Volgorde van de bewerkingen

Bron:
https://hoezithet.net/lessen/wiskunde/rekenen/volgorde_van_de_bewerkingen/

Over rekenregels gaan we vaak nogal snel over. De volledige wiskunde is echter uit die rekenregels ontstaan en bouwt erop verder. Als we de rekenregels dus niet grondig begrijpen, staat onze wiskunde op losse schroeven. Misschien daarom toch nog eens best alles proper opsommen (ba dum tss ▯ ▯).

De verkeersregels van het rekenen

Hoe moet je een wiskundige uitdrukking als $4 - 5 \cdot 8^2$ uitrekenen?

Zo?

$$\begin{aligned} 4 - 5 \cdot 8^2 &= -1 \cdot 8^2 \\ &= -8^2 \\ &= -64 \end{aligned} \tag{1}$$

Of zo?

$$\begin{aligned} 4 - 5 \cdot 8^2 &= 4 - 40^2 \\ &= 4 - 1600 \\ &= -1596 \end{aligned} \tag{2}$$

Of misschien zo?

$$\begin{aligned} 4 - 5 \cdot 8^2 &= 4 - 5 \cdot 64 \\ &= 4 - 320 \\ &= -316 \end{aligned} \tag{3}$$

Welke van die manieren is juist: methode 1, 2 of 3? De **volgorde van de bewerkingen** geeft ons enkele voorrangsregels voor berekeningen zoals $4 - 5 \cdot 8^2$.

AFSPRAAK
Bij bewerkingen spreken we de volgende voorrangsregels af (A.K.A. *de volgorde van de bewerkingen*):

1. Haakjes hebben voorrang op alles;
2. Machten (en wortels) hebben voorrang op vermenigvuldigingen (en delingen) ;
3. Vermenigvuldingen (en delingen) hebben voorrang op optellingen (en aftrekkingen) ;
4. Optellingen (en aftrekkingen) hebben voorrang op niets.

De lichtgrijze bewerkingen hebben dezelfde voorrang als de bewerking waar ze bij staan. Een vermenigvuldiging en een deling hebben dus allebei voorrang op een som en een aftrekking. Wanneer twee zulke bewerkingen na elkaar geschreven staan (dus bv. een deling en dan een vermenigvuldiging), spreken we af om gewoon van links naar rechts te werken. De uitdrukking $8 \div 4 \cdot 3$ rekenen we dus uit als

$$\begin{aligned} 8 \div 4 \cdot 3 &= 2 \cdot 3 \\ &= 6 \end{aligned}$$

omdat we de deling eerst tegenkomen wanneer we van links naar rechts lezen.

We zullen die volgorde van de bewerkingen eens toepassen op $4 - 5 \cdot 8^2$.

Er staan 3 verschillende bewerkingen: min, maal en een macht. Moeten we eerst $4 - 5$ doen of eerst $5 \cdot 8$ of eerst 8^2? De regels zeggen: *"Machten hebben voorrang op vermenigvuldigingen"*, de eerste stap is dus om de macht uit te rekenen:

$$4 - 5 \cdot 8^2 = 4 - 5 \cdot 64$$

Nu hebben we de uitdrukking $4 - 5 \cdot 64$ met nog twee bewerkingen: min en maal. Eerst $4 - 5$ of eerst $5 \cdot 64$? *“Vermenigvuldingen hebben voorrang op optellingen (en aftrekkingen) ”*, dus:

$$4 - 5 \cdot 64 = 4 - 320$$

Tenslotte hebben we de uitdrukking $4 - 320$ en blijft er maar één bewerking over; een aftrekking:

$$4 - 320 = -316$$

De juiste manier om $4 - 5 \cdot 8^2$ uit te rekenen, is dus zoals in methode 3.

