FACULTATEA DE MATEMATICĂ
ȘI INFORMATICĂ

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI

TEZĂ DE DIZERTAȚIE

Elemente stocastice de analiză a traficului rutier

Coordonator științific:
Conf.dr. Ionel POPESCU

Masterand:
Mihai Florin ALEXANDRESCU

BUCUREȘTI, 2017

Cuprins

Introducere

Deoarece sunt din ce în ce mai multe mașini și, în general, infrastructura nu face față, au început să apară modelele matematice care analizează traficul rutier. Ca orice model matematic, ele încearcă pe cât posibil să explice realitatea, bazându-se pe un set (limitat) de ipoteze și rezultate matematice. Ele se împart în mai multe categorii. De exemplu, putem folosi modele deterministe care se bazează pe ecuații de undă penru a determina propagarea aglomerației pe o autostradă. Totuși, anumite modele deterministe eșuează deoarece ele nu iau în calcul performanțele diferite ale mașinilor, nivelul diferit de pregătire al șoferilor, etc. Pentru acestea, este nevoie să considerăm caracterul stocastic. Totuși, anumite modele deterministe cum ar fi optimizarea într-un graf pentru a găsi drumul optim pe care să o ia o anumită mașină în funcție de condițiile de trafic au fost dezvoltate. Printre ele, cel mai celebru este algoritmul lui Dijkstra, care caută drumul cel mai scurt într-un graf (în cazul nostru ne putem gândi la graf ca fiind străzile unui oraș sau drumurile care leagă orașele). De exemplu, FedEx (o companie americană de curierat), folosind modele ale cercetării operaționale, a determinat că cel mai bine este ca șoferii să facă cât mai mult la dreapta, evitând pe cât posibil să facă stânga în intersecții. Un alt experiment care a avut loc a pus 20 de șoferi să se învârtă într-un cerc unul în spatele celuilalt. S-a constatat că dacă șoferii nu păstrează o distanță cât mai uniformă unul față de celălalt și sunt nevoiți să pună frâne bruște, atunci se va propaga un blocaj.

Situațiile care se pot întâlni în trafic sunt nenumărate, deci trebuie să fim atenți la ce model folosim și la presupunerile și ipotezele modelului. Dacă aceste ipoteze nu sunt respectate, putem avea rezultate cu totul neașteptate, care se îndepărtează de cadrul modelului. De exemplu, trebuie să ne gândim dacă drumul este drept sau este în pantă, dacă pe drumul respectiv se regăsesc vehicule care circulă încet, dacă drumul este în oraș sau în afara orașului, etc.

Pentru a analiza (cât mai bine) traficul avem nevoie de un arsenal din diverse ramuri ale matematicii cum ar fi statistică și analiza seriilor de timp (dacă dorim să facem, de exemplu, o prognoză pentru o anumită porțiune de drum pentru a ruta mașini de urgență), optimizare liniară și neliniară (pentu găsirea drumului optim, care minimizează timpul sau consumul de combustibil), calcul stocastic și teoria cozilor de așteptare (dacă dorim să studiem aglomerarea la puncte de taxare, la benzinării, la semafor, la drumuri care nu au prioritate, dacă dorim să analizăm aglomerarea generată de mașinile care caută parcare într-un oraș aglomerat, etc).

În plus, pot apărea evenimente imprevizibile cum ar fi accidente care pot perturba enorm parametrii modelului. De aceea și acest aspect poate fi luat în calcul. Orice intersecție, atât semaforizată cât și nesemaforizată, poate complica modelul. Strângerea datelor, de asemenea, poate fi un model în sine (de exemplu, dacă avem camere și folosim un algoritm de machine-learning pentru recunoașterea elementelor importante cum ar fi fluxul de mașini, viteza cu care circulă, etc.)

Generalizările și ipotezele se pot complica oricât de mult. De exemplu, în loc de a analiza o singură coadă de așteptare, putem să analizăm ansamblul format din *toate* cozile de așteptare într-un oraș prin intermediul așa-numitor rețele de așteptare.

Evident, teoria matematică este destul de versatilă, noi putând să o folosim pentru o multitudine de situații reale. De exemplu, teoria cozilor de așteptare cu spațiul stărilor continuu are aplicații în simularea apei care curge într-un baraj. Teoria rețelelor de așteptare are aplicații în rețelistică în determinarea blocajelor pachetelor.

Lucrarea va fi structurată în două părți.

Prima parte va conține definiții și rezultate care mă vor ajuta atât în dezvoltarea modelului, cât și în stabilirea contextului teoretic în care mă aflu. Nu este o prezentare exhaustivă, multe demonstrații fiind omise, dar ajută în a stabili coordonatele în care ne aflăm.

A doua parte conține câteva modele, predominant stocastice. Cele mai multe vor fi modelele care analizează cozile.

Principalele probleme care se pun sunt:

1) Sugerarea unei rute optime mașinilor care pornesc dintr-un punct O și au ca destinație un punct D.

2) Determinarea timpului minim pentru care un semafor trebuie să stea verde astfel încât să treacă toate mașinile prezente pe strada respectivă.

3) Inferența statistică asupra disrtibuției mașinilor care circulă pe toate tronsoanele.

4) Analiza cozilor la puncte de taxare și la benzinării.

Lucrarea de față a fost redactată folosind LyX, un editor de text care are la bază limbajul LaTeX. Pentru crearea unor imagini am folosit Inkscape si GIMP.

Partea 1. Teorie și preliminarii

Elemente de teoria grafurilor

Definiție: *Un* ***graf (orientat)*** *este un ansamblu $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$, unde $\mathcal{N}$ reprezintă nodurile (care în modelul nostru vor reprezenta orașele sau intersecțiile dintr-un oraș) și $\mathcal{L}$ reprezintă muchiile (legăturile) dintre noduri. O ipoteză suplimentară (aceea de orientare) presupune o relație de ordonare a perechilor din $\mathcal{L}$. Adică, pentru două noduri $a, b \in \mathcal{N}$, putem avea o muchie $[a, b]$, dar să nu avem muchia $[b, a]$. În modelul nostru, acest lucru se traduce prin drumurile cu sens unic. Pentru ușurință, vom noda mulțimea $\mathcal{N}$ cu $\{1, 2, 3, ..., N\}$, iar mulțimea L va fi reprezentată de perechile (i, j) cu $i, j \in N$.*

Definiție: *Fie graful orientat G în care avem mulțimea $\mathcal{N} = \{1, 2, 3, ..., N\}$. Atunci vom numi* ***matrice de adiacență*** *următoarea matrice:*

$$A_G = (a_{ij}) = \begin{cases} 1, \, dacă \, (i, j) \in L \\ 0, \, altfel \end{cases}$$

De exemplu, dacă avem graful $G = (N, L)$ cu $N = \{1, 2, 3, 4\}$ și
$L = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 4), (2, 4)\}$, atunci matricea sa de adiacență va fi:

$$A_G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Elemente de teoria probabilităților, a proceselor stocastice și a cozilor de așteptare

Fie X o variabilă aleatoare definită pe un spațiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definiție: *X este **repartizată Poisson** de parametru λ (voi nota $X \sim Poisson(\lambda)$) dacă:*

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{\lambda}}{k!}$$

Definiție: *X este **repartizată exponențial** de parametru $\lambda > 0$ (voi nota $X \sim Exp(\lambda)$) dacă:*

$$P(X < x) = \lambda exp(-\lambda x)$$

Rezultat: *Fie X și Y două variabile aleatoare independente repartizate Poisson de parametri λ, respectiv μ. Atunci $X + Y \sim Poisson(\lambda + \mu)$.*

Demonstrație:

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(X+Y=k, X=i) = \sum_{i=0}^{k} P(Y=k-i, X=i) \\ &= \sum_{i=0}^{k} P(Y=k-i) P(X=i) = \sum_{i=0}^{k} e^{-\mu} \frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\ &= e^{-(\mu+\lambda)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \mu^{k-i} \lambda^i = e^{-(\mu+\lambda)} \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mu^{k-i} \lambda^i \\ &= \frac{(\mu+\lambda)^k}{k!} \cdot e^{-(\mu+\lambda)} \end{aligned}$$

Rezultat: *Dacă X~$Poisson(\lambda)$,atunci $EX = \lambda$și $Var(X) = \lambda$, unde E este media și Var este varianța.*
(Demonstrația este trivială.)

Definiție: *Un sistem $(\Omega, \mathcal{F}, P, (X_t)_t, t \in T)$ se numește **proces stocastic** cu spațiul stărilor E dacă:*
1) $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ este câmp de probabilitate.
2) $X_t : \Omega \to E$, cu $t \in T$ este o variabilă aleatoare cu valori în spațiul măsurabil $(E, \mathcal{B})$
*3) T se numește **mulțimea timpului**.*
*4) Aplicația $t \in T \longmapsto X_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$ se numește **traiectorie** a procesului.*

Definiție: *Un proces stocastic $N(.)$ se numește* **proces de numărare** *dacă satisface condițiile:*

1) $N(t) \in \mathbb{N}, \forall t \in T$

2) $N(.)$ *e crescător.*

3) Pentru $s < t$, $N(t) - N(s)$ *„numără” evenimentele care au loc în intervalul* $(s, t]$

Definiție: *Un proces de numărare $N(.)$ este un* **proces Poisson** *de intensitate $\lambda > 0$ dacă:*

1) $P(N(0) = 0) = 1$

2) $N(.)$ *are creșteri independente și e staționar (i.e. pt $s < t$, avem că* $P \circ [N(t) - N(s)]^{-1} = P \circ [N(s-t)^{-1}]$

3) Numărul de evenimente în orice interval de lungime $\triangle t$ este distribuit Poisson cu media $\lambda \triangle t$.

Definiție: *Un proces stocastic se numește* **proces Poisson compus** *dacă are următoarele caracteristici:*

- este continuu

- are salturi

- salturile sosesc aleator prin intermediul unui proces Poisson

- mărimea salturilor este aleatoare, cu o repartiție specificată.

Formal, avem pentru un **proces Poisson compus cu parametru** λ *și repartiția mărimii salturilor G este notat cu* $Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} D_i$, *unde N_t este un proces Poisson de parametru λ, D_i sunt variabile aleatoare independente și identic repartizate având repartiția G. Deasemenea, D_i-urile sunt independente de N_t-uri.*

Teoremă[C1]: *Fie $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$ un proces Poisson(λ). Pentru fiecare $t \geq 0$, matricea de trecere $P(t) = (p_{ij}(t))$ este dată de:*

$$p_{ij}(t) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda t)^{(j-i)}}{(j-i)!} e^{-\lambda t} & \text{pentru } j = i,\ i+1, ... \\ 0 & \text{pentru } j = 0,\ 1,\ i-1 \end{cases} \quad \text{cu } i \in E$$

Definiție: *Fie $(X_t)_t$ un proces stocastic. Vom spune că $(X_t)_t$ este* **proces Markov (lanț Markov)** *dacă $\forall k > 1$, $t_1 \leq ... \leq t_k$, $t_i \in T$, $n_1, .., n_k \in E$ (unde E este cel mult numărabilă) avem relația:*

$$\boxed{P(X_{t_k} = n_k \,|\, X_{t_j} = n_j\, j \in \{1, .., k-1\}) = P(X_{t_k} = n_k \,|\, X_{t_{k-1}} = n_{k-1})}$$

Probabilitățile de trecere *asociate lanțului Markov definit mai sus: fie $i, j \in E$, $s < t$, $s, t \in T$. Definim $p_{ij}(s,t) = P(X_t = j \,|\, X_s = i)$.* ***Matricea de trecere*** *va fi definită prin* $\mathbf{P}(s,t) = (p_{ij}(s,t))_{i.j \in E}$

Un ***proces Markov omogen*** *respectă relația:*

$$\boxed{p_{mn}(s,t) = p_{mn}(t-s),\, \forall s < t}.$$

Relația Chapman-Kolmogorov:
Dacă $s, \tau, t \in T$, $s < \tau < t$, *atunci este verificată relația:* $\mathbf{P}(s,t) = \mathbf{P}(s,\tau)\mathbf{P}(\tau,t)$.

Observăm că, dacă notăm cu $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(s, s+t)$ *matricea de trecere după timpul* t *și avem, prin definiție,* $\mathbf{P}(0)$ *matricea unitate, atunci relația Chapman-Kolmogorov (pentru procese omogene) se scrie ca fiind*

$$\boxed{\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t),\, \forall s,t \in T}.$$

Teoremă [C3]***:***
Fie N_t *un proces Poisson de intensitate* $\lambda > 0$. *Pentru fiecare* $n \geq 1$, *definim* $\tau_n = inf\{t \geq 0 : N_t = n\}$, *unde* τ_n *momentul saltului* n. *Știm că* $N_t \uparrow \infty a.s$ *când* $t \to \infty$ *și* $\tau_n < \infty$ *a.s.*
Atunci, aproape sigur, procesul $(X_t)_t$ *satisface:*

$$X_t = \begin{cases} 0,\, dacă\, t < \tau_1 \\ ... \\ n,\, dacă\, \tau_n \leq t < \tau_{n+1} \\ ... \end{cases}$$

Mai mult, $\tau_n \uparrow \infty$ *a.s. și variabilele aleatoare* $\tau_1, \tau_2 - \tau_1, .., \tau_n - \tau_{n-1}, ...$ *sunt independente, identic repartizate și satisfac relația:*
$P(\tau_1 > a) = exp(-\lambda a)$.*(*)*
Reciproc, dacă $\sigma_1, .., \sigma_n ...$ *e un șir de variabile aleatoare independente și identic repartizate astfel încât are loc relația (*) de mai sus pentru* σ_1, *atunci procesul* Y_t *definit mai jos este un proces Poisson de intensitate* λ.

$$Y_t = \begin{cases} 0,\, dacă\, t < \sigma_1 \\ ... \\ n,\, dacă\, \sigma_1 + ... + \sigma_n \leq t < \sigma_1 + ... + \sigma_n + \sigma_{n+1} \\ ... \end{cases}$$

Teoremă (lipsa de memorie a repartiției exponențiale)[N2]***:***
Fie X *o variabilă aleatoare cu valori pozitive. Sunt echivalente:*
1) $\exists \lambda > 0$ *astfel încât* X *este o variabilă aleatoare distribuită exponențial de parametru* λ.
2) $P(X > x + y \,|\, X > x) = P(X > y), \forall x, y \geq 0$. *(i.e.* X *este* ***lipsită de memorie****)*
Interpretare pentru 2): Dacă X este o durată de așteptare și dacă am așteptat un anumit timp x, atunci din punct de vedere probabilist, această condiție nu are nicio influență asupra duratei ulterioare a așteptării.

Demonstrație:

Fie

$f(x) = P(X > x)$

$P(X > x + y \,|\, X > x) = \dfrac{P(X > x + y\,,\, X > x)}{P(X > x)} = \dfrac{P(X > x + y)}{P(X > x)} = \dfrac{f(x + y)}{f(x)}$

Așadar,

2) $\Leftrightarrow f(x)f(y) = f(x + y), \forall x, y > 0 \Leftrightarrow \exists \lambda > 0\, a.\hat{i}\, f(x) = e^{-\lambda x} \Leftrightarrow P(X > x) = e^{-\lambda x}, \forall x > 0 \Leftrightarrow X \sim Exp(\lambda)$

.

<u>Elementele principale ale fenomenelor de așteptare</u> sunt:

- **fluxul de așteptare** reprezentat de indicatori care descriu evoluția în timp a cererii serviciului de către solicitatori (în cazul nostru, poate reprezenta fluxul de mașini pe o stradă sau printr-o intersecție)
- **camera de așteptare** care este spațiul în care unitățile care sosesc își așteaptă serviciul (care poate fi considerată ca fiind o stradă pe care așteaptă vehiculele)
- **sistemul de serviciu** care este ansamblul fizic care asigură serviciul solicitat de unități; el poate avea una sau mai multe stații care execută serviciul unităților (reprezentate de vehicule). Sistemul de serviciu este caracterizat de o disciplină de servire, după cum vom vedea mai jos.

Aceste elemente ale fenomenelor de așteptare vor deveni mai clare pe măsură ce se vor vedea exemple concrete în care vor apărea.

Definiție: Notația lui Kendall *pentru un sistem de așteptare este reprezentată de un 5-tuplu*$(rep.i/rep.s/c/K/d)$*, unde avem că:*

- *rep.i = repartiția de intrare*
- *rep.s = repartiția fluxului de serviciu*
- *c = numărul stațiilor identice care funcționează, în paralel, în cadrul sistemului de serviciu*
- *K = reprezintă capacitatea „camerei” de așteptare*
- *d = disciplina serviciului.*

Câteva exemple de **discipline de servire** sunt:

- FIFO (first in - first out) - primul venit, primul servit
- LIFO (last in - first out) - ultimul venit, primul servit
- SIRO (service in random order) - servire în ordine aleatoare

La acestea mai putem adăuga **regimuri prioritare de tip ne-preemptiv** (adică clienți care sunt deja în sistem și au prioritate mică sunt lăsați să își termine treaba) sau **regimuri prioritare preemptive** (clienții care au prioritate mică sunt dați afară în favoarea celor cu prioritate mai mare).

În cazul nostru, numărul stațiilor identice care funcționează, în paralel, în cadrul sistemului de serviciu poate fi reprezentat de numărul de benzi sau de numărul de pompe de benzină. Depinde enorm de mult de ce vrem să urmărim. Capacitatea „camerei" poate fi reprezentată de exemplu de câte mașini se pot afla pe o stradă. Disciplina serviciului în majoritatea modelelor va fi FIFO (First In - First Out), adică „primul venit, primul servit".

De acum încolo, dacă „camera de așteptare" are capacitate infinită, vom omite a o mai scrie. Deasemenea, vom omite disciplina serviciului, deoarece ea va fi, în toate cazurile, FIFO.

Procese de naștere și moarte[C1].

Relația Chapman-Kolmogorov:
Dacă $s, \tau, t \in T$, $s < \tau < t$, atunci este verificată relația: $\mathbf{P}(s,t) = \mathbf{P}(s,\tau)\mathbf{P}(\tau,t)$.

Observăm că, dacă notăm cu $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(s, s+t)$ matricea de trecere după timpul t și avem, prin definiție, $\mathbf{P}(0)$ matricea unitate, atunci relația Chapman-Kolmogorov (pentru procese omogene) se scrie ca fiind

$$\boxed{\mathbf{P}(s+t) = \mathbf{P}(s)\mathbf{P}(t),\ \forall s, t \in T.}$$

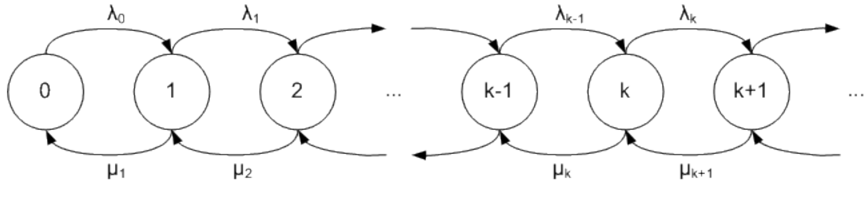
Pentru un lanț markov cu mulțimea timpului $T = [0, \infty)$, voi introduce notațiile

$$q_{ij} = \lim_{t \to 0,\, t>0} \frac{p_{ij}(t)}{t},\ i, j \in E, i \neq j$$
$$q_{ii} = \lim_{t \to 0,\, t>0} \frac{p_{ii}(t) - 1}{t},\ i \in E$$

Definiție: *Un lanț Markov omogen $(X_t)_{t \in [0,\infty)}$ și cu spațiul stărilor $E = \{0, 1, 2, ...\}$ se numește **proces de naștere și moarte** dacă*

$$q_{ij} = \begin{cases} \mu_i & pentru\, j = i-1\, i \geq 1 \\ \lambda_i & pentru\, j = i+1,\, i \in E \\ -\lambda_i - \mu_i & pentru\, j = i,\, i \in E \\ 0 & altfel \end{cases}$$

Lanțul markov asociat unui proces de naștere și moarte se găsește în figura de mai jos[I3]:



Definiție: *Un proces de naștere și moarte* $(X_t)_{t\in[0,\infty)}$ *se numește* ***proces Poisson de rată*** λ *dacă* $\lambda_i = \lambda > 0$, $\mu_i = 0$, $i \in E$.

