Machten en wortels omvormen

Bron:
https://hoezithet.net/lessen/wiskunde/vergelijkingen/machten_omvormen/

Een vergelijking oplossen betekent dat we de waarden van de onbekende(n) vinden waarvoor de gelijkheid klopt. Vaak is er maar één onbekende, namelijk x.

Door een vergelijking om te vormen naar de vorm $x = (\text{een getal})$ kunnen we de vergelijking oplossen. In deze les zien we hoe we vergelijkingen van de vorm $x^2 = a$ en $x^3 = a$ kunnen omvormen naar $x = (\text{een getal})$. Ten slotte zullen we ook de vergelijkingen $\sqrt{x} = a$ en $\sqrt[3]{x} = a$ omvormen.

Omvormen van $x^2 = a$

Om een vergelijking van de vorm $x^2 = a$ (met $a \in \mathbb{R}^+$) om te vormen naar $x = (\text{een getal})$, moeten we enkel het **kwadraat** weg krijgen uit het linkerlid. We willen dat er links x staat in plaats van x^2. We kunnen het kwadraat weg krijgen door de wortel te nemen van het linker- en rechterlid:

$$x^2 = a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

Bijvoorbeeld: stel dat we de vergelijking

$$x^2 = 10$$

moeten oplossen. We willen het kwadraat aan de linkerkant weg krijgen zodat er links gewoon x staat. Dat kunnen we doen door van de vergelijking de vierkantswortel te nemen:

$$x^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 3.162\ldots$$

We controleren door de x in de oorspronkelijke vergelijking $x^2 = 10$ eens te vervangen door $(3.162\ldots)$ en eens door $(-3.162\ldots)$:

$$(3.162\ldots)^2 = 10$$

Check! ✅

$$(-3.162\ldots)^2 = 10$$

Klopt!

> Uitbreiding: waarom die $\pm$?

Omvormen van $x^3 = a$

Voor een vergelijking als $x^3 = a$ doen we iets heel gelijkaardigs als bij $x^2 = a$, maar nu gebruiken we de derdemachtswortel:

$$x^3 = a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{a}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}$$

We willen bijvoorbeeld de vergelijking $x^3 = -16$ oplossen.

$$x^3 = -16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-16}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-16}$$

$$\Leftrightarrow x = -2.520\ldots$$

Controle:

$$(-2.520\ldots)^3 = -16$$

> Uitbreiding: waarom nu plots geen $\pm$?

Omvormen van $\sqrt{x} = a$

Om een vergelijking van de vorm $\sqrt{x} = a$ (met $a \in \mathbb{R}^+$) om te vormen naar $x = (\text{een getal})$, moeten we enkel de vierkantswortel weg krijgen uit het linkerlid. We kunnen hiervoor zorgen door het linker- en rechterlid te kwadrateren:

$$\sqrt{x} = a$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$$

$$\Leftrightarrow x = a^2$$

Bijvoorbeeld:

$$\sqrt{x} = 5$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (5)^2$$

$$\Leftrightarrow x = 5^2$$

$$\Leftrightarrow x = 25$$

Controle:

$$\sqrt{25} = 5$$

Perfect!

> Uitbreiding: Waarom niet $\pm a^2$?

Omvormen van $\sqrt[3]{x} = a$

Ook voor $\sqrt[3]{x} = a$ doen we iets gelijkaardigs als bij $\sqrt{x} = a$, maar nu dan met een derde macht. Merk op dat a nu zowel positief als negatief kan zijn ($a \in \mathbb{R}$), want een derdemachtswortel kan ook negatief zijn.

$$\sqrt[3]{x} = a$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^3 = (a)^3$$

$$\Leftrightarrow x = a^3$$

Bijvoorbeeld $\sqrt[3]{x} = -2$

$$\sqrt[3]{x} = -2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^3 = (-2)^3$$

$$\Leftrightarrow x = (-2)^3$$

$$\Leftrightarrow x = -8$$

Controle:

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

OK!

Samengevat

Vergelijking	Tussenstap	Oplossing	Voorwaarden
$x^2 = a$	$\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$	$x = \pm\sqrt{a}$	$a \in \mathbb{R}^+$
$\sqrt{x} = a$	$(\sqrt{x})^2 = a^2$	$x = a^2$	$a \in \mathbb{R}^+$
$x^3 = a$	$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{a}$	$x = \sqrt[3]{a}$	$a \in \mathbb{R}$
$\sqrt[3]{x} = a$	$(\sqrt[3]{x})^3 = a^3$	$x = a^3$	$a \in \mathbb{R}$