6.04.2021.

CURS 8

Forme biliniare. Forme pătratice. Formă canonică. Teorema Gauss.

Def $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect. Funcția $g: V\times V \to \mathbb{K}$ s.n. formă biliniară $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

1) $g(ax+by, z) = a\,g(x,z) + b\,g(y,z)$

2) $g(x, ay+bz) = a\,g(x,y) + b\,g(x,z)$,

$\forall x,y,z \in V$, $\forall a,b \in \mathbb{K}$.

Not $\left(L(V,V;\mathbb{K}) = \{g: V\times V \to \mathbb{K} \mid g \text{ formă biliniară}\}, +, \cdot\right)/\mathbb{K}$.

Def $g: V\times V \to \mathbb{K}$ s.n. formă simetrică (resp. antisimetrică)

$\Longleftrightarrow$ $g(x,y) = g(y,x)$ (resp. $g(x,y) = -g(y,x)$), $\forall x,y \in V$

$L^s(V,V;\mathbb{K})$, $L^a(V,V;\mathbb{K}) \subset L(V,V;\mathbb{K})$

subsp. vect. ale formelor biliniare simetrice, resp. antisimetrice.

OBS. Dc. $g: V\times V \to \mathbb{K}$ formă simetrică (resp. antisimetrică) și liniară într-un argument, atunci g este formă biliniară.

- g simetrică și

$$\begin{array}{ccc} g(ax+by, z) & \overset{?}{=} & a\,g(x,z) + b\,g(y,z) \\ \parallel & & \parallel \\ g(z, ax+by) & & a\,g(z,x) + b\,g(z,y). \end{array}$$

Scanned with CamScanner

OBS

Matricea asociată unei forme biliniare

Prop Aplicația $g: V \times V \to \mathbb{K}$ este formă biliniară

$\Leftrightarrow$ $\exists\, G \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a.î. $\forall\, R = \{e_1, \dots, e_n\}$ în V, coord. lui x, y în rap. cu reperul R verifică $g(x,y) = X^T G Y = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j$

unde $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $\forall i,j = \overline{1,n}$

Dem

"$\Rightarrow$" Fie $R = \{e_1, \dots, e_n\}$ reper în V

Considerăm $g_{ij} = g(e_i, e_j)$

$$g(x,y) = g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j g(e_i, e_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i y_j = X^T G Y$$

$$= (x_1 \dots x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \vdots & & \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

"$\Leftarrow$" $g: V \times V \to \mathbb{K}$, $g(x,y) = X^T G Y$.

$$g(ax + bz, y) = (aX + bZ)^T G Y = aX^T G Y + bZ^T G Y$$

$$= a\,g(x,y) + b\,g(z,y)$$

$$g(x, ay + bz) = X^T G (aY + bZ) = aX^T G Y + bX^T G Z$$

$$= a\,g(x,y) + b\,g(x,z), \ \forall x, y, z \in V, a, b \in \mathbb{K}$$

OBS a) $g \in L^s(V, V; \mathbb{K}) \Leftrightarrow G = G^T$ $\left(g(e_i, e_j) = g(e_j, e_i), \forall i,j = \overline{1,n} \right)$

b) $g \in L^a(V, V; \mathbb{K}) \Leftrightarrow G = -G^T$

Modificarea matricei la sch. reperului.

Fie $R = \{e_1, .., e_n\} \xrightarrow{C} R' = \{e_1', .., e_n'\}$ repere în V

$$e_i' = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} e_j, \forall i = \overline{1,n}$$

$$g(e_i, e_j) = g_{ij}, \quad g(e_r', e_s') = g'_{rs}.$$

$$\Rightarrow \boxed{G' = C^T G C}$$

OBS a) g formă bilin. simetrică

$$G = G^T \Rightarrow G' = G'^T$$

$$G'^T = (C^T G C)^T = C^T G^T (C^T)^T = C^T G C = G'$$

b) Analog pt g formă biliniară antisimetrică

Def Fie $g \in L^s(V, V; \mathbb{K})$

$$\operatorname{Ker} g = \{ x \in V \mid g(x, y) = 0_{\mathbb{K}}, \forall y \in V \}$$

g s.n. nedegenerată $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_V\}$

OBS Fie $R = \{e_1, .., e_n\}$ reper în V și $x \in \operatorname{Ker} g$

$$\begin{cases} g(x, e_1) = 0 \\ \vdots \\ g(x, e_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_1\right) = 0 \\ \vdots \\ g\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, e_n\right) = 0. \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i g_{i1} = 0 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i g_{in} = 0 \end{cases}$$

$(*)$ SLO cu sol unică nulă $\Leftrightarrow \det G \neq 0 \Leftrightarrow G \in GL(n, \mathbb{K})$

Exemplu $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$.

