# CURSUL 3: RELAŢII DE ECHIVALENŢĂ. PARTIŢII. MULŢIMI FACTOR

SAI

## 1. CLASE IMPORTANTE DE RELAŢII

În tot acest curs $\rho$ va desemna o relaţie pe mulţimea $A$, adică $\rho \subseteq A \times A$. De asemenea, în loc de $(a, b) \in \rho$ vom scrie $a\rho b$, iar dacă $(a, b) \notin \rho$ vom scrie $a \not\rho\, b$.

**Definiţia 1.** Spunem că $\rho$ este **reflexivă** dacă $\forall a \in A \;\; a\rho a$.

**Observaţia 2.** Relaţia $\rho$ este reflexivă dacă şi numai dacă $\rho \supseteq \Delta_A$.

**Definiţia 3.** Spunem că $\rho$ este **ireflexivă** dacă $\forall a \in A \;\; a\not\rho a$.

**Observaţia 4.** Relaţia $\rho$ este ireflexivă dacă şi numai dacă $\rho \cap \Delta_A = \emptyset$.

**Definiţia 5.** Spunem că $\rho$ este **simetrică** dacă $\forall a, b \in A \;\; a\rho b \Rightarrow b\rho a$.

**Propoziţia 6.** Dată fiind o relaţie $\rho$ pe o mulţime $A$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) $\rho$ este simetrică.
(ii) $\rho^{-1} \subseteq \rho$.
(iii) $\rho^{-1} = \rho$.

**Definiţia 7.** Spunem că $\rho$ este **antisimetrică** dacă

$$\forall a, b \in A \;\; a\rho b \wedge b\rho a \Rightarrow a = b.$$

**Observaţia 8.** Relaţia $\rho$ este antisimetrică dacă şi numai dacă

$$\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A.$$

**Definiţia 9.** Spunem că $\rho$ este **tranzitivă** dacă

$$\forall a, b, c \in A \;\; a\rho b \wedge b\rho c \Rightarrow a\rho c.$$

**Observaţia 10.** Relaţia $\rho$ este tranzitivă dacă şi numai dacă

$$\rho^2 \subseteq \rho.$$

**Definiţia 11.** Spunem că $\rho$ este **totală** dacă $\rho \cup \rho^{-1} = A \times A$.

**Observaţia 12.** Relaţia $A \times A$ este reflexivă, simetrică, tranzitivă şi totală.

**Propoziţia 13.** Relaţia $\rho$ este reflexivă (respectiv ireflexivă, simetrică, antisimetrică, tranzitivă, totală) dacă şi numai dacă $\rho^{-1}$ este reflexivă (respectiv ireflexivă, simetrică, antisimetrică, tranzitivă, totală).

**Propoziţia 14.** Dată fiind o mulţime nevidă $\mathcal{M}$ de relaţii pe mulţimea $A$, $\bigcap_{\rho \in \mathcal{M}} \rho$ este o relaţie pe $A$. Dacă toate relaţiile din $\mathcal{M}$ sunt reflexive (respectiv ireflexive, simetrice, antisimetrice, tranzitive) atunci $\bigcap_{\rho \in \mathcal{M}} \rho$ este reflexivă (respectiv ireflexivă[1], simetrică, antisimetrică, tranzitivă).

**Observaţia 15.** Dacă relaţia $\rho$ este ireflexivă şi dacă $\sigma \subseteq \rho$, atunci şi $\sigma$ este ireflexivă.

## 2. Închideri ale relaţiilor

În lipsa vreunei menţiuni contrare, în acest capitol $\rho$ va desemna o relaţie pe o mulţime nevidă $A$. Cu $\mathcal{R}(A)$ notăm mulţimea tuturor relaţiilor pe $A$, adică mulţimea $\mathcal{P}(A \times A)$.

**Propoziţia 16.** Dată fiind o relaţie $\rho$ pe mulţimea $A$, există o relaţie $\sigma$ pe mulţimea $A$ cu proprietăţile:
(i) $\rho \subseteq \sigma$
(ii) $\sigma$ este reflexivă.
(iii) Dacă pentru o altă relaţie reflexivă $\tau \in \mathcal{R}(A)$ avem $\rho \subseteq \tau$, atunci[2] $\sigma \subseteq \tau$.
În plus, $\sigma$ cu aceste proprietăţi este unic determinată.

