EXAMEN GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ
30.06.2020
VARIANTA 152

Fiecare problemă este notată cu 0,5 puncte. Nota este suma notelor problemelor plus un punct din oficiu. Pe foaia de examen trebuie scrise numai răspunsurile. Fiecare problemă are un singur răspuns corect.

1. Care din următoarele afirmaţii NU sunt adevărate pentru $(\forall)A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ CU EXCEPȚIA
A) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
B) A, B matrice ortogonale atunci $A \cdot B$ NU este ortogonală
C) $\mathrm{tr}(ABA^{-1}) = \mathrm{tr}(A)$
D) $\mathrm{tr}(AB - BA) = 0$

2. Considerăm $A \in \mathscr{M}_{2n}(\mathbb{R})$ o matrice cu proprietatea $A = -\,{}^tA$, unde ${}^tA$ este transpusa matricei A. Atunci
A) $\mathrm{tr}(A) = 2n$
B) $\det(A) = 0$
C) $\det(A) = \pm 1$
D) $\mathrm{tr}(A) = 0$

3. Considerăm $A \in O_{2n}(\mathbb{R})$ şi morfismul $f : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$, $f(v) = A \cdot v$. Atunci
A) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = n$
B) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = n$
C) $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$
D) $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 0$.

Pentru problemele **4**, **5**, **6** considerăm pentru fiecare $n \geqslant 2$ matricea $A_n \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pentru care elementele de pe poziţia $(i, i), 1 \leqslant i \leqslant n$ sunt egale cu 3, cele de pe poziţiile $(i, i+1), 1 \leqslant i \leqslant n-1$ sunt egale cu 1 iar cele de pe poziţiile $(i+1, i), 1 \leqslant i \leqslant n-1$ egale cu 2, şi toate celelalte elemente ale matricei sunt egale cu 0. Notăm cu $\Delta_n = \det(A_n)$.

4. Atunci:
A) $\Delta_3 = 7$ şi $\Delta_4 = 15$ **B)** $\Delta_3 = -15$ şi $\Delta_4 = -31$ **C)** $\Delta_3 = 15$ şi $\Delta_4 = 31$
D) $\Delta_3 = -15$ şi $\Delta_4 = 31$

5. Pentru Δ_n ca mai sus, avem:
A) $\Delta_n = 2^n - 1$ **B)** $\Delta_n = 1 - 2^{n+1}$ **C)** $\Delta_n = \frac{2^{n+1}-1}{2}$ **D)** $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$

6. Fie A_n ca mai sus. Atunci adjuncta matricei A_3 este:

A) $A_3^\star = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 1 \\ 2 & 9 & -3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ **B)** $A_3^\star = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ **C)** $A_3^\star = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ -6 & 9 & 3 \\ 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

D) $A_3^\star = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 1 \\ -6 & 9 & -3 \\ 4 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

Pentru problemele **7**, **8**, **9**, **10** considerăm operatorul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, f(v) = A \cdot v$, pentru $(\forall) v \in \mathbb{R}^3$, unde $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

7. Fie vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

A) $\{v_2\}$ generează $\mathrm{Im}(f)$
B) $\{v_1, v_2\}$ formează bază în $\mathrm{Im}(f)$
C) $v_1 - v_2 \notin \mathrm{Im}(f)$
D) $v_1 + v_2 \notin \mathrm{Im}(f)$.

8. Considerăm $\mathrm{Ker}(f)$.

A) $\mathrm{Ker}(f)$ are dimensiune 1 și este dat de ecuația $x - z = 0$
B) $\mathrm{Ker}(f)$ are dimensiune 1 și este dat de ecuațiile $\begin{cases} x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$
C) $\mathrm{Ker}(f)$ are dimensiune 2 și este dat de ecuația $x - z = 0$
D) $\mathrm{Ker}(f)$ are dimensiune 0

9. Fie vectorii $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi $v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

A) $\{v_1, v_2, v_3\}$ formează bază pentru $\mathbb{R}^4$
B) $\{v_1, v_2, v_3\}$ este sistem de generatori liniar-dependent pentru $\mathbb{R}^4$
C) $\{v_1, v_2, v_3\}$ este sistem de generatori liniar independent pentru $\mathbb{R}^4$
D) $\{v_1, v_2, v_3\}$ nu este sistem de generatori şi este sistem liniar-dependent pentru $\mathbb{R}^4$.

