GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Am încheiat primul curs cu formula Laplace pe care o reamintesc.

Fie $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $1 \leqslant m \leqslant p$ şi $I = \{i_1, \ldots, i_m\}, J = \{j_1, \ldots, j_m\} \subset [p]$ cu $i_1 < \ldots < i_m$ şi $j_1 < \ldots < j_m$. Fie $\overline{I} = [p] \backslash I$ şi $\overline{J} = [p] \backslash J$ complementele mulţimilor I şi J în $[p]$. Notăm cu $M = \det(A_{I,J})$ minorul de ordin m din A corespuzător mulţimilor de indici I şi J şi cu $M' = (-1)^{i_1+\ldots+i_m+j_1+\ldots+j_m} \det(A_{\overline{I},\overline{J}})$ complementul algebric al lui M.

Teorema 1 (Formula Laplace)**.** *Fie $p \in \mathbb{N}^\star$ şi $1 \leqslant m \leqslant p$, $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ şi $1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \ldots \leqslant i_m \leqslant p$. Atunci*

$$\det(A) = \sum_{\substack{M \text{ minor obţinut din} \\ \text{liniile } i_1, \ldots, i_m \\ \text{şi } m \text{ coloane}}} M \cdot M'$$

Curs 2
Dezvoltări ale determinanţilor

Un caz particular al formulei Laplace, deja întâlnit de dumneavoastră în clasa a XI-a, este cel al dezvoltării după o linie sau după o coloană. Pentru că formula Laplace am dat-o pentru o mulţime de indici de linii, voi da în continuare formula de dezvoltare a determinantului pe linie.

Considerăm $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi aplicăm formula Laplace pentru $|I| = |J| = 1$. Pentru $I = \{i\}, J = \{j\}$ minorul de ordin 1 asociat acestor mulţimi este $M = \det(a_{i,j}) = a_{i,j}$, iar complementul său algebric este $M'_{ij} = (-1)^{i+j} A_{\bar{i},\bar{j}} = (-1)^{i+j} A_{[n]\backslash\{i\},[n]\backslash\{j\}}$.

Aplicând formula Laplace pentru $I = \{i\}$ avem

$$\det(A) = a_{i1}M'_{i1} + a_{i2}M'_{i2} + \ldots + a_{in}M'_{in}, \tag{1}$$

adică expresia dezvoltării determinantului după linia i.

Ceea ce am prezentat la curs este formula de dezvoltare a determinantului pe coloană. Considerăm coloana j a unei matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, şi aplicând formula Laplace pentru dezvoltarea pe coloana $J = \{j\}$ obţinem

$\det(A) = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$, unde $A_{ij} = M'_{ij} = (-1)^{i+j}A_{\bar{i},\bar{j}}$ este ca şi mai sus complementul algebric al matricei a_{ij}.

Considerăm acum pentru $p \neq i$ matricea $B_p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obţinută din A înlocuind $L_p(A)$, cu $L_i(A)$. Deci $L_p(B_p) = L_i(A) = L_i(B_p)$.

$$B_p = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow L_p = L_i(A) \\ \\ \leftarrow L_i = L_i(A) \\ \\ \\ \end{array}$$

Dezvoltăm $\det(B_p)$ după linia p şi avem din proprietăţile determinanţilor

$$0 = \det(B_p) = a_{i1}M'_{p1} + a_{i2}M'_{p2} + \ldots + a_{in}M'_{pn} \tag{2}$$

pentru orice $p \neq i$. Complemenţii algebrici rămân aceeaşi pentru că matricea B_p este aceeaşi cu matricea A în afara liniei p, după care dezvoltăm.

Numim adjuncta matricei A şi notăm cu $A^\star$ matricea care are pe poziţia (i, j) complementul algebric $M'_{j,i}$.

$$A^\star = \begin{pmatrix} M'_{11} & M'_{21} & \ldots & M'_{n1} \\ M'_{12} & M'_{22} & \ldots & M'_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M'_{1n} & M'_{2n} & \ldots & M'_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observaţia 2. Din ecuaţiile (1) şi (2) rezultă că $A \cdot A^\star = \det(A) \cdot I_n$, unde $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$.

Similar, lucrând cu versiunea pe coloane obţinem:

$$\det(A) = a_{1j}M'_{1j} + a_{2j}M'_{2j} + \ldots + a_{nj}M'_{nj} \tag{3}$$

şi

$$0 = \det(C_p) = a_{1j}M'_{1p} + a_{2j}M'_{2p} + \ldots + a_{nj}M'_{np} \tag{4}$$

unde C_p este obţinută din A înlocuind $C_p(A)$ cu $C_j(A)$. pentru orice $p \neq j$.

Observaţia 3. Folosind ecuaţiile (3) şi (4) rezultă $A^\star \cdot A = \det(A) \cdot I_n$.