*Demonstraţie:* Pentru partea de existenţă, definim $\sigma = \rho \cup \Delta_A$.
Evident, $\rho \subseteq \sigma$ şi $\sigma$ este reflexivă.
Dacă $\tau \in \mathcal{R}(A)$ este reflexivă (adică, conţine $\Delta_A$) şi conţine $\rho$, atunci $\tau$ va conţine şi $\Delta_A \cup \rho = \sigma$.
Pentru demonstrarea unicităţii lui $\sigma$, să considerăm $\sigma_1$ şi $\sigma_2$ cu proprietăţile din enunţ. Atunci, conform (iii), $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ şi $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$, de unde $\sigma_1 = \sigma_2$. □

**Definiţia 17.** Relaţia a cărei existenţă este asigurată de propoziţia 16 se numeşte **închiderea reflexivă** a lui $\rho$.

[1] În cazul ireflexivităţii, deşi afirmaţia prezentei propoziţii este adevărată, ea nu dă foare multă informaţie. În această situaţie, informaţie mai relevantă ne oferă observaţia 15.

[2] În limbajul pe care îl vom introduce la relaţii de ordine, aceste condiţii spun că „$\sigma$ este o relaţie reflexivă minimală care conţine $\rho$”.

**Vom nota** închiderea reflexivă a lui $\rho$ cu $R(\rho)$.

**Corollary 18.** $R(\rho) = \rho \cup \Delta_A$.

**Propoziţia 19.**

$$R(\rho) = \bigcap_{\rho \subseteq \tau \in \mathcal{R}(A);\ \tau \textit{ e reflexivă}} \tau.$$

**Propoziţia 20.** Dată fiind o relaţie $\rho$ pe mulţimea $A$, există o relaţie $\sigma$ pe mulţimea $A$ cu proprietăţile:
(i) $\rho \subseteq \sigma$
(ii) $\sigma$ este simetrică.
(iii) Dacă pentru o altă relaţie simetrică $\tau \in \mathcal{R}(A)$ avem $\rho \subseteq \tau$, atunci $\sigma \subseteq \tau$.
În plus, $\sigma$ cu aceste proprietăţi este unic determinată.

*Demonstraţie:* Pentru partea de existenţă, definim $\sigma = \rho \cup \rho^{-1}$.
Evident, $\rho \subseteq \sigma$ şi $\sigma$ este simetrică.
Dacă $\tau \in \mathcal{R}(A)$ este simetrică (deci $\tau = \tau^{-1}$) şi conţine $\rho$, atunci $\tau$ va conţine şi $\rho^{-1}$, de unde $\tau \supset \sigma$.
Pentru demonstrarea unicităţii lui $\sigma$, să considerăm $\sigma_1$ şi $\sigma_2$ cu proprietăţile din enunţ. Atunci, conform (iii), $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ şi $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$, de unde $\sigma_1 = \sigma_2$. $\square$

**Definiţia 21.** Relaţia a cărei existenţă este asigurată de propoziţia 16 se numeşte **închiderea simetrică** a lui $\rho$.

**Vom nota** închiderea reflexivă a lui $\rho$ cu $S(\rho)$.

**Corollary 22.** $S(\rho) = \rho \cup \rho^{-1}$.

**Propoziţia 23.**

$$S(\rho) = \bigcap_{\rho \subseteq \tau \in \mathcal{R}(A);\ \tau \textit{ e simetrică}} \tau.$$

**Propoziţia 24.** Dată fiind o relaţie $\rho$ pe mulţimea $A$, există o relaţie $\sigma$ pe mulţimea $A$ cu proprietăţile:
(i) $\rho \subseteq \sigma$
(ii) $\sigma$ este tranzitivă.
(iii) Dacă pentru o altă relaţie tranzitivă $\tau \in \mathcal{R}(A)$ avem $\rho \subseteq \tau$, atunci $\sigma \subseteq \tau$.
În plus, $\sigma$ cu aceste proprietăţi este unic determinată.

