

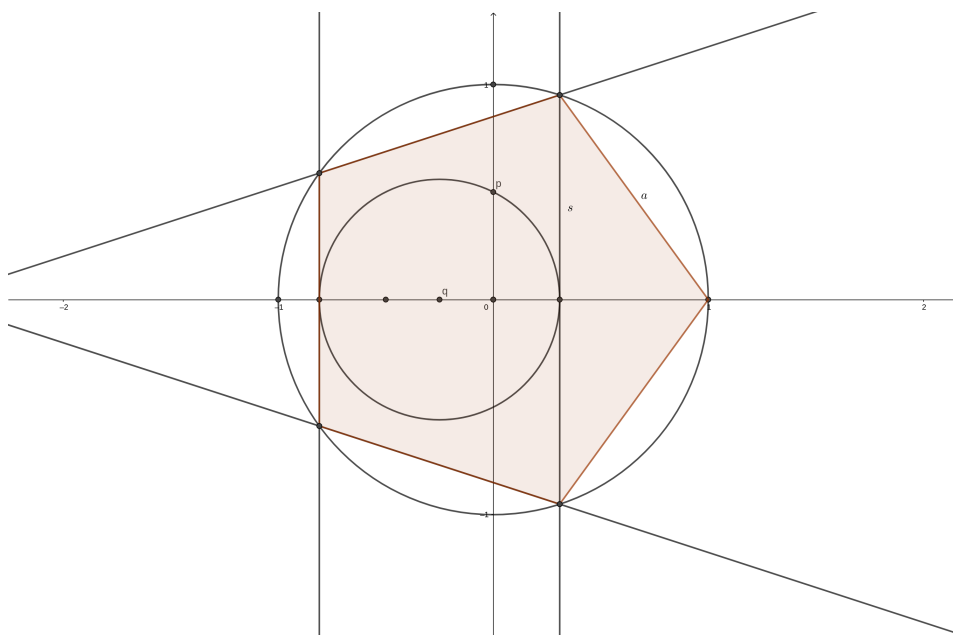
# Skript Algebra

Lukas Metzger

14. Januar 2019

## 0 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

**Beispiel 0.1** (Konstruktion des regelmäßigen 5-Ecks). Anleitung zur Konstruktion



Erste Frage: Gegeben  $n \in \mathbb{N}$ , kann ich das regelmäßige  $n$ -Eck konstruieren?

Beispielproblem: Betrachte Das 5-Eck, sei  $a$  die Kantenlänge und  $s$  die Sekantenlänge.

Dann ist  $\frac{s}{a} \notin \mathbb{Q}$ .

*Beweis.* Angenommen  $\frac{s}{a}$  wäre in  $\mathbb{Q}$ . Dann schreibe  $\frac{s}{a} = \frac{p}{q}$  mit  $p, q \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es also eine Länge  $d \in \mathbb{R}$ , so dass  $s$  und  $a$  beides ganzzahlige Vielfache von  $d$  sind.  $\exists n, m \in \mathbb{N}$   
 $a = n \cdot d, s = m \cdot d$ .

Betrachte/Erweitere die Konstruktion des 5-Ecks und erhalte kleines (blaues) 5-Eck wie gezeichnet mit Sekantenlänge  $s' = a$  und Kantenlänge  $a' = s - a$ .



Dann sind aber sowohl  $a'$  als auch  $s'$  wieder Vielfache von  $d$ . Das Verfahren kann ich wiederholen und erhalte immer kleinere 5-Ecke, deren Größe nach 0 konvergiert, wo Kanten- und Sekantenlänge ganzzahlige Vielfache von  $d$  sind.  $\nexists$   $\square$

Weitere Konstruktionsprobleme:

- 3-Teilung des Winkels
- Verdoppelung des Würfels (d.h. Verdoppelung des Volumens)
- Quadratur des Kreises (Gegeben ein Kreis, konstruiere Quadrat mit demselben Flächeninhalt)

Wiederholung: Was kann ich mit Zirkel und Lineal eigentlich machen?

Antwort: 3 Konstruktionen

- 1) Gegeben Punkte  $a_1, a_2, b_1, b_2$  der Ebene, betrachte die Geraden  $\overline{a_1 a_2}$  und  $b_1 b_2$  und erhalte Schnittpunkt  $\overline{a_1 a_2} \cap \overline{b_1 b_2}$ .
- 2) Gegeben Punkte  $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3$  der Ebene betrachte Kreis  $K(b_1, \|b_2 - b_3\|)$  um  $b_1$  mit Radius  $\|b_2 - b_3\|$  und erhalte die Schnittpunkte  $\overline{a_1 a_2} \cap K(b_1, \|b_2 - b_3\|)$
- 3) Gegeben Punkte  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ , erhalte Schnittpunkte  $K(a_1, \|a_2 - a_3\|) \cap K(b_1, \|b_2 - b_3\|)$

**Definition 0.2.** Sei  $M \subset \mathbb{R}^2$  eine Menge,  $p \in \mathbb{R}^2$  ein Punkt.

Sage:  $p$  ist aus  $M$  mit Zirkel und Lineal konstruierbar, falls es Kette von Mengen gibt

$$M = M_1 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n \ni p$$

Wobei  $\forall i$  die Menge  $M_i$  entsteht aus  $M_{i-1}$  durch Hinzunahme der Punkte die durch einen Konstruktionsschritt entstehen.

Historie: Einen Durchbruch bei der Lösung dieser Probleme gab es erst, als man begann, die Punkte des  $\mathbb{R}^2$  mit komplexen Zahlen zu identifizieren.

*Bemerkung.* Frage nach der Konstruierbarkeit macht nur Sinn, wenn  $M$  mindestens 2 Punkte enthält  $\leadsto$  Häufig  $M = \{0, 1\} \subset \mathbb{C}$ .

In dieser Sprache

- Konstruktionsproblem:  $n$ -Eck ist äquivalent zu, kann ich die  $n$ -ten Einheitswurzeln  $e^{\frac{i2\pi}{n}}$  aus  $M = \{0, 1\}$  konstruieren? Ist  $e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \text{Kons}(\{0, 1\})$ ?
- Verdopplung des Würfels  $\Leftrightarrow$  Ist  $\sqrt[3]{2} \in \text{Kons}(\{0, 1\})$
- Quadratur des Kreises  $\Leftrightarrow$  Ist  $\sqrt{\pi} \in \text{Kons}(\{0, 1\})$
- 3-teilung des Winkels  $\Leftrightarrow$  Ist für gegebenes  $\varphi \in (0, 2\pi)$   $e^{\frac{i\varphi}{3}} \in \text{Kons}(\{0, 1, e^{i\varphi}\})$

Zentrale Beobachtung

Sei  $M \subset \mathbb{C}$  eine Menge die 0 und 1 enthält. Sei  $\text{Kons}(M)$  die Menge der aus  $M$  konstruierbaren Punkte.

Dann ist  $\text{Kons}(M) \subset \mathbb{C}$  ein Unterkörper.

*Dazu zu prüfen:* Konstruierbarkeit von Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten  
....

Zusammenfassung/zentrales Thema der Vorlesung

Körpererweiterung / wie können Körper ineinander enthalten sein?

# 1 Körpererweiterungen

## 1.1 Ultrakurzwiederholung zentraler Begriffe

**Definition 1.1** (Gruppe). Eine Gruppe ist eine Menge  $G$  zusammen mit einer Abbildung  $m : G \times G \rightarrow G$  so dass folgendes gilt:

- 1) Assoziativ:  $\forall a, b, c \in G \ m(m(a, b), c) = m(a, m(b, c))$
- 2) Neutrales Element:  $\exists n \in G \forall a \in G : m(n, a) = m(a, n) = a$
- 3) Inverse Elemente:  $\forall a \in G \exists b \in G : ab = ba$  und dieses Produkt ist neutrales Element wie in 2)

**Lemma 1.2** (Elementare Eigenschaften von Gruppen). Für jede Gruppe gilt:

- Das neutrale Element ist eindeutig
- Inverse Elemente sind eindeutig

**Definition 1.3** (Abelsche Gruppe). Nenne Gruppe  $(G, m)$  Abelsch, falls  $\forall a, b \in G : m(a, b) = m(b, a)$ .

Notation: Statt  $m$  schreibt man oft  $+$  oder  $\cdot$ , wobei  $+$  hauptsächlich für Abelsche Gruppen verwendet wird.

**Beispiel 1.4.** Beispiele für Gruppen:

- Abelsche Gruppen:  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ ,  $(\text{Vektorraum}, +)$
- Nicht-Abelsche Gruppen: Sei  $M$  eine Menge mit  $> 2$  Elementen. Die bijektiven Abbildungen  $M \rightarrow M$  mit der Hintereinanderausführung ist eine nicht-Abelsche Gruppe.

Sei  $K$  ein Schiefkörper, z.B.  $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ . Sei  $K^* K \setminus \{0\}$ . Dann ist  $(K^*, \cdot)$  eine Gruppe.

- Nicht-Beispiel:  $G = \mathbb{R}^3$ . Ich erhalte durch das Kreuzprodukt keine Gruppenkonstruktion.

**Definition 1.5** (Ring). Ein Ring ist eine Menge  $R$  mit 2 Verknüpfungen  $+$  und  $\cdot$  so dass gilt:

- $(R, +)$  ist eine Abelsche Gruppe
- Distributivgesetz:  $\forall a, b, c \in R \ (a + b) \cdot c = ac + bc$  und  $a(b + c) = ab + ac$
- $(R \setminus 0, \cdot)$  ist fast Gruppe nämlich assoziativ und es existiert ein neutrales Element

**Beispiel 1.6.** Beispiele für Ringe:

- $\mathbb{R}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ , Polynome,  $\mathbb{Z}$
- Funktionen auf  $\mathbb{R}/\mathbb{C}$
- holomorphe/stetige/ $C^\infty$ /reell analytische lokal quadratintegrierbare Funktionen bilden ebenfalls einen Ring

*Bemerkung.* Mit Ringen kann ich fast rechnen wie mit Zahlen, aber ACHTUNG

- Nicht jedes Element in  $R \setminus 0$  hat ein multiplikatives Inverses
- Ich kann aus  $a \cdot b = 0$  und  $a \neq 0$  im Allgemeinen nicht folgern, dass  $b = 0$
- Ich kann aus  $ab = ac$  und  $a \neq 0$  im allgemeinen nicht folgern, dass  $b = c$  ist

**Definition 1.7** (Nullteiler). Sei  $R$  ein Ring,  $a \in R \setminus \{0\}$ . Falls  $b \neq 0$  existiert mit  $a \cdot b = 0$ , nenne ich  $a$  einen Nullteiler.

Ringe ohne Nullteiler heißen Nullteilerfrei oder Integritätsringe.

**Definition 1.8** (Abelscher Ring). Ein Ring heißt abelsch, falls  $\forall a, b \in R \ ab = ba$ .

*Bemerkung.* In der Literatur heißen unsere Ringe oft Ringe mit 1.

**Beispiel 1.9.** Beispiele zu Nullteilern

- $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$  sind nullteilerfrei
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  ist nullteilerfrei  $\Leftrightarrow n$  ist Prim
- Polynome sind nullteilerfrei
- Stetige Funktionen sind nicht nullteilerfrei

*Bemerkung.* Sei  $R$  ein Ringe. Die Menge der Elemente, die ein multiplikatives Inverses haben, wir mit  $R^*$  bezeichnet.

- $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{[x] \mid x \text{ ist teilerfremd zu } n\}$
- $(C^\infty(\mathbb{R}))^* = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } C^\infty \text{ und hat keine Nullstelle}\}$

*Bemerkung.* Sei  $R$  ein Ring,  $x$  eine Variable. Dann bezeichne mit  $R[x]$  die Polynome mit Koeffizienten in  $R$  und Variable  $x$ .

- $1x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$
- $\frac{\pi}{4} \cdot x^2 \notin \mathbb{Z}[x]$

**Definition 1.10** (Schiefkörper). Schiefkörper sind Ringe  $R$  wobei  $R^* = R \setminus \{0\}$

**Definition 1.11** (Körper). Ein Körper ist ein Schiefkörper, der auch noch kommutativ ist.

**Beispiel 1.12.** Beispiele für Körper und Schiefkörper

- Quaternionen sind Schiefkörper
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  sind Körper
- $\text{Kons}(\{0, 1\})$  ist Unterkörper von  $\mathbb{C}$
- Die Menge der Rationale Funktionen über einem Körper bilden wieder einen Körper

## 1.2 Algebraische und transzendente Elemente

Sei  $L$  ein Körper und  $k \subset L$  ein Unterkörper (z.B.  $L = \mathbb{C}, k \subset \mathbb{R}$  oder  $L = \mathbb{R}, k = \mathbb{Q}$ ).

Im Fall  $k = \mathbb{Q}, L = \mathbb{R}$  wissen wir, dass es in  $\mathbb{R}$  sehr unterschiedliche Elemente gibt.

- $\sqrt{7} \dots$  algebraisch
- $\pi, e \dots$  transzendent

**Definition 1.13.** Situation wie oben. Sei  $a \in L$  gegeben. Nenne  $a$  algebraisch über  $k$  falls es ein Polynom gibt  $f \in k[x]$  und  $f \neq 0$  so dass  $f(a) = 0$ .

*Bemerkung.* Nicht algebraische Elemente heißen transzendent.

**Beispiel 1.14.** Beispiele für algebraische und transzendente Zahlen

- $\sqrt{7}$  ist algebraisch über  $\mathbb{Q}$ , denn  $f(\sqrt{7}) = 0$  mit  $f(x) = x^2 - 7$
- $\pi$  ist nicht algebraisch über  $\mathbb{Q}$  (Lindemann, 1844)

*Bemerkung.* In  $\mathbb{R}$  gibt es praktisch keine Zahlen, die algebraisch über  $\mathbb{Q}$  sind.

Wir wissen  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar, also sind auch die Polynome mit Koeffizienten in  $\mathbb{Q}$  abzählbar. Jedes Polynom hat aber nur endlich viele Nullstellen. Das heißt die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar, also eine Nullmenge im Sinne der Integrationstheorie.

**Beispiel 1.15.** Körpererweiterung  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  - Beobachte:  $i$  ist algebraisch über  $\mathbb{R}$ , denn  $f(i) = 0$  wobei  $f(x) = x^2 + 1$

$z = i + 1$  ist Algebraisch mit  $f(x) = (x - 1)^2 + 1$

$z = a + bi$  ist Algebraisch mit  $f(x) = \left(\frac{x-a}{b}\right)^2 + 1$

$\Rightarrow$  Jede komplexe Zahl ist algebraisch über  $\mathbb{R}$

**Definition 1.16.** Eine Körpererweiterung  $k \subset L$  heißt algebraisch, falls jedes  $a \in L$  algebraisch über  $k$  ist.

Ansonsten nenne Körpererweiterung transzendent.

*Bemerkung.* Sei  $k \subset L$  eine Körpererweiterung, sei  $a \in L$  algebraisch über  $k$  und sei  $f \in k[x]$  ein Polynom  $\neq 0$  mit  $f(a) = 0$ .

Solche Polynome gibt es viele, wir interessieren uns für  $f$ 's mit minimalem Grad. Wenn so ein  $f$  gegeben ist:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

dann dividiere durch  $a_n$  und erhalte Polynom

$$\hat{f} = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \in k[x]$$

mit  $a$  als Nullstelle.

Falls  $\hat{f}$  und  $\bar{f}$  in  $k[x]$  zwei normierte Polynome von minimalem Grad sind mit  $\hat{f}(a) = \bar{f}(a) = 0$ , dann betrachte Polynom  $(\hat{f} - \bar{f}) \in k[x]$ . Dann gilt

$$(\hat{f} - \bar{f})(a) = \hat{f}(a) - \bar{f}(a) = 0 - 0 = 0$$

und der Grad von  $(\hat{f} - \bar{f})$  ist kleiner als der Grad von  $\hat{f}$ . Weil aber der Grad von  $\hat{f}$  minimal war, folgt:  $\hat{f} = \bar{f}$ .

**Satz 1.17.** Sei  $k \subset L$  eine Körpererweiterung, sei  $a \in L$  algebraisch über  $k$ . Dann gibt es genau ein Polynom  $f \in k[x] \setminus \{0\}$  so dass gilt:

- 1)  $f(a) = 0$
- 2)  $\deg f$  ist minimal unter den Graden der Polynome die  $a$  als Nullstelle haben:

$$\deg(f) = \min\{\deg g \mid g \in k[x] \setminus \{0\}, g(a) = 0\}$$

- 3)  $f$  ist normiert (d.h. Leitkoeffizient = 1)

Nenne dieses  $f$  das Minimalpolynom von  $a$  über  $k$ .

Die Zahl  $\deg f$  wird als Grad von  $a$  über  $k$  bezeichnet, in Symbolen  $[a : k]$

*Bemerkung.* Sei  $k \subset L$  Erweiterung,  $a \in L$  algebraisch über  $k$ . Falls  $[a : k] = 1$ , dann  $a \in k$ .

### Mehr Beispiele für Körpererweiterungen

Sei  $k \subset L$  eine Körpererweiterung, sei  $(L_i)_{i \in I}$  eine Menge von Zwischenkörpern, d.h.  $k \subseteq L_i \subseteq L$ .

Dann ist auch  $K := \bigcap_{i \in I} L_i$  ein Körper.

Nutzanwendung: Sei  $A \subset L$  irgendeine Teilmenge. Sei  $(L_i)_{i \in I}$  die Menge der Zwischenkörper  $k \subseteq L_i \subseteq L$  so dass  $\forall i : A \subset L_i$ . Dann betrachte  $K$  und es gilt:

- $k \subseteq K \subset L$ , also  $K$  ist Zwischenkörper
- $A \subseteq K$
- $K$  ist der kleinste Zwischenkörper der  $A$  enthält

*Bemerkung.* Bezeichne  $K$  mit  $k(A)$  und sage  $k(A)$  entsteht aus  $k$  durch Adjunktion der Elemente von  $A$ .

Spezialfall:  $A = \{a\}$  dann schreibe ich  $k(a)$ . Das ist dann der kleinste Unterkörper von  $L$ , der sowohl  $k$  als auch  $a$  enthält.

**Definition 1.18** (Einfache Körpererweiterung). Eine Körpererweiterung  $k \subset L$  heißt einfach, falls  $a$  existiert, so dass  $L = k(a)$ .

**Definition 1.19** (Grad der Körpererweiterung).

$$[L : k] = \dim_k L \quad \text{Grad der Körpererweiterung}$$



## Beispiele

$$[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2 \quad [\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$$

**Satz 1.20.** Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung,  $a \in L$  dann gilt

$$[a : k] = [k(a) : k]$$

*Beweis.* Falls  $a$  transzendent, dann sind  $1, a, a^2, \dots$   $k$ -linear unabhängig, also ist  $\dim_k k(a) = \infty$ .

Betrachte also den Fall, wo  $a$  algebraisch ist mit Minimalpolynom  $f(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \dots + b_0 \in k[x]$ .

Klar ist: Die Elemente  $1, a, a^2, \dots, a^{n-1} \in k(a)$  sind linear unabhängig, denn jede lineare Relation gäbe ein Polynom  $g(x)$  vom Grad  $< n$  mit  $g(a) = 0 \nmid$ .

Also:  $\dim_k k(a) \geq n$

Um Gleichheit zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass  $\langle 1, a, a^2, \dots, a^{n-1} \rangle_k =: \tilde{k}$  bereits  $k(a)$ . Klar ist  $\tilde{k} \subseteq k(a)$ . Wegen der Minimalität von  $k(a)$  genügt es für die Umkehrrichtung zu zeigen, dass  $\tilde{k}$  ein Körper ist.

Klar ist  $0, 1 \in \tilde{k}$ .

Zu zeigen ist Abgeschlossenheit unter Addition/Subtraktion (hier klar wegen Vektorraum) und unter Multiplikation/Division (noch nicht klar).

Zwischenbehauptung: Sei  $s = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i a^i \in \tilde{k}$  ein beliebiges Element. Dann ist  $a \cdot s \in \tilde{k}$ .

Wir wissen:

$$a \cdot s = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i a^{i+1} + \lambda_{n-1} a^n}_{\in \tilde{k}}$$

Ein Blick auf das Minimalpolynom zeigt:

$$a^n = - \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot a^i \in \tilde{k}$$

Konsequenz: Wenn  $s, t \in \tilde{k}$  beliebig sind, dann  $s \cdot t \in \tilde{k}$ , also gilt die Abgeschlossenheit unter Multiplikation.

Letzte Aufgabe: Existenz von multiplikativen Inversen. Sei also  $s \in \tilde{k}, s \neq 0$  gegeben. Wegen abgeschlossenheit unter Multiplikation ist  $s, s^2, s^3, \dots$  wieder in  $\tilde{k}$ . Also ist  $1, s, \dots, s^n$  linear abhängig  $\Rightarrow s$  ist algebraisch über  $k$ .

Sei  $p(x) = x^m + p_{m-1} \cdot x^{m-1} + \dots + p_0$  das Minimalpolynom.

Beobachtung:  $p_0 \neq 0$ , denn sonst könnte ich  $x$  ausklammern,  $p$  wäre nicht minimal. Damnach kann ich schreiben:

$$\begin{aligned} 0 &= p(s) = s^m + p_{m-1}s^{m-1} + \dots + p_0 \\ \Leftrightarrow -p_0 &= s(s^{m-1} + p_{m-1}s^{m-2} + \dots + p_1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{s} &= \frac{1}{\underbrace{-p_0}_{\in k}} \underbrace{(s^{m-1} + p_{m-1}s^{m-2} + \dots + p_1)}_{\in \tilde{k} \text{ wegen Abg. unter Mult.}} \in \tilde{k} \end{aligned}$$

□

**Folgerung 1.21.**

- 1) Wenn  $[a : k] = n$ , dann ist  $k(a) = \{\lambda_0 + \lambda_1 a + \dots + \lambda_{n-1} a^{n-1} \mid \lambda_i \in k\}$
- 2) Wenn  $[a : k] < \infty$ , dann ist  $k(a)/k$  algebraisch

**Beispiel 1.22.** Sei  $L = \mathbb{C}, k \subset \mathbb{C}$  ein Unterkörper, sei  $b \in k$  und  $a = \sqrt{b}$ . Dann gilt:

$$[k(a) : k] = \begin{cases} 2 & \text{falls } a \notin k \\ 1 & \text{falls } a \in k \end{cases}$$

**Proposition 1.23** (Umkehrung der Beobachtung). Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung von Grad 2. Dann entsteht  $L$  durch Adjunktion einer Quadratwurzel.

**Lemma 1.24.** Sei  $L/k$  eine algebraische Körpererweiterung, so dass der Erweiterungsgrad  $[L : k]$  eine Primzahl ist. Dann ist die Erweiterung einfach, das heißt  $\exists a \in L : L = k(a)$ .

*Beweis.* Übung

□

*Beweis.* (von Proposition 1.23) Wähle  $a \in L$  wie im Lemma. Dann ist klar  $[a : k] = 2$ . Also existieren  $\lambda_1, \lambda_0 \in k$ , so dass  $a^2 + \lambda_1 a + \lambda_0 = 0$  ist. Also:

$$a \in \underbrace{\frac{-\lambda_1}{2}}_{\in k} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)^2 - \lambda_0}}_{=b}$$

Weil  $a$  und  $b$  sich nur um Elemente von  $k$  unterscheiden, ist  $k(a) = k(b)$ . Das Element  $b$  ist aber Quadratwurzel!

□

*Bemerkung.* Falls  $\text{char}(k) = 2$  ist, muss man die Lösungsformel richtig hinschreiben.

**Satz 1.25.** Sei  $k \subseteq L \subseteq M$  eine Kette von Körpern. Dann ist

$$[M : k] = [M : L] \cdot [L : k]$$

*Beweis.* (nur im Fall, wo  $[M : L] < \infty$  und  $[L : k] < \infty$ )

Wähle Basis  $m_1, \dots, m_a$  für  $M$  als  $L$ -Vektorraum und  $l_1, \dots, l_b$  für  $L$  als  $k$ -Vektorraum.

Behauptung: Dann bilden die Elemente  $(m_i \cdot l_j)_{i,j}$  eine Basis von  $M$  als  $k$ -Vektorraum.

Erzeugendensystem: Sei  $m \in M$  gegeben. Dann ist  $m$  schreibbar als

$$m = \sum_{i=1}^a \lambda_i \cdot m_i$$

mit  $\lambda_i \in L$ .

Dann kann ich jedes  $\lambda_i$  schreiben als

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^b \mu_j^i \cdot l_j$$

mit  $\mu_j \in k$ .

Einsetzen zeigt  $m$  kann geschrieben werden als  $k$ -Linearkombination der Produkte  $m_i \cdot l_j$ .

