Examen la algebră [1]
an I, sem. I
3.02.2022

Numele şi prenumele ..PĂTRÂNJEL DAVID-GEORGE..

Grupa ..151..

Γ = numărul de litere al primului nume = ..9..

Ω = numărul de litere al primului prenume = ..5..

Subiectul I. Pe mulţimea $\mathbb{Z}$ definim relaţia binară

$$x \sim y \Longleftrightarrow 2 \mid x + y.$$

1. Să se arate că "$\sim$" este o relaţie de echivalenţă pe $\mathbb{Z}$. **(3 pct.)**
2. Daţi exemplu de 5 numere întregi care se găsesc în relaţia $\sim$ cu Γ şi determinaţi clasa de echivalenţă a lui Ω în raport cu $\sim$. **(4 pct.)**
3. Arătaţi că mulţimea factor $\mathbb{Z}/\sim$ admite o structură de grup şi că aceasta este unică până la un izomorfism (de grupuri). **(2 pct.)**

Subiectul II.

1. Calculaţi ordinul elementului $(\overline{17}, \widehat{7})$ din grupul $(\mathbb{Z}_{\Gamma-2} \times \mathbb{Z}_{\Omega+14}, +)$. **(3 pct.)**
2. Conţine grupul factor $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ elemente de ordin infinit? Este $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, +)$ un grup ciclic? **(4 pct.)**
3. Fie Λ cel mai mic element al mulţimii

$$\{x \in \mathbb{N} \mid \Omega \leq x \leq \Gamma + 32 \ \text{ şi } \ x \mid \Gamma + 32\}.$$

Daţi exemplu de o relaţie de echivalenţă $\sim$ pe $\mathbb{Z}_{\Gamma+32}$ astfel încât mulţimea factor $\mathbb{Z}_{\Gamma+32}/_\sim$ să fie un grup cu Λ elemente în raport cu operaţia indusă de operaţia de adunare de pe $\mathbb{Z}_{\Gamma+32}$. **(2 pct.)**

---

[1] **Toate subiectele sunt obligatorii.**
La fiecare subiect, înlocuiţi Γ şi Ω cu valorile specificate mai sus! (Exemplu: dacă numele este Vasilescu Ştefan Alexandru consideraţi peste tot $\Gamma = 9$ şi $\Omega = 6$.)
Toate răspunsurile trebuie justificate. Fiecare subiect trebuie scris pe foi separate.
Timp de lucru $2\frac{1}{2}$ ore. Succes!

Subiectul III. Se consideră permutarea

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 10 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_{10}.$$

1. Descompuneţi σ în produs de cicluri disjuncte şi în produs de transpoziţii. **(4 pct.)**
2. Aflaţi signatura lui σ şi calculaţi $\sigma^{2022+\Gamma}$. **(3 pct.)**
3. Există permutări $\tau \in S_{10}$ cu proprietatea că

$$\tau^{\Omega} \circ \sigma \circ \tau^{-\Omega} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}^{\Gamma}?$$

(2 pct.)

Subiectul IV. Fie $I = (X - \Gamma, \Omega)$ idealul din $\mathbb{Z}[X]$ generat de $X - \Gamma$ şi Ω.

1. Să se dea exemplu de polinom din I şi de un polinom din $\mathbb{Z}[X]$ care nu este în I. Justificaţi. **(2 pct.)**
2. Să se verifice dacă $(X - \Gamma + \Omega - 1) \subseteq I$. Justificaţi. **(2 pct.)**
3. Să se arate că $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_\Omega$ definit prin $\varphi(f) = \widehat{f(\Gamma)}$, $f \in \mathbb{Z}[X]$, este un morfism surjectiv de inele unitare. Calculaţi $\mathrm{Ker}(\varphi)$ şi aplicaţi teorema fundamentală de izomorfism pentru inele lui φ. **(3 pct.)**
4. Determinaţi numărul divizorilor lui zero, al elementelor inversabile, al elementelor nilpotente şi respectiv al elementelor idempotente din inelul $A = \frac{\mathbb{Z}[X]}{(X-\Gamma,\Omega)}$. **(2 pct.)**

Examen - Sisteme algebrice în informatică

Pătrănjel David George
grupa 151

Subiectul I

Pe $\mathbb{Z}$ definim "$\sim$" : $x \sim y \overset{def}{\underset{\sim}{\Longleftrightarrow}} 2 \mid x+y$.