*Demonstraţie:* Pentru partea de existenţă, definim $\sigma = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \rho^n$.
Evident, $\rho \subseteq \sigma$ şi $\sigma$ este tranzitivă.
Dacă $\tau \in \mathcal{R}(A)$ este tranzitivă (deci $\tau^2 \subseteq \tau$) şi conţine $\rho$, atunci $\tau$ va

conţine şi $\rho^2$. Inductiv, obţinem $\tau \supset \rho^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, de unde $\tau \supset \sigma$.

Pentru demonstrarea unicităţii lui $\sigma$, să considerăm $\sigma_1$ şi $\sigma_2$ cu proprietăţile din enunţ. Atunci, conform (iii), $\sigma_1 \subseteq \sigma_2$ şi $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$, de unde $\sigma_1 = \sigma_2$. $\square$

**Definiţia 25.** Relaţia a cărei existenţă este asigurată de propoziţia 16 se numeşte **închiderea tranzitivă** a lui $\rho$.

**Vom nota** închiderea reflexivă a lui $\rho$ cu $T(\rho)$.

**Corollary 26.** $T(\rho) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \rho^n$.

**Propoziţia 27.**

$$T(\rho) = \bigcap_{\rho \subseteq \tau \in \mathcal{R}(A);\ \tau \text{ e tranzitivă}} \tau.$$

**Propoziţia 28.** Fie $\rho$ o relaţie pe mulţimea $A$. Atunci:
(i) $R(S(\rho)) = S(R(\rho))$.
(ii) $R(T(\rho)) = T(R(\rho))$.
(iii) $S(T(\rho)) \subseteq T(S(\rho))$.

*Demonstraţie:* (i): $R(S(\rho)) = R(\rho \cup \rho^{-1}) = \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta_A = \rho \cup \Delta_A \cup \rho^{-1} \cup \Delta_A = (\rho \cup \Delta_A) \cup (\rho \cup \Delta_A)^{-1} = S(\rho \cup \Delta_A) = S(R(\rho))$.

(ii): Inductiv, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} (\rho \cup \Delta_A)^k = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \rho^k \cup \Delta_A$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Prin urmare, $R(T(\rho)) = (\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \rho^n) \cup \Delta_A = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (\rho^n \cup \Delta_A) = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (\rho \cup \Delta_A)^n = T(R(\rho))$.

(iii): Fie $(a, b) \in S(T(\rho)) = \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \rho^n\right) \cup \left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \rho^n\right)^{-1}$. Atunci există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $c_0 = a, c_1, \ldots, c_n = b$ astfel încât $(c_{i-1}, c_i) \in \rho$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ sau există $n \in \mathbb{N}^*$ şi $d_0 = b, d_1, \ldots, d_n = a$ astfel încât $(d_{i-1}, d_i) \in \rho$ pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Este însă clar că în oricare din aceste variante avem $(a, b) \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (\rho \cup \rho^{-1})^n = T(S(\rho))$. $\square$

**Observaţia 29.** Nu putem afirma că are loc relaţia $S(T(\rho)) = T(S(\rho))$: Dacă, de exemplu, definim pe $\{1, 2\}$ relaţia $\{(1, 2)\}$, constatăm că $(1, 1) \in T(S(\rho)) \setminus S(T(\rho))$.

## 3. Relaţii de echivalenţă. Mulţimi factor

**Definiţia 30.** Fie $\rho$ o relaţie pe mulţimea nevidă $A$. $\rho$ se numeşte **relaţie de echivalenţă** dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.

**Propoziţia 31.** Dată fiind o mulţime $\mathcal{M}$ de relaţii de echivalenţă pe mulţimea $A$, intersecţia lor este relaţie de echivalenţă pe $A$.

*Demonstraţie:* Afirmaţia este o consecinţă imediată a propoziţiei 14. □

**Definiţia 32.** Dată fiind o relaţie $\rho$ pe mulţimea $A$, intersecţia tuturor relaţiilor de echivalenţă pe $A$ care conţin $\rho$ se numeşte **relaţia de echivalenţă generată de** $\rho$.