$\mathcal{R} = \{e_1, e_2, e_3\}$ reperul canonic în $\mathbb{R}^3$

$g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $\forall i,j = \overline{1,3}$.

$g_{11} = g(e_1, e_1) = g((1,0,0), (1,0,0)) = 1$.

$g_{22} = 1$, $g_{33} = 1$, $g_{ij} = 0$, $i \neq j$

$g_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \Rightarrow G = I_3$.

$g(x,y) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i y_j$ $\qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} g \text{ formă biliniară} \\ G = G^T \Rightarrow \text{simetrică} \end{array}\right\} \Rightarrow g \in L^s(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3; \mathbb{R})$

$\det G = 1 \neq 0 \Rightarrow g$ nedegenerată $\Rightarrow \operatorname{Ker} g = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Def Aplicația $Q: V \to \mathbb{K}$ s.n. formă pătratică

$\Leftrightarrow \exists\, g: V^2 \times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară simetrică

aî $Q(x) = g(x,x)$, $\forall x \in V$

Prop Există o corespondență bijectivă între mulțimea formelor pătratice și mulțimea formelor biliniare simetrice, asociate unui sp vect V.

Dem
- Fie $g: V \times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară sim.

Considerăm $Q: V \to \mathbb{K}$, $Q(x) = g(x,x)$, $\forall x \in V$

- Fie $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică

Construim $g: V \times V \to \mathbb{K}$ formă biliniară sim

aî $g(x,x) = Q(x)$, $\forall x \in V$.

$Q(x+y) = g(x+y, x+y) = g(x,x) + g(y,x) + g(x,y) + g(y,y) =$
$= Q(x) + Q(y) + 2g(x,y)$ ($\mathrm{ch}\,\mathbb{K} \neq 2$, $1+1 \neq 0$)

$g(x,y) = 2^{-1}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right), \forall x,y \in V$

g s.n. forma polară asociată formei pătratice Q

Def. $Q : V \to \mathbb{K}$ formă pătratică

$\mathrm{rg}\, Q = \mathrm{rg}\, g = \mathrm{rg}\, G$

(invariant la schimbarea reperului

$G' = C^T G C$, $\mathrm{rg}\, G' = \mathrm{rg}(C^T G C) = \mathrm{rg}\, G$,

$C \in GL(n, \mathbb{K})$) $\mathcal{R} \xrightarrow{C} \mathcal{R}'$

OBS

$Q(x) = g(x,x) = X^T G X = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j$

$= g_{11} x_1^2 + \ldots + g_{nn} x_n^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2 g_{n-1\,n} x_{n-1} x_n$

Def. $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{R}}$ sp. vect real

- $Q : V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală

  Q s.n. pozitiv definită $\Leftrightarrow$ 1) $Q(x) > 0$, $\forall x \in V \setminus \{0_V\}$

  2) $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

- $g : V \times V \to \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică

  s.n. pozitiv definită $\Leftrightarrow$ forma pătratică reală asociată $Q : V \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită.

Exemplu $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$

$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = g(x,x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

forma pătratică asociată 1. $Q(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$

Q, g sunt pozitiv definite 2. $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

Prop Fie $g: V\times V \to \mathbb{R}$ formă biliniară simetrică. Dacă Q este pozitiv definită, atunci g este nedegenerată (i.e. $\operatorname{Ker} g = \{0_V\} \iff G \in GL(n, \mathbb{R})$)

Dem

Fie $x \in \operatorname{Ker} g \Rightarrow g(x,y) = 0, \forall y \in V$

Fie $y = x \Rightarrow \underset{\underset{Q(x)}{\parallel}}{g(x,x)} = 0 \xrightarrow[Q\ p.def]{} x = 0_V \Rightarrow$

$\operatorname{Ker} g = \{0_V\} \Rightarrow g$ nedegenerată.