1. $2 \mid 2x \Leftrightarrow 2 \mid x+x \overset{def}{\underset{\sim}{\Longleftrightarrow}} x \sim x \Rightarrow$ "$\sim$" reflexivă (1)

fie $x, y \in \mathbb{Z}$, $x \sim y \overset{def}{\underset{\sim}{\Longleftrightarrow}} 2 \mid x+y \Leftrightarrow 2 \mid y+x \overset{def}{\underset{\sim}{\Longleftrightarrow}} y \sim x \Rightarrow$ "$\sim$" simetrică (2)

fie $x, y, z \in \mathbb{Z}$, $x \sim y \land y \sim z \overset{def}{\underset{\sim}{\Longleftrightarrow}} \begin{cases} 2 \mid x+y \\ 2 \mid y+z \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 \mid x+z+2y \\ 2 \mid 2y \end{array} \right| \Rightarrow 2 \mid x+z \overset{def}{\underset{\sim}{\Longleftrightarrow}} x \sim z \Rightarrow$

$\Rightarrow$ "$\sim$" tranzitivă (3)

(1), (2), (3) $\Rightarrow$ "$\sim$" relație de echivalență pe $\mathbb{Z}$

2. $x \sim y \overset{def}{\underset{\sim}{\Longleftrightarrow}} 2 \mid x+y$, $x \in \mathbb{Z}$.

x poate fi un număr întreg din mulțimea $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

$\hat{5} = \{y \in \mathbb{Z} \mid 5 \sim y\} = \{y \in \mathbb{Z} \mid 2 \mid 5+y\} = 2\mathbb{Z}+1$

3. Observăm că $x \sim y \overset{def}{\underset{\sim}{\Longleftrightarrow}} x \equiv y$ (modulo 2).

$\mathbb{Z}/_{\sim} = \{\hat{0}, \hat{1}\}$.

$\mathbb{Z}/_{\sim}$ este ciclic și finit $\Rightarrow \mathbb{Z}/_{\sim} \simeq \mathbb{Z}_2$ structură unică

Subiectul III

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 9 & 1 & 10 & 6 & 8 & 4 & 3 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

1. $\sigma = (1\ 9\ 2)(3\ 10\ 5\ 8\ 7)(4\ 6)$ produs de cicluri disjuncte

$\sigma = (1\ 9)(9\ 2)(3\ 10)(10\ 5)(5\ 8)(8\ 7)(4\ 6)$ produs de transpoziții

2. $\varepsilon(\sigma) = (-1)^7 = -1 \Rightarrow \sigma$ permutare impară

$O(\sigma) = [3, 5, 2] = 30 \Rightarrow \sigma^{30} = e$

$\sigma^{2022+9} = \sigma^{2031} = (\sigma^{30})^{67} \cdot \sigma^{21} = \sigma^{21} = (1\ 9\ 2)^{21} \cdot (3\ 10\ 5\ 8\ 7)^{21} \cdot (4\ 6)^{21} =$

$= e \cdot (3\ 10\ 5\ 8\ 7)(4\ 6) = (3\ 10\ 5\ 8\ 7)(4\ 6)$

3. $\varepsilon(\sigma) = -1$

$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\varepsilon(\tau^5) \cdot \varepsilon(\tau^{-5}) = 1\end{array}\right| \Rightarrow \varepsilon(\tau^5 \cdot \sigma \cdot \tau^{-5}) = -1 \\ \varepsilon((1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10))^9 = -1 \end{array}\right| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ există permutari $\tau \in S_{10}$ cu proprietatea dată

Subiectul II

1. $o((\overline{17},\hat{7}))$ din $(\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_{19}, +)$

$(\overline{17},\hat{7}) \equiv (\overline{3},\hat{7})$ (mod 7, mod 19)

$o((\overline{3},\hat{7})) = k \Rightarrow (\overline{3k},\hat{7k}) = (\overline{0},\hat{0}) \Rightarrow k|7$ și $k|19 \Rightarrow k = 133$

2. $\frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}} = \{a+\mathbb{Z} \mid a \in \mathbb{Q}\}$

putem scrie $\hat{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}+\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, $(a,b)=1$.

