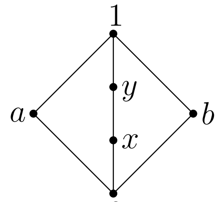
Exerciţii tip Examen la Logică Matematică şi Computaţională

Temă – Pregătire pentru Consultaţii

Claudia MUREŞAN
Universitatea din Bucureşti, Facultatea de Matematică şi Informatică
c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

Exerciţiul 1. Considerăm laticea L dată de următoarea diagramă Hasse:



Fie $\rho = < \setminus \prec \subseteq L^2$: diferenţa dintre relaţia de ordine strictă şi relaţia de succesiune asociate relaţiei de ordine a lui L, dată de diagrama Hasse de mai sus.

(i) Demonstraţi că laticea L este nedistributivă.

(ii) Demonstraţi că laticea mărginită L este complementată.

(iii) Determinaţi $\mathcal{E}(\rho) \in \mathrm{Eq}(L)$: relaţia de echivalenţă pe L generată de ρ.

(iv) Demonstraţi că fiecare dintre clasele de echivalenţă ale lui $\mathcal{E}(\rho)$ este o sublatice a lui L.

(v) Determinaţi sublaticile mărginite ale lui L care sunt latici booleene (i. e., cu operaţiile lor de complementare, sunt algebre Boole).

(vi) Determinaţi care dintre laticile booleene S de la punctul precedent au proprietatea că $\mathcal{E}(\rho) \cap S^2 \in \mathrm{Con}(S)$, i. e. relaţia de echivalenţă generată de ρ restricţionată la S este o congruenţă booleană a lui S.

Exerciţiul 2. Fie V mulţimea variabilelor propoziţionale, iar E mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E$ şi $\Gamma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$. Demonstraţi că, în logica propoziţională clasică, au loc:

(i) $\vdash (\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow [(\alpha \rightarrow \gamma) \leftrightarrow (\beta \rightarrow \gamma)]$;

(ii) $\dfrac{\Gamma \vdash \gamma,\ \Delta \vdash \delta,\ \Gamma \cup \Delta \vdash (\gamma \rightarrow \alpha) \vee (\delta \rightarrow \beta)}{\Gamma \cup \Delta \vdash \alpha \vee \beta}$;

(iii) mulţimea $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \neg\,\beta \rightarrow \gamma,\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\,\alpha\}$ e inconsistentă;

(iv) dacă $\vdash \alpha \vee \beta \vee \gamma$, atunci mulţimea $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\,\alpha\}$ e inconsistentă;

(v) dacă $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in V$, atunci mulţimea $\{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow (\gamma \wedge \delta),\ \gamma \rightarrow \alpha,\ \delta \rightarrow \neg\,\alpha\}$ e consistentă.