Teoremă[C1] ***:***

Pentru fiecare $t > 0$, $i \in E$, *probabilitățile de trecere* $p_{ij}(t)$ *satisfac sistemul având condițiile inițiale* $p_{ij}(0) = \delta_{ij}$, $i, j \in E$*:*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}p_{i0}(t) = -\lambda_0 p_{i0}(t) + \mu_1 p_{i1}(t) \\ \dfrac{d}{dt}p_{ij}(t) = \lambda_{j-1}p_{i,j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j)p_{ij}(t) + \mu_{j+1}p_{i,j+1}(t) \qquad pentru\, j \geq 1 \end{cases}$$

Definiție: ***Factorul de serviciu*** *(sau* ***intensitatea de trafic****) se va nota cu* ρ*. Indică, în medie, numărul de unități care vin în perioada unui singur timp de serviciu. Acest număr are o importanță fundamentală în teoria așteptării, deoarece o dată ce am stabilit repartiția timpului de serviciu, toate caracteristicile modelului de așteptare studiat se vor exprima în funcție de acest parametru.*

De exemplu, pentru un sistem de așteptare $M/M/1/\infty/FIFO$ avem $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Legea lui Little [A30]

O teoremă extrem de importantă care apare în teoria cozilor de așteptare este Teorema lui Little care ne zice că pe termen lung, numărul mediu de entități într-un sistem stabil l este egal cu rata pe termen lung a sosirilor, notată cu λ, înmulțită cu timpul mediu w în care o entitate stă într-o coadă de așteptare.

Mai exact, avem

Teoremă(Little):

$$\boxed{l = \lambda w}$$

Demonstrație și intuiție:

Fie un sistem de aștepare în care entități sosesc, petrec ceva timp în sistem, apoi ies din sistem (elaborează în cazul nostru).

Notăm cu C_n a n-a entitate care intră în sistem la momentul t_n. Procesul pe puncte („point process”)$\{t_n : n \geq 1\}$ e presupus a fi crescător și e un șir de numere nenegative. Procesul de numărare $\{N(t) : t \geq 0\}$ care numără sosirile în intervalul $(0, t]$, definit prin

$$N(t) = \begin{cases} \max\{n : t_n \leq t\} \\ \\ 0 \, (dacă \, nu \, avem \, sosiri \, pana \, la \, mom. \, t) \end{cases}$$

De unde rezultă că $\dfrac{N(t)}{t} \to \lambda \Rightarrow N(t) = N^d(t) + \sum\limits_i I\{t_i \leq t < t_i + W_i\}$.

Odată intrat în sistem, C_n stă $W_n \geq 0$ unități de timp în sistem (să zicem secunde) și apoi pleacă din sistem la momentul

$t_n^d = t_n + W_n$

Notăm cu $N^d(t)$ numărul de entități care au ieșit din sistem până la momentul t. El este procesul de numărare $\{N^d(t) : t \geq 0\}$asociat timpilor de plecare din sistem $\{t_n^d\}$

Mai observăm că $N^d(t) \leq N(t)$, $t \geq 0$.

Considerăm că o entitate este în sistem la momentul de timp t dacă și numai dacă $t_n \leq t < t_n^d = t_n + W_n$ și definim

$L(t)$ = numărul total de entități în sistem la momentul t astfel:

$$\begin{aligned} L(t) \quad &= \sum_{n=1}^{\infty} I\{t_n \leq t < t_n^d\} \\ &= \sum_{\{n : t_n \leq t\}} I\{W_n > t - t_n\} \\ &= \sum_{n=1}^{N(t)} I\{W_n > t - t_n\} \end{aligned}$$

Atunci când limitele există, definim

$\lambda = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{N(t)}{t}$ = rata sosirilor în sistem

$w = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} W_j$ = timpul mediu de așteptare

$l = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t}\int_0^t L(s)ds$ = timpul mediu în sistem (time average number in system)

Acum, cu toate noțiunile definite, putem începe demonstrația teoremei.

Observăm că avem inegalitatea

$$\sum_{\{j:t_j^d\le t\}} W_j \le \int_0^t L(s)ds \le \sum_{\{j:t_j\le t\}} W_j = \sum_{j=1}^{N(t)} W_j (*)$$

Pentru a observa asta, trebuie să rescriem astfel:

$$\begin{aligned}
\int_0^t L(s)ds &= \int_0^t \left\{ \sum_{\{j:t_j\le s\le t\}} I\{W_j > s - t_j\} \right\} ds \\
&= \sum_{\{t_j:t_j\le t\}} \int_{t_j}^t I\{W_j > s - t_j\} ds \\
&= \sum_{\{t_j:t_j\le t\}} \min\{W_j, t - t_j\}
\end{aligned}$$

Pentru că $\min\{W_j, t-t_j\} \le W_j$, limita superioară în relația $(*)$ e imediată. Pentru limita inferioară

$$\begin{aligned}
\sum_{\{t_j:t_j\le t\}} \min\{W_j, t - t_j\} &= \sum_{\{j:t_j+W_j\le t\}} W_j + \sum_{\{j:t_j\le t, t_j+W_j>t\}} t - t_j \\
&\ge \sum_{\{j:t_j+W_j\le t\}} W_j \\
&= \sum_{\{j:t_j^d\le t\}} W_j
\end{aligned}$$

Împărțind limita superioară cu t și rescriind $\frac{1}{t} = \frac{\frac{N(t)}{t}}{\frac{1}{N(t)}}$, obținem relația

$$\left(\frac{N(t)}{t}\right) \frac{1}{N(t)} \sum_{j=1}^{N(t)} W_j$$

Făcând limita când $t \to \infty$, avem ca rezultat λw pentru că am presupus că limitele există prin definiție.

Observație: *Avem nevoie ca $\lambda > 0$ să ne asigurăm că $N(t) \to \infty$. Altfel, se poate ca $\frac{N(t)}{t} \to 0$ și $N(t)$ să fie constant.*

Demonstrația va fi gata, arătând că limita inferioară în $(*)$ împărțită la t converge tot la λw, deci trebuie arătat că

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{\{j:t_j^d \le t\}} W_j = \lambda w$$

Enunțăm o

Lemă: *Dacă $\exists \lambda, w < \infty$, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{W_n}{t_n} = 0$$

Demonstrație lemă:

$$\begin{aligned} \frac{W_n}{n} &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} W_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n-1} W_j \\ &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} W_j - \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1} W_j \\ &\to w - w = 0 \end{aligned}$$

(care rezultă din $w < 0$ și din definiția lui w)

Din definiția lui λavem că

$\frac{E(t_n)}{t_n} \to \lambda$ pt. că am presupus că $t_n \to \infty$

Presupunând că timpii de sosire sunt strict crescători, avem că $M(t_n) = n$ și că

$\frac{n}{t_n} = \frac{E(t_n)}{t_n} \to \lambda$

Dacă timpii de sosire nu sunt strict crescători (adică avem sosiri în grupe sau loturi), atunci

$$\frac{n}{t_n} \leq \frac{E(t_n)}{t_n} \to \lambda$$
Deci, în orice caz, folosind prima relație din enunțul lemei, avem că
$$\frac{W_n}{t_n} = \frac{W_n}{n} \cdot \frac{n}{t_n} \leq \frac{W_n}{n} \cdot \frac{E(t_n)}{t_n} \to 0 \cdot \lambda = 0$$
Pentru că am presuus că $\lambda < \infty$. Lema este demonstrată.
■
Continuăm demonstrația teoremei.
Pentru a arăta
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{\{j:t_j^d \leq t\}} W_j = \lambda w$$
este suficient să arătăm
$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{\{j:t_j^d \leq t\}} W_j \geq \lambda w$$
deoarece am stabilit înainte că λw este limita superioară.

Fie $\epsilon > 0$. Din lema de mai sus, există un $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel încât $W_j \leq \epsilon t_j$, $j \geq n_0$ așa ca $t_j^d = t_j + W_j \leq (1+\epsilon)t_j$, $j \geq n_0$

Deci
$$\{j : j \geq n_0, (1+\epsilon)t_j \leq t\} = \left\{j : j \geq n_0, t_j \leq \frac{t}{1+e}\right\} \subset \{j : t_j^d \leq t\}$$
de unde rezultă că
$$\sum_{\{j:t_j^d \leq t\}} W_j \geq \sum_{j=n_0}^{N\left(\frac{t}{1+\epsilon}\right)} W_j$$
Partea dreaptă a inegalității poate fi scrisă ca
$$\sum_{j=1}^{N\left(\frac{t}{1+\epsilon}\right)} W_j - \sum_{j=1}^{n_0-1} W_j$$

Împărțind primul termen la t și trecând la limită cu $t \to \infty$ avem ca rezultat $\frac{\lambda w}{1+\epsilon}$ folosind ca argument un procedeu similar folosit la limita superioară (formula $(*)$). Al doilea termen este o constantă, deoarece împărțindu-l la t, limita sa tinde la 0.

Obținem concluzia că pentru $\forall\epsilon > 0$,
$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{\{j:t_j^d \leq t\}} W_j \geq \frac{\lambda w}{1+\epsilon}$$
Deoarece ϵ a fost ales arbitrar, rezultă concluzia că
$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{\{j:t_j^d \leq t\}} W_j \geq \lambda w$$
Ceea ce trebuia demonstrat.

La această teoremă avem și un

Corolar:

Dacă λ există și e finit și $\frac{W_n}{n} \to 0$, atunci

$\lim_{t\to\infty} \frac{N^d(t)}{t} = \lambda$

Deci rata de plecări există și e egală cu rata sosirilor λ.

Demonstrația se găsește în [A30].

Exemplu de aplicare:

Pentru o coadă de așteptare $M/M/1$ și $\rho < 1$, avem că $P_n = (1-\rho)\rho^n$ (unde P_n = probabilitatea de a avea n entități în sistem) cu $n \geq 0$.

Deci $l = \sum_n P_n = \frac{\rho}{1-\rho}$. Din $l = \lambda w$ avem că $w = l/\lambda$ și deci, expresia pentru timpul mediu de așteptare este $w = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho}$.

Formula Pollaczek-Khincin

$$\boxed{L = \rho + \frac{\rho^2 + \lambda^2 Var(S)}{2(1-\rho)}}$$

•λ e rata sosirilor Poisson

•$1/\mu$ media timpului de servire S

•$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

•S e timpul de servire

•L e lungimea cozii

Motivarea folosirii repartiției Poisson[C6].

Notăm cu $X(0,t)$ numărul de sosiri din intervalul de timp $(0,t)$. Observăm că $X(0,t)$ este o variabilă aleatoare discretă luând valori în $\mathbb{N}$. Repartiția sa depinde de t.

Notăm cu $p_k(0,t) = P[X(0,t) = k]$ cu $k = 1, 2, ...$ funcția sa masă

Ipoteze:

1) $X(t_1,t_2), X(t_2,t_3), ..., X(t_{n-1},t_n)$ sunt independente pentru intervalele de timp disjuncte. (i.e. numărul sosirilor este independent)

2) Pentru Δt suficient de mic, avem că

$p_1(t, t+\Delta t) = \nu\Delta t + o(\Delta t)$, unde $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0$ (deci pentru Δt suficient de mic, probabilitatea de a avea exact o sosire este proporțională cu lungimea Δt. ν se numește **densitatea medie** sau **rata medie a sosirilor.**

3) Pentru Δt suficient de mic, avem că

$\sum\limits_{k=2}^{\infty} p_k(t, t+\Delta t) = o(\Delta t)$ (deci probabilitatea să avem două sau mai multe sosiri într-un interval suficient de mic este neglijabilă)

Din această ultimă relație și din relația de la 2), rezultă că

$p_0(t, t+\Delta t) = 1 - \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k(t, t+\Delta t) = 1 - \nu\Delta t + o(\Delta t)$

Îl determinăm pe $p_0(0,t)$. Pentru a nu avea nicio sosire în intevalul $[0, t+\Delta t)$, trebuie să nu avem nicio sosire în ambele subintervale $[0,t)$ și $[t, t+\Delta t)$. Datorită independenței intervalelor nesuprapuse, avem

$p_0(0, t+\Delta t) = p_0(0,t)p_0(t, t+\Delta t) = p_0(0,t)(1 - \nu\Delta t + o(\Delta t))$.

Împărțim relația prin Δt și rearanjăm termenii, de unde rezultă că

$$\frac{p_0(0, t+\Delta t) - p_0(0,t)}{\Delta t} = -p_0(0,t)\left[\nu - \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right]$$

Când $\Delta t \to 0$, ne rezultă ecuația diferențială

$\dfrac{dp_0(0,t)}{dt} = -\nu p_0(0.t)$ cu condiția inițială $p_0(0,0) = 1$.

Soluția acestei ecuații este $p_0(0,t) = e^{-\nu t}$.

Pentru $p_1(0,t)$ procedăm similar.

O sosire în intervalul $[0, t+\Delta t]$ poate fi îndeplinită doar având 0 sosiri în subintervalul $[0,t)$ și o sosire în $[t, t+\Delta t)$ sau o sosire în $[0,t)$ și nicio sosire în $[t, t+\Delta t)$. Din astea rezultă că

$p_1(0, t+\Delta t) = p_0(0,t)p_1(t, t+\Delta t) + p_1(0,t)p_0(t, t+\Delta t)$.

Folosind relațiile de mai sus (explicitează!), rezultă că

$p_1(0, t+\Delta t) = e^{-\nu t}(\nu\Delta t + o(\Delta t)) + p_1(0,t)(1 - \nu\Delta t + o(\Delta t))$.

Împărțind prin Δt, rearanjând termenii, avem că:

$$\frac{p_1(0, t+\Delta t) - p_1(0,t)}{\Delta t} = e^{-\nu t}\left(\nu + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right) + p_1(0,t)\left(-\nu + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right)$$

Când $\Delta t \to 0$, ne rezultă ecuația diferențială

$\dfrac{dp_1(0,t)}{dt} = -\nu p_1(0,t) + \nu e^{-\nu t}$ cu condiția inițială $p_1(0,0) = 0$.

Soluția acestei ecuații este $p_1(0,t) = \nu t e^{-\nu t}$.

Inductiv, avem pentru termenul general (care definește o repartiție $Poisson(\nu t)$)

$p_k(0,t) = \dfrac{(\nu t)^k e^{-\nu t}}{k!}$, $k \in \mathbb{N}$.

.

Legătura dintre repartiția Poisson și repartiția Exponențială$^{[I2]}$**.**

Fie N_t = numărul de sosiri într-un interval de timp $(0, t)$

Fie X_t = intervalul de timp în care mai avem încă o sosire, presupunând că cineva a sosit la timpul t

Evenimentele $\{X_t > \Delta t\}$ și $\{N = N_{t+\Delta t}\}$ sunt egale.

$\{X_t > \Delta t\}$ capturează evenimentul că nu a sosit nimeni în intervalul $[t, t+\Delta t]$ care implică că numărul de sosiri la timpul $t+\Delta t$ este identic cu cel la momentul t care este evenimentul $\{N_t = N_{t+\Delta t}\}$.

Avem că

$$P(X_t \leq \Delta t) = 1 - (X_t > \Delta t)$$

Folosind egalitatea celor două evenimente descrise mai sus, putem să rescriem:

$$P(X_t \leq \Delta t) = 1 - P(X_{t+\Delta t} - N_t = 0)$$

Dar,

$$P(N_{t+\Delta t} - N_t = 0) = P(N_{\Delta t} = 0)$$

Folosind formula repartiției Poisson , ce avem mai sus se simplifică și avem:

$$P(N_{t+\Delta t} - N_t = 0) = e^{-\lambda \Delta t}$$

Înlocuind în prima ecuație, avem că:

$$P(X_t \leq \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t}$$

Observăm că aceasta de deasupra este funcția de repartiție a unei exponențiale.

Legătura dintre repartiția binomială și repartiția Poisson

Fie $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un șir de variabile aleatoare repartizate Binomial(p_i, n_i). Notez $q_i = 1 - p_i$.

Pentru $\lambda > 0$ fixat, presupunem satisfăcute condițiile:

$$\begin{cases} \lim\limits_{i \to \infty} n_i = \infty \\ \\ \lim\limits_{i \to \infty} n_i p_i = \lambda \end{cases}$$

Atunci

$$\lim_{i \to \infty} P(X_i = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \ k \in \mathbb{N}$$

Demonstrație:

$$P(X_i = k) = C_{n_i}^k p_i^k q_i^{n_i-k} = \frac{n_i(n_i-1)...(n_i-k+1)}{k!} p_i^k (1-p_i)^{n_i-k} =$$
$$= \frac{1}{k!}(n_i p_i)^k \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{n_i}\right) (1-p_i)^{\frac{1}{p_i}(p_i n_i - p_i k)}$$

Trecem la limită și observăm că:

• $\lim\limits_{i\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) ... \left(1 - \frac{k-1}{n_i}\right) = 1$

• $\lim\limits_{i\to\infty} (p_i n_i - p_i k) = \lambda \Rightarrow \lim\limits_{i\to\infty} (1-p_i)^{\frac{1}{p_i}(p_i n_i - p_i k)} = e^{-\lambda}$

Ceea ce trebuia demonstrat.

Echilibru statistic[C1]

*Definiție: Vom spune că avem ipoteza de **echilibru statistic (ES)** dacă:*
$\exists p_j = \lim_{t\to\infty} p_{ij}(t)$, *independentă de* i, $\forall j \in E$.
Evident, avem că
•$p_j \geq 0$, $j \in E$ ***(*)***
• $\sum\limits_{j\in E} p_j = 1$ ***(**)***
Din relația Chapman-Kolmogorov, avem că $\forall t > 0$,

$$\boxed{p_j = \sum_{i\in E} p_i p_{ij}(t),\ j \in E}$$

Observație: $p = (p_j)_{j\in E}$ *este singura solute a relațiilor notate cu **(*), (**)**.*
Demonstrație: Dacă $q = (q_j)_{j\in E}$ este o repartiție care satisface **(**)**, atunci
$q_j = \lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{i\in E} q_i p_{ij}(t) = \sum\limits_{i\in E} q_i p_j = p_j$, $j \in E$

Definiție: $p = (p_j)_{j\in E}$ *se numește **repartiția staționară** a procesului* $(X_t)_t$, $t \in [0, \infty)$

Fie $p(t) = (p_j(t))_{j\in E}$ *repartiția variabilei* $(X_t)_t$, $t \in [0, \infty)$. *Atunci* $p_j(t) = P(X_t = j)$, $j \in E$.

Teoremă: $\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t) = p_j$, $j \in E$.

Demonstrație: Pentru fiecare $s, t > 0$, rezultă din relația $\boldsymbol{P}(s+t) = \boldsymbol{P}(t) \cdot \boldsymbol{P}(s)$ că

$p_j(s+t) = \sum\limits_{j\in E} p_i(s) p_{ij}(t)$, $j \in E$

Dar,

$\lim\limits_{t\to\infty} \sum\limits_{i\in E} p_i(s) p_{ij}(t) = p_j \sum\limits_{i\in E} p_i(s) = p_j$, $\forall s$

Așadar, există $\lim\limits_{t\to\infty} p_j(t) = p_j$

Elemente de optimizare[C1]

Condițiile Karush-Kuhn-Tucker

Fie $M_0 \subset \mathbb{R}^{n+p}$ o mulțime deschisă și $f : M_0 \to R$, $\mathbf{a} : M_0 \to \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{b} : M_0 \to \mathbb{R}^k$ funcții.