Problemă Fie $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică. $\exists$ un reper $R = \{e_1, .., e_n\}$ în V a.î. matricea asociată lui Q este diagonală

$$G = \begin{pmatrix} a_1 \ldots & & & O \\ & a_r & 0 \ldots & \\ O & & & 0 \end{pmatrix}, \quad r = rg\, Q = rg\, g \text{ (invariant)}$$

$Q(x) = a_1 x_1^2 + \ldots + a_r x_r^2$ (formă canonică)

Teorema Gauss

Fie $(V, +, \cdot)_{/\mathbb{K}}$ sp. vect, $Q: V \to \mathbb{K}$ formă pătratică.

$\Rightarrow \exists$ un reper $R = \{e_1, .., e_n\}$ în V în raport cu care Q are o formă canonică

Dem

1) Dacă $Q(x) = 0, \forall x \in V$ (f. canonică)

2) Dacă $Q(x) \neq 0$

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ g_{1n} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \text{ matricea în rap. cu un reper.}$$

Putem considera $g_{11} \neq 0$.

- Dacă $g_{11} = 0$

a) $\exists\, i = \overline{2,n}$ a.î. $g_{ii} \neq 0$.

Renum. indicii (schimbare de reper) aî $g_{11} \neq 0$

b) $\forall i = \overline{1,n}$ $g_{ii} = 0$

$Q(x) \neq 0 \Rightarrow G \neq O_n \Rightarrow \exists\, g_{ij} \neq 0,\ i \neq j$

Fie sch. de reper

$$\begin{cases} y_i = x_i + x_j \\ y_j = x_i - x_j \\ y_l = x_l,\ \forall l = \overline{1,n},\ l \neq i,\ l \neq j \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_i = \frac{1}{2}(y_i + y_j) \\ x_j = \frac{1}{2}(y_i - y_j) \end{cases}$$

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} x_i x_j = 2 \sum_{i<j} g_{ij} x_i x_j.$$

$$2 g_{ij} x_i x_j = 2 \cdot \frac{1}{4} g_{ij} (y_i^2 - y_j^2) = \underbrace{\frac{1}{2} g_{ij}}_{\neq 0} y_i^2 - \frac{1}{2} g_{ij} y_j^2$$

Se aplică a).

Deci $g_{11} \neq 0$.

Dem. prin inducție după nr m al coord lui x care apar în Q, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$m = 1$ $Q(x) = g_{11} x_1^2 = a_1 x_1^2$ (f. canonică)

Pp. adev P_{k-1}: Dc Q conține $x_1, \dots, x_{k-1}$, atunci $\exists$ un reper în V aî Q are o f. canonică.

Dem $P_{k-1} \Rightarrow P_k$.

<u>Dacă Q conține $x_1, \dots, x_k$</u> at $\exists$ un reper aî Q are o f. canonică

$$Q(x) = g_{11} x_1^2 + 2 g_{12} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{1k} x_1 x_k + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{apar } x_2, \dots, x_k}}{Q'(x)}$$

$$= \frac{1}{g_{11}} \left(g_{11}^2 x_1^2 + 2 g_{12} g_{11} x_1 x_2 + \dots + 2 g_{1k} g_{11} x_1 x_k \right) + Q'(x)$$

$$= \frac{1}{g_{11}} (\underbrace{g_{11} x_1 + g_{12} x_2 + \dots + g_{1k} x_k}_{y_1})^2 + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{apar } x_2, \dots, x_k.}}{Q''(x)}$$

Fie sch. de repere

$$\begin{cases} y_1 = g_{11} x_1 + \dots + g_{1k} x_k \\ y_i = x_i \ , \ i = \overline{2,n} \end{cases}$$

$$Q(x) = \frac{1}{g_{11}} y_1^2 + Q''(x)$$

$\hookrightarrow$ apar $y_2, \dots, y_k$.

Aplicăm P_{k-1} pt $Q'' \Rightarrow \exists$ un reper în V a.î. Q'' are o f. canonică

$$Q''(x) = a_2 Z_2^2 + \dots + a_r Z_r^2$$

$$Q(x) = \frac{1}{g_{11}} Z_1^2 + a_2 Z_2^2 + \dots + a_r Z_r^2 \ , \ r = rg\, Q$$

$$Z_1 = y_1 \ , \ \frac{1}{g_{11}} = a_1 .$$

$$G = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

<u>Def</u> $Q : V \to \mathbb{R}$ f. pătratică reală.

