Seminar 3

Spații vectoriale. SLi. SLD. SG. Baze

6

fie sp. vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $S = \{(1,m,1), (m,1,1), (1,0,m)\} \subset \mathbb{R}^3$

$m \in \mathbb{R}$

1) $m = ?$ a.î. S este SLi

2) $m = ?$ a.î. S este SLD

3) Dacă $m = 2$, atunci S este bază

Observație: $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ SLi $\Leftrightarrow [a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = 0]$

SLD $\Leftrightarrow \exists\, a_1, a_2, a_3$, nu toți nuli a.î. $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 =$
$= 0$

1) fie $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ a.î. $a_1(1,m,1) + a_2(m,1,1) + a_3(1,0,m) =$

$= (0,0,0) = 0_{\mathbb{R}^3}$

$(a_1 + a_2 m + a_3,\ a_1 m + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3 m) = (0,0,0)$

$$* \begin{cases} a_1 + a_2 m + a_3 = 0 \\ a_1 m + a_2 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 m = 0 \end{cases} \qquad A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & m & 1 & 0 \\ m & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & m & 0 \end{array}\right)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & m & 1 \\ m & 1 & 0 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-m & m & 1 \\ m-1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} =$$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} -1 & m & 1 \\ 0 & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & m \end{vmatrix} = -(m-1)\cdot\begin{vmatrix} m+1 & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix} = (1-m)(m^2+m-1)$$

$\Delta \neq 0 \Rightarrow (1-m)(m^2+m-1) \neq 0 \Rightarrow m \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

2) $*$ are și soluții nenule $\Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow m \in \left\{1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$

3)

$S = \{(1,2,1), (2,1,1), (1,0,2)\}$ (SLI , $\Delta \neq 0$)

Obs:

S este bază $\Leftrightarrow$ 1. S este SLI

2. S este SG ($V = \langle S \rangle$)

$S = SG \Leftrightarrow (\forall)\ x \in \mathbb{R}^3\ (\exists)\ a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ a.î. $x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$

$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$ $\Delta \neq 0 \Rightarrow$ sistemul are soluție

$\Rightarrow \exists\ a_1, a_2, a_3$

Observație:

1. $B_0 = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$ Bază canonică $\Rightarrow B_0$ SG

Dar S este SLi

$\Rightarrow$ (Teorema schimbului) S este SG.

!! 2. $(V, +, \cdot) / \mathbb{K}$ și $\dim_{\mathbb{K}} V = n$

Fie $S = \{x_1 \dots x_n\}$

UAE:
1) S bază
2) S este SLi
3) S este SG

b)

$S' = \{(1, a_1, a_1^2), (1, a_2, a_2^2), (1, a_3, a_3^2)\} \subset \mathbb{R}^3$

$a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$

Ce relație verifică a_1, a_2, a_3 a.î. S' este bază?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{pmatrix}$$

$\det(A) = (a_1 - a_2)(a_2 - a_3)(a_3 - a_1) \neq 0 \Leftrightarrow a_1 \neq a_2,\ a_2 \neq a_3,\ a_3 \neq a_1$

S' bază $\overset{obs}{\Leftrightarrow}$ S' e SLi (card $S' = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$) $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

(SLO are sol. unică nulă)

$\boxed{8}$ Fie $(\mathbb{R}_2[x] = \{P \in \mathbb{R}[x] \mid \text{grad } P \leq 2\}, +, \cdot)/_{\mathbb{R}}$

a) $f = 2x^2 - 3x + 1 \Rightarrow B_1 = \{f, f', f''\}$ bază. Generaliza~~tă~~re
$f = \tilde{P}$ funcția pol. asociată

· sp. vect. de dim 3 $B_0 = \{1, x, x^2\}$ bază canonică

b) $B_2 = \{1, x-1, (x-1)^2\}$ bază. Generalizare

a)

$f' = 4x - 3$

$f'' = 4$

$B_1 = \{2x^2 - 3x + 1, 4x - 3, 4\}$

$\mathbb{R}_2[x] = \mathbb{R}^3$

$B_1' = \{(1, -3, 2), (-3, 4, 0), (4, 0, 0)\}$

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[x] = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$

