G. 135.

Temă

Buhai Darius.

S IV

Ex 1) Fie submulțimile lui $\mathbb{R}^3$

- - -

Care dintre ele este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^3 / \mathbb{R}$.

a) $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$.

$\forall\, x, y \in S_1,\ x+y \in S_1 \Leftrightarrow (x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) - (x_3+y_3) = 0$

~~x+y=0~~

$\Rightarrow (x_1+2x_2-x_3) + (y_1+2y_2-y_3) = 0$

$\Rightarrow 0 + 0 = 0$ A.

$\forall\, \alpha \in k,\ \forall x \in S_1,\ \alpha \cdot x \in S_1 \Leftrightarrow \alpha x_1 + \alpha 2x_2 - \alpha x_3 = 0$

$\Rightarrow \alpha(x_1 + 2x_2 - x_3) = 0$

$\Rightarrow \alpha \cdot 0 = 0$ A.

S_1 este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^3 / \mathbb{R}$.

b) $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 1\}$

$\forall\, x, y \in S_2,\ x+y \in S_2 \Leftrightarrow (x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) - (x_3+y_3) = 1$

$\Rightarrow (x_1 + 2x_2 - x_3) + (y_1 + 2y_2 - y_3) = 1$

$\Rightarrow 1 + 1 = 1$ Fals.

S_2 nu este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{R}$.

c) $S_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{matrix}\right\}$

$\forall\, x, y \in S_3,\ x+y \in S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1+y_1) + 2(x_2+y_2) - (x_3+y_3) = 0 \\ (x_1+y_1) + (x_2+y_2) + (x_3+y_3) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} (x_1 + 2x_2 - x_3) + (y_1 + 2y_2 - y_3) = 0 \\ (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 0 = 0 \end{cases}$ A.

$\forall\, \alpha \in k,\ \forall x \in S_3,\ \alpha \cdot x \in S_3 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha x_1 + \alpha 2x_2 - \alpha x_3 = 0 \\ \alpha x_1 + \alpha x_2 + \alpha x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(x_1 + 2x_2 - x_3) = 0 \\ \alpha(x_1 + x_2 + x_3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha \cdot 0 = 0 \\ \alpha \cdot 0 = 0 \end{cases}$ A

S_3 este subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^3 / \mathbb{R}$

d) $S_4 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2\}$

$\forall x, y \in S_4$, $x+y \in S_4 \iff (x_1+y_1)^2 + (x_2+y_2)^2 = (x_3+y_3)^2$

$\Rightarrow x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 =$

$= x_3^2 + 2x_3y_3 + y_3^2$

$\Rightarrow \underbrace{x_1^2 + x_2^2}_{x_3^2} + \underbrace{y_1^2 + y_2^2}_{y_3^2} + 2(x_1y_1 + x_2y_2) =$

$= x_3^2 + y_3^2 + 2x_3y_3$

$\Rightarrow \cancel{x_3^2} - \cancel{x_3^2} + \cancel{y_3^2} - \cancel{y_3^2} + 2(x_1y_1 + x_2y_2)$

$- 2x_3y_3 = 0$

$\Rightarrow x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3 = 0$ Fals.

Contra exemplu:

$\left.\begin{matrix} x = (1,0,1) \\ y = (0,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 0 + 0 - 1 = -1 \neq 0$

S_4 nu e subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$.

e) $S_5 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x_1| < 1\}$

$\forall x, y \in S_5$, $x+y \in S_5 \iff |x_1 + y_1| < 1$

Fals. Contra exemplu: $x_1 = \cancel{0.9}\ 2/3 \in \mathbb{R}$, $y_1 = \cancel{0.9}\ 2/3 \in \mathbb{R}$

$\cancel{|0.9 + 0.9| \not< 1}$

$\left|\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right| \not< 1$

S_5 nu e subspațiu vectorial în $\mathbb{R}^3/\mathbb{R}$

Ex 2 Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$ și k - corp comutativ

Fie $A \in \mathcal{M}_{m,n}(k)$

Arătați că $S = \{x \in k^n \mid A \cdot x = O_m\}$, unde $O_m = (\underbrace{0 \dots 0}_{m \text{ ori}})$ este subspațiu vectorial în k^n/k

i) $\forall x, y \in S$, $x+y \in S \iff A(x+y) = O_m$

$\Rightarrow Ax + Ay = O_m$

$\Rightarrow O_m + O_m = O_m$ A.

ii) $\forall \alpha \in k$, $x \in S$, $\alpha \cdot x \in S \iff A \cdot (\alpha \cdot x) = O_m$

$\Rightarrow \alpha \cdot A \cdot x = O_m$

$\Rightarrow \alpha \cdot O_m = O_m$ A.

i, ii $\Rightarrow$ S este subspațiu vectorial în k^n/k

Ex 3 Fie S_1 și S_2 subspații vectoriale în V/K.

a) Arătați că $S_1 \cap S_2$ este subspațiu vectorial în V/K

$0_V \in S_1$, $0_V \in S_2 \Rightarrow 0_V \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow S_1 \cap S_2$ nu e vid.

