GEOMETRIE ŞI ALGEBRĂ LINIARĂ

Curs 8
Matricea unui morfism. Vectori şi valori proprii

Voi încheia consideraţiile despre sisteme liniare cu o teoremă pe care o cunoaşteţi din clasa a XI-a, anume regula Cramer.

Considerăm sistemul de n ecuaţii liniare cu n necunoscute

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n. \end{cases}$$

Forma matriceală a acestuia este $AX = B$, unde $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ şi $X, B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Notăm cu $A_j \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), 1 \leqslant j \leqslant n$ matricele ce se obţin din A înlocuind $C_j(A)$, coloana j a matricei A, cu coloana B a termenilor liberi.

Teorema 1 (Regula Cramer)**.** *Considerăm sistemul $AX = B$ de n ecuaţii liniare cu n necunoscute. Presupunem că $\det(A) \neq 0$. Atunci soluţia sistemului este dată de $x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}, 1 \leqslant j \leqslant n$.*

Recapitulăm metoda de rezolvare a sistemelor liniare.

Pentru rezolvarea unui astfel de sistem scriem matricea extinsă asociată acestuia. O aducem la forma eşalon care este unică.

Dacă avem un pivot pe ultima coloană sistemul este incompatibil. La nivel de ecuaţii aceasta înseamnă o ecuaţie cu membrul stâng nul şi membrul drept egal cu 1 (pivotul). Deci nu avem soluţii.

Dacă nu avem pivot pe ultima coloană sistemul este compatibil.

Numărul de pivoţi este egal cu rangul matricii sistemului este egal cu rangul matricii extinse (sistem compatibil) este egal cu numărul necunoscutelor principale. Trecem necunoscutele secundare în membrul drept şi aflăm necunoscutele principale în funcţie de cele secundare.

Se scrie soluţia în funcţie de necunoscutele secundare, care sunt parametri.

Sistemele omogene întotdeauna sunt compatibile, având cel puţin soluţia nulă.

Dacă sistemul are n ecuaţii şi n necunoscute cu matricea sistemului inversabilă, atunci forma eşalon este matricea I_n şi soluţia este dată de regula lui Cramer.

Matrice şi morfisme

Considerăm $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ şi $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ şi $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

Reamintesc că înmulţirea matricelor se face linie pe coloană, în cazul de faţă $L_i(A \cdot X) = L_i(A) \cdot X, 1 \leqslant i \leqslant m$.

(1) Se demonstrează uşor că $A \cdot (X + Y) = A \cdot X + A \cdot Y$

$$A \cdot (X+Y) = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}(x_j + y_j) \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}(x_j + y_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}(x_j + y_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j + \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j + \sum_{j=1}^n a_{2j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j + \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}y_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}y_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}y_j \end{pmatrix} = A \cdot X + A \cdot Y.$$

(2) Chiar mai simplu se arată că $A \cdot (\alpha X) = \alpha A \cdot X$ pentru A şi X ca mai sus şi $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dată $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, notăm cu $\cdot_A$ înmulţirea cu matricea A.

Avem deci $\cdot_A : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ este morfism. Înmulţirea este aditivă (proprietatea (1)) şi respectiv omogenă (proprietatea (2)).

Considerăm acum V un spaţiu vectorial real cu $\dim(V) = n$. Fie $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ o bază pentru V. O primă observaţie este că $(\forall) v \in V$, v are o scriere **unică** ca o combinaţie liniară de vectorii bazei $\mathcal{B}$.

Să presupunem că există $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ şi $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ a.î. $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \Leftrightarrow (\alpha_1 - \beta_1)v_1 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)v_n = 0_V$. Dar $v_1, \ldots v_n$ sunt liniar independenţi $\Rightarrow \alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i$ pentru $1 \leqslant i \leqslant n$.

Deci $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ cu coeficienţi unici. Aceşti coeficienţi se numesc *coordonatele* vectorului v în baza $\mathcal{B}$. Aleasă o bază $\mathcal{B} \subset V$ orice vector din V se identifică cu vectorul format din coordonatele sale. $v \leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$.