Fie problema de programare neliniară

$$\inf_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in M} f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

cu

$$M = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \,|\, (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in M_0,\, \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \le 0,\, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0,\, \boldsymbol{x} \ge \mathbf{0}\}$$

Dacă funcțiile f, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ sunt diferențiabile în punctul $(\boldsymbol{x}^\star,\boldsymbol{y}^\star) \in M_0$, atunci o condiție necesară și suficientă pentru ca $(\boldsymbol{x}^\star,\boldsymbol{y}^\star) \in M_0$ să fie soluție optimă a problemei de optimizare neliniară de mai sus este să existe $\boldsymbol{u}^\star \in \mathbb{R}^m$ și $\boldsymbol{v}^\star \in \mathbb{R}^k$ astfel încât să fie satisfăcute condițiile

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}^\star,\boldsymbol{y}^\star) \le \mathbf{0} \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}^\star,\boldsymbol{y}^\star) = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{x}^\star \ge \mathbf{0} \\ \boldsymbol{y}^\star arbitrar \end{array}\right.$$

$$(\beta)\left\{\begin{array}{c} \boldsymbol{u}^\star \ge \mathbf{0} \\ \boldsymbol{v}^\star arbitrar \\ \nabla_{\boldsymbol{x}} L_0(\boldsymbol{x}^\star,\boldsymbol{y}^\star,\boldsymbol{u}^\star,\boldsymbol{v}^\star) \ge \mathbf{0} \\ \nabla_{\boldsymbol{y}} L_0(\boldsymbol{x}^\star,\boldsymbol{y}^\star,\boldsymbol{u}^\star,\boldsymbol{v}^\star) = \mathbf{0} \end{array}\right.$$

$$(\gamma)\left\{\begin{array}{c} (\boldsymbol{u}^\star)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}^\star) = 0 \\ (\boldsymbol{x}^\star)^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{x}} L_0(\boldsymbol{x}^\star,\boldsymbol{y}^\star,\boldsymbol{u}^\star,\boldsymbol{v}^\star) = 0 \end{array}\right.$$

unde

$L_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ *se numește* ***pseudo-Lagrangeianul*** *asociat problemei de mai sus și el este definit* $\forall(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in M_0$, $\forall \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_+^m$, $\forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^k$

Pentru partea de necesitate, presupunem că mulțimea M *definită mai sus satisface în punctul* $(\boldsymbol{x}^\star, \boldsymbol{y}^\star)$ *condițiile de regularitate A.H.U. (Arrow-Hurwicz-Uzawa)*

Pentru partea de $suficienț$*ă, presupunem în plus că* f *este p-convexă (pentru un* $\boldsymbol{x_0} \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : X \to \mathbb{R}$, f *diferențiabilă în* $\boldsymbol{x}_0$, *(* f *este* ***p-covexă*** *în* $\boldsymbol{x}_0 \Longleftrightarrow [\, f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x}_0) \Rightarrow (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0)^{\mathrm{T}} \nabla f(\boldsymbol{x}_0) < 0]$ *) în* $(\boldsymbol{x}^\star, \boldsymbol{y}^\star)$ *relativ la* M, *funcțiile* a_i *sunt* ***q-convexe*** *(o funcție* $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este q-convexă, dacă pentru fiecare punct* $\boldsymbol{x}_0 \in X$, *ea este q-convexă relativ la punctul* $\boldsymbol{x}_0$, *adică* $\forall \boldsymbol{x} \in X, \forall \lambda \in (0,1)$ *pt. care avem* $\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_0 \in X$, *avem că* $f(\lambda \boldsymbol{x} + (1-\lambda)\boldsymbol{x}_0) \leq max(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}_0))$ *) în* $(\boldsymbol{x}^\star, \boldsymbol{y}^\star)$ *relativ la* M, *iar funcțiile* b_j *sunt atât q-convexe cât și q-concave în* $(\boldsymbol{x}^\star, \boldsymbol{y}^\star)$ *relativ la* M.

Elemente de statistică[A1],[C2],[C5]

Inferență statistică asupra parametrului $\boldsymbol{\lambda}$ și testul $\boldsymbol{\chi^2}$

Reamintesc faptul că dacă avem n variabile aleatoare $X_1, ..., X_n$ independente și identic repartizate normal de parametri (μ, σ^2), atunci variabila $\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2$ este distribuită $\chi^2(n)$.

Repartiția corespunzătoare, numită **repartiția Helmert - Pearson** are formula:

$$H(x;n) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^x u^{\frac{n}{2}-1} e^{-u/2} du$$

unde

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} dx$$
$$\lambda > 0$$

Pentru o variabilă aleatoare $X \sim Poisson(\lambda)$, avem că $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k \in \mathbb{N}$.

Funcția de verosimilitate va fi egală cu:

$$L(x_1, ..., x_n; \lambda) = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^{\prod_{i=1}^{n} x_i}}{x_1! ... x_n!} e^{-n\lambda}$$

Apoi, logaritmând și derivând în raport cu λ, avem următoarea ecuație

$$\frac{d \ln L(x_1, ..., x_n; \lambda)}{d\lambda} = -n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

care are soluția

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$$

Deasemenea, avem că

$$\frac{d^2 \ln L(x_1, ..., x_n; \lambda)}{d\lambda^2} |_{\lambda=\bar{x}} = \frac{-n\bar{x}}{\lambda^2} |_{\lambda=\bar{x}} = -\frac{n}{\bar{x}} < 0.$$

Deci estimatorul de verosimilitate maximă al parametrului λ este $\hat{\lambda} = \bar{x}$.

Pe noi ne interesează testul de concordanță χ^2 în cazul parametric. Acest test ne va permite verificarea concordanței ajustării unei repartiții teoretice (în cazul nostrul Poisson) pe baza datelor de observație al unui eșantion. Legea noastră depinde de un singur parametru, $\theta = \lambda$. Testul, evident, poate fi generalizat pentru s parametri necunoscuți $\theta_1, .., \theta_s$. Urmează să estimăm parametrul θ pe baza datelor eșantionului considerat, de volum n.

Construim eșantionul nostrul de volum n, având observații independente. Construim o tabelă de frecvență, împărțind valorile eșantionului în k clase, fiecare având $O_i = n_i$ observații, unde $i = 1, ..., k$ și $\sum_{i=1}^{k} O_i = \sum_{i=1}^{k} n_i = n$ așa ca $n_i \geq 5$. Această ultimă condiție este o convenție folosită în statistică pentru a folosi un test aproximativ, dacă ea este încălcată, trebuie să folosim un test exact.

Vom avea tabelul

	Numărul de observații în clasa $1, .., k$	Total
Numărul observat F_i(frecvențele observate)	$O_1, ..., O_k$	
Numărul așteptat f_i(frecvențele teoretice)	$E_1, ..., E_k$	

Avem că $E_i = n\hat{p}_i$

Fiecare observație are probabilitatea p_i de a cădea în clasa i.

Avem ipoteza nulă

$$H_0 : p_i = \frac{E_i}{n}$$

cu ipoteza alternativă

$$H_1 : H_0 \, nu \, e \, adevarata$$

Construim statistica de test

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - n\hat{p_i})^2}{n\hat{p}_i}$$

Această statistică de test urmează aproximativ repartiția $\chi^2(k-2)$ (deci are $k-2$ grade de libertate), unde $\hat{p}_i$ sunt estimațiile probabilităților teoretice p_i și $\hat{p}_i = p_i(\hat{\theta})$ și $\hat{\theta}$ este estimația prin metoda verosimilității maxime.

Alegem pragul de semnificație α.

Respingem ipoteza nulă H_0 cu pragul de semnificație α dacă $\chi^2 < \chi^2_{\alpha,k-2}$, unde

$\chi^2_{\alpha,k-2}$ este $\alpha - cuantila$ repartiției $\chi^2(k-2)$.

Motivul pentru care folosesc testul χ^2: Înainte de a folosi un model de așteptare și de a deduce indicatori de performanță, trebuie să facem o inferență statistică asupra sosirilor. Împărțim timpul în intervale egale, scriem frecvențele observate, apoi pe baza acestora, putem deduce, pe baza inferenței statistice, parametrul repartiției sosirilor.

Partea 2. Modelele

Analiza cozilor la puncte de taxare[A1]

Ca prim model, să presupunem că avem un punct de taxare (sau o vamă). Nu ne interesează ce se întâmplă pe cealaltă bandă, ea putând fi analizată separat. O putem modela folosind un sistem de așteptare de tip $M/M/1$ unde repartiția sosirilor este $Poisson(\lambda)$ (deci rata medie a sosirilor este λ) și repartiția $Poisson(\mu)$ este repartiția fluxului de serviciu. Disciplina de servire o vom considera „primul venit, primul servit" (FIFO). Deasemenea, vom presupune că avem o capacitate infinită.

Notație: *$\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ va fi numită* ***intensitatea de trafic.***

Rezultat: *Pentru $\rho < 1$, traficul va fi fluid. În caz contrar, pentru $\rho \geq 1$, coada va avea o lungime infinită.*

În continuare, vom defini următoarele cantități:

$P_0 = 1 - \rho =$ probabilitatea de a nu avea niciun vehicul în sistem
$P_n = \rho^n(1 - \rho) =$ probabilitatea de a avea n vehicule în sistem
$L = \dfrac{\rho}{1-\rho} =$ numărul mediu de vehicule în sistem
$L_q = L \cdot \rho =$ lungimea medie de vehicule în sistem
$W = \dfrac{L_q}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu} =$ timpul mediu în care vehiculele stau în sistem
$W_q = W - \dfrac{1}{\mu} =$ timpul mediu de așteptare al vehiculelor din sistem

Pentru mai multe puncte de taxare (deci model $M/M/N$) avem relațiile:

$P_0 = \dfrac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^N}{N!\left(1 - \frac{\rho}{N}\right)}}$ = probabilitatea de a nu avea niciun vehicul în sistem

$P_k = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{k!} P_0 & (k < N) \\ \dfrac{\rho^k}{N! N^{k-N}} P_0 & (k \geq N) \end{cases}$ = probabilitatea de a avea k vehicule în sistem

$L_q = \dfrac{\rho^{N+1}}{N! N} \dfrac{P_0}{\left(1 - \dfrac{\rho}{N}\right)^2}$ = lungimea medie a cozii de vehicule în sistem

$L = L_q + \rho$ = numărul mediu de vehicule în sistem

$W = \dfrac{L_q}{\lambda} + \dfrac{1}{\mu}$ = timpul mediu în care vehiculele stau în sistem

$W_q = \dfrac{L_q}{\lambda}$ = timpul mediu de așteptare al vehiculelor din sistem

Observație: *Pentru mai multe puncte de taxare, avem că intensitatea de trafic este* $\dfrac{\rho}{N}$ *și condiția de stabilitate este* $\dfrac{\rho}{N} < 1$.

Observație: *Majoritatea cantităților de mai sus au fost deduse din Legea lui Little.*

Așteptarea într-o benzinărie$^{([C11],cap.2.5)}$

Să presupunem că avem o benzinărie cu c pompe și la care sosesc mașini cu o repartiție exponențială de parametru λ și sunt servite cu o repartiție exponențială de parametru μ. Disciplina de serviciu va fi „primul venit - primul servit". Modelul, în notația lui Kendall se notează cu $M/M/c/K$. Servirea la pompe se face independent de celelalte pompe. Mai mult, există un număr maxim de mașini, K care pot sta în așteptare. Presupunem că dacă mașina nu mai are loc să se oprească, ea va merge mai departe. Mai facem presupunerea că odată ce o mașină a terminat servirea, ea va pleca „instantaneu" de la coadă.

Pentru început, voi presupune un model $M/M/c/\infty$. Procesul de naștere și moarte aferent are

$$\lambda_n = \lambda, \forall n$$

și

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & (1 \le n < c) \\ c\mu & (n \ge c) \end{cases} .$$

Deci probabilitățile staționare sunt date de

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_o & (0 \le n < c) \\ \\ \dfrac{\lambda^n}{c^{n-c}c!\mu^n} p_0 & n \ge c \end{cases}$$

Observăm că în acest model de așteptare, abordarea este oarecum similară cu modelul $M/M/c$ doar că rata de sosiri λ_n trebuie să fie egală cu 0 dacă $n \ge K$. Rezultă folosind relația de mai sus a teoriei proceselor de naștere și moarte pentru modelul $M/M/c/\infty$ că probabilitățile staționare sunt date de formula

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{\lambda^n}{n!\mu^n} p_0 & 0 \le n \le c \\ \\ \dfrac{\lambda^n}{c^{n-c}c!\mu^n} p_0 & c \le n \le K \end{cases}$$

Acum, ambele serii din calcule sunt finite, deci nu avem condiția ca $\rho < 1$

Avem că

$$p_0 = \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{\lambda^n}{n!\mu^n} + \sum_{n=c}^{K} \frac{\lambda^n}{c^{n-c}c!\mu^n} p_0 \right)^{-1}$$

Putem simplifica, folosind notațiile $r = \dfrac{\lambda}{\mu}$ și $\rho = \dfrac{r}{c}$

Deci

$$\sum_{n=c}^{K} \frac{r^n}{c^{n-c}c!} = \frac{r^c}{c!} \sum_{n=c}^{K} \rho^{n-c} =$$

$$= \begin{cases} \left[\dfrac{r^c}{c!}\left(\dfrac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho}\right) + \sum\limits_{n=0}^{c-1} \dfrac{r^n}{n!}\right]^{-1} & pt.\, \rho \neq 1 \\ \left[\dfrac{r^c}{c!}(K-c+1) + \sum\limits_{n=0}^{c-1} \dfrac{r^n}{n!}\right] & pt.\, \rho = 1 \end{cases}$$

Observația 1: *Pentru $K \to \infty$ și $\dfrac{\lambda}{c\mu} < 1$ avem modelul mai particular $M/M/c/\infty$*

Observația 2: *Pentru $c = 1$ avem modelul $M/M/1/K$*

Proprietatea PASTA *(„Poisson arrivals see time averages"):*

Numărul mediu de entități din coadă văzute de un client care sosește este la fel ca L_q(care este numărul mediu de clienți în coada de așteptare).

Lungimea medie a cozii

Pentru $\rho \neq 1$ avem că

$$L_q = \sum_{n=c+1}^{K} (n-c)p_n = \sum_{n=c+1}^{K} (n-c)\frac{\lambda^n}{c^{n-c}c!\mu^n}p_0 = \frac{p_0 r^c}{c!} \sum_{n=c+1}^{K} (n-c)\frac{r^{n-c}}{c^{n-c}} =$$

$$= \frac{p_0 r^c \rho}{c!} \sum_{n=c+1}^{K} (n-c)\rho^{n-c-1} = \frac{p_0 r^c \rho}{c!} \sum_{i=1}^{K-c} i\rho^{i-1} = \frac{p_0 r^c \rho}{c!} \frac{d}{d\rho}\left(\sum_{i=0}^{K-c} \rho^i\right)$$

$$= \frac{p_0 r^c \rho}{c!} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho}\right)$$

Sau, echivalent,

$$L_q = \frac{p_0 r^c \rho}{c!(1-\rho)^2}\left[1-\rho^{K-c+1} - (1-\rho)(K-c+1)\rho^{K-c}\right]$$

Observație: *Pentru $\rho = 1$ folosim regula lui L'Hopital de două ori.*

Din modelul $M/M/c$ știm că $L = L_q + r$. Pentru acest caz, trebuie să reajustăm și acest rezultat și formula lui Little, deoarece o proporție p_K din sosiri NU vor intra în sistem. Rata sosirilor care intră în sistem trebuie reajustată. Din proprietatea PASTA („Poisson Arrivals See time Averages"), avem că rata efectivă de sosiri va fi

$$\lambda_{ef} = \lambda(1 - p_K)$$

În acest caz, avem că

$$L = L_q + \frac{\lambda_{ef}}{\mu} = L_q + \frac{\lambda(1-p_K)}{\mu} = L_q + r(1-p_K)$$

Știm că

$$r(1 - p_K) < c$$

deoarece numărul mediu de mașini care alimentează trebuie să fie mai mic decât numărul de pompe.

Deci definim următorul factor de servire

$$\rho_{ef} = \frac{\lambda_{ef}}{c\mu}$$

Putem deduce, din legea lui Little următoarele cantități

$$W = \frac{L}{\lambda_{ef}} = \frac{L}{\lambda(1 - p_K)}$$

$$W_q = W - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda_{ef}}$$

Mai avem relațiile

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & \rho \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{K+1} & \rho = 1 \end{cases}$$

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^n}{1-\rho^{K+1}} & \rho \neq 1 \\[2ex] \dfrac{1}{K+1} & \rho = 1 \end{cases}$$

$$L_q = \begin{cases} \dfrac{\rho}{1-\rho} - \dfrac{\rho(K\rho^K + 1)}{1-\rho^{K+1}} & \rho \neq 1 \\[2ex] \dfrac{K(K+1)}{2(K+1)} & \rho = 1 \end{cases}$$

$$L = L_q + (1 - p_0)$$

Pornim la a găsi funcția de repartiție al timpului de așteptare. Pentru început, definim

$$q_n = P(avem\, n\, masini\, la\, pompe \,|\, aproape\, ca\, avem\, o\, sosire)$$

$$= \frac{P(aproape\, ca\, avem\, o\, sosire \,|\, avem\, n\, masini\, la\, pompe\,) \cdot p_n}{\sum\limits_{n=0}^{K} P(aproape\, ca\, avem\, o\, sosire \,|\, avem\, n\, masini\, la\, pompe\,) \cdot p_n}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{(\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \cdot p_n}{\sum\limits_{n=0}^{K-1} (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) \cdot p_n} \right\}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\left(\lambda \Delta t + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right) \cdot p_n}{\sum\limits_{n=0}^{K-1} \left(\lambda \Delta t + \dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}\right) \cdot p_n} \right\}$$

$$= \frac{\lambda p_n}{\lambda \sum\limits_{n=0}^{K-1} p_n} = \frac{p_n}{1 - p_K}$$

Pentru a deduce repartiția lui $W_q(t)$ (unde $T_q$notăm variabila aleatoare „timpul de așteptare în coadă, iar W_q este funcția de repartiție)

$$W_q(t) = P(T_q \leq t) =$$

$$W_q(0) + \sum_{n=c}^{K-1} P(sa\, fie\, n - c - 1\, servicii\, complete\, in\, mai\, putin\, de\, t \,|...$$

$$...|\, sosirea\, gaseste\, n\, in\, sist.) \cdot q_n$$

Deoarece nu putem avea servire dacă sunt K mașini în benzinărie, avem că

$$W_q(t) = W_q(0) + \sum_{n=c}^{K-1} q_n \int_0^t \frac{c\mu(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} e^{-c\mu x} dx$$

$$= W_q(0) + \sum_{n=c}^{K-1} q_n \left(1 - \int_t^\infty \frac{c\mu(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} e^{-c\mu x} dx\right)$$

Știm că (demonstrația se găsește în [C11], începând cu pagina 19)

$$\int_t^\infty \frac{\lambda(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} dx = \sum_{i=0}^{m} \frac{(\lambda t)^i e^{-\lambda t}}{i!}$$

Facem schimbarea $m = n - c$ și $\lambda = c\mu$ și avem

$$\int_t^\infty \frac{c\mu(c\mu x)^{n-c}}{(n-c)!} e^{-c\mu x} dx = \sum_{i=0}^{n-c} \frac{(c\mu t)^i e^{-c\mu t}}{i!}$$

$$W_q(t) = W_q(0) + \sum_{n=c}^{K-1} q_n - \sum_{n=c}^{K-1} q_n \sum_{i=0}^{n-c} \frac{(c\mu t)^i e^{-c\mu t}}{i!}$$

$$= 1 - \sum_{n=c}^{K-1} q_n \sum_{i=0}^{n-c} \frac{(c\mu t)^i e^{-c\mu t}}{i!}$$

Modelarea distribuției distanței între două vehicule[A6]

Va trebui să observăm (experimental) că comportamentul sosirii vehiculelor este diferit la diferite condiții de trafic. Pentru asta, putem folosi 3 repartiții:

Repartiția Exponențială a cărei funcție de densitate este

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t},\ t > 0.$$

Repartiția Normală a cărei funcție de densitate este

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}},\ t \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0$$

Repartiția Pearson de tip III a cărei funcție de densitate este

$$f(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(K)}[\lambda(t-\alpha)]^{K-1} e^{-\lambda(t-\alpha)},\ K, \alpha \in \mathbb{R}$$

Cazurile particulare ale repartiției Pearson de tip III, sunt:
• repartiția Gamma cu $f(t) = \dfrac{\lambda}{\Gamma(K)}(\lambda t)^{K-1}e^{-\lambda t}$ unde $\alpha = 0$
• repartiția Erlang cu $f(t) = \dfrac{\lambda}{(K-1)!}(\lambda t)^{K-1}e^{-\lambda t}$ unde $K \in \mathbb{N}$
• repartiția Exponențială unde $K = 1$

De exemplu, putem formula ipoteza că traficul are 3 categorii, fiecare având anumite caracteristici

1) Volum redus de trafic
•Distanța dintre vehicule este un fenomen aleator pentru că nu avem interacțiune între sosirea a două vehicule (vehiculele pot circula cu viteza cu care vor, independent de celelalte vehicule)
•Sosirea unui vehicul este independentă de sosirea altui vehicul.
•Distanța minimă între mașini este cea mai sigură.
•Se poate modela folosind o repartiție <u>exponențială</u>.