**Observaţia 33.** Relaţia de echivalenţă generată de $\rho$ este cea mai mică (în sensul incluziunii) relaţie de echivalenţă pe $A$ care conţine $\rho$.

**Propoziţia 34.** Relaţia de echivalenţă generată de $\rho$ este egală cu $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}^*}(\rho\cup\rho^{-1}\cup\Delta_A)^n$.

*Demonstraţie:* Notăm cu $\sigma$ relaţia din enunţ. Întrucât $\sigma = T(R(S(\rho)))$, ea este tranzitivă. Cum $\Delta_A \subseteq \sigma$, $\sigma$ este reflexivă. Definiţia lui $\sigma$ arată clar şi simetria acesteia. Deci, $\sigma$ este relaţie de echivalenţă. Evident, $\rho \subseteq \sigma$. Dacă considerăm o relaţie de echivalenţă $\tau$ pe $A$ cu $\rho \subseteq \tau$, atunci $\tau$, fiind reflexivă şi simetrică, conţine $R(S(\rho)) = \rho\cup\rho^{-1}\cup\Delta$. Cum însă $\tau$ este şi tranzitivă, ea trebuie să conţină şi închiderea tranzitivă a acesteia, adică pe $\sigma$. □

**Definiţia 35.** Fie $\rho$ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea nevidă $A$ şi $a \in A$. Prin **clasa de echivalenţă a lui** $a$ **în raport cu** $\rho$ înţelegem mulţimea $\{b \in A : b\,\rho\,a\}$.

**Vom nota** clasa de echivalenţă a lui $a$ în raport cu $\rho$ prin $\dfrac{a}{\rho}$ sau $\hat{a}$. Vor exista de asemenea situaţii în care în locul acestor notaţii se vor folosi unele adaptate contextului.

**Propoziţia 36.** Dacă $\rho$ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $A$, iar $a, b \in A$, atunci $\hat{a} = \hat{b}$ sau $\hat{a}\cap\hat{b} = \emptyset$.

*Demonstraţie:* Dacă $a\rho b$, atunci $c \in \hat{a} \Leftrightarrow c\rho a \overset{b\rho a}{\Leftrightarrow} c\rho b \Leftrightarrow c \in \hat{b}$. Prin urmare, $\hat{a} = \hat{b}$.
Dacă $a \not\rho b$, să presupunem că există $c \in \hat{a}\cap\hat{b}$. Atunci $a\rho c$ şi $c\rho b$, de unde $a\rho b$, contradicţie. Rămâne deci că $\hat{a}\cap\hat{b} = \emptyset$. □

**Definiţia 37.** Numim **partiţie** a mulţimii nevide $A$ orice mulţime $\mathcal{M}$ de submulţimi nevide ale lui $A$ cu proprietăţile:
1. $A = \bigcup\limits_{B\in\mathcal{M}} B$.
2. Pentru orice $B, C \in \mathcal{M}$ cu $B \neq C$ avem $B\cap C = \emptyset$.

**Observaţia 38.** Propoziţia 36 se reformulează cu ajutorul noţiunii de partiţie astfel: „Mulţimea claselor de echivalenţă determinate de o relaţie de echivalenţă pe o mulţime $A$ constituie o partiţie a lui $A$”.

**Definiţia 39.** Fie $\rho$ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $A$. Notăm $\frac{A}{\rho}$ şi numim **mulţimea factor (cât)** a lui $A$ în raport cu $\rho$ mulţimea tuturor claselor de echivalenţă ale elementelor lui $A$ în raport cu $\rho$.

**Observaţia 40.** Fie $\rho$ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $A$. Funcţia $\pi : A \to \frac{A}{\rho}$, $\pi(a) = \hat{a}$ este surjectivă.

**Definiţia 41.** Fie $\rho$ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $A$. Funcţia din observaţia 40 numeşte **surjecţia canonică** (sau **proiecţia canonică**) **a mulţimii factor** $\frac{A}{\rho}$.