Lineare Unabhängigkeit: Sei eine lineare Relation

$$0 = \sum_{i,j} \mu_j^i \cdot (m_i \cdot l_j)$$

gegeben, wobei  $\mu_j^i \in k$ . Dann gilt

$$0 = \sum_i \left( \underbrace{\sum_j \mu_j^i \cdot l_j}_{\in L} \right) \cdot m_i$$

Weil die  $m_i$  per Wahl aber  $L$ -linear unabhängig sind folgt für alle  $i$   $\sum_j \underbrace{\mu_j^i}_{\in k} \cdot l_j = 0$ .

Weil die  $l_j$  per Wahl aber  $k$ -linear unabhängig sind, ist  $\forall i \forall j \mu_j^i = 0$ . □

**Folgerung 1.26.** Wenn eine Kette von Körpererweiterungen gegeben ist,  $k \subseteq L \subseteq M$  und wenn  $[M : k] < \infty$  dann ist  $[L : k] < \infty$  und sogar ein Teiler von  $[M : k]$ .

**Satz 1.27.** Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung, dann ist äquivalent:

- 1)  $[L : k] < \infty$
- 2)  $L$  ist algebraisch über  $k$ , und es gibt endlich viele  $a_1, \dots, a_n \in L : L = k(a_1, \dots, a_n)$
- 3) Es gibt endlich viele  $a_1, \dots, a_n \in L$ , die algebraisch über  $k$  sind und  $L = k(a_1, \dots, a_n)$

*Beweis.* 1  $\Rightarrow$  2: Sei  $s \in L$  beliebig. Dann sind  $1, s, s^2, \dots, s^{[L:k]}$  linear abhängig, also ist  $s$  algebraisch über  $k$ . Das heißt  $L/k$  ist algebraisch. Um  $a_1, \dots, a_n$  zu finden, wähle Vektorraumbasis von  $L$  über  $k$ .

2  $\Rightarrow$  3: trivial

3  $\Rightarrow$  1: Betrachte

$$\underbrace{k}_{=:k_0} \subseteq \underbrace{k(a_1)}_{=:k_1} \subseteq \underbrace{k(a_1, a_2)}_{=:k_2} \subseteq \dots \subseteq \underbrace{k(a_1, \dots, a_n)}_{=:k_n}$$

Dann klar:  $\forall i : a_i$  ist algebraisch über  $k_{i-1}$  (sogar algebraisch über  $k_0$ ) also  $[k_i : k_{i-1}] < \infty$ , dann  $k_i = k_{i-1}(a_i)$  und  $[L : k] = \prod_i [k_i : k_{i-1}] < \infty$ .  $\square$

**Lemma 1.28** (Nutzanwendung (Transitivität der Algebraizität)). Sei  $k \subseteq L \subseteq M$  eine Kette von Körpererweiterungen. Falls  $L/k$  algebraisch ist und  $M/L$  algebraisch ist, dann ist  $M/k$  algebraisch.

*Beweis.* Sei  $m \in M$  gegeben. Ziel:  $m$  ist algebraisch über  $k$ .

$m$  ist algebraisch über  $L$ , das heißt es hat ein Minimalpolynom

$$f(x) = \sum_{i=0}^a l_i \cdot x^i \in L[x]$$

Wir wissen auch: Jedes der  $l_i$  ist algebraisch über  $k$ .

Betrachte jetzt den Zwischenkörper  $L' = k(l_0, \dots, l_a)$ . Dann ist  $L'/k$  endlich und  $m$  ist algebraisch über  $L'$ , also ist  $m \in L'(m)$  und  $L'(m)/L'$  ist endlich. Damit ist  $L'(m)/k$  endlich, also algebraisch.  $\square$

**Proposition 1.29.** Sei  $k \subseteq L$  eine Körpererweiterung. Sei

$$\bar{k} := \{a \in L \mid a \text{ ist algebraisch über } k\}$$

Dann ist  $\bar{k}$  ein Körper.

Man nennt  $\bar{k}$  den algebraischen Abschluss von  $k$  in  $L$ .

*Beweis.* Klar ist, dass  $0, 1 \in \bar{k}$  sind. Wir müssen klären, ob mit  $a, b \in \bar{k}$  auch  $a+b, a-b, a \cdot b$  und gegebenenfalls für  $\frac{1}{a} \in \bar{k}$  sind. Das ist aber klar, denn all diese Elemente liegen in  $k(a, b)$ . Nach Satz 1.27 ist  $k(a, b)$  algebraisch über  $k$ .  $\square$

*Bemerkung.* Achtung: Es gibt einen anderen Begriff von (absolutem) algebraischen Abschluss, der nicht von einem Oberkörper  $L \supseteq k$  abhängt.

## 1.3 Lösungsformel für Polynome

Wissen aus der Schule: Quadratische Gleichungen in einer Variable haben Lösungsformel.

Wissen seit der Renaissance: Haben Formeln für Gleichungen von Grad 3 und 4.

Beispiel:  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  Setze:

$$h = -\frac{1}{2}c + \frac{1}{6}ab - \frac{1}{24}a^3$$

$$w_1 = \sqrt{-3(a^2b^2 - 4a^3c - 4b^3 + 18abc - 27c^2)}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{h + \frac{1}{18}w_1}$$

$$w_3 = \sqrt[3]{h - \frac{1}{18}w_1}$$

Dann ist

$$x = -\frac{1}{3}a + w_2 - w_3$$

eine Lösung, wenn die Wurzeln  $w_2, w_3$  so gewählt sind dass  $w_2w_3 = \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{3}b$ .

Frage: Gibt es eine Lösungsformel für Gleichungen vom Grad 5?

Bescheidener: Kann ich die Lösung überhaupt hinschreiben? (als komplizierten Ausdruck in Wurzeln/Polynomen)

**Definition 1.30.** Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung, nenne diese Erweiterung Radikalerweiterung, falls es  $a_1, \dots, a_n \in L$  und  $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$  gibt, so dass

$$1) \quad L = k(a_1, \dots, a_n)$$

$$2) \quad \forall i \ a_i^{m_i} \in k(a_1, \dots, a_{i-1}) \text{ also } a_i \text{ ist die } m_i\text{-te Wurzel eines Elementes aus } k(a_1, \dots, a_{i-1}).$$

Was bedeutet das?

- 1)  $a_1^{m_1} \in k$  Also  $k(a_1) = \langle 1, a_1, a_1^2, \dots, a_1^{m_1-1} \rangle_k$
- 2)  $a_2^{m_2} \in k(a_1)$  Also  $k(a_1, a_2) = \langle 1, a_2, a_2^2, \dots, a_2^{m_2-1} \rangle_{k(a_1)}$
- 3) ...

Bescheidene Frage, präzise formuliert: Gegeben ein Polynom

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i \in \mathbb{Q}[x] \text{ oder } \mathbb{R}[x]$$

gibt es dann eine Radikalerweiterung  $L/\mathbb{Q}(a_0, \dots, a_n)$  (beziehungsweise  $L/\mathbb{R}$ ) so dass  $f$  in  $L$  eine Nullstelle hat? Gerne  $L \subseteq \mathbb{C}$ .

## 2 Ringe

Warum Ringe betrachten? Gegeben eine Körpererweiterung  $L/k$  und  $a \in L$  und ich suche das Minimalpolynom  $f_a(x) \in k[x]$ .

Häufig findet man  $g \in k[x]$  mit  $g(a) = 0$  und muss dann entscheiden ob  $g$  das Minimalpolynom ist. Das ist gar nicht leicht!

Beobachtung: Polynomdivision zeigt:

$$g(x) = s(x) \cdot f_a(x) + \text{rest}(x)$$

wobei  $\deg \text{rest}(x) < \deg f_a(x)$ .  $a$  einsetzen ergibt

$$\underbrace{g(a)}_{=0} = s(a) \cdot \underbrace{f_a(a)}_{=0} + \text{rest}(a) \Rightarrow \text{rest}(a) = 0$$

$$\Rightarrow \text{rest}(x) \equiv 0$$

$$\Rightarrow g(x) = s(x) \cdot f_a(x).$$

Wir sehen: Das Minimalpolynom ist ein Teiler von  $g$  im Ring der Polynome.

Ziel: Wir müssen Teilbarkeit verstehen!

## 2.1 Teilbarkeit

**Definition 2.1.** Sei  $R$  ein Ring. Dann bezeichne mit  $R[x]$  den Ring der Polynome mit Variable  $x$  und Koeffizienten aus  $R$ .

Warnung: Polynome geben Funktionen  $R \rightarrow R$  aber Polynome sind nicht Funktionen.

**Definition 2.2.** Sei  $f \in R[x]$  ein Polynom. Dann definiere den Grad von  $f$  wie üblich.

**Lemma 2.3.** Sei  $R$  ein Integritätsring,  $f, g \in R[x]$ . Dann ist

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$$

*Beweis.* Sei  $n_f = \deg(f)$  und  $n_g = \deg(g)$  schreibe

$$\begin{aligned} f(x) &= a_f \cdot x^{n_f} + (\text{kleinere Terme}), a_f \neq 0 \\ g(x) &= a_g \cdot x^{n_g} + (\text{kleinere Terme}) \end{aligned}$$

Dann ist

$$(f \cdot g)(x) = a_f \cdot a_g \cdot x^{n_f+n_g} + (\text{kleinere Terme})$$

und weil  $R$  ein Integritätsring ist, ist  $a_f \cdot a_g \neq 0$ , also  $\deg(f \cdot g) = n_f + n_g$ .  $\square$

**Folgerung 2.4.** Sei  $R$  ein Integritätsring. Dann ist  $R[x]$  selbst wieder ein Integritätsring.

*Beweis.* Seien  $f, g \in R[x] \setminus \{0\}$ .

Wir müssen zeigen:  $f \cdot g \neq 0 \in R[x]$  (\*).

Falls  $\deg f = \deg g = 0$ , folgt (\*) weil  $R$  ein Integritätsring ist.

Ansonsten folgt (\*), weil  $\deg f \cdot g = \deg f + \deg g > 0$ .  $\square$

Ausblick: Dann ist  $(R[x])[y]$  auch wieder ein Integritätsring. Und natürlich ist  $(R[x])[y] \simeq R[x, y]$ .

**Folgerung 2.5.** Sei  $R$  ein Integritätsring. Dann ist  $(R[x])^* = R^*$ .

*Beweis.* Sei  $f(x) \in (R[x])^*$ , das heißt  $\exists g(x) \in R[x] : f \cdot g \equiv 1$ .

$$\Rightarrow \deg f + \deg g = \deg 1 = 0$$

$\Rightarrow \deg f = 0$ , also ist Polynom  $f$  konstant, ebenso für  $g$ .  $\square$

*Bemerkung.* Per Induktion folgt auch  $(R[x_1, \dots, x_n])^* = R^*$

**Definition 2.6.** Sei  $R$  ein Ring, seien  $s, r \in R$  Elemente. Ich sage:  $s$  ist Teiler von  $r$  (in Symbolen  $s \mid r$ ), wenn es  $a \in R$  gibt, so dass  $s \cdot a = r$ .

**Lemma 2.7.** Sei  $R$  ein Integritätsring, seien  $s, r$  Elemente. Dann ist äquivalent

- 1)  $\exists \varepsilon \in R^*, s = \varepsilon \cdot r$
- 2)  $s \mid r$  und  $r \mid s$

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, nenne ich  $s$  und  $r$  assoziiert (in Symbolen  $s \sim r$ ).

*Beweis.* 1)  $\Rightarrow$  2) ✓

2)  $\Rightarrow$  1) Aus  $s \mid r$  und  $r \mid s \Rightarrow a, b \in R : s \cdot a = r$  und  $r \cdot b = s$ .

$$\Rightarrow (r \cdot b) \cdot a \Rightarrow r(ba - 1) = 0$$

Da  $R$  Integritätsring ist:  $\Rightarrow ba = 1 \quad \Rightarrow b, a \in R^*$

(geht so nur für  $r \neq 0$ , der Fall muss extra behandelt werden) □

**Definition 2.8.** Sei  $R$  ein Integritätsring, seien  $s, r \in R$  Elemente. Dann nenne  $s$  einen echten Teiler von  $r$  (in Symbolen  $s \parallel r$ ) falls gilt:

- 1)  $s \mid r$
- 2)  $s \notin R^*$
- 3)  $r$  und  $s$  sind nicht assoziiert

**Definition 2.9.** Sei  $R$  ein Integritätsring. Ein Element  $r \in R$  heißt irreduzibel, falls  $r \notin R^*$  und falls  $r$  keine echten Teiler hat.

**Beispiel 2.10.** Die irreduziblen Elemente von  $R = \mathbb{Z}$  sind exakt  $\pm(\text{Primzahl})$ .

**Lemma 2.11.** Sei  $R$  ein Integritätsring. Seien  $r, s, t, s_1, s_2, u, v \in R$ . Dann gilt:

- 1)  $r \mid r$
- 2)  $r \mid s$  und  $s \mid t \Rightarrow r \mid t$
- 3)  $r \mid s_1$  und  $r \mid s_2 \Rightarrow r \mid (s_1 + s_2)$
- 4)  $r \mid s_1$  und  $r \mid (s_1 + s_2) \Rightarrow r \mid s_2$



5)  $r \mid s$  und  $u \mid v \Rightarrow ru \mid sv$

Nächstes Ziel: In  $\mathbb{Z}$  ist jede Zahl darstellbar als Produkt von Primzahlen und die Darstellung ist eindeutig bis auf Reihenfolge und Vorzeichen.

Wunschtraum: Sei  $R$  ein Integritätsring. Dann ist jedes Element eindeutig darstellbar als Produkt von irreduziblen Elementen.

**Beispiel 2.12.** Betrachte  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b \cdot \sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$

Dieser Ring ist ein Unterring von  $\mathbb{C}$  und deshalb Nullteilerfrei und

$$9 = 3 \cdot 3 = \underbrace{(2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})}_{2^2 - (\sqrt{-5})^2}$$

Die Elemente  $3, 2 \pm \sqrt{-5}$  sind irreduzibel und nicht zueinander assoziiert.

**Definition 2.13.** Sei  $R$  ein Integritätsring. Eine Teilerkette ist eine Folge  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von Elementen aus  $R$ , so dass  $\forall i \ r_{i+1} \mid r_i$ . Ich sage, im Ring  $R$  gilt der Teilerkettensatz für Elemente, falls in jeder Teilerkette die stärkere Bedingung  $r_{i+1} \parallel r_i$  nur endlich oft gilt.

**Beispiel 2.14.** Im Ring  $\mathbb{Z}$  gilt der Teilerkettensatz für Elemente, denn falls  $r_{i+1} \parallel r_i$  ist, dann gilt  $|r_{i+1}| < |r_i|$ .

Analog im Polynomring mit  $\deg$  statt  $|\cdot|$ .

**Satz 2.15.** Sei  $R$  ein Integritätsring in dem der Teilerkettensatz für Elemente gilt. Dann ist jedes  $r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$  als Produkt von endlich vielen irreduziblen Elementen darstellbar.

*Beweis.* (Noether Rekursion) Wir wollen zeigen, dass  $M = \{r \in R \mid r \notin R^*, r \neq 0 \text{ und } r \text{ nicht als Produkt von endlich vielen irreduziblen darstellbar}\}$  leer ist. Widerspruchsbeweis: angenommen  $M \neq \emptyset$ .

Beobachtungen:

- 1)  $\forall r \in M$   $r$  ist nicht irreduzibel (denn sonst wäre  $r$  eine Darstellung), also hat  $r$  echte Teiler
- 2)  $\exists r \in M$ , so dass alle echten Teiler von  $r$  nicht mehr in  $M$  liegen (denn sonst nehme echten Teiler aus  $M$ , wiederhole das Verfahren, erhalte unendliche Teilerkette wo ich in jedem Schritt echte Teiler habe  $\nmid$  zur Annahme)

Also gegeben  $r$  wie in Beobachtung 2), dann ist jeder echte Teiler als Produkt von endlich vielen irreduziblen darstellbar, also auch  $r$  selbst. (Schreibe  $r = r_1 \cdot r_2$  mit  $r_1, r_2$  echte Teiler. Dann  $r_1 = a_1 \cdots a_n, r_2 = b_1 \cdots b_m$  mit  $\forall i, j, a_i, b_j$  irreduzibel dann  $r = a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m$ )  $\nmid$ .  $\square$

**Definition 2.16.** Sei  $R$  ein Integritätsring, sei  $r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$ . Seien

$$r = a_1 \cdots a_n = b_1 \cdots b_m$$

zwei Darstellungen von  $r$  als Produkt von endlich vielen Irreduziblen.

Nenne die Darstellung äquivalent, falls gilt

- 1) gleich lang:  $n = m$
- 2)  $\exists$  Permutation  $\sigma \in S_n$  und Einheiten  $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \in R^*$  so dass  $\forall i : a_i = \varepsilon_i \cdot b_{\sigma(i)}$

*Bemerkung.* In Ringen, in denen der Teilerkettensatz gilt, sind Darstellungen nicht immer äquivalent! Zum Beispiel  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ .

Das Problem ist, dass die irreduziblen Elemente in  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  nicht unbedingt prim sind.

**Definition 2.17.** Sei  $R$  ein Integritätsring,  $r \in R, r \neq 0$  ein Element. Nenne  $r$  prim falls  $\forall a, b \in R$

$$r \mid (a \cdot b) \quad \implies \quad r \mid a \text{ oder } r \mid b$$

**Beispiel 2.18.** In  $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  ist  $(2 + \sqrt{-5})$  irreduzibel, aber nicht prim, denn  $(2 + \sqrt{-5}) \mid 3 \cdot 3$  aber  $(2 + \sqrt{-5}) \nmid 3$ .

**Lemma 2.19** (Elementare Rechenregeln für Prim-Elemente). Sei  $R$  ein Integritätsring,  $p, q \in R$

- 1)  $p$  prim  $\Rightarrow p$  irreduzibel
- 2)  $p$  prim,  $p \sim s \Rightarrow s$  prim
- 3)  $p, q$  prim und  $p \mid q \Rightarrow p \sim q$
- 4)  $p$  prim und  $p \mid a_1 \cdots a_n \Rightarrow \exists i \ p \mid a_i$

*Beweis.* zu 1)

Sei  $p$  prim. Angenommen  $p$  habe echten Teiler  $a \in R$ . Dann sei  $b \in R$  so dass  $p = a \cdot b$ , insbesondere  $p \mid ab$ . Also  $p \mid a$  oder  $p \mid b$ . oBdA gelte  $p \mid a$ .

Also  $\exists h \in R, p \cdot h = a$ . Einsetzen liefert

$$p = p \cdot h \cdot b \quad \Longleftrightarrow \quad p(1 - hb) = 0 \quad \xLeftrightarrow[R \text{ Integritätsring}] \quad 1 = h \cdot b$$

$\Rightarrow b$  ist eine Einheit, kein echter Teiler. □

**Satz 2.20.** Im Ring  $\mathbb{Z}$  ist jedes irreduzible Element auch prim.

*Beweis.* Angenommen es existiert in  $\mathbb{Z}$  ein irreduzibles Element  $p$ , das nicht prim ist. Dann ist  $-p$  irreduzibel und auch nicht prim. Wir können also oBdA annehmen  $p > 0$ . Wir können auch annehmen das  $p$  das kleinste positive, irreduzible Element ist, das nicht prim ist.

Also  $\exists a, b \in \mathbb{N} : p \mid a \cdot b$  aber  $p \nmid a$  und  $p \nmid b$ .

Division mit Rest liefert

$$\begin{aligned} a &= x \cdot a + a' && \text{wobei } a' < p \\ b &= y \cdot p + b' && \text{wobei } b' < p \end{aligned}$$

Sehe sofort  $p \nmid a'$  und  $p \nmid b'$ .

Sehe auch  $a \cdot b = xyp^2 + (xb' + a'y)p + a'b'$  also  $p \mid a'b'$ .

Wähle also  $a, b$  so, dass  $ab$  minimal ist, und dann ist  $a < p, b < p, ab < p^2$ .

Finde  $h \in \mathbb{N} : p \cdot h = a \cdot b$ .

Sei jetzt  $p'$  ein irreduzibler Teiler von  $h, p' > 0$ . Dann existiert  $h' > 0, h = p' \cdot h'$  und  $p' \leq h < p$ . Nach Wahl von  $p$  (kleinstes irreduzibles das nicht prim ist) ist  $p'$  prim und  $p \cdot p' \cdot h' = a \cdot b$ .

Also gilt  $p' \mid a \cdot b \xRightarrow{p' \text{ prim}} p' \mid a$  oder  $p' \mid b$ . oBdA gelte  $p' \mid a$ . Finde also  $a' < a$  so dass  $p' \cdot a' = a$ . Einsetzen liefert

$$p \cdot p' \cdot h' = p' \cdot a' \cdot b \xRightarrow{\mathbb{Z} \text{ Integritätsring}} p \cdot h' = a'b \quad \Longrightarrow \quad p \mid a'b$$

Da  $a'b < ab$  ist gilt nach Wahl von  $a \cdot b$  ( $a, b$  Gegenbeispiel zur Prim-Eigenschaft mit minimalem Produkt) also  $p \mid a'$  oder  $p \mid b$ . Da  $a' \mid a$  ist folgt  $p \mid a$  oder  $p \mid b$ .  $\nmid$  □

**Satz 2.21.** Sei  $R$  ein Integritätsring. Dann ist äquivalent:

- 1) Jedes  $r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$  ist als Produkt von endlich vielen Irreduziblen darstellbar und je zwei Darstellungen sind äquivalent.

2) In  $R$  gilt der Teilerkettensatz für Elemente und alle irreduziblen sind prim.

Falls diese Eigenschaften gelten, nenne  $R$  faktoriell oder UFD.

Beweis. 1)  $\Rightarrow$  2)

*Teilerkettensatz:* Sei  $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Teilerkette. Sei  $i$  so dass  $r_{i+1} \parallel r_i$  das heißt  $\exists h : h \notin R^*, h \neq 0 : r_{i+1} \cdot h = r_i$ .

Nach Annahme, kann  $r_i, r_{i+1}, h$  als Produkt von endlich vielen irreduziblen geschrieben werden

$$\begin{aligned} r_i &= a_1 \cdot a_n \\ r_{i+1} &= b_1 \cdots b_m \\ h &= c_1 \cdots c_k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\underbrace{b_1 \cdots b_m}_{\text{Darstellung von } r_{i+1}} \cdot c_1 \cdots c_k = \underbrace{a_1 \cdots a_n}_{\text{Darstellung von } r_i}$$

Da alle Darstellungen äquivalent sind, folgt  $n = m + k > m$ .

Also in der Teilerkette gibt es höchstens endlich viele echte Teiler, nämlich höchstens so viele, wie eine (jede) Darstellung von  $r_1$  lang ist.  $\Rightarrow$  Teilerkettensatz gilt

*Irreduzibel  $\Rightarrow$  Prim:* Sei  $r$  irreduzibel und seien  $a, b \in R \setminus \{0\}$  so dass  $r \mid ab$ . Also existiert  $h \in R \setminus \{0\}$ , so dass  $r \cdot h = a \cdot b$ . Wir wissen  $h, a, b$  haben Darstellung

$$a = a_1 \cdots a_n, \quad b = b_1 \cdots b_m, \quad h = h_1 \cdots h_k$$

Also

$$r \cdot h_1 \cdots h_k = a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_m$$

zwei Darstellungen von  $a \cdot b$ . Per Annahme sind diese Darstellungen äquivalent also  $\exists i : r \sim a_i$  oder  $\exists j : r \sim b_j$

$\Rightarrow r \mid a$  oder  $r \mid b$ . Also ist  $r$  prim.

2)  $\Rightarrow$  1)

Wir haben schon bewiesen: Teilerkettensatz  $\Rightarrow$  Darstellbarkeit, es fehlt noch die Äquivalenz  $\forall r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$  und für alle Darstellungen  $r = a_1 \cdots a_n \stackrel{(*)}{=} b_1 \cdots b_m$  mit  $n \neq m$  gilt, dass beide Darstellungen äquivalent sind.

*Beweis per Induktion über  $n$*

Induktionsanfang:  $n = 1 : a_1 = b_1 \cdots b_m$

Per Annahme ist  $a_1$  prim, also  $\exists j : a_1 \mid b_j$ .

Rechenregeln:  $a_1 \sim b_j$ , insbesondere sind alle  $b_k, k \neq j$  schon Einheiten.  $\Rightarrow m = 1 = j$  (da die Faktoren in der Darstellung irreduzibel und keine Einheiten sind).

Induktionsschritt: Sei die Aussage für alle Zahlen  $< n$  schon bewiesen.

Wieder gilt  $a_1 \mid b_1 \cdots b_m \Rightarrow \exists j : a_1 \sim b_j$ . oBdA sei  $j = 1$  also existiert eine Einheit  $\varepsilon \in R^*$  so dass  $a_1 = \varepsilon b_1$ .

$R$  ist also Integritätsring, kann also in  $(*)$  kürzen, erhalte

$$a_2 \cdots a_n = (\varepsilon b_2) \cdot b_3 \cdots b_m$$

Per Induktionsannahme sind diese Darstellungen äquivalent. □

**Folgerung 2.22.**  $\mathbb{Z}$  ist faktoriell.

**Folgerung 2.23.** Alle Körper sind faktoriell.

**Satz 2.24** (Gauß). Wenn  $R$  ein faktorieller Ring ist, dann auch  $R[x]$ .

Und damit auch  $(R[x])[y] = R[x, y]$  und auch  $R[x_1, \dots, x_n] \forall n \in \mathbb{N}$ .