Am folosit indicele $\mathcal{B}$ pentru vectorul coordonatelor pentru a specifica baza în care se face scrierea.

Să demonstrăm că $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ este izomorfism de spaţii vectoriale. Este clar că este morfism. Este injectiv din unicitatea scrierii unui vector în baza $\mathcal{B}$. Surjectiv: fie $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, atunci $\exists\ v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \in V$ a.î. $f(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$. Baza în care am scris v este $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$.

Deci orice spaţiu vectorial real V, cu $\dim(V) = n$ este izomorf cu $\mathbb{R}^n$.

Fie V şi W două $\mathbb{R}$ spaţii vectoriale cu $\dim(V) = n$ şi $\dim(W) = m$ şi bazele $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ şi $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$. $V \simeq \mathbb{R}^n$ (izomorfe) şi $W \simeq \mathbb{R}^m$.

Considerăm $f : V \longrightarrow W$ un morfism între cele două spaţii vectoriale.

Pentru fiecare $1 \leqslant j \leqslant n$ avem $f(v_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} w_i$, scrierea unică a vectorului $f(v_j)$ în baza $\mathcal{C}$.

Notăm $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = (a_{i,j})_{\substack{i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n}}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ matricea asociată morfismului f în bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$. $C_j(M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f))$, coloana j a acestei matrice este formată din coordonatele vectorului $f(v_j)$ în baza $\mathcal{C}$.

Fie $v \in V$. Atunci $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, scriere unică. cu $\alpha_j \in \mathbb{R}, 1 \leqslant j \leqslant n$.

$f(v) = f(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j f(v_j) = \sum_{j=1}^n \alpha_j (\sum_{i=1}^n a_{i,j} w_i) = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n \alpha_j a_{i,j}) w_i = \sum_{i=1}^n (\sum_{j=1}^n a_{i,j} \alpha_j) w_i$.

Observaţia 2. Ceea ce am obţinut este o echivalenţă între matrice şi morfisme între spaţii vectoriale.

Am văzut că dată o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $\cdot_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este morfism de spaţii vectoriale.

Reciproc pentru $f : V \longrightarrow W$, morfism de spaţii vectoriale cu $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ şi $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}$ baze în V şi respectiv W, ca mai sus avem asociată matricea $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Vectorul de coordonate al lui $f(v)$ în baza $\mathcal{C}$ este

$\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} a_{1,j}\alpha_j \\ \sum_{j=1}^{n} a_{2,j}\alpha_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}\alpha_j \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, unde $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ este vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}$.

De fapt avem un izomorfism de spaţii vectoriale:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,W) & \simeq & \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \\ f & \leftrightarrow & M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \end{array}$$

Exemplul 3. Fie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$. Folosind notaţiile anterioare, considerăm $\mathcal{B} = \{v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\} \subset \mathbb{R}^2$ şi $\mathcal{C} = \{w_1 = 1\} \subset \mathbb{R}$ baze. Astfel $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$ şi $f(v) = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = f(xv_1 + yv_2) = f(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y$.

Fie V, W şi U spaţii vectoriale finit dimensionale cu bazele $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$. şi $f : V \longrightarrow W$ şi $g : W \longrightarrow U$ morfisme între aceste spaţii vectoriale.

Atunci $M_{\mathcal{B},\mathcal{D}}(g \circ f) = M_{\mathcal{C},\mathcal{D}}(g) \cdot M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$.

Dacă $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ sunt baze în V atunci pentru 1_V, morfismul identitate al spaţiului vectorial V avem $A = M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(1_V)$ matricea de trecere de la $\mathcal{B}_2$ la $\mathcal{B}_1$ (elementele lui $\mathcal{B}_1$ se scriu în funcţie de elementele lui $\mathcal{B}_2$ şi coordonatele se scriu pe coloanele matricii A).

Avem faptul că vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}_2$ este egal cu $M_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(1_V)$ înmulţit cu vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}_1$.

Să vedem cum se schimbă matricea morfismului la schimbarea bazelor.

