Hoe oplossen?

Bron:
https://hoezithet.nu/lessen/wiskunde/vergelijkingen/eerste_graad/

Een vergelijking van de eerste graad in één onbekende x is een vergelijking waar er maar één onbekende is (genaamd x) en waarbij de hoogste macht van die x gelijk is aan 1. Bijvoorbeeld de vergelijking

$$-3x - 2 + x = 15 - 6x + 9x - 3$$

is een eerstegraadsvergelijking omdat elke x een macht 1 heeft. De volgende vergelijking is geen eerstegraadsvergelijking

$$2 - 9x^2 + 6x = 15 - 6x$$

omdat de hoogste macht van x hier 2 is. De volgende vergelijking is wel een eerstegraadsvergelijking, maar heeft meerdere onbekenden, namelijk x, y en z:

$$-4z + 2x - 9 = 3 + 5y - x$$

In deze les zien we hoe we eerstegraadsvergelijkingen in één onbekende (x) kunnen oplossen in drie stappen. Tijdens deze stappen zullen we de vergelijking omvormen. De drie stappen zijn:

1. Schoonmaakwerk: vereenvoudig het linker- en rechterlid zodat er langs beide kanten iets staat van de vorm $ax + b$ (met $a, b \in \mathbb{R}$) ;
2. Alle x-en naar links: vorm de vergelijking om zodat enkel het linkerlid nog x-en bevat;
3. Alle getallen naar rechts: vorm de vergelijking om zodat alle getallen in het rechterlid staan.

Schoonmaakwerk

Stel bijvoorbeeld dat we de volgende vergelijking willen oplossen:

$$-3x - 2 + x = 15 - 6x + 9x - 3$$

De eerste stap in het oplossen van een eerstegraadsvergelijking is de vergelijking *opkuisen* tot zowel de linker- als rechterkant de vorm $ax + b$ heeft. Dit doen we door links en rechts de termen met hetzelfde lettergedeelte samen te nemen.

$$\begin{aligned} -3x - 2 + x &= 15 - 6x + 9x - 3 \\ \Leftrightarrow -2x - 2 &= 3x + 12 \end{aligned}$$

We krijgen nu een vergelijking van de vorm

$$a_{links} \cdot x + b_{links} = a_{rechts} \cdot x + b_{rechts}$$

Waarbij

$$\begin{aligned} a_{links} &= -2 \\ b_{links} &= -2 \\ a_{rechts} &= 3 \\ b_{rechts} &= 12 \end{aligned}$$

Alle x-en naar links

De volgende stap is om alle termen met een x als lettergedeelte naar de linkerkant te brengen. We vormen de vergelijking om door de $a_{rechts}x$ uit het rechterlid van de vergelijking af te trekken. Dan zal de $a_{rechts}x$ uit het rechterlid wegvallen en hebben we enkel in het linkerlid nog een x. In ons voorbeeld is de $a_{rechts}x$ uit het rechterlid $3x$.

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -2x - 2 &= 3x + 12 \\ \Leftrightarrow -2x - 2 - 3x &= 3x + 12 - 3x \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{-2x}} - 2 \underline{\underline{- 3x}} &= \cancelto{0}{3x - 3x} + 12 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{-5x}} - 2 &= 12 \end{aligned}$$

We zien dat de $3x$ inderdaad is verdwenen uit het rechterlid. We krijgen een vergelijking van de vorm

$$a \cdot x + b_{links} = b_{rechts}$$

met enkel nog in het linkerlid een x. Hierbij is

$$a = -5$$
$$b_{links} = -2$$
$$b_{rechts} = 12$$

Alle getallen naar rechts

In de laatste stap brengen we de getallen die in het linkerlid nog overblijven naar het rechterlid. Dat doen we ook in twee stappen.

1. Trek links en rechts de b_{links} af zodat deze verdwijnt uit het linkerlid;
2. Deel het linker- en rechterlid door de a zodat a verdwijnt uit het linkerlid.

In de eerste stap trekken we b_{links} $(= -2)$ af van het linker- en rechterlid:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow -5x - 2 &= 12 \\ \Leftrightarrow -5x - 2 - (-2) &= 12 - (-2) \\ \Leftrightarrow -5x \cancelto{0}{-2 - (-2)} &= 12 + 2 \\ \Leftrightarrow -5x &= 14 \end{aligned}$$

We hebben nu een vergelijking van de vorm

$$a \cdot x = b$$

met nog maar één getal in het rechterlid. Hierbij is

$$a = -5$$
$$b = 14$$

Nu moeten we enkel nog de a links weg krijgen. Dat kunnen we doen door het linker- en rechterlid te delen door a $(= -5)$.

$$\Leftrightarrow -5x = 14$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5x}{-5} = \frac{14}{-5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cancel{-5}^{1}}{\cancel{-5}} \cdot x = \frac{14}{-5}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{14}{5}$$

Et voilà! We hebben x gevonden! De oplossingsverzameling van de vergelijking is $V = \{-\frac{14}{5}\}$.

Samengevat

OPLOSSEN VAN EEN VERGELIJKING IN DE EERSTE GRAAD MET ÉÉN ONBEKENDE

Om een vergelijking op te lossen van de eerste graad met één onbekende, volgen we drie stappen:

1. Kuis de vergelijking op tot iets van de vorm

$$a_{links} \cdot x + b_{links} = a_{rechts} \cdot x + b_{rechts}$$

2. Breng alle x-en naar de linkerkant door van de vergelijking $a_{rechts} \cdot x$ af te trekken. Je krijgt nu iets van de vorm

$$a \cdot x + b_{links} = b_{rechts}$$

3. Breng alle getallen naar de rechterkant door van de vergelijking eerst b_{links} af te trekken zodat je iets van de vorm

$$a \cdot x = b$$

krijgt, en vervolgens te delen door a. De oplossing is

$$x = \frac{b}{a}$$

met $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}_0, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}$.

Meer op https://hoezithet.nu/