculatoarelor actuale

Alan Turing(1912-1954)

Revista TIME (19 martie 1999)

Turing a fost inclus in lista cu cei mai importanți 20 oameni de știință și gânditori ai secolului XX:

"Virtually all computers today from 10 million supercomputers to the tiny chips that power cell phones and Furbies, have one thing in common: they are all "von Neumann machines", variations on the basic computer architecture that John von Neumann, building on the work of Alan Turing, laid out in the 1940's.

Premiul Turing

- `http://amturing.acm.org/`
- decernat anual de către Association for Computing Machinery (ACM) pentru contribuții în informatică
- este considerat un Premiu Nobel pentru Informatică

Logică și Informatică

E. W. Dijkstra, The next fifty years (EWD1243a). E.W. Dijkstra Archive. Center for American History, University of Texas at Austin:

"Computing and Computing Science unavoidably emerge as an exercise in formal mathematics or, if you wish an acronym, as exercise in VLSAL (Very Large Scale Application of Logic)."

Aaron R. Bradley, Zohar Manna, The Calculus of Computation Decision Procedures with Applications to Verification, Springer, 2007:

"Logic is the calculus of computation."

Georg Gottlob, Logic and Artificial Intelligence, VSL 2014:

"Computer science is the continuation of logic by other means."

Logică și Informatică

Aplicatii ale logicii în informatică:

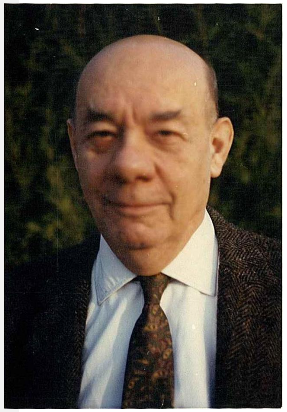
- calculabilitate și complexitate
- arhitectura calculatoarelor (circuite logice)
- software engineering (verificare, model checking)
- limbaje de programare (semantică, programare logică, programare funcțională)
- baze de date (algebre de relații, teoria modelelor finite)
- inteligență artificială
- criptografie și securitate

J. Y. Halpern, R. Harper, N. Immerman, P.G.Kolaitis, M.Y. Vardi, V.Vianu, *On the Unusual Effectiveness of Logic in Computer Science*, Bulletin of Symbolic Logic 7(2001)

Logică și Informatică în România

Grigore C. Moisil (1906-1973)

Computer Pioneer Award of IEEE Computer Society



S. Marcus, *Grigore C. Moisil: A life becoming a myth*, 2006.

"As a professor of the Bucharest University, he was the first to teach there mathematical logic. Articulating logic and automata, Moisil was well prepared to organize the Romanian development in the emergent field of Computer Science...we can say that 1957 is the date of birth of Romanian Computer Science, under the guidance of Professor Moisil and with the collaboration of engineers and mathematicians."

PRELIMINARII

Operații cu mulțimi

Fie A, B, T mulțimi a.î. $A, B \subseteq T$.

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ sau } x \in B\} \\ A \cap B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \in B\} \\ A \setminus B &= \{x \in T \mid x \in A \text{ și } x \notin B\} \\ C_T A &= T \setminus A = \{x \in T \mid x \notin A\} \end{aligned}$$

$C_T A$ se mai notează și $\overline{A}$ când T este clar din context.

Notații: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ este mulțimea numerelor naturale; $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$; $\mathbb{Z}$ este mulțimea numerelor întregi; $\mathbb{R}$ este mulțimea numerelor reale; $\mathbb{Q}$ este mulțimea numerelor raționale.

Mulțimea părților lui T este $\mathcal{P}(T) = \{A \mid A \subseteq T\}$. Se mai notează și 2^T.

Exemplu. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

Produsul cartezian

Notăm cu (a, b) perechea ordonată formată din a și b (care sunt componentele lui (a, b)).

Observații: dacă $a \neq b$, atunci $(a, b) \neq (b, a)$; $(a, b) \neq \{a, b\}$; $(7, 7)$ este o pereche ordonată validă; două perechi ordonate (a, b) și (c, d) sunt egale ddacă $a = c$ și $b = d$. În teoria mulțimilor, (a, b) se definește ca fiind mulțimea $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Definiție

Produsul cartezian a două mulțimi A și B este definit astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ și } b \in B\}$$

Exercițiu.

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \end{aligned}$$

Relații binare

Definiție

O relație binară între A și B este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$.
O relație binară pe A este o submulțime a lui $A \times A$.

Exemple

- $| \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$| = \{(k, n) \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } mk = n\}$$

- $< \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$$< = \{(k, n) \mid \text{ există } m \in \mathbb{N} \text{ a.î. } m \neq 0 \text{ și } m + k = n\}$$

Operații cu relații

Fie A, B, C mulțimi.

- Dacă $R \subseteq A \times B$, atunci relația inversă $R^{-1} \subseteq B \times A$ este definită astfel:

$$R^{-1} = \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}.$$

- Dacă $R \subseteq A \times B$ și $Q \subseteq B \times C$, atunci compunerea lor $Q \circ R \subseteq A \times C$ este definită astfel:

$$Q \circ R = \{(a, c) \mid \text{ există } b \in B \text{ a.î. } (a, b) \in R \text{ și } (b, c) \in Q\}.$$

- Diagonala lui A este $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$.

Exercițiu

- Compunerea relațiilor este asociativă.
- Dacă $R \subseteq A \times B$ atunci $R \circ \Delta_A = R$ și $\Delta_B \circ R = R$.

Funcții

Definiție

O funcție este un triplet (A, B, R), unde A și B sunt mulțimi, iar $R \subseteq A \times B$ este o relație cu proprietatea că pentru orice $a \in A$ există un unic $b \in B$ cu $(a, b) \in R$.

Vom nota o funcție (A, B, R) prin $f : A \to B$, simbolul f având următoarea semnificație: fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un singur element $f(x) \in B$ a.î. $(x, f(x)) \in R$.

Spunem că $f : A \to B$ este definită pe A cu valori în B, A se numește domeniul de definiție al funcției f și B se numește domeniul valorilor lui f.

Notație: B^A este mulțimea funcțiilor de la A la B.

Definiție

O funcție parțială de la A la B este o funcție $f : C \to B$, unde C este o submulțime a lui A.

Funcții

Notații: Fie $f : A \to B$ o funcție, $X \subseteq A$ și $Y \subseteq B$.

- $f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$ este imaginea directă a lui X prin f; $f(A)$ este imaginea lui f.
- $f^{-1}(Y) = \{x \in X \mid f(x) \in Y\}$ este imaginea inversă a lui Y prin f.

Definiție

Fie $f : A \to B$ o funcție

- f este injectivă dacă pentru orice $x_1, x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ implică $f(x_1) \neq f(x_2)$ (sau, echivalent, $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$).
- f este surjectivă dacă pentru orice $y \in B$ există $x \in A$ a.î. $f(x) = y$ (sau, echivalent, $f(A) = B$).
- f este bijectivă dacă f este injectivă și surjectivă.

Funcții

Fie $f : A \to B$ și $g : B \to C$ două funcții. Compunerea lor $g \circ f$ este definită astfel:

$$g \circ f : A \to C, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) \text{ pentru orice } x \in A.$$

Funcția identică a lui A: $1_A : A \to A$, $1_A(x) = x$.

Definiție

O funcție $f : A \to B$ este inversabilă dacă există $g : B \to A$ astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

Exercițiu. O funcție este bijectivă ddacă este inversabilă.

Definiție

Spunem că A este echipotentă cu B dacă există o bijecție $f : A \to B$. Notație: $A \sim B$.

Exercițiu. A este echipotentă cu B ddacă B este echipotentă cu A. De aceea, spunem de obicei că A și B sunt echipotente.

Funcția caracteristică

Definiție

Fie A, T mulțimi a.î. $A \subseteq T$. Funcția caracteristică a lui A în raport cu T este definită astfel:

$$\chi_A : T \to \{0, 1\}, \quad \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \in A \\ 0, & \text{dacă } x \notin A \end{cases}$$

Proprietăți

Dacă $A, B \subseteq T$ și $x \in T$ atunci

$$\begin{aligned} \chi_{A \cap B}(x) &= \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{A \cup B}(x) &= \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\} = \chi_A(x) + \chi_B(x) - \chi_A(x) \cdot \chi_B(x) \\ \chi_{\overline{A}}(x) &= 1 - \chi_A(x). \end{aligned}$$

Observație

Funcția caracteristică se poate folosi pentru a arăta că două mulțimi sunt egale: $A = B$ ddacă $\chi_A = \chi_B$.

Familii

Fie I o mulțime nevidă.

Fie A o mulțime. O familie de elemente din A indexată de I este o funcție $f : I \to A$. Notăm cu $(a_i)_{i\in I}$ familia $f : I \to A$, $f(i) = a_i$ pentru orice $i \in I$. Vom scrie și $(a_i)_i$ sau (a_i) atunci când I este dedusă din context.

Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o mulțime A_i, obținem o familie (indexată) de mulțimi $(A_i)_{i\in I}$.

Fie $(A_i)_{i\in I}$ o familie de submulțimi ale unei mulțimi T. Reuniunea și intersecția familiei $(A_i)_{i\in I}$ sunt definite astfel:

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in T \mid \text{ există } i \in I \text{ a.î. } x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in T \mid x \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}$$

Produsul cartezian al unei familii

Fie I o mulțime nevidă și $(A_i)_{i\in I}$ o familie de mulțimi.

Produsul cartezian al familiei $(A_i)_{i\in I}$ se definește astfel:

$$\prod_{i\in I} A_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} A_i \mid f(i) \in A_i \text{ pentru orice } i \in I \right\} = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in A_i \text{ pentru orice } i \in I\}.$$

Pentru orice $j \in I$, aplicația $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$, $\pi_j((x_i)_{i\in I}) = x_j$ se numește proiecție canonică a lui $\prod_{i\in I} A_i$. π_j este surjectivă.

Exercițiu. Fie I, J mulțimi nevide. Atunci

$$\bigcup_{i\in I} A_i \times \bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j \text{ și } \bigcap_{i\in I} A_i \times \bigcap_{j\in J} B_j = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j.$$

$I = \{1, \ldots, n\}$

Fie n număr natural, $n \geq 1$, $I = \{1, \ldots, n\}$ și $A_1, \ldots, A_n \subseteq T$.

- $(x_i)_{i\in I} = (x_1, \ldots, x_n)$, un n-tuplu (ordonat)
- $\bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ și $\bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$
- $\prod_{i\in I} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times \cdots \times A_n$ și $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n}$

Definiție

O relație n-ară între $A_1, \ldots, A_n$ este o submulțime a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} A_i$.
O relație n-ară pe A este o submulțime a lui A^n. Dacă R este relație n-ară, spunem că n este aritatea lui R.

Bună ordonare și inducție

Principiul bunei ordonări

Orice submulțime nevidă a lui $\mathbb{N}$ are un cel mai mic element.

Principiul inducției

Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

(i) $0 \in S$ și

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $n \in S$, atunci $n + 1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

Dem.: Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ a.î. (i) și (ii) sunt adevărate. Presupunem că $S \neq \mathbb{N}$, deci $\mathbb{N} \setminus S \neq \emptyset$. Fie n_0 cel mai mic element din $\mathbb{N} \setminus S$. Din (i) rezultă că $n_0 \neq 0$. Deoarece $n_0 - 1 \in S$, din (ii) rezultă că $n_0 \in S$. Am obținut o contradicție. Prin urmare, $S = \mathbb{N}$. $\square$

Observație

Principiul bunei ordonări și principiul inducției sunt echivalente.

Principiul inducției (forma tare)

Principiul inducției (forma tare)

Fie $S \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât:

(i) $0 \in S$ și

(ii) pentru orice $n \in \mathbb{N}$, dacă $\{0, 1, \ldots, n\} \subseteq S$, atunci $n + 1 \in S$.

Atunci $S = \mathbb{N}$.

Dem.: Aplicăm Principiul inducției pentru

$$S' = \{n \in \mathbb{N} \mid \{0, \ldots, n\} \subseteq S\}.$$

Obținem $S' = \mathbb{N}$. Rezultă că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $\{0, \ldots, n\} \subseteq S$, deci $n \in S$. Prin urmare, $S = \mathbb{N}$. $\square$

Principiul inducției

Fie $P : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ un predicat (o proprietate). $P(n) = 1$ înseamnă că $P(n)$ este adevărat.

Principiul inducției

- Pasul inițial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- Ipoteza de inducție. Presupunem că $P(n) = 1$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- Pasul de inducție. Demonstrăm că $P(n + 1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției (forma tare)

- Pasul inițial. Verificăm că $P(0) = 1$.
- Ipoteza de inducție. Presupunem că $P(k) = 1$ pentru orice $k \leq n$, unde $n \in \mathbb{N}$.
- Pasul de inducție. Demonstrăm că $P(n + 1) = 1$.

Concluzie: $P(n) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Mulțimi numărabile

Definiție

O mulțime A este numărabilă dacă este echipotentă cu $\mathbb{N}$.
O mulțime finită sau numărabilă se numește cel mult numărabilă.

Propoziție

(i) Orice submulțime infinită a lui $\mathbb{N}$ este numărabilă.

(ii) Reuniunea unei familii cel mult numărabile de mulțimi numărabile este mulțime numărabilă.

(iii) $\mathbb{Z}$ și $\mathbb{Q}$ sunt numărabile.

(iv) Produsul cartezian al unei familii cel mult numărabile de mulțimi numărabile este mulțime numărabilă.

Dem.: Exercițiu.

Principiul diagonalizării

Principiul diagonalizării

Fie R o relație binară pe o mulțime A și $D \subseteq A$ definită astfel:

$$D = \{x \in A \mid (x,x) \notin R\}.$$

Pentru orice $a \in A$, definim

$$R_a = \{x \in A \mid (a,x) \in R\}.$$

Atunci D este diferit de fiecare R_a.

Dem.: Presupunem că există $a \in A$ astfel încât $D = R_a$. Sunt posibile două cazuri:

- $a \in D$. Rezultă că $(a,a) \notin R$, deci $a \notin R_a = D$. Contradicție.
- $a \notin D$. Rezultă că $(a,a) \in R$, deci $a \in R_a = D$. Contradicție.

Prin urmare, $D \neq R_a$ pentru orice $a \in A$. □

Argumentul diagonal al lui Cantor

Teoremă Cantor

Nu există o bijecție între $\mathbb{N}$ și mulțimea $2^{\mathbb{N}}$ a părților lui $\mathbb{N}$, deci $2^{\mathbb{N}}$ nu este mulțime numărabilă.

Dem.: Presupunem că există o bijecție $f : \mathbb{N} \to 2^{\mathbb{N}}$. Prin urmare, $2^{\mathbb{N}}$ poate fi enumerată ca $2^{\mathbb{N}} = \{S_0, S_1, \ldots, S_n, \ldots,\}$, unde $S_i = f(i)$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Considerăm relația binară $R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definită astfel:

$$R = \{(i,j) \mid j \in f(i)\} = \{(i,j) \mid j \in S_i\}$$

și aplicăm Principiul diagonalizării. Astfel,

$$\begin{aligned} D &= \{n \in \mathbb{N} \mid (n,n) \notin R\} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin S_n\}, \\ R_i &= \{j \in \mathbb{N} \mid (i,j) \in R\} = \{j \in \mathbb{N} \mid j \in S_i\} = S_i, \quad i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Deoarece $D \subseteq \mathbb{N}$ și f este bijecție, există $k \in \mathbb{N}$ a.î. $D = f(k) = S_k = R_k$. Pe de altă parte, conform Principiului diagonalizării, $D \neq R_i$ pentru orice $i \in \mathbb{N}$. Am obținut o contradicție. □

Relații binare

Fie A o mulțime nevidă și $R \subseteq A^2$ o relație binară pe A.
Notație: Scriem xRy în loc de $(x,y) \in R$ și $\neg(xRy)$ în loc de $(x,y) \notin R$.

Definiție

- R este reflexivă dacă xRx pentru orice $x \in A$.
- R este ireflexivă dacă $\neg(xRx)$ pentru orice $x \in A$.
- R este simetrică dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy implică yRx.
- R este antisimetrică dacă pentru orice $x, y \in A$,
  $$xRy \text{ și } yRx \text{ implică } x = y.$$
- R este tranzitivă dacă pentru orice $x, y, z \in A$,
  $$xRy \text{ și } yRz \text{ implică } xRz.$$
- R este totală dacă pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx.

Relații de echivalență

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară $R \subseteq A^2$ se numește relație de echivalență dacă este reflexivă, simetrică și tranzitivă.

Exemple

- Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Definim relația $\equiv (\text{mod } n) \subseteq \mathbb{Z}^2$ astfel:
  $$\equiv (\text{mod } n) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \mid n \text{ divide } (x-y)\}.$$
  Relația $\equiv (\text{mod } n)$ se numește congruența modulo n. Folosim notația $x \equiv y (\text{mod } n)$ pentru $(x,y) \in \equiv (\text{mod } n)$.
- Fie $f : A \to B$ o funcție. Definim relația $\ker f \subseteq A^2$ astfel:
  $$\ker f = \{(a_1, a_2) \in A^2 \mid f(a_1) = f(a_2)\}.$$
  $\ker f$ se numește și nucleul lui f.

Notații: Vom nota relațiile de echivalență cu $\sim$. Scriem $x \sim y$ dacă $(x,y) \in \sim$ și $x \not\sim y$ dacă $(x,y) \notin \sim$.

Relații de echivalență

Fie A o mulțime nevidă și $\sim \subseteq A^2$ o relație de echivalență.

Definiție

Pentru orice $x \in A$, clasa de echivalență $[x]$ a lui x este definită astfel: $[x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$.

Propoziție

- $A = \bigcup_{x\in A}[x]$.
- $[x] = [y]$ ddacă $x \sim y$.
- $[x] \cap [y] = \emptyset$ ddacă $x \not\sim y$ ddacă $[x] \neq [y]$.

Dem.: Exercițiu.

Definiție

Mulțimea tuturor claselor de echivalență distincte ale elementelor lui A se numeșt mulțimea cât a lui A prin $\sim$ și se notează $A/\sim$.
Aplicația $\pi : A \to A/\sim$, $\pi(x) = [x]$ se numește funcția cât.

Relații de echivalență

Fie A o mulțime nevidă și $\sim \subseteq A^2$ o relație de echivalență.

Definiție

Un sistem de reprezentanți pentru $\sim$ este o submulțime $X \subseteq A$ care satisface: pentru orice $a \in A$ există un unic $x \in X$ a.î. $a \sim x$.

Propoziție

Fie X un sistem de reprezentanți pentru $\sim$. Atunci $A = \bigcup_{x\in X}[x]$ și $A/\sim = \{[x] \mid x \in X\}$.

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

Considerăm congruența modulo 2, $\equiv (\mathrm{mod}\ 2)$:
$[0] = \{2n \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}$, $[1] = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\} = 2\mathbb{Z}+1$;
$[2n] = [0]$ și $[2n+1] = [1]$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$; mulțimea cât este $\mathbb{Z}_2 = \{[0],[1]\}$. Sisteme de reprezentanți: $X = \{0,1\}$, $X = \{2,5\}$, $X = \{999, 20\}$.

Partiții

Fie A o mulțime nevidă.

Definiție

O partiție a lui A este o familie $(A_i)_{i\in I}$ de submulțimi nevide ale lui A care verifică proprietățile:

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i \text{ și } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ pentru orice } i \neq j.$$

Partiția $(A_i)_{i\in I}$ se numește finită dacă I este finită.

Propoziție

Există o bijecție între mulțimea relațiilor de echivalență pe A si mulțimea partițiilor lui A:

- $(A_i)_{i\in I}$ partiție a lui $A \mapsto$ relația de echivalență pe A definită prin: $x \sim y$ ddacă există $i \in I$ a.î. $x, y \in A_i$.
- $\sim$ relație de echivalență pe $A \mapsto$ partiția $([x])_{x\in X}$, unde $X \subseteq A$ este un sistem de reprezentanți pentru $\sim$.

Dem.: Exercițiu.

Relații de ordine

Definiție

Fie A o mulțime nevidă. O relație binară R pe A este relație de

- ordine parțială dacă este reflexivă, antisimetrică și tranzitivă.
- ordine strictă dacă este ireflexivă și tranzitivă.
- ordine totală dacă este antisimetrică, tranzitivă și totală.

Notații: Vom nota relațiile de ordine parțială și totală cu $\leq$, iar relațiile de ordine strictă cu $<$.

Definiție

Dacă $\leq$ este o relație de ordine parțială (totală) pe A, spunem că $(A, \leq)$ este mulțime parțial (total) ordonată.

