Eentermen vereenvoudigen

Bron: https://hoezithet.nu/lessen/wiskunde/eentermen/vereenvoudigen/

Een eenterm bestaat in principe enkel uit een coëfficiënt en een lettergedeelte. Toch kan een eenterm er soms wat ingewikkeld uitzien. Om een eenterm er zo minst angstaanjagend mogelijk te laten uitzien, moeten we de eenterm **vereenvoudigen**.

Het vereenvoudigen van een eenterm gaat als volgt:

1. Werk de haakjes weg;
2. Reken de coëfficiënt uit;
3. Reken het lettergedeelte uit;
4. Rangschik de factoren.

Als voorbeeld zullen we volgende eenterm vereenvoudigen:

$$-3y \cdot (2xz)^3 \cdot (-y)^2 \cdot (-2) \cdot (-5)$$

Haakjes wegwerken

Wanneer een eenterm haakjes bevat, zullen we die eerst wegwerken. Er zijn verschillende manieren waarop haakjes kunnen voorkomen in een eenterm:

1. Haakjes die factoren tot een bepaalde macht verheffen
2. Haakjes rond factoren met een minteken

In ons voorbeeld staan er haakjes in de factoren $(2xz)^3$, $(-y)^2$, (-2) en (-5):

$$-3y \cdot (2xz)^3 \cdot (-y)^2 \cdot (-2) \cdot (-5)$$

Haakjes met een macht uitwerken

Als er een **macht bij de haakjes** staat, **verhef je elke factor binnen de haakjes** tot die macht. Voor de factor $(2xz)^3$ geeft dit:

$$(2xz)^3 = 2^3x^3z^3$$

Dit invullen in het voorbeeld geeft:

$$-3y \cdot (2xz)^3 \cdot (-y)^2 \cdot (-2) \cdot (-5) = -3y \cdot 2^3x^3z^3 \cdot (-y)^2 \cdot (-2) \cdot (-5)$$

Ziezo, die haakjes zijn al weg!

De andere factor die haakjes met een macht bevat, is $(-y)^2$. Het minteken binnen de haakjes moet je ook tot de macht verheffen. Dat doe je door in gedachten het **minteken te vervangen door** (-1) en die mee te verheffen tot de macht:

$$\begin{aligned}(-y)^2 &= ((-1) \cdot y)^2 \\ &= (-1)^2 \cdot y^2 \\ &= y^2\end{aligned}$$

Terug invullen in het voorbeeld geeft:

$$-3y \cdot 2^3x^3z^3 \cdot (-y)^2 \cdot (-2) \cdot (-5) = -3y \cdot 2^3x^3z^3 \cdot y^2 \cdot (-2) \cdot (-5)$$

Waarom mogen we een minteken vervangen door (-1)?

We mogen een minteken altijd vervangen door (-1) omdat een minteken voor een factor hetzelfde betekent als “vermenigvuldig met -1”.

Bijvoorbeeld, $-1 \cdot 2 = -2$. Dus of we nu -2 schrijven, of $-1 \cdot 2$ of $(-1) \cdot 2$, dat is allemaal hetzelfde. Eén pot nat.

Haakjes met een minteken uitwerken

De laatste haakjes in ons voorbeeld staan rond de factoren (-2) en (-5):

$$-3y \cdot 2^3x^3z^3 \cdot y^2 \cdot (-2) \cdot (-5)$$

Ze staan er om de **mintekens af te schermen** van de maaltekens die ervoor staat. In dat geval gaan we weer in gedachte de **mintekens vervangen door** (-1). Dit doen we ook voor het minteken van de coëfficiënt. Vervolgens zetten we alle (-1)—en voorop en bepalen we het uiteindelijke teken van de coëfficiënt.

$$\begin{aligned}-3y \cdot 2^3x^3z^3 \cdot y^2 \cdot (-2) \cdot (-5) &= (-1) \cdot 3y \cdot 2^3x^3z^3 \cdot y^2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 5 \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 3 \cdot y \cdot 2^3x^3z^3 \cdot y^2 \cdot 2 \cdot 5 \\ &= -3 \cdot y \cdot 2^3x^3z^3 \cdot y^2 \cdot 2 \cdot 5\end{aligned}$$

Waarom mag je alle (-1)—en voorop zetten?

De vermenigvuldiging van rationale getallen is **commutatief**. (Hetzelfde geldt voor reële getallen.) Dat betekent dat de volgorde waarin je een vermenigvuldiging uitrekent, niet uitmaakt:

$$5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$$
$$3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$$
$$2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$$

Je mag in een vermenigvuldiging van rationale getallen de **factoren dus altijd van plaats veranderen**.

We hebben daarnet al gezien dat een minteken hetzelfde is als vermenigvuldigen met (-1). Een minteken is dus hetzelfde als een **factor** (-1). Hierboven zeiden we dat we in een vermenigvuldiging de factoren altijd van plaats mogen veranderen, dus we mogen gerust alle (-1)—en voorop zetten.

$$-5 \cdot (-2) \cdot (-3) = -30$$
$$-2 \cdot (-3) \cdot (-5) = -30$$
$$-2 \cdot (-5) \cdot (-3) = -30$$
$$(-1) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 5 \cdot (-1) \cdot 3 = -30$$
$$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = -30$$

Coëfficiënt uitrekenen

Onze veelterm bevat nu geen haakjes meer:

$$-3 \cdot y \cdot 2^3 x^3 z^3 \cdot y^2 \cdot 2 \cdot 5$$

De volgende stap is om de coëfficiënt, of het cijfergedeelte, van de eenterm uit te rekenen. Daarvoor mag je in gedachte alle variabelen even weglaten. Vervolgens reken je de bewerking die er staat gewoon uit:

$$-3 \cdot y \cdot 2^3 x^3 z^3 \cdot y^2 \cdot 2 \cdot 5$$

Dit uitrekenen geeft:

$$\begin{aligned} -3 \cdot 2^3 \cdot 2 \cdot 5 &= -3 \cdot 8 \cdot 10 \\ &= -24 \cdot 10 \\ &= -240 \end{aligned}$$

Dit resultaat terug invullen geeft:

$$-240 \cdot y \cdot x^3 z^3 \cdot y^2$$

Waarom mag je de coëfficiënt apart uitrekenen?