10. $L_1 = \mathrm{Ker}(f)^{\perp}$.

A) $\dim(L_1) = 3$ şi are baza $\{\ {}^t(-1,1,1),\ {}^t(1,1,0),\ {}^t(-1,0,1)\}$
B) $\dim(L_1) = 0$ şi are baza $\varnothing$
C) $\dim(L_1) = 2$ şi are baza $\{\ {}^t(1,1,0),\ {}^t(-1,0,1)\}$
D) $\dim(L_1) = 1$ şi are baza $\{\ {}^t(1,-1,1)\}$

Pentru problemele **11** şi **12** considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

11. Polinomul caracteristic $P_A(X)$ este
A) $X(X-2)(X^2-2X+1)$ **B)** $X(X+2)(X^2-2X+1)$
C) $X(X+2)(X^2-1)$ **D)** $X(X-2)(X^2+2X+1)$

12. Fie morfismul $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, dat de $f(v) = (A - I_4)\cdot v, (\forall) v \in \mathbb{R}^4$. $\dim(\mathrm{Im}(f))$ este

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4

Pentru problemele **13** şi **14** considerăm forma pătratică

$$Q_\alpha(x,y,z) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + z^2 + 2\alpha xy + 2\alpha xz$$

13. Forma pătratică $Q_\alpha(x,y,z)$ este pozitiv definită pentru:

A) $\alpha > 1$ **B)** $\alpha > 0$ **C)** $\alpha < 1$ **D)** $\alpha \in \varnothing$

14. Pentru $\alpha = 1$ forma canonică, obţinută prin metoda transformărilor ortogonale, a formei pătratice $Q_1(x',y',z')$ este

A) $x'^2 + (1-\sqrt{3})y'^2 + (1+\sqrt{3})z'^2$ **B)** $x'^2 + 2y'^2 + 2z'^2$
C) $x'^2 - \sqrt{2}y'^2 + \sqrt{2}z'^2$ **D)** $x'^2 + (1-\sqrt{2})y'^2 + (1+\sqrt{2})z'^2$

Pentru problemele **15** şi **16** considerăm dreapta $d \subset \mathbb{R}^4$ ce are ecuaţia $d : \frac{x_1-1}{1} = \frac{x_2-2}{-1} = \frac{x_3+1}{0} = \frac{x_4+2}{2}$ şi punctul $P = {}^t(2,1,0,-1)$

15. Hiperplanul H care trece prin P şi are normala dreapta d are ecuaţia

A) $x_1 - x_2 + 2x_4 = -1$ **B)** $x_1 - x_2 + 2x_4 = 1$
C) $2x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 3$ **D)** $x_1 - x_2 + 2x_4 = 0$

16. Distanţa de la punctul $Q(2,1,3,1)$ la hiperplanul H din problema **15'** este

A) $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ **B)** $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ **C)** $3\sqrt{6}$ **D)** $2\sqrt{6}$

17. Pentru ce valori $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ conica de ecuaţie $x^2 + \alpha y^2 - 2x + 2\beta y - 7 = 0$ reprezintă o hiperbolă ?
A) $(\alpha, \beta) = (-1, -1)$ **B)** $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ **C)** $(\alpha, \beta) = (0, 1)$

D) $(\alpha, \beta) = (0, 0)$

18. Considerăm cuadrica de ecuaţie $x^2 - y^2 - 2pz = 0, p \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Intersecţia cuadricei date cu un plan paralel cu unul din planele de coordonate este o elipsă pentru
A) $p = 1$ **B)** $p = -1$ **C)** $p = 2$ **D)** $p \in \varnothing$