Mulțimi parțial ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Proprietăţii

- Orice relație de ordine totală este reflexivă. Prin urmare, orice mulțime total ordonată este mulțime parțial ordonată.
- Relația $<$ definită prin $x < y \iff x \leq y$ și $x \neq y$ este relație de ordine strictă.
- Dacă $\emptyset \neq S \subseteq A$, atunci $(S, \leq)$ este mulțime parțial ordonată.

Dem.: Exercițiu.

Mulțimi parțial ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in S$ se numește

- element minimal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $a \leq e$ implică $a = e$;
- element maximal al lui S dacă pentru orice $a \in S$, $e \leq a$ implică $a = e$;
- cel mai mic element (sau minim) al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- cel mai mare element (sau maxim) al lui S dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$.

Mulțimi parțial ordonate

Proprietăți

- Atât minimul, cât și maximul lui S sunt unice (dacă există).
- Orice minim (maxim) este element minimal (maximal). Reciproca nu este adevărată.
- S poate avea mai multe elemente maximale sau minimale.

Dem.: Exercițiu.

Mulțimi parțial ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată și $\emptyset \neq S \subseteq A$.

Definiție

Un element $e \in A$ se numește

- majorant al lui S dacă $a \leq e$ pentru orice $a \in S$;
- minorant al lui S dacă $e \leq a$ pentru orice $a \in S$;
- supremumul lui S, notat $\sup S$, dacă e este cel mai mic majorant al lui S;
- infimumul lui S, notat $\inf S$, dacă e este cel mai mare minorant al lui S.

Proprietăți

- Atât mulțimea majoranților, cât și mulțimea minoranților lui S pot fi vide.
- Atât supremumul, cât și infimumul lui S sunt unice (dacă există).

Mulțimi bine/inductiv ordonate

Fie $(A, \leq)$ o mulțime parțial ordonată.

Definiție

Spunem că $(A, \leq)$ este mulțime bine ordonată dacă orice submulțime nevidă a lui A are minim. În acest caz, $\leq$ se numește relație de bună ordonare pe A.

Exemple

$(\mathbb{N}, \leq)$ este bine ordonată, dar $(\mathbb{Z}, \leq)$ nu este bine ordonată.

Observație

Orice mulțime bine ordonată este total ordonată.

Definiție

$(A, \leq)$ se numește inductiv ordonată dacă orice submulțime total ordonată a sa admite un majorant.

Axioma alegerii

Axioma alegerii (în engleză Axiom of Choice) (AC)

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci există o funcție f_C care asociază la fiecare $i \in I$ un element $f_C(i) \in A_i$.

- formulată de Zermelo (1904)
- a provocat discuții aprinse datorită caracterului său neconstructiv: nu există nicio regulă pentru a construi funcția alegere f_C.

Reformulare

Următoarea afirmație este echivalentă cu Axioma alegerii:
Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulțimi nevide, atunci $\prod_{i \in I} A_i$ este o mulțime nevidă.

Axioma alegerii

- Gödel (1940) a demonstrat că axioma alegerii este consistentă cu ZF.
- Cohen (1963) a demonstrat că negația axiomei alegerii este consistentă cu ZF. Prin urmare, axioma alegerii este independentă de ZF. Cohen a primit în 1966 Medalia Fields.

Teoremă

Următoarele afirmații sunt echivalente cu Axioma alegerii:

- Lema lui Zorn Orice mulțime inductiv ordonată are un element maximal.
- Principiul bunei ordonări: Orice mulțime nevidă X poate fi bine ordonată (adică, pentru orice X există o relație binară $\leq$ pe X a.î. $(X, \leq)$ este mulțime bine ordonată).

H. Rubin, J. Rubin, Equivalents of the Axiom of Choice II, North Holland, Elsevier, 1985

Cardinale

- O mulțime se numește finită dacă are un număr finit de elemente. O mulțime care nu este finită se numește infinită.
- Numărul elementelor unei mulțimi finite A se notează $|A|$ și se mai numește și cardinalul lui A.

Numerele cardinale sau cardinalele sunt o generalizare a numerelor naturale, ele fiind folosite pentru a măsura dimensiunea unei mulțimi; au fost introduse de Cantor.
Există o definiție riguroasă în teoria mulțimilor a cardinalului unei mulțimi, datorată lui von Neumann. Pentru orice mulțime A, cardinalul lui A, notat $|A|$, este tot o mulțime. Colecția tuturor cardinalelor nu este mulțime, ci clasă.

Cardinale

- $|A|=|B|$ ddacă A și B sunt echipotente.
- Cardinalul unei mulțimi finite este numărul său de elemente. Cardinalele transfinite sunt cardinalele mulțimilor infinite.
- $|\mathbb{N}|$ se notează $\aleph_0$ (se citește *alef zero*).
- $|\mathbb{R}|$ se notează $\mathfrak{c}$ și se mai numește și puterea continuumului.
- O mulțime A este numărabilă ddacă $|A|=\aleph_0$.
- $|2^{\mathbb{N}}| \neq \aleph_0$.
- $|2^{\mathbb{N}}| = \mathfrak{c}$.

Cardinale

Definim următoarea relație pe clasa tuturor cardinalelor: pentru orice două mulțimi A, B,

$$|A| \leq |B| \iff \text{există } f : A \to B \text{ funcție injectivă.}$$

Teorema Cantor-Schröder-Bernstein

Dacă există două funcții injective $f : A \to B$ și $g : B \to A$, atunci A și B sunt echipotente. Altfel scris, dacă $|A| \leq |B|$ și $|B| \leq |A|$, atunci $|A| = |B|$.

Proprietăți

- $\leq$ este o relație de ordine totală.
- Orice cardinal are un unic succesor, adică pentru orice cardinal κ există un unic cardinal κ^+ a.î. $\kappa < \kappa^+$ și nu există cardinale ν a.î. $\kappa < \nu < \kappa^+$.
- $\aleph_0$ este cel mai mic cardinal transfinit. Succesorul lui $\aleph_0$ se notează $\aleph_1$.

Ipoteza continuumului (CH)

Ipoteza continuumului (Continuum Hypothesis (CH))

$$\text{Nu există nicio mulțime } S \text{ a.î. } \aleph_0 < |S| < \mathfrak{c}.$$
$$\Updownarrow$$
$$2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

- avansată de Cantor în 1878.
- prima problemă din lista lui Hilbert de 23 probleme prezentate în 1900.
- Gödel (1940) a demonstrat că (CH) este consistentă cu ZFC.
- Cohen (1963) a demonstrat că negația lui (CH) este consistentă cu ZFC. Prin urmare, (CH) este independentă de ZFC.

LOGICA PROPOZIȚIONALĂ

Logica propozițională - informal

Limbajul logicii propoziționale este bazat pe propoziții sau enunțuri declarative, despre care se poate argumenta în principiu că sunt adevărate sau false.

Propoziții declarative

- Suma numerelor 2 și 4 este 6.
- Mihai Eminescu a fost un scriitor român.
- Maria a reacționat violent la acuzațiile lui Ion.
- Orice număr natural par > 2 este suma a două numere prime. (Conjectura lui Goldbach).
- Andrei este deștept.
- Marțienilor le place pizza.

Propoziții care nu sunt declarative

- Poți să îmi dai, te rog, pâinea?
- Pleacă!

Logica propozițională - informal

Considerăm anumite propoziții ca fiind atomice și le notăm $p, q, r, \ldots$ sau $p_1, p_2, p_3, \ldots$.
Exemple: p=Numărul 2 este par. q=Mâine plouă. r=Sunt obosit.

Pornind de la propozițiile atomice, putem crea propoziții complexe (notate φ, ψ, χ, $\cdots$) folosind conectorii logici $\neg$ (negația), $\rightarrow$ (implicația), $\vee$ (disjuncția), $\wedge$ (conjuncția), $\leftrightarrow$ (echivalența).

Exemple:

$\neg p$	$=$	Numărul 2 nu este par.
$p \vee q$	$=$	Numărul 2 este par sau mâine plouă.
$p \wedge q$	$=$	Numărul 2 este par și mâine plouă.
$p \rightarrow q$	$=$	Dacă numărul 2 este par, atunci mâine plouă.
$p \leftrightarrow q$	$=$	Numărul 2 este par dacă și numai dacă mâine plouă.

Putem aplica repetat conectorii pentru a obține propoziții și mai complexe. Pentru a elimina ambiguitățile, folosim parantezele (,).
Exemplu: $\varphi = (p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$

Logica propozițională - informal

Exemplu:

Fie propoziția:

φ=*Azi este marți, deci avem curs de logică.*

Considerăm propozițiile atomice

p=*Azi este marți.* q=*Avem curs de logică.*

Atunci $\varphi = p \rightarrow q$. Cine este $\neg\varphi$?

$\neg\varphi = p \wedge (\neg q)$=*Azi este marți și nu avem curs de logică.*

Logica propoziţională - informal

Exemplu:

Fie propoziţia:

φ=*Dacă trenul întârzie şi nu sunt taxiuri la gară, atunci Ion întârzie la întâlnire.*

Considerăm propoziţiile atomice

p = *Trenul întârzie.*
q = *Sunt taxiuri la gară.*
r = *Ion întârzie la întâlnire.*

Atunci $\varphi = (p \wedge (\neg q)) \rightarrow r$.

Presupunem că φ, p sunt adevărate şi r este falsă (deci $\neg r$ este adevărată). Ce putem spune despre q? q este adevărată.

Logica propoziţionala LP - Limbajul

Definiţia 1.1

Limbajul logicii propoziţionale *LP* este format din:

- o mulţime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
- conectori logici: $\neg$ (se citeşte non), $\rightarrow$ (se citeşte implică)
- paranteze: (,).

- Mulţimea *Sim* a simbolurilor lui *LP* este

$$Sim := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,)\}.$$

- Notăm variabilele cu $v, u, w, v_0, v_1, v_2, \ldots$

Logica propoziţionala LP - Limbajul

Definiţia 1.2
Mulţimea *Expr* a expresiilor lui LP este mulţimea tuturor şirurilor finite de simboluri ale lui LP.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ. Sim^n este mulţimea şirurilor de simboluri ale lui LP de lungime n.
- Prin convenţie, $Sim^0 = \{\lambda\}$. Atunci $Expr = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Sim^n$.

Exemple:
$((((v_7,\ v_1\neg \to (v_2),\ \neg v_1 v_2,\ ((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1)),\ (\neg(v_1 \to v_2))$.

Logica propoziţionala LP - Limbajul

Definiţia 1.3
Fie $\theta = \theta_0\theta_1\ldots\theta_{k-1}$ o expresie a lui LP, unde $\theta_i \in Sim$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$.

- Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \ldots \theta_j$ se numeşte (i,j)-subexpresia lui θ;
- Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i,j)-subexpresia lui θ.

Formule

Definiţia formulelor este un exemplu de definiţie inductivă.

Definiţia 1.4
Formulele lui LP sunt expresiile lui LP definite astfel:

(F0) Orice variabilă propoziţională este formulă.
(F1) Dacă φ este formulă, atunci $(\neg\varphi)$ este formulă.
(F2) Daca φ şi ψ sunt formule, atunci $(\varphi \to \psi)$ este formulă.
(F3) Numai expresiile obţinute aplicând regulile (F0), (F1), (F2) sunt formule.

Notaţii: Mulţimea formulelor se notează *Form*. Notăm formulele cu $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.

- Orice formulă se obţine aplicând regulile (F0), (F1), (F2) de un număr finit de ori.
- $Form \subseteq Expr$. Formulele sunt expresiile "bine formate".

Formule

Exemple:
- $v_1\neg \to (v_2),\ \neg v_1 v_2$ nu sunt formule .
- $((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1)),\ (\neg(v_1 \to v_2))$ sunt formule.

Citire unică (Unique readability)
Dacă φ este o formulă, atunci exact una din următoarele alternative are loc:
- $\varphi = v$, unde $v \in V$;
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Propoziţia 1.5
Mulţimea *Form* a formulelor lui LP este numărabilă.

Dem.: Exerciţiu.

Principiul inducției pe formule

Propoziția 1.6 *(Principiul inducției pe formule)*

Fie $\boldsymbol{P}$ o proprietate. Presupunem că:

(0) Orice variabilă are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

(1) Pentru orice formulă φ, dacă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$, atunci și $(\neg\varphi)$ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

(2) Pentru orice formule φ, ψ, dacă φ și ψ au proprietatea $\boldsymbol{P}$, atunci $(\varphi \to \psi)$ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Atunci orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Dem.: Pentru orice formulă φ, notăm cu $c(\varphi)$ numărul conectorilor logici care apar în φ. Pentru orice $n \in \mathbb{N}$ definim proprietatea $Q(n)$ astfel:

$$Q(n) \text{ e adevărată ddacă orice formulă } \varphi \text{ cu } c(\varphi) \leq n \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P}.$$

Demonstrăm prin inducție că $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Principiul inducției pe formule

Pasul inițial. $Q(0)$ este adevărată, deoarece pentru orice formulă φ, $c(\varphi) \leq 0 \iff c(\varphi) = 0 \iff \varphi = v$, cu $v \in V$ și, conform ipotezei (0), v are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Ipoteza de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că $Q(n)$ este adevărată.

Pasul de inducție. Demonstrăm că $Q(n+1)$ este adevărată. Fie φ o formulă cu $c(\varphi) \leq n+1$. Avem trei cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$, conform (0).
- $\varphi = (\neg\psi)$, unde ψ este formulă. Atunci $c(\psi) = c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. Aplicînd ipoteza (1), rezultă că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.
- $\varphi = (\psi \to \chi)$, unde ψ, χ sunt formule. Atunci $c(\psi), c(\chi) \leq c(\varphi) - 1 \leq n$, deci, conform ipotezei de inducție, ψ și χ au proprietatea $\boldsymbol{P}$. Rezultă din (2) că φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Așadar, $Q(n)$ este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece pentru orice formulă φ există $N \in \mathbb{N}$ a.î. $c(\varphi) \leq N$, rezultă că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$. □

Principiul inducției pe formule

Propoziția 1.7 *(Principiul inducției pe formule - variantă alternativă)*

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- $V \subseteq \Gamma$;
- Γ este închisă la $\neg$, adică $\varphi \in \Gamma$ implică $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- Γ este închisă la $\to$, adică $\varphi, \psi \in \Gamma$ implică $(\varphi \to \psi) \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = Form$.

Dem.: Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

$$\varphi \text{ are proprietatea } \boldsymbol{P} \text{ ddacă } \varphi \in \Gamma.$$

Conform definiției lui Γ, rezultă că sunt satisfăcute ipotezele (0), (1), (2) din Principiul inducției pe formule (Propoziția 1.6), deci îl putem aplica pentru a obține că orice formulă are proprietatea $\boldsymbol{P}$, deci orice formulă φ este în Γ. Așadar, $\Gamma = Form$. □

Formule

Conectorii derivați $\vee$ (se citește sau), $\wedge$ (se citește și), $\leftrightarrow$ (se citește dacă și numai dacă) sunt introduși prin abrevierile:

$$\begin{array}{lcl} (\varphi \vee \psi) & := & ((\neg\varphi) \to \psi) \\ (\varphi \wedge \psi) & := & (\neg(\varphi \to (\neg\psi))) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) & := & ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)). \end{array}$$

Convenții

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \to \psi$, dar scriem $(\varphi \to \psi) \to \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedența mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\to, \leftrightarrow$.

Prin urmare, formula $(((\varphi \to (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \to \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.

Propoziția 1.8 (Principiul recursiei pe formule)

Fie A o mulțime și funcțiile

$$G_0 : V \to A, \quad G_\neg : A \to A, \quad G_\to : A \times A \to A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : Form \to A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_\neg(F(\varphi))$ pentru orice formulă φ.

(R2) $F(\varphi \to \psi) = G_\to(F(\varphi), F(\psi))$ pentru orice formule φ, ψ.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Principiul recursiei pe formule se folosește pentru a da definiții recursive ale diverselor funcții asociate formulelor.

Exemplu:

Fie $c : Form \to \mathbb{N}$ definită astfel: pentru orice formulă φ,

$c(\varphi)$ este numărul conectorilor logici care apar în φ.

O definiție recursivă a lui c este următoarea:

$$\begin{aligned} c(v) &= 0 \quad \text{pentru orice variabilă } v \\ c(\neg\varphi) &= c(\varphi) + 1 \quad \text{pentru orice formulă } \varphi \\ c(\varphi \to \psi) &= c(\varphi) + c(\psi) + 1 \quad \text{pentru orice formule } \varphi, \psi. \end{aligned}$$

În acest caz, $A = \mathbb{N}$, $G_0 : V \to A$, $G_0(v) = 0$,

$$G_\neg : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \qquad G_\neg(n) = n + 1,$$
$$G_\to : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad G_\to(m, n) = m + n + 1.$$

Notație:

Pentru orice formulă φ, notăm cu $Var(\varphi)$ mulțimea variabilelor care apar în φ.

Observație

Mulțimea $Var(\varphi)$ poate fi definită și recursiv.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.9 (Principiul recursiei pe formule - varianta 2)

Fie A o mulțime și funcțiile $G_0 : V \to A$,

$$G_\neg : A \times Form \to A, \quad G_\to : A \times A \times Form \times Form \to A.$$

Atunci există o unică funcție

$$F : Form \to A$$

care satisface următoarele proprietăți:

(R0) $F(v) = G_0(v)$ pentru orice variabilă $v \in V$.

(R1) $F(\neg\varphi) = G_\neg(F(\varphi), \varphi)$ pentru orice formulă φ.

(R2) $F(\varphi \to \psi) = G_\to(F(\varphi), F(\psi), \varphi, \psi)$ pentru orice formule φ, ψ.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Subformule

Definiția 1.10

Fie φ o formulă a lui LP. O subformulă a lui φ este orice formulă ψ care apare în φ.
Notație: Mulțimea subformulelor lui φ se notează $SubForm(\varphi)$.

Exemplu:

Fie $\varphi = ((v_1 \to v_2) \to (\neg v_1))$. Atunci

$$SubForm(\varphi) = \{v_1, v_2, (v_1 \to v_2), (\neg v_1), \varphi\}.$$

Subformule

Definiție alternativă

Mulțimea $SubForm(\varphi)$ poate fi definită și recursiv:

$$\begin{aligned} SubForm(v) &= \{v\} \\ SubForm(\neg\varphi) &= SubForm(\varphi) \cup \{\neg\varphi\} \\ SubForm(\varphi \to \psi) &= SubForm(\varphi) \cup SubForm(\psi) \cup \{\varphi \to \psi\}. \end{aligned}$$

În acest caz,

$$SubForm : Form \to 2^{Form}, \text{ deci } A = 2^{Form},$$

și

$$\begin{aligned} G_0 &: V \to A, & G_0(v) &= \{v\}, \\ G_\neg &: A \times Form \to A, & G_\neg(\Gamma, \varphi) &= \Gamma \cup \{\neg\varphi\}, \\ G_\to &: A \times A \times Form \times Form \to A, & G_\to(\Gamma, \Delta, \varphi, \psi) &= \Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi \to \psi\}. \end{aligned}$$

SEMANTICA LP

Tabele de adevăr

Valori de adevăr

Folosim următoarele notații pentru cele două valori de adevăr: 1 pentru adevărat și 0 pentru fals. Prin urmare, mulțimea valorilor de adevăr este $\{0, 1\}$.
Definim următoarele operații pe $\{0, 1\}$ folosind tabelele de adevăr.

$$\neg : \{0,1\} \to \{0,1\},$$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Se observă că $\neg p = 1 \iff p = 0$.

$$\to : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\},$$

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Se observă că $p \to q = 1 \iff p \le q$.

Tabele de adevăr

Operațiile $\vee : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ și $\leftrightarrow : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$ se definesc astfel:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Observație

Pentru orice $p, q \in \{0,1\}$, $p \vee q = \neg p \to q$, $p \wedge q = \neg(p \to \neg q)$ și $p \leftrightarrow q = (p \to q) \wedge (q \to p)$.

Dem.: Exercițiu.

Evaluări

Definiția 1.11

O evaluare (sau interpretare) este o funcție $e : V \to \{0,1\}$.

Teorema 1.12

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$ există o unică funcție

$$e^+ : Form \to \{0,1\}$$

care verifică următoarele proprietăți:

- $e^+(v) = e(v)$ pentru orice orice $v \in V$.
- $e^+(\neg\varphi) = \neg e^+(\varphi)$ pentru orice $\varphi \in Form$,
- $e^+(\varphi \to \psi) = e^+(\varphi) \to e^+(\psi)$ pentru orice $\varphi, \psi \in Form$.

