① Fie $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definite prin

a) $(x,y)+(x',y')=(x+x',0)$ $\nexists e$

$\alpha(x,y)=(\alpha x, \alpha y)$

b) $(x,y)+(x',y')=(x+x',y')$ „+" nu e com.

$\alpha(x,y)=(\alpha x, \alpha y)$

c) $(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$ $1 \cdot v \neq v$.

$\alpha(x,y)=(0,\alpha y)$ $\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Precizați dacă $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)/\mathbb{R}$ este spațiu vectorial.

② Fie $+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ def. prin

$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y')$

$(a+ib)\cdot(x,y)=(ax-by, ay+bx)$

$\forall (x,y),(x',y') \in \mathbb{R}^2$, $\forall a+ib \in \mathbb{C}$, $a,b \in \mathbb{R}$

Să se arate că $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)/\mathbb{C}$ este sp. vectorial.

③ Fie $V=\{x \in \mathbb{R} \mid |x|<1\}$ și

$\oplus : V \times V \to V$, $x \oplus y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ $\forall x,y \in V$,

$\odot : \mathbb{R} \times V \to V$, $\alpha \odot x = \text{th}(\alpha \, \text{arcth}\, x)$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

unde $\text{th}\, x = \dfrac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\text{th} : \mathbb{R} \to (-1,1)$ bij

$\text{arcth}\, y = \ln \left(\dfrac{y+1}{y-1}\right)^{1/2}$ $\text{arcth} : (-1,1) \to \mathbb{R}$

Să se arate că $(V,\oplus,\odot)/\mathbb{R}$ e sp. vect.

4. Fie $(\mathbb{K},+,\cdot)$ un corp com. și $(V,+,\cdot)/\mathbb{K}$ sp. vect.
Fie $V' \subset V$ subspațiu vect.
Spunem că $v \sim w \Leftrightarrow v-w \in V'$ și $v, w \in V$
$\hat{v} = \{w \in V \mid v \sim w\}$.
Fie $V/_{V'} = \{\hat{v} \mid v \in V\}$.
Să se arate că $(V/_{V'},+,\cdot)/\mathbb{K}$ are str de sp. vect.
$(\hat{v}+\hat{u} = \widehat{v+u}, \ \alpha\cdot\hat{v} = \widehat{\alpha v})$

5. Fie $(K=\{a_0,a_1,a_2,a_3\},+)$ grupul lui Klein
(i.e. $\forall x \in K$ are prop $ord(x)=2$ și $a_0=e$ el neutru).
Fie $\cdot : \mathbb{Z}_2 \times K \longrightarrow K$
$\hat{0}\cdot a_i = a_0$
$\hat{1}\cdot a_i = a_i$, $\forall i=\overline{0,3}$
Să se arate că $(K,+,\cdot)/\mathbb{Z}_2$ este sp vect.

---

6. Fie sp vect. $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)/\mathbb{R}$
a) Fie sist de vect $S=\{(1,m,1),(m,1,1),(1,0,m)\} \subset \mathbb{R}^3$
$m \in \mathbb{R}$
1. $m=?$ aî S este SLI
2. $m=?$ aî S este SLD.
$\Delta = -(m-1)(m^2+m-1)$
3. Dacă $m=2$, at S este bază
b) Fie sist de vect $S'=\{(1,a_1,a_1^2),(1,a_2,a_2^2),(1,a_3,a_3^2)\} \subset \mathbb{R}$
$a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}$.
Ce relație verifică a_1,a_2,a_3 aî S' este bază?

(7) Fie sp.v. $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$.

a) Fie $S_1 = \{(1,1,0), (1,-1,-1), (2,0,-1)\}$ SLD

Să se extragă din S_1 un SLI maximal S_1' și să se extindă acesta la o bază

b) Fie $S_2 = \{(1,2,3)\}$

Să se arate că este SLI și nu este SG

Să se extindă S_2 la o bază

c) $S_3 = \{(1,0,-1), (2,1,3), (1,1,1), (-1,2,3)\}$ $\begin{cases} 1.\ \dim\langle S_3\rangle \\ 2.\ \det S_3' \subset S_3 \text{ SLI max} \\ 3.\ \text{prelungiți la o bază} \end{cases}$

(8) Fie $(\mathbb{R}_2[X] = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \text{grad } P \leq 2\}, +, \cdot)/\mathbb{R}$.

a) $f = 2X^2 - 3X + 1 \Rightarrow \mathcal{B}_1 = \{f, f', f''\}$ bază. Generalizare

b) $\mathcal{B}_2 = \{1, X-1, (X-1)^2\}$ bază. Generalizare.

OBS $f = \tilde{f}$ (funcția polinomială asociată).

(9) Fie $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $B = \{(1,2), (3,4)\}$ bază

b) $S = \{(1,2), (3,4), (4,2)\}$ este SLD, SG

c) $S' = \{(1,4)\}$ este SLI, nu e SG.

Să se extindă la o bază.

d) $S'' = \{(1,-1), (2,3), (3,2), (1,4)\}$ este SG

Să se extragă o bază din S''.

(10) Fie $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$.

a) $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$\alpha = ?$ a.î. $\mathcal{B}$ este bază

b) Fie $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

S este SLI și să se completeze la o bază.

c) $S' = \left\{ \underset{B}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}, \underset{C}{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{\substack{D \\ \parallel \\ B+C}}{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}, \underset{\substack{E \\ \parallel \\ B-C}}{\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1. $\dim \langle S' \rangle = ?$

2. Să se extragă din S' un SLI max și acesta să se extindă la o bază.

⑪ $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), +, \cdot)/\mathbb{R}$

a) $S = \{f_1, f_2, f_3\}$, $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$
S este SLI

b) $S' = \{g_1, g_2, g_3\}$, $g_1(x) = 1$, $g_2(x) = \cos x$, $g_3(x) = \sin^2 \frac{x}{2}$
S' este SLD.

c) $S'' = \{h_1, h_2, h_3\}$, $h_1(x) = e^x$, $h_2(x) = e^{-x}$, $h_3(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
S'' este SLD.

⑫ Fie sp vect $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)/\mathbb{R}$ cu baza $\{f_1, \dots, f_n\}$.
Să se arate că sp. vect $(\mathbb{C}^n, +, \cdot)/\mathbb{R}$ are baza $\{f_1, if_1, \dots, f_n, if_n\}$.

⑬ Fie $(V_1, +, \cdot)/\mathbb{K}$ sp vect și $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza
$(V_2, +, \cdot)/\mathbb{K}$ sp vect și $\mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots, f_m\}$ bază

Să se arate că sp vect $(V_1 \times V_2, +, \cdot)/\mathbb{K}$ are baza
$\mathcal{B} = \{(e_1, 0_{V_2}), \dots, (e_n, 0_{V_2}), (0_{V_1}, f_1), \dots, (0_{V_1}, f_m)\}$ și
deci $\dim(V_1 \times V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 = n + m$

Ex14. Fie $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)/\mathbb{R}$.

$S = \{u_1 = (1,5,3),\ u_2 = (2,0,6)\}$

$S' = \{w_1 = (-1,7,-3),\ w_2 = (4,5,12)\}$

Să se arate că $\langle S \rangle = \langle S' \rangle$

Ex15 Arătați că $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$

$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = 2n$