De vermenigvuldiging van rationale getallen is **commutatief**. (Dat is ook zo voor reële getallen.) Dat betekent dat de volgorde waarin je een vermenigvuldiging uitrekent, niet uitmaakt:

$$\begin{aligned} 4 \cdot 5 \cdot 7 &= 140 \\ 7 \cdot 4 \cdot 5 &= 140 \\ 5 \cdot 4 \cdot 7 &= 140 \end{aligned}$$

Je mag in een vermenigvuldiging van rationale getallen de **factoren dus altijd van plaats veranderen**. Omdat zowel de variabelen als de getallen in onze eenterm rationaal zijn (reëel mag ook) , mogen we ze dus van plaats veranderen.

$$\begin{aligned} & 4 \cdot a \cdot b \cdot 3 \\ =\ & 3 \cdot a \cdot 4 \cdot b \\ =\ & b \cdot 3 \cdot a \cdot 4 \end{aligned}$$

We kiezen ervoor om het volledige cijfergedeelte vooraan te zetten en als eerste uit te rekenen.

$$\begin{aligned} & 4 \cdot a \cdot b \cdot 3 \\ =\ & 4 \cdot 3 \cdot a \cdot b \\ =\ & 12 \cdot a \cdot b \end{aligned}$$

Lettergedeelte uitrekenen

Eens het cijfergedeelte van de eenterm is opgekuist, pakken we het lettergedeelte aan. Om het lettergedeelte te vereenvoudigen, ga je op zoek naar factoren met **dezelfde variabele** in hun grondtal. Voor elk zo'n variabele tel je de exponenten bij elkaar op. Zo krijg je de nieuwe exponent van die variabele.

In ons voorbeeld komen drie variabelen voor: x, y en z. Enkel de variabele y komt meerdere keren voor:

$$-240 \cdot y \cdot x^3z^3 \cdot y^2$$

Het optellen van de exponenten van y geeft:

$$\begin{aligned} -240 \cdot y^1 \cdot x^3z^3 \cdot y^2 &= -240 \cdot y^{1+2} \cdot x^3z^3 \\ &= -240 \cdot y^3 \cdot x^3z^3 \end{aligned}$$

Waarom tellen we de exponenten bij elkaar op?

Stel dat we de volgende eenterm hebben:

$$a^4 \cdot a^2 \cdot b^3$$

Dan kunnen we die eenterm languit schrijven als

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$$

We vermenigvuldigen a dus 6 keer met zichzelf en vervolgens vermenigvuldigen we b 3 keer met zichzelf. Dat is hetzelfde als

$$a^6 \cdot b^3$$

Vanwaar komt die 6 van a^6 nu? Wel de a^4 gaf ons 4 a's en de a^2 gaf er ons nog eens 2. In totaal kregen we dus $4 + 2 = 6$ a's. We kunnen bijgevolg zeggen dat:

$$a^4 \cdot a^2 \cdot b^3 = a^{4+2} \cdot b^3$$

In het algemeen is de regel dat je in een vermenigvuldiging **exponenten bij elkaar mag optellen** wanneer ze **hetzelfde grondtal hebben**:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Waarbij $a, n, m \in \mathbb{Q}$ (of $\mathbb{R}$ mag ook) .

Factoren rangschikken

Vanaf we de coëfficiënt en het lettergedeelte hebben vereenvoudigd, zijn alle factoren van onze eenterm vereenvoudigd. Vaak gaan we echter nog als laatste stap de **factoren van de eenterm rangschikken**. De meest gebruikelijke manier van rangschikken is:

1. Zet de coëfficiënt en het toestandsteken voorop;
2. Rangschik de variabelen alfabetisch.

We hebben ons voorbeeld al tot deze vorm kunnen vereenvoudigen:

$$-240 \cdot y^3 \cdot x^3 z^3$$

De coëfficiënt en het toestandsteken (de -240) staan al voorop . Nu moeten we enkel nog de variabelen **alfabetisch** rangschikken:

$$-240 \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot z^3$$

Tenslotte laten we de maaltekens weg waar het kan:

$$-240x^3y^3z^3$$

Wat. Een. Prachtige. Eenterm. 😊

Samengevat

EENTERMEN VEREENVOUDIGEN

Het vereenvoudigen van eentermen doe je als volgt:

1. Werk de **haakjes weg** door machten en mintekens uit te werken;
2. Vermenigvuldig alle **factoren in het cijfergedeelte** met elkaar;
3. Combineer de **factoren in het lettergedeelte** per soort en reken hun nieuwe macht uit;
4. Zet het **toestandsteken en de coëfficiënt voorop** en rangschik de **variabelen alfabetisch**.

Meer op https://hoezithet.nu/