Dem.: Aplicăm Principiul Recursiei pe formule (Propoziția 1.8) cu $A = \{0,1\}$, $G_0 = e$, $G_\neg : \{0,1\} \to \{0,1\}$, $G_\neg(p) = \neg p$ și $G_\to : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$, $G_\to(p,q) = p \to q$. $\square$

Propoziția 1.13

Dacă $e : V \to \{0,1\}$ este o evaluare, atunci pentru orice formule φ, ψ,

$$e^+(\varphi \vee \psi) = e^+(\varphi) \vee e^+(\psi),$$
$$e^+(\varphi \wedge \psi) = e^+(\varphi) \wedge e^+(\psi),$$
$$e^+(\varphi \leftrightarrow \psi) = e^+(\varphi) \leftrightarrow e^+(\psi).$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.14

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: Definim următoarea proprietate $\boldsymbol{P}$: pentru orice formulă φ,

φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ ddacă pentru orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$, φ satisface $(*)$.

Demonstrăm că orice formulă φ are proprietatea $\boldsymbol{P}$ folosind Principiul inducției pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $e_1^+(v) = e_1(v) = e_2(v) = e_2^+(v)$.

Propoziția 1.14

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- $\varphi = (\neg\psi)$ și ψ satisface $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\varphi) = Var(\psi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi)$. Așadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$. Rezultă că

  $$e_1^+(\varphi) = \neg e_1^+(\psi) = \neg e_2^+(\psi) = e_2^+(\varphi),$$

  deci φ satisface $\boldsymbol{P}$.

Propoziția 1.14

Pentru orice formulă φ și orice evaluări $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$,

$$(*) \quad e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in Var(\varphi) \implies e_1^+(\varphi) = e_2^+(\varphi).$$

Dem.: (continuare)

- $\varphi = (\psi \to \chi)$ și ψ, χ satisfac $\boldsymbol{P}$. Fie $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$ a.î. $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\varphi)$. Deoarece $Var(\psi) \subseteq Var(\varphi)$ și $Var(\chi) \subseteq Var(\varphi)$, rezultă că $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice $v \in Var(\psi) \cap Var(\chi)$. Așadar, aplicând $\boldsymbol{P}$ pentru ψ și χ, obținem că $e_1^+(\psi) = e_2^+(\psi)$ și $e_1^+(\chi) = e_2^+(\chi)$. Rezultă că

  $$e_1^+(\varphi) = e_1^+(\psi) \to e_1^+(\chi) = e_2^+(\psi) \to e_2^+(\chi) = e_2^+(\varphi),$$

  deci φ satisface $\boldsymbol{P}$. $\square$

Fie φ o formulă.

Definiția 1.15

- O evaluare $e : V \to \{0,1\}$ este model al lui φ dacă $e^+(\varphi) = 1$. Notație: $e \vDash \varphi$.
- φ este satisfiabilă dacă admite un model.
- Dacă φ nu este satisfiabilă, spunem și că φ este nesatisfiabilă sau contradictorie.
- φ este tautologie dacă orice evaluare este model al lui φ. Notație: $\vDash \varphi$.

Notație: Mulțimea tuturor modelelor lui φ se notează $Mod(\varphi)$.

Propoziția 1.16

(i) φ este tautologie ddacă $\neg\varphi$ este nesatisfiabilă.

(ii) φ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi$ este tautologie.

Dem.: Exercițiu.

Propoziție

Există o mulțime numărabilă de formule φ a.î. atât φ cât și $\neg\varphi$ sunt satisfiabile.

Dem.: Demonstrăm că mulțimea $V = \{\varphi_n := v_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq Form$ satisface condiția din enunț. Fie $n \in \mathbb{N}$. Considerăm interpretările $e_1, e_2 : V \to \{0,1\}$ definite astfel

$$e_1(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}, \quad e_2(v_i) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } i = n \\ \text{arbitrar} & \text{dacă } i \neq n \end{cases}.$$

Atunci

$$e_1^+(\varphi_n) = e_1^+(v_n) = e_1(v_n) = 1,$$

deci $e_1 \vDash \varphi_n$. Pe de altă parte,

$$e_2^+(\neg\varphi_n) = e_2^+(\neg v_n) = \neg e_2^+(v_n) = \neg e_2(v_n) = \neg 0 = 1,$$

deci $e_2 \vDash \neg\varphi_n$. $\square$

Metoda tabelului

Fie φ o formulă arbitrară și $Var(\varphi) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Pentru orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$, $e^+(\varphi)$ depinde doar de $e(x_1), \ldots, e(x_k)$, conform Propoziției 1.14.
Așadar, $e^+(\varphi)$ depinde doar de restricția lui e la $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$:

$$e' : \{x_1, \ldots, x_k\} \to \{0,1\}, \quad e'(x_i) = e(x_i).$$

Sunt 2^k de astfel de funcții posibile $e'_1, e'_2 \ldots, e'_{2^k}$. Asociem fiecăreia o linie într-un tabel:

x_1	x_2	$\ldots$	x_k	$\ldots$ subformule ale lui φ $\ldots$	φ
$e'_1(x_1)$	$e'_1(x_2)$	$\ldots$	$e'_1(x_k)$	$\ldots$	$e'^+_1(\varphi)$
$e'_2(x_1)$	$e'_2(x_2)$	$\ldots$	$e'_2(x_k)$	$\ldots$	$e'^+_2(\varphi)$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
$e'_{2^k}(x_1)$	$e'_{2^k}(x_2)$	$\ldots$	$e'_{2^k}(x_k)$	$\ldots$	$e'^+_{2^k}(\varphi)$

Pentru orice i, $e'^+_i(\varphi)$ se definește similar cu Teorema 1.12

φ este tautologie ddacă $e'^+_i(\varphi) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, 2^k\}$.

Exemplu:

Fie

$$\varphi = v_1 \to (v_2 \to (v_1 \wedge v_2)).$$

Vrem să demonstrăm că $\vDash \varphi$.

$$Var(\varphi) = \{v_1, v_2\}.$$

v_1	v_2	$v_1 \wedge v_2$	$v_2 \to (v_1 \wedge v_2)$	φ
0	0	0	1	1
0	1	0	0	1
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1

Definiția 1.17

Fie φ, ψ două formule. Spunem că

- φ este consecință semantică a lui ψ dacă $Mod(\psi) \subseteq Mod(\varphi)$. Notație: $\psi \vDash \varphi$.
- φ și ψ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\psi) = Mod(\varphi)$. Notație: $\varphi \sim \psi$.

Observație

Relația $\sim$ este o relație de echivalență pe mulțimea *Form* a formulelor lui *LP*.

Propoziția 1.18

Fie φ, ψ formule. Atunci

(i) $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\vDash \psi \to \varphi$.

(ii) $\psi \sim \varphi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.19

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

terțul exclus	$\vDash \varphi \vee \neg\varphi$	(1)
modus ponens	$\varphi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \psi$	(2)
afirmarea concluziei	$\psi \vDash \varphi \to \psi$	(3)
contradicția	$\vDash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$	(4)
dubla negație	$\varphi \sim \neg\neg\varphi$	(5)
contrapoziția	$\varphi \to \psi \sim \neg\psi \to \neg\varphi$	(6)
negarea premizei	$\neg\varphi \vDash \varphi \to \psi$	(7)
modus tollens	$\neg\psi \wedge (\varphi \to \psi) \vDash \neg\varphi$	(8)
tranzitivitatea implicației	$(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \chi) \vDash \varphi \to \chi$	(9)

legile lui de Morgan	$\varphi \vee \psi \sim \neg((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi))$		(10)
	$\varphi \wedge \psi \sim \neg((\neg\varphi) \vee (\neg\psi))$		(11)
exportarea și importarea	$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \varphi \wedge \psi \to \chi$		(12)
idempotența	$\varphi \sim \varphi \wedge \varphi \sim \varphi \vee \varphi$		(13)
slăbirea	$\vDash \varphi \wedge \psi \to \varphi$	$\vDash \varphi \to \varphi \vee \psi$	(14)
comutativitatea	$\varphi \wedge \psi \sim \psi \wedge \varphi$	$\varphi \vee \psi \sim \psi \vee \varphi$	(15)
asociativitatea	$\varphi \wedge (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$		(16)
	$\varphi \vee (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \vee \chi$		(17)
absorbția	$\varphi \vee (\varphi \wedge \psi) \sim \varphi$		(18)
	$\varphi \wedge (\varphi \vee \psi) \sim \varphi$		(19)
distributivitatea	$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \sim (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi)$		(20)
	$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \sim (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi)$		(21)

$$\varphi \to \psi \wedge \chi \sim (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \chi) \quad (22)$$
$$\varphi \to \psi \vee \chi \sim (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \chi) \quad (23)$$
$$\varphi \wedge \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \vee (\psi \to \chi) \quad (24)$$
$$\varphi \vee \psi \to \chi \sim (\varphi \to \chi) \wedge (\psi \to \chi) \quad (25)$$
$$\varphi \to (\psi \to \chi) \sim \psi \to (\varphi \to \chi) \sim (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi) \quad (26)$$
$$\neg\varphi \sim \varphi \to \neg\varphi \sim (\varphi \to \psi) \wedge (\varphi \to \neg\psi) \quad (27)$$
$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \sim \neg(\varphi \wedge \neg\psi) \quad (28)$$
$$\varphi \vee \psi \sim \varphi \vee (\neg\varphi \wedge \psi) \sim (\varphi \to \psi) \to \psi \quad (29)$$
$$\varphi \leftrightarrow (\psi \leftrightarrow \chi) \sim (\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow \chi \quad (30)$$
$$\vDash (\varphi \to \psi) \vee (\neg\varphi \to \psi) \quad (31)$$
$$\vDash (\varphi \to \psi) \vee (\varphi \to \neg\psi) \quad (32)$$
$$\vDash \neg\varphi \to (\neg\psi \leftrightarrow (\psi \to \varphi)) \quad (33)$$
$$\vDash (\varphi \to \psi) \to (((\varphi \to \chi) \to \psi) \to \psi) \quad (34)$$

Dem.: Exercițiu.

Exemplu de demonstrație

Demonstrăm (10): $\vDash \varphi \vee \neg\varphi$.
Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară. Trebuie să arătăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$. Observăm că $e^+(\varphi \vee \neg\varphi) = e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$.
Putem demonstra că $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$ în două moduri.

I. Folosim tabelele de adevăr.

$e^+(\varphi)$	$\neg e^+(\varphi)$	$e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi)$
0	1	1
1	0	1

II. Raționăm direct.

Avem două cazuri:

- $e^+(\varphi) = 1$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 0$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.
- $e^+(\varphi) = 0$. Atunci $\neg e^+(\varphi) = 1$ și, prin urmare, $e^+(\varphi) \vee \neg e^+(\varphi) = 1$.

$\square$

Substituția

Definiția 1.20

Pentru orice formule φ, χ, χ', definim

$\varphi_\chi(\chi')$:= expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui χ cu χ'.

$\varphi_\chi(\chi')$ se numește substituția lui χ cu χ' în φ. Spunem și că $\varphi_\chi(\chi')$ este o instanță de substituție a lui φ.

- $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$.
- Dacă χ nu este subformulă a lui φ, atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$.

Exemple:

Fie $\varphi = (v_1 \to v_2) \to \neg(v_1 \to v_2)$.

- $\chi = v_1 \to v_2$, $\chi' = v_4$. $\varphi_\chi(\chi') = v_4 \to \neg v_4$
- $\chi = v_1$, $\chi' = \neg\neg v_2$. $\varphi_\chi(\chi') = (\neg\neg v_2 \to v_2) \to \neg(\neg\neg v_2 \to v_2)$
- $\chi = v_1 \to v_2$, $\chi' = v_4 \vee v_1$. $\varphi_\chi(\chi') = (v_4 \vee v_1) \to \neg(v_4 \vee v_1)$

Substituția

Propoziția 1.21

Pentru orice formule φ, χ, χ', $\varphi_\chi(\chi')$ este de asemenea formulă.

Dem.: Demonstrăm prin inducție după formula φ. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v \in V$. Atunci
$$v_\chi(\chi') = \begin{cases} \chi' & \text{dacă } \chi = v \\ v & \text{dacă } \chi \neq v. \end{cases}$$
Prin urmare, $v_\chi(\chi')$ este formulă.
- $\varphi = \neg\psi$ și $\psi_\chi(\chi')$ este formulă. Dacă χ nu apare în φ, atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$, deci este formulă. Dacă χ este subformulă a lui φ, atunci avem două cazuri:
  - *(i)* $\chi = \varphi$. Rezultă că $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$ este formulă.
  - *(ii)* χ este subformulă a lui ψ. Atunci $\varphi_\chi(\chi') = \neg\psi_\chi(\chi')$ este de asemenea formulă.

Substituția

- $\varphi = \psi \to \theta$ și $\psi_\chi(\chi')$, $\theta_\chi(\chi')$ sunt formule. Dacă χ nu apare în φ, atunci $\varphi_\chi(\chi') = \varphi$. Dacă χ este subformulă a lui φ, atunci avem două cazuri:
  - *(i)* $\chi = \varphi$. Rezultă că $\varphi_\varphi(\chi') = \chi'$.
  - *(ii)* χ este subformulă a lui ψ sau θ (e posibil sa apară atât în ψ cât și în θ). Atunci
$$\varphi_\chi(\chi') = \psi_\chi(\chi') \to \theta_\chi(\chi')$$
este de asemenea formulă.

$\square$

Propoziția 1.22

Pentru orice formule φ, χ, χ',
$$\chi \sim \chi' \quad \text{implică} \quad \varphi \sim \varphi_\chi(\chi').$$

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

Propoziția 1.22 poate fi aplicată pentru a arăta că o formulă este tautologie.

Exemplu:

Să se demonstreze că, pentru orice formule φ, ψ, formula $\theta = (\neg\varphi \vee \psi) \vee \neg(\varphi \to \psi)$ este tautologie.

Dem.: Conform (12), $\neg\varphi \vee \psi \sim \varphi \to \psi$. Aplicăm Propoziția 1.22 cu $\chi = \neg\varphi \vee \psi$ și $\chi' = \varphi \to \psi$ pentru a obține că $\theta \sim (\varphi \to \psi) \vee \neg(\varphi \to \psi)$. Pe de altă parte, $(\varphi \to \psi) \vee \neg(\varphi \to \psi)$ este tautologie, din (10). Prin urmare, θ este tautologie. $\square$

Substituția

Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare și $v \in V$ o variabilă.

Notație

Pentru orice $a \in \{0,1\}$, definim evaluarea $e_{v\leftarrow a} : V \to \{0,1\}$ prin

$$e_{v\leftarrow a}(x) = \begin{cases} e(x) & \text{daca } x \neq v \\ a & \text{daca } x = v. \end{cases}$$

Propoziția 1.23

Fie θ o formulă și $a := e^+(\theta)$. Atunci pentru orice formulă φ,

$$(e_{v\leftarrow a})^+(\varphi) = e^+(\varphi_v(\theta)).$$

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Substituția

Propoziția 1.24

Pentru orice formule φ, ψ, θ și orice variabilă $v \in V$,

(i) $\varphi \sim \psi$ implică $\varphi_v(\theta) \sim \psi_v(\theta)$.

(ii) Dacă φ este tautologie atunci și $\varphi_v(\theta)$ este tautologie.

(iii) Dacă φ este nesatisfiabilă, atunci și $\varphi_v(\theta)$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare arbitrară și $a := e^+(\theta)$. Aplicând Propoziția 1.23, rezultă că $e^+(\varphi_v(\theta)) = (e_{v\leftarrow a})^+(\varphi)$ și $e^+(\psi_v(\theta)) = (e_{v\leftarrow a})^+(\psi)$.

(i) Deoarece $\varphi \sim \psi$, avem că $(e_{v\leftarrow a})^+(\varphi) = (e_{v\leftarrow a})^+(\psi)$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = e^+(\psi_v(\theta))$.

(ii) Deoarece φ este tautologie, avem că $(e_{v\leftarrow a})^+(\varphi) = 1$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = 1$.

(iii) Deoarece φ este nesatisfiabilă, avem că $(e_{v\leftarrow a})^+(\varphi) = 0$. Deci, $e^+(\varphi_v(\theta)) = 0$. $\square$

$\top$ și $\bot$

De multe ori este convenabil să avem o tautologie canonică și o formulă nesatisfiabilă canonică.

Observație

$v_0 \to v_0$ este tautologie și $\neg(v_0 \to v_0)$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Exercițiu.

Notații

Notăm $v_0 \to v_0$ cu $\top$ și o numim adevărul. Notăm $\neg(v_0 \to v_0)$ cu $\bot$ și o numim falsul.

- φ este tautologie ddacă $\varphi \sim \top$.
- φ este nesatisfiabilă ddacă $\varphi \sim \bot$.

Conjuncții și disjuncții finite

Notații

Scriem $\varphi \wedge \psi \wedge \chi$ în loc de $(\varphi \wedge \psi) \wedge \chi$. Similar, scriem $\varphi \vee \psi \vee \chi$ în loc de $(\varphi \vee \psi) \vee \chi$.

Fie $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ formule. Pentru $n \geq 3$, notăm

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \wedge \varphi_2) \wedge \varphi_3) \wedge \ldots \wedge \varphi_{n-1}) \wedge \varphi_n$$
$$\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n := ((\ldots(\varphi_1 \vee \varphi_2) \vee \varphi_3) \vee \ldots \vee \varphi_{n-1}) \vee \varphi_n.$$

- $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$ se mai scrie și $\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$.
- $\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n$ se mai scrie și $\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$ sau $\displaystyle\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$.

Conjuncții și disjuncții finite

Propoziția 1.25

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

- $e^+(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.
- $e^+(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) = 1$ ddacă $e^+(\varphi_i) = 1$ pentru un $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.26

$$\neg(\varphi_1 \vee \ldots \vee \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \neg\varphi_n$$
$$\neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \sim \neg\varphi_1 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$$

Dem.: Exercițiu.

Mulțimi de formule

Fie Γ o mulțime de formule.

Definiția 1.27

- O evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui Γ dacă este model al fiecărei formule din Γ (adică $e \vDash \gamma$ pentru orice $\gamma \in \Gamma$). Notație: $e \vDash \Gamma$.
- Γ este satisfiabilă dacă are un model.
- Γ este finit satisfiabilă dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.
- Dacă Γ nu este satisfiabilă, spunem și că Γ este nesatisfiabilă sau contradictorie.

Notații: Mulțimea tuturor modelelor lui Γ se notează $Mod(\Gamma)$. Notăm $Mod(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ în loc de $Mod(\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\})$.

- $Mod(\Gamma) = \bigcap_{\varphi \in \Gamma} Mod(\varphi)$.

Mulțimi de formule

Fie Γ, Δ mulțimi de formule.

Definiția 1.28

O formulă φ este consecință semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\varphi)$. Notație: $\Gamma \vDash \varphi$.

Notăm cu $Cn(\Gamma)$ mulțimea consecințelor semantice ale lui Γ. Așadar,

$$Cn(\Gamma) = \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Definiția 1.29

- Δ este consecință semantică a lui Γ dacă $Mod(\Gamma) \subseteq Mod(\Delta)$. Notație: $\Gamma \vDash \Delta$.
- Γ și Δ sunt (logic) echivalente dacă $Mod(\Gamma) = Mod(\Delta)$. Notație: $\Gamma \sim \Delta$.

Proprietăți

Următoarele rezultate colectează diverse proprietăți utile.

Observație

- $\psi \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \varphi$ ddacă $\{\psi\} \vDash \{\varphi\}$.
- $\psi \sim \varphi$ ddacă $\{\psi\} \sim \{\varphi\}$.

Propoziția 1.30

(i) $Mod(\emptyset) = \{0, 1\}^V$, adică orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al mulțimii vide. În particular, mulțimea vidă este satisfiabilă.

(ii) $Cn(\emptyset)$ este mulțimea tuturor tautologiilor, adică φ este tautologie ddacă $\emptyset \vDash \varphi$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Proprietăți

Propoziția 1.31

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$.

(i) Dacă $\Gamma \vDash \varphi$ și $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vDash \psi$.

(ii) $\Gamma \cup \{\varphi\} \vDash \psi$ ddacă $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi \wedge \psi$ ddacă $\Gamma \vDash \varphi$ și $\Gamma \vDash \psi$.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.32

Fie Γ o mulțime de formule. Următoarele afirmații sunt echivalente:

(i) Γ este nesatisfiabilă.

(ii) $\Gamma \vDash \varphi$ pentru orice formulă φ.

(iii) $\Gamma \vDash \varphi$ pentru orice formulă nesatisfiabilă φ.

(iv) $\Gamma \vDash \bot$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Proprietăți

Propoziția 1.33

Fie Γ o mulțime de formule.

(i) $\Gamma \vDash \varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

(ii) $\Gamma \vDash \neg\varphi$ ddacă $\Gamma \cup \{\varphi\}$ este nesatisfiabilă.

