1. (12 Punkte) Sind folgende Polynome irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$? Geben Sie alle Kriterien, die Sie verwenden, detailliert wieder.

   a) $x^3 + 3x^2 - 5x - 2$

   b) $x^{2019} + 2018x^2 + 10x + 14$

2. (12 Punkte) a) Sei K ein Körper, $f \in K[x]$ irreduzibles Polynom.
   ZZ: $K[x]/(f)$ ist ein Körper.

   b) R, S kommutative Ringe mit 1, $I \subset S$ ein Ideal von S, $f : R \longrightarrow S$ Morphismus.
   ZZ: $f^{-1}(I)$ ist Ideal von R und $f^{-1}(I)$ ist Primideal $\Leftrightarrow$ I Primzahl.

3. (12 Punkte) $K \subset L \subset M$ Körpererweiterungen.

   a) Definiere $[L : K]$.

   b) Gegeben $S \subset L$, definiere $K(s)$.

   c) Definiere: Was bedeutet L/K algebraisch?

   d) Seien L/K und M/L algebraisch.
   ZZ: M/K algebraisch.

4. (12 Punkte) Betrachte $\alpha = \sqrt{3} + \sqrt{7}$

   a) Identifiziere die Galois-Gruppe $\operatorname{Gal} \mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$.

   b) Bestimme alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{Q}(\alpha)$ und bestimme für jeden Zwischenkörper K ein Element β_K, sodass $K = \mathbb{Q}(\beta_K)$

5. (12 Punkte) a) Definition: normale Untergruppe

   b) Beispiel (mit Beweis): Gruppe G und normale Untergruppe $N \subset G$, wobei $N \neq \{1\}$ und $N \neq G$.

   c) G eine endliche Gruppe, die auf einer Menge M wirkt. Wähle $x \in M$.
   ZZ: $\#(G \cdot x) \mid \#G$

   d) G eine Gruppe, Z das Zentrum von G.
   ZZ: G/Z ist zyklisch $\Rightarrow$ G abelsch.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Summe:
Punkte:	12	12	12	12	12	60
Ergebnis:						