2) Volum intermediar de trafic
•Unele vehicule sunt independente de celelalte, unele vehicule au interacțiuni.
•Sunt cele mai dificil de analizat, dar mai utile în practică.
•Se poate modela folosind o repartiție <u>Pearson de tip III.</u>

3) Volum mare de trafic
•Există interacțiuni foare mari între vehicule.
•Fluxul este foarte apropiat de capacitatea maximă a tronsonului de drum.
•Distanța între mașini este aproape constantă (adică media și varianța distanței între mașini este foarte mică)
•Se poate modela folosind o repartiție <u>normală.</u>

Motivația folosirii repartiției distanțelor între mașini: Știind repartiția acestor distanțe și viteza cu care circulă mașinile (care este o variabilă aleatoare care a cărei dispersie depinde de cât de multe mașini avem pe drum. Cu cât avem mai multe mașini, cu cât viteza o putem presupune având o dispersie mai mică. Cu cât circulă mai puține mașini, dispersia vitezelor este mai mare), putem determina repartițiile unor „goluri” ce apar între mașinile care circulă pe un drum prioritar, astfel încât ne putem da seama cum se formează coada de mașini la o intersecție de două drumuri, unul cu prioritate, celălalt fără.

Modelul M/G/1 cu priorități[A16],[C9]

Presupunem că avem r clase și un model $M/G/1$. Vom presupune că clasa i sosește $Poisson(\lambda_i)$. Notăm cu B_i **timpul de servire** al clasei i și cu R_i **timpul rezidual** (adică timpul rămas pe care trebuie să îl aștepte o nouă sosire în coadă până va fi servită) al clasei i. În modelul nostru vom presupune că clasa 1 are cea mai mare prioritate, iar ultima clasă r are cea mai mică prioritate. În modelul nostru, vom presupune că clasele cu prioritate mai mare NU pot întrerupe serviciul unei clase de prioritate mai mică.

Timpul mediu de așteptare al clasei i îl vom nota cu $E(W_i)$. Cu $E(L_i^q)$ vom nota **numărul de aparteneți ai clasei** i **așteptând în coadă**.

Mai definim

$$\rho_i = \lambda_i E(B_i)$$

.

Pentru clasa cu cea mai mare prioritate, adică $i = 1$, avem că:

$$E(W_1) = E(L_1^q)E(B_1) + \sum_{j=1}^{r} \rho_j E(R_j)$$

Din legea lui Little, avem că:

$$E(L_1^q) = \lambda E(W_1)$$

Din cele două ecuații de mai sus, rezultă că

$$E(W_1) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{r} \rho_j E(R_j)}{1 - \rho_1}$$

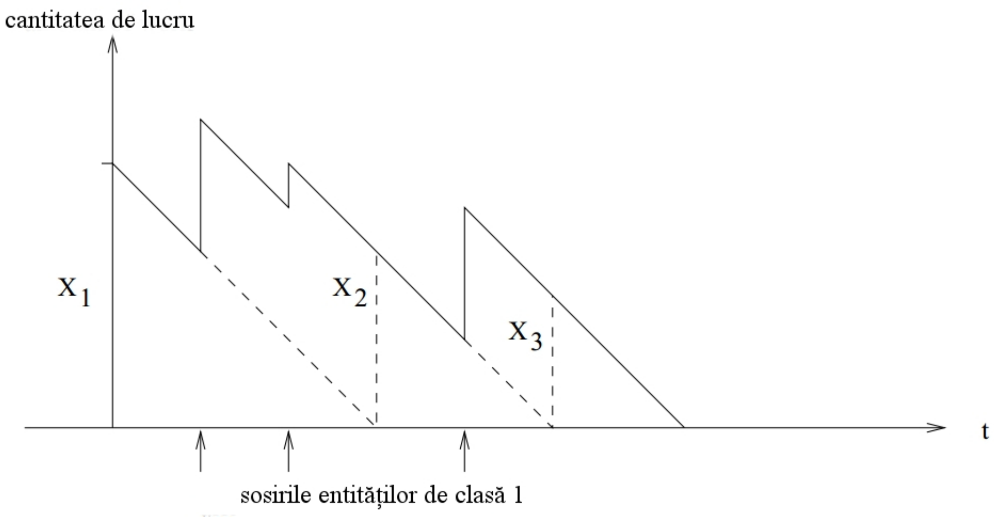
Pentru a găsi timpul mediu pentru clase cu prioritate mai mică, procedeul este mai complicat.

Fie entitatea de clasă i cu $i > 1$. Timpul de așteptare al unei clase i poate fi împărțit în mai multe porțiuni.

Prima porțiune este cantitatea de lucru asociată cu entitatea din clasa i (cu i fixat) care este servită și toate entitățile cu aceeași sau o prioritate mai mare prezente la coadă când ea sosește. Numim această porțiune X_1. A doua porțiune, numită X_2 este cantitatea de muncă cu prioritate mai mare care sosește în timpul porțiunii X_1. A treia porțiune, notată cu X_3, este cantitatea de lucru cu cu prioritate mai mare care sosește în porțiunea X_2 ș.a.m.d.

Construim inductiv.

În figura de mai jos, putem observa realizarea pentru timpul de așteptare al unei entități de clasă 2.



Timpul mediu de așteptare este dat de:

$$E(W_i) = E(X_1 + X_2 + ...) = \sum_{k=1}^{\infty} E(X_k)$$

După cum am văzut mai sus, prima porțiune de lucru pentru o entitate de clasă i pe care trebuie să o aștepte este suma timpilor de servire pentru toți clienții de clasă la fel sau mai mare prezenți în sistem, plus timpul rămas clientului care este servit, deci

$$E(X_i) = \sum_{j=1}^{i} E(L_j^q)E(B_j) + \sum_{j=1}^{r} \rho_j E(R_j)$$

Pentru a determina $E(X_{k+1})$, trebuie să ne dăm seama că X_{k+1} depinde de X_k. Deci condiționăm la lungimea lui X_k. Notăm cu f_k densitatea lui X_k.

Atunci avem că

$$\begin{aligned} E(X_{k+1}) &= \textstyle\int_{x=0}^{\infty} E(X_{k+1}|X_k = x) f_k(x)dx = \\ &= \textstyle\int_{x=0}^{\infty} (\lambda_1 x E(B_1) + ... + \lambda_{i-1} x E(B_{i-1})) f_k(x)dx \\ &= (\rho_1 + ... + \rho_{k-1}) E(X_k) \end{aligned}$$

Aplicând recursiv relația, avem că

$$E(X_{k+1}) = (\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_{i-1})^k E(X_1)$$

Deci găsim, pentru $i = \overline{2, r}$ că

$$E(W_i) = \frac{E(X_1)}{1 - (\rho_1 + ... + \rho_{i-1})} = \frac{\sum_{j=1}^{i} E(L_j^q) E(B_j) + \sum_{j=1}^{r} \rho_j E(R_j)}{1 - ((\rho_1 + \rho_2 + ... + \rho_{i+1})}$$

$$E(W_i) = E(X_1) + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j E(W_i) E(B_j)$$

de unde rezultă ecuația de mai sus (*)

Înlocuind cu legea lui Little în $E(L_i^q) = \lambda_i E(W_i)$ (*), avem că

$$\begin{aligned} (1 - (\rho_1 + ... + \rho_i)) E(W_i) &= \sum_{j=1}^{i-1} E(L_j^q) E(B_j) + \sum_{j=1}^{r} \rho_j E(R_j) \\ &= (1 - (\rho_1 + ... + \rho_{i-2})) E(W_{i-1}) \end{aligned}$$

Apoi înmulțind cu $1-(\rho_1+...+\rho_{i-1})$ deducem următoarea relație recursivă:

$$\left(1-\sum_{j=1}^{i}\rho_j\right)\left(1-\sum_{j=1}^{i-1}\rho_j\right)E(W_i)=\left(1-\sum_{j=1}^{i-1}\rho_j\right)\left(1-\sum_{j=1}^{i-2}\rho_j\right)E(W_{i-1})$$

Folosind relația de mai sus și relația $E(W_1)=\frac{\sum\limits_{j=1}^{r}\rho_j E(R_j)}{1-\rho_1}$, rezultă că

$$E(W_i)=\frac{\sum_{j=1}^{r}\rho_j E(R_j)}{(1-(\rho_1+...+\rho_i))(1-(\rho_1+...+\rho_{i-1}))},\text{ pentru } i=1,..,r$$

Exemplu particular

Pentru un model $M/G/1$ cu două clase și disciplină primul venit - primul servit, avem timpul mediu de așteptare pentru o entitate din clasa 1 ca fiind:

$$E(W_1)=\frac{\rho_1 E(R_1)+\rho_2 E(R_2)}{1-\rho_1}$$

Din astea deducem timpul mediu de așteptare pentru o entitate din clasa 2, folosind legea de conservare. Din această lege rezultă că

$$\rho_1 E(W_1)+\rho_2 E(W_2)=C$$

.

C este o constantă care nu depinde de disciplina servirii. Pentru a o determina, folosind disciplina FIFO, avem că

$$E(W_1)=E(W_2)=\frac{\rho_1 E(R_1)+\rho_2 E(R_2)}{1-\rho_1-\rho_2}$$

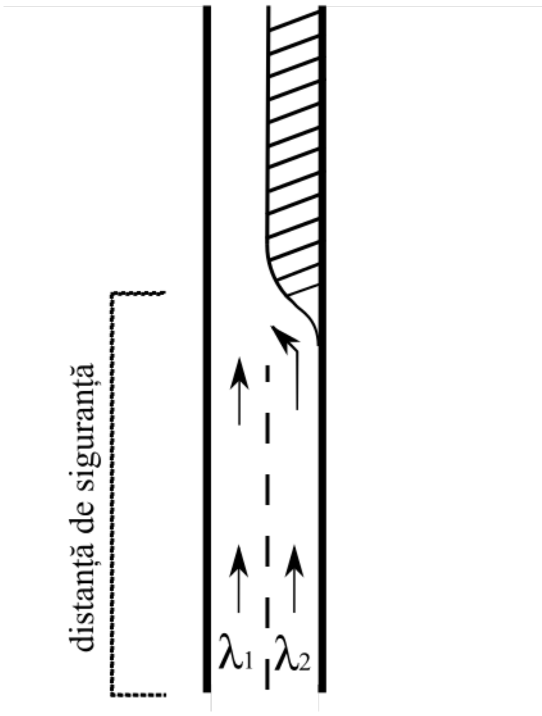
deci:

$$C=(\rho_1+\rho_2)\frac{\rho_1 E(R_1)+\rho_2 E(R_2)}{1-\rho_1-\rho_2}$$

Motivul pentru care am considerat acest model:

Să considerăm, pentru început, următoarea situație în care se îngustează o bandă sau are loc un accident:

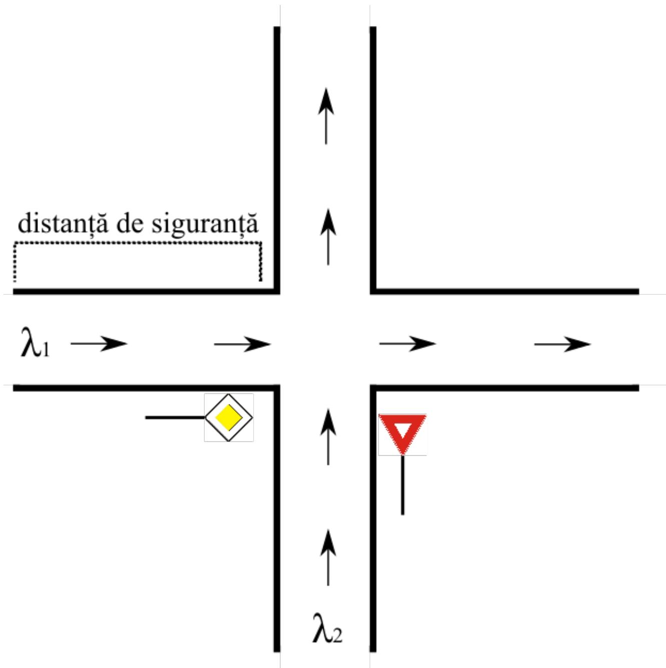
Figura 1



În această figură, sosirile pe a doua bandă sunt $Poisson(\lambda_1)$, iar pe prima bandă $Poisson(\lambda_2)$. (Poate părea un pic ciudat să notez așa, dar are sens din punct de vedere al notațiilor folosite până acum pentru modelul M/G/1 cu priorități, deoarece vehiculele care vin pe a doua bandă au prioritate față de cele de pe prima bandă.) Pentru ca vehiculele de pe banda unu să își continue deplasarea (presupunând că nu sunt lăsate să intre), vom presupune că vor avea o distanță de siguranță astfel încât să nu îi incomodeze pe șoferii de pe banda a doua. Distanța de siguranță o vom putea presupune, pentru simplitate, ca fiind constantă (deși ea în realitate poate depinde de mulți factori cum ar fi tipul mașinii, reflexele șoferului, etc.). Dacă distribuția distanțelor dintre mașini se va găsi în situația „3) Volum mare de trafic", atunci va fi aproape imposibil pentru ca cei de pe prima bandă să intre pe a doua dacă nu sunt lăsați în mod aleator să intre. Ca să ne aflăm în ipotezele modelului, vom presupune că dacă o mașină de pe banda a doua intră în interiorul distanței de siguranță, șoferul care este primul în coloană va aștepta. „Timpul de servire” în acest caz depinde de viteza cu care pătrund șoferii în distanța de siguranță, care este o variabilă aleatoare, dispersia sa depinzând de condițiile de trafic. În acest caz, putem folosi rezultatul particular al modelului $M/G/1$ cu $r = 2$.

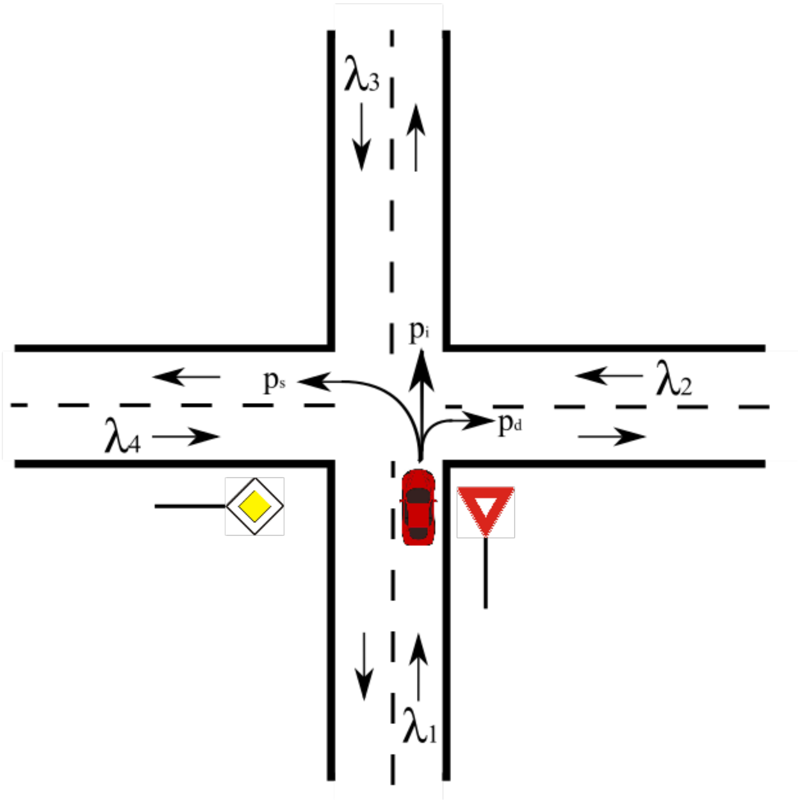
Evident, o situație analoagă acesteia este cea descrisă de

Figura 2:



O altă situație, foarte des întâlnită este aceea din figura de mai jos:

Figura 3:



În această situație, ne interesează coada care se formează pe banda pe care așteaptă mașina roșie la indicatorul „cedează trecerea”. Sosirile la coadă au rata λ_1. În plus, mașinile care sosesc sunt caracterizate de o **variabilă aleatoare discretă de direcție** pe care o notăm cu $DIR \sim \begin{pmatrix} S & I & D \\ p_s & p_i & p_d \end{pmatrix}$. Evident, această variabilă ne va oferi proporția de mașini care fac stânga, o iau înainte sau o iau la dreapta, deci ne vom afla în următoarele din cele trei situații:

1) Mașina face dreapta cu probabilitatea p_d.

2) Mașina merge înainte cu probabilitatea p_i.

3) Mașina face stânga cu probabilitatea p_s.

Evident, avem că $\lambda_1 = \lambda_1 p_s + \lambda_1 p_i + \lambda_1 p_d$

„Timpii de servire” vor fi definiți asemănător ca înainte, luând „distanța de siguranță” ca reper.

Pentru situația 1), vom folosi modelul M/G/1 cu priorități, cu $r = 2$. Practic, modelul se va reduce la situațiile din Figura 1 și Figura 2.

Pentru situația 2), vom folosi modelul M/G/1 cu priorități, cu $r = 2$ și cu distanță de siguranță asemănătoare cu situația 1. Diferența e că sosirire clasei cu prioritate vor fi $Poisson(\lambda_2 + \lambda_4)$.

Pentru situația 3), vom folosi modelul M/G/1 cu priorități cu $r = 2$, cu aceeași distanță de siguranță. Sosirile clasei cu prioritate vor fi $Poisson(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)$.

Analiza cozilor la un semafor cu ciclu verde/roșu constant [21]

Vom presupune că un ciclu verde-roșu (vom exclude din model culoarea galbenă) este determinist, adică nu se schimbă dinamic în funcție de cantitatea de trafic care circulă pe un tronson.