*Beweis.* Wir müssen zeigen:

- 1) In  $R[x]$  gilt der Teilerkettensatz
- 2) Je zwei Darstellungen sind äquivalent

zu 1): Wenn  $r(x), s(x) \in R[x]$  und  $r(x) \parallel s(x)$ , dann  $\deg r(x) < \deg s(x)$  oder  $\exists a \in R \setminus R^*, a \neq 0 : a \cdot r(x) = s(x)$ .

$\Rightarrow$  alle Koeffizienten von  $s$  werden von  $a$  geteilt. In  $R$  gilt aber der Teilerkettensatz!

*Hausaufgabe:* Also gilt der Teilerkettensatz auch in  $R[x]$ .

zu 2): Widerspruchsbeweis! Angenommen es gibt  $r(x) \in R[x], r \neq 0, r \notin R[x]^* = R^*$  so dass  $r$  zwei Darstellungen hat, die nicht äquivalent sind

$$r(x) = p_1(x) \cdots p_\alpha(x) = q_1(x) \cdots q_\beta(x) \quad (*)$$

Ich kann oBdA einige Annahmen treffen

- $\deg r(x)$  ist minimal unter allen Polynomen die nicht äquivalente Darstellungen haben
- die irreduziblen Polynome  $p_1, \dots, p_\alpha, q_1, \dots, q_\beta$  sind nach Graden sortiert also  $\deg p_1 \geq \deg p_2 \geq \dots \geq \deg p_\alpha$  und  $\deg q_1 \geq \deg q_2 \geq \dots \geq \deg q_\beta$
- $\deg q_1 \geq \deg p_1$

Sei  $n := \deg p_1, m = \deg q_1$ . Seien  $a, b$  die Leitkoeffizienten von  $p_1$  beziehungsweise  $q_1$ . Das heißt:

$$\begin{aligned} p_1 &= a \cdot x^n + (\text{lot}) \\ p_1 &= b \cdot x^m + (\text{lot}) \end{aligned}$$

Beobachtungen:

- $\deg r(x) > 0$ , denn sonst wären  $r(x)$  und alle  $q_i(x), p_j(x)$  konstant, also in  $R$ . Per Annahme das  $R$  faktoriell ist müssten die Darstellungen dann äquivalent sein.

$$\Rightarrow n > 0 \text{ und } m > 0$$

- Angenommen es gäbe  $j$ :  $p_1 \sim q_j$ . Dann könnte ich in  $(*)$  auf beiden Seiten  $p_1$  kürzen und erhielte Polynom von Grade  $(\deg r(x)) - n < \deg r(x)$ , das zwei nicht äquivalente Darstellungen hat  $\nmid$  zur Minimalität von  $\deg r(x)$ .

Betrachte Hilfspolynom:

$$s(x) = \underbrace{\left[ b \cdot p_1(x) \cdot x^{m-n} - a \cdot q_1(x) \right]}_{\deg < \deg q_1(x)} \cdot q_2 \cdots q_\beta \quad (\odot)$$

Wir erhalten zwei offensichtliche Fälle

- 1)  $s(x) = 0$ : Dann ist

$$b \cdot p_1(x) \cdot x^{m-n} - a \cdot q_1(x)$$

- 2)  $s(x) \neq 0$ : Wir sehen  $\deg s(x) < \deg r(x)$ . Also sind je zwei Darstellungen von  $s(x)$  äquivalent! Schreibe  $s(x)$  um:

$$\begin{aligned} s(x) &= b \cdot p_1(x) x^{m-n} \cdot q_2 \cdots q_\beta - \underbrace{a q_1 \cdots q_\beta}_{r(x)} \\ &= b \cdot p_1 x^{m-n} \cdot q_2 \cdots q_\beta - a \cdot p_1 \cdots p_\alpha \\ &= p_1(x) \left[ b \cdot x^{m-n} \cdot q_2(x) \cdots q_\beta(x) - a \cdot p_2(x) \cdots p_\alpha(x) \right] \quad (\mathfrak{C}) \end{aligned}$$

Wir können die Ausdrücke  $(\star)$  und  $(\mathfrak{C})$  verfeinern zu Produkten von irreduziblen indem wir die Ausdrücke in  $[\dots]$  als Produkt von irreduziblen schreiben. Diese Darstellungen von  $s(x)$  müssen dann äquivalent sein.

*Konsequenz:* In der Darstellung von  $(\star)$  muss es einen Faktor geben, der zu  $p_1$  assoziiert ist. Da  $p_1 \approx 1_2 \dots p_1 \approx q_\beta$  muss  $p_1$  ein Primfaktor vom  $[\dots]$ -Ausdruck in  $(\star)$  sein.

$$\Rightarrow \quad p_1 \mid (bp_1 \cdot x^{m-n} - aq_1) \quad \Rightarrow p_1 \mid aq_1$$

Insgesamt ergibt sich in jedem der beiden Fälle:

$$\exists h \in R[x] : \quad p_1(x) \cdot h(x) = a \cdot q_1(x) \quad (\spadesuit)$$

*Beobachte:* Wenn  $a \in R^*$ , dann  $p_1 \mid q_1$  und  $p_1 \sim q_1 \nmid$ . Also ist  $a \in R \setminus R^*, a \neq 0$ .

*Zwischenbehauptung (Beweis später):* Sei  $p \in R$  irreduzibel. Dann ist das konstante Polynom  $p \in R[x]$  prim.

*Anwendung der Zwischenbehauptung:* Schreibe  $a$  als Produkt von Irreduziblen. Wenn jetzt  $p$  einer der irreduziblen Faktoren ist, dann  $p \mid p_1 \cdot h$ .

$\Rightarrow p \mid p_1$  oder  $p \mid h$ .  $p \mid p_1$  kann nicht sein, denn  $p_1$  ist irreduzibel, hat also überhaupt keine echten Teiler.

Also kann ich aus  $(\spadesuit)$   $p$  herausteilen und erhalte

$$p_1 \cdot \frac{h}{p} = \frac{a}{p} q_1$$

Das geht mit jedem Primfaktor von  $a$  erhalte also am Ende:

$$p_1 \cdot \frac{h}{a} = q_1 \quad \Rightarrow p_1 \mid q_1 \quad \Rightarrow p_1 \sim q_1 \quad \Rightarrow \nmid$$

*Zwischenbehauptung (jetzt der Beweis):* Sei  $p \in R$  irreduzibel. Dann ist das konstante Polynom  $p \in R[x]$  prim.

Sei  $p \in R$  irreduzibel. Ich zeige die Kontraposition: wenn  $a(x), b(x) \in R[x]$  Polynome sind mit  $p \nmid a(x)$  und  $p \nmid b(x) \Rightarrow p \nmid (a \cdot b)(x)$

Seien also  $a(x), b(x)$  gegeben. Schreibe

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \\ b(x) &= b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \end{aligned}$$

Erinnere:  $p \mid a(x) \Leftrightarrow \forall i : p \mid a_i$

Kann also minimale Indizes  $i$  und  $j$  wählen, so dass  $p \nmid a_i$  und  $p \nmid b_j$ . Betrachte Produktpolynom  $(a \cdot b)(x)$  und rechne den Koeffizienten von  $x^{i+j}$  im Produktpolynom aus. Dieser Koeffizient ist

$$\gamma := \sum_{\substack{\alpha+\beta=i+j \\ \alpha, \beta \in \mathbb{N}}} a_\alpha \cdot b_\beta$$

In dieser Summe sind alle Summanden durch  $p$  teilbar, weil stets  $\alpha < i$  oder  $\beta < j$  mit der Ausnahme des Summanden  $\alpha = i, \beta = j, (= a_i \cdot b_j)$ .

Weil  $R$  faktoriell ist per Annahme und  $p \in R$  deshalb prim ist  $\Rightarrow p \nmid a_i \cdot b_j$

$$\Rightarrow p \nmid \gamma \quad \Rightarrow p \nmid (a \cdot b)(x)$$

□

Was tun wir mit faktoriellen Ringen?

Sei  $R$  ein faktorieller Ring, betrachte die Äquivalenzrelation  $a \sim b \Leftrightarrow a$  assoziiert zu  $b$

Wähle Repräsentantensystem  $P \subset R$  für die irreduziblen Elemente (= zu jedem irreduziblen  $a \in R$  gibt es genau ein  $b \in P$  mit  $a \sim b$ )

Wenn dann irgendein  $a \in R$  gegeben ist, dann kann ich schreiben

$$a = \varepsilon \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_p}$$

wobei  $\varepsilon \in R^*, \alpha_p \in \mathbb{N}$  und alle bis auf endlich viele  $\alpha_p = 0$ .

Teilbarkeit wird dann ganz einfach. Seien  $a, b \in R$

$$a = \varepsilon_a \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_{a,p}}, \quad b = \varepsilon_b \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_{b,p}}$$

und

$$\begin{aligned} a \mid b &\Leftrightarrow \forall p \in P : \alpha_{a,p} \leq \alpha_{b,p} \\ a \parallel b &\Leftrightarrow (\forall p \in P : \alpha_{a,p} \leq \alpha_{b,p}) \quad \& \quad (\exists p \in P : \alpha_{a,p} < \alpha_{b,p}) \\ a \sim b &\Leftrightarrow \forall p \in P : \alpha_{a,p} = \alpha_{b,p} \end{aligned}$$

Weiter mit Grundschofstoff:

Sei  $R$  ein Integritätsring, seien  $a, b \in R \setminus R^*, a \cdot b \neq 0$



- 1) Ein Element  $c \in R$  heißt größter Gemeinsamer Teiler wenn gilt  $c \mid a$  und  $c \mid b$  und wenn für jedes andere  $c'$  mit  $c' \mid a$  und  $c' \mid b$  gilt  $c' \mid c$ .
- 2) Ein Element  $c \in R$  heißt kleinstes gemeinsames Vielfaches, wenn  $a \mid c$  und  $b \mid c$  ist und für alle  $c' \in R$  mit  $a \mid c'$  und  $b \mid c'$  gilt  $c \mid c'$ .

**Satz 2.25.** Sei  $R$  faktoriell. Seien  $a, b \in R$  dann existieren ggT und kgV.

*Beweis.* Wähle Repräsentantensystem  $P \subset R$ . Schreibe

$$a = \varepsilon_a \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_{a,p}}, \quad b = \varepsilon_b \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_{b,p}}$$

Setze

$$\text{ggT}(a, b) := \prod_{p \in P} p^{\min(\alpha_{a,p}, \alpha_{b,p})}$$

und

$$\text{kgV}(a, b) := \prod_{p \in P} p^{\max(\alpha_{a,p}, \alpha_{b,p})}$$

Blick nach oben zeigt, dass dies exakt die Bedingungen erfüllt. □

**Satz 2.26.** Seien  $f, g \in k[x]$  Polynome. Betrachte Divisionsreste

$$f = q_1 \cdot g + r_1 \tag{1}$$

$$g = q_2 \cdot r_1 + r_2 \tag{2}$$

Definiere dann induktiv Polynome  $r_n$  als Divisionsrest

$$r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n \tag{n}$$

*Beobachtung:* Die Grade der Polynome  $r_1, r_2, \dots$  werden immer kleiner. Der Prozess stoppt also nach endlich vielen Schritten das heißt irgendwann geht die Division auf. Es existiert also  $n \in \mathbb{N}$  so dass

$$r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n + 0 \tag{n+1}$$

Dann ist  $r_n = \text{ggT}(f, g)$ .

*Beweis.* 1) Wenn  $t$  ein gemeinsamer Teiler von  $f, g$  ist

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{(1)} t \mid r_1 & \dots & \xrightarrow{(n)} t \mid r_n \\ \xrightarrow{(2)} t \mid r_2 & & \end{array}$$

2) Andere Richtung analog:

$$\begin{aligned}
 (n+1) &\implies r_n \mid r_{n-1} \\
 (n) &\implies r_n \mid r_{n-2} \\
 &\vdots \\
 (2) &\implies r_n \mid g \\
 (1) &\implies r_n \mid f
 \end{aligned}$$

Da  $k[t]$  faktoriell ist genügen 1) + 2) um  $r_n = \text{ggT}$  zu zeigen.

□

## 2.2 Der Quotientenkörper eines Integritätsrings

Ziel: Gegeben ein Ring  $R$ , suche einen möglichst kleinen Körper  $k$  s.d.  $R \subset k$  (besser: so dass es einen injektiven Ringmorphismus  $R \hookrightarrow k$  gibt). Wir denken an  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ .

Beobachtung: So etwas kann es nicht geben, wenn  $R$  Nullteiler hat! Betrachte also nur Integritätsringe.

**Definition 2.27.** Sei  $R$  ein Integritätsring. Ein Quotientenkörper von  $R$  ist ein Körper  $k$  zusammen mit einem injektiven Ringmorphismus  $\varphi : R \rightarrow k$  so dass folgende (universelle) Eigenschaft gilt: Wann immer  $\Phi : R \rightarrow L$  ein injektiver Ringmorphismus in einen Körper ist, dann gibt es genau einen Körpermorphismus  $\eta : k \rightarrow L$  so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\varphi} & k \\
 \mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \exists! \eta \\
 R & \xrightarrow{\Phi} & L
 \end{array}$$

*Bemerkung.* Körpermorphismen  $k \xrightarrow{\eta} L$  sind immer injektiv! Denn wäre  $a \in k \setminus \{0\}, a \in \ker(\eta)$ . Dann

$$1_L = \eta(1_k) = \eta(a \cdot a^{-1}) = \underbrace{\eta(a)}_{=0_L} \cdot ?$$

Widerspruch!

**Satz 2.28.** Sei  $R$  ein Integritätsring. Dann existiert ein Quotientenkörper  $(k, \varphi : R \rightarrow k)$ . Dieser ist eindeutig bis auf kanonische Isomorphie. Das bedeutet: Wenn  $(k', \varphi' : R \rightarrow k')$  ein weiterer Quotientenkörper ist, dann existiert genau ein Körperisomorphismus  $\eta : k \rightarrow k'$  so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{\varphi} & k \\
\mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \exists! \eta \\
R & \xrightarrow{\varphi'} & k
\end{array}$$

*Beweis.* Eindeutigkeit: Seien Quotientenkörper  $(k, \varphi : R \rightarrow k)$  sowie  $(k', \varphi' : R \rightarrow k')$  gegeben. Nach der universellen Eigenschaft existiert dann genau ein Körpermorphismus  $\eta : k \rightarrow k'$  so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{\varphi} & k \\
\mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \eta \\
R & \xrightarrow{\varphi'} & k
\end{array}$$

Wir wissen auch: Weil  $k'$  Quotientenkörper ist, existiert genau ein Körpermorphismus  $\eta' : k' \rightarrow k$  so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{\varphi} & k \\
\mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \eta \\
R & \xrightarrow{\varphi'} & k' \\
\mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \eta' \\
R & \xrightarrow{\varphi} & k
\end{array}$$

Die universelle Eigenschaft angewandt auf

$$\begin{array}{ccc}
R & \xrightarrow{\varphi} & k \\
\mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \mathbb{1}_k \eta' \circ \eta \\
R & & \\
\mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \\
R & \xrightarrow{\varphi} & k
\end{array}$$

zeigt:  $\eta' \circ \eta = \mathbb{1}_k$ .

Genauso folgt  $\eta \circ \eta' = \mathbb{1}_{k'}$ . Also ist der Körpermorphismus  $\eta'$  die Umkehrung von  $\eta$ .

Existenz: Ich konstruiere den Quotientenkörper wie folgt:

1) Betrachte die Menge

$$B = \{(a, b) \in R \times R \mid b \neq 0\}$$

und sage  $(a, b)$  ist äquivalent zu  $(a', b')$  wenn gilt  $ab' = a'b$ . Das ist eine Äquivalenzrelation. Symmetrie und Reflexivität sind klar per Definition. Wir müssen also noch die Transitivität zeigen: Seien also Tupel gegeben so dass

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ll} (a, b) \sim (a', b') & (a', b') \sim (a'', b'') \\ ab' = a'b & a'b'' = a''b' \end{array}$$

Und damit dann

$$\Rightarrow ab' \cdot a'b'' = a'b \cdot a''b'$$

Im Integritätsring falls  $a' \neq 0$

$$\Rightarrow ab'' = a''b \Leftrightarrow (a, b) \sim (a'', b'')$$

Falls  $a' = 0$  ist der Beweis sowieso einfach.

Definiere als Menge

$$k := B / \sim$$

*Notation:* Die Äquivalenzklasse von  $(a, b)$  wird mit  $\frac{a}{b}$  bezeichnet.

Betrachte die Abbildung

$$\varphi : R \rightarrow k, a \mapsto \frac{a}{1}$$

Diese Abbildung ist injektiv, denn

$$\varphi(a) = \varphi(a') \Leftrightarrow \frac{a}{1} = \frac{a'}{1} \stackrel{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} a \cdot 1 = a' \cdot 1 \Leftrightarrow a = a'$$

2) Definiere auf  $k$  die Struktur eines Körpers mit Verknüpfungen

$$\begin{aligned} \cdot : k \times k &\rightarrow k, & \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{ac}{bd} \\ + : k \times k &\rightarrow k, & \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) &\mapsto \frac{ad + cb}{bd} \end{aligned}$$

Muss noch nachrechnen: Wohldefiniertheit

Das bedeutet: Gegeben  $\frac{a}{b}$  und  $\frac{c}{d}$  sowie  $\frac{a'}{b'}$  und  $\frac{c'}{d'}$  mit  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$  sowie  $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ , dann gilt  $\frac{ad+cb}{bd} = \frac{a'd'+c'b'}{b'd'}$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (ad+cb) \cdot b'd' = (a'd' + c'b') \cdot bd \\ &\Leftrightarrow adb'd' + cbb'd' = a'd'bd + c'b'bd \end{aligned}$$

Wir wissen  $ab' = a'b$  und  $cd' = c'd$

$$\Leftrightarrow 0 = 0$$

Die Addition ist wohldefiniert.

*Hausaufgabe:* Dasselbe für Multiplikation

*Lästige Rechnerei:* Diese Verknüpfungen definieren eine Körperstruktur auf  $k$  so dass die Abbildung  $\varphi : R \rightarrow k$  ein Ringmorphismus ist. Es gilt

$$0_k = \frac{0}{1} \quad 1_k = \frac{1}{1} \quad \text{falls } a \neq 0 \text{ dann } \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

### 3) Beweis der universellen Eigenschaft

Sei Körper  $L$  gegeben und ein injektiver Ringmorphismus  $\Phi : R \rightarrow L$ , dann müssen wir zeigen  $\exists! \eta : k \rightarrow L$  so dass ...

Eindeutigkeit: Angenommen wir hätten  $\eta$  so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & k \\ \mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \exists! \eta \\ R & \xrightarrow{\Phi} & L \end{array}$$

dann gilt für alle  $a \in R$

$$\eta(\varphi(a)) = \Phi(\mathbb{1}_R(a)) \Leftrightarrow \eta\left(\frac{a}{1}\right) = \Phi(a)$$

Falls  $a \neq 0$  ist gilt

$$\eta\left(\frac{1}{a}\right) = \eta\left(\left(\frac{a}{1}\right)^{-1}\right) \stackrel{\text{Körpermorphismus}}{=} \eta\left(\frac{a}{1}\right)^{-1}$$

also gilt für alle  $\frac{a}{b} \in k$

$$\eta\left(\frac{a}{b}\right) = \eta\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b}\right) = \eta\left(\frac{a}{1}\right) \cdot \eta\left(\frac{1}{b}\right) = \Phi(a) \cdot (\Phi(b))^{-1}$$

also ist  $\eta$  eindeutig.

Existenz: Definiere

$$\eta : k \rightarrow L, \quad \frac{a}{b} \mapsto \Phi(a) \cdot \Phi(b)^{-1}$$

Wieder ist Wohldefiniertheit zu prüfen: Seien  $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ . Wir müssen zeigen:

$$\begin{aligned} & \Phi(a)\Phi(b)^{-1} = \Phi(a')\Phi(b')^{-1} \\ \Leftrightarrow & \Phi(a) \cdot \Phi(b') = \Phi(a')\Phi(b) \\ \Leftrightarrow & \Phi(ab') = \Phi(a'b) \\ \Leftrightarrow & \text{Wahr, wegen Annahme} \end{aligned}$$

Nachrechnen: das ist ein Körperisomorphismus.

□

### Beispiel 2.29.

- $R = \mathbb{Z}$  dann ist  $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$
- $R$  ein Körper, dann ist  $Q(R) = R$
- $R = \mathbb{Z}[2 + \sqrt{-5}]$ , dann ist  $Q(R) = \mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5}) \subset \mathbb{C}$

Grund: Wir haben eine Inklusion  $R \subset \mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5})$  deshalb gibt es Körpermorphismus  $Q(R) \rightarrow \mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5})$ .

Dieser ist surjektiv, denn  $Q(R)$  enthält das Element  $a = 2 + \sqrt{-5}$ . Wir wissen aber  $\mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5})$  ist der kleinste Körper der dieses Element enthält.

- Sei  $R$  faktoriell. Wähle Repräsentantensystem  $P \subset R$ . Dann kann ich alle Elemente von  $Q(R)$  auf eindeutige Weise schreiben als

$$\varepsilon \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_p}$$

wobei  $\varepsilon \in R^*$ ,  $\alpha_p \in \mathbb{Z}$  und fast alle  $\alpha_p = 0$ .

Warum das alles?

Wenn  $R$  faktoriell ist, kann ich manchmal entscheiden, ob Polynome in  $R[x]$  irreduzibel sind.

*Beispiel:*  $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$

Behauptung:  $f$  ist irreduzibel in  $\mathbb{Z}[x]$

Annehmen es gäbe einen echten Teiler, dann gäbe es einen linearen Teiler das heißt

$$\exists a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0 : f(x) = (ax + b)g(x)$$

wobei  $g(x)$  quadratisch in  $\mathbb{Z}[x]$ .

Sehe sofort:  $a \in \{\pm 1\}, b \in \{\pm 1, \pm 2\}$

Nachrechnen: keine dieser Möglichkeiten ist ein Teiler

Der folgende Satz zeigt, dass  $f$  auch in  $\mathbb{Q}[x]$  irreduzibel ist.

**Satz 2.30** (Satz von Gauß). Sei  $R$  ein faktorieller Ring. Falls  $f(x) \in R[x]$  irreduzibel als Element von  $R[x]$ , dann ist  $f$  auch irreduzibel als Element von  $Q(R)[x]$ .

Vorbemerkung: Sei  $f \in Q(R)[x]$  irgendein Polynom. Dann existiert  $a \in Q(R)$  so dass  $a \cdot f(x) \in R[x]$  und  $\text{ggT}(\text{Koeffizienten von } a \cdot f(x)) = 1$  (Koeffizienten sind Teilerfremd).

Beweis dazu: Auf Hauptnenner bringen und durch größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten teilen.

*Beweis.* Angenommen wir haben  $f(x) \in R[x]$  welches als Polynom in  $Q(R)[x]$  reduzibel ist. Das heißt es existieren Polynome  $q(x), p(x) \in Q(R)[x]$  mit  $q, p$  nicht konstant, so dass  $f(x) = q(x) \cdot p(x)$ .

*Ziel:* Schreibe  $f$  als Produkt  $f = q'(x) \cdot p'(x)$  wobei  $q', p' \in R[x]$  echte Teiler sind.

*Beobachtung:* Wenn  $\gamma \in R$  jeden Koeffizienten von  $f$  teilt und  $\gamma \notin R^*, \gamma \neq 0$  dann ist  $\gamma$  ein echter Teiler von  $f$  und wir sind fertig. Wir nehmen also ab sofort an, dass die Koeffizienten von  $f$  teilerfremd sind.

Wende Vorbemerkung auf Polynome  $p(x), q(x)$  an, erhalte  $a, b \in Q(R)$  so dass  $a \cdot p(x) \in R[x]$  und  $b \cdot q(x) \in R[x]$  und Koeffizienten dieser Polynome jeweils Teilerfremd in  $R$ .

Durch Multiplikation erhalte Gleichung

$$a \cdot b \cdot f(x) = a \cdot p(x) \cdot b \cdot q(x) \in R[x] \quad (*)$$

Beachte die linke Seite ist in  $R[x]$ , weil beide Faktoren der rechten Seite in  $R[x]$  sind.

*Behauptung:* Es ist  $a \cdot b \in R$ .

