

Pentru orice mulțime de clauze  $\mathcal{S}$ , notăm cu

$$\text{Res}(\mathcal{S}) := \bigcup_{C_1, C_2 \in \mathcal{S}} \text{Res}(C_1, C_2).$$

**Propoziția 1.91**

Pentru orice mulțime de clauze  $\mathcal{S}$  și orice evaluare  $e : V \rightarrow \{0, 1\}$ ,  
 $e \models \mathcal{S} \Rightarrow e \models \text{Res}(\mathcal{S})$ .

**Teorema 1.92 (Teorema de corectitudine a rezoluției)**

Fie  $\mathcal{S}$  o mulțime de clauze. Dacă  $\square$  se derivează prin rezoluție din  $\mathcal{S}$ , atunci  $\mathcal{S}$  este nesatisfiabilă.

117

**Intrare:**  $\mathcal{S}$  mulțime nevidă de clauze netriviiale.

$i := 1, \mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$ .

Pi.1 Fie  $x_i$  o variabilă care apare în  $\mathcal{S}_i$ . Definim

$$\mathcal{T}_i^1 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid x_i \in C\}, \quad \mathcal{T}_i^0 := \{C \in \mathcal{S}_i \mid \neg x_i \in C\}.$$

Pi.2 **if**  $(\mathcal{T}_i^1 \neq \emptyset \text{ și } \mathcal{T}_i^0 \neq \emptyset)$  **then**

$$\mathcal{U}_i := \{(C_1 \setminus \{x_i\}) \cup (C_0 \setminus \{\neg x_i\}) \mid C_1 \in \mathcal{T}_i^1, C_0 \in \mathcal{T}_i^0\}.$$

**else**  $\mathcal{U}_i := \emptyset$ .

Pi.3 Definim

$$\begin{aligned} \mathcal{S}'_{i+1} &:= (\mathcal{S}_i \setminus (\mathcal{T}_i^0 \cup \mathcal{T}_i^1)) \cup \mathcal{U}_i; \\ \mathcal{S}_{i+1} &:= \mathcal{S}'_{i+1} \setminus \{C \in \mathcal{S}'_{i+1} \mid C \text{ trivială}\}. \end{aligned}$$

Pi.4 **if**  $\mathcal{S}_{i+1} = \emptyset$  **then**  $\mathcal{S}$  este satisfiabilă.

**else if**  $\square \in \mathcal{S}_{i+1}$  **then**  $\mathcal{S}$  este nesatisfiabilă.

**else**  $i := i + 1$ ; go to Pi.1.

118

$\mathcal{S} = \{\{v_1, \neg v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ .  $i := 1, \mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$ .

P1.1  $x_1 := v_3$ ;  $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_3\}\}$ ;  $\mathcal{T}_1^0 := \{\{v_1, \neg v_3\}\}$ .

P1.2  $\mathcal{U}_1 := \{\{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$ .

P1.3  $\mathcal{S}'_2 := \{\{v_2, v_1\}, \{v_2, \neg v_1, v_1\}\}$ ;  $\mathcal{S}_2 := \{\{v_2, v_1\}\}$ .

P1.4  $i := 2$  and go to P2.1.

P2.1  $x_2 := v_2$ ;  $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_2, v_1\}\}$ ;  $\mathcal{T}_2^0 := \emptyset$ .

P2.2  $\mathcal{U}_2 := \emptyset$ .

P2.3  $\mathcal{S}_3 := \emptyset$ .

P2.4  $\mathcal{S}$  este satisfiabilă.

119

$\mathcal{S} = \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}, \{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1\}, \{v_3\}, \{v_4\}\}$ .

$i := 1, \mathcal{S}_1 := \mathcal{S}$ .

P1.1  $x_1 := v_1$ ;  $\mathcal{T}_1^1 := \{\{v_1, v_3\}, \{v_1\}\}$ ;  $\mathcal{T}_1^0 := \{\{\neg v_1, v_2, \neg v_4\}\}$ .

P1.2  $\mathcal{U}_1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$ .

P1.3  $\mathcal{S}_2 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$ .

P1.4  $i := 2$  and go to P2.1.

P2.1  $x_2 := v_2$ ;  $\mathcal{T}_2^1 := \{\{v_3, v_2, \neg v_4\}, \{v_2, \neg v_4\}\}$ ;  $\mathcal{T}_2^0 := \{\{\neg v_3, \neg v_2\}\}$ .

P2.2  $\mathcal{U}_2 := \{\{v_3, \neg v_4, \neg v_3\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$ .

P2.3  $\mathcal{S}_3 := \{\{v_3\}, \{v_4\}, \{\neg v_4, \neg v_3\}\}$ .

P2.4  $i := 3$  and go to P3.1.

P3.1  $x_3 := v_3$ ;  $\mathcal{T}_3^1 := \{\{v_3\}\}$ ;  $\mathcal{T}_3^0 := \{\{\neg v_4, \neg v_3\}\}$ .

P3.2  $\mathcal{U}_3 := \{\{\neg v_4\}\}$ .

P3.3  $\mathcal{S}_4 := \{\{v_4\}, \{\neg v_4\}\}$ .

P3.4  $i := 4$  and go to P4.1.