O consecinţă a **observaţiilor 2** şi **3** este

Teorema 4. *Pentru orice* $A \in \mathcal{M}_n(R)$ *avem* $A \cdot A^\star = A^\star \cdot A = \det(A) \cdot I_n$.

Definiţia 5. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se numeşte inversabilă, dacă şi numai dacă $(\exists) B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a.î. $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. În acest caz B se numeşte inversa matricei A şi se notează cu A^{-1}.

Corolarul 6. *Fie* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. *Atunci* A *este inversabilă* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$. *În acest caz* $A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot A^\star$.

Avem şi următorul rezultat:

Teorema 7. *Fie* $A, B \in \mathcal{M}_n(R)$. *Atunci* $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

În cele ce urmează voi prezenta câteva exemple de calcul de determinanţi.

Exemplul 8. Calculaţi

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f \\ 0 & g & h & i & j & 0 \\ 0 & 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & n & 0 & 0 \\ 0 & p & q & r & s & 0 \\ t & u & x & y & z & w \end{vmatrix}$$

- dezvoltăm după prima coloană: $\Delta = a \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j & 0 \\ 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & m & n & 0 & 0 \\ p & q & r & s & 0 \\ u & x & y & z & w \end{vmatrix} - t \cdot \begin{vmatrix} b & c & d & e & f \\ g & h & i & j & 0 \\ 0 & k & l & 0 & 0 \\ 0 & m & n & 0 & 0 \\ p & q & r & s & 0 \end{vmatrix} =$

$$= aw \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} - tf \cdot \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & h & i & j \\ 0 & k & l & 0 \\ 0 & m & n & 0 \\ p & q & r & s \end{vmatrix} \cdot (aw - tf) =$$

$$\ldots = (gs - jp) \cdot (aw - tf) \cdot \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} = (kn - lm) \cdot (gs - jp) \cdot (aw - tf).$$

- Folosind formula Laplace pentru mulţimea indicilor liniilor după care dezvoltăm $I = \{1, 2\}$. Mulţimea indicilor coloanelor este $J \subset [6], |J| = 2$. Numărul acestor submulţimi este $\binom{6}{2} = C_6^2 = 15$. Astfel J este oricare dintre următoarele mulţimi: $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}$.

  $\det(A) = \sum_J \det(A_{I,J})(-1)^{3+4+j_1+j_2} \det(A_{\overline{I},\overline{J}}) =$

$= \begin{vmatrix} k & l \\ m & n \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+4+3+4} \begin{vmatrix} a & b & e & f \\ 0 & g & j & 0 \\ 0 & p & s & 0 \\ t & u & z & w \end{vmatrix}$. Toţi ceilalţi determinanţi 2×2 ce apar în formula Laplace sunt 0, având cel puţin o coloană nulă. Pentru determinantul 4×4 dezvoltăm după liniile $I = \{2, 3\}$, şi 2 coloane din cele 4.

Obţinem $\Delta = (kn - ml) \cdot \begin{vmatrix} g & j \\ p & s \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+3+2+3} \begin{vmatrix} a & f \\ t & w \end{vmatrix} = (kn - lm) \cdot (gs - jp) \cdot (aw - tf)$.

Exemplul 9. Să se arate că $\det(A) = (-1)^{np} \det(N) \det(P)$, unde $A = \begin{pmatrix} M & N \\ P & 0 \end{pmatrix}$, $A \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $P \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ şi $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Folosim formula Laplace pentru mulţimea indicilor liniilor după care dezvoltăm $I = \{n+1, \dots, n+p\}$ şi mulţimea de indici ai coloanelor este $J = \{j_1, \dots, j_p\} \subset [n+p]$, $|J| = p$.

$\det(A) = \sum_{J \subset [n+p], |J|=p} \det(A_{I,J})(-1)^{n+1+\ldots+n+p+j_1+\ldots+j_p} \det(A_{\overline{I},\overline{J}})$

Singurul determinant nenul $\det(A_{I,J})$ este pentru $J = [p] = \{1, 2, \dots, p\}$.

Obţinem pentru $I = \{n+1, \dots, n+p\}$, $\overline{I} = [n+p] \backslash \{n+1, \dots, n+p\} = \{1, \dots, n\}$ şi pentru $J = \{1, 2, \dots, p\}$, $\overline{J} = [n+p] \backslash \{1, 2, \dots, p\} = \{p+1, \dots, p+n\}$.

Avem deci

$\det(A) = \det(A_{\{n+1,\ldots,n+p\},\{1,2,\ldots,p\}})(-1)^{n+1+\ldots+n+p+1+\ldots+p} \det(A_{\{1,\ldots,n\},\{p+1,\ldots,p+n\}}) =$
$= \det(P)(-1)^{np} \cdot \det(N)$.