(iii) Dacă Γ este satisfiabilă, atunci cel puțin una dintre $\Gamma \cup \{\varphi\}$ și $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

Dem.:

(i) Avem că $\Gamma \not\vDash \varphi \iff$ există o evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma$ și $e^+(\varphi) = 0 \iff$ există o evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma$ și $e^+(\neg\varphi) = 1 \iff$ există o evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e \vDash \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este satisfiabilă.

(ii) Similar.

(iii) Fie e un model al lui Γ. Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\varphi\}$. Dacă $e^+(\varphi) = 0$, deci $e^+(\neg\varphi) = 1$, atunci e este model al lui $\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$. $\square$

Proprietăți

Propoziția 1.34

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

(i) $\Gamma \sim \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$.

(ii) $\Gamma \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \to \psi$.

(iii) Γ este nesatisfiabilă ddacă $\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2 \vee \ldots \vee \neg\varphi_n$ este tautologie.

(iv) Dacă $\Delta = \{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ este o altă mulțime finită de formule, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) $\Gamma \sim \Delta$.

(b) $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \sim \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k$.

Dem.: Exercițiu.

Teorema de compactitate

Teorema de compactitate - versiunea 1

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

Teorema de compactitate - versiunea 2

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este nesatisfiabilă ddacă Γ nu este finit satisfiabilă.

Teorema de compactitate - versiunea 3

Pentru orice mulțime Γ de formule și pentru orice formulă φ, $\Gamma \vDash \varphi$ ddacă există o submulțime finită Δ a lui Γ a.î. $\Delta \vDash \varphi$.

Propoziția 1.35

Cele trei versiuni sunt echivalente.

Dem.: Exercițiu.

Lema 1.36

Fie Γ finit satisfiabilă. Atunci există un șir (ε_n) în $\{0,1\}$ care satisface, pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

$\boldsymbol{P_n}$ Orice submulțime finită Δ a lui Γ are un model $e : V \to \{0,1\}$ care satisface $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots n\}$.

Dem.: Definim șirul (ε_n) prin inducție după $n \in \mathbb{N}$.

$n = 0$. Avem următoarele cazuri:

(1_0) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ, există un model e al lui Δ a.î. $e(v_0) = 0$. Definim $\varepsilon_0 := 0$.

(2_0) Există o submulțime finită Δ_0 a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_0, avem $e(v_0) = 1$. Definim $\varepsilon_0 := 1$.

Demonstrăm că $\boldsymbol{P_0}$ este satisfăcută. În cazul (1_0) este evident. Să considerăm cazul (2_0). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ. Atunci $\Delta \cup \Delta_0$ este o submulțime finită a lui Γ. Deoarece Γ este finit satisfiabilă, $\Delta \cup \Delta_0$ are un model e. Rezultă că $e \vDash \Delta$ și, din faptul că $e \vDash \Delta_0$, obținem că $e(v_0) = 1 = \varepsilon_0$.

Pasul de inducție. Fie $n \in \mathbb{N}$. Presupunem că am definit $\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n$ a.î. $\boldsymbol{P_n}$ este satisfăcută. Avem următoarele cazuri:

(1_{n+1}) Pentru orice submulțime finită Δ a lui Γ, există un model e al lui Δ a.î.

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ și } e(v_{n+1}) = 0.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 0$.

(2_{n+1}) Există o submulțime finită Δ_{n+1} a lui Γ a.î. pentru orice model e al lui Δ_{n+1}, avem

$$e(v_i) = \varepsilon_i \text{ pentru orice } i \in \{0, 1, \ldots, n\} \text{ implică } e(v_{n+1}) = 1.$$

Definim $\varepsilon_{n+1} := 1$.

Demonstrăm că $\boldsymbol{P_{n+1}}$ este satisfăcută. În cazul (1_{n+1}) este evident. Să considerăm cazul (2_{n+1}). Fie Δ o submulțime finită a lui Γ. Atunci $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ este o submulțime finită a lui Γ. Prin urmare, conform $\boldsymbol{P_n}$, există un model e al lui $\Delta \cup \Delta_{n+1}$ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots n\}$. Din (2_{n+1}), obținem și $e(v_{n+1}) = 1 = \varepsilon_{n+1}$. $\square$

Teorema de compactitate

Teorema 1.37 (Teorema de compactitate)

Pentru orice mulțime Γ de formule, Γ este satisfiabilă ddacă Γ este finit satisfiabilă.

Dem.:

"$\Rightarrow$" Evident.

"$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este finit satisfiabilă. Definim

$$\overline{e} : V \to \{0, 1\}, \quad \overline{e}(v_n) = \varepsilon_n,$$

unde (ε_n) este șirul construit în lema precedentă. Demonstrăm că $\overline{e}$ este model al lui Γ. Fie $\varphi \in \Gamma$ arbitrară și fie $k \in \mathbb{N}$ a.î. $Var(\varphi) \subseteq \{v_0, v_1, \ldots, v_k\}$. Deoarece $\{\varphi\} \subseteq \Gamma$ este o submulțime finită a lui Γ, putem aplica Proprietatea $\boldsymbol{P_k}$ pentru a obține un model e al lui φ a.î. $e(v_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{0, 1, \ldots k\}$. Atunci $\overline{e}(v) = e(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(\varphi)$. Aplicând Propoziția 1.14, rezultă că $\overline{e}^+(\varphi) = e^+(\varphi) = 1$, deci $\overline{e} \vDash \varphi$. Prin urmare, $\overline{e}$ este model al lui Γ, deci Γ este satisfiabilă. $\square$

SINTAXA LP

Sistemul deductiv

Folosim un sistem deductiv de tip Hilbert pentru *LP*.

Axiomele logice

Mulțimea *Axm* a axiomelor lui *LP* constă din toate formulele de forma:

(A1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$

(A2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$

(A3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$,

unde φ, ψ și χ sunt formule.

Regula de deducție

Pentru orice formule φ, ψ,

din φ și $\varphi \to \psi$ se inferă ψ (modus ponens sau (MP)):

$$\frac{\varphi, \ \varphi \to \psi}{\psi}.$$

Γ-teoreme

Fie Γ o mulțime de formule. Definiția Γ-teoremelor este un nou exemplu de definiție inductivă.

Definiția 1.38

Γ-teoremele sunt formulele lui *LP* definite astfel:

(T0) Orice axiomă este Γ-teoremă.

(T1) Orice formulă din Γ este Γ-teoremă.

(T2) Dacă φ și $\varphi \to \psi$ sunt Γ-teoreme, atunci ψ este Γ-teoremă.

(T3) Numai formulele obținute aplicând regulile (T0), (T1), (T2) sunt Γ-teoreme.

Dacă φ este Γ-teoremă, atunci spunem și că φ este dedusă din ipotezele Γ.

Notații

$Thm(\Gamma)$	$:=$	mulțimea Γ-teoremelor	Thm	$:=$	$Thm(\emptyset)$
$\Gamma \vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ este Γ-teoremă	$\vdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	$\emptyset \vdash \varphi$
$\Gamma \vdash \Delta$	$:\Leftrightarrow$	$\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in \Delta$.			

Definiția 1.39

O formulă φ se numește teoremă a lui *LP* dacă $\vdash \varphi$.

Reformulând condițiile (T0), (T1), (T2) folosind notația $\vdash$, obținem

Propoziția 1.40

(i) dacă φ este axiomă, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(ii) dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $\Gamma \vdash \varphi$;

(iii) dacă $\Gamma \vdash \varphi$ și $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$, atunci $\Gamma \vdash \psi$.

O definiție alternativă a Γ-teoremelor:

Definiția 1.41

Mulțimea $Thm(\Gamma)$ este intersecția tuturor mulțimilor de formule Σ care satisfac următoarele proprietăți:

(i) $Axm \subseteq \Sigma$;

(ii) $\Gamma \subseteq \Sigma$;

(iii) Σ este închisă la modus ponens:

$$\text{dacă } \varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma, \text{ atunci } \psi \in \Sigma.$$

Definiția Γ-teoremelor dă naștere la metoda de demonstrație prin inducție după Γ-teoreme.

Versiunea 1

Fie $\boldsymbol{P}$ o proprietate a formulelor. Demonstrăm că orice Γ-teoremă satisface $\boldsymbol{P}$ astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă are proprietatea $\boldsymbol{P}$;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ are proprietatea $\boldsymbol{P}$;

(iii) demonstrăm că dacă φ și $\varphi \to \psi$ au proprietatea $\boldsymbol{P}$, atunci ψ are proprietatea $\boldsymbol{P}$.

Versiunea 2

Fie Σ o mulțime de formule. Demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$ astfel:

(i) demonstrăm că orice axiomă este în Σ;

(ii) demonstrăm că orice formulă din Γ este în Σ;

(iii) demonstrăm că dacă $\varphi \in \Sigma$ și $\varphi \to \psi \in \Sigma$, atunci $\psi \in \Sigma$.

Propoziția 1.42

Fie Γ, Δ mulțimi de formule

(i) Dacă $\Gamma \subseteq \Delta$, atunci $Thm(\Gamma) \subseteq Thm(\Delta)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \text{ implică } \Delta \vdash \varphi.$$

(ii) $Thm \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iii) Dacă $\Gamma \vdash \Delta$, atunci $Thm(\Delta) \subseteq Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$\Delta \vdash \varphi \text{ implică } \Gamma \vdash \varphi.$$

(iv) $Thm(Thm(\Gamma)) = Thm(\Gamma)$, adică, pentru orice formulă φ,

$$Thm(\Gamma) \vdash \varphi \ \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi.$$

Dem.: Exercițiu ușor.

Γ-demonstrații

Definiția 1.43

O Γ-demonstrație (demonstrație din ipotezele Γ) este o secvență de formule $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) θ_i este axiomă;

(ii) $\theta_i \in \Gamma$;

(iii) există $k, j < i$ a.î. $\theta_k = \theta_j \to \theta_i$.

O $\emptyset$-demonstrație se va numi simplu demonstrație.

Lema 1.44

Dacă $\theta_1, \ldots, \theta_n$ este o Γ-demonstrație, atunci

$$\Gamma \vdash \theta_i \text{ pentru orice } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dem.: Exercițiu.

Γ-demonstrații

Definiția 1.45

Fie φ o formulă. O Γ-demonstrație a lui φ sau demonstrație a lui φ din ipotezele Γ este o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n$ a.î. $\theta_n = \varphi$. În acest caz, n se numește lungimea Γ-demonstrației.

Propoziția 1.46

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă. Atunci $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o Γ-demonstrație a lui φ.

Dem.: Exercițiu suplimentar.

Proprietăți sintactice

Propoziția 1.47

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ, $\Gamma \vdash \varphi$ ddacă există o submulțime finită Σ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \varphi$.

Dem.: "$\Leftarrow$" Fie $\Sigma \subseteq \Gamma$, Σ finită a.î. $\Sigma \vdash \varphi$. Aplicând Propoziția 1.42.(i) obținem că $\Gamma \vdash \varphi$.

"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Conform Propoziției 1.46, φ are o Γ-demonstrație $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$. Fie

$$\Sigma := \Gamma \cap \{\theta_1, \ldots, \theta_n\}.$$

Atunci Σ este finită, $\Sigma \subseteq \Gamma$ și $\theta_1, \ldots, \theta_n = \varphi$ este o Σ-demonstrație a lui φ, deci $\Sigma \vdash \varphi$. $\square$

$\vdash \varphi \to \varphi$

Propoziția 1.48

Pentru orice formulă φ, $\vdash \varphi \to \varphi$.

Dem.:

(1) $\vdash (\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)) \to ((\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi))$
(A2) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$, $\chi := \varphi$) și Propoziția 1.40.(i)

(2) $\vdash \varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$
(A1) (cu φ, $\psi := \varphi \to \varphi$) și Propoziția 1.40.(i)

(3) $\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$
(1), (2) și Propoziția 1.40.(iii). Scriem de obicei (MP): (1), (2)

(4) $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$
(A1) (cu φ, $\psi := \varphi$) și Propoziția 1.40.(i)

(5) $\vdash \varphi \to \varphi$
(MP): (3), (4) $\square$

Teorema deducției

Teorema deducției 1.49

Fie $\Gamma \subseteq Form$ și $\varphi, \psi \in Form$. Atunci

$$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi \text{ ddacă } \Gamma \vdash \varphi \to \psi.$$

Dem.: "$\Leftarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$.

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziția 1.42.(i)
(3)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$	Propoziția 1.40.(ii)
(4)	$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$	(MP): (2), (3).

Teorema deducției

"$\Rightarrow$" Fie

$$\Sigma := \{\psi \in Form \mid \Gamma \vdash \varphi \to \psi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma \cup \{\varphi\}) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după $\Gamma \cup \{\varphi\}$-teoreme.

- Fie ψ o axiomă sau o formulă din Γ. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \psi$	Propoziția 1.40.(i), (ii)
(2)	$\Gamma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$	(A1) și Propoziția 1.40.(i)
(3)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	(MP): (1), (2).

Așadar $\psi \in \Sigma$.

- Fie $\psi = \varphi$. Atunci $\varphi \to \psi = \varphi \to \varphi$ este teoremă, conform Propoziției 1.48, deci $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Așadar $\psi \in \Sigma$.

Teorema deducției

- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\psi, \psi \to \chi \in \Sigma$ și trebuie să arătăm că $\chi \in \Sigma$. Atunci

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteza inducție
(2)	$\Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \chi)$	ipoteza inducție
(3)	$\Gamma \vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$	(A2) și P. 1.40.(i)
(4)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (2), (3).
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (1), (4).

Așadar $\chi \in \Sigma$. $\square$

Câteva consecințe

Teorema deducției este unul din cele mai utile instrumente pentru a arăta că o formulă e teoremă.

Propoziția 1.50

Pentru orice formule φ, ψ, χ,

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)). \quad (1)$$

Dem.: Folosind teorema deducției observăm că

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi\} \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} \vdash \varphi \to \chi$$
$$\Updownarrow$$
$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

În acest fel am reformulat ceea ce aveam de demonstrat. A demonstra teorema inițială este echivalent cu a demonstra

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi.$$

(1)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi$	Propoziția 1.40.(ii)
(2)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \varphi \to \psi$	Propoziția 1.40.(ii)
(3)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi$	(MP): (1), (2)
(4)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \psi \to \chi$	Propoziția 1.40.(ii)
(5)	$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi$	(MP): (3), (4).

□

Propoziția 1.51

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ, χ,

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \Gamma \vdash \psi \to \chi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi \to \chi. \tag{2}$$

Dem.:

(1)	$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
(2)	$\Gamma \vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi))$	P. 1.50 și P. 1.42.(ii)
(3)	$\Gamma \vdash (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)$	(MP): (1), (2)
(4)	$\Gamma \vdash \psi \to \chi$	ipoteză
(5)	$\Gamma \vdash \varphi \to \chi$	(MP): (3), (4).

□

Propoziția 1.52

Pentru orice formule φ, ψ,

$$\begin{aligned} \{\psi, \neg\psi\} &\vdash \varphi && (3)\\ &\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi) && (4)\\ &\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi && (5)\\ &\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi && (6)\\ \{\psi, \neg\varphi\} &\vdash \neg(\psi \to \varphi). && (7) \end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.53

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formule φ, ψ,

$$\Gamma \cup \{\psi\} \vdash \varphi \text{ și } \Gamma \cup \{\neg\psi\} \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash \varphi. \tag{8}$$

Dem.: Exercițiu.

SINTAXA și SEMANTICA

Teorema de corectitudine (Soundness Theorem) 1.54

Orice Γ-teoremă este consecință semantică a lui Γ, adică,

$$\Gamma \vdash \varphi \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vDash \varphi$$

pentru orice $\varphi \in Form$ și $\Gamma \subseteq Form$.

Dem.: Fie

$$\Sigma := \{\varphi \in Form \mid \Gamma \vDash \varphi\}.$$

Trebuie să demonstrăm că $Thm(\Gamma) \subseteq \Sigma$. O facem prin inducție după Γ-teoreme.

- Axiomele sunt în Σ (exercițiu).
- Evident, $\Gamma \subseteq \Sigma$.
- Demonstrăm acum că Σ este închisă la modus ponens. Presupunem că $\varphi, \varphi \to \psi \in \Sigma$, adică, $\Gamma \vDash \varphi$ și $\Gamma \vDash \varphi \to \psi$. Conform Propoziției 1.31.(i), obținem că $\Gamma \vDash \psi$, adică, $\psi \in \Sigma$. $\square$

Notații

Pentru orice variabilă $v \in V$ și orice evaluare $e : V \to \{0,1\}$,

$$v^e = \begin{cases} v & \text{dacă } e(v) = 1 \\ \neg v & \text{dacă } e(v) = 0. \end{cases}$$

Așadar, $e^+(v^e) = 1$.

Pentru orice mulțime $W = \{x_1, \ldots, x_k\}$ de variabile, notăm

$$W^e = \{v^e \mid v \in W\} = \{x_1^e, x_2^e, \ldots, x_k^e\}.$$

Propoziția 1.55

Fie $e : V \to \{0,1\}$ o evaluare. Pentru orice formulă φ,

(i) Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

(ii) Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $Var(\varphi)^e \vdash \neg\varphi$.

Dem.: Suplimentar - nu trebuie citită pentru examen Prin inducție după formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = v$. Atunci $Var(\varphi)^e = \{v^e\}$ și $e^+(v) = e(v)$.

  Dacă $e(v) = 1$, atunci $v^e = v$, deci, $\{v^e\} \vdash v$.

  Dacă $e(v) = 0$, atunci $v^e = \neg v$, deci, $\{v^e\} \vdash \neg v$.
- $\varphi = \neg\psi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi)$, deci $Var(\varphi)^e = Var(\psi)^e$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e^+(\psi) = 0$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \varphi$.

  Dacă $e^+(\varphi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$, deci, conform ipotezei de inducție pentru ψ, $Var(\psi)^e \vdash \psi$, adică, $Var(\varphi)^e \vdash \psi$.
  Deoarece $\vdash \psi \to \neg\neg\psi$ ((6) din Propoziția 1.52), putem aplica (MP) pentru a obține $Var(\varphi)^e \vdash \neg\neg\psi = \neg\varphi$.

- $\varphi = \psi \to \chi$. Atunci $Var(\varphi) = Var(\psi) \cup Var(\chi)$, deci $Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$.

  Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 0$, atunci $e^+(\psi) = 1$ și $e^+(\chi) = 0$. Avem

$Var(\psi)^e \vdash \psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\chi)^e \vdash \neg\chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\varphi)^e \vdash \{\psi, \neg\chi\}$	$Var(\psi)^e, Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.42.(i)
$\{\psi, \neg\chi\} \vdash \neg(\psi \to \chi)$	(7) din Propoziția 1.52
$Var(\varphi)^e \vdash \neg(\psi \to \chi)$	Propoziția 1.42.(iv).

Dacă $e^+(\psi \to \chi) = 1$, atunci fie $e^+(\psi) = 0$, fie $e^+(\chi) = 1$.

În primul caz, obținem

$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi$	ipoteza de inducție pentru ψ
$Var(\psi)^e \vdash \neg\psi \to (\psi \to \chi)$	(4) din P. 1.52 și P.1.42.(ii)
$Var(\psi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\psi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.42.(i).

În al doilea caz, obținem

$Var(\chi)^e \vdash \chi$	ipoteza de inducție pentru χ
$Var(\chi)^e \vdash \chi \to (\psi \to \chi)$	(A1) și Propoziția 1.40.(i)
$Var(\chi)^e \vdash \psi \to \chi$	(MP)
$Var(\varphi)^e \vdash \psi \to \chi$	$Var(\chi)^e \subseteq Var(\varphi)^e$ și P.1.42.(i). $\square$

Demonstrația propoziției anterioare ne dă o construcție efectivă a unei demonstrații a lui φ sau $\neg\varphi$ din premizele $Var(\varphi)^e$.

Teorema 1.56 (Teorema de completitudine)
Pentru orice formulă φ,

$$\vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vDash \varphi.$$

Dem.: "$\Rightarrow$" Se aplică Teorema de corectitudine 1.54 pentru $\Gamma = \emptyset$.
"$\Leftarrow$" Fie φ o tautologie și $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Demonstrăm prin inducție după k următoarea proprietate:

$$(*) \quad \text{pentru orice } k \leq n, \text{ pentru orice } e : V \to \{0,1\}, \quad \{x_1^e, \ldots, x_{n-k}^e\} \vdash \varphi.$$

Pentru $k = n$, (*) ne dă $\vdash \varphi$.