Vom nota timpul în care semaforul este verde cu g și timpul în care semaforul este roșu cu r. Evident, un ciclu este format din $c = r + g$.

Vehiculele au sosiri Poisson.

Vom nota cu EX_g **lungimea medie a cozii care se revarsă** (adică lungimea staționară medie a cozii la sfârșitul perioadei în care semaforul este verde). McNeill ([A23]) a reușit să ajungă la un rezultat, derivând lungimea medie a cozii într-un ciclu folosind teorema lui Little. Din formula lui McNeill, e clar că a găsi o formulă exactă pentru întârzierea medie era echivalent cu a găsi o formulă pentru EX_g.

Limitările modelului:

- se concentrează pe comportamentul de echilibru (echilibru statistic?), lucru care necesită ca rata medie a sosirilor să fie mai mică decât capacitatea. În orele de vârf, acest lucru poate să nu fie valabil

- sosirile sunt independente și identic repartizate. Un proces de acest gen nu ține cont de semafoare adiancente și controlul lor.

- timpii semafoarelor sunt fixați.

Ipotezele modelului:

1) timpul este discretizat. Axa timpului e împărțită în intervale egale de timp (să le zicem sloturi). Fiecare slot corespunde timpului necesar pentru un vehicul în întârziere să plece din coadă. Timpii în care semaforul este verde sau roșu și deci ciclul c sunt presupuse a fi multipli de un slot. Vehiculele care sosesc la coadă și sunt întârziate, intră în coadă la sfârșitul slotului în care sosesc.

2) independență. Fie $Y_{k,n}$ = **numărul de vehicule care sosesc în intersecție în timpul slotului k în ciclul n.** Variabilele aleatoare $Y_{k,n}$ sunt presupuse a fi independente și identic distribuite $\forall k, n$. Să zicem că variabila cu care sunt identic repartizate este un Y având funcția generatoare notată cu $Y(z)$**.** Am făcut un abuz de notație aici, deoarece se poate confunda cu „valoarea variabilei aleatoare Y”. Motivul a fost că nu vreau să încarc notațiile.

3). Pentru ciclurile în care coada se eliberează înainte să se termine perioada verde, toate vehiculele care sosesc în timpul rezidual al culorii verzi trec prin sistem și nu au nicio întârziere

Presupunerea 3) are consecințe severe pentru analiza lungimii cozii.

Introducem notațiile

$X_{k,n}$ = **lungimea cozii la timpul k în ciclul n.** (deci în ciclul n, $X_{0,n}$ e lungimea cozii la începutul culorii verzi și $X_{g,n}$ revărsarea definită ca lungimea cozii la sfârșitul culorii verzi și deci la începutul culorii roșii.

A_n = **numărul total de vehicule care sosesc în intersecție între cele două măsurări ale revărsării $X_{g,n}$ și $X_{g,n+1}$.** Deci A_n sunt sosirile de la $X_{g,n}$ până la o perioadă consecutivă roșu-verde. Avem relația

$A_n = \sum_{k=g+1}^{c} Y_{k,n} + \sum_{k=1}^{g} Y_{k,n+1}$
Mai mult, $A_n = A_n^d + A_n^p$ unde
A_n^d = **vehiculele întârziate**
A_n^p = **vehiculele fără întârziere**.
Coada care se revarsă o definim ca fiind:
$X_{g,n+1} = \max\{X_{g,n} + A_n^d - g, 0\}$

A_n^d depinde atât de $X_{g,n}$ cât și de specificarea exactă a sosirilor. Din acest lucru, relația de mai sus este greu de analizat. Analiza se simplifică dacă toate vehiculele sunt întârziate, astfel încât toate vehiculele sosesc când lungimea cozii este cel puțin 1 și când $A_n = A_n^d$. Atunci variabilele A_n^d sunt i.i.d. și deci relația de mai sus se reduce la un model de așteptare cu servicii în loturi (rezolvat de Bayley, articolul [4] din [21]). Bayley a scos **funcția generatoare a lungimii staționare a cozii**, notată cu X_g.

Lungimea staționară a cozii se definește ca:

$$\lim_{n\to\infty} X_{g,n} = X_g$$

Aceasta există dacă $EA < g$.

Funcția generatoare necesită determinarea a g rădăcini complexe pe discul unitate a unei ecuații caracteristice.

Mai departe, voi prezenta soluția lui Darroch (articolul [A24]). El avea un proces de plecare al vehiculelor întârziate mai general, dar îl voi omite aici.

Fie Y o variabilă discretă cu funcția generatoare $Y(z) = E[z^Y]$. Vom presupune că această variabilă e un proces Poisson generalizat („compound Poisson process”). Vom presupune că admite toate momentele.

Voi nota $EY = \mu_Y$ și $Var(Y) = \sigma_Y^2$

Pentru a avea stabilitate, numărul de vehicule care sosesc este mai mic decât numărul maxim de vehicule care pot pleca, deci Y trebuie să satisfacă relația
$c\mu_Y < g$.

Pentru $k = 0, 1, 2, ..., g-1$, avem relațiile recursive

$$X_{k+1,n} = \begin{cases} X_{k,n} + Y_{k+1,n} - 1, & X_{k,n} \geq 1 \\ 0 & X_{k,n} = 0 \end{cases}$$

Pentru $k = g, g+1, ..., c-1$, avem relația

$$X_{k+1,n} = X_{k,n} + Y_{k+1,n}$$

.

Deci, pentru $k = 0, 1, 2, ..., g-1$, avem

$$P(X_{k+1,n} = j) = \sum_{p=1}^{j+1} P(X_{k,n} = p) P(Y_{k+1,n} = j - p + 1)$$
$$pentru\, j = 1, 2, ..$$

și

$$P(X_{k+1,n}=0)=P(X_{k,n}=0)+P(X_{k,n}=1)P(Y_{k+1,n}=0)$$

Notăm cu $X_{k,n}(z)$ funcția generatoare a lui $X_{k,n}$. Rezultă din cele două relații de mai sus că

$$X_{k+1,n}(z)=P(X_{k,n}=0)+\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{j=p-1}^{\infty}P(X_{k,n}=p)P(Y_{k+1,n}=j-p+1)z^j$$

Rescriem și avem că

$$X_{k+1,n}(z)=z^{-1}Y(z)X_{k,n}(z)+(1-z^{-1}Y(z))P(X_{k,n}=0)$$

.

Din relația de mai sus, rezultă că

$$X_{g,n}(z)=(z^{-1}Y(z))^g X_{0,n}(z)+(1-z^{-1}Y(z))\sum_{k=0}^{g-1}P(X_{k,n}=0)(z^{-1}Y(z))^{g-k-1}$$

Să observăm că $X_{0,n+1}(z)=X_{g,n}(z)Y(z)^r$ și în echilibru avem că $X_{0,n+1}(z)=X_{0,n}(z)$

Dacă notăm cu X_k repartiția staționară a lui $X_{k,n}$, avem după mici modificări ale relației de mai sus că

$$X_g(z)=\frac{Y(z)^g(\zeta(z)-1)\sum_{k=0}^{g-1}q_k\zeta(z)^k}{z^g+Y(z)^c}$$

unde am notat cu

$$q_k=P(X_k=0)$$

$$\zeta(z)=\frac{z}{Y(z)}$$

Reamintesc

Teorema lui Rouche [C10]***:***

Fie $D \in \mathbb{C}$ un domeniu stelat (adică există un punct $a \in D$ astfel încât $\forall z \in D$, segmentul $[a, z]$ rămâne în interiorul lui D) și $f, g : D \to \mathbb{C}$ funcții analitice cu mulțimi finite de zerouri (notate cu $Z(f)$ și $Z(g)$) în D. Dacă există un drum închis $\gamma : [a, b] \to D \backslash (Z(f) \cup Z(g))$ cu $Ind_\gamma(z) = 1$ pentru orice $z \in Z(f) \cup Z(g)$ astfel încât $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, $\forall z \in \gamma$, atunci f și g au același număr de zerouri, incluzând ordinele de multiplicitate.

Folosind teorema lui Rouche, putem arăta că numitorul $z^g + Y(z)^c$ are g zerouri pe discul unitate $|z| \leq 1$

Pentru că o funcție generatoare e analitică și bine-definită pe $|z| \leq 1$ numitorul $z^g + Y(z)^c$ trebuie să dispară la fiecare din zerouri. Acest fapt ne dă g ecuații. Unul din zerouri este egal cu 1 și ne conduce la o ecuație trivială. Totuși, normalizarea condiției $X_g(1) = 1$ ne dă o ecuație suplimentară. Folosind regula lui l'Hopital, această condiție va fi:

$$\sum_{k=0}^{g-1} q_k = \frac{g - \mu_Y}{1 - \mu_Y} := \eta$$

Putem rescrie astfel:

$$g - \sum_{k=1}^{g-1} q_k = \left(c - \sum_{k=1}^{g-1} q_k \right) \mu_Y$$

Partea dreaptă a ecuației de mai sus reprezintă **numărul mediu de vehicule întârziate care sosesc pe ciclu,** notat cu EA^d. Partea din stânga reprezintă numărul mediu de sloturi pe perioada culorii verzi folosite pentru plecarea vehiculelor întârziate.

Notăm cele g rădăcini ale ecuației $z^g = Y(z)^c$ pe discul $|z| \leq 1$ cu $z_0 = 1, z_1, ..., z_{g-1}$.

Cele g necunoscute $q_0, ..., q_{g-1}$ sunt deduse prin rezolvarea sistemului de ecuații liniare

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \zeta(z_1) & \zeta(z_1)^2 & \cdots & \zeta(z_1)^{g-1} \\ 1 & \zeta(z_2) & \zeta(z_2)^2 & \cdots & \zeta(z_2)^{g-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & \zeta(z_{g-1}) & \zeta(z_{g-1})^2 & \dots & \zeta(z_{g-1})^{g-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{g-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sistemul se rezolvă folosind regula lui Cramer. Apoi îl putem transforma într-un sistem de tip Vandermonde, ceea ce ne conduce la soluțiile explicite pentru $q_0, ..., q_{g-1}$:

$$q_j = \eta(-1)^j \frac{1}{\prod_{k=1}^{g-1}(\tau_k - 1)} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_{g-1-j} \le g-1} \tau_{i_1}\tau_{i_2}...\tau_{i_{g-1-j}}$$

unde am notat cu $\tau_k = \zeta(z_k)$.

Observăm că probabilitățile $q_0, ..., q_{g-1}$ descriu procesul cozii de așteptare.(?)

Media cozii staționare care se revarsă rezultă făcând $\frac{d}{dz}X_g(z)|_{z=1}$, deci avem că:

$$EX_g = \frac{c\sigma_Y^2 + r^2\mu_Y^2 - g^2(1-\mu_Y)^2}{2(g - c\mu_Y)} - \frac{\sigma_Y^2}{2(1-\mu_Y)} + \frac{1-\mu_Y}{2} + \frac{(1-\mu_Y)^2}{g - c\mu_Y}\sum_{k=0}^{g-1} kq_k$$

Întârzierea staționară medie

De acum încolo, vom lucra doar cu variabile staționare. Din funcția generatoare a cozii revărsate, putem deduce funcția generatoare a lungimii cozii la orice moment de timp. Într-un mod similar cu relația

$$X_{g,n}(z) = (z^{-1}Y(z))^g X_{0,n}(z) + (1 - z^{-1}Y(z)) \sum_{k=0}^{g-1} P(X_{k,n} = 0)(z^{-1}Y(z))^{g-k-1}$$

putem găsi pentru $k = 1, 2, ..., g$ formula

$$X_k(z) = X_g(z)Y(z)^r(Y(z)z^{-1})^k + (1 - Y(z)z^{-1}) \sum_{i=0}^{k-1} q_i(Y(z)z^{-1})^{k-i-1}$$

Pentru $k = g+1, ..., c-1$ avem că

$$X_k(z) = X_g(z)Y(z)^{k-g}$$

Lungimea medie a cozii la începutul unui slot arbitrar este dată de:

$$E\bar{X} = \frac{1}{c}\sum_{k=0}^{c-1} EX_k$$

Analiza cozilor de la semafor cu compuși Poisson [23]

Notăm cu

$A(z)$ = funcția generatoare a numărului de sosiri pe unitate de timp (să zicem o secundă)

$N(t)$ = numărul de sosiri într-un interval de timp de lungime t

$A^t(z)$ = funcția generatoare a lui $N(t)$

Se poate demonstra că un proces de numărare care e staționar și aditiv este neapărat un compus Poisson (sau conglomerat Poisson, cf. Zbăganu), adică

$A^t(z) = \exp\{\Lambda t[\phi(z) - 1]\}$

unde $\phi(z)$ este funcția generatoare a numărului de evenimente care se petrec simultan la fiecare punct de creștere al procesului Poisson simplu. $\Lambda > 0$

$\frac{d}{dz}\exp\{\Lambda t[\phi(z) - 1]\}\,|_{z=1} \Rightarrow EN(t) = \Lambda t\phi'(t)\,(*)$

$EN(t)$ = numărul mediu de mașini care sosesc în intersecție până la momentul t.

Deci rata de sosiri a vehiculelor în intersecție este

$\lambda = \Lambda\phi'(1)\,(**)$

Observație: *Limitarea modelului este că mașinile au lungime zero. Totuși, folosind acest model, putem deduce întârzierea așteptată.*

Presupunem că vehiculele întârziate de culoarea semaforului pleacă pe rând când culoarea se face verde, fiecărui vehicul luându-i $1/\mu$ unități de timp să plece de la coadă.

Întârzierea așteptată per vehicul:

Notăm cu

$Q(t)$ = numărul de vehicule care așteaptă la momentul t după ce începe culoarea roșie a semaforului.

Întârzierea totală pentru toate vehiculele care așteaptă la coadă în intervalul $(t, t + \Delta t)$ este $Q(t)\Delta t + o(\Delta t)$

Întârzierea totală în ciclul de semaforizare $C = R+G$ (Ciclul de semaforizare = timpul în care semaforul este roșu + timpul în care semaforul e verde) este dată de:

$$W = \int_0^C Q(t)dt = \int_0^R [Q(0) + N(t)]dt + \int_R^C Q(t)dt = W_1 + W_2$$

Luând mediile și folosind relațiile $(*)$ și $(**)$ rezultă că

$$EW_1 = REQ(0) + \frac{1}{2}\lambda R^2$$

Pentru a găsi EW_2, notăm cu

$$W_2 = W_3 - W_4$$

unde

$$W_3 = \int_R^\infty Q_1(t)dt$$

$$W_3 = \int_C^\infty Q_1(t)dt$$

Observăm că $Q_1(t)$ este identic cu $Q(t)$ pe intervalul (R, C). $Q_1(t)$ poate fi definit cum vrem pe intervalul (C, ∞).

Alegem să îl definim astfel:

•$Q_1(t)$ cu $t \in [C, \infty)$ e un proces de așteptare cu starea inițială $Q_1(C) = Q(C)$ cu sosiri definite de un compus Poisson, timpii de servire constanți de lungime $1/\mu$ și o stare absorbantă la origine. Observăm că acest lucru înseamnă că $Q_1(t)$ este definit la fel și pe intervalul (R, ∞).

Pentru procesul $Q_1(t)$, definim

A_1 = numărul de sosiri în intervalul $(R, R + \mu^{-1}Q(R))$

A_2 = numărul de sosiri în intervalul $(R + \mu^{-1}Q(R), R + \mu^{-1}\{Q(R) + A_1\})$

$\vdots$

A_n = numărul de sosiri în intervalul

$(R + \mu^{-1}\{Q(R) + A_1 + ... + A_{n-2}\}, R + \mu^{-1}\{Q(R) + A_1 + ... + A_{n-2} + A_{n-1}\})$

Avem definit un șir de variabile aleatoare $(A_n)_n$ astfel încât repartiția condiționată a lui A_n față de $\{Q(R), A_1, A_2, ..., A_{n-1}\}$ depinde doar de A_{n-1}.

Definim

$Z_0 = R + \mu^{-1}Q(R)$

$Z_n = Z_0 + \mu^{-1}\{A_1 + ... + A_n\}$, $n = 1, 2, 3...$

Atunci

$$W_3 = \int_R^{R+\mu^{-1}Q(R)} Q_1(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{Z_n}^{Z_{n+1}} Q_1(t)dt$$

Avem că

$$E\left[\int_{Z_n}^{Z_{n+1}} Q_1(t)dt\right] = E\left[E\left[\int_{Z_n}^{Z_{n+1}} Q_1(t)dt \,|A_{n+1}\right]\right]$$

Putem sparge ultima integrală în două părți. Una care reprezintă întârzierea celor A_{n+1} vehicule din coadă până la momentul Z_n, a doua reprezentând întârzierea vehiculelor care sosesc în intervalul aleator (Z_n, Z_{n+1}).

Atunci

$$\begin{aligned}
&E\left[\int_{Z_n}^{Z_{n+1}} Q_1(t)dt\right] = \\
&= E\left[\frac{1}{2\mu}A_{n+1}(1 + A_{n+1}) + E\left[\int_{Z_n}^{Z_{n+1}} \{N(t) - N(Z_n)\}dt \,|A_{n+1}\right]\right] \\
&= \frac{1}{2\mu}E\left[A_{n+1} + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)A_{n+1}^2\right]
\end{aligned}$$

Notând cu $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ și folosind $(*)$, $(**)$ și definiția variabilelor Z_i, avem că

$$E\left[A_{n+1} \,|A_n\right] = \rho A_n$$

$$E\left[A_{n+1}^2\,|A_n\right] = E^2\left[A_{n+1}\,|A_n\right] + Var\left[A_{n+1}\,|A_n\right] = \rho^2 A_n^2 + I\rho A_n$$

unde am notat

$$I = \frac{Var(N(t))}{EN(t)}\ .$$

I se numește **coeficient de variație**.
Folosind definiția lui I și ultimele trei relații de mai sus, avem că

$$E\left[\int_{Z_n}^{Z_{n+1}} Q_1(t)dt\right] = \frac{1}{2\mu}E\left[\rho(1+I(1+\rho))A_n + \rho^2(1+\rho)A_n^2\right] \Rightarrow$$

$$E\left[\int_{Z_n}^{Z_{n+1}} Q_1(t)dt\right] =$$

$$\frac{1}{2\mu}\left\{\rho^{n+1}\left[1+\frac{I(1+\rho)(1-\rho^{n+1})}{1-\rho}\right]EQ(R) + \rho^{Z_{n+2}}(1+\rho)EQ^2(R)\right\}$$

Înlocuind în definițiile lui W_3 și W_4 avem că

$$EW_3 = \frac{1}{2}\mu^{-1}(1-\rho)^{-2}\left\{(1+\rho I-\rho)EQ(R) + (1-\rho)EQ^2(R)\right\}$$

$$EW_4 = \frac{1}{2}\mu^{-1}(1-\rho)^{-2}\left\{(1+\rho I-\rho)EQ(C) + (1-\rho)EQ^2(C)\right\}$$

Presupunând în continuare că ne aflăm în echilibru statistic, condiția necesară și suficientă fiind că $\lambda C < (C-R)\mu \Leftrightarrow \rho < 1-r = 1-\dfrac{R}{C}$ (adică numărul mediu de sosiri pe ciclu e mai mic decânt numărul de mașini care pot trece pe culoarea verde).