*Beweis:* Angenommen  $a \cdot b \notin R$  das heißt es existiert Primelement  $p \in R$ , welches in der Darstellung von  $a \cdot b$  mit negativem Exponenten auftritt. Da aber  $a \cdot b \cdot f(x) \in R[x]$  muss die Darstellung jedes Koeffizienten das Element  $p$  mit positivem Exponenten enthalten. Also  $p \mid$  Koeffizienten  $\nmid$  zu  $\text{ggT}(\text{Koeffizienten}) = 1$

*Behauptung:* Es gilt sogar  $a \cdot b \in R^*$

*Beweis:* Angenommen  $a \cdot b \notin R^*$ . Dann hätte ich einen echten irreduziblen Teiler  $\gamma \in R$  irreduzibel mit  $\gamma \mid a \cdot b$ .

$$\Rightarrow \gamma \mid a \cdot b \cdot f(x) \quad \Rightarrow \gamma \mid [a \cdot p(x)][b \cdot q(x)]$$

*Erinnerung:*  $\gamma \in R$  irreduzibel  $\Rightarrow \gamma$  prim in  $R[x]$ .

Also gilt

$$\gamma \mid a \cdot p(x) \quad \text{oder} \quad \gamma \mid b \cdot q(x)$$

oBdA sei  $\gamma \mid a \cdot p(x) \nmid$  zur Wahl von  $a$ .

Damit kann ich (\*) umschreiben zu

$$f(x) = \underbrace{[(a \cdot b)^{-1} \cdot a \cdot p(x)]}_{\in R[x]} \cdot \underbrace{[b \cdot q(x)]}_{\in R[x]}$$

□

Zusammenfassung: Wir sind jetzt inder Lage, für ganzzahlige Polynome zu entscheiden, ob sie in  $\mathbb{Q}[x]$  irreduzibel sind. (z.B.  $x^3 - 2$  ist irreduzibel in  $\mathbb{Q}[x]$ , Folgerung  $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$  denn wir wissen jetzt, dass  $x^3 - 2$  das Minimalpolynom von  $\sqrt[3]{2}$  ist)

Erinnerung: Das geht so:

Lagrangesche Interpolationsformel (= Polynom von Grad  $\leq n$  ist durch seine Werte an  $n + 1$  Stellen festgelegt) Sei  $k$  Körper,  $f(x) \in k[x]$  Polynome von Grad  $\leq n$ , seien  $a_1, \dots, a_{n+1} \in k$  unterschiedliche Körperelemente. Dann ist  $f$  durch die Werte  $f(a_i)$  eindeutig festgelegt, nämlich

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f(a_j) \prod_{k \neq j} \frac{x - a_k}{a_j - a_k} =: h(x) \in k[x]$$



Dann gilt für alle  $i$

$$h(a_i) = \sum_{j=1}^{n+1} f(a_j) \prod_{k \neq j} \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = f(a_i) \prod_{k \neq i} \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = f(a_i)$$

$\Rightarrow h - f$  ist Polynom von Grad  $\leq n$  mit Nullstellen  $a_1, \dots, a_{n+1}$

$\Rightarrow h - f = 0$

Damit haben wir folgendes Verfahren, um Irreduzibilität in  $\mathbb{Z}[x]$  und also auch in  $\mathbb{Q}[x]$  zu testen.

Gegeben  $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$  von Grad  $\leq n$  so dass  $\text{ggT}(\text{Koeffizienten}) = 1$ .

Wähle  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{Z}$  so dass  $f(a_i) \neq 0$  und betrachte  $f(a_1), \dots, f(a_n) \in \mathbb{Z}$ .

Wir wissen, wenn  $g(x)$  ein Teiler von  $f(x)$  in  $\mathbb{Z}[x]$  ist, dann gilt für alle  $i$   $g(a_i) \mid f(a_i)$

Für  $g(a_i)$  gibt es also nur endlich viele Möglichkeiten.

Nur endlich viele Polynome kommen als Teiler in Frage. Wir müssen also durch Polynomdivision testen, ob die Kandidatenpolynome tatsächlich Teiler sind.

**Satz 2.31** (Eisenstein-Kriterium). Sei  $R$  ein faktorieller Ring, sei

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$$

mit  $n > 0$  und  $\text{ggT}(a_0, \dots, a_n) = 1$ . Falls es ein irreduzibles gibt  $p \in R$  so dass  $p \mid a_0, p \mid a_1, \dots, p \mid a_{n-1}$  und  $p^2 \nmid a_0$ . Dann ist  $f$  irreduzibel in  $R[x]$  und also auch in  $\mathbb{Q}(R)[x]$ .

*Beweis.* Sei  $f$  wie im Satz gegeben. Angenommen ich kann  $f$  schreiben als Produkt

$$f(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

wobei  $\alpha, \beta \in R[x], \deg \alpha > 0, \deg \beta > 0$ .

Schreibe

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \alpha_0 + \alpha_1x + \dots \\ \beta(x) &= \beta_0 + \beta_1x + \dots \end{aligned}$$

Beobachte:  $a_0 = \alpha_0 \cdot \beta_0$

Per Annahme gilt:  $p \mid a_0 \xRightarrow{R \text{ faktoriell}} p \mid \alpha_0$  oder  $p \mid \beta_0$ .

Per Annahme  $p^2 \nmid a_0$  kann  $p$  nicht beide Elemente teilen. Wir nehmen also  $p \mid \alpha_0$  und  $p \nmid \beta_0$  an.

Weil  $\text{ggT}(a_0, \dots, a_n) = 1$  wissen wir  $p$  teilt nicht alle  $\alpha_i$ . Sei also  $i$  minimal so dass  $p \nmid \alpha_i$ . Wir wissen schon mal  $i < n$ , insbesondere  $p \mid a_i$ .

Es ist aber

$$a_i = \underbrace{\alpha_0 \beta_i}_{\text{Vielfaches von } p} + \underbrace{\alpha_i \beta_{i-1}}_{\text{Vielfaches von } p} + \underbrace{\alpha_2 \beta_{i-2}}_{\text{Vielfaches von } p} + \dots + \underbrace{\alpha_i \beta_0}_{\text{kein Vielfaches von } p}$$

$\nmid$  zu Teilbarkeitsregeln. □

*Bemerkung.* Polynome welche die Annahmen des Satzes erfüllen heißen Eisensteinpolynome.

Ein Beispiel dafür ist  $R = \mathbb{Z}, f(x) = x^3 - 2$ .

## 2.3 Hilfe bei der Anwendung des Eisenstein-Kriteriums

Sei  $R$  faktoriell und  $\varphi : R[x] \rightarrow S$  ein Ringmorphismus in einen Integritätsring  $S$ . Angenommen  $\varphi$  hat die Eigenschaft dass  $\forall f \in R[x] : \deg f > 0 \Rightarrow \varphi(f) \notin S^*$ .

Wenn jetzt ein  $f \in R[x]$  gegeben ist mit  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  mit  $n > 0$  und  $\text{ggT}(a_0, \dots, a_n) = 1$  und  $\varphi(f)$  irreduzibel ist, dann ist  $f$  irreduzibel.

*Beweis.* Angenommen  $f(x)$  sei reduzibel in  $R[x] \Rightarrow \exists \alpha(x), \beta(x) \in R[x]$  mit  $f(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x)$  und  $\deg \alpha > 0, \deg \beta > 0$ . Dann gilt

$$\varphi(f) = \varphi(\alpha \cdot \beta) = \underbrace{\varphi(\alpha)}_{\notin S^*} \cdot \underbrace{\varphi(\beta)}_{\notin S^*}$$

Also hat  $\varphi(f)$  echte Teiler in  $S$  und ist damit nicht irreduzibel. □

Wie finde ich  $\varphi$ ?: Keine Ahnung wir müssen Rumprobieren

Beispielhafte Konstruktionen

- 1) Gegeben ein Ringmorphismus  $\phi : R \rightarrow S$  (z.B.  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  oder  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ,  $a \mapsto a^p$ )

Betrachte dann Morphismus von Polynomringen

$$\varphi : R[x] \rightarrow S[x], \sum a_i x^i \mapsto \sum \phi(a_i) x^i$$

- 2) Situation wie in 1), zusätzlich sei  $s \in S$  gegeben. Betrachte

$$\varphi^* : R[x] \rightarrow S, \sum a_i x^i \mapsto \sum \phi(a_i) s^i$$

- 3) Situation wie in 2). Betrachte Morphismus

$$\varphi^{\mathbb{C}} : R[x] \rightarrow s[x], \sum a_i x^i \mapsto \sum \phi(a_i) (x - s)^i$$

Beispielhafte Nutzanwendung: Betrachte  $p \in \mathbb{N}$  prim und

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$$

Das ist kein Eisenstein Polynom.

Beobachte aber auch  $(x - 1)f(x) = x^p - 1$ .

Das legt nahe folgenden Morphismus zu probieren

$$\varphi : \mathbb{Z}[x] \rightarrow \mathbb{Z}[x], g(x) \mapsto g(x + 1)$$

was ist  $\varphi(f)$ ?

$$\varphi(x^p - 1) = \varphi((x - 1)f) = \underbrace{\varphi(x - 1)}_{=x} \cdot \varphi(f)$$

und außerdem

$$\varphi(x^p - 1) = (x + 1)^p - 1 = \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} x^i - 1$$

$$\Rightarrow \varphi(f) = \sum_{i=1}^p \binom{p}{i} \cdot x^{i-1}$$

das ist ein Eisenstein Polynom.

Also ist  $f(x)$  irreduzibel in  $\mathbb{Z}[x]$ , also auch in  $\mathbb{Q}[x]$ .

Ernte einfahren: Wir können mit unseren Methoden einige Fragen beantworten.

Erinnerung: Gegeben  $M \subset \mathbb{C}$ , eine Menge die  $0, 1$  enthält.  $\text{Konst}(M) =$  Menge der aus  $M$  konstruierbaren Punkte.

1)  $\text{Kons}(M)$  ist ein Unterkörper von  $\mathbb{C}$

2) Wenn  $z \in \text{Kons}(M) \subset \mathbb{C}$ , dann gibt es  $n \in \mathbb{N}$  so dass  $[k(z) : k] = 2^n$  wobei  $k = \mathbb{Q}(M \cup \overline{M})$  und  $M = \{\overline{m} \mid m \in M\}$ .

**Beispiel 2.32.**  $z = \sqrt[3]{2}$ . Ist nicht aus  $M = \{0, 1\}$  konstruierbar, denn in diesem Fall wäre  $\overline{M} = M$  und  $k = \mathbb{Q}(0, 1) = \mathbb{Q}$  aber  $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} : \mathbb{Q})] = 3$ , denn wir wissen:  $x^3 - 2$  ist das Minimalpolynom.

Dieselbe Argumentation liefert mehr!

**Satz 2.33.** Sei  $\varphi \in (0, 2\pi)$  so dass  $e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$  transzendent ist. Dann ist der Winkel

TODO winkel durch  $e^{i\varphi}$

nicht durch Zirkel und Lineal 3-teilbar.

*Bemerkung.* Die Abbildung

$$(0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}, \varphi \mapsto e^{i\varphi}$$

ist injektiv hat also überabzählbar viele Bildpunkte, es gibt aber nur abzählbar viele algebraische Zahlen. Also ist  $e^{i\varphi}$  transzendent für fast alle  $\varphi$ .

Für dieses Problem betrachte bei gegebenem  $\varphi$  die Menge  $M = \{0, 1, e^{i\varphi}\}$ . Ist  $e^{i\frac{\varphi}{3}} \in \text{Kons}(M)$ ? Also betrachte ich

$$k = \mathbb{Q}(M \cup \overline{M}) = \mathbb{Q}(z) = \mathbb{Q}(e^{i\varphi})$$

Muss diskutieren:  $[k(e^{i\frac{\varphi}{3}}) : k]$  das ist eine 2-er Potenz falls  $e^{i\frac{\varphi}{3}}$  konstruierbar ist.

Wir sehen  $e^{i\frac{\varphi}{3}}$  ist Nullstelle des Polynoms  $f(x) = x^3 - e^{i\varphi} \in k[x]$ . Falls  $f$  das Minimalpolynom ist, ist  $[k(e^{i\frac{\varphi}{3}}) : k] = 3$ , also  $e^{i\frac{\varphi}{3}} \notin \text{Kons}(M)$ .

Um zu sehen, dass  $f \in k[x]$  tatsächlich irreduzibel ist, müssen wir  $k$  verstehen!

Behauptung:  $k$  ist isomorph zum Körper der rationalen Funktionen  $\mathbb{Q}(y)$

*Beweis.* Ich betrachte einen Ringmorphismus

$$\mathbb{Q}[y] \rightarrow k = \mathbb{Q}(e^{i\varphi}), f(y) \mapsto f(e^{i\varphi})$$

Die Funktion ist injektiv weil  $e^{i\varphi}$  transzendent ist.

Außerdem gilt

$$\mathbb{Q}[y] \rightarrow \mathcal{Q}(\mathbb{Q}[y]) = \mathbb{Q}(y)$$

Die universelle Eigenschaft liefert einen Isomorphismus  $\eta : \mathbb{Q}(y) \rightarrow k$ .

$\eta$  ist surjektiv weil  $e^{i\varphi} = \eta(y)$  im Bild liegt und  $k$  der kleinste Körper ist, der  $e^{i\varphi}$  enthält.  $\square$

Wir wollen entscheiden ob  $f(x) = x^3 - e^{i\varphi} \in k[x]$  irreduzibel ist. Wir können also auch untersuchen ob  $x^3 - y$  in  $(\mathbb{Q}(y))[x]$  irreduzibel ist.

$\Leftrightarrow$  Ist  $x^3 - y \in (\mathbb{Q}[y])[x]$  irreduzibel?

$-y$  ist prim = irreduzibel in  $\mathbb{Q}[y]$  und damit ist  $x^3 - y$  ein Eisenstein-Polynom.

**Beispiel 2.34.** Falls  $p$  prim ist und das regelmäßige  $p$ -Eck konstruierbar ist, ist  $p - 1$  von der Form  $2^n$ .

*Beweis.* Betrachte  $M = \overline{M} = \{0, 1\}$  und  $k = \mathbb{Q}(M \cup \overline{M}) = \mathbb{Q}$ .

Das regelmäßige  $p$ -Eck ist konstruierbar  $\Leftrightarrow e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \text{Kons}(M)$ .

Falls das so ist, ist

$$[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) : \mathbb{Q}] = 2^n$$

für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

Wir wissen  $e^{\frac{2\pi i}{p}}$  ist Nullstelle von  $x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ .

Aber  $x^p - 1 = (x - 1)(x^{p-1} + \dots + 1)$ . Das Minimalpolynom ist also  $x^{p-1} + \dots + 1$ . Und damit  $[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) : \mathbb{Q}] = p - 1$ .  $\square$

## 2.4 Ringe und Ideale

**Definition 2.35.** Sei  $R$  ein Ring (kommutativ, mit 1). Sei  $I \subset R$  eine nicht-leere Teilmenge. Nenne  $I$  ein Ideal, falls gilt:

$$1) \quad \forall a, b \in I : a + b \in I$$

$$2) \quad \forall a \in I, \forall r \in R : ra \in I$$

*Bemerkung.* Für nicht-kommutative Ringe definiert man Linksideale (wie oben) und Rechtsideale (mit  $ar$  statt  $ra$  in 2)).

*Bemerkung.* • Die 0 ist in jedem Ideal enthalten

- $\{0\}, R$  sind immer Ideale
- Fall  $R$  ein Körper ist, sind  $\{0\}$  und  $R$  die einzigen Ideale, denn

Sei  $k$  ein Körper,  $I \subset k$  ein Ideal. Angenommen  $\exists a \in I \setminus \{0\}$ . Sei  $b \in k$  gegeben dann ist  $b = (b \cdot a^{-1}) \cdot a \in I$ .

- Falls  $I \subset R$  ein Ideal und  $1 \in I \Rightarrow I = R$

**Beispiel 2.36.** •  $R = \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}$  ein Element  $I = \{\text{alle Vielfachen von } a\}$

- Besonders einfache Ideale: sei  $R$  ein Ring,  $I \subset R$  ein Ideal. Nenne  $I$  ein Hauptideal falls  $\exists a \in I : I = (a)$ . Nenne  $R$  Hauptidealring falls alle Ideale Hauptideale sind. z.B.  $\mathbb{Z}$  ist ein Hauptidealring.

Sei  $I \subset \mathbb{Z}$  ein Ideal,  $I \neq (0)$ . Wir wissen:  $I$  enthält positive Elemente. Sei  $a \in I$  das kleinste positive Element. Will zeigen  $I = (a)$ . Inklusion  $\supset$  ist klar. Sei also  $b \in I \setminus \{0\}$  irgendein Element. oBdA sei  $b > 0$ . Division mit Rest:

$$\underbrace{b}_{\in I} = \underbrace{* \cdot a}_{\in I} + c, \text{ wobei } 0 \leq c < a.$$

Damit ist  $c \in I$  aber auch  $c < a \Rightarrow c = 0$  und damit  $b \in (a)$ .

Das gleiche gilt falls  $k$  ein Körper und  $R = k[x]$  ist.

$R = k[x, y]$  ist kein Hauptidealring, denn  $I = (x, y)$  ist kein Hauptideal, denn

- 1)  $I \neq R$  Genauer  $1 \notin I$ , denn alle Elemente von  $I$  außer 0 haben positiven Grad.
- 2) Wenn  $I$  ein Hauptideal wäre,  $I = (a)$ , dann  $a \mid x$  und  $a \mid y$ , Aber  $\text{ggT}(x, y) = 1$ . Also wäre  $a$  Einheit,  $I = R \nsubseteq$ .

Einige Rechenregeln

- $(a) \subset (b) \Leftrightarrow b \mid a$
- $(a) = (b) \Leftrightarrow a \sim b$

- $R$  beliebiger Ring,  $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine Familie von Elementen

$$I = \{r_1 \cdot a_{\lambda_1} + \cdots + r_n \cdot a_{\lambda_n} \mid n \in \mathbb{N}, r_1, \dots, r_n \in R, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda\}$$

Wir sagen das Ideal ist von  $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  erzeugt und schreibe

$$I = ((a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}) = (a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$$

Falls die Familie endlich ist, schreibt man auch

$$I = (a_1, \dots, a_n)$$

**Definition 2.37.** Sei  $R$  ein Ring und  $I \subset R$  ein Ideal. Nenne  $I$  endlich erzeugt, falls es endlich viele  $a_1, \dots, a_n \in I$  gibt, so dass

$$I = (a_1, \dots, a_n)$$

*Bemerkung.* Die Ähnlichkeit zwischen Erzeugendensystemen von Idealen und Untervektorräumen geht nicht sehr weit!

**Beispiel 2.38.** Sei  $k$  ein Körper (z.B.  $\mathbb{R}$ ) und  $X \subset k^n$  eine Teilmenge (z.B.  $X =$  Einheitskreis in  $\mathbb{R}^2$ )

Betrachte  $R = k[x_1, \dots, x_n]$  und

$$I = \left\{ f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0 \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X \right\}$$

Diese Konstruktion ist besonders interessant, falls  $X$  die Lösungsmenge eines polynomiellen Gleichungssystems ist.

**Definition 2.39.** Sei  $R$  ein Ring. Sage in  $R$  gilt der Teilerkettensatz für Ideale, falls jede aufsteigende Kette von Idealen

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

nach endlich vielen Schritten konstant wird.

**Satz 2.40.** Sei  $R$  ein Ring, dann ist äquivalent

- 1) Jedes Ideal ist endlich erzeugt
- 2) In  $R$  gilt der Teilerkettensatz für Ideale
- 3) In jeder nicht-leeren Menge von Idealen gibt es ein Element, das bezüglich Inklusion maximal ist

Falls diese Eigenschaften gelten, nenne  $R$  Noethersch

*Beweis.* 1)  $\Rightarrow$  2) Sei  $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$  eine Folge von Idealen. Beachte:

$$I = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$$

ist ein Ideal, also per Annahme endlich erzeugt:  $I = (a_1, \dots, a_n)$  für geeignete  $a_1, \dots, a_n \in \bigcup I_i$ . Dann gibt es also  $i_1, \dots, i_n$  so dass  $a_i \in I_{i_1}, a_2 \in I_{i_2}$  wenn  $m = \max\{i_1, \dots, i_n\}$  dann  $a_1 \in I_m, a_2 \in I_m, \dots$  damit gilt:

$$(a_1, \dots, a_n) \subset I_m \subset I = (a_1, \dots, a_n)$$

also  $I_m = I_{m+1} = I_{m+2} = \dots$

2)  $\Rightarrow$  3) Sei  $M$  eine nicht-leere Menge von Idealen ohne maximales Element. Sei  $I_i \in M$  irgendein Element. Finde dann  $I_2 \in M$  mit  $I_1 \subsetneq I_2$ . Da  $I_2$  auch nicht maximal ist finde also  $I_3 \in M$  mit  $I_2 \subsetneq I_3$ . Erhalte so eine Kette

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \dots$$

$\Rightarrow$  Teilerkettensatz für Ideale gilt nicht!

3)  $\Rightarrow$  1) Sei  $I \subset R$  ein Ideal,  $I \neq (0)$ . Sei  $M = \{J \subset I \mid J \text{ ein Ideal, } J \text{ endlich erzeugt}\}$

Wir wissen es gibt ein maximales  $m \in M$ . Behauptung  $m = I$

Denn sonst wäre  $m = (a_1, \dots, a_n) \subsetneq I$  und es gäbe  $a_{n+1} \in I \setminus m$ . Dann ist  $m' = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$  endlich erzeugt, also in  $M$  und  $m' \supsetneq m \nsubseteq$   $\square$

**Satz 2.41** (Hilbert). Sei  $R$  Noethersch. Dann ist auch  $R[x]$  Noethersch.

*Beweis.* Angenommen  $R[x]$  nicht Noethersch. Wir müssen zeigen  $R$  ist nicht Noethersch.

Wir wissen: Es gibt in  $R[x]$  ein Ideal  $I$ , das nicht endlich erzeugt ist.

Wähle in  $I$  ein Element  $f$  von minimalem Grad. Dann ist  $I \subsetneq (f_1)$ , also  $I \setminus (f_1) \neq \emptyset$ , wähle  $f_2 \in I \setminus (f_1)$  von minimalem Grad.  $I \supsetneq (f_1, f_2)$  wähle  $f_3 \in I \setminus (f_1, f_2)$  von minimalem Grad.

Erhalte Folge von Polynomen  $f_1, f_2, f_3, \dots$  so dass  $\deg f_1 \leq \deg f_2 \leq \deg f_3 \leq \dots$

Setze  $n_i = \deg f_i$ ,  $a_i = \text{Leitkoeffizient von } f_i \in R$ .



Will zeigen, dass folgende Kette von Idealen in  $R$  nicht stationär wird.

$$(a_1) \subseteq (a_1, a_2) \subseteq (a_1, a_2, a_3) \subseteq \dots$$

dann wird klar sein, dass  $R$  nicht Noethersch war.

Angenommen es gäbe  $k$  mit  $(a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, a_{k+1}) \Leftrightarrow a_{k+1} \in (a_1, \dots, a_k)$

Dann gibt es also eine Linearkombination

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^k r_i a_i$$

für geeignete  $r_i \in R$ . Betrachte Polynom

$$s(x) = \sum_{i=1}^k r_i \cdot x^{n_{k+1}-n_i} \cdot f_i(x)$$

Wesentliche Eigenschaft von  $s$ :

- 1)  $\deg s = n_{k+1} = \deg f_{k+1}$
- 2) Leitkoeffizient  $(s) = a_{k+1}$
- 3)  $s \in (f_1, \dots, f_k)$

Betrachte  $\underbrace{f_{k+1}(x)}_{\notin (f_1, \dots, f_k)} - \underbrace{s(x)}_{\in (f_1, \dots, f_k)} = t(x)$ .

Damit ist  $t(x) \notin (f_1, \dots, f_k)$  und  $\deg t(x) < n_{k+1}$ .

↳ zur Wahl von  $f_{k+1}$  als Element von  $I \setminus (f_1, \dots, f_k)$  von minimalem Grad. □

**Satz 2.42.** Sei  $R$  ein Integritätsring, der Hauptidealring ist. Dann ist  $R$  faktoriell.

*Beweis.* Sei  $p$  irreduzibel, seien  $a, b \in R$ .  $p \nmid a, p \nmid b$ . Dann müssen wir zeigen:  $p \nmid a \cdot b$ .

Wir wissen:  $(p, a)$  ist ein Hauptideal, also  $\exists c \in R$  so dass  $(p, a) = (c)$ . Also  $p$  ist Vielfaches von  $c$ , also  $c \mid p$ . Aber  $p$  ist irreduzibel hat also keine echten Teiler. Also  $c \in R^*$  oder  $c \sim p$ .

Aber  $c \sim p \Leftrightarrow p \mid a$  was wir per Annahme ausschließen!

Also  $c \in R^* \Rightarrow (a, p) = (1)$ . Es gibt also eine Linearkombination

$$1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 p \tag{*}$$

Analog finde  $\beta_1, \beta_2 \in R$

$$1 = \beta_1 b + \beta_2 p \quad (\mathfrak{C})$$

Es folgt

$$1 = \alpha_2 \beta_2 p^2 + (\alpha_1 \beta_2 a + \alpha_2 \beta_1 b) p + \alpha_1 a \beta_1 b$$

$\Rightarrow p \nmid \alpha_1 \beta_1 a b$  denn sonst würde  $p$  die Summe teilen, also auch  $p \mid 1$ .