$k = 0$. Fie $e : V \to \{0,1\}$. Deoarece φ este tautologie, $e^+(\varphi) = 1$. Aplicând Propoziția 1.55, obținem că

$$Var(\varphi)^e = \{x_1^e, \ldots, x_n^e\} \vdash \varphi.$$

$k \Rightarrow k+1$. Presupunem că (*) este adevărată pentru k și fie $e : V \to \{0,1\}$. Trebuie să arătăm că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$.
Considerăm evaluarea $e' := e_{x_{n-k} \leftarrow \neg e(x_{n-k})}$. Așadar, $e'(v) = e(v)$ pentru orice $v \neq x_{n-k}$ și

$$e'(x_{n-k}) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 1 \\ 1 & \text{dacă } e(x_{n-k}) = 0. \end{cases}$$

Rezultă că $x_i^{e'} = x_i^e$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n-k-1\}$ și

$$x_{n-k}^{e'} = \begin{cases} \neg x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = x_{n-k} \\ x_{n-k} & \text{dacă } x_{n-k}^e = \neg x_{n-k}. \end{cases}$$

Din (*) pentru e și e', obținem

$$\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, x_{n-k}\} \vdash \varphi \text{ și } \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e, \neg x_{n-k}\} \vdash \varphi.$$

Aplicăm acum Propoziția 1.53 cu $\Gamma := \{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\}$ și $\psi := x_{n-k}$ pentru a conclude că $\{x_1^e, \ldots, x_{n-k-1}^e\} \vdash \varphi$. $\square$

Consecință utilă

Propoziția 1.57

Fie $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq Form$. Presupunem că $\varphi \sim \psi$. Atunci

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vdash \psi.$$

Dem.: Observăm că

$$\begin{aligned} \varphi \sim \psi \quad &\iff \quad \models \varphi \to \psi \text{ și } \models \psi \to \varphi \\ &\qquad \text{(conform Propoziției 1.18)} \\ &\iff \quad \vdash \varphi \to \psi \text{ și } \vdash \psi \to \varphi \\ &\qquad \text{(conform Teoremei de completitudine).} \end{aligned}$$

"$\Rightarrow$" Presupunem că $\Gamma \vdash \varphi$. Deoarece $\vdash \varphi \to \psi$, rezultă din Propoziția 1.42.(ii) că $\Gamma \vdash \varphi \to \psi$. Aplicăm acum (MP) pentru a obține că $\Gamma \vdash \psi$.
"$\Leftarrow$" Similar. $\square$

Notații

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

Notații

$\Gamma \nvdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ nu este Γ-teoremă
$\nvdash \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ nu este teoremă
$\Gamma \not\models \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ nu este consecință semantică a lui Γ
$\not\models \varphi$	$:\Leftrightarrow$	φ nu este tautologie.

Mulțimi consistente

Definiția 1.58

Fie Γ o mulțime de formule.

- Γ este consistentă dacă există o formulă φ astfel încât $\Gamma \nvdash \varphi$.
- Γ este inconsistentă dacă nu este consistentă, adică, $\Gamma \vdash \varphi$ pentru orice formulă φ.

Observație

Fie Γ, Δ mulțimi de formule a.î. $\Gamma \subseteq \Delta$.

- Dacă Δ este consistentă, atunci și Γ este consistentă.
- Dacă Γ este inconsistentă, atunci și Δ este inconsistentă.

Mulțimi consistente

Propoziția 1.59

(i) $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Mulțimea teoremelor este consistentă.

Dem.:

(i) Dacă $\vdash \bot$, atunci, conform Teoremei de corectitudine 1.54, ar rezulta că $\models \bot$, o contradicție. Așadar $\nvdash \bot$, deci $\emptyset$ este consistentă.

(ii) Aplicând Propoziția 1.42.(iv) pentru $\Gamma = \emptyset$, obținem că $Thm = Thm(Thm)$, adică, pentru orice φ,

$$\vdash \varphi \text{ ddacă } Thm \vdash \varphi.$$

Din (i) rezultă că Thm este consistentă. $\square$

Propoziția 1.60

Pentru o mulțime de formule Γ sunt echivalente:

(i) Γ este inconsistentă.

(ii) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iii) Există o formulă ψ a.î. $\Gamma \vdash \psi$ și $\Gamma \vdash \neg\psi$.

(iv) $\Gamma \vdash \bot$.

Dem.: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$ și $(i) \Rightarrow (iv)$ sunt evidente.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Fie φ o formulă. Conform (4) din Propoziția 1.52,

$$\vdash \neg\psi \to (\psi \to \varphi).$$

Aplicând (iii) și de două ori modus ponens, rezultă că $\Gamma \vdash \varphi$.
$(iv) \Rightarrow (iii)$. Presupunem că $\Gamma \vdash \bot$. Avem că $\bot = \neg\top$. Deoarece $\top$ este tautologie, aplicăm Teorema de completitudine pentru a conclude că $\vdash \top$, deci și $\Gamma \vdash \top$. □

Propoziția 1.61

Fie Γ o mulțime de formule și φ o formulă.

(i) $\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$ este inconsistentă.

(ii) $\Gamma \vdash \neg\varphi \iff \Gamma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă.

Dem.:

(i) Avem

$$\begin{array}{lll} \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} & \iff & \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \vdash \bot \\ & & \text{P. 1.60.(iv)} \\ & \iff & \Gamma \vdash \neg\varphi \to \bot \\ & & \text{Teorema Deducției} \\ & \iff & \Gamma \vdash \varphi \\ & & \neg\varphi \to \bot \sim \varphi \text{ și P.1.57.} \end{array}$$

(ii) Similar. □

Propoziția 1.62

Fie $\Gamma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o mulțime finită de formule.

(i) Pentru orice formulă ψ, $\Gamma \vdash \psi$ ddacă $\vdash \varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n \to \psi$ ddacă $\{\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n\} \vdash \psi$.

(ii) Γ este consistentă ddacă $\{\varphi_1 \land \ldots \land \varphi_n\}$ este consistentă.

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 1.63

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este inconsistentă ddacă Γ are o submulțime finită inconsistentă.

Dem.: "$\Leftarrow$" este evidentă.
"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este inconsistentă. Atunci, conform Propoziției 1.60.(iv), $\Gamma \vdash \bot$. Aplicând Propoziția 1.47, obținem o submulțime finită $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ a lui Γ a.î. $\Sigma \vdash \bot$. Prin urmare, Σ este inconsistentă.

Un rezultat echivalent:

Propoziția 1.64

Fie Γ o mulțime de formule. Γ este consistentă ddacă orice submulțime finită a lui Γ este consistentă.

Consecință a Teoremei de completitudine

Teorema 1.65

Pentru orice formulă φ,

$$\{\varphi\} \text{ este consistentă } \iff \{\varphi\} \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: Avem

$$\begin{aligned} \{\varphi\} \text{ este inconsistentă } & \iff \vdash \neg\varphi \\ & \qquad \text{conform Propoziției 1.61.(ii)} \\ & \iff \vDash \neg\varphi \\ & \qquad \text{conform Teoremei de completitudine} \\ & \iff \{\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ & \qquad \text{conform Propoziției 1.33.(ii).} \end{aligned}$$

Așadar, $\{\varphi\}$ este consistentă $\iff$ $\{\varphi\}$ este satisfiabilă. □

Teorema de completitudine tare

Teorema 1.66 (Teorema de completitudine tare - versiunea 1)

Pentru orice mulțime de formule Γ,

$$\Gamma \text{ este consistentă } \iff \Gamma \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: "$\Leftarrow$" Presupunem că Γ este satisfiabilă, deci are un model $e : V \to \{0,1\}$. Presupunem că Γ nu este consistentă. Atunci $\Gamma \vdash \bot$ și, aplicând Teorema de corectitudine 1.54, rezultă că $\Gamma \vDash \bot$. Ca urmare, $e \vDash \bot$, ceea ce este o contradicție.

"$\Rightarrow$" Presupunem că Γ este consistentă. Demonstrăm că Γ este finit satisfiabilă și aplicăm apoi Teorema de compacitate 1.37 pentru a conclude că Γ este satisfiabilă.

Fie $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ o submulțime finită a lui Γ. Atunci Σ este consistentă, conform Propoziției 1.64. Din Propoziția 1.62.(ii), rezultă că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este consistentă. Aplicând acum Teorema 1.65, obținem că $\{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$ este satisfiabilă. Deoarece, conform Propoziției 1.34.(i), $\Sigma \sim \{\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n\}$, avem că Σ este satisfiabilă. □

Teorema de completitudine tare

Teorema 1.67 (Teorema de completitudine tare - versiunea 2)

Pentru orice mulțime de formule Γ și orice formulă φ,

$$\Gamma \vdash \varphi \iff \Gamma \vDash \varphi.$$

Dem.:

$$\begin{aligned} \Gamma \vdash \varphi & \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este inconsistentă} \\ & \qquad \text{conform Propoziției 1.61.(i)} \\ & \iff \Gamma \cup \{\neg\varphi\} \text{ este nesatisfiabilă} \\ & \qquad \text{conform Teoremei de completitudine tare - versiunea 1} \\ & \iff \Gamma \vDash \varphi \\ & \qquad \text{conform Propoziției 1.33.(i).} \end{aligned}$$

□

Observație

Am demonstrat Teorema de completitudine tare - versiunea 2 folosind Teorema de completitudine tare - versiunea 1. Se poate arăta că cele două versiuni sunt echivalente (exercițiu).

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Definiția 1.68

Un literal este o

- variabilă (în care caz spunem că este literal pozitiv) sau
- negația unei variabile (în care caz spunem că este literal negativ).

Exemple: v_1, v_2, v_{10} literali pozitivi; $\neg v_0, \neg v_{100}$ literali negativi

Definiția 1.69

O formulă φ este în formă normală disjunctivă (FND) dacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Așadar, φ este în FND ddacă $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Definiția 1.70

O formulă φ este în formă normală conjunctivă (FNC) dacă φ este o conjuncție de disjuncții de literali.

Așadar, φ este în FNC ddacă $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$, unde fiecare $L_{i,j}$ este literal.

Exemple:

- $(v_0 \vee v_1) \wedge (v_3 \vee v_5) \wedge (\neg v_{20} \vee \neg v_{15} \vee \neg v_{34})$ este în FNC
- $(\neg v_9 \wedge v_1) \vee v_{24} \vee (v_2 \wedge \neg v_1 \wedge v_2)$ este în FND
- $v_1 \wedge \neg v_5 \wedge v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- $\neg v_{10} \vee v_{20} \vee v_4$ este atât în FND cât și în FNC
- $(v_1 \vee v_2) \wedge ((v_1 \wedge v_3) \vee (v_4 \wedge v_5))$ nu este nici în FND, nici în FNC

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Notație: Dacă L este literal, atunci $L^c := \begin{cases} \neg v & \text{dacă } L = v \in V \\ v & \text{dacă } L = \neg v. \end{cases}$

Propoziția 1.71

(i) Fie φ o formulă în FNC, $\varphi = \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FND.

(ii) Fie φ o formulă în FND, $\varphi = \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right)$. Atunci $\neg\varphi \sim \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right)$, o formulă în FNC.

Dem.:

(i) Aplicând Propoziția 1.26, obținem

$$\begin{aligned} \neg\varphi &= \neg \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) \sim \bigvee_{i=1}^{n} \neg \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right) \\ &\sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} \neg L_{i,j} \right) \sim \bigvee_{i=1}^{n} \left(\bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{i,j}^c \right). \end{aligned}$$

(ii) Exercițiu. □

Funcția asociată unei formule

Exemplu: Arătați că $\vDash v_1 \to (v_2 \to (v_1 \wedge v_2))$.

v_1	v_2	$v_1 \to (v_2 \to (v_1 \wedge v_2))$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Acest tabel definește o funcție $F : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$

ε_1	ε_2	$F(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Funcția asociată unei formule

Fie φ o formulă și $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Fie $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$. Definim $e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n} : Var(\varphi) \to \{0,1\}$ astfel:

$$e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i \quad \text{pentru orice } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Definim $e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) \in \{0,1\}$ astfel:

$$e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) := e^+(\varphi),$$

unde $e : V \to \{0,1\}$ este orice evaluare care extinde $e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}$, adică, $e(x_i) = e_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(x_i) = \varepsilon_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$.
Conform Propoziției 1.14, definiția nu este ambiguă.

Definiția 1.72

Funcția asociată lui φ este $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$, definită astfel:

$$F_\varphi(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = e^+_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n}(\varphi) \text{ pentru orice } (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) \in \{0,1\}^n.$$

Așadar, F_φ este funcția definită de tabela de adevăr pentru φ.

Funcția asociată unei formule

Propoziția 1.73

(i) Fie φ o formulă. Atunci
 (a) $\vDash \varphi$ ddacă F_φ este funcția constantă 1.
 (b) φ este nesatisfiabilă ddacă F_φ este funcția constantă 0.

(ii) Fie φ, ψ două formule a.î. $Var(\varphi) = Var(\psi)$. Atunci
 (a) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $F_\varphi \leq F_\psi$.
 (b) $\varphi \sim \psi$ ddacă $F_\varphi = F_\psi$.

(iii) Există formule diferite φ, ψ a.î. $Var(\varphi) = Var(\psi)$ pentru care $F_\varphi = F_\psi$.

Dem.: Exercițiu.

Definiția 1.74

O funcție booleană este o funcție $F:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$, unde $n \geq 1$. Spunem că n este numărul variabilelor lui F.

Exemplu: Pentru orice formulă φ, F_φ este funcție Booleană cu n variabile, unde $n = |Var(\varphi)|$.

Teorema 1.75

Fie $n \geq 1$ și $H:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă φ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = 0$ pentru orice $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$, luăm $\varphi := \bigvee_{i=0}^{n-1}(v_i \wedge \neg v_i)$. Avem că $Var(\varphi) = \{v_0,\ldots,v_{n-1}\}$, așadar, $F_\varphi:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Cum $v_i \wedge \neg v_i$ este nesatisfiabilă pentru orice i, rezultă că φ este de asemenea nesatisfiabilă. Deci, F_φ este de asemenea funcția constantă 0.

Altcumva, mulțimea

$$T := H^{-1}(1) = \{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \mid H(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = 1\}$$

este nevidă.
Considerăm formula

$$\varphi := \bigvee_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in T}\left(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} v_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg v_i\right).$$

Deoarece $Var(\varphi) = \{v_1,\ldots,v_n\}$, avem că $F_\varphi:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Demonstrăm că pentru orice $(\delta_1,\ldots,\delta_n) \in \{0,1\}^n$, avem că

$$F_\varphi(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 1 \iff H(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 1,$$

de unde va rezulta imediat că $H = F_\varphi$.

Fie $e: V \to \{0,1\}$ a.î. $e(v_i) = \delta_i$ pentru orice $i \in \{1,\ldots,n\}$.
Atunci

$$\begin{aligned}
e^+(\varphi) = 1 \quad &\iff \quad \textstyle\bigvee_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in T}\left(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} e(v_i) \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg e(v_i)\right) = 1\\
&\iff \quad \textstyle\bigvee_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in T}\left(\bigwedge_{\varepsilon_i=1} \delta_i \wedge \bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg \delta_i\right) = 1\\
&\iff \quad \text{există } (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in T \text{ a.î. } \textstyle\bigwedge_{\varepsilon_i=1} \delta_i = 1\\
&\qquad\quad \text{și } \textstyle\bigwedge_{\varepsilon_i=0} \neg\delta_i = 1\\
&\iff \quad \text{există } (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in T \text{ a.î. } \delta_i = \varepsilon_i\\
&\qquad\quad \text{pentru orice } i \in \{1,\ldots,n\}\\
&\iff \quad (\delta_1,\ldots,\delta_n) \in T\\
&\iff \quad H(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 1.
\end{aligned}$$

Prin urmare, $F_\varphi(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 1 \iff e^+_{\delta_1,\ldots,\delta_n}(\varphi) = 1$ $\iff e^+(\varphi) = 1$ pentru orice $e: V \to \{0,1\}$ a.î. $e(v_i) = \delta_i$ pentru orice $i \in \{1,\ldots,n\}$ $\iff H(\delta_1,\ldots,\delta_n) = 1$. $\square$

Teorema 1.76

Fie $n \geq 1$ și $H:\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ o funcție booleană arbitrară. Atunci există o formulă ψ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Dem.: Dacă $H(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = 1$ pentru orice $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{0,1\}^n$, atunci luăm

$$\psi := \bigwedge_{i=0}^{n-1}(v_i \vee \neg v_i).$$

Altcumva, mulțimea

$$F := H^{-1}(0) = \{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \in \{0,1\}^n \mid H(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) = 0\}$$

este nevidă.

Considerăm formula $\psi := \bigwedge_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in F}\left(\bigvee_{\varepsilon_i=1} \neg v_i \vee \bigvee_{\varepsilon_i=0} v_i\right)$.

Se demonstrează că $H = F_\psi$ (exercițiu!). $\square$

Caracterizarea funcțiilor Booleene

Exemplu: Fie $H : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ descrisă prin tabelul:

ε_1	ε_2	ε_3	$H(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$	
0	0	0	0	$D_1 = v_1 \vee v_2 \vee v_3$
0	0	1	0	$D_2 = v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$
0	1	0	1	$C_1 = \neg v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
0	1	1	0	$D_3 = v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$
1	0	0	1	$C_2 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3$
1	0	1	1	$C_3 = v_1 \wedge \neg v_2 \wedge v_3$
1	1	0	1	$C_4 = v_1 \wedge v_2 \wedge \neg v_3$
1	1	1	1	$C_5 = v_1 \wedge v_2 \wedge v_3$

$\varphi = C_1 \vee C_2 \vee C_3 \vee C_4 \vee C_5$ în FND a.î. $H = F_\varphi$.

$\psi = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3$ în FNC a.î. $H = F_\psi$.

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Teorema 1.77

Orice formulă φ este echivalentă cu o formulă φ^{FND} în FND și cu o formulă φ^{FNC} în FNC.

Dem.:
Fie $Var(\varphi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ și $F_\varphi : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ funcția booleană asociată. Aplicând Teorema 1.75 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FND} în FND a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FND}}$. Așadar, conform Propoziției 1.73.(ii), $\varphi \sim \varphi^{FND}$.

Similar, aplicând Teorema 1.76 cu $H := F_\varphi$, obținem o formulă φ^{FNC} în FNC a.î. $F_\varphi = F_{\varphi^{FNC}}$. Prin urmare, $\varphi \sim \varphi^{FNC}$. $\square$

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Algoritm pentru a aduce o formulă la FNC/FND:

Pasul 1. Se înlocuiesc implicațiile și echivalențele, folosind:

$$\varphi \to \psi \sim \neg\varphi \vee \psi \quad \text{și} \quad \varphi \leftrightarrow \psi \sim (\neg\varphi \vee \psi) \wedge (\neg\psi \vee \varphi).$$

Pasul 2. Se înlocuiesc dublele negații, folosind $\neg\neg\psi \sim \psi$, și se aplică regulile De Morgan pentru a înlocui

$$\neg(\varphi \vee \psi) \text{ cu } \neg\varphi \wedge \neg\psi \quad \text{și} \quad \neg(\varphi \wedge \psi) \text{ cu } \neg\varphi \vee \neg\psi.$$

Pasul 3. Pentru FNC, se aplică distributivitatea lui $\vee$ fața de $\wedge$, pentru a înlocui

$$\varphi \vee (\psi \wedge \chi) \text{ cu } (\varphi \vee \psi) \wedge (\varphi \vee \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \wedge \chi) \vee \varphi \text{ cu } (\psi \vee \varphi) \wedge (\chi \vee \varphi).$$

Pentru FND, se aplică distributivitatea lui $\wedge$ fața de $\vee$, pentru a înlocui

$$\varphi \wedge (\psi \vee \chi) \text{ cu } (\varphi \wedge \psi) \vee (\varphi \wedge \chi) \quad \text{și} \quad (\psi \vee \chi) \wedge \varphi \text{ cu } (\psi \wedge \varphi) \vee (\chi \wedge \varphi).$$

Forma normală conjunctivă / disjunctivă

Exemplu

Considerăm formula $\varphi := (\neg v_0 \to \neg v_2) \to (v_0 \to v_2)$.

Avem

$$\begin{array}{lll}
\varphi & \sim \neg(\neg v_0 \to \neg v_2) \vee (v_0 \to v_2) & \text{Pasul 1} \\
& \sim \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (v_0 \to v_2) & \text{Pasul 1} \\
& \sim \neg(\neg\neg v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 1} \\
& \sim \neg(v_0 \vee \neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 2} \\
& \sim (\neg v_0 \wedge \neg\neg v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) & \text{Pasul 2} \\
& \sim (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2 & \text{Pasul 2.}
\end{array}$$

Putem lua $\varphi^{FND} := (\neg v_0 \wedge v_2) \vee \neg v_0 \vee v_2$.