În echilibru, avem

$$EQ(0) = EQ(C)$$

$$EQ^2(0) = EQ^2(C)$$

Deasemenea

$$Q(R) = Q(0) + N(R) \Leftrightarrow E[Q(R) - Q(C)] = EN(R) = \lambda R$$

și

$$E[Q^2(R) - Q^2(C)] = 2EN(R)EQ(0) + EN^2(R) = 2\lambda REQ(0) + \lambda^2R^2 + \lambda RI$$

Folosind ecuațiile unde sunt definite EW_3, EW_4, W_2 și cele două ecuații de mai sus, obținem

$$EW_2 = \frac{1}{2}\mu^{-1}(1-\rho)^{-2}\left\{(1+\rho I-\rho)\lambda R + (1-\rho)(2\lambda REQ(0) + \lambda^2R^2 + \lambda RI)\right\}$$

Acum, din ecuația de mai sus și din definiția lui W și al lui W_1 avem

$$EW = \frac{\lambda r C}{2(1-\rho)} \left\{ rC + \frac{2}{\lambda} EQ(0) + \frac{1}{\mu}\left(1 + \frac{I}{1-\rho}\right)\right\}$$

Pentru un număr mai mare de cicluri avem formula

$$\frac{EW}{EN(C)} = \frac{1}{2} r(1-\rho)^{-1} \left\{ rC + c\lambda^{-1} EQ(0) + \mu^{-1}\left[1 + I(1-\rho)^{-1}\right]\right\}$$

Pentru a evita complicarea calculelor, vom presupune mai departe că numărul de vehicule care trec pe culoarea verde este un întreg notat cu $m = (1-r)C\mu \in \mathbb{N}$. Considerăm o coadă cu serviciu constant de lungime C, cu serviciu în loturi de mărime cel mult m. Numărul de sosiri va avea funcția generatoare $A^C(z)$. Cantitatea $A(z)$ a fost definită mai sus. „Servirea” începe chiar dacă sunt sau nu mașini care stau la coadă. Spre deosebire de ce am definit mai înainte, este posibil ca mai mult de m mașini să treacă pe verde, atâta timp cât coada se golește înainte de sfârșitul culorii verzi.

Boudreau (articolul [A32]) a simplificat analiza folosind funcții generatoare.

Notăm cu

h_n = probabilitatea ca la echilibru să avem n mașini în coadă imediat după începerea unui ciclu de semaforizare. (perioada de servire)

a_n = probabilitatea să sosească n mașini în perioada de servire

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n h_n$$

Folosind proprietățile proabilităților de tranziție, ne rezultă că

$$\boxed{H(z) = \left\{ \sum_{s=0}^{m-1} (z^m - z^s) \sum_{r=0}^{s} h_r a_{s-r} \right\} \left\{ z^m - A^C(z) \right\}^{-1}} (1)$$

Folosind teorema lui Rouche, putem demonstra că dacă avem condiție de echilibru (adică $\lambda C < m$), atunci ecuația $A_C(z) = z^m$ are fix $m-1$ rădăcini în interiorul discului unitate $|z| = 1$. Le Notăm cu z_s cu $s = 1, 2, ..., m-1$. Apoi, folosind convergența seriei $H(z)$ în interiorul discului unitate, ecuația de mai sus se reduce la:

$$\boxed{H(z) = \frac{(m-\lambda C)(z-z_1)...(z-z_{m-1})(z-1)}{\{z^m - A^C(z)\}(1-z_1)...(1-z_{m-1})}} (2)$$

NU este evident că $H(z)$ pornește de la relația (1) și ajunge la relația (2).

Pentru aceasta, încercăm să găsim acest lucru, folosindu-ne de identificarea coeficienților.

Știm că $A^C(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n a_n$

Rescriem puțin relația în care apare $H(z)$.

$$H(z)(z^m - A^C(z)) = \sum_{s=0}^{m-1} z^m \sum_{r=0}^{s} h_r a_{s-r} - \sum_{s=0}^{m-1} z^s \sum_{r=0}^{s} h_r a_{s-r}$$

Deci

$$z^m H(z) + \sum_{s=0}^{m-1} z^s \sum_{r=0}^{s} h_r a_{s-r} = H(z) A^C(z) + \sum_{s=0}^{m-1} z^m \sum_{r=0}^{s} h_r a_{s-r}$$

Ne putem afla în trei cazuri pentru coeficientul lui z^m. Vom compara partea stângă din ultima ecuație cu partea dreaptă

Cazul I: $n < m$

Avem

$$\sum_{r=0}^{n} h_r a_{n-r} = \sum_{r=0}^{n} h_r a_{n-r} + 0. \text{ OK.}$$

Cazul II: $n = m$

$$h_0 = \sum_{r=0}^{m} h_r a_{n-r} + \sum_{s=0}^{m-1} \sum_{r=0}^{s} h_r a_{s-r}$$

Deci

$$h_0 = \sum_{s=0}^{m} \sum_{r=0}^{s} h_r a_{s-r}$$

(acest fapt reiese din condiția de echilibru)

Cazul III: $n > m$

$$h_{n-m} = \sum_{r=0}^{n} h_r a_{n-r}$$

(acest fapt reiese tot din condiția de echilibru)

Deci $H(z)$ are forma stabilită.

Pentru a stabili că avem $m-1$ rădăcini, putem argumenta în două feluri.

Fie

$(z^m - A^C(z))H(z) = \sum_{s=0}^{m-1} (z^m - z^s) \sum_{r=0}^{s} h_r a_{s-r}$.

Notez cu $b_s := \sum_{r=0}^{s} h_r a_{s-r}$. Evident, $b_s \geq 0$

Propoziție: *$p(z) = \sum_{s=0}^{m-1} (z^m - z^s) b_s$ are $m-1$ rădăcini cu $|z| < 1$ și rădăcina $z = 1$.*

Demonstrație:

$|p(z) - z^m \sum b_s| < |z^m \sum b_s|$

$\left| - \sum_{s=0}^{m-1} z^s b_s \right| \leq \sum b_s |z|^s \leq \sum b_s = |z^m \sum b_s|$

Observăm că avem egalitate doar dacă $z = 1$.

Altă demonstrație: Dacă $p(z) = 0$, atunci

$z^m \sum_{s=0}^{m-1} b_s = \sum_{s=0}^{m-1} z^s b_s$

Deci

$|z|^m \sum_{s=0}^{m-1} b_s = \left| \sum_{s=0}^{m-1} z^s b_s \right| \leq \sum_{s=0}^{m-1} |z|^s b_s$

Dacă $|z| > 1$ obținem o contradicție pentru că

$|z|^s < |z|^m$ și $|z|^m \sum_{s=0}^{m-1} b_s < \sum_{s=0}^{m-1} b_s |z|^m$

Concluzia este că $p(z) = (z^m - A^C(z))H(z)$ are $m-1$ rădăcini și rădăcina 1 în discul unitate.

Un ultim pas care trebuie făcut pentru a demonstra forma din ecuația (2) este următorul.

Fie

$H(z) = \frac{p(z)}{z^m - A^C(z)} = \frac{a(z-z_1)...(z-z_{m-1})(z-1)}{(z^m - A^C(z))}$

Trebuie să îl determinăm pe a.

Pentru asta facem limită din $z \to 1$, de unde

$1 = \frac{a(1-z_1)...(1-z_{m-1})}{\frac{d}{dz}(z^m - A^C(z))\,|_{z=1}} = \frac{a(1-z_1)...(1-z_{m-1})}{m - \lambda C}$

De unde îl scoatem pe a.

$\square$

Facem

$\frac{d}{dz}H(z)\,|_{z=1}$ de unde ne rezultă lungimea medie a cozii

$$EQ(0) = \sum_{s=1}^{m-1} \frac{1}{1-z_s} + \frac{1}{2}(m-\lambda C)^{-1}(\lambda CI + (\lambda C)^2 - \lambda C + m - m^2) \text{ (*)}$$

Trebuie să găsim o expresie pentru $\sum (1-z_s)^{-1}$.

Pentru asta, folosim o metodă dedusă de Crommelin [A33].

Din [C12] pag. 119, avem relația

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(z)\frac{g'(z)}{g(z)}dz = \sum_i r_i f(a_i) - \sum_j s_j f(b_j)$$

unde avem că Γ este o curbă închisă în planul complex, $f(z)$ și $g(z)$ sunt analitice în domeniul definit de curba Γ (îl notăm cu D_Γ), b_j sunt polii lui $g(z)$ care au ordin de multiplicitate s_j în interiorul domeniului D_Γ și cu a_i zerourile lui $g(z)$ cu ordine de multiplicitate r_i în interiorul domeniului D_Γ.

Luăm $g(z) = 1 - z^m A^C(z) = -z^{-m}A^C(z)(1 - z_m A^{-C}(z))$ și avem că ecuația din paragraful de mai sus se transformă în

$\frac{1}{2\pi i}\int_\Delta (1-z)^{-1}g'(z)(g(z))^{-1}dz = \sum_{s=1}^{m-1}(1-z_s)^{-1} - m$ unde Δ este o curbă care înconjoară cercul unitate, dar taie punctul $z = 1$ și zerourile externe ale lui $g(z)$. Să presupunem că Δ este compus din două cercuri, unul numit C_1 care înconjoară originea planului și altul C_0 în interiorul lui C_1 care înconjoară punctul $z = 1$.

Integrând prin părți componenta lui C_1 al egalității din stânga a relației de mai sus, ne rezultă că

$\sum_{s=1}^{m-1}(1-z_s)^{-1} = m - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{\log g(z)}{(1-z)^2}dz + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_0}\frac{g'(z)}{(1-z)g(z)}dz$ (**)

Dacă luăm $diam(C_0) \to 0$, avem că

$$\frac{g'(z)}{g(z)} \to (z-1)^{-1}\left(1 + \frac{1}{2}(z-1)g''(1)\right)$$

Introducem în ecuațiile (**) și folosim în (*), trecem la limită și avem

$$EQ(0) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}(1-z)^{-2}\log g(z)dz$$

Facem dezvoltare în serie Taylor în punctul $g(z) = 1$ și ne rezultă că

$$\begin{aligned}
EQ(0) &= \int_{C_1}(1-z)^{-2}dz\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^{-nm}A^{Cn}(z) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n\pi i}\int_{C_1}(1-z)^{-2}z^{-nm}A^{Cn}(z) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[n(\lambda C - m) + \frac{1}{(nm-1)!}\partial_{nm-1}\left((1-z)^{-2}A^{Cn}(z)\right)|_{z=0}\right]
\end{aligned}$$

Pentru evaluarea integralei, am folosit teorema reziduurilor, pe care o reamintesc mai jos:

Teorema Reziduurilor: *Fie $D \subset \mathbb{C}$ un domeniu stelat și $S = z_1, ..., z_N \in D$ o mulțime finită de puncte distincte. Fie $f : D\backslash S \to \mathbb{C}$ o funcție analitică și $\gamma : [a, b] \to D\backslash S$ un drum închis. Atunci*

$$\boxed{\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{N}Rez(f; z_k)Ind_\gamma(z_k)}$$

Am notat operatorul $\partial_j := \dfrac{\partial^j}{\partial z^j}$

Folosind teorema lui Leibnitz și rearanjând termenii, avem că

$$EQ(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{j}{(j+mn)!}\partial_{j+mn}A_{Cn}(z)\right]|_{z=0}$$

Știm funcția $A^{Cn}(z)$, $m = (1-r)\mu C$, inserăm în ecuația unde $\dfrac{EW}{EN(C)} = ...$ și ne rezultă întârzierea medie pe vehicul.

Cazuri particulare:

1) Sosiri Poisson

Pentru $\phi(z) = z$ avem că

$$EQ(0) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-n\lambda C}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{j}{(j+mn)!}(n\lambda C)^{j+mn}$$

2) Sosiri în loturi

Pentru $\phi(z) = \dfrac{\log(1-az)}{\log(1-a)}$ cu $a \in (0, 1)$.

Avem probabilitatea ca un lot să aibe mărime n egală cu $cn^{-1}a_n$ unde $c = (-\log(1-a))^{-1}$

În cazul acesta $I = \dfrac{2a}{1-a}$

$$EQ(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} a^{mn}(1-a)^{nK} \sum_{j=1}^{\infty} C_{Kn+mn+j-1}^{mn+j} j a^j$$

unde am notat

$$K = \frac{\lambda C(1-a)}{a}$$

Generalizări ale modelului:

1) Mai multe benzi

Pur și simplu înlocuim μ cu $\mu \cdot l$ unde cu l am notat numărul de benzi. Este posibil chiar ca pentru această generalizare, modelul să fie mai corect, deoarece este mai intuitiv să gândim sosirile în loturi.

2) Plecări aleatoare

Considerăm această generalizare deoarece șoferii pot avea timpi diferiți de reacție, deci presupunerea că timpii de plecare sunt constanți este oarecum neplauzibilă. Presupunem că timpii de plecare succesivi al vehiculelor pe culoarea verde a semaforului sunt variabile aleatoare independente și identic repartizate notate cu s_i având fiecare coeficientul de variație C_i cu $Es_i = \mu^{-1}$.

Relațiile se generalizează astfel:

$$E\left[\int_{Z_n}^{Z_{n+1}} Q_1(t)dt\right] = \frac{1}{2\mu}\left((1+\rho C_s^2)E(A_{n+1}) + (1+\rho)E(A_{n+1}^2)\right)$$

$$E\left[A_{n+1}|A_n\right] = \rho A_n$$

$$E\left[A_{n+1}^2|A_n\right] = \rho(I+\rho C_s)A_n + \rho^2 A_n^2$$

Deci întârzierea medie per vehicul este acum

$$\frac{EW}{EN(C)} = \frac{1}{2}(1-\rho)^{-1}\left\{rC + 2\lambda^{-1}EQ(0) + \mu^{-1}\left[1 + (I+\rho C_s^2)(1-\rho)^{-1}\right]\right\}$$

și mai avem că

$$EQ(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j}{(j+Mn)!} \partial_{j+Mn}\left(\frac{A_C(z)z^M}{B(z)}\right)|_{z=0}$$

3) Mașini care fac la stânga

Pentru asta, vom presupune că există o bandă separată pentru făcut stânga și acestea au un ciclu de semaforizare special făcut.

Pentru cazul în care nu avem decât o bandă, putem reduce la cazul 2), permițând timpii de plecare să aibe o probabilitate finită să fie egal cu timpul în care semaforul este verde.

4) Un proces mai general al sosirilor.

Model de așteptare M/G/c/c cu stări dependente pentru o secțiune de drum [17]

Pentru inceput, putem presupune ca sunt c benzi (servere paralele).

Putem presupune că viteza depinde de câte mașini sunt pe tronsonul respectiv.

De exemplu, putem să presupunem că „rata de servire” e o dependență liniară față de numărul n de mașini, definită astfel

$$v(n) = v_l \frac{(c - n + 1)}{c}$$

Am notat cu $v(n)$ viteza cu care circulă mașinile, cu v_l limita de viteză pe tronsonul considerat (la care facem presupunerea că nu poate fi depășită).

Deasemenea, mai putem considera o funcție exponențială de forma

$$v(n) = v_l \exp\left[-\left(\frac{n-1}{\beta}\right)^{\gamma}\right]$$

O vom numi pe v **funcție de congestie**.

β și γ sunt parametri care dau forma curbei. Aceasta poate fi determinată empiric pe baza măsurătorilor.

Dacă avem un grafic, al cărui axă Ox reprezintă densitatea de vehicule (să zicem vehicule/km) și a cărui axă Oy reprezintă viteza medie, pe baza măsurătorilor empirice, știind că curba $v(n)$ trece prin punctele $(1, v_l)$, $(a, v(a))$ și $(b, v(b))$ atunci pentru a afla parametrii de formă avem relațiile:

$$\begin{cases} \beta = \dfrac{a-1}{[\ln(v_l/v(a))]^{1/\gamma}} = \dfrac{b-1}{[\ln(v_l/v(b))]^{1/\gamma}} \\[2ex] \gamma = \dfrac{\ln\left(\dfrac{\ln\left(\frac{v(a)}{v_l}\right)}{\ln\left(\frac{v(b)}{v_l}\right)}\right)}{\ln\left(\frac{a-1}{b-1}\right)} \end{cases}$$

Vom presupune că mașinile sosesc $Poisson(\lambda)$. „Timpul de servire” va depinde de numărul de vehicule de pe stradă.

O **„rată de servire normalizată”** va fi definită prin $f(n) = \dfrac{v(n)}{v_l}$. O definim așa pentru a captura mai ușor efectul congestiei.

Câteva observații asupra funcției $f(n)$:

1) $0 \leq f(n) \leq 1$

2) În cazul funcției de congestie liniare, avem $f(n) = \dfrac{c-n+1}{c}$

3) În cazul funcției de congestie exponențiale, avem $f(n) = \dfrac{c-n+1}{c}$

Vom nota cu $P_n = P(N = n)$ repartiția staționară al numărului de ocupanți N în modelul $M/G/c/c$ cu stări dependente au fost dezvoltate și demonstrate (în [A34]) ca fiind echivalentul stocastic al unui model $M/M/c/c$. Vom mai nota cu L **lungimea străzii**.

Acestea fiind spuse, avem că

$P_n = \dfrac{\left(\dfrac{\lambda L}{v_l}\right)^n}{\prod_{i=1}^n if(i)} P_0$, pentru $n = 1, ..., c$

$P_0 = \left(1 + \sum\limits_{n=1}^{c} \frac{(\lambda L/v_l)^n}{\prod_{i=1}^n if(i)}\right)^{-1}$

Din P_n putem scoate indicatori de performanță cum ar fi:

Probabilitatea de blocaj:

$$P_c = \frac{P_0\left(\frac{\lambda L}{v_l}\right)^c}{\prod_{i=1}^c if(i)}$$

Fluxul (adică numărul de vehicule care tranzitează strada):

$$\theta = \lambda(1 - P_c)$$

Numărul așteptat de mașini pe stradă:

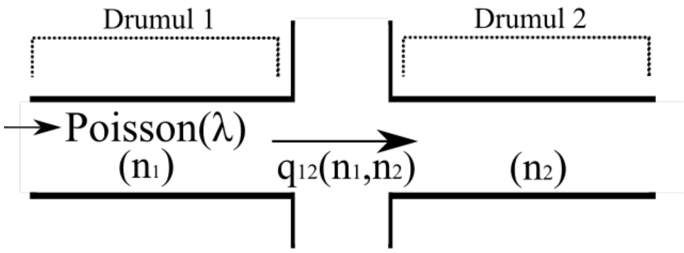
$$\bar{N} = \sum_{n=1}^{c} nP_n$$

Timpul așteptat al serviciului:

$$W = \frac{\bar{N}}{\theta}$$

Modelul pentru două drumuri, legate în serie:

Considerăm următoarea figură:



Putem modifica puțin modelul nostru, redefinind „rata de servire normalizată” cu o nouă funcție $g(n)$ care de data asta depinde de **fluxul mediu** $q(n)$ și de **fluxul maxim** q_{max} astfel:

$g(n) = \dfrac{q(n)}{q_{max}}$

Am făcut această modificare deoarece vom considera funcții de cerere și ofertă pe o secțiune de drum și apoi le vom folosi pentru secțiuni legate „în serie”.