Een ingewikkelder voorbeeld

In plaats van langzaam op te bouwen naar een ingewikkeld voorbeeld, zullen we meteen eens een monster van uitdrukking uitrekenen.

$$-(4-7)^2 \cdot 2 + \sqrt{9 \cdot 4} \div 3 - \frac{4 \cdot 3}{-5+7}$$

Hoe kan je zoiets uitrekenen? De volgorde van de bewerkingen leidt er ons stapje per stapje door. Ze zegt dat de haakjes altijd eerst moeten worden uitgerekend, zij hebben voorrang op alles. Hier staan vier dingen tussen haakjes:

$$-(4-7)^2 \cdot 2 + \sqrt{9 \cdot 4} \div 3 - \frac{4 \cdot 3}{-5+7}$$

Merk op dat we de *teller* en *noemer* van een breuk ook als iets tussen haakjes zien. Dat komt omdat we een breuk zoals bijvoorbeeld $\frac{1-4}{3+2}$ ook kunnen schrijven als een deling $(1 - 4) \div (3 + 2)$. De teller en noemer staan dus eigenlijk tussen haakjes. Ook alles wat *onder een wortel* staat, staat eigenlijk tussen haakjes. Al die haakjes uitrekenen is snel gebeurd:

$$-(-3)^2 \cdot 2 + \sqrt{36} \div 3 - \frac{12}{2}$$

De uitdrukking wordt al meteen een pak eenvoudiger. Na de haakjes hebben de **machten en wortels** voorrang. Er zijn **twee** machten en wortels:

$$-(-3)^2 \cdot 2 + \sqrt{36} \div 3 - \frac{12}{2}$$

Deze macht en wortel uitrekenen geeft:

$$-9 \cdot 2 + 6 \div 3 - \frac{12}{2}$$

Onthoud dat een negatief getal kwadrateren (zoals $(-3)^2$), een positief getal oplevert (hier 9). Het minnetje voor de 9 in de bovenstaande uitdrukking komt van het zwarte minnetje dat helemaal vooraan stond bij $-(-3)^2$.

Na de machten en wortels, hebben de **vermenigvuldigingen en delingen** voorrang. Zo zijn er **drie**:

$$-9 \cdot 2 + 6 \div 3 - \frac{12}{2}$$

Herinner je dat een breuk gewoon een deling is van de *teller* gedeeld door de *noemer*. De vermenigvuldigingen en delingen uitrekenen geeft:

$$-18 + 2 - 6$$

Er schiet enkel nog een eenvoudig sommetje over met enkel optellingen en aftrekkingen. Die werken we gewoon uit van links naar rechts:

$$-18 + 2 - 6 = -22$$

Volledige uitdrukkingen binnen haakjes

Het “leuke” aan haakjes is dat ze volledige uitdrukkingen kunnen bevatten. In het voorgaande voorbeeld bevatten de haakjes nooit echt iets ingewikkelds. Moest er wel een grote uitdrukking in de haakjes zitten, dan pas je op die uitdrukking binnen de haakjes natuurlijk ook gewoon de volgorde van de bewerkingen toe.

Bijvoorbeeld

$$-5^3 + \frac{\sqrt{-6 + 5^2 \cdot 2}}{2}$$

In de teller staat een uitdrukking op zich:

$$\sqrt{-6 + 5^2 \cdot 2}$$

Hier passen we apart de volgorde van de bewerkingen op toe. Het resultaat stoppen we dan in de oorspronkelijke uitdrukking.

$$\begin{aligned} \sqrt{-6 + 5^2 \cdot 2} &= \sqrt{-6 + 25 \cdot 2} \\ &= \sqrt{-6 + 25 \cdot 2} \\ &= \sqrt{-6 + 50} \\ &= \sqrt{-6 + 50} \\ &= \sqrt{44} \\ &= \sqrt{44} \\ &\approx 6.63\ldots \end{aligned} \tag{4}$$

De oorspronkelijke uitdrukking wordt dus:

$$-5^3 + \frac{6.63\ldots}{2}$$

Hier kan je weer de volgorde van de bewerkingen op toepassen. Je zult vinden dat de uitdrukking gelijk is aan -121.6 (afgerond op 1 cijfer na de komma).

Meer op https://hoezithet.net/