Dacă considerăm bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{B}'$ în V şi $\mathcal{C}$ şi $\mathcal{C}'$ în W, şi morfismul $f : V \longrightarrow W$. Avem următoarele compuneri

$$V_{\mathcal{B}'} \xrightarrow{1_V} V_{\mathcal{B}} \xrightarrow{f} W_{\mathcal{C}} \xrightarrow{1_W} W_{\mathcal{C}'}$$

Folosind formula matricii asociate compunerii morfismelor rezultă următoarea formulă.

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f) = M_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(1_W)^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V).$$

Exemplul 4. Să considerăm $V = \mathbb{R}[X]_2$ spaţiul vectorial al polinoamelor de grad cel mult 2 cu coeficienţi reali . Baza considerată este $\mathcal{B} = \{X^2, X, 1\}$. Fie derivarea $T : \mathbb{R}[X]_2 \longrightarrow \mathbb{R}[X]_2$. Ştim că derivarea este aditivă şi omogenă, deci un morfism. Pe elementele bazei avem $T(X^i) = iT^{i-1}$, pentru $i = 1, 2$, şi $T(1) = 0$. Astfel,

$M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Pe fiecare coloană avem coordonatele vectorului $T(X^i)$ în baza $\mathcal{B}$. De exemplu $T(X^2) = (X^2)' = 2X = 0 \cdot X^2 + 2 \cdot X + 0 \cdot 1$. Vectorul coordonatelor este $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, prima coloană a matricii.

Considerăm şi baza $\mathcal{B}' = \{(X-1)^2, X, 1\}$. Verificaţi că este bază!

$T((X-1)^2) = 2(X-1) = 2X-2, T(X) = 1, T(1) = 0$, de unde $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. În acest exemplu $W = V = \mathbb{R}[X]_2$, iar $\mathcal{C}' = \mathcal{B}'$ iar $\mathcal{C} = \mathcal{B}$.

Vreau să verificăm formula $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)^{-1} M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(T) M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)$. Mai trebuie să determinăm $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)$, matricea de trecere din baza $\mathcal{B}$ în baza $\mathcal{B}'$. Avem $(X-1)^2 = X^2 - 2X + 1, X = X$ şi 1 =1, deci $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Inversa acesteia, $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Se verifică faptul că

$$M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerăm $f : V \longrightarrow W$ morfism, unde în V avem baza $\mathcal{B}$ iar în W baza $\mathcal{C}$.

Cum aflăm dacă $v \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f(v) = 0 \Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = 0$, unde $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ este vectorul coordonatelor lui v în baza $\mathcal{B}$. Acest vector este deci soluţia sistemului omogen scris mai sus.

Când $w \in \mathrm{Im}(f)$? $w \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \exists v \in V$ a.î. $f(v) = w \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = w = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$, unde $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ este vectorul coordonatelor lui w în baza $\mathcal{C}$. Deci $w \in \mathrm{Im}(f)$ dacă şi numai dacă sistemul $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ are soluţie. Notăm $A = M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$. Reamintesc că $A \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \alpha_1 C_1(A) + \alpha_2 C_2(A) + \ldots + \alpha_n C_n(A)$. Deci $w \in \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow w$ este combinaţie liniară de coloanele matricei $A \Leftrightarrow w \in < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$. Deci $\mathrm{Im}(f) = < C_1(A), \ldots, C_n(A) >$.

Vectori şi valori proprii

Definiţia 5. Fie $f : V \longrightarrow V$ o aplicaţie liniară.
• un element $\underline{\lambda \in \mathbb{R}}$ se numeşte valoare proprie a lui f dacă există $v \in V \backslash \{0\}$ cu $f(v) = \lambda v$ (un astfel de vector se numeşte vector propriu corespunzător valorii proprii λ).
• un element $v \in V \backslash \{0\}$ se numeşte vector propriu pentru f dacă există $\lambda \in \mathbb{R}$ cu $f(v) = \lambda v$.

Notăm cu $M_{\mathcal{B}}(f) = M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f)$.