Introduc notațiile:

ρ = densitatea de mașini pe secțiunea de drum

$Q(\rho)$ = fluxul de mașini

v_l = limita de viteză

w = viteza valului de alglomerație (backward wave speed)

ρ_j = densitatea blocajului

L = lungimea secțiunii de drum

q_{max} = fluxul maxim

$q(n)$ = fluxul mediu

n = numărul de vehicule

T = „timpul de servire” (în cazul nostru, timpul necesar pentru ca o mașină să treacă printr-o secțiune de drum)

$\Delta(\rho)$ = funcția de cerere

$\Sigma(\rho)$ = funcția de ofertă

Cu aceste notații, avem relațiile următoare:

$$Q(\rho) = \min\{v_l\rho\,,\, w(\rho_j - \rho)\}$$

$$\Delta(\rho) = \min\{v_l\rho\,,\, q_{max}\}$$

$$\Sigma(\rho) = \min\{w(\rho_j - \rho)\,,\, q_{max}\}$$

$$q_{max} = \frac{\rho_j}{\left(\frac{1}{v_l} + \frac{1}{w}\right)}$$

$$\rho = \frac{n}{L}$$

„Serviciul” (i.e. timpul necesar pentru ca o mașină să treacă printr-o secțiune de drum) depinde atât de cerere cât și de ofertă. Timpul mediu de servire $E(T)$ depinde de numărul de mașini de pe tronson și e dat de formula

$$E(T) = \frac{L}{v(n)}, \text{ unde } v(n) = \frac{Q(\rho)}{\rho}$$

Timpul mediu de servire este dat de

$$E(T) = \frac{n}{\min\left\{v_l \frac{n}{L}\,,\, w\left(\frac{c-n}{L}\right)\right\}}$$

Rata medie de servire μ al unui server este dat de

$$\mu = \frac{1}{E(T)} = \frac{v(n)}{L} = \frac{\min\left\{v_l \frac{n}{L}\,,\, w\left(\frac{c-n}{L}\right)\right\}}{n}$$

Rata de serviciu per total $q(n)$ a secțiunii de drum (sistemul de așteptare) cu n mașini este echivalent cu numărul de servere ocupate înmulțit cu rata fiecărui server și este fluxul de mașini pe secțiune

$$q(n) = n\mu = \min\left\{v_l \frac{n}{L}\,,\, w\left(\frac{c-n}{L}\right)\right\}$$

Probabilitățile staționare pentru numărul de mașini pe secțiunea de drum sunt deduse înlocuind expresia lui q_n în ecuațiile Chapman-Kolmogorov pentru a rezolva probabilitățile unei singure cozi (vezi [21])

$$(*)\begin{cases} P_n = \dfrac{\lambda^n}{\prod_{i=1}^{n} \mu_i} P_0 & n = 1, ..., c \\ P_0 = \left(1 + \sum\limits_{n=1}^{c} \dfrac{\lambda^n}{\prod_{i=1}^{c} \mu_i}\right)^{-1} & \end{cases}$$

Atunci probabilitatea staționară a numărului de mașini pe secțiunea de drum este dată de (vezi [A35])

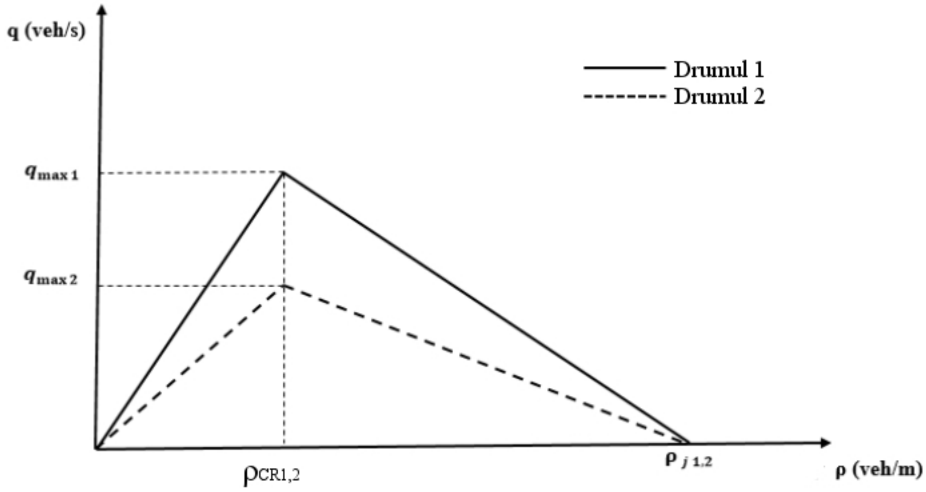
$$P_n = \frac{\lambda^n \left(\frac{L}{v_l}\right)^{n_{CR}} \left(\frac{L}{w}\right)^{n-n_{CR}}}{\prod_{i=1}^{n_{CR}} \prod_{[i=n_{CR}+1]}^{n} (c-i)} P_0$$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{c} \frac{\lambda^n \left(\frac{L}{v_l}\right)^{n_{CR}} \left(\frac{L}{w}\right)^{n-n_{CR}}}{\prod_{i=1}^{n_{CR}} \prod_{[i=n_{CR}+1]}^{n} (c-i)}\right)^{-1}$$

În continuare, vom presupune că avem două secțiuni de drum legate în serie. Servirea în secțiunea 1 este constrânsă de fluxul în următoarea secțiune (secțiunea 2).

Modelul presupune că fluxul spre secțiunea a doua este stocastic, repartiția staționară a numărului de mașini în următoarea secțiune e dată și avem o diagramă triunghiulară fundamentală a traficului pentru ambele secțiuni de drum.

Considerăm diagrama fundamentală (vedeți [I4])



Fluxul de mașini plecând din secțiunea 1 și intrând în secțiunea 2 e dată de minimul dintre cererea de trafic pe secțiunea 1 și oferta pe secțiunea 2.

$$q_{12}(n_1,n_2)=\min\left(\Delta_1(\rho_1),\Sigma_2(\rho_2)\right)=\min\left(v_{l_1}\frac{n_1}{L_1},q_1^{max},q_2^{max},w_2\left(\frac{c_2-n_2}{L_2}\right)\right)$$

Rata de servire normalizată va fi definită de formula

$$f(n_1,n_2)=\frac{q_{12}}{q_1^{max}}=\frac{\min\left(v_{l_1}\frac{n_1}{L_1},q_1^{max},q_2^{max},w_2\left(\frac{c_2-n_2}{L_2}\right)\right)}{q_1^{max}}$$

Probabilitatea staționară a numărului de mașini pe secțiunea 2 e presupusă a fi fixată și e dată de $(*)$, față de θ

$$P_{n_2}^{(2)}(\theta)=\frac{\theta^{n_2}\left(\frac{L_2}{v_{l2}}\right)^{n_{CR2}}\left(\frac{L_2}{w_2}\right)^{n_2-n_{CR2}}}{\prod_{i=1}^{n_{CR2}}\prod_{i=n_{CR1}+1}^{n_2}(c_2-i)}P_0(\theta)\text{ pentru }n_2=1,...,c_2$$

$$P_0^{(2)}(\theta)=\left(1+\sum_{n_2=1}^{c_2}\frac{\theta^{n_2}\left(\frac{L_2}{v_{l2}}\right)^{n_{CR2}}\left(\frac{L_2}{w_2}\right)^{n_2-n_{CR2}}}{\prod_{i=1}^{n_{CR2}}\prod_{i=n_{CR1}+1}^{n_2}(c_2-i)}\right)$$

În secțiunea 1, avem un model $M/G/c_1/c_1$, parametrizat de „oferta” (supply) de trafic a secțiunii 2.

Repartiția staționară a numărului de mașini pe secțiunea 1, depinzând de numărul de mașini de pe secțiunea 1 e dat de:

$$P_{n_1|n_2}(\lambda)=\frac{\left(\frac{\lambda}{q_1^{max}}\right)^{n_1}}{\prod_{i=1}^{n_1}f(i,n_2)}P_{0|n_2}(\lambda)$$

$$P_{0|n_2}(\lambda) = \left(1 + \sum_{n_1=1}^{c_1} \frac{\left(\frac{\lambda}{q_1^{max}}\right)^{n_1}}{\prod_{i=1}^{n_1} f(i, n_2)}\right)^{-1}$$

Atunci, probabilitatea staționară a numărului de mașini pe secțiunea 1 o obținem ca fiind:

$$P_{n_1}^{(1)}(\lambda, \theta) = \sum_{n_2=0}^{c_2} P_{n_1|n_2}(\lambda) P_{n_2}^{(2)}(\theta) \text{ pentru } n_1 = 1, ..., c_1$$

$$P_0^{(1)}(\lambda, \theta) = \sum_{n_2=0}^{c_2} P_{0|n_2}(\lambda) P_{n_2}^{(2)}(\theta)$$

Fluxul exterior, de la secțiunea 1 este dat, folosind legea lui Little, de formula

$$\theta = \lambda \left(1 - P_{c_1}^{(1)}(\lambda, \theta)\right)$$

Observație importantă! Putem extinde acest model la o rețea de drumuri.

Repartițiile vitezei și timpului de călătorie

Este extrem de important să exprimăm dependențele între fluxul mediu de mașini, densitatea medie și viteza medie. Le notăm cu q, ρ și v.

Relația între cele trei este:

$$q = \rho v$$

Viteza medie a mașinilor $v(n)$ printr-o secțiune de drum este, evident, o variabilă aleatoare, neoarece n este aleator.

Dacă folosim expresia liniară $v(n) = v_l \dfrac{(c - n + 1)}{c}$, densitatea vitezei mașinilor este dată de

$$P(v_n = v) = P\left(n = \left\lfloor 1 + c\left(1 - \frac{v}{v_l}\right)\right\rfloor\right)$$

Atunci, repartiția vitezelor mașinilor este dată de

$$P_v = P(v_n = v) = \frac{\left(\frac{\lambda L}{v_l}\right)^{\lfloor 1+c(1-v/v_l)\rfloor}}{\prod_{i=1}^{\lfloor 1+c(1-v/v_l)\rfloor} i(c-i+1)/c} P_0 \text{ pentru } v = 1, ..., v_l$$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{v=1}^{v_l} \frac{\left(\frac{\lambda L}{v_l}\right)^{\lfloor 1+c(1-v/v_l)\rfloor}}{\prod_{i=1}^{\lfloor 1+c(1-v/v_l)\rfloor} i(c-i+1)/c}\right)^{-1}$$

În continuare, vom putea calcula **viteza medie de călătorie** printr-o secțiunea de drum față de lungimea secțiunii L și viteza medie v. Avem $\tau = \dfrac{L}{v}$. Deci repartiția timpului de călătorie este dat de

$$P(\tau = t) = P\left(v = \frac{L}{t}\right) = P\left(n = \left\lfloor 1 + c(1 - \frac{L}{tv_l}\right\rfloor\right)$$

Repartiția vitezei medii de călătorie printr-o secțiune este dată de

$$P_t = P(\tau = t) = \frac{\left(\frac{\lambda L}{v_l}\right)^{\lfloor 1+c(1-L/tv_l))\rfloor}}{\prod_{i=1}^{\lfloor 1+c(1-L/tv_l))\rfloor} i(c-i+1)/c} P_0 \text{ pentru } t = \lfloor L/v_l \rfloor, ..., L$$

$$P_0 = \left(1 + \sum_{t=\lfloor L/v_l \rfloor}^{L} \frac{\left(\frac{\lambda L}{v_l}\right)^{\lfloor 1+c(1-L/tv_l))\rfloor}}{\prod_{i=1}^{\lfloor 1+c(1-L/tv_l))\rfloor} i(c-i+1)/c}\right)^{-1}$$

Repartiția vitezelor mașinilor satisface

$$P(v(n) = v) = P\left(\frac{\min\left\{v_l \frac{n}{L}\,,\, w\left(\frac{c-n}{L}\right)\right\}}{\frac{n}{L}} = v\right)$$

În acest caz, distingem două cazuri:

1. $\rho \leq \rho_{CR} \Rightarrow v(n) = v_l$. Atunci $P(v(n) = v_f) = \sum_{n=0}^{n_{CR}} P(N = n)$
2. $\rho > \rho_{CR} \Rightarrow v(n) < v_l$. Atunci $P(v(n) = v) = P\left(N = \left\lfloor \frac{wc}{v+w} \right\rfloor\right)$

Deci repartiția vitezelor mașinilor este dată de

$$P(v(n) = v) = \begin{cases} 0 & \text{dacă} \quad v > v_l \\ \sum_{n=0}^{n_{CR}} P(N = n) & \text{dacă} \quad v = v_l \\ P\left(N = \left\lfloor \frac{wc}{v+w} \right\rfloor\right) & \text{dacă} \quad v < v_l \end{cases}$$

Analog, putem construi și repartiția timpului mediu de călătorie printr-o secțiune de drum, folosind formula $\tau = \dfrac{n}{q}$

$$P(\tau = t) = P\left(\frac{n}{\min\{v_l n/L\,,\, w((c-n)/L)\}} = t\right)$$

Și aici putem distinge două cazuri:

1. $\rho \leq \rho_{CR} \Rightarrow \tau = \dfrac{L}{v_l}$. Atunci $P\left(\tau = \dfrac{L}{v_l}\right) = \sum_{n=0}^{n_{CR}} P(N = n)$
2. $\rho > \rho_{CR} \Rightarrow \tau > \dfrac{L}{v_l}$. Atunci $P(\tau = t) = P\left(N = \left\lfloor \dfrac{wct}{L+wt} \right\rfloor\right)$

Deci repartiția timpului de călătorie este dată de

$$P(\tau = t) = \begin{cases} 0 & \textit{dacă} \quad t < \dfrac{L}{v_l} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{n_{CR}} P(N = n) & \textit{dacă} \quad t = \dfrac{L}{v_l} \\ P\left(N = \left\lfloor \dfrac{wct}{L + wt} \right\rfloor\right) & \textit{dacă} \quad t > \dfrac{L}{v_l} \end{cases}$$

Elemente de rețele de așteptare[C11],[N6],[N7]

O generalizare firească a fenomenelor de așteptare în trafic într-un oraș o constau rețelele de așteptare. O rețea de așteptare descrie un sistem ca un set de resurse care interacționează. În cazul nostru străzile pot interacționa între ele. Un exemplu destul de simplu este acela în care mașinile pot alege o direcție aleatoare într-o intersecție (adică o pot lua înainte, sau pot face la stânga sau pot face la dreapta). Un alt exemplu de interacțiune este acela în care strada pe care urmează să o ia vehiculul este atât de aglomerată încât șoferul va fi forțat să aleagă o stradă adiacentă, mai liberă.

Dacă dorim să studiem traficul într-un set limitat de intersecții al unui oraș, cel mai indicat model al fi să folosim o **rețea de așteptare închisă,** în care putem avea sosiri „din exterior” și plecări „spre exterior”.

Mașinile sosesc în sistem, cât timp parcurg strada „sunt în așteptare” (o exprimare destul de alambicată, dar adaptată limbajului teoriei cozilor de așteptare), apoi în funcție de destinația la care vor să ajungă, vor alege traseul optim la fiecare nod. Când mașinile parchează sau se opresc, le considerăm ca fiind „ieșite din sistem”

(fă un desen aici)

O rețea de așteptare este caracterizată de trei elemente

<u>1) Centrele de servire</u> care în cazul nostru sunt reprezentate de străzi (muchiile grafului). La nivel teoretic, fiecare centru de servire reprezintă un model de așteptare cum ar fi M/D/1, ș.a.m.d. În cazul nostru, fiind reprezentate de muchiile grafului care definește străzile ele se identifică cu mulțimea L al cărui cardinal îl notăm cu $|L| = M$. Putem numerota, pentru simplitate, mulțimea $L = \{1, 2, 3, ..., M\}$

<u>2) Mulțimea de „clienți”</u> care în cazul nostru este reprezentată de mașini.

<u>3) Topologia rețelei</u> care în cazul nostru este în strânsă relație cu graful care ne definește străzile.

Centrele de servire sunt, ca până acum, definite de **numărul de servere** (care reprezintă benzile de circulație). O hibă al acestui model o reprezintă faptul că în general, la cozile de așteptare, serverele sunt independente și identic distribuite. La noi, ipoteza de independență poate fi încălcată deoarece mașinile pot schimba oricând banda. Pentru simplitatea modelului, vom presupune independența. În plus, mai avem ca parametri **rata de servire** (care poate depinde de starea benzii) și **disciplina de servire** (care depinde de strada pe care o considerăm, care poate fi semaforizată/nesemaforizată, poate avea sau nu avea un accident care perturbă circulația, etc).

Disciplina de servire va fi, ca întotdeauna, de tipul „primul venit - primul servit” (FIFO)

Clienții („mașinile”) sunt descrise de viteza cu care circulă pe un tronson de drum, în limbajul cozilor de așteptare va vi „timpul de servire”.

Topologia rețelei va fi descrisă de anumițe cantități. Ea va modela comportamentul traficului prin oraș, pentru care vom presupune un model probabilist.

Introducem notațiile:

p_{ij} = probabilitatea ca o mașină care trece prin strada i va ajunge pe strada j. $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq M$

p_{i0} = probabilitatea ca o mașină care ajunge pe strada i va ieși din sistem (adică va parca mașina)

$\boldsymbol{P} = (p_{ij})_{i,j\in\overline{1,M}}$ = matricea de rutare, unde $0 \leq p_{ij} \leq 1$ și $\sum_i p_{ij} = 1$, $\forall i$

Spunem că o rețea de așteptare este **bine-formată** dacă este bine definit comportamentul pe termen lung al entităților.

Pentru rețele de așteptare închise asta înseamnă că orice stație de servire poate fi străbătută cu probabilitate diferită de zero (stare recurentă?)

Pentru o rețea de așteptare deschisă introducem o stație virtuală 0 care reprezintă comportamentul entităților spre „exterior”. Deci, adăugând această stație, obținem o rețea închisă, deci rezultatele se pot aplica și pentru rețelele deschise.

Structura matematică care se regăsește într-o rețea de așteptare este *Lanțul Markov,* al cărui stări sunt definite de numărul de entități din fiecare coadă, deci $E = \{n_1, ..., n_N\}$, unde cu n_i am notat numărul de entități în coada i din rețea.

Tranzițiile în rețea sunt de forma

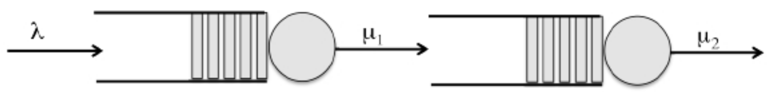
•$\{..., n_i, ...\} \rightarrow \{..., n_i + 1, ...\}$ dacă coada i este o coadă de intrare

•$\{..., n_i, ...\} \rightarrow \{..., n_i - 1, ...\}$ dacă coada i este o coadă de ieșire

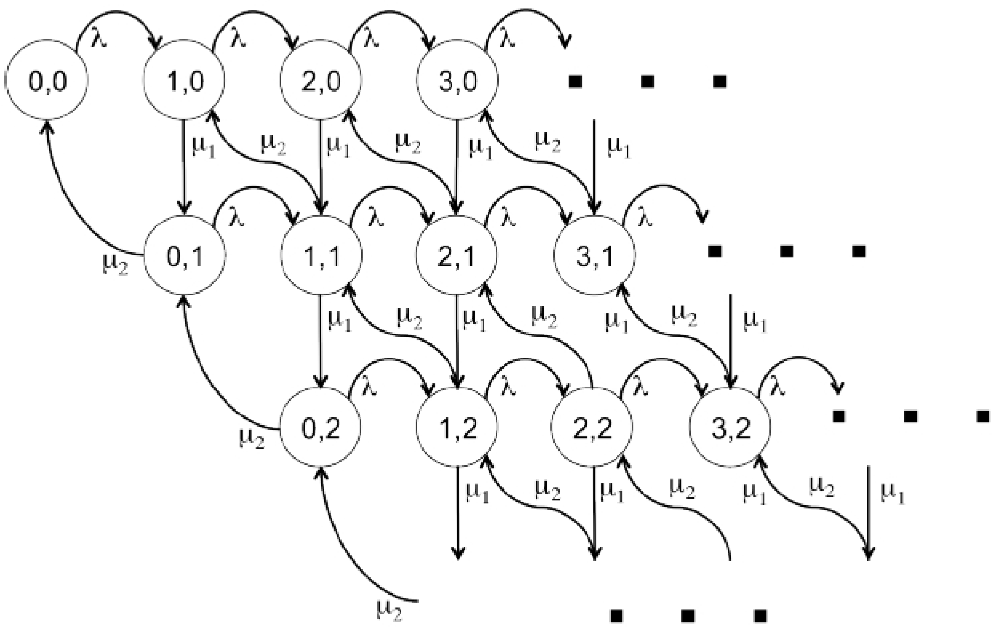
•$\{..., n_i, ..., n_j, ...\} \rightarrow \{..., n_i - 1, ..., n_j + 1, ...\}$ dacă o entitate se mută de la coada i la coada j

Acesta poate fi considerat ca fiind un *proces de naștere și moarte k-dimensional.*

Un exemplu simplu este pentru două cozi în serie, ca în imaginea de mai jos:



Spațiul stărilor este $E = \{n_1, n_2\}$, tranzițiile dintre stări sunt modelate de parametrii λ, μ_1, μ_2 și acest proces de naștere și moarte bidimensional este un proces Markov, al cărei stări pot fi vizualizate în figura de mai jos:



Știm că măsura invariantă al unui lanț Markov este unică. Mai observăm că prima coadă este independentă de a doua coadă. . Este evident că cele două cozi nu sunt independente, deoarece fluxul în a doua coadă depinde de servirea primei cozi.