P4.1  $x_4 := v_4$ ;  $\mathcal{T}_4^1 := \{\{v_4\}\}$ ;  $\mathcal{T}_4^0 := \{\{\neg v_4\}\}$ .

P4.2  $\mathcal{U}_4 := \{\square\}$ .

P4.3  $\mathcal{S}_5 := \{\square\}$ .

P4.4  $\mathcal{S}$  nu este satisfiabilă.

120

Notăm:

$$\text{Var}(C) := \{x \in V \mid x \in C \text{ sau } \neg x \in C\}, \quad \text{Var}(S) := \bigcup_{C \in S} \text{Var}(C).$$

Așadar,  $\text{Var}(C) = \emptyset$  ddacă  $C = \square$  și  $\text{Var}(S) = \emptyset$  ddacă  $S = \emptyset$  sau  $S = \{\square\}$ .

### Propoziția 1.93

Fie  $n := |\text{Var}(S)|$ . Atunci algoritmul DP se termină după cel mult  $n$  pași.

**Dem.:** Se observă imediat că pentru orice  $i$ ,

$$\text{Var}(S_{i+1}) \subseteq \text{Var}(S_i) \setminus \{x_i\} \subsetneq \text{Var}(S_i).$$

Prin urmare,  $n = |\text{Var}(S_1)| > |\text{Var}(S_2)| > |\text{Var}(S_3)| > \dots \geq 0$ .  $\square$

121

Fie  $N \leq n$  numărul de pași după care se termină DP. Atunci  $S_{N+1} = \emptyset$  sau  $\square \in S_{N+1}$ .

### Teorema 1.94

Algoritmul DP este corect și complet, adică,

$S$  este nesatisfiabilă ddacă  $\square \in S_{N+1}$ .

122

## LOGICA DE ORDINUL I

123

### Definiția 2.1

Un limbaj  $\mathcal{L}$  de ordinul I este format din:

- ▶ o mulțime numărabilă  $V = \{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  de variabile;
- ▶ conectorii  $\neg$  și  $\rightarrow$ ;
- ▶ paranteze:  $(, )$ ;
- ▶ simbolul de egalitate  $=$ ;
- ▶ cuantificatorul universal  $\forall$ ;
- ▶ o mulțime  $\mathcal{R}$  de simboluri de relații;
- ▶ o mulțime  $\mathcal{F}$  de simboluri de funcții;
- ▶ o mulțime  $\mathcal{C}$  de simboluri de constante;
- ▶ o funcție aritate  $\text{ari} : \mathcal{F} \cup \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{N}^*$ .

- ▶  $\mathcal{L}$  este unic determinat de cvadruplul  $\tau := (\mathcal{R}, \mathcal{F}, \mathcal{C}, \text{ari})$ .
- ▶  $\tau$  se numește **signatura** lui  $\mathcal{L}$  sau **vocabularul** lui  $\mathcal{L}$  sau **alfabetul** lui  $\mathcal{L}$  sau **tipul de similaritate** al lui  $\mathcal{L}$ .

124

Fie  $\mathcal{L}$  un limbaj de ordinul I.

- Mulțimea  $\text{Sim}_{\mathcal{L}}$  a simbolurilor lui  $\mathcal{L}$  este

$$\text{Sim}_{\mathcal{L}} := V \cup \{\neg, \rightarrow, (, ), =, \forall\} \cup \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$$

- Elementele lui  $\mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C}$  se numesc simboluri non-logice.
- Elementele lui  $V \cup \{\neg, \rightarrow, (, ), =, \forall\}$  se numesc simboluri logice.

- Notăm variabilele cu  $x, y, z, v, \dots$ , simbolurile de relații cu  $P, Q, R, \dots$ , simbolurile de funcții cu  $f, g, h, \dots$  și simbolurile de constante cu  $c, d, e, \dots$

- Pentru orice  $m \in \mathbb{N}^*$  notăm:

$\mathcal{F}_m :=$  mulțimea simbolurilor de funcții de aritate  $m$ ;

$\mathcal{R}_m :=$  mulțimea simbolurilor de relații de aritate  $m$ .

### Definiția 2.2

Mulțimea  $\text{Expr}_{\mathcal{L}}$  a expresiilor lui  $\mathcal{L}$  este mulțimea tuturor șirurilor finite de simboluri ale lui  $\mathcal{L}$ .

- ▶ Expresia vidă se notează  $\lambda$ .
- ▶ Lungimea unei expresii  $\theta$  este numărul simbolurilor din  $\theta$ .

### Definiția 2.3

Fie  $\theta = \theta_0\theta_1 \dots \theta_{k-1}$  o expresie a lui  $\mathcal{L}$ , unde  $\theta_i \in \text{Sim}_{\mathcal{L}}$  pentru orice  $i$ .

- ▶ Dacă  $0 \leq i \leq j \leq k-1$ , atunci expresia  $\theta_i \dots \theta_j$  se numește  $(i, j)$ -subexpresia lui  $\theta$ ;
- ▶ Spunem că o expresie  $\psi$  apare în  $\theta$  dacă există  $0 \leq i \leq j \leq k-1$  a.î.  $\psi$  este  $(i, j)$ -subexpresia lui  $\theta$ ;
- ▶ Notăm cu  $\text{Var}(\theta)$  mulțimea variabilelor care apar în  $\theta$ .