

GEOMETRIE ȘI ALGEBRĂ LINIARĂ

Lecția 5

Spații vectoriale factor, teoreme de izomorfism, sume directe

În cursul anterior am definit noțiunile de sistem de generatori, sistem de vectori liniar independenți cât și noțiunea de bază pentru un spațiu vectorial. Reamintesc faptul că lucrăm cu spații vectoriale peste corpul numerelor reale \mathbb{R} .

Am enunțat două teoreme care spun că fiecare spațiu vectorial are o bază și respectiv oricare două baze ale unui spațiu vectorial au același cardinal.

Definiția 1. Fie V un spațiu vectorial. Numim *dimensiunea spațiului vectorial* V și notăm cu $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim(V) = |\mathcal{B}|$, cardinalul unei baze \mathcal{B} a lui V .

Am enunțat

Teorema 2 (teorema Grassmann). *Fie V un spațiu vectorial și X și Y subspații ale sale. Atunci $\dim(X + Y) = \dim(X) + \dim(Y) - \dim(X \cap Y)$.*

Observația 3. Teorema Grassmann este o versiune a principiului includerii-excluderii: pentru două mulțimi finite A, B , $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

O demonstrație a teoremei Grassmann se face așa: se alege o bază \mathcal{B} a subspațiului $X \cap Y$ și se completează atât la o bază \mathcal{B}_1 a lui X cât și la una \mathcal{B}_2 a lui Y . Se demonstrează că $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ este bază a spațiului $X + Y$.

Definiția 4. Se numește morfism de spații vectoriale $f : V \longrightarrow W$ o funcție omogenă și aditivă.

- aditivă: $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$, pentru $(\forall)v_1, v_2 \in V$.
- omogenă: $f(\alpha v) = \alpha f(v)$ pentru $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$ și $(\forall)v \in V$.

Am enunțat

Propoziția 5. $f : V \longrightarrow W$ este morfism de spații vectoriale dacă și numai dacă pentru $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ și $v_1, v_2 \in V$, $f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2)$.

Asociate unui morfism $f : V \longrightarrow W$ de spații vectoriale avem următoarele subspații: *nucleul morfismului* f , $\text{Ker}(f) = \{v \in V | f(v) = 0_W\} = f^{-1}(0_W)$, și *imagea morfismului* f , $\text{Im}(f) = f(V) = \{f(v) | v \in V\}$. $\text{Ker}(f)$ este subspațiu în V , iar $\text{Im}(f)$ este subspațiu în W .

Teorema 6 (rang-defect). *Fie $f : V \longrightarrow W$ morfism de spații vectoriale finit dimensionale. Atunci $\dim(V) = \dim(\operatorname{Im}(f)) + \dim(\operatorname{Ker}(f))$.*

$\dim(\operatorname{Im}(f))$ se numește *rangul* aplicației f , și $\dim(\operatorname{Ker}(f))$ *defectul* lui f .

Observăm că f este injectiv $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(f) = 0_V$ și f este surjectiv $\Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = W$.

Exemplul 7. Considerăm $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = x + y$. Să determinăm $\dim(\operatorname{Ker}(f))$ și o bază pentru acest subspațiu.

Este ușor de arătat că f este morfism de spații vectoriale.

f este surjectiv: $(\forall)x \in \mathbb{R}, x = f\left(\begin{smallmatrix} x \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$; deci $\dim(\operatorname{Im}(f)) = 1 = \dim(\mathbb{R})$. Din **teorema 6** și din faptul că $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, rezultă că $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$.

Să găsim o bază pentru $\operatorname{Ker}(f)$.

Nucleul aplicației f este mulțimea $\left\{\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right\} \in \mathbb{R}^2 \mid f\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = 0\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right\} \mid x + y = 0\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} x \\ -x \end{smallmatrix}\right\} \mid y = -x\right\} = \left\{\begin{smallmatrix} x \\ -x \end{smallmatrix}\right\} \mid x \in \mathbb{R}\right\}$. Bază pentru acest spațiu este $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Este linear independent fiind un vector nenul. Este un sistem de generatori pentru $\operatorname{Ker}(f)$ pentru că $\begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$.

Reprezentarea grafică a subspațiului vectorial $\operatorname{Ker}(f)$ este a două bisectoare a axelor de coordonate din \mathbb{R}^2 , o dreaptă ce trece prin origine. Și de aici se vede că această submulțime a lui \mathbb{R}^2 verifică condiția necesară de a fi subspațiu, conține 0.