Pentru a obține FNC, continuăm cu Pasul 3:

$$\begin{array}{ll}
\varphi & \sim (\neg v_0 \wedge v_2) \vee (\neg v_0 \vee v_2) \\
& \sim (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2).
\end{array}$$

Putem lua $\varphi^{FNC} := (\neg v_0 \vee \neg v_0 \vee v_2) \wedge (v_2 \vee \neg v_0 \vee v_2)$. Se observă, folosind idempotența și comutativitatea lui $\vee$, că $\varphi^{FNC} \sim \neg v_0 \vee v_2$.

Definiția 1.78

O clauză este o mulțime finită de literali:

$$C = \{L_1, \ldots, L_n\}, \text{ unde } L_1, \ldots, L_n \text{ sunt literali.}$$

Dacă $n = 0$, obținem clauza vidă $\square := \emptyset$.

O clauză nevidă este considerată implicit o disjuncție.

Definiția 1.79

Fie C o clauză și $e : V \to \{0, 1\}$. Spunem că e este model al lui C sau că e satisface C și scriem $e \vDash C$ dacă există $L \in C$ a.î. $e \vDash L$.

Definiția 1.80

O clauză C se numește

(i) satisfiabilă dacă are un model.

(ii) validă dacă orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui C.

Definiția 1.81

O clauză C este trivială dacă există un literal L a.î. $L, L^c \in C$.

Propoziția 1.82

(i) Orice clauză nevidă este satisfiabilă.

(ii) Clauza vidă $\square$ este nesatisfiabilă.

(iii) O clauză este validă ddacă este trivială.

Dem.: Exercițiu.

$\mathcal{S} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ este o mulțime de clauze.
Dacă $m = 0$, obținem mulțimea vidă de clauze $\emptyset$.

$\mathcal{S}$ este considerată implicit ca o formulă în FNC: conjuncție de disjuncții ale literalilor din fiecare clauză.

Definiția 1.83

Fie $e : V \to \{0, 1\}$. Spunem că e este model al lui $\mathcal{S}$ sau că e satisface $\mathcal{S}$ și scriem $e \vDash \mathcal{S}$ dacă $e \vDash C_i$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Definiția 1.84

$\mathcal{S}$ se numește

(i) satisfiabilă dacă are un model.

(ii) validă dacă orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$ este model al lui $\mathcal{S}$.

Propoziția 1.85

- Dacă $\mathcal{S}$ conține clauza vidă $\square$, atunci $\mathcal{S}$ nu este satisfiabilă.
- $\emptyset$ este validă.

Dem.: Exercițiu.

Exemplu

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{\neg v_3, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ este satisfiabilă.

Dem.: Considerăm $e : V \to \{0, 1\}$ a.î. $e(v_1) = e(v_2) = 1$. Atunci $e \vDash \mathcal{S}$. $\square$

Exemplu

$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1\}, \{v_3\}\}$ nu este satisfiabilă.

Dem.: Presupunem că $\mathcal{S}$ are un model e. Atunci $e(v_1) = e(v_3) = 1$ și, deoarece $e \vDash \{\neg v_3, \neg v_2\}$, trebuie să avem $e(v_2) = 0$. Rezultă că $e(v_2) = e^+(\neg v_1) = 0$, deci e nu satisface $\{\neg v_1, v_2\}$. Am obținut o contradicție. $\square$

Clauze și FNC

Unei formule φ în FNC îi asociem o mulțime de clauze $\mathcal{S}_\varphi$ astfel:

Fie

$$\varphi := \bigwedge_{i=1}^{n} \left(\bigvee_{j=1}^{k_i} L_{i,j} \right),$$

unde fiecare $L_{i,j}$ este literal. Pentru orice i, fie C_i clauza obținută considerând toți literalii $L_{i,j}, j \in \{1, \ldots, k_i\}$ distincți. Fie $\mathcal{S}_\varphi$ mulțimea tuturor clauzelor $C_i, i \in \{1, \ldots, n\}$ distincte.

$\mathcal{S}_\varphi$ se mai numește și forma clauzală a lui φ.

Propoziția 1.86

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e \vDash \varphi$ ddacă $e \vDash \mathcal{S}_\varphi$.

Dem.: Exercițiu.

Clauze și FNC

Unei mulțimi de clauze $\mathcal{S}$ îi asociem o formulă $\varphi_\mathcal{S}$ în FNC astfel:

- $C = \{L_1, \ldots, L_n\}, n \geq 1 \longmapsto \varphi_C := L_1 \vee L_2 \vee \ldots \vee L_n$.
- $\square \longmapsto \varphi_\square := v_0 \wedge \neg v_0$.

Fie $\mathcal{S} = \{C_1, \ldots, C_m\}$ o mulțime nevidă de clauze. Formula asociată lui $\mathcal{S}$ este

$$\varphi_\mathcal{S} := \bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_{C_i}.$$

Formula asociată mulțimii vide de clauze este $\varphi_\emptyset := v_0 \vee \neg v_0$.
Formula $\varphi_\mathcal{S}$ nu este unic determinată, depinde de ordinea în care se scriu elementele în clauze și în $\mathcal{S}$, dar se observă imediat că: $\mathcal{S} = \mathcal{S}'$ implică $\varphi_\mathcal{S} \sim \varphi_{\mathcal{S}'}$.

Propoziția 1.87

Pentru orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$, $e \vDash \mathcal{S}$ ddacă $e \vDash \varphi_\mathcal{S}$.

Dem.: Exercițiu.

Rezoluția

Definiția 1.88

Fie C_1, C_2 două clauze. O clauză R se numește rezolvent al clauzelor C_1, C_2 dacă există un literal L a.î. $L \in C_1$, $L^c \in C_2$ și

$$R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\}).$$

Regula Rezoluției

$$Rez \qquad \frac{C_1, C_2}{(C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})}, \quad L \in C_1, L^c \in C_2$$

Notăm cu $Res(C_1, C_2)$ mulțimea rezolvenților clauzelor C_1, C_2.

- Rezoluția a fost introdusă de Blake (1937) și dezvoltată de Davis, Putnam (1960) și Robinson (1965).
- Multe demonstratoare automate de teoreme folosesc rezoluția. Limbajul PROLOG este bazat pe rezoluție.

Rezoluția

Exemplu

$C_1 = \{v_1, v_2, \neg v_5\}$, $C_2 = \{v_1, \neg v_2, v_{100}, v_5\}$.

- Luăm $L := \neg v_5$. Atunci $L \in C_1$ și $L^c = v_5 \in C_2$. Prin urmare, $R = \{v_1, v_2, \neg v_2, v_{100}\}$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2.
- Dacă luăm $L' := v_2$, atunci $L' \in C_1$ și $L'^c = \neg v_2 \in C_2$. Prin urmare, $R' = \{v_1, \neg v_5, v_{100}, v_5\}$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2.

Exemplu

$C_1 = \{v_7\}$, $C_2 = \{\neg v_7\}$. Atunci clauza vidă $\square$ este rezolvent al clauzelor C_1, C_2.

Rezoluție

Fie $\mathcal{S}$ o mulțime de clauze.

Definiția 1.89

O derivare prin rezoluție din $\mathcal{S}$ sau o $\mathcal{S}$-derivare prin rezoluție este o secvență $C_1, C_2, \ldots, C_n$ de clauze a.î. pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, n\}$, una din următoarele condiții este satisfăcută:

(i) C_i este o clauză din $\mathcal{S}$;

(ii) există $j, k < i$ a.î. C_i este rezolvent al clauzelor C_j, C_k.

Definiția 1.90

Fie C o clauză. O derivare prin rezoluție a lui C din $\mathcal{S}$ este o $\mathcal{S}$-derivare prin rezoluție $C_1, C_2, \ldots, C_n$ a.î. $C_n = C$.

Rezoluție

Exemplu

Fie

$$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2\}, \{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{\neg v_4\}\}.$$

O derivare prin rezoluție a clauzei vide $\square$ din $\mathcal{S}$ este următoarea:

C_1	$=$	$\{\neg v_4\}$	$C_1 \in \mathcal{S}$
C_2	$=$	$\{\neg v_2, \neg v_3, v_4\}$	$C_2 \in \mathcal{S}$
C_3	$=$	$\{\neg v_2, \neg v_3\}$	C_3 rezolvent al clauzelor C_1, C_2
C_4	$=$	$\{v_3\}$	$C_4 \in \mathcal{S}$
C_5	$=$	$\{\neg v_2\}$	C_5 rezolvent al clauzelor C_3, C_4
C_6	$=$	$\{\neg v_1, v_2\}$	$C_6 \in \mathcal{S}$
C_7	$=$	$\{\neg v_1\}$	C_7 rezolvent al clauzelor C_5, C_6
C_8	$=$	$\{v_1\}$	$C_8 \in \mathcal{S}$
C_9	$=$	$\square$	C_9 rezolvent al clauzelor C_7, C_8.

Rezoluția

Pentru orice mulțime de clauze $\mathcal{S}$, notăm cu

$$Res(\mathcal{S}) := \bigcup_{C_1, C_2 \in \mathcal{S}} Res(C_1, C_2).$$

Propoziția 1.91

Pentru orice mulțime de clauze $\mathcal{S}$ și orice evaluare $e : V \to \{0, 1\}$,

$$e \vDash \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad e \vDash Res(\mathcal{S}).$$

Dem.: Dacă $Res(\mathcal{S}) = \emptyset$, atunci este validă, deci $e \vDash Res(\mathcal{S})$. Presupunem că $Res(\mathcal{S})$ este nevidă și fie $R \in Res(\mathcal{S})$. Atunci există clauze $C_1, C_2 \in \mathcal{S}$ și un literal L a.î. $L \in C_1, L^c \in C_2$ și $R = (C_1 \setminus \{L\}) \cup (C_2 \setminus \{L^c\})$. Avem două cazuri:

- $e \vDash L$. Atunci $e \nvDash L^c$. Deoarece $e \vDash C_2$, există $U \in C_2, U \neq L^c$ a.î. $e \vDash U$. Deoarece $U \in R$, obținem că $e \vDash R$.
- $e \vDash L^c$. Atunci $e \nvDash L$. Deoarece $e \vDash C_1$, există $U \in C_1, U \neq L$ a.î. $e \vDash U$. Deoarece $U \in R$, obținem că $e \vDash R$. $\square$

Corectitudinea rezoluției

Teorema de corectitudine a rezoluției 1.92

Fie $\mathcal{S}$ o mulțime de clauze. Dacă $\square$ se derivează prin rezoluție din $\mathcal{S}$, atunci $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.

Dem.: Fie $C_1, C_2, \ldots, C_n = \square$ o $\mathcal{S}$-derivare prin rezoluție a lui $\square$.
Presupunem că $\mathcal{S}$ este satisfiabilă și fie $e \vDash \mathcal{S}$.
Demonstrăm prin inducție după i că:

$$\text{pentru orice } 1 \leq i \leq n,\ e \vDash C_i.$$

Pentru $i = n$, obținem că $e \vDash \square$, ceea ce este o contradicție.
Cazul $i = 1$ este evident, deoarece $C_1 \in \mathcal{S}$.
Presupunem că $e \vDash C_j$ pentru orice $j < i$. Avem două cazuri:

- $C_i \in \mathcal{S}$. Atunci $e \vDash C_i$.
- există $j, k < i$ a.î. $C_i \in Res(C_j, C_k)$. Deoarece, conform ipotezei de inducție, $e \vDash \{C_j, C_k\}$ aplicăm Propoziția 1.91 pentru a conclude că $e \vDash C_i$.

$\square$

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

Intrare: $\mathcal{S}$ mulțime nevidă de clauze netriviale.
$i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

Pi.1 Fie x_i o variabilă care apare în $\mathcal{S}_i$. Definim

$$\mathcal{T}_i^1 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid x_i \in C\}, \quad \mathcal{T}_i^0 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid \neg x_i \in C\}.$$

Pi.2 **if** $(\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset$ și $\mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset)$ **then**

$$\mathcal{U}_i := \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in \mathcal{T}_i^1, C_0 \in \mathcal{T}_i^0\}.$$

else $\mathcal{U}_i := \emptyset$.

Pi.3 Definim

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{i+1} &:= (\mathcal{S}_i \setminus (\mathcal{T}_i^0 \cup \mathcal{T}_i^1)) \cup \mathcal{U}_i; \\ \mathcal{S}_{i+1} &:= \mathcal{S}'_{i+1} \setminus \{C \in \mathcal{S}'_{i+1} \mid C \text{ trivială}\}. \end{aligned}$$

Pi.4 **if** $\mathcal{S}_{i+1} = \emptyset$ **then** $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.
else if $\square \in \mathcal{S}_{i+1}$ **then** $\mathcal{S}$ este nesatisfiabilă.
else $\{i := i + 1;$ go to Pi.1$\}$.

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$. $i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_3$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{v_1, \neg v_3\}\}$.
P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$.
P1.3 $\mathcal{S}'_2 := \{\{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$; $\mathcal{S}_2 := \{\{v_2, v_1\}\}$.
P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1 $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_2, v_1\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \emptyset$.
P2.2 $\mathcal{U}_2 := \emptyset$.
P2.3 $\mathcal{S}_3 := \emptyset$.
P2.4 $\mathcal{S}$ este satisfiabilă.

Algoritmul Davis-Putnam (DP)

$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}$.
$i := 1$, $\mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$.

P1.1 $x_1 := v_1$; $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_1, v_3\}, \{v_1\}\}$; $\mathcal{T}_1^0 := \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}\}$.
P1.2 $\mathcal{U}_1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.
P1.3 $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$.
P1.4 $i := 2$ and go to P2.1.

P2.1. $x_2 := v_2$; $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$; $\mathcal{T}_2^0 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}\}$.
P2.2 $\mathcal{U}_2 := \{\{v_3, \neg v_4, \neg v_3\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.
P2.3 $\mathcal{S}_3 := \{\{v_3\}, \{v_4\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.
P2.4 $i := 3$ and go to P3.1.

P3.1 $x_3 := v_3$; $\mathcal{T}_3^1 := \{\{v_3\}\}$; $\mathcal{T}_3^0 := \{\{\neg v_4, \neg v_3\}\}$.
P3.2. $\mathcal{U}_3 := \{\{\neg v_4\}\}$. P3.3 $\mathcal{S}_4 := \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}$.
P3.4 $i := 4$ and go to P4.1.

P4.1 $x_4 := v_4$; $\mathcal{T}_4^1 := \{\{v_4\}\}$; $\mathcal{T}_4^0 := \{\{\neg v_4\}\}$.
P4.2 $\mathcal{U}_4 := \{\square\}$. P4.3 $\mathcal{S}_5 := \{\square\}$.
P4.4 $\mathcal{S}$ nu este satisfiabilă.

Algoritmul DP - terminare

Notăm:

$Var(C) := \{x \in V \mid x \in C$ sau $\neg x \in C\}$, $\quad Var(\mathcal{S}) := \bigcup_{C \in \mathcal{S}} Var(C)$.

Așadar, $Var(C) = \emptyset$ ddacă $C = \square$ și $Var(\mathcal{S}) = \emptyset$ ddacă $\mathcal{S} = \emptyset$ sau $\mathcal{S} = \{\square\}$.

Propoziția 1.93

Fie $n := |Var(\mathcal{S})|$. Atunci algoritmul DP se termină după cel mult n pași.

Dem.: Se observă imediat că pentru orice i,

$$Var(\mathcal{S}_{i+1}) \subseteq Var(\mathcal{S}_i) \setminus \{x_i\} \subsetneq Var(\mathcal{S}_i).$$

Prin urmare, $n = |Var(\mathcal{S}_1)| > |Var(\mathcal{S}_2)| > |Var(\mathcal{S}_3)| > \ldots \geq 0$. $\square$

Fie $N \leq n$ numărul de pași după care se termină DP. Atunci $\mathcal{S}_{N+1} = \emptyset$ sau $\square \in \mathcal{S}_{N+1}$.

Algoritmul DP - corectitudine și completitudine

Propoziția 1.94

Pentru orice $i \leq N$,

$$\mathcal{S}_{i+1} \text{ este satisfiabilă } \iff \mathcal{S}_i \text{ este satisfiabilă.}$$

Dem.: Suplimentar - nu trebuie citită pentru examen

"$\Leftarrow$" Presupunem că $\mathcal{S}_i$ este satisfiabilă și fie $e \vDash \mathcal{S}_i$. Se observă imediat că $\mathcal{S}_{i+1} \subseteq \mathcal{S}_i \cup Res(\mathcal{S}_i)$. Prin urmare, folosind corectitudinea rezoluției, obținem că $e \vDash \mathcal{S}_{i+1}$.

"$\Rightarrow$" Presupunem că $\mathcal{S}_{i+1}$ este satisfiabilă și fie $e \vDash \mathcal{S}_{i+1}$. Deoarece orice clauză trivială este validă, rezultă că $e \vDash \mathcal{S}'_{i+1}$.

Avem următoarele cazuri:

- $\mathcal{T}_i^1 = \emptyset$. Atunci $\mathcal{U}_i = \emptyset$ și $\mathcal{S}'_{i+1} = \mathcal{S}_i \setminus \mathcal{T}_i^0$, deci $\mathcal{S}_i = \mathcal{S}'_{i+1} \cup \mathcal{T}_i^0$. Fie $e' := e_{x_i \leftarrow 0}$. Atunci $e'(x_i) = 0$, deci $e' \vDash \neg x_i$. Rezultă că e' este model pentru orice clauză din $\mathcal{T}_i^0$, adică $e' \vDash \mathcal{T}_i^0$. De asemenea, $e(v) = e'(v)$ pentru orice $v \in Var(\mathcal{S}'_{i+1})$, deci $e' \vDash \mathcal{S}'_{i+1}$. Am obținut că $e' \vDash \mathcal{S}_i$.

Algoritmul DP - corectitudine și completitudine

- $\mathcal{T}_i^0 = \emptyset$. Se demonstrează similar, folosind evaluarea $e'' := e_{x_i \leftarrow 1}$.
- $\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset$ și $\mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset$. Se observă că $\mathcal{S}_i \subseteq \mathcal{S}'_{i+1} \cup (\mathcal{T}_i^1 \cup \mathcal{T}_i^0)$.
  Cazul 1: $e(x_i) = 1$. Definim $e^* := e_{x_i \leftarrow 0}$. Atunci $e, e^* \vDash \mathcal{S}'_{i+1}$, $e \vDash \mathcal{T}_i^1, e^* \vDash \mathcal{T}_i^0$.
  Presupunem că $e, e^* \not\vDash \mathcal{T}_i^1 \cup \mathcal{T}_i^0$. Atunci există $C_1 \in \mathcal{T}_i^1$ a.î. $e^* \not\vDash C_1$ și $C_0 \in \mathcal{T}_i^0$ a.î. $e \not\vDash C_0$. Obținem că $e \not\vDash C_0 \setminus \{\neg x_i\}$.
  Dacă am avea că $e \vDash C_1 \setminus \{x_i\}$, atunci ar exista un literal L care nu conține variabila x_i a.î. $e \vDash L$, de unde am obține că $e^* \vDash L$, contradicție cu faptul că $e^* \not\vDash C_1$.
  Rezultă că $e \not\vDash (C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \in \mathcal{U}_i \subseteq S'_{i+1}$, o contradicție cu ipoteza.
  Așadar, una din evaluările e, e^* satisface $\mathcal{T}_i^1 \cup \mathcal{T}_i^0$, deci este model pentru $\mathcal{S}_i$.
  Cazul 2: $e(x_i) = 0$. Demonstrația e similară. $\square$

Algoritmul DP - corectitudine și completitudine

Teorema 1.95

Algoritmul DP este corect și complet, adică,

$$\mathcal{S} \text{ este nesatisfiabilă ddacă } \square \in S_{N+1}.$$

Dem.: Aplicăm Propoziția 1.94. Obținem că $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$ este nesatisfiabilă ddacă S_{N+1} este nesatisfiabilă ddacă $\square \in S_{N+1}$. $\square$

LOGICA DE ORDINUL I

Un limbaj $\mathcal{L}$ de ordinul I este format din:

- o mulțime numărabilă $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ de variabile;
- conectorii $\neg$ și $\rightarrow$;
- paranteze: (,);
- simbolul de egalitate $=$;
- cuantificatorul universal $\forall$;
- o mulțime $\mathcal{R}$ de simboluri de relații;
- o mulțime $\mathcal{F}$ de simboluri de funcții;
- o mulțime $\mathcal{C}$ de simboluri de constante;
- o funcție aritate $ari : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{L}$ este unic determinat de cvadruplul $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, ari)$.
- τ se numește signatura lui $\mathcal{L}$ sau vocabularul lui $\mathcal{L}$ sau alfabetul lui $\mathcal{L}$ sau tipul de similaritate al lui $\mathcal{L}$

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea $Sim_{\mathcal{L}}$ a simbolurilor lui $\mathcal{L}$ este

$$Sim_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$ se numesc simboluri non-logice.
- Elementele lui $V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), =, \forall\}$ se numesc simboluri logice.