Propoziţia 6. *Fie $A = M_{\mathcal{B}}(f)$, unde $\mathcal{B}$ este bază a lui V. $\lambda \in \mathbb{R}$ e valoare proprie a lui $f \Leftrightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0$.*

Definiţia 7. Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, atunci $P_A(X) = \det(XI_n - A)$ se numeşte *polinomul caracteristic* al lui A. (Observăm că $XI_n - A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}[X])$).

Observaţia 8. 0 este valoare proprie pentru f, dacă şi numai dacă matricea $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ este singulară.

Propoziţia 9. *Dacă $f : V \longrightarrow V$ este aplicaţie liniară, iar $A = M_{\mathcal{B}}(f)$ într-o bază $\mathcal{B}$, atunci P_A nu depinde de baza $\mathcal{B}$.*

Demonstraţie: Dacă $\mathcal{B}'$ e altă bază, ştim că $A' = M_{\mathcal{B}'}(f) = Q^{-1}AQ$ unde Q este matricea inversabilă $Q = M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(1_V)$. Atunci $P_{A'}(X) = \det(XI_n - Q^{-1}AQ) = \det(X \cdot Q^{-1}Q - Q^{-1}AQ) = \det(Q^{-1}(XI_n - A)Q) = \det(Q^{-1})\det(XI_n - A)\det(Q) = \det(Q^{-1})\det(Q)\det(XI_n - A) = \det(XI_n - A) = P_A(X)$.

□

Aşadar valorile proprii ale lui f sunt rădăcinile în $\mathbb{R}$ ale polinomului caracteristic al lui f. Definim valorile proprii ale unei matrice A ca fiind valorile proprii ale aplicaţiei liniare asociate lui A prin izomorfismul $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ (pentru o bază fixată a lui V), sau echivalent rădăcinile polinomului $P_A(X)$ în $\mathbb{R}$.

Exemplul 10. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Dacă $M_{\mathcal{B}}(f) = A$ într-o bază $\mathcal{B}$, atunci $P_T(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 2X + 2 = (X-1)^2 + 1$ şi f nu are valori proprii, valorile proprii fiind elemente din $\mathbb{R}$.

Definiţia 11. $f : V \longrightarrow V$ morfism se numeşte *diagonalizabil* dacă V are o bază $\mathcal{B}$ formată din vectori proprii pentru f. În acest caz $M_{\mathcal{B}}(f)$ este diagonală formată din valori proprii.

Să vedem când este un morfism diagonalizabil.

Propoziţia 12. *Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ valori proprii distincte pentru $f : V \longrightarrow V$ şi $v_1, \ldots, v_p$ vectori proprii corespunzători valorilor proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Atunci $v_1, \ldots, v_p$ sunt liniar independenţi.*

Corolarul 13. *Fie $f : V \longrightarrow V$ morfism. Dacă $P_f(X)$ are n valori proprii distincte, unde $n = \dim(V)$ atunci f este diagonalizabil.*

Exemplul 14. Considerăm matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. A este matricea unui morfism f într-o bază $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^3$. Polinomul caracteristic este $P(X) = (X+1)^2(X-3)$. Pentru $\lambda_1 = -1$ calculăm vectorii proprii din sistemul $(A-(-1)I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Rangul matricii $(A - (-1)I_3)$ este 1 şi vectorii proprii sunt $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ şi $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Se observă că avem doi vectori proprii liniar independenţi asociaţi aceleaşi valori proprii $\lambda_1 = -1$ ce are multiplicitatea 2. Pentru valoarea proprie $\lambda_2 = 3$ avem sistemul $(A - 3I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Rangul matricii $(A - 3I_3)$ este 2, şi vectorul propriu asociat este $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Astfel notând cu $Q = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$. Avem $A = QDQ^{-1}$, unde $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, matricea ce are pe diagonală valorile proprii.

Avem şi următoarul rezultat foarte important care explică de ce matircea de mai sus este diagonalizabilă neavând toate valorile proprii distincte.

Teorema 15. *Orice matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $A = A^t$ (simetrică) este digonalizabilă.*