

1. (12 Punkte) Sind folgende Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$? Geben Sie alle Kriterien, die Sie verwenden, detailliert wieder.
 - a) $x^3 + 3x^2 - 5x - 2$
 - b) $x^{2019} + 2018x^2 + 10x + 14$
2. (12 Punkte) a) Sei K ein Körper, $f \in K[x]$ irreduzibles Polynom.
 \mathbb{Z} : $K[x]/(f)$ ist ein Körper.
 - b) R, S kommutative Ringe mit 1, $I \subset S$ ein Ideal von S , $f : R \rightarrow S$ Morphismus.
 \mathbb{Z} : $f^{-1}(I)$ ist Ideal von R und $f^{-1}(I)$ ist Primideal $\Leftrightarrow I$ Primideal.
3. (12 Punkte) $K \subset L \subset M$ Körpererweiterungen.
 - a) Definiere $[L : K]$.
 - b) Gegeben $S \subset L$, definiere $K(S)$.
 - c) Definiere: Was bedeutet L/K algebraisch?
 - d) Seien L/K und M/L algebraisch.
 \mathbb{Z} : M/K algebraisch.
4. (12 Punkte) Betrachte $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{7}$
 - a) Identifiziere die Galois-Gruppe $\text{Gal } \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$.
 - b) Bestimme alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{Q}(\alpha)$ und bestimme für jeden Zwischenkörper K ein Element β_K , sodass $K = \mathbb{Q}(\beta_K)$
5. (12 Punkte) a) Definition: normale Untergruppe
 - b) Beispiel (mit Beweis): Gruppe G und normale Untergruppe $N \subset G$, wobei $N \neq \{1\}$ und $N \neq G$.
 - c) G eine endliche Gruppe, die auf einer Menge M wirkt. Wähle $x \in M$.
 \mathbb{Z} : $\#(G \cdot x) \mid \#G$
 - d) G eine Gruppe, Z das Zentrum von G .
 \mathbb{Z} : G/Z ist zyklisch $\Rightarrow G$ abelsch.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Summe:
Punkte:	12	12	12	12	12	60
Ergebnis:						