Avem

Propoziția 8. *Fie $f : V \longrightarrow W$ morfism de spații vectoriale. Atunci*

- (1) $X \subset V$, subspațiu $\Rightarrow f(X)$ subspațiu în W ; în particular $\operatorname{Im}(f)$ imaginea lui f , este subspațiu în W .
- (2) $Y \subset W$, subspațiu $\Rightarrow f^{-1}(Y)$ subspațiu în V , în particular $\operatorname{Ker}(f) = f^{-1}(0)$ este subspațiu în V .

Demonstrație: Voi demonstra punctul (1). Fie X subspațiu în $V, w_1, w_2 \in f(X)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. $(\exists)v_1, v_2 \in X$ a.î. $f(v_j) = w_j, j = 1, 2$. Atunci $\alpha w_1 + \beta w_2 = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) \Rightarrow \alpha w_1 + \beta w_2 \in f(X)$. Deci $f(X)$ este subspațiu vectorial în W .

Similar se demonstrează punctul (2).

□

Din **propoziția 8** există o corespondență bijectivă între $\{X \subset V \mid X \text{ subspațiu și } \operatorname{Ker}(f) \subset X\}$ și $\{Y \subset W \mid Y \text{ subspațiu în } W\}$, dată de $X \mapsto f(X)$ și $Y \mapsto f^{-1}(Y)$.

Spații vectoriale factor

Fie V un spațiu vectorial și X un subspațiu al său. Pentru că V este grup abelian atunci X este subgrup normal și deci putem forma grupul factor $V/X = \{\hat{v} \mid v \in V\}$, unde $\hat{v}_1 = \hat{v}_2 \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in X$.

Operația de adunare pe V/X este: $\widehat{v_1} + \widehat{v_2} = \widehat{v_1 + v_2}$, iar $\pi : V \longrightarrow V/X$, $\pi(v) = \widehat{v}$ (proiecția canonică) este morfism surjectiv de grupuri abeliene.

V/X are structura de \mathbb{R} spațiu vectorial, unde înmulțirea cu scalari este $\alpha \cdot \widehat{v} = \widehat{\alpha v}$, $(\forall) \alpha \in \mathbb{R}$ și $v \in V$.

Operația externă este corect definită: $\widehat{v_1} = \widehat{v_2} \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in X \Rightarrow \alpha(v_1 - v_2) \in X \Rightarrow \alpha v_1 - \alpha v_2 \in X \Rightarrow \widehat{\alpha v_1} = \widehat{\alpha v_2}$.

V/X devine \mathbb{R} spațiu vectorial (de verificat axiomele).

În plus, $\pi : V \longrightarrow V/X$, $\pi(v) = \widehat{v}$ este morfism de spații vectoriale.

Avem $\pi(v_1 + v_2) = \widehat{v_1 + v_2} = \widehat{v_1} + \widehat{v_2} = \pi(v_1) + \pi(v_2)$ și $\pi(\alpha v) = \widehat{\alpha v} = \alpha \widehat{v} = \alpha \pi(v)$.

V/X se numește *spațiul vectorial factor al lui V în raport cu X* .

Teorema 9 (teorema fundamentală de izomorfism). *Fie $f : V \longrightarrow W$ un morfism de spații vectoriale. Atunci există un izomorfism de spații vectoriale $V/\text{Ker}(f) \cong \text{Im}(f)$.*

Demonstrație: Din demonstrația teoremei fundamentale de izomorfism pentru grupuri știm că aplicația $\bar{f} : V/\text{Ker}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$, $\bar{f}(\widehat{v}) = f(v)$, $v \in V$ este corect definită și este izomorfism de grupuri.

În plus $\bar{f}(\alpha \widehat{v}) = \bar{f}(\widehat{\alpha v}) = f(\alpha v) = \alpha f(v) = \alpha \bar{f}(\widehat{v})$. Deci \bar{f} este chiar izomorfism de spații vectoriale.

□

Dacă V/X este un spațiu vectorial factor, atunci morfismul $\pi : V \longrightarrow V/X$ induce o bijecție între subspațiile vectoriale $U \subset V$ a.î. $X \subset U$ și subspațiile lui V/X , dat de $U \longmapsto \pi(U) = U/X = \{\widehat{x} | x \in U\}$

Teorema 10 (teorema I-a de izomorfism). *Fie V un spațiu vectorial, X și U subspații cu $X \subset U$. Atunci $\frac{V/X}{U/X} \cong V/U$.*

Demonstrație: Fie $f : V/X \rightarrow V/U$, $f(\widehat{v}) = \bar{v}$, unde \widehat{v} este clasa modulo X iar \bar{v} este clasa modulo U . f este corect definită: $\widehat{v_1} = \widehat{v_2} \Rightarrow v_1 - v_2 \in X \Rightarrow v_1 - v_2 \in U \Rightarrow \bar{v_1} = \bar{v_2}$. Se verifică ușor că f este morfism de spații vectoriale. Este clar că f este surjectiv, $f(V/X) = V/U$.