$\forall k \in \mathbb{Z}$, $\hat{k} = \mathbb{Z}$, $\hat{0} = \mathbb{Z}$.

căutăm cel mai mic număr natural k pentru care $\frac{a}{b} \cdot k \in \mathbb{Z}$.

$(a,b)=1 \Rightarrow k=b \Rightarrow ord(\hat{\frac{a}{b}}) = b \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \nexists\, \hat{x} \in \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ a.î. $ord(\hat{x}) = \infty$.

Un subgrup generat de 2 elemente este de forma $\langle \hat{\frac{a}{b}}, \hat{\frac{c}{d}} \rangle =$

$= \{ \widehat{\frac{adx+bcy}{bd}} \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$.

Se observă că elementele mulțimii sunt de forma $k \cdot \frac{\widehat{cmmdc(a,c)}}{cmmmc(b,d)}$, $k \in \mathbb{Z}$

deci $\langle \hat{\frac{a}{b}}, \hat{\frac{c}{d}} \rangle = \langle \frac{\widehat{cmmdc(a,c)}}{cmmmc(b,d)} \rangle$

inductiv obținem $\langle \hat{\frac{a_1}{b_1}}, \dots, \hat{\frac{a_n}{b_n}} \rangle = \langle \frac{\widehat{cmmdc(a_1,\dots,a_n)}}{cmmmc(b_1,\dots,b_n)} \rangle$

Astfel, orice subgrup finit generat este ciclic.

PPRA că G e ciclic $\Rightarrow$ G finit generat de un element de forma $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

$ord(\frac{a}{b}) = b \in \mathbb{N}^* \Rightarrow$ G are număr finit de elemente ↯

Deci G nu e finit generat (nu e ciclic)

3. $A = \min(\{x \in \mathbb{N} \mid 5 \le x \le 41,\ x | 41\}) = 41$.

"$\sim$": $\hat{a} \sim \hat{b} \overset{def}{\Leftrightarrow} \hat{a} + (-\hat{b}) = \hat{0}$

$\frac{\mathbb{Z}_{41}}{\sim} = \{\hat{\hat{0}}, \hat{\hat{1}}, \hat{\hat{2}}, \dots, \hat{\hat{40}}\} \Rightarrow 41$ de elemente arăt că "$\sim$": $\hat{a} \sim \hat{b} \Leftrightarrow \hat{a} + (-\hat{b}) = \hat{0}$ relație de echivalență

$\hat{a} + (-\hat{a}) = \hat{0} \overset{def}{\underset{\sim}{\Leftrightarrow}} \hat{a} \sim \hat{a} \Rightarrow$ "$\sim$" reflexivă. (1)

fie $\hat{a}, \hat{b} \in \mathbb{Z}_4$, $\hat{a} \sim \hat{b} \overset{def}{\underset{\sim}{\Leftrightarrow}} \hat{a} + (-\hat{b}) = \hat{0} \Leftrightarrow (-\hat{a}) + \hat{b} = \hat{0} \overset{def}{\underset{\sim}{\Leftrightarrow}} \hat{b} \sim \hat{a} \Rightarrow$ "$\sim$" simetrică (2)

fie $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{Z}_4$, $\hat{a} \sim \hat{b}$, $\hat{b} \sim \hat{c} \overset{def}{\underset{\sim}{\Leftrightarrow}} \begin{cases} \hat{a} + (-\hat{b}) = \hat{0} \\ \hat{b} + (-\hat{c}) = \hat{0} \end{cases} \Rightarrow \hat{a} + (-\hat{c}) = \hat{0} \overset{def}{\underset{\sim}{\Rightarrow}}$ "$\sim$" tranzitivă (3)

