Machten en wortels omvormen

Bron:
https://hoezithet.nu/lessen/wiskunde/vergelijkingen/machten_omvormen/

Een vergelijking oplossen betekent dat we de waarden van de onbekende(n) vinden waarvoor de gelijkheid klopt. Vaak is er maar één onbekende, namelijk x.

Door een vergelijking om te vormen naar de vorm $x = (\text{een getal})$ kunnen we de vergelijking oplossen. In deze les zien we hoe we vergelijkingen van de vorm $x^2 = a$ en $x^3 = a$ kunnen omvormen naar $x = (\text{een getal})$. Ten slotte zullen we ook de vergelijkingen $\sqrt{x} = a$ en $\sqrt[3]{x} = a$ omvormen.

Omvormen van $x^2 = a$

Om een vergelijking van de vorm $x^2 = a$ (met $a \in \mathbb{R}^+$) om te vormen naar $x = (\text{een getal})$, moeten we enkel het **kwadraat** weg krijgen uit het linkerlid. We willen dat er links x staat in plaats van x^2. We kunnen het kwadraat weg krijgen door de **wortel te nemen van het linker- en rechterlid**:

$$x^2 = a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{a}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$$

Bijvoorbeeld: stel dat we de vergelijking

$$x^2 = 10$$

moeten oplossen. We willen het kwadraat aan de linkerkant weg krijgen zodat er links gewoon x staat. Dat kunnen we doen door van de vergelijking de vierkantswortel te nemen:

$$x^2 = 10$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 3.162\ldots$$

We controleren door de x in de oorspronkelijke vergelijking $x^2 = 10$ eens te vervangen door $(3.162\ldots)$ en eens door $(-3.162\ldots)$:

$$(3.162\ldots)^2 = 10$$

Check! ✅

$$(-3.162\ldots)^2 = 10$$

Klopt!

Uitbreiding: waarom die $\pm$?

Waar komt die $\pm$ plots vandaan?

Het probleem is dat we enkel het *kwadraat* van x kennen. Wanneer je een reëel getal kwadrateert, zal het echter altijd positief zijn. Je kan het teken van een getal dus niet meer weten nadat het gekwadrateerd is.

Stel dat ik een getal in mijn hoofd heb waarvan het kwadraat gelijk is aan 9. Welk getal heb ik dan in mijn hoofd? Je zou misschien eerst denken dat het 3 is omdat $3^2 = 9$, maar het zou even goed -3 kunnen zijn want ook $(-3)^2 = 9$. Het getal in mijn hoofd kan dus $+3$ of -3 zijn. We schrijven de vergelijkingen die hierbij horen als volgt:

$$x^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 3$$

.

Als het **kwadraat** van een getal *positief* is, kan het getal zelf **zowel positief als negatief** zijn.

Omvormen van $x^3 = a$

Voor een vergelijking als $x^3 = a$ doen we iets heel gelijkaardigs als bij $x^2 = a$, maar nu gebruiken we de **derdemachtswortel**:

$$x^3 = a$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{a}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a}$$

We willen bijvoorbeeld de vergelijking $x^3 = -16$ oplossen.

$$x^3 = -16$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{-16}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{-16}$$

$$\Leftrightarrow x = -2.520\ldots$$

Controle:

$$(-2.520\ldots)^3 = -16$$

Uitbreiding: waarom nu plots geen $\pm$?

Merk op dat er deze keer géén $\pm$ voor de wortel staat. Dat komt omdat de derde macht van een getal altijd hetzelfde teken heeft als het getal zelf. Bijvoorbeeld $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$.

Als de **derde macht** van een getal *negatief* is, is het getal zelf *ook* negatief. Als de **derde macht** van een getal *postitief* is, is het getal zelf *ook* positief.

Omvormen van $\sqrt{x} = a$

Om een vergelijking van de vorm $\sqrt{x} = a$ (met $a \in \mathbb{R}^+$) om te vormen naar $x = \text{(een getal)}$, moeten we enkel de **vierkantswortel** weg krijgen uit het linkerlid. We kunnen hiervoor zorgen door het **linker- en rechterlid te kwadrateren**:

$$\sqrt{x} = a$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (a)^2$$

$$\Leftrightarrow x = a^2$$

Bijvoorbeeld:

$$\sqrt{x} = 5$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (5)^2$$

$$\Leftrightarrow x = 5^2$$

$$\Leftrightarrow x = 25$$

Controle:

$$\sqrt{25} = 5$$

Perfect!

Uitbreiding: Waarom niet $\pm a^2$?

Omdat we de vierkantswortel nemen van x, is x sowieso een positief (reëel) getal.

(De vierkantswortel van een negatief getal bestaat niet in $\mathbb{R}$.)

Omvormen van $\sqrt[3]{x} = a$

Ook voor $\sqrt[3]{x} = a$ doen we iets gelijkaardigs als bij $\sqrt{x} = a$, maar nu dan met een derde macht. Merk op dat a nu zowel positief als negatief kan zijn ($a \in \mathbb{R}$), want een derdemachtswortel kan ook negatief zijn.

$$\sqrt[3]{x} = a$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^3 = (a)^3$$

$$\Leftrightarrow x = a^3$$

Bijvoorbeeld $\sqrt[3]{x} = -2$

$$\sqrt[3]{x} = -2$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt[3]{x})^3 = (-2)^3$$

$$\Leftrightarrow x = (-2)^3$$

$$\Leftrightarrow x = -8$$

Controle:

$$\sqrt[3]{-8} = -2$$

OK!

Samengevat

Vergelijking	Tussenstap	Oplossing	Voorwaarden
$x^2 = a$	$\sqrt{x^2} = \sqrt{a}$	$x = \pm\sqrt{a}$	$a \in \mathbb{R}^+$
$\sqrt{x} = a$	$(\sqrt{x})^2 = a^2$	$x = a^2$	$a \in \mathbb{R}^+$
$x^3 = a$	$\sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{a}$	$x = \sqrt[3]{a}$	$a \in \mathbb{R}$
$\sqrt[3]{x} = a$	$(\sqrt[3]{x})^3 = a^3$	$x = a^3$	$a \in \mathbb{R}$

Meer op https://hoezithet.nu/