**Definiţia 42.** Fie $\rho$ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $A$. O submulţime $\mathcal{S}$ a lui $A$ se numeşte **sistem complet şi independent de reprezentanţi (pentru elementele mulţimii** $A$**) relativ la relaţia** $\rho$ dacă îndeplineşte condiţiile:
1. Pentru orice două elemente distincte $s, t \in \mathcal{S}$ avem $s \not\rho t$.
2. Orice element al lui $A$ este echivalent cu un element al lui $\mathcal{S}$.

**Observaţia 43.** În cuvinte, dată fiind o relaţie de echivalenţă pe o mulţime $A$, un sistem complet şi independent de reprezentanţi relativ la $\rho$ este o submulţime a lui $A$ alcătuită cu câte exact un element din fiecare clasă de echivalenţă.

**Observaţia 44.** Dacă $\rho$ este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $A$ iar $\mathcal{S}$ este un sistem complet şi independent de reprezentanţi relativ la $\rho$, atunci funcţia $f : \mathcal{S} \to \frac{A}{\rho}$, $f(s) = \hat{s}$ este bijectivă.

### 3.1. **Exemple importante de relaţii de echivalenţă.**

#### 3.1.1. *Egalitatea.*

**Exemplul 45.** Dată fiind o mulţime nevidă, relaţia de egalitate pe aceasta este o relaţie de echivalenţă.

**Observaţia 46.** Unicul sistem complet şi independent de reprezentanţi pentru relaţia de egalitate pe mulţimea $A$ este chiar $A$.

3.1.2. *Congruenţa modulo $n$.* Fie $n \in \mathbb{Z}$. Considerăm pe mulţimea $\mathbb{Z}$ relaţia $\rho_n$ dată astfel: $a\rho_n b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} n | b - a$.

**Definiţia 47.** Relaţia $\rho_n$ se numeşte relaţia de **congruenţă modulo** $n$.

**Observaţia 48.** Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ avem $\rho_{-n} = \rho_n$.

**Notaţie:** În mod tradiţional faptul că numerele întregi $a$ şi $b$ sunt congruente modulo $n$ se notează $a \equiv b \pmod{n}$. Începând din momentul de faţă vom folosi şi noi această notaţie, renunţând la provizoriul $\rho_n$.

**Propoziţia 49.** Pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ relaţia de congruenţă modulo $n$ este o relaţie de echivalenţă.

*Demonstraţie:* Fie $n, a, b, c \in \mathbb{Z}$.
Evident, $n|0 = a-a$, de unde $a \equiv a \pmod{n}$, deci relaţia de congruenţă modulo $n$ este reflexivă.
Dacă $a \equiv b \pmod{n}$, atunci $n|b-a$, de unde $n|-(b-a) = a-b$, deci $b \equiv a \pmod{n}$. Prin urmare, relaţia în discuţie este simetrică.
Dacă $a \equiv b \pmod{n}$ şi $b \equiv c \pmod{n}$, atunci $n|b-a$ şi $n|c-b$. De aici, $n|(b-a)+(c-b) = c-a$, deci $a \equiv c \pmod{n}$. Prin urmare, relaţia de congruenţă modulo $n$ este tranzitivă. $\square$

**Observaţia 50.** Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:
a) Clasa de congruenţă modulo $n$ a elementului $a \in \mathbb{Z}$ este $a + n\mathbb{Z}$ (ea constă în elementele care dau acelaşi rest ca şi $a$ la împărţirea prin $n$).
b) $\dfrac{\mathbb{Z}}{\equiv \pmod{n}} = \{\widehat{0}, \widehat{1}, \ldots, \widehat{n-1}\} = \{n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, \ldots, n\mathbb{Z}+n-1\}$.
c) Sistemul complet şi independent de reprezentanţi cel mai frecvent folosit în context este $\{0, 1, \ldots, n-1\}$; el este alcătuit din resturile ce se pot obţine împărţind numerele întregi la $n$.