Exemplul 10. Determinantul Vandermonde. Să se arate că

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Am demonstrat în cursul trecut că formula este adevărată pentru $n = 3$. Demonstrăm prin inducţie. Presupunem formula adevărată pentru $n - 1$ şi demonstrăm pentru n.

Facem următoarele operaţii: $L_2' = L_2 - a_1 \cdot L_1$, $L_3' = L_3 - a_1 \cdot L_2$, $L_n' = L_n - a_1 \cdot L_{n-1}$. Obţinem

$$V(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & \ldots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

dezvoltând după prima coloană obţinem

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ a_2^2 - a_1 a_2 & \ldots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

dând factori comuni pe fiecare dintre cele $(n-1)$ coloane $(a_j - a_1)$, $2 \leqslant j \leqslant n$, obţinem

$$= (a_2 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2 - a_1) \ldots (a_n - a_1) V(a_2, \ldots, a_n).$$

Folosind ipoteza de inducţie obţinem $V(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$
$= (a_2 - a_1) \ldots (a_n - a_1) \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Exemplul 11. Determinanţi tridiagonali. Pentru $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ să se calculeze

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^2 - \beta\gamma. \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \alpha & \beta \\ 0 & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \alpha^3 - 2\alpha\beta\gamma.$$

Dezvoltăm Δ_n după prima linie şi obţinem $\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta \begin{vmatrix} \gamma & \beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \dots & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$, ultimul determinant având $n-1$ linii şi coloane. Dezvoltând acest determinant după prima coloană obţinem
$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta\gamma\Delta_{n-2}$ de unde $\Delta_n - \alpha\Delta_{n-1} + \beta\gamma\Delta_{n-2} = 0$.

Ecuaţia caracteristică asociată este $\lambda^2 - \alpha\lambda + \beta\gamma = 0$. Presupunem că are rădăcini distincte $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Avem $\lambda_1 + \lambda_2 = \alpha$ şi $\lambda_1\lambda_2 = \beta\gamma$.

$\Delta_2 = \alpha^2 - \beta\gamma = (\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2^2 = \frac{\lambda_1^3 - \lambda_2^3}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Demonstrăm prin induţie că $\Delta_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Verificarea a fost făcută pentru $n = 2$, presupunem deci formula adevărată pentru $2 \leqslant k < n$ şi demonstrăm pentru n.

$\Delta_n = \alpha\Delta_{n-1} - \beta\gamma\Delta_{n-2} = (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} - \lambda_1\lambda_2\frac{\lambda_1^{n-1} - \lambda_2^{n-1}}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$.

Exemplul 12. Un graf $\Gamma = (V, E)$ este o pereche de mulţimi V, mulţimea vârfurilor şi E mulţimea muchiilor ce unesc vârfurile. K_n este graful complet cu n vârfuri şi câte o muchie între fiecare două vârfuri. Numim arbore un graf aciclic (fără cicli) şi conex (orice două vârfuri pot fi unite printr-un drum în graf). Un subarbore al unui graf se numeşte arbore generator dacă conţine toate vârfurile grafului Γ. Notăm cu $\tau(\Gamma)$ numărul arborilor generatori ai grafului Γ. Numim valenţa unui vârf, sau gradul acestuia, şi notăm $d(v)$ numărul muchiilor incidente cu $v \in V$.

Pentru orice graf Γ, considerăm matricea $Q \in \mathcal{M}_{|V|}(\mathbb{Z}), Q = (q_{i,j})$, unde

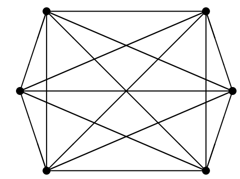
$$q_{i,j} = \begin{cases} d(v_i) & i = j \\ \text{- nr. de muchii ce uneşte } v_i \text{ cu } \; v_j & i \neq j \end{cases}.$$

Teorema 13 (matice-arbore)**.** *Considerăm $\Gamma = (V, E)$ un graf fără bucle şi matricea Q asociată acestui graf. Atunci $\tau(\Gamma) = (-1)^{r+s}\det(Q_{r,s})$, unde matricea $Q_{r,s}$ este obţinută din Q tăind linia r şi coloana s.*

Datorită faptului că suma coloanelor este vectorul nul complemenţii algebrici sunt constanţi pe fiecare linie, deci vom dezvolta după linia şi coloana 1.

Formula Cayley $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

$$Q(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$



K_6

Tăiem linia şi coloana 1 a matricei Q şi obţinem $\tau(K_n) = (-1)^{1+1}\det(Q_{1,1}) =$
$= \begin{vmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$, determinant cu $n-1$ linii şi coloane. Sumând toate coloanele la prima obţinem $\tau(K_n) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$. Scăzând prima linie din fiecare cealaltă linie obţinem $\begin{vmatrix} 1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = n^{n-2}$.