$\Rightarrow p \nmid a \cdot b$

□

Quotienten: Sei  $R$  ein Ring,  $I \subset R$  ein Ideal. Dann definiere  $r, s \in R$  als äquivalent, falls  $r - s \in I$ .

**Satz 2.43.** Es gibt auf Quotientenmengen eindeutige Verknüpfungen  $+, \cdot$  so dass die Quotientenabbildung

$$q : R \rightarrow R/I$$

Ringmorphismus ist.

**Beispiel 2.44.**  $R = \mathbb{Z}, I = (p)$  das von einer Primzahl  $p$  erzeugte Hauptideal. Dann gilt

$$R/I = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p = \underline{F}_p$$

**Beispiel 2.45.** Sei  $k$  ein Körper,  $R = k[x]$ ,  $f \in R$  ein Polynom, sowie  $I = (f)$ . Dann betrachte  $R/(f)$ .

Beobachtung: Sei  $n = \deg f$ . Polynomdivision zeigt: die Polynome von  $\deg < n$  bilden vollständiges Repräsentantensystem. Insbesondere  $\dim_k R/(f) = n$ .

Multiplikation und Addition ist sehr einfach zu beschreiben: Wenn  $a, b$  Polynome von  $\deg < n$

$$[a] \cdot [b] = [c]$$

wobei  $c$  der Divisionsrest von  $a \cdot b$  bei Division durch  $f$  ist.

**Beispiel 2.46.** Sei  $k$  ein Körper,  $X \subset k^n$  eine Teilmenge (z.B. Lösungsmenge eines algebraischen Gleichungssystems).

Dann setze  $R = k[x_1, \dots, x_n]$

$$I = \{f \in R \mid f|_X \equiv 0\}$$

und  $R/I = \{\text{Funktionen } X \rightarrow k, \text{ die sich zu Polynomen } k^n \rightarrow k \text{ fortsetzen lassen}\} = \text{Polynomiale Funktionen} = \text{algebraische Funktionen}$

**Satz 2.47** (Universelle Eigenschaft). Sei  $R$  ein Ring, sei  $I \subset R$  ein Ideal. Sei  $q : R \rightarrow R/I$  die Restklassenabbildung. Dann gilt folgende universelle Eigenschaft: für jeden surjektiven Ringmorphismus  $\varphi : R \rightarrow S$  mit  $\ker(\varphi) \supseteq I$  gibt es genau einen Ringmorphismus  $\eta : R/I \rightarrow S$  so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{q} & R/I \\ \mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \exists! \eta \\ R & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

*Beweis.*

Eindeutigkeit: Angenommen wir haben zwei Morphismen  $\eta_1, \eta_2$ . Sei  $[a] \in R/I$  gegeben. Weil die Diagramme kommutieren, muss dann  $\eta_1([a]) = \eta_1(q(a)) = \varphi(a) = \eta_2([a])$ .

Existenz: Setze  $\eta : R/I \rightarrow S, [a] \mapsto \varphi(a)$ . Dabei ist die Wohldefiniertheit zu zeigen. Sei also  $[a] = [a']$  d.h.  $a - a' \in I \subset \ker(\varphi)$ . Dann ist  $\varphi(a) - \varphi(a') = \varphi(a - a') = 0$ , also  $\varphi(a) = \varphi(a')$  und die Wohldefiniertheit ist klar. Muss noch nachrechnen:  $\eta$  ist Ringmorphismus, bin aber zu faul.  $\square$

**Beispiel 2.48.** Sei  $\varphi : R \rightarrow S$  ein surjektiver Ringmorphismus. Dann ist  $S \simeq R/\ker(\varphi)$ .

*Beweis.* Nach universeller Eigenschaft gibt es genau eine Abbildung  $\eta : R/\ker(\varphi) \rightarrow S$  so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & R/\ker(\varphi) \\ \mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \exists! \eta \\ R & \xrightarrow{\varphi} & S \end{array}$$

Behauptung:  $\eta$  ist Isomorphismus. Muss zeigen:  $\eta$  bijektiv also injektiv und surjektiv. Surjektivität folgt sofort aus Kommutativität des Diagramms und der surjektivität von  $\varphi$ . Noch zu zeigen  $\eta$  injektiv bzw.  $\ker(\eta) = 0_{R/\ker(\varphi)}$ .

Sei also  $[a] \in \ker(\eta)$ . Wegen der Kommutativität des Diagramms:

$$0_S = \eta([a]) = \eta(q(a)) = \varphi(a) \Rightarrow a \in \ker(\varphi),$$

also  $[a] = 0_{R/\ker(\varphi)}$ .  $\square$

## Warum das Bohei um Quotienten?

Wir betrachten Körpererweiterung  $L/k$  und algebraische Elemente  $a \in L$ .

Wir wissen  $a$  hat Minimalpolynom  $f \in k[x]$ . Jedes andere Polynom  $g \in k[x]$  mit  $g(a) = 0$  ist Vielfaches von  $f$ . ( $g(a) = 0 \Leftrightarrow g \in (f)$ ).

Betrachte Abbildung:

$$\begin{aligned} k[x] &\rightarrow k(a) \\ g &\mapsto g(a) \end{aligned}$$

Wir wissen:

- $\ker(\varphi) = (f)$
- Die Elemente von  $k(a)$  kann ich schreiben als  $\lambda_1 + \lambda_2 a + \dots + \lambda_n a^{n-1}$  mit  $\lambda_i \in k$   
 $\Rightarrow \varphi$  ist surjektiv!

Insgesamt:

$$k(a) \cong k[x]/(f)$$

**Satz 2.49.** Sei  $\varphi : R \rightarrow S$  ein Ringmorphismus. Dann gilt

- 1) Für jedes Ideal  $I \subset S$  ist  $\varphi^{-1}(I)$  ein Ideal, das  $\ker(\varphi)$  enthält.
- 2) Wenn  $\varphi$  surjektiv ist, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Ideale in } S\} &\xrightarrow{\alpha} \{\text{Ideale in } R, \text{ die } \ker(\varphi) \text{ enthalten}\} \\ I &\mapsto \varphi^{-1}(I) \end{aligned}$$

bijektiv.

- 3) Wenn  $\varphi$  surjektiv ist,  $J \subset R$  ein Ideal, dann ist  $\varphi(J) \subset S$  ein Ideal.
- 4) Wenn  $\varphi$  surjektiv ist, und  $I \subset S$  ein Ideal ist, dann betrachte die Komposition  $\psi$  von

$$R \xrightarrow[\varphi]{} S \rightarrow S/I$$

und es ist  $\ker(\psi) = \varphi^{-1}(I)$ . Also ist  $S/I \simeq R/\varphi^{-1}(I)$ .

*Beweis.* 1) Hausaufgabe!

- 2) Weil  $\varphi$  per Annahme surjektiv ist, ist die Abbildung  $\alpha$  injektiv. Also noch surjektivität zu zeigen. Sei also  $J \subset R$  ein Ideal, das  $\ker(\varphi)$  enthält. Wir wissen  $S \simeq R/\ker(\varphi)$  also gibt es nach universeller Eigenschaft ein Diagramm

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\varphi} & R/\ker(\varphi) \\ \mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \exists! \eta \\ R & \xrightarrow{q} & R/J \end{array}$$

und  $J = q^{-1}((0)) = \varphi^{-1}(\eta^{-1}(0))$ , setze  $I = \eta^{-1}(0)$ , fertig.

- 3) Sei  $J \subset R$  ein Ideal. Muss zeigen

C1: Wenn  $a, b \in \varphi(J)$ , dann ist  $a + b \in \varphi(J)$ .  $\exists a', b' \in J$  mit  $a = \varphi(a'), b = \varphi(b')$  und dann  $a + b = \varphi(\underbrace{a' + b'}_{\in J})$

C2: Sei  $a \in \varphi(J)$ , sei  $b \in S$  beliebig. Dann ist  $s \cdot a \in \varphi(J)$ . Weil  $\varphi$  surjektiv ist,  $\exists s' \in R : s = \varphi(s')$ . Außerdem  $\exists a' \in J : a = \varphi(a')$  und  $\varphi(\underbrace{s'a'}_{\in J}) = \varphi(s')\varphi(a') = sa$

- 4) Sei  $r \in R$ . Es gilt

$$\begin{aligned} r \in \ker(\psi) &\Leftrightarrow q(\varphi(r)) = 0_{S/I} \\ &\Leftrightarrow \varphi(r) \in I \\ &\Leftrightarrow r \in \varphi^{-1}(I) \end{aligned}$$

□

**Folgerung 2.50.** Sei  $R$  noethersch (bzw. Hauptidealring). Sei  $I \subset R$  ein Ideal. Dann ist  $R/I$  Noethersch (bzw. Hauptidealring).

Notation: Sei  $R$  Ring. Seien  $I \subseteq J \subseteq R$  Ideale. Dann betrachte  $q_I : R \rightarrow R/I$ .

Das Ideal  $q_I(J) \subseteq R/I$  wird mit  $J/I$  bezeichnet.

**Satz 2.51** (Noetherscher Isomorphiesatz). Situation wie oben. Dann

$$R/J \simeq (R/I)/(J/I)$$

*Beweis.* Wir haben Ringmorphisimen

$$R \xrightarrow{q_I} R/I \xrightarrow{q_{J/I}} (R/I)/(J/I)$$

Wir wissen  $\ker(\eta) = q_I^{-1}(J/I) = J$ . Also folgt die Aussage.  $\square$

### Haben 2 wichtige Typen von Idealen

- Primideale:  $R$  ein Ring,  $I \subseteq R$  ein Ideal. Nenne  $I$  prim, falls  $\forall a, b \in R : a \cdot b \in I \Rightarrow a \in I \vee b \in I$

- Maximale Ideale:  $R$  ein Ring. Ein Ideal  $I \subset R$  heißt maximal falls gilt

$$1) \ I \neq R$$

$$2) \text{ Wenn } J \supsetneq I \text{ ein echt größeres Ideal ist, dann ist } J = R.$$

**Beispiel 2.52.** • Sei  $R$  ein Ring,  $p \in R$  ein prim-Element. Dann ist  $(p)$  ein Primideal.

- Sei  $k$  ein Körper,  $R = k[x_1, \dots, x_n]$  und

$$I = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \{ \underbrace{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots + x_n f_n}_{\text{Haben stets Nullstelle am Ursprung!}} \mid f_i \in k[x_1, \dots, x_n] \}$$

Wir wissen  $1 \notin I$ , denn 1 hat keine Nullstelle.

Beobachte: Ein Polynom liegt genau dann in  $I$  wenn der konstante Teil gleich Null ist (d.h. wenn  $f(0) = 0_k$ ).

Sei jetzt  $J \supsetneq I$  echt größer! Sei  $f \in J \setminus I$  Dann

$$\underbrace{f}_{\in J} = \text{const}^{\neq 0} + \underbrace{(\text{Polynom ohne konstanten Teil})}_{\in I \subset J}$$

$$\Rightarrow \text{const}^{\neq 0} \in J \Rightarrow J = R$$

Variante: Seien  $a_1, \dots, a_n \in k$ . Dann ist  $I' = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$  auch maximal.

Zurück zu Beispiel ohne Variante

$$R/I = k[x_1, \dots, x_n]/(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\simeq} k$$

$$[f] \mapsto f(0)$$

**Beispiel 2.53.** Sei  $k$  ein Körper,  $f \in k[x]$  irreduzibel. Dann ist  $(f)$  maximal.

*Beweis.* Sei  $J \supsetneq (f)$  größer, sei  $g \in J \setminus (f)$  ein Element ( $g$  kein Vielfaches von  $f$ ).

Wissen (Euklidischer Algorithmus):  $\text{ggT}(f, g) \in J$ . Aber  $f$  ist irreduzibel hat also keine echten Teiler d.h.  $\text{ggT}(f, g) = 1$   $\square$

**Satz 2.54.** Sei  $R$  ein Ring,  $I \subset R$  ein Ideal. Dann gilt

1)  $I$  ist prim  $\Leftrightarrow R/I$  ist Integritätsring

2)  $I$  ist maximal  $\Leftrightarrow R/I$  ist ein Körper

Insbesondere maximale Ideale sind prim (denn Körper sind Integritätsringe)

*Beweis.* 1)  $\Rightarrow$ : Sei  $I$  prim. Seien  $[a], [b] \in R/I$  Äquivalenzklassen von Elementen  $a, b \in R$  so dass  $[a] \neq 0_{R/I}$  und  $[b] \neq 0_{R/I}$ . Dann gilt  $a \notin I$  und  $b \notin I$ .

Da  $I$  prim  $a \cdot b \notin I \Rightarrow [a \cdot b] \neq 0_{R/I}$

1)  $\Leftarrow$ : Sei  $R/I$  ein Integritätsring. Seien  $a, b \in R \setminus I$ . Dann  $[a] \neq 0_{R/I}$  und  $[b] \neq 0_{R/I}$  und  $[a \cdot b] \neq 0_{R/I}$ .

$\Rightarrow ab \notin I$

2)  $\Rightarrow$ : Sei  $I$  maximal. Sei  $a \in R$  mit  $[a] \neq 0_{R/I}$  d.h.  $a \notin I$ .

Dann betrachte  $J = (I, a)$ . Wir wissen  $J \supsetneq I$  also  $(1) = J$ . Also kann ich schreiben:

$$1 = f + g \cdot a \quad \text{mit } f \in I, g \in R$$

$$\Rightarrow \underbrace{[1]}_{=1_{R/I}} = \underbrace{[f]}_{0_{R/I}} + [g] \cdot [a]$$

also ist  $[g] = [a]^{-1}$  in  $R/I$

2)  $\Leftarrow$ : Sei  $R/I$  ein Körper, sei  $J \supsetneq I$  ein echtes Oberideal. Dann gibt es  $a \in J \setminus I$ .

Wir wissen  $[a] \neq 0_{R/I}$ , per Annahme  $\exists b \in R$  mit  $[a] \cdot [b] = [1]$ . Das bedeutet  $\exists f \in I$  so dass

$$\underbrace{a \cdot b}_{\in J} + \underbrace{f}_{\in I \subset J} = 1$$

das heißt  $1 \in J$  d.h.  $J = R$ .  $\square$

*Bemerkung.* Teil 2) des Satzes gibt neuartige Methode, um Beispiele von Körpern zu konstruieren!

### Weitere Beobachtungen/Konstruktionen mit Idealen

Sei  $R$  ein Ring, seien  $I_1, \dots, I_n$  Ideale in  $R$

- Dann ist  $I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_n$  ein Ideal
- Dann ist  $I_1 + \dots + I_n = \{f_1 + \dots + f_n \in R \mid \forall i f_i \in I_i\}$  ein Ideal

**Beispiel 2.55.**  $R = \mathbb{Z}$   $I_1 = (a)$   $I_2 = (b)$

$$I_1 \cap I_2 = (\text{kgV}(a, b))$$

$$I_1 + I_2 = (\text{ggT}(a, b))$$

**Definition 2.56.** Zwei Ideale  $I_1, I_2$  heißen Teilerfremd, wenn  $I_1 + I_2 = (1)$ .

Nutzanwendung: Manchmal hat man Aufgaben der Form: gegeben Ring  $R$  gegeben Ideale  $I_1, \dots, I_n$  und Elemente  $r_1, \dots, r_n \in R$ . Finde ein/alle  $r \in R$

$$\begin{aligned} r &\equiv r_1 \pmod{I_1} \\ r &\equiv r_2 \pmod{I_2} \\ &\vdots \\ r &\equiv r_n \pmod{I_n} \end{aligned}$$

Antwort ist Chinesischer Restsatz: Situation wie oben. Fall  $\forall i \neq j$  die Ideale  $I_i$  und  $I_j$  stets teilerfremd sind, dann ist die Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi : R &\rightarrow R/I_1 \times R/I_2 \times \dots \times R/I_n \\ r &\mapsto ([r]_{R/I_1}, [r]_{R/I_2}, \dots, [r]_{R/I_n}) \end{aligned}$$

surjektiv und  $\ker(\varphi) = I_1 \cap \dots \cap I_n$ .

*Beweis.* Aussage über  $\ker(\varphi)$  ist trivial. Müssen surjektiv zeigen!

Seien  $k \neq l$  gegeben. Wir wissen  $(1) = I_k + I_l$ . Also existieren Elemente  $a_{kl} \in I_k$  und  $b_{kl} \in I_l$  so dass  $1 = a_{kl} + b_{kl}$

Setze

$$s_l = \prod_{k \neq l} a_{kl} = \prod_{k \neq l} (1 - b_{kl}) \in R$$



*Beobachtung:* Seien  $k \neq l$  gegeben. Dann  $s_l \equiv 0 \pmod{I_k}$  denn Faktor  $a_{kl}$  aus dem 1. Produkt ist  $\equiv 0 \pmod{I_k}$ .

$s_l \equiv 1 \pmod{I_l}$ , denn es ist stets  $b_k l \equiv 0 \pmod{I_l}$ , also jeder Faktor des Rechen Produktes  $\equiv 1 \pmod{I_l}$ .

Seien  $r_1, \dots, r_n \in R$  gegeben.

Setze:  $r = \sum r_i \cdot s_i$  dann gilt  $\forall i : r \equiv r_i \pmod{I_i}$ , also

$$\varphi(r) = [r_1] \times [r_2] \times \dots \times [r_n]$$

□

### Einschub Mengenlehre

**Definition 2.57.** Sei  $M$  eine Menge.  $\leq$  sei eine Relation. Ich nenne  $\leq$  eine Halbordnung falls gilt:

- 1)  $\forall a \in M : a \leq a$
- 2) Wenn  $a, b, c \in M$  gegeben sind mit

$$a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

- 3)  $\forall a, b \in M : a \leq b$  und  $b \leq a \Rightarrow a = b$

Wir fordern nicht dass  $\forall a, b \in M : a \leq b$  oder  $b \leq a$  gilt. (Falls das gilt nenne  $\leq$  vollständig)

**Beispiel 2.58.** Betrachte  $S = \text{Studierende}$ ,  $M = \text{Pot}(S)$ .

Gegeben  $m_1, m_2 \in M$ , schreibe  $m_1 \leq m_2$  falls  $m_1 \subseteq m_2$  ist.

**Definition 2.59.** Sei  $(M, \leq)$  eine Mengen mit Halbordnung. Eine Kette ist eine Teilmenge  $N \subset M$ , so dass die auf  $N$  induzierte Halbordnung vollständig ist. Ein Element  $m \in M$  heißt obere Schranke der Kette  $N$ , falls  $\forall a \in N : n \leq m$ .

**Beispiel 2.60.** Sei  $(M, \leq)$  gegeben. Sei  $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Elementen so dass  $n_1 \leq n_2 \leq \dots$  ist. Dann ist  $N = \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  eine Kette.

**Beispiel 2.61.** Sei  $M = \mathbb{R}$  und  $\leq$  wie üblich definiert. Dann ist jede Teilmengen eine Kette, denn  $\leq$  ist sowieso vollständig. Obere Schranken existieren genau dann wenn  $N$  nach oben beschränkt ist.

**Satz 2.62** (Lemma von Zorn). Sei  $(M, \leq)$  eine halbgeordnete Menge,  $M \neq \emptyset$ . Falls jede Kette eine obere Schranke besitzt, dann gibt es in  $M$  ein maximales Element.

*Bemerkung.* Dies ist Äquivalent zum Auswahlaxiom. Sei  $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$  eine Familie von Mengen. Dann gibt es eine Abbildung

$$A \rightarrow \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$$

so dass  $\forall \alpha \in A : \varphi(\alpha) \in M_\alpha$ .

**Satz 2.63.** Sei  $R$  ein Ring.  $I \subset R$  ein Ideal. Dann gibt es ein maximales Ideal  $m \subset R$ , das  $I$  enthält

*Beweis.* Sei

$$M = \{\text{Ideale } J \subset R \text{ mit } I \subseteq J \subsetneq R\}$$

wähle  $\subseteq$  als Halbordnung.

Beachte: Wenn  $N \subset M$  eine Kette ist, dann ist  $s = \bigcup_{n \in N} n$  eine obere Schranke.

- Ketteneigenschaft garantiert, dass  $s$  ein Ideal ist
- $1 \notin s$ , denn für alle  $m \in M : 1 \notin m$ . Also  $s \subsetneq R$ , also  $s \in M$

Zorn: Es existiert in  $M$  ein maximales Element  $m$ .

Nachrechnen: Dies ist ein maximales Ideal in  $R$ , welches  $I$  enthält. □

## 3 Körpertheorie

### 3.1 Grundbegriffe

Beobachtung: Sei  $k$  ein Körper sei  $1_k$  das neutrale Element der Multiplikation. Dann betrachte Ringmorphismus

$$\eta : \mathbb{Z} \rightarrow k$$

$$n \mapsto \begin{cases} \underbrace{1_k + \dots + 1_k}_{n \text{ mal}} & \text{falls } n \geq 0 \\ \underbrace{-(1_k + \dots + 1_k)}_{-n \text{ mal}} & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

Beobachte: Wenn  $k' \subset k$  ein Unterkörper ist, dann  $\text{Bild}(\eta) \subseteq k'$ .

Beobachtung: Wenn  $(k_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine Familie von Unterkörpern ist, dann ist

$$k' := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} k_\lambda$$

wieder ein Unterkörper.

**Definition 3.1.** Gegeben ein Körper  $k$  betrachte

$$k' := \bigcap_{\substack{k'' \subseteq k \\ \text{Unterkörper}}} k''$$

Dieser Unterkörper heißt Primkörper von  $k$ .

Mit der Beobachtung von oben:  $\text{Bild}(\eta) \subseteq \text{Primkörper}$

Beachte:  $\eta$  ist entweder injektiv oder nicht.

Fall  $\eta$  ist injektiv:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi} & Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q} \\ \mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \exists! \varphi \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\eta} & \text{Primkörper von } k \end{array}$$

Beachte:  $\text{Bild}(\varphi)$  ist Unterkörper des Primkörpers, welcher der kleinste Unterkörper von  $k$  ist, also  $\text{Bild}(\varphi) = \text{Primkörper}$ . Also insgesamt: Falls  $\eta$  injektiv ist ist der Primkörper kanonisch isomorph zu  $\mathbb{Q}$ .

Fall  $\eta$  nicht injektiv: Dann ist  $\ker(\eta) \subseteq \mathbb{Z}$  ein nicht-triviales Ideal.

Weil  $\eta(1_{\mathbb{Z}}) = 1_k \neq 0_k$ , ist  $\ker(\eta) \subsetneq \mathbb{Z}$  also Hauptideal der Form  $(p)$  für ein  $p \in \mathbb{N}$ . Weil  $k$  nullteilerfrei ist, ist  $p$  eine Primzahl und nach universeller Eigenschaft von Quotienten habe ich ein Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{Z}/(p) \\ \mathbb{1}_R \downarrow & & \downarrow \exists \varphi \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\eta} & \text{Primkörper von } k \end{array}$$

Argumentiere wie oben, erhalte einen kanonischen Isomorphismus zwischen dem Primkörper und  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Zusammenfassung/Notation: Sei  $k$  ein Körper. Sei  $k' \subseteq k$  der Primkörper. Dann entweder

- $k' \simeq \mathbb{Q}$  und man sagt:  $k$  hat Charakteristik 0,  $\text{char}(k) = 0$
- $k' \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$  für eine Primzahl  $p$  und man sagt  $k$  hat die Charakteristik  $p$

Bemerkung zum Gruseln: Sei  $\text{char}(k) = p > 0$ . Dann ist  $(x+y)^p = x^p + y^p$ . Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \text{Frob: } k[x] &\rightarrow k[x] \\ f &\mapsto f^p \end{aligned}$$

ein Ringmorphismus. Außerdem ist die Ableitung von  $f(x) = x^p$  gegeben als  $f'(x) = px^{p-1} \equiv 0$ .

$$f(x) = x^p + x^{p+2} \text{ und } f'(x) = (p+2) \cdot x^{p+1} = 2 \cdot x^{p+1}$$

Schlussbeobachtung: Sei  $k$  ein endlicher Körper, dann ist  $\text{char}(k) = p > 0$ . Beobachte:  $k$  ist ein Vektorraum über dem Primkörper  $\simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Sei  $n = \dim_{\text{Prim}} k$ . Dann  $n < \infty$  und  $\#k = p^n$ .

## 3.2 Der algebraische Abschluss

Beobachtung: Das Polynom  $x^2 + 2$  hat in  $\mathbb{Q}$  keine Nullstelle, aber im Oberkörper  $\mathbb{C}$ . Es gilt sogar jedes nicht konstante  $f \in \mathbb{C}[x]$  hat in  $\mathbb{C}$  eine Nullstelle.

Ziel: Wir wollen ähnliches für beliebige Körper konstruieren. Gegeben Körper  $k$ . Konstruiere einen Oberkörper  $\bar{k}$  so dass alle nicht konstanten Polynome  $f \in \bar{k}[x]$  in  $\bar{k}$  eine Nullstelle haben.