**Observaţia 51.** Congruenţa modulo 0 este de fapt egalitatea pe $\mathbb{Z}$. Prin urmare, conform observaţiilor 44 şi 46, $\dfrac{\mathbb{Z}}{\equiv \pmod{0}}$ este în bijecţie cu $\mathbb{Z}$.

**Definiţia 52.** Mulţimea factor a lui $\mathbb{Z}$ în raport cu congruenţa modulo $n$ se numeşte **mulţimea claselor de resturi modulo** $n$.

**Vom folosi notaţia**[3] $\mathbb{Z}_n$ pentru a desemna mulţimea claselor de resturi modulo $n$.

---

[3] În teoria numerelor, această notaţie este rezervată mulţimii întregilor $n$-adici (în situaţia în care $n$ este număr prim). În acel context, inelul claselor de resturi modulo $n$ se notează $\dfrac{\mathbb{Z}}{n\mathbb{Z}}$ sau $\dfrac{\mathbb{Z}}{(n)}$. Noi nu ne vom întâlni cu această situaţie la cursul de Algebră, deci notaţia este neechivocă.

3.1.3. *Relaţia de echivalenţă asociată unei partiţii.* Fie $\mathcal{P}$ o partiţie a mulţimii nevide $A$. Definim pe $A$ relaţia

$$a \sim_{\mathcal{P}} b \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists B \in \mathcal{P} \quad a, b \in B.$$

**Propoziţia 53.** Relaţia $\sim_{\mathcal{P}}$ este de echivalenţă pe $A$.

**Temă:** Demonstraţi propoziţia 53!

**Definiţia 54.** Relaţia $\sim_{\mathcal{P}}$ se numeşte **relaţia de echivalenţă asociată partiţiei** $\mathcal{P}$.

**Propoziţia 55.** Dată fiind o mulţime nevidă $A$, mulţimea relaţiilor de echivalenţă pe $A$ şi mulţimea partiţiilor lui $A$ sunt în corespondenţă bijectivă.

*Demonstraţie:* Considerăm funcţia $\Phi$ care asociază fiecărei relaţii de echivalenţă pe $A$ partiţia lui $A$ în clasele de echivalenţă relative la relaţia respectivă. Considerăm de asemenea funcţia $\Psi$ care asociază fiecărei partiţii $\mathcal{P}$ a lui $A$ relaţia $\sim_{\mathcal{P}}$. Atunci $\Phi$ şi $\Psi$ sunt inverse una celeilalte (lăsăm detaliile în seama cititorului). $\square$

3.1.4. *Relaţia de echivalenţă asociată unei funcţii.* Considerăm mulţimile nevide $A$ şi $B$ şi funcţia $f : A \to B$. Definim în acest context relaţia

$$a_1 \rho_f a_2 \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} f(a_1) = f(a_2).$$

**Propoziţia 56.** Relaţia $\rho_f$ este de echivalenţă.

**Temă:** Demonstraţi propoziţia 56!

Relaţia $\rho_f$ ne permite să prezentăm un rezultat foarte util pentru definirea de funcţii pe mulţimi factor:

**Teorema 57. (Proprietatea de universalitate a mulţimii factor)** Fie $\rho$ o relaţie de echivalenţă pe mulţimea $A$, $\pi : A \to \dfrac{A}{\rho}$ surjecţia canonică, $f : A \to B$ o funcţie şi $\rho_f$ relaţia de echivalenţă asociată acesteia.
i) Dacă $\rho \subseteq \rho_f$, atunci există $u : \dfrac{A}{\rho} \to B$ astfel încât $u \circ \pi = f$.
ii) $u$ este injectivă dacă şi numai dacă $\rho = \rho_f$.
iii) $u$ este surjectivă dacă şi numai dacă $f$ este surjectivă.

## Bibliografie

[1] T. Dumitrescu, *Algebra*, Ed. Universităţii din Bucureşti, 2006.
[2] P. Halmos, *Naive set theory*, Springer Verlag, 1960.
[3] C. Năstăsescu, C. Niţă, C. Vraciu, *Bazele algebrei*, Ed. Academiei, Bucureşti, 1986.
[4] C. Năstăsescu, *Introducere în teoria mulţimilor*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1974.