- Notăm variabilele cu $x, y, z, v, \ldots$, simbolurile de relații cu $P, Q, R \ldots$, simbolurile de funcții cu $f, g, h, \ldots$ și simbolurile de constante cu $c, d, e, \ldots$.

- Pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ notăm:

$\mathcal{F}_m$:= mulțimea simbolurilor de funcții de aritate m;
$\mathcal{R}_m$:= mulțimea simbolurilor de relații de aritate m.

Definiția 2.1

Mulțimea $Expr_{\mathcal{L}}$ a expresiilor lui $\mathcal{L}$ este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui $\mathcal{L}$.

- Expresia vidă se notează λ.
- Lungimea unei expresii θ este numărul simbolurilor din θ.

Definiția 2.2

Fie $\theta = \theta_0\theta_1 \ldots \theta_{k-1}$ o expresie a lui $\mathcal{L}$, unde $\theta_i \in Sim_{\mathcal{L}}$ pentru orice i.

- Dacă $0 \leq i \leq j \leq k-1$, atunci expresia $\theta_i \ldots \theta_j$ se numește (i,j)-subexpresia lui θ;
- Spunem că o expresie ψ apare în θ dacă există $0 \leq i \leq j \leq k-1$ a.î. ψ este (i,j)-subexpresia lui θ;
- Notăm cu $Var(\theta)$ mulțimea variabilelor care apar în θ.

Termeni

Definiția 2.3

Mulțimea $Trm_{\mathcal{L}}$ a termenilor lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- orice variabilă este element al lui Γ;
- orice simbol de constantă este element al lui Γ;
- dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \ldots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \ldots t_m \in \Gamma$.

Notații:

- Termeni: $t, s, t_1, t_2, s_1, s_2, \ldots$.
- $Var(t)$ este mulțimea variabilelor care apar în termenul t.
- Scriem $t(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile și $Var(t) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Definiția 2.4

Un termen t se numește închis dacă $Var(t) = \emptyset$.

Termeni

Propoziția 2.5 (Inducția pe termeni)

Fie Γ o mulțime de termeni care are următoarele proprietăți:

- Γ conține variabilele și simbolurile de constante;
- dacă $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$ și $t_1, \ldots, t_m \in \Gamma$, atunci $ft_1 \ldots t_m \in \Gamma$.

Atunci $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toți termenii au o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor termenilor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe termeni pentru a obține că $\Gamma = Trm_{\mathcal{L}}$.

Termeni

Citire unică (Unique readability)

Dacă t este un termen, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $t = x$, unde $x \in V$;
- $t = c$, unde $c \in \mathcal{C}$;
- $t = ft_1 \ldots t_m$, unde $f \in \mathcal{F}_m$ $(m \geq 1)$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni.

Mai mult, scrierea lui t sub una din aceste forme este unică.

Formule

Definiția 2.6

Formulele atomice ale lui $\mathcal{L}$ sunt expresiile de forma:

- $(s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- $(Rt_1 \ldots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni.

Definiția 2.7

Mulțimea $Form_{\mathcal{L}}$ a formulelor lui $\mathcal{L}$ este intersecția tuturor mulțimilor de expresii Γ care satisfac următoarele proprietăți:

- orice formulă atomică este element al lui Γ;
- Γ este închisă la $\neg$: dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $(\neg\varphi) \in \Gamma$;
- Γ este închisă la $\rightarrow$: dacă $\varphi, \psi \in \Gamma$, atunci $(\varphi \rightarrow \psi) \in \Gamma$;
- Γ este închisă la $\forall x$ (pentru orice variabilă x): dacă $\varphi \in \Gamma$, atunci $(\forall x\varphi) \in \Gamma$ pentru orice variabilă x.

Notații

- Formule: $\varphi, \psi, \chi, \ldots$.
- $Var(\varphi)$ este mulțimea variabilelor care apar în formula φ.

Convenție

De obicei renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Atunci când nu e pericol de confuzie, scriem $s = t$ în loc de $(s = t)$, $Rt_1 \ldots t_m$ în loc de $(Rt_1 \ldots t_m)$, $\forall x \varphi$ în loc de $(\forall x \varphi)$, etc..

Propoziția 2.8 (Inducția pe formule)

Fie Γ o mulțime de formule care are următoarele proprietăți:

- Γ conține toate formulele atomice;
- Γ este închisă la $\neg, \rightarrow$ și $\forall x$ (pentru orice variabilă x).

Atunci $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.

Este folosită pentru a demonstra că toate formulele satisfac o proprietate $\mathcal{P}$: definim Γ ca fiind mulțimea tuturor formulelor care satisfac $\mathcal{P}$ și aplicăm inducția pe formule pentru a obține că $\Gamma = Form_{\mathcal{L}}$.

Citire unică (Unique readability)

Dacă φ este o formulă, atunci exact una din următoarele alternative are loc:

- $\varphi = (s = t)$, unde s, t sunt termeni;
- $\varphi = (Rt_1 \ldots t_m)$, unde $R \in \mathcal{R}_m$ și $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni;
- $\varphi = (\neg \psi)$, unde ψ este formulă;
- $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, unde ψ, χ sunt formule;
- $\varphi = (\forall x \psi)$, unde x este variabilă și ψ este formulă.

Mai mult, scrierea lui φ sub una din aceste forme este unică.

Conectori derivați

Conectorii $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ și cuantificatorul existențial $\exists$ sunt introduși prin următoarele abrevieri:

$$
\begin{array}{lcl}
\varphi \vee \psi & := & ((\neg \varphi) \rightarrow \psi) \\
\varphi \wedge \psi & := & \neg(\varphi \rightarrow (\neg \psi))) \\
\varphi \leftrightarrow \psi & := & ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \\
\exists x \varphi & := & (\neg \forall x (\neg \varphi)).
\end{array}
$$

Formule

Convenții

- În practică, renunțăm la parantezele exterioare, le punem numai atunci când sunt necesare. Astfel, scriem $\neg\varphi, \varphi \to \psi$, dar scriem $(\varphi \to \psi) \to \chi$.
- Pentru a mai reduce din folosirea parantezelor, presupunem că
  - $\neg$ are precedență mai mare decât ceilalți conectori;
  - $\wedge, \vee$ au precedență mai mare decât $\to, \leftrightarrow$.
- Prin urmare, formula $(((\varphi \to (\psi \vee \chi)) \wedge ((\neg\psi) \leftrightarrow (\psi \vee \chi)))$ va fi scrisă $(\varphi \to \psi \vee \chi) \wedge (\neg\psi \leftrightarrow \psi \vee \chi)$.
- Cuantificatorii $\forall$, $\exists$ au precedență mai mare decât ceilalți conectori.
- Așadar, $\forall x\varphi \to \psi$ este $(\forall x\varphi) \to \psi$ și nu $\forall x(\varphi \to \psi)$.

Notații

De multe ori identificăm un limbaj $\mathcal{L}$ cu mulțimea simbolurilor sale non-logice și scriem $\mathcal{L} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$.

- Scriem de multe ori $f(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $ft_1 \ldots t_m$ și $R(t_1, \ldots, t_m)$ în loc de $Rt_1 \ldots t_m$.
- Pentru simboluri f de operații binare scriem $t_1 f t_2$ în loc de $f t_1 t_2$.
- Analog pentru simboluri R de relații binare: scriem $t_1 R t_2$ în loc de $R t_1 t_2$.

$\mathcal{L}$-structura

Definiția 2.9

O $\mathcal{L}$-structură este un cvadruplu

$$\mathcal{A} = (A, \mathcal{F}^{\mathcal{A}}, \mathcal{R}^{\mathcal{A}}, \mathcal{C}^{\mathcal{A}})$$

unde

- A este o mulțime nevidă;
- $\mathcal{F}^{\mathcal{A}} = \{f^{\mathcal{A}} \mid f \in \mathcal{F}\}$ este o mulțime de operații pe A; dacă f are aritatea m, atunci $f^{\mathcal{A}} : A^m \to A$;
- $\mathcal{R}^{\mathcal{A}} = \{R^{\mathcal{A}} \mid R \in \mathcal{R}\}$ este o mulțime de relații pe A; dacă R are aritatea m, atunci $R^{\mathcal{A}} \subseteq A^m$;
- $\mathcal{C}^{\mathcal{A}} = \{c^{\mathcal{A}} \in A \mid c \in \mathcal{C}\}$.

- A se numește universul structurii $\mathcal{A}$. Notație: $A = |\mathcal{A}|$
- $f^{\mathcal{A}}$ (respectiv $R^{\mathcal{A}}$, $c^{\mathcal{A}}$) se numește denotația sau interpretarea lui f (respectiv R, c) în $\mathcal{A}$.

Exemple - Limbajul egalității $\mathcal{L}_=$

$\mathcal{L}_= = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- acest limbaj este potrivit doar pentru a exprima proprietăți ale egalității
- $\mathcal{L}_=$-structurile sunt mulțimile nevide

Exemple de formule:

- egalitatea este simetrică:

$$\forall x \forall y (x = y \to y = x)$$

- universul are cel puțin trei elemente:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(y = z) \wedge \neg(z = x))$$

Exemple - Limbajul aritmeticii $\mathcal{L}_{ar}$

$\mathcal{L}_{ar} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{\dot{<}\}$; $\dot{<}$ este simbol de relație binară, adică are aritatea 2;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}\}$; $\dot{+}, \dot{\times}$ sunt simboluri de operații binare și $\dot{S}$ este simbol de operație unar (adică are aritatea 1);
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}; \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}; \dot{0})$ sau $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$.

Exemplul natural de $\mathcal{L}_{ar}$-structură:

$$\mathcal{N} := (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0),$$

unde $S : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, S(m) = m + 1$ este funcția succesor. Prin urmare,

$$\dot{<}^{\mathcal{N}} = <,\ \dot{+}^{\mathcal{N}} = +,\ \dot{\times}^{\mathcal{N}} = \cdot,\ \dot{S}^{\mathcal{N}} = S,\ \dot{0}^{\mathcal{N}} = 0.$$

- Alt exemplu de $\mathcal{L}_{ar}$-structură: $\mathcal{A} = (\{0, 1\}, <, \vee, \wedge, \neg, 1)$.

Exemplu - Limbajul cu un simbol de relație binar

$\mathcal{L}_R = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \{R\}$; R simbol binar
- $\mathcal{F} = \mathcal{C} = \emptyset$
- $\mathcal{L}$-structurile sunt mulțimile nevide împreună cu o relație binară

- Dacă suntem interesați de mulțimi parțial ordonate $(A, \leq)$, folosim simbolul $\dot{\leq}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\leq}$.
- Dacă suntem interesați de mulțimi strict ordonate $(A, <)$, folosim simbolul $\dot{<}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{<}$.
- Dacă suntem interesați de grafuri $G = (V, E)$, folosim simbolul $\dot{E}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{Graf}$.
- Dacă suntem interesați de structuri $(A, \in)$, folosim simbolul $\dot{\in}$ în loc de R și notăm limbajul cu $\mathcal{L}_{\in}$.

Exemple - Limbajul grupurilor $\mathcal{L}_{Gr}$

$\mathcal{L}_{Gr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{*}, \dot{^{-1}}\}$; $\dot{*}$ simbol binar, $\dot{^{-1}}$ simbol unar
- $\mathcal{C} = \{\dot{e}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{Gr} = (\emptyset; \dot{*}, \dot{^{-1}}; \dot{e})$ sau $\mathcal{L}_{Gr} = (\dot{*}, \dot{^{-1}}, \dot{e})$.

Exemple naturale de $\mathcal{L}_{Gr}$-structuri sunt grupurile: $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, e)$.
Prin urmare, $\dot{*}^{\mathcal{G}} = \cdot$, $\dot{^{-1}}^{\mathcal{G}} = ^{-1}$, $\dot{e}^{\mathcal{G}} = e$.

Pentru a discuta despre grupuri abeliene (comutative), este tradițional să se folosească limbajul $\mathcal{L}_{AbGr} = (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C})$, unde

- $\mathcal{R} = \emptyset$;
- $\mathcal{F} = \{\dot{+}, \dot{-}\}$; $\dot{+}$ simbol binar, $\dot{-}$ simbol unar;
- $\mathcal{C} = \{\dot{0}\}$.

Scriem $\mathcal{L}_{AbGr} = (\dot{+}, \dot{-}, \dot{0})$.

SEMANTICA

Interpretare (evaluare)

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I și $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură.

Definiția 2.10

O interpretare sau evaluare a (variabilelor) lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$ este o funcție $e : V \to A$.

În continuare, $e : V \to A$ este o interpretare a lui $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$.

Definiția 2.11 (Interpretarea termenilor)

Prin inducție pe termeni se definește interpretarea $t^{\mathcal{A}}(e) \in A$ a *termenului t sub evaluarea e*:

- dacă $t = x \in V$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := e(x)$;
- dacă $t = c \in \mathcal{C}$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := c^{\mathcal{A}}$;
- dacă $t = ft_1 \dots t_m$, atunci $t^{\mathcal{A}}(e) := f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e))$.

Interpretarea formulelor

Prin inducție pe formule se definește interpretarea

$$\varphi^{\mathcal{A}}(e) \in \{0, 1\}$$

a *formulei φ sub evaluarea e*.

$$(s = t)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } s^{\mathcal{A}}(e) = t^{\mathcal{A}}(e) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

$$(Rt_1 \dots t_m)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \dots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

Negația și implicația

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 - \varphi^{\mathcal{A}}(e)$;
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \to \psi^{\mathcal{A}}(e)$, unde,

$\to : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$,

p	q	$p \to q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Prin urmare,

- $(\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$.
- $(\varphi \to \psi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff \big(\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0 \text{ sau } \psi^{\mathcal{A}}(e) = 1\big)$.

Interpretarea formulelor

Notație

Pentru orice variabilă $x \in V$ și orice $a \in A$, definim o nouă interpretarea $e_{x \leftarrow a} : V \to A$ prin

$$e_{x \leftarrow a}(v) = \begin{cases} e(v) & \text{dacă } v \neq x \\ a & \text{dacă } v = x. \end{cases}$$

Interpretarea formulelor

$$(\forall x \varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \text{ pentru orice } a \in A \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

Relația de satisfacere

Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o interpretare a lui $\mathcal{L}$ în $\mathcal{A}$.

Definiția 2.12

Fie φ o formulă. Spunem că:

- e satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 1$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$.
- e nu satisface φ în $\mathcal{A}$ dacă $\varphi^{\mathcal{A}}(e) = 0$. Notație: $\mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

Corolarul 2.13

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă x,

(i) $\mathcal{A} \vDash \neg\varphi[e] \iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \to \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ implică $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$
$\iff \mathcal{A} \nvDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\forall x\varphi)[e] \iff$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Relația de satisfacere

$\vee, \wedge, \leftrightarrow : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$,

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Fie φ, ψ formule și x o variabilă.

Propoziția 2.14

(i) $(\varphi \vee \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \vee \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(ii) $(\varphi \wedge \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \wedge \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iii) $(\varphi \leftrightarrow \psi)^{\mathcal{A}}(e) = \varphi^{\mathcal{A}}(e) \leftrightarrow \psi^{\mathcal{A}}(e)$;

(iv) $(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = \begin{cases} 1 & \text{dacă există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1 \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$

Dem.: Exercițiu ușor. Arătăm, de exemplu, (iv).

Relația de satisfacere

$$\begin{aligned}
(\exists x\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 &\iff (\neg\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 1 \iff (\forall x\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e) = 0 \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } (\neg\varphi)^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 0 \\
&\iff \text{există } a \in A \text{ a.î. } \varphi^{\mathcal{A}}(e_{x \leftarrow a}) = 1.
\end{aligned}$$

Corolarul 2.15

(i) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \wedge \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ și $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(ii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \vee \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ sau $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iii) $\mathcal{A} \vDash (\varphi \leftrightarrow \psi)[e] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ ddacă $\mathcal{A} \vDash \psi[e]$.

(iv) $\mathcal{A} \vDash (\exists x\varphi)[e] \iff$ există $a \in A$ a.î. $\mathcal{A} \vDash \varphi[e_{x \leftarrow a}]$.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.16

Spunem că φ este satisfiabilă dacă există o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și o evaluare $e : V \to A$ a.î.

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $(\mathcal{A}, e)$ este un model al lui φ.

Atenție! Este posibil ca atât φ cât și $\neg\varphi$ să fie satisfiabile.
Exemplu: $\varphi := x = y$ în $\mathcal{L}_=$.

Fie φ formulă a lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.17

Spunem că φ este adevărată într-o $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ dacă pentru orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e].$$

Spunem și că $\mathcal{A}$ satisface φ sau că $\mathcal{A}$ este un model al lui φ.
Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Definiția 2.18

Spunem că φ este formulă universal adevărată sau (logic) validă dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi.$$

Notație: $\vDash \varphi$

Fie φ, ψ formule ale lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.19

φ și ψ sunt logic echivalente dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \psi$

Definiția 2.20

ψ este consecință semantică a lui φ dacă pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice evaluare $e : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e] \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \vDash \psi[e].$$

Notație: $\varphi \vDash \psi$

Observație

(i) $\varphi \vDash \psi$ ddacă $\vDash \varphi \to \psi$.

(ii) $\varphi \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \psi$ ddacă ($\psi \vDash \varphi$ și $\varphi \vDash \psi$) ddacă $\vDash \psi \leftrightarrow \varphi$.

Propoziția 2.21

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabile x, y,

$$\begin{aligned}
\neg\exists x\varphi &\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \forall x\neg\varphi && (1)\\
\neg\forall x\varphi &\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \exists x\neg\varphi && (2)\\
\forall x(\varphi\wedge\psi) &\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \forall x\varphi\wedge\forall x\psi && (3)\\
\forall x\varphi\vee\forall x\psi &\vDash \forall x(\varphi\vee\psi) && (4)\\
\exists x(\varphi\wedge\psi) &\vDash \exists x\varphi\wedge\exists x\psi && (5)\\
\exists x(\varphi\vee\psi) &\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash \exists x\varphi\vee\exists x\psi && (6)\\
\forall x(\varphi\to\psi) &\vDash \forall x\varphi\to\forall x\psi && (7)\\
\forall x(\varphi\to\psi) &\vDash \exists x\varphi\to\exists x\psi && (8)\\
\forall x\varphi &\vDash \exists x\varphi && (9)
\end{aligned}$$

Echivalențe și consecințe logice

$$\begin{array}{rcll} \varphi & \vDash & \exists x\varphi & (10) \\ \forall x\varphi & \vDash & \varphi & (11) \\ \forall x\forall y\varphi & \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash & \forall y\forall x\varphi & (12) \\ \exists x\exists y\varphi & \mathrel{\text{⫤}}\!\vDash & \exists y\exists x\varphi & (13) \\ \exists y\forall x\varphi & \vDash & \forall x\exists y\varphi. & (14) \end{array}$$

Dem.: Exercițiu.

Propoziția 2.22

Pentru orice termeni s, t, u,

(i) $\vDash t = t$;

(ii) $\vDash s = t \to t = s$;

(iii) $\vDash s = t \wedge t = u \to s = u$.

Dem.: Exercițiu ușor.

Egalitatea

Propoziția 2.23

Pentru orice $m \geq 1$, $f \in \mathcal{F}_m$, $R \in \mathcal{R}_m$ și orice termeni $t_i, u_i, i = 1, \ldots, m$,

$$\vDash (t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m) \to ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m \quad (15)$$
$$\vDash (t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m) \to (Rt_1 \ldots t_m \leftrightarrow Ru_1 \ldots u_m). \quad (16)$$

Dem.: Arătăm (15). Fie $\mathcal{A}$ o $\mathcal{L}$-structură și $e : V \to A$ o evaluare a.î. $\mathcal{A} \vDash ((t_1 = u_1) \wedge \ldots \wedge (t_m = u_m))[e]$. Atunci $\mathcal{A} \vDash (t_i = u_i)[e]$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$, deci $t_i^{\mathcal{A}}(e) = u_i^{\mathcal{A}}(e)$ pentru orice $i \in \{1, \ldots, m\}$. Rezultă că

$$\begin{aligned} (ft_1 \ldots t_m)^{\mathcal{A}}(e) &= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e)) = f^{\mathcal{A}}(u_1^{\mathcal{A}}(e), \ldots, u_m^{\mathcal{A}}(e)) \\ &= (fu_1 \ldots u_m)^{\mathcal{A}}(e) \end{aligned}$$

Așadar, $\mathcal{A} \vDash (ft_1 \ldots t_m = fu_1 \ldots u_m)[e]$. $\square$

Variabile legate și libere

Definiția 2.24

Fie φ o formulă a lui $\mathcal{L}$ și x o variabilă.

