

Exercițiul 1

1. O mașină Turing cu două capete este un 7-tuplu $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{\text{acceptare}}, q_{\text{respingere}})$, unde Q, Σ, Γ sunt mulțimi finite și:

a) Q = mulțimea de stări

b) Σ = alfabetul de intrare, care nu conține simbolul gol \sqcup

c) Γ = alfabetul benzii, unde $\sqcup \in \Gamma$ și $\Sigma \subseteq \Gamma$

d) $\delta: Q \times \Gamma^2 \rightarrow Q \times \Gamma^2 \times \{L, R, S\}^2$ este funcția de tranziție

e) $q_0 \in Q$ = starea de start

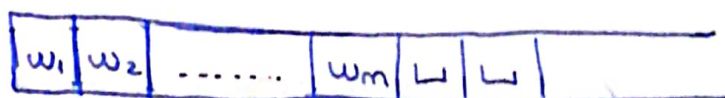
f) $q_{\text{acceptare}} \in Q$ = starea de acceptare

g) $q_{\text{respingere}} \in Q$ = starea de respingere, care respectă condiția $q_{\text{respingere}} \neq q_{\text{acceptare}}$

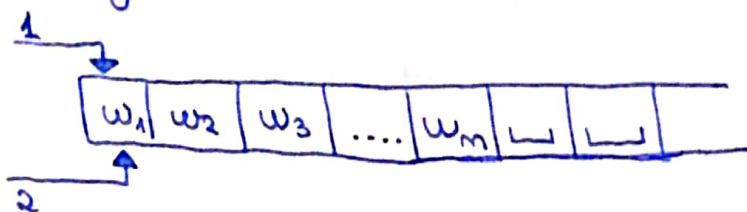
2.

Mașina Turing M este evaluată astfel:

- mașina M va primi un input w format din w_1, w_2, \dots, w_m , unde $w_1, w_2, \dots, w_m = \text{cuvînt obținut prin starea alfabetului de intrare } (\Sigma^*)$.
- aceste m litere vor fi plasate de la capătul din stînga al benzii, restul spațiilor rămînînd goale.

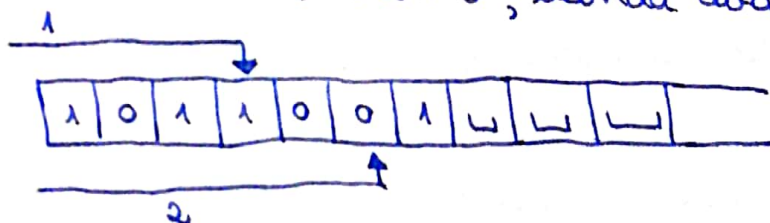


- ambele capete se află inițial pe pătratul cel mai din stînga al benzii



- primul simbol gol se va afla la finalul inputului, întrucît Σ nu conține acest simbol
- în momentul în care vom porni mașina, aceasta va evalua conform regulilor prezentate de funcția de tranziție
- dacă încercăm să mutăm un cap aflat deja la finalul celor m simboluri spre dreapta, acesta se va deplasa pe simbolul gol, conform direcției R
- dacă încercăm să deplasăm un cap aflat deja în pătratul cel mai din stînga spre stînga - adică să ieșim de pe bandă, acesta va rămîne pe loc, chiar dacă direcția este L
- dacă vrem ca unul dintre capete să stea pe loc, avem posibilitatea de a indica direcția S care va impune rămînerea capului pe pătratul curent

- evaluarea mașinii va continua până când vom ajunge fie pe starea de acceptare, fie pe starea de respingere, moment în care mașina se va opri - dacă nu se întâmplă asta - deci nu este respins sau acceptat - mașina va rula la infinit.
- atâta timp cât mașina M rulează, se vor realiza schimbări atât la nivelul stării curente, la conținutul benzii, cât și la pozițiile capetelor
- configurația unei mașini Turing cu două capete este reprezentată de informațiile de la punctul anterior
- iau q o stare - pentru care să avem q' - poziția capului 1 și q'' capului 2 -, și 3 poziții ale inputului de pe bandă w, u, v - după v se vor afla doar simboluri goale.
- avem bandă : $w q' u q'' v$
- spre exemplu : $101 q' 10 q'' 01$
- primul cap se va afla pe al treilea 1, iar al doilea cap se va afla pe al treilea 0, bandă având conținutul 1011001



Descriere formală:

- Pentru a descrie formal modul de calcul al mașinii Turing cu două capete, luăm două configurații c_1 și c_2 pentru care vom spune că c_2 este produsă de c_1 dacă, într-un singur pas, putem ajunge din c_1 în c_2
- Fie 8 simboluri din alfabetul benzii $w_1, w_2, w_3, \dots, w_7, w_8$ și 4 stări q_1, q_2, q_3, q_4 peste alfabetul Γ^* - pentru acestea avem configurații: unde q_1 și q_2 sunt două stări (q_1 - poziția primului cap, q_2 - poziția celui de-al doilea cap)

c_1 $w_1 w_1 q_1' w_2 w_3 w_2 w_4 w_5 q_3'' w_6 w_7 w_8 q_4$

c_2 $q_1 w_1 w_2 q_2' q_2 w_4 w_5 q_2'' q_4$

- c_1 produce c_2 dacă avem

$$\delta(q_1, w_2, w_3) = (q_2, w_2, w_3, R, R)$$

- analog se face și pentru cazurile $(L, L), (L, R), (R, L)$
- configurația inițială este dată de q_0 - starea de start - și w - simbolurile de pe bandă $(w_1, w_2 \dots w_n)$: $q_0 w$ - și vom ști că vom avea capetele pe pătratul cel mai din dreapta al benzii
- pentru a accepta, starea curentă ar trebui să fie $q_{acceptare}$
- pentru a respinge, stare curentă ar trebui să fie $q_{respingere}$
- o mașină Turing M va accepta un input w dacă ar exista c_0, c_1, \dots, c_k care să îndeplinească:
 - c_0 este configurația de start
 - $\forall i = \overline{0, k-1}$ avem c_i produce c_{i+1}
 - c_k este configurația de acceptare