Dacă facem presupunerea că cele două cozi sunt independente, atunci

$$\pi_{ij} = (1-\rho_1)\rho_1^i(1-\rho_2)\rho_2^i \text{ cu } i = 1, 2$$

Totuși, nu îl știm încă pe ρ_2.

Teoremă (Jackson): *Orice rețea de așteptare markoviană fără pierderi (adică entitățile nu ies din sistem) și cu disciplină FIFO admite o soluție scrisă ca un produs.*

Putem afla **ratele de sosire** la fiecare din cele k cozi din rețea.

Presupunem că la fiecare nod avem rata sosirilor „din exterior" notate cu λ_{ei} cu $i = 1, ..., N$. Știm probabilitățile de rutare P_{ij}. Atunci ratele de sosire la fiecare coadă λ_i pot fi deduse rezolvând sistemul de k ecuații

$$\boxed{\lambda_i = \lambda_{ei} + \sum_{j=0}^{N} P_{ji}\lambda_j} \text{ pentru } i = 1, .., N$$

Pentru rețeaua în serie, avem că $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ și $\rho_1 = \dfrac{\lambda}{\mu_1}$, $\rho_2 = \dfrac{\lambda}{\mu_2}$

Subiectul rețelelor de așteptare, mai ales în contextul analizei traficului este destul de complicat, deoarece „timpul de servire" poate fi mai general, putem considera mai multe benzi, ipoteza de independență a benzilor poate să nu fie satisfăcută, ș.a.m.d.

Totuși, am considerat să scriu (chiar puțin) despre acest tip de model deoarece este util în mai multe contexte (cum ar fi în rețelistică), el fiind o generalizare firească a teoriei cozilor de așteptare.

Optimizarea într-o rețea[A31]

Pentru început, să considerăm problema în care șoferul are acces la toată informația despre drumurile pe care se va deplasa.

Un **drum** într-un graf $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ este o succesiune de muchii $d = [a_1, a_2] \leftrightarrow [a_2, a_3] \leftrightarrow [a_{n-1}, a_n]$. Drumul este **simplu** dacă arcele sale sunt distincte. În caz contrar, drumul se numește **compus.**

Este important, înainte să facem orice analiză, să facem distincția între **optimizarea individuală** (în care avem o decizie decentralizată) și **optimizarea în ansamblu** (deci avem decizie centralizată).

În 1952, Wardrop a considerat două principii.

Primul principiu spune că șoferii vor să minimizeze (din punctul lor de vedere) costuri minimale de călătorie. Al doilea principiu ne spune că costul total pe tot ansamblul rețelei este minimal.

Un exemplu clasic care face o distincție clară între optimizarea individuală și optimizarea în ansamblu este **Paradoxul lui Braess** în care adăugarea unui drum îi poate tenta pe șoferi să acționeze în mod egoist, astfel mărindu-și timpii de deplasare! Un exemplu în care s-a întâmplat așa ceva este dat de închiderea străzii 42 din New York în 1990, fapt care a dus la îmbunătățirea traficului!

<u>Notații:</u>

d = un drum simplu care unește două noduri O (punctul de plecare) și D (destinația). Evident, $O, D \in N$

ω = o pereche de noduri plecare-destinație, $\omega = (O, D) \in N \times N = \Omega$

Ω = mulțimea de perechi de noduri plecare-destinație

D_ω= mulțimea drumurilor care unesc nodul O cu D, $\omega = (O, D)$

x_d = fluxul nenegativ pe drumul d

f_a = fluxul pe muchia a

$x \in \mathbb{R}_+^{n_P}$ = vector coloană al fluxurilor pe drum, unde n_P e numărul de drumuri în rețea

$f \in \mathbb{R}_+^{n_L}$= vector coloană al fluxurilor pe muchii, unde n_L e numărul de muchii în rețea

c_ω= cererea asociată fiecărei perechi ω

Ecuațiile conservării de flux:

$c_\omega = \sum\limits_{p \in D_\omega} x_d$, $\forall \omega \in \Omega$ unde $x_p \geq 0$, $\forall d \in D$ (suma tuturor fluxurilor între o pereche ω trebuie să fie egale cu cererea dată c_ω.

În plus, avem ecuațiile conservării de flux (conservation of flow equations)

$f_a = \sum\limits_{d \in D} x_d \delta_{ad} \, \forall a \in L$, unde

$$\delta_{ad} = \begin{cases} 1 & dacă \, muchia \, a \, e \, continuta \, in \, drumul \, d \\ 0 & altfel \end{cases}$$

Expresia de mai sus ne zice că fluxul pe muchia a este egal cu suma tuturor fluxurilor pe drumurile p care conțin muchia a.

Practic, ecuațiile ne zic că fluxul în rețea se conservă, adică nu dispare subit în rețea. Avem garanția că vor ajunge la destinație.

Mai avem notațiile:

k_a = costul asociat utilizatorului (user link cost) asociat traversării muchiei a

K_d = costul asociat traversării drumului d

Acest cost este o funcție *separabilă* (o funcție separabilă este o funcție care se poate scrie ca sumă de funcții pentru fiecare variabilă de decizie), deci

$k_a = k_a(f_a), \forall a \in L$

unde am presupus că k_a e continuă și crescătoare

Formula costului pe un drum d va avea formula:

$K_d = \sum_{a \in L} k_a(f_a)\delta_{ad}, \quad \forall d \in D$

În cazul ***optimizării individuale***, vrem să determinăm fluxul optim pe drum x^* (și fluxul corespunzător f^*) care satisface ecuațiile conservării de flux și condiția de nenegativitate a fluxurilor pe drum.

Deci condițiile de echilibru sunt, pentru fiecare pereche $\omega \in \Omega$ și fiecare drum $d \in D_\omega$, avem că

$$K_d = \lambda_\omega \text{ dacă } x_d^* > 0$$

$$K_d \geq \lambda_\omega \text{ dacă } x_d^* = 0$$

Condițiile de mai sus sunt o reformulare al primului principiu al lui Wardrop și care zice că numai acele drumuri care leagă o pereche punct de plecare - destinație (ω) vor fi folosite, ele având costuri minimale pentru utilizator. Costul minimal pentru perechea ω este notat cu λ_ω. Valoarea sa este obținută după ce găsim echilibrul de flux. Altfel, un șofer în aceată rețea poate găsi alt drum cu cost mai mic.

Pentru a găsi o soluție la aceată problemă, vom ajunge la următoarea problemă de optimizare, unde presupunem că costul depinde numai de fluxul pe muchia respectivă și e presupus a fi continuu și crescător.

$$\begin{cases} \text{minimizează} & \sum\limits_{a \in L} \int_0^{f_a} k_a(y)dy & \\ \text{cu restricțiile} & \sum\limits_{d \in D_\omega} x_d = c_\omega & \forall \omega \in \Omega \\ & f_a = \sum\limits_{d \in D} x_d \delta_{ad} & \forall a \in L \\ & x_d \geq 0 & \forall d \in D \end{cases}$$

Pentru problema ***optimizării în ansamblu***,

Considerăm același graf $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$.

Costul total pe muchia a este definit de:

$\hat{k}_a(f_a) = k_a(f_a) \times f_a$, $\forall a \in L$ (i.e. costul total pe o muchie e egal cu costul utilizatorului înmulțit cu fluxul pe muchia respectivă.

Cum am văzut mai devreme, în problema de optimizare a sistemului (S.O. problem), avem o decizie centralizată.

Exprimăm costul total ca fiind
$\hat{J}_a = \sum\limits_{a \in L} \hat{k}_a(f_a)$.

Deci problema optimizării în ansamblu (pe întreaga rețea) este dată de

$$\begin{cases} \text{minimizează} & \sum\limits_{a \in L} \hat{k}_a(f_a) & \\ \text{cu restricțiile} & \sum\limits_{d \in D_\omega} x_d = c_\omega & \forall \omega \in \Omega \\ & f_a = \sum\limits_{d \in D} x_d \delta_{ad} & \forall a \in L \\ & x_d \geq 0 & \forall d \in D \end{cases}$$

Costul total pe un drum d, pe care îl notăm cu $\hat{K}_d$ se definește ca fiind:

$$\hat{K}_d = K_d x_d,\ \forall d \in D$$

unde

$$K_d = \sum_{a \in L} k_a f_a \delta_{ad},\ \forall a \in L$$

Folosind relațiile de la început (2,3,4, în pdf, numerotează-le!), putem rescrie problema de optimizare de mai sus în variabilele de flux pe drum astfel:

$$\begin{cases} \text{minimizează} & \sum\limits_{d \in D} K_p(x) x_p & \\ \text{cu restricțiile} & \sum\limits_{d \in D_\omega} x_d = c_\omega & \forall \omega \in \Omega \\ & f_a = \sum\limits_{d \in D} x_d \delta_{ad} & \forall a \in L \\ & x_d \geq 0 & \forall d \in D \end{cases}$$

Condiții de optimalitate ale sistemului

Presupunem că funcțiile de cost ale fiecărui individ pentru fiecare muchie sunt crescătoare, funcția obiectiv definită de $\sum\limits_{a \in L} \hat{k}_a(f_a)$ este convexă, iar mulțimea admisibilă definită de restricții este convexă

.

Folosind condițiile Kuhn-Tucker, avem că pentru orice pereche $\omega \in \Omega$ și orice drum $d \in D_\omega$, pentru un flux x (cu fluxul aferent pe muchii f) și folosind restricțiile, avem că

$$\hat{K}'_d \begin{cases} = \mu_\omega & dac\check{a}\, x_d > 0 \\ \geq \mu_\omega & dac\check{a}\, x_d = 0 \end{cases}$$

unde $\hat{K}'_d$ reprezintă maginala costului total pe drumul d, dat de formula:

$$\hat{K}'_d = \sum_{a \in L} \frac{\partial \hat{k}_a(f_a)}{\partial f_a} \delta_{ad}$$

și μ_ω este este multiplicatorul Lagrange asociat primei restricții pentru perechea $\omega \in \Omega$.

Motivația folosirii acestui model: De exemplu, putem considera costul ca fiind timpul de parcurgere al unui drum, consumul de combustibil sau o combinație de mai mulți indicatori de performanță ai traficului, deduși în funcție de configurația drumurilor. Se pot construi oricât de multe funcții de cost, atâta timp cât ele au condiții de regularitate. Nu există o anumită rețetă pentru a defini aceste funcții, dându-se un set de parametri.

Bibliografie

A = articole
C = cărți
N = note de curs
I = pagini de pe Internet

[A1] Shuguo Yang, Xiaoyan Yang - "The application of Queueing Theory in the Traffic Flow of Intersection" - 2014

[A2] David G. Kendall - "Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and Their Analysis by the Method of the Imbedded Markov Chain" (Oxford University, England and Princeton University) - 1952

[A3] Villy Baek Iversen - "Queueing Systems with Constant Service Time and Evaluation of M/D/1,k" (Technical University of Denmark) - 1997

[A4] Babicheva T.S. - "The use of Queuing Theory at research and Optimization of Traffic on the Signal-controlled road intersections" (Moscow Institute of Physics and Technology) - 2015

[A5] M. Baykal-Gursoy, Z.Duan, H. Xu - "Stochastic Models of Traffic Flow Interrupted by Incidents" (Industrial and Systems Engineering Department, Rutgers University) - 2009

[A6] Tom V. Matthew - "Transportation System Engineering, Chapter 33: Vehicle Arrival Models - Headway" (IIT Bombay) - 2017

[A7] Io Kuan Vong - "Theory of Poisson Point Process and its Application to Traffic Modelling" (Department of Mathematics and Statistics, The University of Melbourne) - 2013

[A8] G. J. Franx - "A Simple Solution to the M/D/c waiting time distribution" (Department of Mathematics and Computer Science, Free University of Amsterdam) - 1997

[A9] Helge Siegel, Denis Belomestnyi - "Stochasticity of Road Traffic Dynamics: Comprehensive Linear and Nonlinear Time Series Analysis on High Resolution Freeway Traffic records" -2008

[A10] Ana Maria Nicoleta Mocofan, Răzvan Ghiță - "Algorithm for Traffic Flow Assignment and Distribution Within a Simulated Urban Traffic Network" (U.P.B. Sci. Bull., Series C, Vol. 76, Iss. 3) - 2014

[A11] Sven Maerivoet, Bart de Moor - "Traffic Flow Theory" (Department of Electrical Engineering ESAT-SCD (SISTA), Katholieke Universiteit Leuven) - 2008

[A12] Wei-Liang Qian, Adriano F. Siqueira, Romuel F. Machado, Kai Lin, Ted William Grant - "Dynamical Capacity Drop in a Nonlinear Stochastic Traffic Model" - 2016

[A13] Boris S. Kerner - "Physics of Traffic Gridlock in a City" (Daimler AG) - 2011

[A14] Shengwu He, Jiangang Wang - "On the Optimal Parking Problem" (Department of Statistics, Purdue University) - 1988

[A15] Feng Wei - "Algorithm for Waiting Time Distribution of a Discrete-time Multiserver Queue with Deterministic Service Times and Multi-threshhold service policy" (ICCS) - 2011

[A16] M. Veeraghavan - "Priority Queuing (nonpreemptive) - 2004

[A17] Nacira Guerrouahane, Djamil Aissani, Louiza Bouallouche-Medjkoune, Nadir Farhi - "M/G/c/c State Dependent Queueing Model for Road Traffic Simulation" - 2016

[A18] Zhao Guo-Xi, Hu-Qi-Zou - "M/M/1 Queueing System with Non-preemptive Priority" -

[A19] Kailash C. Madan - "A Non-Preemptive Priority Queueing System with a Single Server Serving Two Queues M/G/1 and M/D/1 with Optional Server Vacations Based on Exhaustive Service of the Priority Units" - 2011

[A21] - J.S.H. Van Leeuwaarden - "Delay Analysis for the Fixed-Cycle Traffic-Light Queue"

[A22] Richard Cowan - "An Analysis of the Fixed-Cycle Traffic-Light Problem" (Journal of Applied Probability, Vol. 18, No. 3, pp. 672-683) - 1981

[A23] Donald R. McNeil - "A Solution to the Fixed-Cycle Traffic Light Problem for Compound Poisson Arrivals" (Journal of Applied Probability, Vol. 5, No. 3, pp. 624-635) - 1968

[A24] J.N. Darroch - "On the Traffic-Light Queue" (University of Adelaide) - 1963

[A25] Seunghyeon Lee, S.C. Wong, Y.C. Li - "Real-time Estimation of Lane-based Queue Lengths at Isolated Signalized Junctions" (Transportation Research Part C 56, 1-17) - 2015

[A26] Richard E. Allsop - "Delay at a Fixed Time Traffic Signal-I: Theoretical Analysis" (Transportation Science 6(3):260-285) - 1972

[A27] Dirk Heidemann - "Queue Length and Delay Distributions at Traffic Signals" (Transp. Res.-B, Vol. 28B, No. 5, pp. 377-389) - 1994

[A28] Ning Wu - "Estimation of Queue Lengths and Their Percentiles at Signalized Intersections" (Institute for Traffic Engineering, Ruhr-University Bochum) -

[A29] Shanyu Zhou, Hulya Seferoglu - "Blocking Avoidance in Transportation Systems" - 2016

[A30] Karl Sigman - "Notes on Little's Law" - 2009

[A31] Anna Nagurney - "Mathematical Models of Transportation and Networks" - 2007

[A32] Boudreau P.E., Griffin J.S., Kac M. - "An elementary queueing problem" (Amer. Math Monthly, 69, 713-24) - 1962

[A33] Crommelin, C.D., - "Delay probability formulae when the holding times are constant" (Post Office Elect. Eng. 25, 41-50) - 1932

[A34] J.M. Smith, J.Y. Cheah - "Generalized M/G/c/c state dependent queueing models and pedestrian traffic flows" (Queueing Systems, 365 - 385) - 1994

[A35] N. Gerrouahane, N. Farhi, D. Aissani, S. Bouzouzou, L. Bouallouche-Medjkoune - "A queueing model for road traffic simulation" (AIP Conference Proceedings, 1648 530012, doi:10.1063/1.4912745. Greece) - 2015

[C1] A. Ștefănescu, C. Zidăroiu - „Cercetări Operaționale" (Ed. didactică și pedagogică) - 1981

[C2] G. Ciucu - „Elemente de teoria probabilităților și statistică matematică (Ed. didactică și pedagogică) - 1963

[C3] Constantin Tudor - „Introduction to Stochastic Processes" (Editura Universității din București) - 2009

[C4] A.M. Lee - „Teoria așteptării cu aplicații" (Editura Tehnică, seria „Bazele matematice ale cercetării operaționale") - 1976

[C5] Marius Iosifescu, Costache Moineagu, Vladimir Trebici, Emiliana Ursianu - "Mică enciclopedie de statistică" (Editura științifică și enciclopedică) - 1985

[C6] Cristian Niculescu - „Probabilități și statistică" (Editura Universității din București) - 2015

[C7] Boris S. Kerer - „Introduction to Modern Traffic Flow Theory and Control" (Springer) - 2009

[C8] Nathan Gartner, Carroll J. Messer, Ajay K. Rathi - "Traffic Flow Theory: A State-of-the-Art Report" - 2001

[C9] Ivo Adan, Jacques Resing - „Queueing Systems" (Department of Mathematics and Computer Science, Eindhoven University of Technology) - 2015

[C10] Șerban Strătilă - „Introducere în Analiza Complexă" (Editura Theta) - 2013

[C11] Donald Gross, John F. Shortle, James M. Thompson, Carl M. Harris - "Fundamentals of Queueing Theory, 4th Ed." (Wiley series in Probability and Statistics) - 2008

[C12] Whittaker E.T., Watson G.N. - "A course of Modern Analysis, 4th Ed." (Cambridge) - 1963

[N1] Lucian Beznea - „Introducere în teoria proceselor stocastice"

[N2] Lucian Beznea - „Procese Markov"

[N3] Vasile Preda - „Modele și metode în cercetarea operațională"

[N4] Monica Dumitrescu - „Statistică"

[N5] Gheorghiță Zbăganu - „Probabilități"

[N6] Simonetta Balsamo, Andrea Marin - "Queueing Networks" (Università Ca' Foscari di Venezia, Dipartimento di Informatica, Venezia, Italy, School on Formal Methods 2007: Performance Evaluation) - 2007

[N7] Renato Lo Cigno - "Queueing Networks" (Simulation and performance evaluation, University of Trento) - 2015

[I1] - https://en.wikipedia.org/wiki/Compound_Poisson_process

[I2] - https://stats.stackexchange.com/questions/2092/relationship-between-poisson-and-exponential-distribution

[I3] - https://en.wikipedia.org/wiki/Birth–death_process

[I4] - https://en.wikipedia.org/wiki/Fundamental_diagram_of_traffic_flow