1, 2, 3 $\Rightarrow$ "$\sim$" relație de echivalență

Subiectul IV

$i = (X-9, 5)$ ideal din $\mathbb{Z}[X]$

1. $i = \{(X-9)u + 5v \mid u, v \in \mathbb{Z}[X]\}$
exemplu de polinom din i este $X^2 - 9X + 5$ deoarece
$X^2 - 9X + 5 = (X-9)X + 5 \in i$
exemplu de polinom din $\mathbb{Z}[X]$ care nu este în i este 2, deoarece acesta nu se poate scrie sub forma $(X-9)u + 5v$, $u, v \in \mathbb{Z}[X]$

2. $(X-5) \subseteq i$

$(X-5) = \{(X-5)f \mid f \in \mathbb{Z}[X]\} = \{(X-9)f + 4f \mid f \in \mathbb{Z}[X]\}$
$X^2 - 9X + 4X = (X-9)X + 4 \cdot X \in (X-5)$
dar $X^2 - 9X + 4X \notin i$ $\Big| \Rightarrow (X-5) \not\subseteq i$

3. $\varphi: \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}_5$, $\varphi(f) = \widehat{f(9)}$
$\varphi(f+g) = \widehat{(f+g)(9)} = \widehat{f(9)} + \widehat{g(9)} = \varphi(f) + \varphi(g)$ $\forall f, g \in \mathbb{Z}[X]$
$\varphi(f \cdot g) = \widehat{(f \cdot g)(9)} = \widehat{f(9)} \cdot \widehat{g(9)} = \varphi(f)\varphi(g)$ $\forall f, g \in \mathbb{Z}[X]$ $\Big| \Rightarrow \varphi$ morfism de inele unitare (1)
$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathbb{Z}_5$

$\mathrm{Im}\,f = \{\hat{g} \in \mathbb{Z}_5 \mid \exists f \in \mathbb{Z}[X]$ ai $\varphi(f) = \hat{g}\}$.
$\mathrm{Im}\,f = \mathbb{Z}_5$ întrucât putem lua orice polinom de forma $X - 9 + i$, $i = \overline{0,4}$

$\mathrm{Im}\,f = \mathbb{Z}_5 \Rightarrow \varphi$ surjectivă. (2)
(1), (2) $\Rightarrow \varphi$ morfism surjectiv de inele unitare

$\mathrm{Ker}\,\varphi = \{f \in \mathbb{Z}[X] \mid \varphi(f) = \hat{0}\}$.
$\varphi(f) = \hat{0} \Rightarrow \widehat{f(9)} = \hat{0} \Rightarrow 5 \mid f(9) \Rightarrow f(9) \in (X-9, 5)$.
$\Rightarrow \mathrm{Ker}\,\varphi = (X-9, 5)\mathbb{Z}[X]$
Aplicând Teorema de izomorfism pentru inele, obținem că
$F: \dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(X-9,5)\mathbb{Z}[X]} \longrightarrow \mathbb{Z}_5$, $F(\hat{a}) = \varphi(a)$ $\forall \hat{a} \in \dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(X-9,5)\mathbb{Z}[X]}$
este bine definită și izomorfism.

4. $A = \dfrac{\mathbb{Z}[X]}{(X-9, 5)}$

$A \simeq \mathbb{Z}_5 \Rightarrow$ au același număr de elemente inversabile, nilpotente, idempotente, respectiv divizori ai lui zero.

$|N(A)| = |N(\mathbb{Z}_5)| = |\{\hat{0}\}| = 1$ (element nilpotent)

$|U(A)| = |U(\mathbb{Z}_5)| = |\{\hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}\}| = 4$ (elemente inversabile)

$|D(A)| = |D(\mathbb{Z}_5)| = |\{\hat{0}\}| = 1$ (divizor al lui 0)

$|Idem(A)| = |Idem(\mathbb{Z}_5)| = |\{\hat{0}, \hat{1}\}| = 2$ (elemente idempotente)