$\text{Ker}(f) = \{\widehat{v} | \bar{v} = \bar{0}\} = \{\widehat{v} | v \in U\} = U/X$. Concluzia rezultă din **teorema 9**.

□

Teorema 11 (teorema II-a de izomorfism). *Fie V un spațiu vectorial și U și X subspații ale sale. Atunci $(U + X)/U \cong X/(X \cap U)$.*

Demonstrație: Definim $f : X \rightarrow (U + X)/U$, $f(v) = \widehat{v}$, (clasa modulo U). Este clar că f este morfism de spații vectoriale.

f surjectiv: fie $\widehat{u + x} \in (U + X)/U$. $\widehat{u + x} = \widehat{u} + \widehat{x} = \widehat{x} = f(x)$, pentru $u \in U$ și $x \in X$.

Pentru $x \in X, x \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \hat{x} = \hat{0} \Leftrightarrow x \in U \Leftrightarrow x \in U \cap X$. Deci $\text{Ker}(f) = U \cap X$. Folosind **teorema 9** rezultă afirmația din enunț.

□

Propoziția 12. *Fie V un spațiu vectorial real finit dimensional și X un subspațiu al său. Atunci $\dim(V/X) = \dim(V) - \dim(X)$.*

Demonstrație: Considerăm $\pi : V \rightarrow V/X, \pi(x) = \hat{x}$. $\text{Ker}(\pi) = X$. Aplicăm **teorema 6** morfismului π , care este surjectiv. Avem $\dim(V) = \dim(V/X) + \dim(X)$, de unde concluzia.

□

Observația 13. **Teorema 2** se poate demonstra folosind **teorema 11** și **propoziția 12**

Spațiul morfismelor între două spații vectoriale

Fie ca și mai sus V, W două spații vectoriale peste corpul numerelor reale. Notăm cu $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W) = \text{Hom}(V, W) = \{f : V \rightarrow W \mid f \text{ morfism}\}$, mulțimea morfismelor spațiilor vectoriale V și W .

Propoziția 14. $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ este un spațiu vectorial real.

Demonstrație: Fie $f, g \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, W)$ și $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Demonstrăm că $\alpha f + \beta g$ este morfism de spații vectoriale. Fie $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ și $v_1, v_2 \in V$. $(\alpha f + \beta g)(a_1 v_1 + a_2 v_2) = \alpha f(a_1 v_1 + a_2 v_2) + \beta g(a_1 v_1 + a_2 v_2) = \alpha a_1 f(v_1) + \alpha a_2 f(v_2) + \beta a_1 g(v_1) + \beta a_2 g(v_2) = a_1(\alpha f(v_1) + \beta g(v_1)) + a_2(\alpha f(v_2) + \beta g(v_2)) = a_1(\alpha f + \beta g)(v_1) + a_2(\alpha f + \beta g)(v_2)$.

Deci conform **propoziției 5** $(\alpha f + \beta g) \in \text{Hom}(V, W)$.

□

Spații duale

Un caz particular al spațiului morfismelor între două spații vectoriale este pentru $W = \mathbb{R}$.

Fie V un \mathbb{R} spațiu vectorial. Notăm cu $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$. Morfismele de la V la \mathbb{R} se numesc și funcționale liniare. Pe mulțimea acestor funcționale liniare avem operațiile obișnuite de adunare și înmulțire cu scalari.

- $(f + g)(v) = f(v) + g(v), (\forall) v \in V, f, g \in V^*$
- $(\alpha f)(v) = \alpha f(v), (\forall) v \in V, f \in V^*, \alpha \in \mathbb{R}$.

Dacă $f : V \longrightarrow W$ este morfism de spații vectoriale, atunci $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ prin $f^*(w^*) = w^* \circ f$ pentru orice $w^* \in W^*$.

Avem următoarele proprietăți:

- (1) fie $f : V \longrightarrow W$ și $g : W \longrightarrow U$ morisme de spații vectoriale, atunci $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.
- (2) dacă $1_V : V \longrightarrow V$ este morfismul identic, atunci $(1_V)^* = 1_{V^*}$.
- (3) dacă $f : V \longrightarrow W$ este izomorfism, atunci și f^* este izomorfism.

Propoziția 15. Fie V un \mathbb{R} spațiu vectorial de dimensiune finită n . Atunci $\dim(V^*) = n$.