Aber:  $\bar{k}$  erfüllt keine gute universelle Eigenschaft  $\rightsquigarrow$  Galois-Theorie: Symmetrie von Erweiterungen

Spielwiese: Betrachte  $\mathbb{Q}$  und  $k = \mathbb{Q}[x]/(x^2 + 1)$ .

Ich kann  $\mathbb{Q}$  in  $k$  einbetten durch

$$\begin{aligned}\mathbb{Q} &\hookrightarrow k \\ q &\mapsto [q]\end{aligned}$$

Also  $k$  ist Oberkörper von  $\mathbb{Q}$ .

Betrachte das Element  $a := [x] \in k$

Beobachte:  $a^2 + 1_k = a \cdot a + 1_k = [x][x] + [1_{\mathbb{Q}}] = [x \cdot x + 1_{\mathbb{Q}}] = [x^2 + 1_{\mathbb{Q}}] = 0_k$ .

Einsicht:  $a \in k$  ist Nullstelle des Polynoms  $x^2 + 1_k \in k[x]$

Wie soll die Konstruktion von  $\bar{k}$  gehen? Grundidee: so wie in der Spielwiese.

**Satz 3.2.** Sei  $k$  ein Körper, sei  $f \in k[x]$  nicht konstant. Dann gibt es einen Oberkörper  $L \supseteq k$  so dass  $f$  als Polynom in  $L[x]$  eine Nullstelle in  $L$  hat.

*Beweis.* Sei  $p(x)$  ein irreduzibler Faktor von  $f$ . Setze

$$L := k[x]/(p)$$

das ist ein Körper, weil  $(p)$  maximales Ideal ist.

Bette  $k$  mit Hilfe des injektiven Körpermorphismus

$$\begin{aligned}k &\rightarrow L \\ a &\mapsto [a]\end{aligned}$$

in  $L$  ein. Beachte, dass  $a := [x] \in L$  eine Nullstelle von  $p$  und also auch von  $f$  ist.  $\square$

Beobachtung: Wir wissen schon: wenn ich diese Konstruktion anwende auf  $k = \mathbb{R}$ ,  $f = x^2 + 1$  dann erhalte ich  $\mathbb{C}$ . Ich sehe schon an diesem Beispiel, dass die so erhaltene Erweiterung Symmetrien besitzt, nämlich die komplexe Konjugation. Also ist es nicht richtig, dass  $\mathbb{C}$  eindeutig ist bis auf kanonische Isomorphie.

**Satz 3.3.** Sei  $k$  ein Körper. Dann ist äquivalent:

- 1) Jedes nicht-konstante Polynom in  $k[x]$  hat Nullstelle in  $k$ .
- 2) Jedes nicht-konstante Polynom zerfällt in Linearfaktoren
- 3) Jedes irreduzible Polynom ist linear
- 4) Wenn  $L/k$  eine algebraische Körpererweiterung ist, dann ist  $L = k$

Nenne  $k$  algebraisch abgeschlossen falls diese Bedingungen erfüllt sind.

*Beweis.* 1)  $\Rightarrow$  2): Polynomdivision: wenn  $f$  bei  $a$  eine Nullstelle hat dann ist  $f$  ein Vielfaches von  $(x - a)$ .

2)  $\Rightarrow$  3): trivial

3)  $\Rightarrow$  4): Sei  $L/k$  eine algebraische Körpererweiterung. Sei  $a \in L$  gegeben. Dann  $a$  ist algebraisch über  $k$ . Sei  $f \in k[x]$  das Minimalpolynom. Dann  $f$  irreduzibel, also linear, also  $f(x) = x - a \in k[x] \Rightarrow a \in k$ .

4)  $\Rightarrow$  1): Sei  $f \in k[x]$  nicht konstant. Sei  $p(x)$  ein irreduzibler Faktor von  $f$ . Setze

$$L = k[x]/(p)$$

das ist eine endliche Erweiterung, denn  $\dim_k L = \deg p < \infty$ , also ist  $L$  algebraisch. Außerdem gilt:  $f$  hat in  $L$  eine Nullstelle. Nach 4) ist  $L = k$  also hat  $f$  bereits in  $k$  eine Nullstelle.

**Definition 3.4.** Sei  $k$  ein Körper. Ein Oberkörper  $\bar{k}/k$  heißt algebraischer Abschluss von  $k$  falls gilt:

1)  $\bar{k}$  ist algebraisch abgeschlossen

2)  $\bar{k}/k$  ist algebraisch

Achtung:  $\mathbb{C}$  ist kein algebraischer Abschluss von  $\mathbb{Q}$ !

Nicht verwechseln mit algebraischer Abschluss von  $k$  in einem Oberkörper  $L = \{l \in L \mid l \text{ ist algebraisch über } k\}$ .  $\square$

**Definition 3.5.** Seien  $R, S$  Ringe (später meistens Körper) die beide den Ring  $T$  als Unterring besitzen.

Ein Ringmorphismus  $\varphi : R \rightarrow S$  heißt  $T$ -Morphismus, falls  $\varphi|_T = id_T$ .

**Beispiel 3.6.**  $R = S = \mathbb{C}$ ,  $T = \mathbb{R}$ . Dann ist die Konjugation

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \bar{z} \end{aligned}$$

ein  $\mathbb{R}$ -Morphismus.

**Satz 3.7.** Sei  $k$  ein Körper,  $\bar{k}$  ein algebraischer Abschluss von  $k$ . Sei  $L/k$  algebraisch, sei  $L_0$  ein Zwischenkörper  $k \subseteq L_0 \subseteq L$ . Sei weiter ein  $k$ -Morphismus  $\varphi_0 : L_0 \rightarrow \bar{k}$  gegeben. Dann existiert eine Fortsetzung  $\varphi : L \rightarrow \bar{k}$  (d.h. ein Körpermorphismus  $\varphi$ , so dass  $\varphi|_{L_0} = \varphi_0$ ).

Insbesondere ( $L_0 = k$ ) jede algebraische Körpererweiterung von  $k$  bettet in  $\bar{k}$  ein.

Typische Anwendung: Sei  $k$  ein Körper, seien  $\bar{k}$  und  $\bar{k}'$  zwei algebraische Abschlüsse von  $k$ . Dann  $\bar{k} \simeq \bar{k}'$ .

*Beweis.* Wende den Satz 3.7 an mit  $L = \bar{k}'$ ,  $L_0 = k$  und  $\varphi_0 = Id_k$ . Satz sagt dann, es gibt Körpermorphismus (sogar  $k$ -Morphismus)

$$\varphi : \bar{k}' \rightarrow \bar{k}$$

Wissen:  $\varphi$  ist injektiv. Ich behaupte: sogar surjektiv. Grund: Haben Kette von Körpern  $k \subseteq \text{Bild}(\varphi) \subseteq \bar{k}$ .

Wissen  $\text{Bild}(\varphi) \simeq \bar{k}'$  ist algebraisch abgeschlossen.  $\bar{k}/k$  ist algebraisch  $\Rightarrow \bar{k}/\text{Bild}(\varphi)$  ist algebraisch.

Insgesamt:  $\bar{k} = \text{Bild}(\varphi)$ , denn algebraisch abgeschlossene Körper haben keine echten algebraischen Erweiterungen.  $\square$

*Beweis.* zu Satz 3.7 Verwende Zorns Lemma und betrachte

$$M = \{(L', \varphi') \mid L' \text{ ist Zwischenkörper } L_0 \subseteq L' \subseteq L \text{ und} \\ \varphi' : L' \rightarrow \bar{k} \text{ ist Körpermorphismus mit } \varphi'|_{L_0} = \varphi_0\}$$

Definiere eine Halbordnung durch  $(L', \varphi') \leq (L'', \varphi'')$  falls gilt:

$$1) \ L' \subseteq L''$$

$$2) \ \varphi''|_{L'} = \varphi'$$

Fakt ohne Beweis: Das ist tatsächlich eine Halbordnung.

*Zwischenbehauptung:* In  $(M, \leq)$  hat jede Kette eine obere Schranke.

Sei  $(L_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine Kette. Dann ist  $L' := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} L_\lambda$  ein Unterkörper von  $L$  (sogar Zwischenkörper:  $L_0 \subseteq L' \subseteq L$ ). Sei  $a \in L'$  und seien  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$  so dass  $a \in L_{\lambda_1}$  und  $a \in L_{\lambda_2}$  ist. Dann gilt:

$$\varphi_{\lambda_1}(a) = \varphi_{\lambda_2}(a)$$

Auswahlaxiom sagt: finde Abbildung  $\eta : L' \rightarrow \Lambda$  so dass für alle  $a \in L_{\eta(a)} \ni a$ .

Definiere dann:

$$\begin{aligned}\varphi' : L' &\rightarrow \bar{k} \\ a &\mapsto \varphi_{\eta(a)}(a)\end{aligned}$$

Das ist ein Körpermorphismus, der  $\varphi_0$  fortsetzt. Also ist  $(L', \varphi')$  eine obere Schranke für die Kette.

Insgesamt sagt Zorns Lemma: Es gibt ein maximales Element  $(L_{\max}, \varphi_{\max}) \in M$ . Ich bin fertig, wenn ich zeige:  $L_{\max} = L$ . Angenommen es gibt  $a \in L \setminus L_{\max}$ .

*Wissen:*  $a$  ist algebraisch über  $L_{\max}$ , mit Minimalpolynom

$$f(x) = \sum \lambda_i x^i \in L_{\max}[x]$$

*Wissen auch:*

$$L_{\max}(a) \simeq L_{\max}[x]/(f)$$

Betrachte das Polynom

$$\bar{f} = \sum \varphi_{\max}(\lambda_i) \cdot x^i \in \text{Bild}(\varphi_{\max})[x] \subset \bar{k}[x]$$

*Wissen:*  $\bar{f}$  hat eine Nullstelle  $\bar{a} \in \bar{k}$  und

$$\text{Bild}(\varphi_{\max})(\bar{a}) \simeq \text{Bild}(\varphi_{\max})[x]/(\bar{f}) \simeq L_{\max}[x]/(f) \simeq L_{\max}(a)$$

Insgesamt haben wir also einen Morphismus

$$L_{\max} \subsetneq L_{\max}(a) \xrightarrow{\varphi_{\max}} \text{Bild}(\varphi_{\eta(a)}) (\bar{a}) \subseteq \bar{k}$$

Per Konstruktion ist  $\varphi_{\max} \upharpoonright_{L_{\max}} = \varphi_{\max}$

Insgesamt:  $(L_{\max}, \varphi_{\max}) \subsetneq (L_{\max}(a), \varphi_{\max}) \not\leq$  zur Maximalität von  $(L_{\max}, \varphi_{\max})$ . □

**Definition 3.8** (Polynomringe in  $\infty$  vielen Variablen). Sei  $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine Menge von Variablennamen, sei  $R$  ein Ring Dann betrachte

$$R[(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}] = \bigcup_{\{x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n}\} \text{ endl.}} R[x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n}]$$



*Bemerkung.* Polynome enthalten immer nur endlich viele Terme und endlich viele Variablen!

**Fakt:** (universelle Eigenschaft) Gegeben sei ein Ringmorphismus  $\varphi : R \rightarrow S$  und eine beliebige Abbildung:  $\alpha : \Lambda \rightarrow S$ . Dann gibt es genau einen Ringmorphismus  $\Phi : R[(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}] \rightarrow S$  so dass  $\Phi|_R = \varphi$

$$\exists \lambda \in \Lambda : \Phi(x_\lambda) = \alpha(\lambda)$$

*Idee:*

$$\Phi(x_{\lambda_1}^2 + x_{\lambda_2} + r \cdot x_{\lambda_3}^7 \cdot x_{\lambda_4}) = \alpha(\lambda_1)^2 + \alpha(\lambda_2) + \varphi(r) \cdot \alpha(\lambda_3)^7 \cdot \alpha(\lambda_4)$$

**Satz 3.9** (Steinitz). Sei  $k$  ein Körper. Dann existiert ein algebraischer Abschluss.

*Beweis.* (Mike Artin) Betrachte:

- $\Lambda = \{\text{nicht-konstante Polynome in } k[x]\}$
- Polynomring  $k[(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}] =: P$
- Für jedes  $f \in \Lambda$  das Element  $f(x_f)$
- Das Ideal  $I = (f(x_f) \mid f \in \Lambda)$

*Behauptung 1:*  $I \subsetneq P$  d.h.  $1 \notin I$

*Beweis:* Angenommen es wäre  $1 \in I$ . Dann kann ich schreiben

$$1 = \sum_{i=1}^n g_i \cdot f_i(x_{f_i})$$

für geeignete  $f_1, \dots, f_n \in \Lambda, g_1, \dots, g_n \in P$ . Das kann nicht sein!

*Erinnerung:* Es gibt eine Körpererweiterung  $k_1/k$  so dass  $f_1$  eine Nullstelle  $a_1 \in k_1$  hat.

Wiederholte Anwendung: Es gibt eine Körpererweiterung  $k'/k$  so dass für alle  $i$  gilt  $f_i$  hat in  $k'$  eine Nullstelle  $a_i \in k'$ .

*Universelle Eigenschaft:* Es gibt Ringmorphismus  $\Phi : P \rightarrow k'$  so dass für alle  $i$  gilt  $x_{f_i} \mapsto a_i$ .

Dann ist

$$\Phi(1_{k'}) = \Phi(1_P) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\Phi(g_i) f_i(a_i)}_{=0} = 0$$

Widerspruch! Damit ist Behauptung 1 bewiesen.

*Erinnerung:*  $I$  ist vielleicht nicht maximal, aber Zorn sagt: Es gibt ein maximales Ideal  $I \subseteq m \subsetneq P$ .

*Erinnerung:*  $E_1 := P/m$  ist ein Körper.

Wesentliche Eigenschaften dieses Körpers.

- 1) Haben Abbildung  $k \rightarrow P \rightarrow E_1 = P/m, a \mapsto \text{konst. Pol. } a$ . Diese Abbildung ist injektiv, deshalb Inklusion von Körpern. Fasse ab sofort  $k$  als Unterkörper von  $E_1$  auf.
- 2) Die Polynome  $f \in \Lambda$  haben Nullstellen in  $E_1$ , nämlich  $f(x_f) \in I \subset m$ , also  $f([x_f]) = 0$  in  $E_1 = P/m$
- 3) Die Körpererweiterung  $E_1/k$  ist algebraisch. Sei  $a \in E_1$  irgendein Element. Schreibe  $a = [g]$  wobei  $g \in P$  ein Polynom in den endlich vielen Variablen  $x_{\lambda_1}, \dots, x_{\lambda_n}$  ist. Dann  $a \in k([x_{\lambda_1}], \dots, [x_{\lambda_n}]) \subset E_1$ .

Wir wissen aber für alle  $i$  ist  $[x_{\lambda_i}]$  Nullstelle des Polynoms  $\lambda_i \in \Lambda$ .

*Beobachtung:* Es ist nicht klar, dass  $E_1$  ein algebraischer Abschluss von  $k$  ist.

*Wissen:* Polynome mit Koeffizienten in  $k$  haben in  $E_1$  Nullstelle.

*Wissen nicht:* Polynome mit Koeffizienten in  $E_1$  haben in  $E_1$  Nullstelle.

Wiederhole diese Konstruktion, erhalte Erweiterungen

$$k \subseteq E_1 \subseteq E_2 \subseteq \dots$$

so dass für alle  $i \in \mathbb{N}$  jedes nicht-konstante Polynom in  $E_i[x]$  hat Nullstelle in  $E_{i+1}$  und  $E_{i+1}/E_i$  ist algebraisch. Insbesondere ist  $E_i/k$  algebraisch.

Setze

$$E := \bigcup_i E_i$$

dann gilt:

- 1) Weil ich eine Kette habe, ist  $E$  ein Körper
- 2) Gegeben  $a \in E$ . Dann  $\exists x : a \in E_i$ , also  $a$  algebraisch über  $k$ .  $\Rightarrow E/k$  ist algebraisch.

- 3) Sei  $f \in E[x]$  ein Polynom,  $f(x) = \sum_{j=1}^n e_j x^j$ . Dann gibt es ein  $i \in \mathbb{N} : \forall j : e_j \in E_i$ . Also  $f \in E_i[x]$  hat also eine Nullstelle in  $E_{i+1} \subseteq E$ .

□

**Definition 3.10.** Sei  $k$  ein Körper,  $f$  ein nicht konstantes Polynom,  $f \in k[x]$ . Eine Erweiterung  $L/k$  heißt Zerfällungskörper von  $f$ , falls gilt:

- 1)  $f$  zerfällt in  $L[x]$  in Produkt von linearen Polynomen

$$f = \text{const} \cdot \prod (x - a_i) \in L[x]$$

- 2)  $L = k(a_1, \dots, a_n)$

Wesentliches Problem: Gegeben  $k$  und  $f$ , finde ein  $L$ .

**Satz 3.11.** Sei  $k$  ein Körper, dann gilt:

- 1) Jedes nicht-konstante  $f$  hat einen Zerfällungskörper
- 2) Gegeben  $f$ , dann sind je zwei Zerfällungskörper von  $f$  isomorph
- 3) Gegeben  $f$  und ein Zerfällungskörper  $L$ , dann ist

$$[L : k] \leq (\deg f)!$$

*Beweis.* 1) Sei  $f$  gegeben. Seien  $a_1, \dots, a_n \in \bar{k}$  die Nullstellen, dann setze  $L = k(a_1, \dots, a_n) \subseteq \bar{k}$

2) Sei  $f$  gegeben. Wähle  $L$  wie in Schritt 1), sei  $L'$  ein weiterer Zerfällungskörper, seien  $a'_1, \dots, a'_n$  die Nullstellen von  $f$  in  $L'$ .

*Wir wissen:*  $L'/k$  ist algebraisch. Nach universeller Eigenschaft habe ich einen  $k$ -Morphismus

$$\varphi : L' \rightarrow \bar{k} \supseteq L$$

*Banale Beobachtung:* Die Abbildung  $\varphi$  bildet Nullstellen von  $f$  auf Nullstellen von  $f$  in  $\bar{k}$  ab. Sei  $a_i \in L$  eine Nullstelle. Dann schreibe  $f(x) = \sum f_i \cdot x^i$ , wobei  $f_i \in k$ . Dann ist

$$0_{\bar{k}} = \varphi(f(a)) = \varphi\left(\sum f_i \cdot a^i\right) = \sum \varphi(f_i) \cdot \varphi(a)^i = \sum f_i \varphi(a)^i = f(\varphi(a))$$

Also:  $\forall i : \varphi(a'_i) = a_i$  für geeignetes  $j$ .

$$\Rightarrow \text{Bild}(\varphi) = \varphi(k(a'_1, \dots, a'_n)) \subseteq \underbrace{k(a_1, \dots, a_n)}_{=L} \subseteq \bar{k}$$

*Andererseits:*  $\text{Bild}(\varphi)$  ist ein Zerfällungskörper, enthält alle  $n$  Nullstellen  $\Rightarrow \text{Bild}(\varphi) = L$ .

$\Rightarrow \varphi$  ist Isomorphismus

3) Sei  $f$  gegeben, seien  $a_1, \dots, a_n \in L$  die Nullstellen. Dann ist  $L = k(a_1, \dots, a_n)$  und habe Kette.

$$k \subseteq k(a_1) \subseteq k(a_1, a_2) \subseteq \dots$$

Dann:

- $f$  ist Polynom in  $k$ , das  $a_1$  als Nullstelle hat

$$[k(a_1) : k] \leq \deg f$$

- $f/(x - a_1)$  ist Polynom in  $k(a_1)$ , das  $a_2$  als Nullstelle hat

$$[k(a_1, a_2) : k(a_1)] \leq n - 1$$

- Wiederholte Anwendung:

$$[L : k] \leq n!$$

□

**Beispiel 3.12.**  $k = \mathbb{Q}$ ,  $f = x^2 - 2$ . Dann ist Zerfällungskörper

$$L = \mathbb{Q}(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

und

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2$$

und

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt{2})] = 1$$

$$\Rightarrow \deg[L : \mathbb{Q}] = 2.$$

**Beispiel 3.13.**  $k = \mathbb{Q}$ ,  $f = x^3 - 2$ . Dann:

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \xi \sqrt[3]{2}, \xi^2 \sqrt[3]{2})$$

wobei  $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ , und

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$$

und

$$[\mathbb{Q}(\xi \cdot \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})] = 2$$

weil  $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) \subset \mathbb{R}$ ,  $\xi \notin \mathbb{R}$

$$\Rightarrow [L : \mathbb{Q}] = 6$$

Nächstes Ziel: Zerfällungskörper verstehen. Dazu Nullstellenmenge von (irreduziblen) Polynomen verstehen.

Dazu Sprache: Sei  $S \supseteq R$  eine Erweiterung von Ringen und sei  $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  eine Familie von Elementen aus  $S$  dann betrachte

$$\bigcap_{\substack{\text{Zwischenringe } R \subseteq A \subseteq S \\ \forall \lambda \in \Lambda, a_\lambda \in A}} A = R[(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}]$$

Fakt:

- $R[(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}]$  ist ein Unterring von  $S$ , der alle  $a_\lambda$  enthält.
- $R[(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}]$  ist der kleinste Unterring von  $S$  der alle  $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  enthält.
- Sei  $\varphi : R[(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}] \rightarrow S$  die eindeutige Abbildung, die  $\forall \lambda$   $x_\lambda$  auf  $a_\lambda$  abbildet. Dann ist  $R[(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}] = \text{Bild}(\varphi)$

Auf Deutsch: Elemente von  $R[(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}]$  sehen aus wie Polynome in  $a_\lambda$ .

$$r_1 a_{\lambda_1}^7 a_{\lambda_2} + r_2 a_{\lambda_3}^8 \cdot a_{\lambda_4} \cdot a_{\lambda_1}$$

Spezialfall: Die Ringe  $R, S$  sind Körper. Gegeben also eine Körpererweiterung  $L/k$  und Familie von Elementen aus  $L$ ,  $A := (a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subseteq L$ . Dann haben wir Ringe/Körper

$$k \subseteq k[A] \xhookrightarrow{i} k(A) \subseteq L$$

und wir haben  $k[A] \hookrightarrow Q(k[A])$ . Und wir erhalten genau ein  $\eta : Q(k[A]) \rightarrow k(A)$  wobei  $\eta$  durch die universelle Eigenschaft des Quotientenkörpers gegeben ist.

Klar:  $\text{Bild}(\eta)$  ist Unterkörper von  $k(A)$ , der  $k[A]$  enthält  $\Rightarrow \text{Bild}(\eta) = k(A)$ . Also  $\eta$  ist isomorph.

**Satz 3.14.** Situation wie oben. Dann

$$k(A) \cong Q(k(A))$$

mit kanonischer Isomorphie.

**Beispiel 3.15.**  $k = \mathbb{R}$ ,  $L = \mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$

Wissen: jede komplexe Zahl kann ich schreiben als  $r_1 + ir_2$ , also  $\mathbb{R}[i] = \mathbb{R}(i) = \mathbb{C}$ .

Allgemein: Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung, sei  $a \in L$  algebraisch über  $k$ . Dann kann ich alle Elemente von  $k(a)$  schreiben als  $k_0 + k_1 \cdot a + k_2 a^2 + \dots + k_{n-1} a^{n-1}$  wobei  $n = [a : k]$ . Also  $k(a) = k[a]$ .

**Beispiel 3.16.**  $L/k$  Körpererweiterung,  $a \in L$  sei transzendent über  $k$ . Dann haben wir Abbildung

$$k[x] \rightarrow k[a] \subseteq k(a), \quad f(x) \mapsto f(a)$$

per Definition ist  $\varphi$  surjektiv. Per Annahme  $a$  transzendent ist  $\varphi$  injektiv.  $\Rightarrow k[a] \cong k[x]$ . Insbesondere  $k[a]$  kein Körper also  $\neq k(a)$ . Induktiv beweist man:

**Satz 3.17.** Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung, seien  $a_1, \dots, a_n \in L$  endlich viele Elemente, dann sind äquivalent

- 1) alle  $a_i$  sind algebraisch
- 2)  $k[a_1, \dots, a_n] = k(a_1, \dots, a_n)$

*Bemerkung.* Achtung: für  $\infty$  viele Elemente ist das Falsch! z.B. sei  $L/k$  beliebig.  $A = L$ , dann ist  $k[A] = k(A)$ .

### 3.3 Separable und Inseparable Körpererweiterungen

Frage: Sei  $L/k$  Erweiterung,  $a \in L$  sei algebraisch über  $k$  und  $f \in k[x]$  das Minimalpolynom. Kann  $f$  mehrfache Nullstellen in  $L$  haben?

Teilantwort: Wenn  $k = \mathbb{Q}$  ist, geht das nicht! Denn wenn  $f$  die Zahl  $a \in L$  als mehrfache Nullstelle hat, dann  $f'(a) = 0$ .  $\nLeftarrow$  zur Annahme  $f$  Minimalpolynom.