$\text{card } B_1 = \text{card } B_1' = 3$

B_1 (resp B_1') bază $\Leftrightarrow$ B_1 (resp B_1') SLi

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \det A = 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow B_1'$ SLi $\Leftrightarrow B_1'$ bază $\Rightarrow B_1$ bază b)

Obs: Dezvoltăm în serie Taylor în jurul lui x_0

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)}{1!} + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

fie $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$x_0 = 1 \Rightarrow f(x) = f(1) + f'(1)\cdot\frac{(x-1)}{1!} + f''(1)\cdot\frac{(x-1)^2}{2!}$$

$$f(x) = (a_0 + a_1 + a_2)\cdot 1 + (a_1 + 2a_2)\cdot(x-1) + \frac{\cancel{2}a_2}{\cancel{2}}(x-1)^2 \in \langle B_2 \rangle$$

$\Rightarrow B_2$ sistem de generatori (SG) card $B_2 = 3 = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}_2[x] \overset{Obs}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow B_2$ bază

$\boxed{10}$ Fie $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\alpha = ?$ a.î. B este bază.

$B_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

baza canonică

B bază $\overset{obs}{\Rightarrow}$ B SLi

$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$

$B' = \{(1, 1, 1, -1), (0, 5, -1, -1), (-1, 0, 3, -1),$
$(\alpha, 1, 1, -1)\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det(A) \neq 0$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha \\ 0 & 5 & 1 & 1-\alpha \\ 0 & -1 & 4 & 1-\alpha \\ 0 & -1 & -2 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (1-\alpha) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 =$$

$$= (1-\alpha) \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \iff \alpha \neq 1$$

$\boxed{11}$ $(C(\mathbb{R}, +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $S = \{f_1, f_2, f_3\}$ $\quad f_1(x) = 1 \quad f_2(x) = \sin x$

$f_3(x) = \cos x$

Dem că S este SLi

Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ a.î. $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0 \Rightarrow$

$a \cdot 1 + b \sin x + c \cdot \cos x = 0$

pt $x = 0 \Rightarrow a + c = 0$

pt $x = \pi \Rightarrow a - c = 0$

pt $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a + b = 0$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow a = b = c = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ SLi

b) $S' = \{g_1, g_2, g_3\}$ $g_1(x) = 1$ $g_2(x) = \cos x$

$g_3(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$

$\Rightarrow 1 - \cos 2x - 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow 1 - \cos x - 2\sin^2 \frac{x}{2} = 0$

$x \to \frac{x}{2}$

c) $S'' = \{h_1, h_2, h_3\}$ $h_1(x) = e^x$, $h_2(x) = e^{-x}$

$h_3(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow h_3(x) = \frac{h_1(x) + h_2(x)}{2}$

$\Rightarrow h_1(x) + h_2(x) - 2h_3(x) = 0$

$\boxed{9}$ Fie $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $B = \{(1,2), (3,4)\}$ bază

$B_0 = \{e_1, e_2\}$ baza canonică

$|B| = |B_0| = 2 \overset{Obs}{\Rightarrow} B$ e bază $\Leftrightarrow B$ SLi

B SLi $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0$

b) $S = B \cup \{(4,2)\}$ S este SLD și SG

SG B e bază $\Rightarrow$ B SG $\Rightarrow$ $B \cup \{(4,2)\}$ e SG

SLD : 2 este nr max de vec care formează SLi

$|S| = 3$
$\Rightarrow$ S nu e SLi ci SLD

c) $S' = \{(1,4)\}$ este SLi, nu e SG

$(1,4) \neq 0_{\mathbb{R}_2}$ $\Rightarrow$ S' este SLi

2 este nr minim de vec care formează un SG ($|S'| = 1$) $\Rightarrow$ S' nu e SG

Extindeți S' la o bază

$(1,1)$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad$ $S' \cup \{(1,1)\}$ e SLi (din a)

$\Rightarrow$ $S' \cup \{(1,1)\}$ bază

d) $S''' = \{(1,-1), (2,3), (3,2), (1,4)\}$ Să se extragă o bază

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$ $\quad$ $\{(1,-1), (2,3)\}$ e SLi $\overset{obs}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow$ $\{(1,-1), (2,3)\}$ e bază $\Rightarrow$ SG și restul

$\Rightarrow$ supramulțime e SG $\Rightarrow$ SG