Demonstrație: Fie $(e_i)_{i=1,n}$ bază a spațiului vectorial V . Pentru fiecare $i = \overline{1,n}$ considerăm $e_i^* \in V^*$, definite prin $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$, $(\forall) j = \overline{1,n}$, unde $\delta_{i,j}$ este simbolul lui Kronecker. $\left(\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \right)$.

Arătăm că $(e_i^*)_{i=1,n}$ este bază a spațiului vectorial V^* .

- liniar independența: fie $a_j \in \mathbb{R}$ și considerăm $a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^* = 0$, funcționala liniară nulă. Atunci pentru $(\forall) i = \overline{1,n}$, $(a_1 e_1^* + \dots + a_n e_n^*)(e_i) = 0 \Leftrightarrow a_i \cdot 1 = 0$.

- sistem de generatori: fie $f \in V^*$, cu $f(e_i) = b_i \in \mathbb{R}$, $(\forall) i = \overline{1,n}$. Atunci $f = b_1 e_1^* + \dots + b_n e_n^*$. Se verifică egalitatea pentru orice vector e_i din baza lui V .

□

Observația 16. Baza din propoziția 15 se numește baza duală bazei $(e_i)_{i=1,n}$.

Sume directe externe

Dacă V_1, V_2, \dots, V_n spații vectoriale, atunci suma lor directă este $V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$, cu operațiile de adunare și înmulțire cu scalari pe componente.

Mai precis:

- $(v_1, \dots, v_n) + (w_1, \dots, w_n) = (v_1 + w_1, \dots, v_n + w_n)$, unde $v_j, w_j \in V_j$, pentru $(\forall) j = \overline{1,n}$.
- $\alpha \cdot (v_1, \dots, v_n) = (\alpha v_1, \dots, \alpha v_n)$

Se mai notează cu $\bigoplus_{i=1,n} V_i$.

Pentru fiecare $j = \overline{1,n}$, definim

- $q_j : V_j \longrightarrow \bigoplus_{i=1,n} V_i$, $q_j(v) = (0, \dots, v, \dots, 0)$, cu v pe poziția j . q_j este morfism injectiv.
- $\pi_j : \bigoplus_{i=1,n} V_i \longrightarrow V_j$, $\pi_j(v_1, \dots, v_n) = v_i$. π_j este morfism surjectiv.

Propoziția 17. Fie V_1, V_2 spații vectoriale finit dimensionale. Atunci

$$\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$$

Demonstrație: $\pi_1 : V_1 \oplus V_2 \longrightarrow V_1$, $\pi_1(v_1, v_2) = v_1$ este morfism surjectiv de spații vectoriale. $\text{Ker}(\pi_1) = 0 \oplus V_2 = q_2(V_2) \cong V_2$ (pentru că q_2 este injectiv). Din **teorema 9** rezultă că $V_1 \oplus V_2 / 0 \oplus V_2 \cong V_1$. Din **teorema 6** rezultă că $\dim(V_1 \oplus V_2) = \dim(\text{Im}(\pi_1)) + \dim(\text{Ker}(\pi_1)) = \dim(V_1) + \dim(V_2)$.

□

Corolarul 18. *Dacă avem spațiile vectoriale V_1, V_2, \dots, V_n finit dimensionale, atunci*

$$\dim(V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_n) = \dim(V_1) + \dim(V_2) + \dots + \dim(V_n)$$

unde $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$.

Sume directe interne

Fie V spațiu și V_1, V_2, \dots, V_n subspații în V . Spunem că V este suma directă internă a familiei $\{V_i\}_{i=1,n}$, dacă

- $V = V_1 + \dots + V_n$
- pentru orice $i : V_i \cap (\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} V_j) = 0$.

(aceste două condiții sunt echivalente cu faptul că orice $v \in V$ se exprimă în mod unic ca $v = v_1 + \dots + v_n$ cu $v_i \in V_i, \forall i$).

În acest caz scriem $V = V_1 \dot{\oplus} V_2 \dot{\oplus} \dots \dot{\oplus} V_n$, sau $V = \dot{\oplus}_{i=1,n} V_i$.

Observația 19. Dacă $V = \dot{\oplus}_{i=1,n} V_i$, atunci $\dot{\oplus}_{i=1,n} V_i \cong \oplus_{i=1,n} V_i$, deoarece aplicația $f : \oplus_{i=1,n} V_i \longrightarrow \dot{\oplus}_{i=1,n} V_i$, definită prin $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ este izomorfism de spații vectoriale. În particular $\dim(\dot{\oplus}_{i=1,n} V_i) = \dim(\oplus_{i=1,n} V_i)$. Mai mult, dacă \mathcal{B}_i e bază în V_i pentru fiecare $i = \overline{1, n}$, atunci $\cup_{i=1,n} \mathcal{B}_i$ este bază în V .