- O apariție a lui x în φ se numește legată în φ dacă x apare într-o subexpresie a lui φ de forma $\forall x\psi$ sau $\exists x\psi$, unde ψ este o formulă;
- O apariție a lui x în φ se numește liberă în φ dacă nu este legată în φ.
- x este variabilă legată (*bounded variable*) a lui φ dacă x are cel puțin o apariție legată în φ.
- x este variabilă liberă (*free variable*) a lui φ dacă x are cel puțin o apariție liberă în φ.

Exemplu

Fie $\varphi = \forall x(x = y) \to x = z$. Variabile libere: x, y, z. Variabile legate: x.

Variabile legate și libere

Notație: $FV(\varphi) :=$ mulțimea variabilelor libere ale lui φ.

Definiție alternativă

Mulțimea $FV(\varphi)$ a variabilelor libere ale unei formule φ poate fi definită și prin inducție pe formule:

$$\begin{array}{lcll} FV(\varphi) & = & Var(\varphi), & \text{dacă } \varphi \text{ este formulă atomică;} \\ FV(\neg\varphi) & = & FV(\varphi); & \\ FV(\varphi \to \psi) & = & FV(\varphi) \cup FV(\psi); & \\ FV(\forall x\varphi) & = & FV(\varphi) \setminus \{x\}. & \end{array}$$

Notație: $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Propoziția 2.25

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ și orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice termen t,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in Var(t)$, atunci
$$t^{\mathcal{A}}(e_1) = t^{\mathcal{A}}(e_2).$$

Propoziția 2.26

Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$, orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$, pentru orice formulă φ,

dacă $e_1(v) = e_2(v)$ pentru orice variabilă $v \in FV(\varphi)$, atunci
$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

Dem.: Suplimentar - nu trebuie citită pentru examen Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- $\varphi = t_1 = t_2$.

Atunci $Var(t_1) \subseteq FV(\varphi)$, $Var(t_2) \subseteq FV(\varphi)$, deci putem aplica Propoziția 2.25 pentru a conclude că
$$t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \quad t_2^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2).$$
Rezultă
$$\begin{aligned}\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff t_1^{\mathcal{A}}(e_1) = t_2^{\mathcal{A}}(e_1) \iff t_1^{\mathcal{A}}(e_2) = t_2^{\mathcal{A}}(e_2)\\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].\end{aligned}$$

- $\varphi = Rt_1 \ldots t_m$.

Atunci $Var(t_i) \subseteq FV(\varphi)$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$, deci putem aplica Propoziția 2.25 pentru a conclude că
$$t_i^{\mathcal{A}}(e_1) = t_i^{\mathcal{A}}(e_2) \text{ pentru orice } i = 1, \ldots, m.$$
Rezultă
$$\begin{aligned}\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_1), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e_1))\\ &\iff R^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(e_2), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(e_2)) \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].\end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\psi$.

Deoarece $FV(\psi) = FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a conclude că
$$\mathcal{A} \vDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_2].$$
Rezultă
$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_2] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].$$

- $\varphi = \psi \to \chi$.

Deoarece $FV(\psi), FV(\chi) \subseteq FV(\varphi)$, putem aplica ipoteza de inducție pentru a conclude că
$$\mathcal{A} \vDash \psi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_2] \text{ și } \mathcal{A} \vDash \chi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \chi[e_2].$$
Rezultă
$$\begin{aligned}\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_1] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \chi[e_1]\\ &\iff \mathcal{A} \nvDash \psi[e_2] \text{ sau } \mathcal{A} \vDash \chi[e_2]\\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2].\end{aligned}$$

Interpretarea termenilor

- $\varphi = \forall x \psi$ și

$$e_1(v) = e_2(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}.$$

Rezultă că pentru orice $a \in A$,

$$e_{1x\leftarrow a}(v) = e_{2x\leftarrow a}(v) \text{ pentru orice } v \in FV(\psi).$$

Prin urmare, putem aplica ipoteza de inducție pentru interpretările $e_{1x\leftarrow a}, e_{2x\leftarrow a}$ pentru a conclude că

$$\text{pentru orice } a \in A,\ \mathcal{A} \vDash \psi[e_{1x\leftarrow a}] \iff \mathcal{A} \vDash \psi[e_{2x\leftarrow a}].$$

Rezultă

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e_{1x\leftarrow a}] \\ &\iff \text{pentru orice } a \in A, \mathcal{A} \vDash \psi[e_{2x\leftarrow a}] \\ &\iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]. \end{aligned}$$

□

Echivalențe și consecințe logice

Propoziția 2.27

Pentru orice formule φ, ψ și orice variabilă $x \notin FV(\varphi)$,

$$\begin{aligned} \varphi &\;\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash\; \exists x \varphi && (17) \\ \varphi &\;\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash\; \forall x \varphi && (18) \\ \forall x(\varphi \wedge \psi) &\;\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash\; \varphi \wedge \forall x \psi && (19) \\ \forall x(\varphi \vee \psi) &\;\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash\; \varphi \vee \forall x \psi && (20) \\ \exists x(\varphi \wedge \psi) &\;\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash\; \varphi \wedge \exists x \psi && (21) \\ \exists x(\varphi \vee \psi) &\;\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash\; \varphi \vee \exists x \psi && (22) \\ \forall x(\varphi \to \psi) &\;\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash\; \varphi \to \forall x \psi && (23) \\ \exists x(\varphi \to \psi) &\;\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash\; \varphi \to \exists x \psi && (24) \\ \forall x(\psi \to \varphi) &\;\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash\; \exists x \psi \to \varphi && (25) \\ \exists x(\psi \to \varphi) &\;\mathrel{\text{⫤}}\!\vDash\; \forall x \psi \to \varphi && (26) \end{aligned}$$

Dem.: Exercițiu.

Enunțuri

Definiția 2.28

O formulă φ se numește enunț (*sentence*) dacă $FV(\varphi) = \emptyset$, adică φ nu are variabile libere.
Notație: $Sent_{\mathcal{L}}$:= mulțimea enunțurilor lui $\mathcal{L}$.

Propoziția 2.29

Fie φ un enunț. Pentru orice interpretări $e_1, e_2 : V \to A$,

$$\mathcal{A} \vDash \varphi[e_1] \iff \mathcal{A} \vDash \varphi[e_2]$$

Dem.: Este o consecință imediată a Propoziției 2.26 și a faptului că $FV(\varphi) = \emptyset$. □

Definiția 2.30

O $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ este un model al lui φ dacă $\mathcal{A} \vDash \varphi[e]$ pentru o (orice) evaluare $e : V \to A$. Notație: $\mathcal{A} \vDash \varphi$

Substituția

Fie x o variabilă a lui $\mathcal{L}$ și u termen al lui $\mathcal{L}$.

Definiția 2.31

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, definim

$t_x(u)$:= expresia obținută din t prin înlocuirea tuturor aparițiilor lui x cu u.

Propoziția 2.32

Pentru orice termen t al lui $\mathcal{L}$, $t_x(u)$ este termen al lui $\mathcal{L}$.

Dem.: Demonstrăm prin inducție după termenul t.

- $t = y \in V$. Atunci $y_x(u) = \begin{cases} y & \text{dacă } y \neq x \\ u & \text{dacă } y = x. \end{cases}$
- $t = c \in \mathcal{C}$. Atunci $c_x(u) = c$.
- $t = ft_1 \dots t_m$ și, conform ipotezei de inducție, $(t_1)_x(u), \dots, (t_m)_x(u)$ sunt termeni. Atunci $(ft_1 \dots t_m)_x(u) = f(t_1)_x(u) \dots (t_m)_x(u)$ este termen. □

Substituția

- Vrem să definim analog $\varphi_x(u)$ ca fiind expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.
- De asemenea, vrem ca următoarele proprietăți naturale ale substituției să fie adevărate:

$$\vDash \forall x\varphi \to \varphi_x(u) \quad \text{și} \quad \vDash \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

Apar însă probleme.

Fie $\varphi := \exists y \neg(x = y)$ și $u := y$. Atunci $\varphi_x(u) = \exists y \neg(y = y)$. Avem

- Pentru orice $\mathcal{L}$-structură $\mathcal{A}$ cu $|A| \geq 2$ avem că $\mathcal{A} \vDash \forall x\varphi$.
- $\varphi_x(u)$ nu este satisfiabilă.

Substituția

Fie x o variabilă, u un termen și φ o formulă.

Definiția 2.33

Spunem că x este liberă pentru u în φ sau că u este substituibil pentru x în φ dacă pentru orice variabilă y care apare în u, nici o subformulă a lui φ de forma $\forall y\psi$ nu conține apariții libere ale lui x.

Observație

x este liberă pentru u în φ în oricare din următoarele situații:

- u nu conține variabile;
- φ nu conține variabile care apar în u;
- nici o variabilă din u nu apare legată în φ;
- x nu apare în φ;
- φ nu conține apariții libere ale lui x.

Substituția

Fie x o variabilă, u termen și φ o formulă a.î. x este liberă pentru u în φ.

Definiția 2.34

$\varphi_x(u)$:= expresia obținută din φ prin înlocuirea tuturor aparițiilor libere ale lui x cu u.

Spunem că $\varphi_x(u)$ este o substituție liberă.

Propoziția 2.35

$\varphi_x(u)$ este formulă a lui $\mathcal{L}$.

Dem.: Exercițiu.

Noțiunea de substituție liberă evită problemele menționate anterior și se comportă cum am aștepta.

Propoziția 2.36

Pentru orice termeni u_1 și u_2 și orice variabilă x,

(i) pentru orice termen t,

$$\models u_1 = u_2 \to t_x(u_1) = t_x(u_2).$$

(ii) pentru orice formulă φ a.î. x este liberă pentru u_1 și u_2 în φ,

$$\models u_1 = u_2 \to (\varphi_x(u_1) \leftrightarrow \varphi_x(u_2)).$$

Propoziția 2.37

Fie φ o formulă și x o variabilă.

(i) Pentru orice termen u substituibil pentru x în φ,

$$\models \forall x\varphi \to \varphi_x(u), \qquad \models \varphi_x(u) \to \exists x\varphi.$$

(ii) $\models \forall x\varphi \to \varphi, \qquad \models \varphi \to \exists x\varphi.$

(iii) Pentru orice simbol de constantă c,

$$\models \forall x\varphi \to \varphi_x(c), \qquad \models \varphi_x(c) \to \exists x\varphi.$$

În general, dacă x si y sunt variabile, φ și $\varphi_x(y)$ nu sunt logic echivalente: fie $\mathcal{L}_{ar}$, $\mathcal{N}$ și $e : V \to \mathbb{N}$ a.î. $e(x) = 3, e(y) = 5, e(z) = 4$. Atunci

$$\mathcal{N} \models (x \dot{<} z)[e], \text{ dar } \mathcal{N} \not\models (x \dot{<} z)_x(y)[e].$$

Totuși, variabilele legate pot fi substituite, cu condiția să se evite conflicte.

Propoziția 2.38

Pentru orice formulă φ, variabile distincte x și y a.î. $y \notin FV(\varphi)$ și y este substituibil pentru x în φ,

$$\exists x\varphi \mathrel{\models\!\!\!\!\dashv} \exists y\varphi_x(y) \quad \text{și} \quad \forall x\varphi \mathrel{\models\!\!\!\!\dashv} \forall y\varphi_x(y).$$

Folosim Propoziția 2.38 astfel: dacă $\varphi_x(u)$ nu este substituție liberă (i.e. x nu este liberă pentru u în φ), atunci înlocuim φ cu o formulă φ' logic echivalentă a.î. $\varphi'_x(u)$ este substituție liberă.

Definiția 2.39

Pentru orice formulă φ și orice variabile $y_1, \ldots, y_k$, varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă φ' a lui φ este definită recursiv astfel:

- dacă φ este formulă atomică, atunci φ' este φ;
- dacă $\varphi = \neg\psi$, atunci φ' este $\neg\psi'$;
- dacă $\varphi = \psi \to \chi$, atunci φ' este $\psi' \to \chi'$;
- dacă $\varphi = \forall z\psi$, atunci

$$\varphi' \text{ este } \begin{cases} \forall w\psi'_z(w) & \text{dacă } z \in \{y_1, \ldots, y_k\} \\ \forall z\psi' & \text{altfel;} \end{cases}$$

unde w este prima variabilă din șirul $v_0, v_1, \ldots,$ care nu apare în ψ' și nu este printre $y_1, \ldots, y_k$.

Substituția

Definiția 2.40

φ' este variantă a lui φ dacă este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ pentru anumite variabile $y_1, \ldots, y_k$.

Propoziția 2.41

(i) Pentru orice formulă φ, dacă φ' este o variantă a lui φ, atunci $\varphi \vDash\!\dashv \varphi'$;

(ii) Pentru orice formulă φ și orice termen t, dacă variabilele lui t se află printre $y_1, \ldots, y_k$ și φ' este varianta $y_1, \ldots, y_k$-liberă a lui φ, atunci $\varphi'_x(t)$ este o substituție liberă.

Forma normală prenex

Definiția 2.42

O formulă care nu conține cuantificatori se numește liberă de cuantificatori ("quantifier-free").

Definiția 2.43

O formulă φ este în formă normală prenex dacă

$$\varphi = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \psi,$$

unde $n \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, $x_1, \ldots, x_n$ sunt variabile și ψ este formulă liberă de cuantificatori. Formula ψ se numește matricea lui φ și $Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n$ este prefixul lui φ.

Exemple de formule în formă normală prenex:

- Formulele universale: $\varphi = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori
- Formulele existențiale: $\varphi = \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n \psi$, unde $n \in \mathbb{N}$ și ψ este liberă de cuantificatori

Forma normală prenex

Fie φ o formulă și $t_1, \ldots, t_n$ termeni care nu conțin variabile din φ. Notăm cu $\varphi_{x_1,\ldots,x_n}(t_1, \ldots, t_n)$ formula obținută din φ substituind toate aparițiile libere ale lui $x_1, \ldots, x_n$ cu $t_1, \ldots, t_n$ respectiv.

Notații: $\forall^c = \exists$, $\exists^c = \forall$.

Teorema de formă normală prenex 2.44

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \vDash\!\dashv \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: Aplicăm inducția pe formule. Avem următoarele cazuri:

- φ este formulă atomică. Atunci $\varphi^* := \varphi$.
- $\varphi = \neg\psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă $\psi^* = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi_0$ în formă normală prenex a.î. $\psi \vDash\!\dashv \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$. Definim

$$\varphi^* := Q_1^c x_1 \ldots Q_n^c x_n \neg\psi_0.$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $\varphi^* \vDash\!\dashv \neg\psi^* \vDash\!\dashv \neg\psi = \varphi$ și $FV(\varphi^*) = FV(\psi^*) = FV(\psi) = FV(\varphi)$.

Forma normală prenex

Teorema de formă normală prenex 2.44

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \vDash\!\dashv \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: (continuare) • $\varphi = \psi \to \chi$ și, conform ipotezei de inducție, există formulele în formă normală prenex

$$\psi^* = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \psi_0, \quad \chi^* = S_1 z_1 \ldots S_m z_m \chi_0$$

a.î. $\psi \vDash\!\dashv \psi^*$, $FV(\psi) = FV(\psi^*)$, $\chi \vDash\!\dashv \chi^*$ și $FV(\chi) = FV(\chi^*)$.
Notăm cu V_0 mulțimea tuturor variabilelor care apar în ψ^* sau χ^*.
Fie $\tilde{\psi^*}$ (resp. $\tilde{\chi^*}$) varianta V_0-liberă a lui ψ^* (resp. χ^*). Atunci

$$\tilde{\psi^*} = Q_1 y_1 \ldots Q_n y_n \tilde{\psi_0}, \quad \tilde{\chi^*} = S_1 w_1 \ldots S_m w_m \tilde{\chi_0},$$

unde $y_1, \ldots, y_n, w_1, \ldots, w_m$ sunt variabile care nu apar în V_0,
$\tilde{\psi_0} = \psi_{0_{x_1,\ldots,x_n}}(y_1, \ldots, y_n)$ și $\tilde{\chi_0} = \chi_{0_{z_1,\ldots,z_m}}(w_1, \ldots, w_m)$.

Teorema de formă normală prenex 2.44

Pentru orice formulă φ există o formulă φ^* în formă normală prenex a.î. $\varphi \vDash\!\!\!\!\dashv \varphi^*$ și $FV(\varphi) = FV(\varphi^*)$.

Dem.: (continuare) Conform Propoziției 2.41, $\tilde{\psi^*} \vDash\!\!\!\!\dashv \psi^*$ și $\tilde{\chi^*} \vDash\!\!\!\!\dashv \chi^*$. De asemenea, $FV(\tilde{\psi^*}) = FV(\psi^*)$ și $FV(\tilde{\chi^*}) = FV(\chi^*)$. Definim

$$\varphi^* := Q_1^c y_1 \ldots Q_n^c y_n S_1 w_1 \ldots S_m w_m (\tilde{\psi}_0 \to \tilde{\chi}_0).$$

Atunci φ^* este în formă normală prenex, $FV(\varphi^*) = FV(\varphi)$ și

$$\begin{aligned} \varphi^* &\vDash\!\!\!\!\dashv \tilde{\psi^*} \to \tilde{\chi^*} \\ &\vDash\!\!\!\!\dashv \psi^* \to \chi^* \\ &\vDash\!\!\!\!\dashv \psi \to \chi = \varphi. \end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x \psi$ și, conform ipotezei de inducție, există o formulă ψ^* în formă normală prenex a.î. $\psi \vDash\!\!\!\!\dashv \psi^*$ și $FV(\psi) = FV(\psi^*)$. Definim $\varphi^* := \forall x \psi^*$. □

Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conține

- două simboluri de relații unare R, S și două simboluri de relații binare P, Q;
- un simbol de funcție unară f și un simbol de funcție binară g;
- două simboluri de constante c, d.

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \exists y (g(y,z) = c) \land \neg \exists x (f(x) = d)$$

Avem

$$\begin{aligned} \varphi &\vDash\!\!\!\!\dashv \exists y \big(g(y,z) = c \land \neg \exists x (f(x) = d)\big) \\ &\vDash\!\!\!\!\dashv \exists y \big(g(y,z) = c \land \forall x \neg (f(x) = d)\big) \\ &\vDash\!\!\!\!\dashv \exists y \forall x \big(g(y,z) = c \land \neg (f(x) = d)\big) \end{aligned}$$

Prin urmare, $\varphi^* = \exists y \forall x \big(g(y,z) = c \land \neg (f(x) = d)\big)$ este o formă normală prenex pentru φ.

Exemplu

Să se găsească o formă normală prenex pentru

$$\varphi := \neg \forall y (S(y) \to \exists z R(z)) \land \forall x (\forall y P(x,y) \to f(x) = d).$$

Avem că

$$\begin{aligned} \varphi &\vDash\!\!\!\!\dashv \exists y \neg (S(y) \to \exists z R(z)) \land \forall x (\forall y P(x,y) \to f(x) = d) \\ &\vDash\!\!\!\!\dashv \exists y \neg \exists z (S(y) \to R(z)) \land \forall x (\forall y P(x,y) \to f(x) = d) \\ &\vDash\!\!\!\!\dashv \exists y \neg \exists z (S(y) \to R(z)) \land \forall x \exists y (P(x,y) \to f(x) = d) \\ &\vDash\!\!\!\!\dashv \exists y \forall z \neg (S(y) \to R(z)) \land \forall x \exists y (P(x,y) \to f(x) = d) \\ &\vDash\!\!\!\!\dashv \exists y \forall z \big(\neg (S(y) \to R(z)) \land \forall x \exists y (P(x,y) \to f(x) = d)\big) \\ &\vDash\!\!\!\!\dashv \exists y \forall z \forall x \big(\neg (S(y) \to R(z)) \land \exists y (P(x,y) \to f(x) = d)\big) \\ &\vDash\!\!\!\!\dashv \exists y \forall z \forall x \big(\neg (S(y) \to R(z)) \land \exists v (P(x,v) \to f(x) = d)\big) \\ &\vDash\!\!\!\!\dashv \exists y \forall z \forall x \exists v \big(\neg (S(y) \to R(z)) \land (P(x,v) \to f(x) = d)\big) \end{aligned}$$

$\varphi^* = \exists y \forall z \forall x \exists v \big(\neg (S(y) \to R(z)) \land (P(x,v) \to f(x) = d)\big)$ este o formă normală prenex pentru φ.