$x, y \in S_1 \cap S_2 \Rightarrow x, y \in S_1$, $x, y \in S_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y \in S_1 \\ x+y \in S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y \in S_1 \cap S_2$ (1)

$x \in S_1 \cap S_2, \alpha \in K \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \in S_1 \Rightarrow x \cdot \alpha \in S_1 \\ x \in S_2 \Rightarrow x \cdot \alpha \in S_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha x \in S_1 \cap S_2$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow S_1 \cap S_2$ este subspațiu vect. în V/K.

b) $S_1 \cup S_2$ subspațiu vectorial în V/K.
$\Leftrightarrow (S_1 \setminus S_2 = \emptyset) \vee (S_2 \setminus S_1 = \emptyset)$

„$\Leftarrow$" Din probl. alegem că $S_1 \setminus S_2 = \emptyset$ ca fiind adevărat. $\Leftrightarrow S_1 \subset S_2 \Rightarrow S_1 \cup S_2 = S_2$

$\Rightarrow S_1 \cup S_2$ este subspațiu vectorial în V/K.

„$\Rightarrow$" P.p. că $S_1 \cup S_2$ este spațiu vect. dar $S_1 \not\subset S_2$ și $S_2 \not\subset S_1$.

$\exists$. deci $x \in S_1 \setminus S_2$, $y \in S_2 \setminus S_1$

$\Rightarrow x + y \in S_1 \cup S_2$ (pt. că $x, y \in S_1 \cup S_2$)

$x+y \in S_1 \cup S_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y \in S_1 \\ x \in S_1 \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+(-1_K \cdot x) \in S_1$
$\Leftrightarrow y \in S_1$

$y \in S_2 \setminus S_1 \Rightarrow y \notin S_1$

Ex 4

Fie $u_1 = (2,-2,4)$, $u_2 = (1,1,0) \in \mathbb{R}^3$

Arătați că $Sp_{\mathbb{R}}\{u_1\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1}{1} = \frac{x_2}{-1} = \frac{x_3}{2}\}$ și

că $Sp_{\mathbb{R}}\{u_1, u_2\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_2 - x_3 = 0\}$

$\langle u_1 \rangle = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \alpha \cdot u_1, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = (\alpha \cdot u_{11}, \alpha \cdot u_{12}, \alpha \cdot u_{13}), \alpha \in \mathbb{R}\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1}{u_{11}} = \frac{x_2}{u_{12}} = \frac{x_3}{u_{13}} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\overset{(\text{înlocuim})}{=} \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = -x_2 = \frac{x_3}{2}\}$

$\langle u_1, u_2 \rangle = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \alpha \cdot u_1 + \beta \cdot u_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \langle u_1, u_2 \rangle \iff \exists\, \alpha, \beta$ a.î.

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha + \beta \\ x_2 = -2\alpha + \beta \\ x_3 = 4\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = x_2 + x_3 \\ x_2 = -2\alpha + \beta \in \mathbb{R} \\ x_3 = 4\alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$\iff x \in \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 + x_3\}$

Ex 5 Fie $u_1 = (0,1,1)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,1,0)$,

$u_4 = (-1,2,1)$. Să se determine $Sp_{\mathbb{R}}\{u_1, u_2, u_3\}$

și $Sp_{\mathbb{R}}\{u_1, u_2, u_4\}$

1. $Sp_{\mathbb{R}}\{u_1, u_2, u_3\} = ?$

$|u_1, u_2, u_3| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$\Rightarrow u_1, u_2, u_3$ ~~sunt~~ sunt liniar independenți.

$\mathbb{R}^3$ este de indice $3 \Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}\{u_1, u_2, u_3\} = \mathbb{R}^3$

2. $Sp_{\mathbb{R}}\{u_1, u_2, u_4\} = ?$

$|u_1, u_2, u_4| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ Cei 3 vectori <u>nu sunt</u> liniar independenți

$\Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}\{u_1, u_2, u_4\} = Sp_{\mathbb{R}}\{u_1, u_2\}$

$\Rightarrow x \in Sp_{\mathbb{R}}\{u_1, u_2\} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha + \beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x = (\alpha, \beta, \alpha + \beta) \Rightarrow Sp_{\mathbb{R}}\{v_1, v_2, v_4\} =$

$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}.$

S V

<u>Ex 1</u> În k^n/k, k fiind un corp, pentru $i \in \overline{1,n}$

notăm cu $e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$

Este $\{e_1 \dots e_n\}$ bază în k^n/k?

Fie $x \in k^n \Rightarrow x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$

$\Rightarrow \{e_i \mid i \in \overline{1,n}\}$ este sistem de generatori (1)

$(e_1 \dots e_n) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0_k \Leftrightarrow (\alpha_1 \dots \alpha_n) = 0$

$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0_k \Rightarrow \{e_1 \dots e_n\}$ sunt liniar independenți (2)

(1), (2) $\Rightarrow \{e_1 \dots e_n\}$ este bază în k^n/k.

Ex 2

Găsiți câte o bază în $M_{m,n}(K)$, $K_n[x] = \{f \in K[x] \mid$ gradul lui f fiind mai mic sau egal cu $n\}$.

- Baza canonică a lui $K_n[x]$ este $\{1_K, x^1, \dots, x^n\}$
- Baza canonică a lui $M_{m,n}(K)$ este $\{a_{ij} \mid i \in \overline{1,m}, j \in \overline{1,n}\}$

unde $$a_{ij} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1_K & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{j} \Big\} i$$