Ziel: Argument erweitern zu beliebigen Körpern

**Definition 3.18.** Sei  $k$  ein Körper,  $f \in k[x]$  ein Polynom. Dann schreibe

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot x^i$$

und setze

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n \underline{i} \cdot a_i \cdot x^{i-1}$$

wobei  $\underline{i} = \underbrace{1 + \dots + 1}_{i\text{-mal}} \in k$

**Satz 3.19.** Alle bekannten Ableitungsregeln gelten.

Zurück zur Frage: Wenn  $k$  ein beliebiger Körper der Charakteristik 0 ist, und  $a$  eine mehrfache Nullstelle von  $f$  ist (d.h. in  $L[x]$ ) kann ich schreiben

$$f = (x - a)(x - a) \cdot \text{rest}$$

Dann sagt Ketten/Produkt-Regel dass  $f'$  das  $a$  immer noch als Nullstelle hat. Weil  $\text{char}(k) = 0$ .  $f' \not\equiv 0$ . Also  $\nmid$  wie oben.

*Bemerkung.* In  $\text{char}(k) = p > 0$  immer noch wahr, dass  $f'(a) = 0$  ist, aber es könnte sein, dass  $f' \equiv 0$ .

**Definition 3.20.** Ein irreduzibles Polynom  $f$  heißt separabel, wenn  $f$  in  $\bar{k}$  keine mehrfache Nullstelle hat. Ein beliebiges Polynom  $f$  ist separabel, wenn alle irreduziblen Faktoren separabel sind. Ansonsten nenne  $f$  inseparabel.

*Bemerkung.* Falls  $\text{char}(k) = 0$ , sind alle Polynome separabel.

*Bemerkung.* (Nicht-irreduzible) separable Polynome können mehrfache Nullstellen haben.

Konstruktion mit Frobenius-Morphismus: Sei  $R$  ein Ring ein Ringmorphismus  $R \rightarrow S$  induziert einen Ringmorphismus  $R[x] \rightarrow S[x]$ . Für  $S = R$  und den Frobenius-Morphismus erhalten Ringmorphismus

$$\eta : R[x] \rightarrow R[x], \quad \sum a_i x^i \mapsto \sum a_i^p x^i$$

Falls  $R$  Integritätsring ist, ist  $\eta$  injektiv.

$\text{Bild}(\eta) = (R^p)[x] \subseteq R[x]$  und die Abbildung  $\eta : R[x] \rightarrow R^p[x]$  ist Isomorphismus.

**Satz 3.21** (Charakterisierung inseparabler Polynome). Sei  $k$  ein Körper, sei  $f \in k[x]$  irreduzibel. Dann sind äquivalent

- 1)  $f$  ist inseparabel
- 2)  $f' \equiv 0$
- 3)  $p = \text{char}(k)$  ist eine Primzahl. Es gibt ein irreduzibles separables  $g \in k[x]$  und  $n \in \mathbb{N}$  so dass  $f(x) = g(x^{p^n}) = g((x^p)^n)$ .

*Beweis.* 1)  $\Rightarrow$  2): Sei  $f$  inseparabel, d.h.  $f$  hat in  $\bar{k}$  eine mehrfache Nullstelle  $a$ , dann ist auch  $f'(a) = 0$ . Widerspruch zur Irreduzibilität falls  $f \not\equiv 0$ . Also  $f' \equiv 0$ .

2)  $\Rightarrow$  3): Sei  $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ . Dann:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot i \cdot x^{i-1}$$

wobei  $i$  hier  $\varphi(i) = \underbrace{1 + \dots + 1}_{i\text{-mal}}$ .

Falls  $\text{char}(k) = 0$  wäre dann ist  $\forall i$  mit  $a_i \neq 0$  auch  $i \cdot a_i \neq 0$  also  $f'(x) \neq 0$   $\nmid$ . Also ist  $\text{char}(k) = p > 0$ . Die Zahl  $p$  ist prim weil  $k$  ein Körper ist.

*Beobachtung*: Falls  $i$  kein Vielfaches von  $p$  ist, dann  $\varphi(i) \neq 0$ . Es ist aber  $a_i \cdot \varphi(i) = 0 \Rightarrow a_i = 0$  für alle  $i$  die kein Vielfaches von  $p$  sind. Also

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n/p} a_{j \cdot p} x^{j \cdot p}$$

Setze  $g_1(x) = \sum_{j=0}^{n/p} a_{j \cdot p} x^j$ . Dann  $f(x) = g_1(x^p)$ .

*Idee*: Falls  $g_1$  inseparabel ist, wiederhole Prozedur, finde  $g_2(x)$  so dass  $g_1(x) = g_2(x^p)$  ( $\Rightarrow f(x) = g_2(x^{2p})$ ). Weil der Grad der Polynome dabei sinkt terminiert diese Prozedur nach endlich vielen Schritten, finde  $g = g_n$  so dass  $f(x) = g(x^{n \cdot p})$  und  $g$  separabel ist.

Damit das funktioniert muss ich zeigen, dass  $g_1$  irreduzibel ist (per Induktion sind dann auch  $g_2, \dots, g_n = g$  irreduzibel).

*Erinnerung*: hatten Morphismen

$$\varphi_1 : k[x] \rightarrow (k^p)[x], \quad \sum h_i \cdot x^i \mapsto \sum h_i^p \cdot x_i$$

$$\mathcal{F} : k[x] \rightarrow (k^p)[x^p] \subseteq (k^n)[x] \subseteq k[x], \quad \sum h_i \cdot x^i \mapsto \sum h_i^p \cdot x^{i \cdot p}$$

Nachrechnen: es ist  $\varphi(f) \in (k^p)[x^p]$  weil  $f \in k[x^p]$  und  $g = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(f))$ . Da  $\varphi, \mathcal{F}$  Isomorphismen sind folgt aus  $f$  irreduzibel  $g_1$  irreduzibel.

3)  $\Rightarrow$  1): Angenommen  $f$  hat folgende Eigenschaft:  $\exists g(x) \in k[x] : f(x) = g(x^p)$ . Sei  $a \in \bar{k}$  eine Nullstelle von  $g$ , d.h.  $g(x) = (x - a) \cdot \text{rest}$  in  $\bar{k}[x]$ . Wähle  $b \in \bar{k}$  mit  $b^p = a$  (das geht, weil  $\bar{k}$  algebraisch abgeschlossen ist). Dann

$$g(x^p) = (x^p - b^p) \cdot \text{rest} = (x - b)^p \cdot \text{rest}$$

$\Rightarrow b \in \bar{k}$  ist  $p$ -fache Nullstelle von  $f$ , also  $f$  inseparabel. □



Warum diese Diskussion von Inseparabilität? Antwort kommt jetzt!

**Lemma 3.22.** Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung und  $a \in L$ , sei algebraisch über  $k$ . Setze  $M = k(a)$ . Sei  $f(x) \in k[x]$  das Minimalpolynom von  $a$ . Angenommen  $f$  hat exakt  $m$  unterschiedliche Nullstellen in  $\bar{k}$ . Dann gibt es genau  $m$  unterschiedliche  $k$ -Morphismen

$$\varphi : M \rightarrow \bar{k}$$

*Bemerkung.* Falls  $f$  separabel ist,  $m = \deg f$ . Falls  $f$  inseparabel ist, ist  $m < \deg f$ .

*Beweis. Beobachtung 1:* Wir wissen schon: Die Elemente von  $M$  kann ich schreiben als

$$\lambda_0 \lambda_1 a + \lambda_2 a^2 + \cdots + \lambda_{n-1} a^{n-1}$$

mit  $\lambda_i \in k$  wobei  $n = \deg f$ . Insbesondere ist für alle solche Elemente

$$\varphi(\lambda_0 + \lambda_1 a + \cdots + \lambda_{n-1} a^{n-1}) = \sum \lambda_i \varphi(a)^i$$

das bedeutet:  $\varphi$  ist durch  $\varphi(a)$  eindeutig festgelegt!

*Beobachtung 2:* Gegeben einen  $k$ -Morphismus  $\varphi$ , dann ist  $\varphi(a)$  eine Nullstelle des Polynoms  $f(x) \in k[x]$  habe aber nur  $m$  unterschiedliche Nullstellen!

Insgesamt also höchstens  $m$  unterschiedliche Morphismen!

Noch zu zeigen: Wenn  $b \in \bar{k}$  eine Nullstelle von  $f$  ist, dann existiert ein  $k$ -Morphismus  $\varphi : M \rightarrow \bar{k}$  so dass  $\varphi(a) = b$  ist.

*Erinnerung:* Wir wissen  $M \simeq k[x]/(f)$  wobei  $a$  mit  $[x]$  identifiziert wird.

Haben Morphismus:

$$\Omega : k[x] \rightarrow \bar{k}, \quad g \mapsto g(b)$$

Dann  $f \in \text{Ker}(\Omega)$ , der Kern ist ein Hauptideal und  $f$  reduzibel also:  $(f) = \text{ker}(\Omega)$ . Also erhalte (nach universeller Eigenschaft) einen Morphismus  $k[x]/(f) \rightarrow \bar{k}$  wobei  $[x] \mapsto b$

Erhalte  $M \rightarrow \bar{k}$  durch Komposition der Morphismen.

Varianten mit völlig analogem Beweis

**Lemma 3.23.** Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung.  $a \in L$  algebraisch mit Minimalpolynom  $f \in k[x]$ .  $f$  hat  $m$  unterschiedliche Nullstellen in  $L$ . Dann gibt es genau  $m$  unterschiedliche  $k$ -Morphismen  $\varphi : M \rightarrow L$ , wobei  $M = L(a)$  ist.

**Lemma 3.24.** Seien  $L_1$  und  $L_2$  Körper und  $\sigma : L_1 \rightarrow L_2$  Körpermorphismen.  $a \in L_2$  sei algebraisch über  $\text{Bild}(\sigma)$  mit Minimalpolynom  $f$ . Angenommen  $f$  hat  $m$  unterschiedliche Nullstellen in  $L_2$ . Dann gibt es genau  $m$  unterschiedliche Fortsetzungen von  $\sigma$  zu Morphismen  $\Sigma : M \rightarrow L_2$ , wobei  $M \supseteq L$ , der Körper  $\sigma(L_1)(a)$ .

□

Spezialfall:  $M = \bar{k}$ . Dann hat  $f$  (mit Vielfachheit) genau  $n = \deg f$  Nullstellen. Beachte  $f$  separabel  $\Leftrightarrow n$  unterschiedliche Nullstellen  $\Leftrightarrow n$  unterschiedliche Fortsetzungen von  $\varphi$  zu  $k(a)$ .

**Definition 3.25.** Sei  $L/k$  Körpererweiterung. Nenne algebraisches  $a \in L$  separabel, wenn das zugehörige Minimalpolynom separabel ist. Nenne  $L/k$  separabel, falls alle  $a \in L$  algebraisch und separabel über  $k$  sind. Nenne  $L/k$  inseparabel falls algebraisches  $a \in L$  existiert, das nicht separabel über  $k$  ist.

**Satz 3.26.** Sei  $L/k$  eine endliche Körpererweiterung und  $n := [L : k]$ . Dann gilt:

- 1) Es gibt höchstens  $n$   $k$ -Morphismen  $L \rightarrow \bar{k}$
- 2)  $L/k$  ist genau dann separabel, wenn es exakt  $n$  solche Morphismen gibt

*Beweis.* Vorbereitung: Wegen der Endlichkeit, finde  $a_1, \dots, a_l \in L$  so dass  $L = k(a_1, \dots, a_l)$ . Betrachte Kette von Erweiterungen

$$k \subseteq k(a_1) \subseteq k(a_1, a_2) \subseteq \dots \subseteq k(a_1, \dots, a_l) = L$$

Sei  $k_0 = k$  und  $k_l = k_{l-1}(a_l)$ .

1) Erinnerung es gibt höchstens  $[a_1 : k_0]$  viele unterschiedliche  $k$ -Morphismen  $\sigma_1 : k_1 \rightarrow \bar{k}$ .

*Erinnerung:* Gegeben  $\sigma_1 : k_1 \rightarrow \bar{k}$ , dann gibt es maximal  $[a_2 : k_1]$  viele Fortsetzungen von  $\sigma_1$  zu Morphismen  $\sigma_2 : k_2 \rightarrow \bar{k}$ .

*Erinnerung:* Gegeben  $\sigma_i : k_i \rightarrow \bar{k}$ , dann gibt es höchstens  $[a_{i+1} : k_i]$  viele Fortsetzungen von  $\sigma_i$  zu  $\sigma_{i+1} : k_{i+1} \rightarrow \bar{k}$ .

*Insgesamt:* Maximal

$$[a_1 : k_0] \cdot [a_1 : k_2] \cdot \dots \cdot [a_l : k_{l-1}] = [L : k]$$

viele Fortsetzungen von  $Id_k : k \rightarrow \bar{k}$  zu Morphismen  $L \rightarrow \bar{k}$ .

2) Angenommen  $L/k$  ist separabel. Wir wissen: die maximale Zahl von Erweiterungen existiert, falls für alle  $i$  gilt  $a_{i+1}$  ist separabel über  $k_i$ . Per Annahme:  $a_{i+1}$  ist separabel über  $k$ .

Aber:  $f_{k_i} \mid f_k$  also klar, dass  $f_{k_i}$  keine mehrfachen Nullstellen hat.

b)  $\Leftarrow$  Angenommen  $L/k$  nicht separabel. Kann die  $a_i$  so wählen, dass bereits  $a_1/k$  nicht separabel ist.

$\Rightarrow$  haben weniger als  $[a_1 : k_0]$  viele  $k$ -Morphismen  $\sigma_i : k_1 \rightarrow \bar{k}$ .

$\Rightarrow$  haben insgesamt weniger als  $[L : k]$  viele  $k$ -Morphismen  $\sigma_l : L \rightarrow \bar{k}$ .  $\square$

**Folgerung 3.27.** Sei  $L/k$  endlich.  $n = [L : k]$ . Sei  $M/k$  algebraisch. Dann gibt es höchstens  $n$  unterschiedliche  $k$ -Morphismen  $L \rightarrow M$ .

*Beweis.* Bette  $M$  in  $\bar{k}$  ein. Dann liefert jeder  $k$ -Morphismus  $L \rightarrow M$  automatisch einen  $k$ -Morphismus  $L \rightarrow \bar{k}$ .  $\square$

**Folgerung 3.28.** Sei  $L/k$  endlich.  $L = k(a_1, \dots, a_l)$ . Falls für alle  $i$  gilt  $a_{i+1}$  ist separabel über  $k(a_1, \dots, a_i)$  dann gibt es genau  $[L : k]$ -viele  $k$ -Morphismen  $L \rightarrow \bar{k}$ .

**Folgerung 3.29.** Sei  $L/K$  eine Körpererweiterung. Seien  $a_1, \dots, a_n \in L$ . Wenn  $a_{i+1}$  separabel über  $K(a_1, \dots, a_i)$  ist, dann ist  $K(a_1, \dots, a_n)$  eine separable Erweiterung von  $K$ .

**Folgerung 3.30.** Sei  $k \subseteq L \subseteq M$  eine Kette von Körpererweiterungen so dass  $L/k$  und  $M/L$  jeweils separabel sind, dann ist  $M/k$  separabel.

*Beweis.* Sei  $m \in M$  gegeben. Betrachte das Minimalpolynom  $f_L(x) \in L[x]$  von  $m$ . Schreibe  $f_L(x) = \sum_{i=1}^n a_i x^i$ , wobei  $a_i \in L$  geeignete Koeffizienten sind.

Betrachte den Zwischenkörper

$$L' = k(a_0, \dots, a_{n-1})$$

und schreibe

$$L'' = k(a_0, \dots, a_{n-1}, m)$$

Wende letzte Folgerung auf  $L''$  an, erhalten mit Satz dass  $L''/k$  separabel ist. Also ist  $m/k$  separabel.  $\square$

**Folgerung 3.31.** Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung. Sei

$$L_{\text{Sep}} = \{l \in L \mid l \text{ ist separabel über } k\}$$

Dann ist  $L_{\text{Sep}}$  ein Unterkörper von  $L$ .

*Notation:* Nenne  $L_{\text{Sep}}$  den separablen Abschluss (separable Hülle) von  $k$  in  $L$  ist.

*Beweis.* Gegeben  $a, b \in L_{\text{Sep}}$ , müssen zeigen dass  $a + b, a \cdot b, a - b$  und gegebenenfalls  $a/b$  in  $L_{\text{Sep}}$  liegen.

*Wissen:* all diese Elemente liegen in  $k(a, b)$ , das nach obiger Folgerung separabel ist.  $\square$

Notation: Sei  $L/k$  Körpererweiterung. Nenne  $[L_{\text{Sep}} : k]$  den Sepearabilitätsgrad von  $L/k$ .

**Definition 3.32.** Nenne Körper  $k$  vollkommen, falls jede algebraische Körpererweiterung automatisch separabel ist.

*Bemerkung.* Trivial: Körper der  $\text{char} = 0$  und algebraisch abgeschlossene Körper sind vollkommen.

**Satz 3.33.** Sei  $k$  ein Körper mit positiver Charakteristik. Dann ist äquivalent:

- 1)  $k$  ist vollkommen
- 2) Der Frobenius-Morphismus  $F : k \rightarrow k$  ist surjektiv

*Beweis.* 1)  $\Rightarrow$  2) Beweis der Kontraposition: Sei  $F$  nicht surjektiv. Sei also  $k \in k \setminus k^p$ . Sei  $b \in \bar{k}$  so dass  $b^p = a$ . (Erinnerung  $F : \bar{k} \rightarrow \bar{k}$  ist injektiv, das heißt  $b$  ist eindeutig).

Betrachte die Erweiterung  $k(b)/k$ . Das Minimalpolynom von  $b$  ist Teiler von  $x^p - a$  (das hat lediglich  $b$  als Nullstelle) hat also nur eine Nullstelle, nämlich  $b$ .

2)  $\Rightarrow$  1) Angenommen  $F$  wäre surjektiv,  $k = k^p$ . Angenommen  $k$  wäre nicht vollkommen, dann gäbe es ein inseparables, irreduzibles Polynom  $f(x) \in k[x]$ .

*Erinnerung:* Es gibt  $g \in k[x]$  so dass  $f(x) = g(x^p)$ . Schreibe  $g(x) = \sum_{i=0}^n g_i \cdot x^i$ .

Per Annahme  $\forall i \exists h_i \in k$  mit  $g_i = (h_i)^p$ . Also

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum (h_i)^p x^i \\ g(x^p) &= \sum (h_i x^i)^p = \left( \sum h_i x^i \right)^p \end{aligned}$$

also  $\sum h_i x^i$  ist echter Teiler von  $f(x)$  in  $k[x]$   $\nrightarrow$  zur Irreduzibilität von  $f$ .  $\square$

### 3.4 Galoissche Körpererweiterungen

**Definition 3.34.** Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung. Betrachte die Menge

$$\text{Gal}(L/k) = \{k\text{-Morphismen } L \rightarrow L \text{ die surjektiv, also isomorph sind}\}$$

Beobachtung:  $\text{Gal}(L/k)$  ist eine Gruppe mit Einheit  $Id_L$  und der Hintereinanderausführung als Gruppenverknüpfung. Die Inversen sind die Umkehrabbildungen.

*Diese Gruppe heißt Galoisgruppe*

Variante: Sei  $k$  ein Körper,  $f \in k[x]$  ein Polynom,  $L$  der Zerfällungskörper. Dann bezeichne  $\text{Gal}(L/k)$  auch als  $\text{Gal}(f)$  (Galoisgruppe von  $f$ ).

Zentrale Beobachtung: Falls  $L/k$  endlich ist dann ist  $\text{Gal}(L/k)$  endlich und  $\# \text{Gal}(L/k) \leq [L : k]$ .

Analog

$$\# \text{Gal}(f) \leq [\text{Zerfällungskörper von } f : k] \leq (\deg f)!$$

**Beispiel 3.35.** 1)  $k = \mathbb{Q}, L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$  Wissen: die Elemente von  $L$  schreiben sich als  $a + b\sqrt{2}$  mit  $a, b \in \mathbb{Q}$ .

Die Elemente der Galoisgruppe sind durch die Bilder von  $\sqrt{2}$  festgelegt, und  $\sqrt{2}$  kann nur auf andere Nullstellen von  $x^2 - 2$  abgebildet werden. Es gibt aber nur eine andere Nullstelle, nämlich  $-\sqrt{2}$ .

$$\Rightarrow \text{Gal}(L/k) = \{Id, a + b\sqrt{2} \mapsto a - b\sqrt{2}\} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$$

2) Analog  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \{Id_{\mathbb{C}}, \text{Konjugation}\}$

3)  $k = \mathbb{Q}, L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$  Wieder: Elemente der Galoisgruppe sind durch das Bild von  $\sqrt[3]{2}$  bestimmt und als Bilder kommen nur die Nullstellen von  $x^3 - 2$  in Frage. In  $L$  ist  $\sqrt[3]{2}$  aber die einzige Nullstelle.

$$\Rightarrow \text{Gal}(L/\mathbb{Q}) = \{Id_L\}$$

4) Sei  $k$  ein endlicher Körper, sei  $\mathbb{F}_p$  der Primkörper von  $k$ . Betrachte  $k/\mathbb{F}_p$ . Betrachte den Frobenius-Morphismus  $F : k \rightarrow k$ .

*Beobachtung:*

$$\begin{aligned} F(1) &= 1^p = 1 \\ F(1+1) &= 1+1 \\ &\vdots \\ F(1+\dots+1) &= 1+\dots+1 \end{aligned}$$

Das heißt für alle  $a \in \mathbb{F}_p$  gilt  $F(a) = a$ .

*Beobachte auch:* Die  $a \in k$  für die  $F(a) = a$  gilt sind exakt die Nullstellen des Polynoms  $x^p - x$ . Dieses Polynom hat höchstens  $p$  Nullstellen. Also für alle  $a \in k$  gilt  $F(a) = a \Leftrightarrow a \in \mathbb{F}_p$ .

*Insgesamt:* Der Frobenius-Morphismus ist ein  $\mathbb{F}_p$ -Automorphismus von  $k$ .  $F \in \text{Gal}(k/\mathbb{F}_p)$ .

*Fakt:* Die Galoisgruppe ist von  $F$  erzeugt, d.h. alle Elemente sind von der Form

- $Id_k$
- $\underbrace{F \circ \dots \circ F}_{n\text{-mal}}$
- $\underbrace{F^{-1} \circ \dots \circ F^{-1}}_{n\text{-mal}}$

Ziel: Die Galois-Gruppe ausrechnen!

Falls  $L/k$  algebraisch:

Beobachtung: Wir können stets  $L$  in  $\bar{k}$  einbetten. Jedes  $\sigma \in \text{Gal}(L/k)$  ist dann automatisch ein Morphismus

$$L \rightarrow L \subseteq \bar{k}$$

Falls  $L/k$  endlich ist wissen wir: Es existieren höchstens  $[L : k]$  viele  $k$ -Morphismen  $L \rightarrow \bar{k}$ . Also

$$\# \text{Gal}(L/k) \leq [L : k]$$

Frage: Haben wir Gleichheit?

Antwort: Im allgemeinen nein!

- Falls  $L/k$  inseparabel ist, dann weniger als  $[L : k]$  viele  $k$ -Morphismen  $L \rightarrow \bar{k}$ .
- Es kann passieren, dass für gegebenes  $\sigma : L \rightarrow \bar{k}$ ,  $\text{Bild}(\sigma) \neq L$  ist.  $\Rightarrow$  dieses  $\sigma$  liefert kein Element von  $\text{Gal}(L/k)$ .

**Definition 3.36.** Sei  $L/k$  eine Körpererweiterung. Nenne  $L/k$  normal, wenn  $L/k$  algebraisch ist und wenn jedes irreduzible Polynom  $f \in k[x] \setminus \{0\}$ , das in  $L$  überhaupt eine Nullstelle hat, bereits über  $L$  in Linearfaktoren zerfällt.

**Beispiel 3.37.** •  $\mathbb{C}/\mathbb{R}$  ist normal

- $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})/\mathbb{Q}$  ist nicht normal, denn  $x^3 - 2$  hat Nullstelle, zerfällt aber nicht.
- $\bar{k}/k$  ist immer normal
- Werden gleich sehen: Zerfällungskörper sind normal!

**Satz 3.38.** Sei  $L/k$  eine algebraische Körpererweiterung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1)  $L/k$  ist normal
- 2) Es gibt eine Familie  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  von Polynomen in  $k[x]$  so dass  $L$  aus  $k$  entsteht durch Adjunktion sämtlicher Nullstellen der  $f_\lambda$  in  $\bar{L}$ .
- 3) Jeder Körpermorphismus  $\sigma : L \rightarrow \bar{k}$  hat  $\text{Bild}(\sigma) = L$

*Beweis.*  $L/k$  ist algebraisch. Wir betrachten  $L$  daher als Unterkörper von  $\bar{k}$ .