$Q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_r^2$ formă normală

$(p, r-p)$ s.n. signatură

$p \to$ nr. "+"; $r-p \to$ nr. "−"

<u>Teoremă</u> $Q : V \to \mathbb{R}$ f. pătratică reală

$\Rightarrow \exists$ un reper R în V a.î. Q are formă normală

<u>Dem</u>

cf. T. Gauss $\Rightarrow \exists R$ reper a.î. Q are o formă canonică $Q(x) = a_1 x_1^2 + \dots + a_r x_r^2$, $r = rg\, Q$

Renum. indicii (sch. de reper) a.î.

$a_1, \dots, a_p > 0$, $a_{p+1}, \dots, a_r < 0$

$$Q(x) = (\sqrt{a_1} \cdot x_1)^2 + \dots + (\sqrt{a_p}\, x_p)^2 - (\sqrt{-a_{p+1}}\, x_{p+1})^2 - \dots - (\sqrt{-a_r}\, x_r)^2$$

Sch. de reper:

$$\begin{cases} y_i = \sqrt{a_i}\, x_i, & i = \overline{1,p} \\ y_j = \sqrt{-a_j}\, x_j, & j = \overline{p+1,r} \\ y_k = x_k, & k = \overline{r+1,n} \end{cases} \Rightarrow$$

$$Q(x) = y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_r^2 \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & 0 & & & & -1 & \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(p ori ; $(r-p)$ ori)

Teorema de inerție Sylvester

Fie $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală.

$\Rightarrow$ Nr de „+" din forma normală este un invariant la sch. de reper.

Mai mult, nr „−" este un invariant
signatura — " —

OBS $Q: V \to \mathbb{R}$ formă pătratică reală

Q pozitiv definită $\Leftrightarrow Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$

$\Leftrightarrow (n, 0)$ signatura

Aplicații

① $g: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ formă biliniară, $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ matricea asociată în rap. cu R_0.

a) $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ f. pătratică asociată

b) Să se aducă Q la o formă canonică

Este Q poz. def?

SOL

$G = G^T \Rightarrow \boxed{g \text{ simetrică}}$

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i x_j = \underline{x_1^2} + 2x_2^2 + \underline{2x_1x_2} - 2x_2x_3$$

Aplicăm met. Gauss

$$Q(x) = (x_1+x_2)^2 + \underline{x_2^2} - \underline{2x_2x_3} = (x_1+x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 - x_3^2$$

Fie sch. de reper

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_3 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow Q(x) = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$$

$(2,1) =$ signatura

Q nu e poz. definită

② $g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $g(x,y) = x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_3 y_1 + 2x_1 y_3 = X^T G Y$

a) $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

b) Să se aducă Q la o f. canonică. Este p.def ?

SOL

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G = G^T$$

g formă biliniară sim.

$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = \boxed{2x_1x_2} + 4x_1x_3 = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} x_i x_j$

Fie sch. de reper

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_1 - x_2 \\ y_3 = x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) \\ x_2 = \frac{1}{2}(y_1 - y_2) \\ x_3 = y_3 \end{cases}$$

$$Q(x) = 2 \cdot \frac{1}{4}(y_1^2 - y_2^2) + 4 \cdot \frac{1}{2}(y_1 + y_2) y_3$$

$$= \frac{1}{2} y_1^2 - \frac{1}{2} y_2^2 + 2 y_1 y_3 + 2 y_2 y_3$$

$$= 2\left(\frac{1}{4} y_1^2 + y_3 y_1\right) - \frac{1}{2} y_2^2 + 2 y_2 y_3 =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} y_1 + y_3\right)^2 - \frac{1}{2} y_2^2 + 2 y_2 y_3 - 2 y_3^2$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} y_1 + y_3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4} y_2^2 - y_2 y_3\right) - 2 y_3^2$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} y_1 + y_3\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2} y_2 - y_3\right)^2$$

$$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} y_1 + y_3 \\ z_2 = \frac{1}{2} y_2 - y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases} \qquad Q(x) = 2 z_1^2 - 2 z_2^2$$

$(1,1)$ signatura

Q nu e p. def.

Tema 4 (curs)

① Fie $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfism, $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

$A = [f]_{R_0, R_0}$.

a) Să se arate că A se poate diagonaliza.

b) Precizați reperul în care se poate diagonaliza.

② Fie $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$

a) Să se det. forma polară asociată g
$\ker g = ?$ Este g nedegenerată?

b) Să se aducă Q la o formă canonică.
Este Q pozitiv definită?