1)  $\Rightarrow$  2): Finde Elemente  $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  von  $L$ , so dass  $L = k(a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ . Die  $a_\lambda$  sind algebraisch über  $k$  und haben Minimalpolynome  $f_\lambda$ . Jedes der  $f_\lambda$  hat eine Nullstelle in  $L$  (nämlich  $a_\lambda$ ), zerfällt also über  $L$  (da  $L/k$  normal). Sei jetzt  $(b_\mu)_{\mu \in M}$  die Familie der Nullstellen aller  $f_\lambda$ . Per Annahme: alle  $b_\mu \in L$  und  $L = k(b_\mu \mid \mu \in M)$  da  $L \subseteq \{b_\mu \mid \mu \in M\} \supseteq \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ .

2)  $\Rightarrow$  3): Sei  $L$  wie in 2) gegeben. Das heißt es gibt Familie  $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  von Polynomen, so dass  $L = k(b_\mu \mid \mu \in M)$  wobei  $(b_\mu)_{\mu \in M}$  die Familie der Nullstellen der  $f_\lambda$  in  $\bar{k}$  ist. Weiter sei ein  $k$ -Morphismus  $\sigma : L \rightarrow \bar{k}$  gegeben. Muss zeigen  $\text{Bild}(\sigma) = L$ .

*Schritt 1:* Zeige:  $\text{Bild}(\sigma) \subseteq L$ . Da  $L = k(b_\mu \mid \mu \in M)$  ist, genügt es zu zeigen dass für alle  $\mu$   $\sigma(b_\mu) \in L$ . Sei  $\mu$  gegeben, per Definition finde ich ein  $\lambda$  so dass  $f_\lambda(b_\mu) = 0$ . Erinnerung:  $\sigma$  ist ein  $k$ -Morphismus und  $f_\lambda \in k[x]$ . Das bedeutet  $\sigma(b_\mu)$  ist wieder eine Nullstelle von  $f_\lambda$ . Also  $\sigma(b_\mu) \in L$ .

*Schritt 2:* Zeige:  $\text{Bild}(\sigma) \supseteq L$ . Es genügt zu zeigen: Für alle  $\mu$  gilt  $b_\mu \in \text{Bild}(\sigma)$ . Sei also ein  $\mu$  gegeben. Wieder finde  $\lambda$  so dass  $f_\lambda(b_\mu) = 0$ . Das  $f_\lambda$  hat weitere Nullstellen  $b_\mu, b_{\mu_1}, \dots, b_{\mu_d}$  wobei  $d = \deg(f_\lambda) - 1$ . Wir wissen:  $\sigma$  bildet die  $d$  Nullstellen  $b_\mu, b_{\mu_1}, \dots, b_{\mu_d}$  injektiv auf die Nullstellen von  $f_\lambda$  ab.  $\Rightarrow \sigma(b_\mu) = b_\mu$  oder es gibt  $1 \leq i \leq d$  so dass  $\sigma(b_{\mu_i}) = b_\mu$ .

3)  $\Rightarrow$  1): Muss zeigen: jedes irreduzible  $f \in k[x]$ , das in  $L$  eine Nullstelle hat, zerfällt über  $L$  in Linearfaktoren. Sei also  $f \in k[x]$  wie oben gegeben, sei  $a \in L$  eine Nullstelle von  $f$ , sei  $b \in \bar{k}$  eine weitere Nullstelle. Muss zeigen:  $b \in L$ . Wir wissen: es gibt  $k$ -Isomorphismen

$$k(a) \longleftarrow k[x]/(f) \longrightarrow k(b)$$

so dass für die Komposition  $\varphi$  gilt  $\varphi(a) = b$ . Insgesamt habe ich

$$L \supseteq k(a) \xrightarrow{\varphi} k(b) \subseteq \bar{k}$$

Universelle Eigenschaft von  $\bar{k}$ . Ich kann Morphismus  $\varphi$  fortsetzen zu  $\sigma : L \rightarrow \bar{k}$ . Per Annahme:  $\text{Bild}(\sigma) = L$ , aber  $b \in \text{Bild}(\sigma)$ .  $\square$

**Folgerung 3.39.** Sei  $L/k$  endlich. Dann ist äquivalent:

- 1)  $L/k$  ist normal
- 2)  $L$  ist Zerfällungskörper eines einzigen Polynoms

*Beweis.* 2)  $\Rightarrow$  1) : folgt aus dem Satz

1)  $\Rightarrow$  2) :  $L/k$  ist endlich also gibt es  $a_1, \dots, a_n \in L$  so dass  $L = k(a_1, \dots, a_n)$ . Sei  $f_1, \dots, f_n$  die Minimalpolynome. Behauptung:  $L$  ist Zerfällungskörper von  $f = f_1 \cdot \dots \cdot f_n$ .

Seien  $(b_\mu)_{\mu \in M}$  die Nullstellen von  $f$ . Weil  $L/k$  normal ist, folgt

$$L = k(a_1, \dots, a_n) = k(b_\mu \mid \mu \in M)$$

also ist  $L$  der Zerfällungskörper.  $\square$

**Folgerung 3.40.** Sei  $L/k$  eine algebraische Körpererweiterung. Dann gibt es einen Oberkörper  $k \subseteq L \subseteq N \subseteq \bar{k}$  so dass gilt

- 1)  $N/k$  ist normal
- 2) Wenn ich einen Zwischenkörper habe

$$k \subseteq L \subseteq N' \subseteq N$$

so dass  $N'/k$  normal ist  $\Rightarrow N = N'$

Wenn  $\tilde{N}$  ein weiterer Oberkörper ist mit Eigenschaften 1) und 2)  $\Rightarrow \tilde{N}$  und  $N$  sind  $k$ -Isomorph.

Nenne  $N/k$  die normale Hülle von  $L/k$ .

*Beweis.* Schreibe  $L = k(a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$ . Seien  $f_\lambda$  die Minimalpolynome der  $a_\lambda$ . Sei  $(b_\mu)_{\mu \in M}$  die Familie aller Nullstellen. Setze  $N := k(b_\mu \mid \mu \in M)$ . Mit Satz folgt  $N$  ist normal.

Sei  $N'$  ein Zwischenkörper. Um zu zeigen  $N = N'$  muss ich zeigen: alle  $b_\mu \in N'$ . Sei also  $\mu$  gegeben, wähle  $\lambda$  so dass  $f_\lambda(b_\mu) = 0$ . Dann  $f_\lambda$  hat Nullstelle in  $N'$  (nämlich  $a_\lambda$ ) also zerfällt  $f_\lambda$  über  $N'$ , das heißt  $b_\mu \in N' \Rightarrow N = N'$



Sei jetzt  $\tilde{N}$  gegeben. Finde Einbettung  $\sigma : \tilde{N} \rightarrow \bar{k}$ . Es ist  $\tilde{N} \simeq \text{Bild}(\sigma)$ . Also genügt es, den Fall zu betrachten, wo  $\tilde{N} \subseteq \bar{k}$  und für jedes solche  $\tilde{N}$  zu zeigen:  $N = \tilde{N}$ .

*Beobachte:*  $N \cap \tilde{N}$  ist ein Oberkörper von  $L$ , der wieder normal ist.

Also habe ich

$$k = \subseteq L \subseteq N' \subseteq N$$

Da  $N' = N \cap \tilde{N}$  folgt  $N' = N$  daraus folgt  $N \subseteq \tilde{N}$ .

Die andere Inklusion  $N \supseteq \tilde{N}$  folgt analog. □

**Satz 3.41.** Sei  $L/K$  eine endliche Körpererweiterung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

- 1)  $L/K$  ist normal und separabel
- 2)  $L$  ist Zerfällungskörper eines separablen Polynoms  $f \in K[x]$
- 3)  $|\text{Gal}(L/K)| = [L : K]$

solche Körpererweiterungen heißen Galoissche Körpererweiterung.

*Beweis.* 1)  $\Rightarrow$  2)  $L$  ist der Zerfällungskörper eines  $f \in K[x]$ . Die irreduziblen Faktoren von  $f$  können keine mehrfache Nullstelle haben, denn ein solche Faktor ist das Minimalpolynom eines separablen Elements  $\in L$ .

2)  $\Rightarrow$  1)  $L$  ist separabel, weil  $f$  separabel ist.  $L$  ist normal, denn es ist ein Zerfällungskörper über  $K$ .

1)  $\Leftrightarrow$  2) Sei  $\bar{L}$  ein algebraischer Abschluss von  $L$ .  $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$  kann zu einem  $K$ -morphismus  $L \rightarrow \bar{L}$  fortgesetzt werden.

Angenommen  $[L : K] = n$ , dann gibt es maximal  $n$   $K$ -morphisme  $L \rightarrow \bar{L}$  und es gibt genau  $n$  weil  $L$  separabel ist. Außerdem ist  $L/K$  genau dann normal wenn für jeden  $K$ -morphismus  $\tau : L \rightarrow \bar{K}$  gilt  $\tau(L) = L$  deshalb ist  $\tau$  ein Element von  $\text{Gal}(L/K)$ . □

**Folgerung 3.42.** Sei  $K$  ein Körper der Charakteristik 0, dann ist jeder Zerfällungskörper über  $K$  Galois-Erweiterung.

*Bemerkung.* Wenn  $K \subset L \subset M$  Körpererweiterungen sind und  $K/M$  Galois ist, dann ist  $L/M$  Galois, aber  $K/L$  muss nicht Galois sein.

*Bemerkung.* Sei  $f \in K[x]$  ein separables Polynom mit Zerfällungskörper  $L$ . Dann notiere  $\text{Gal}(f) = \text{Gal}(L/K)$ .

- 1) Seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  die Nullstellen von  $f$ . Dann permutiert  $\sigma \in \text{Gal}(f)$  die  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , und  $\sigma$  wird durch diese Permutation eindeutig bestimmt. Wir können also  $\text{Gal}(f)$  als Untergruppe von  $S_n$  betrachten.

Für  $f(\alpha_i) = 0$  gilt

$$c_n \alpha_i^n + \dots + c_1 \alpha_i + c_0 = 0 \quad c_i \in K$$

und damit

$$\begin{aligned} & \sigma(c_n \alpha_i^n + \dots + c_1 \alpha_i + c_0) = \sigma(0) \\ \Rightarrow & \sigma(c_n) \sigma(\alpha_i)^n + \dots + \sigma(c_1) \sigma(\alpha_i) + \sigma(c_0) = 0 \\ \Rightarrow & f(\sigma(\alpha_i)) = c_n \sigma(\alpha_i)^n + \dots + c_1 \sigma(\alpha_i) + c_0 = 0 \end{aligned}$$

- 2) Die Nullstellen der irreduziblen Faktoren werden untereinander permutiert.
- 3) Wenn  $f$  irreduzibel ist, dann operiert  $\text{Gal}(f)$  transitiv auf der Menge der Nullstellen. (siehe Definition 4.3)
- 4) Sei  $n = \deg(f)$  und  $f$  irreduzibel, dann gilt  $n \mid |\text{Gal}(f)|$

*Beweis.* 3) Seien  $a$  und  $b$  Nullstellen von  $f$ . Dann ist

$$L \supset K(a) \cong K[x]/(f) \cong K(b) \subset L$$

Und damit einen Isomorphismus  $\sigma : K(a) \rightarrow L$ .  $\sigma$  kann zu einem  $K$ -morphismus  $L \hookrightarrow \bar{L}$  erweitert werden. Da  $L/K$  normal ist, gilt  $\sigma(L) = L$ , also  $\sigma \in \text{Gal}(L/K)$ .  $\square$

**Definition 3.43.** Sei  $L/K$  eine Galoissche Körpererweiterung und  $\alpha \in L$  ein beliebiges Element, dann nennen wir die Elemente  $\sigma(\alpha), \sigma \in \text{Gal}(L/K)$ , die konjugierten von  $\alpha$ . Die Menge  $\{\sigma(\alpha) \mid \sigma \in \text{Gal}(L(K))\}$  ist die Menge der Nullstellen des Minimalpolynoms von  $\alpha$ .

**Beispiel 3.44.**  $f = X^3 - 3 \in \mathbb{Q}[X]$ , hat Nullstellen  $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$  und  $\sqrt[3]{2} \cdot \zeta_3, \sqrt[3]{2} \cdot \zeta_3^2 \in \mathbb{C}$  mit  $\zeta_3 = e^{2\pi i/3}$ .

$\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$  ist nicht Galois.

$L = \mathbb{Q}(\alpha, \zeta_3)$  ist der Zerfällungskörper von  $f$ .

$[L : \mathbb{Q}]$  ist 6. Denn  $\text{Gal}(f) \subset S_3$  und  $\#S_3 = 6$  und damit  $\mathbb{Q} \subset_3 \mathbb{Q}(\alpha) \subset_2 L$ . Also  $\text{Gal}(f) = S_3$ .

**Satz 3.45.** Sei  $K$  ein Körper und  $G \subset \text{Aut}(K)$  eine endliche Untergruppe. Dann ist

$$\text{Fix}(G) = \{\alpha \in K \mid \sigma(\alpha) = \alpha, \forall \sigma \in G\}$$

ein Unterkörper von  $K$ , genannt der Fixkörper von  $G$ .

**Satz 3.46** (E. Artin). Sei  $G$  eine endliche Untergruppe von  $\text{Aut}(L)$  für einen beliebigen Körper  $L$ . Schreibe  $K = \text{Fix}(G)$ . Dann ist  $L/K$  Galois, und  $G = \text{Gal}(L/K)$ .

Insbesondere  $[L : K] = \#G$ .

**Satz 3.47.** Sei  $K$  ein endlicher Körper, mit  $q$  Elementen. Dann ist  $q = p^m$  für eine Primzahl  $p$  und  $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Außerdem ist  $K$  isomorph zu dem Zerfällungskörper von

$$x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$$

Umgekehrt, für jedes  $q = p^m$ , hat der Zerfällungskörper  $\mathbb{F}_q$  von  $x^q - x \in \mathbb{F}_p[x]$   $q$  Elemente.

Die Galois Gruppe ist  $\text{Gal}(\mathbb{F}_q/\mathbb{F}_p) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +)$  und wird erzeugt vom Frobenius-Morphismus:  $F : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{F}_q, a \mapsto a^p$ .

*Beweis.* Sei  $\mathbb{F}_p \subset K$  mit  $m = [K : \mathbb{F}_p]$  und damit  $q = p^m$ .

Wir haben gesehen dass  $\mathbb{F}_p = \{\alpha \in K \mid F(\alpha) = \alpha\} = \text{Fix}(F)$ .

Also gibt es  $\tilde{m} \in \mathbb{Z}_{>0}$  so dass  $F^{\tilde{m}} = \text{Id}_K$ . Also ist

$$G = \{\text{Id}, F, F^2, \dots, F^{\tilde{m}-1}\} \subset \text{Aut}(K)$$

Also ist  $\text{Fix}(G) = \mathbb{F}_p$ . Mit dem Satz von Artin folgt  $K/\text{Fix}(G)$  ist Galois mit Gruppe  $G$ .

Also ist  $K/\mathbb{F}_p$  ist Galois.  $m = [K : \mathbb{F}] = \#G \Rightarrow \tilde{m} = m$ .

Es gilt  $F^m : K \rightarrow K = \text{Id}_K$ . Also ist  $x^{p^m} = x$ , oder auch  $x^q - x = 0, \forall x \in K$ . Also gilt  $X^q - X = \prod_{x \in K} (X - x)$ . Insbesondere ist  $K$  isomorph zu einem Zerfällungskörper von  $X^q - X$ .

Umgekehrt, wenn  $q = p^m$  eine Primzahlpotenz ist. Betrachte  $\{x \in \overline{\mathbb{F}_p} \mid x^q = x\} = \text{Fix}(F^m)$ . Das ist ein Körper. Außerdem ergibt  $X^q - X$  abgeleitet  $qX^{q-1} - 1 = -1 \neq 0$ . Also gilt  $\#\text{Fix}(F^m) = q$ .  $\square$

**Definition 3.48.** Sei  $H$  eine Gruppe, und  $L$  ein Körper. Sei  $L^*$  die Gruppe der Einheiten in  $L$ , also  $L^* = L \setminus \{0\}$ .

Ein ( $L$ -wertiger) Charakter von  $H$  ist ein Gruppenmorphismus

$$H \rightarrow L^*$$

Beachte: Wenn  $\sigma : K \rightarrow L$  ein Körpermorphismus ist erhalten wir einen Charakter  $K^* \rightarrow L^*$  der Gruppe  $K^*$ .

**Satz 3.49.** Seien  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  paarweise verschiedene Charaktere einer Gruppe  $H$  mit Werten in einem Körper  $L$ . Seien  $a_1, \dots, a_n \in L$  so dass die Linearkombination

$$\sum_{i=1}^n a_i \sigma_i : H \rightarrow L, h \mapsto \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i(h)$$

die Nullabbildung ist. Dann gilt  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .

*Beweis.* Induktion über  $n$ .

*Fall  $n = 1$ :*  $a_1 \cdot \sigma_1(h) = 0, \sigma_1(h) \in L^* \Rightarrow a_1 = 0$

*Fall  $n > 1$ :*

$$\sum_{i=1}^n a_i \sigma_i(h) = 0 \quad \forall h \in H$$

Da  $\sigma_1 \neq \sigma_n$ , also gibt es  $g \in H$  so dass  $\sigma_1(g) \neq \sigma_n(g)$ .

$$\sum_{i=1}^n a_i \sigma_n(g) \sigma_i(h) = 0 \quad \forall h \in H \quad (*)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \sigma_i(g) \sigma_i(h) = \sum_{i=1}^n a_i \sigma_i(gh) = 0 \quad \forall h \in H \quad (**)$$

Wir betrachten die Differenz von  $(*)$  und  $(**)$ .

$$\sum_{i=1}^n (a_i \sigma_i(g) \sigma_i(h) - a_i \sigma_n(g) \sigma_i(h)) = 0 \quad \forall h \in H$$

oder

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\sigma_i(g) - \sigma_n(g)) \sigma_i(h) = 0$$

Mit der Induktionsvoraussetzung folgt für alle  $i < n$   $a_i (\sigma_i(g) - \sigma_n(g)) = 0$  und da  $\sigma_1(g) \neq \sigma_n(g)$  gilt  $a_1 = 0$ .

Also erhalten wir

$$\sum_{i=2}^n a_i \sigma_i(h) = 0 \quad \forall h \in H$$

und durch Induktion  $a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0$ . □

**Satz 3.50** (E. Artin (wdh.)). Sei  $G$  eine endliche Untergruppe von  $\text{Aut}(L)$  für einen beliebigen Körper  $L$ . Schreibe  $K = \text{Fix}(G)$ . Dann ist  $L/K$  Galois, und  $G = \text{Gal}(L/K)$ .

Insbesondere  $[L : K] = \#G$ .

*Beweis.* Betrachte  $\sigma \in G$ , dann gilt für alle  $a \in K, b \in L$   $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b) = a\sigma(b)$ .

Also ist  $\sigma \in G$   $K$ -linear und damit  $G \subset \text{Gal}(L/K)$ . Damit also  $\#G \leq \#\text{Gal}(L/K) \leq [L : K]$ . Wir wollen zeigen  $[L : K] \leq \#G$ .

Setze  $n = \#G$  und schreibe  $G = \{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ .

Für jedes  $y \in L$  betrachte

$$S(y) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(y)$$

und

$$\sigma_j(S(y)) = \sigma_j\left(\sum_{i=1}^n \sigma_i(y)\right) = \sum_{i=1}^n \sigma_j(\sigma_i(y)) = \sum_{i=1}^n (\sigma_j \circ \sigma_i)(y) = \sum_{\sigma \in G} \sigma(y) = S(y)$$

$\Rightarrow S(y) \in K$ .

Mit der linearen Unabhängigkeit der Charaktere folgt  $\exists y \in L^*, S(y) \neq 0$ .

Außerdem gilt  $\forall z_1, z_2 \in L : S(z_1 + z_2) = S(z_1) + S(z_2)$

und  $\forall x \in K, z \in L : S(xz) = xS(z)$ .

Seien  $a_1, \dots, a_{n+1} \in L$  beliebig. Betrachte das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^{n+1} \sigma_i^{-1}(a_k) x_k = 0 \text{ für } i = 1, \dots, n$$

Also haben wir  $n$  Gleichungen in den Variablen  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ . Also haben wir eine nicht-triviale Lösung  $(y_1, \dots, y_{n+1}) \in L^{n+1}$ . Wir können (durch umsordern) annehmen dass  $y_1 \neq 0$ .

Wenn  $(y_1, \dots, y_{n+1})$  eine Lösung ist und  $z \in L^*$  dann ist  $(zy_1, \dots, zy_{n+1})$  eine weitere Lösung.

Wir wählen  $z = y/y_1$ , dann könne wir annehmen dass  $S(y_1) \neq 0$ . Anwenden von  $\sigma_i$  auf die Gleichung  $i$  ergibt

$$\sum_{k=1}^{n+1} a_k \sigma_i(y_k) = 0$$

Summieren über  $i$  ergibt

$$0 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{n+1} a_k \sigma_i(y_k) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k \sum_{i=1}^n \sigma_i(y_k) = \sum_{k=1}^{n+1} a_k S(y_k) = \sum_{k=1}^{n+1} \underbrace{S(y_k)}_{\in K} \underbrace{a_k}_{\in L}$$

Also sind  $a_1, \dots, a_{n+1} \in L$  linear abhängig über  $K$ . Also  $\dim_K(L) \leq n$  und damit  $[L : K] \leq \#G$ .  $\square$

**Satz 3.51** (Hauptsatz der Galois-Theorie). Sei  $L/K$  eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe  $G = \text{Gal}(L/K)$ .

- 1) Für jeden Zwischenkörper  $K \subset Z \subset L$ , ist die Gruppe  $\text{Gal}(L/Z)$  eine Untergruppe von  $G$ .

Für jede Untergruppe  $H \subset G$  ist der Fixkörper  $\text{Fix}(H)$  ein Zwischenkörper  $K \subset \text{Fix}(H) \subset L$ .

- 2) Schreibe  $\mathcal{Z}$  für die Menge der Zwischenkörper  $K \subset Z \subset L$  und  $\mathcal{H}$  für die Menge der Untergruppen  $H \subset G$ . Dann sind die Abbildungen

$$\begin{aligned} \text{Gal}(L/\_) : \mathcal{Z} &\rightarrow \mathcal{H} \\ z &\mapsto \text{Gal}(L/Z) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \text{Fix}(\_) : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{Z} \\ H &\mapsto \text{Fix}(H) \end{aligned}$$

bijektiv und invers zueinander.

- 3) Die Abbildungen sind umgekehrte Inklusionen und erhalten Indizes.

$$Z_1 \subset Z_2 \Rightarrow \text{Gal}(L/Z_1) \supset \text{Gal}(L/Z_2) \text{ und } [Z_2 : Z_1] = [\text{Gal}(L/Z_1) : \text{Gal}(L/Z_2)].$$

$$H_1 \subset H_2 \Rightarrow \text{Fix}(H_1) \supset \text{Fix}(H_2) \text{ und } [H_2 : H_1] = [\text{Fix}(H_1) : \text{Fix}(H_2)]$$

- 4) Für jedes  $\sigma \in G, Z \in \mathcal{Z}$  ist  $\sigma(Z)$  ein Zwischenkörper und  $\text{Gal}(L/\sigma(Z)) = \sigma \circ \text{Gal}(L/Z) \circ \sigma^{-1} = \{\sigma\tau\sigma^{-1} \mid \tau \in \text{Gal}(L/K)\} \subseteq \text{Gal}(L/K)$ .
- 5) Für  $Z \in \mathcal{Z}$  ist  $Z/K$  Galois genau dann wenn  $G(L/Z) \subset G$  eine normale Untergruppe ist, in anderen Worten wenn  $\sigma \circ \text{Gal}(L/Z) \circ \sigma^{-1} = \text{Gal}(L/Z)$  für alle  $\sigma \in G$ .

In dem Fall gilt

$$\text{Gal}(Z/K) = \text{Gal}(L/K) / \text{Gal}(L/Z)$$

*Bemerkung.* Sei  $G$  eine endliche Gruppe, Sei  $H \subseteq G$  eine Untergruppe. Dann gilt  $\#H \mid \#G$ . Den Quotienten bezeichnet man als Grad der Gruppenerweiterung  $[G : H]$ .

Beispielanwendung: Sei  $k = \mathbb{Q}$ , sei  $L$  der Zerfällungskörper von  $x^3 - 2$ .

*Erinnerung:* Wir wissen:  $L = \mathbb{Q}(\underbrace{\sqrt[3]{2}}_{a_1}, \underbrace{\xi \sqrt[3]{2}}_{a_2}, \underbrace{\xi^2 \sqrt[3]{2}}_{a_3})$  wobei  $\xi = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ .

Wissen auch  $[L : \mathbb{Q}] = 6$

Wissen auch  $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, i \cdot \sqrt[3]{3})$

*Frage:* Welche Zwischenkörper gibt es? Welche sind Galois?

*Gegenfrage:* Was ist  $\text{Gal}(L/K)$ ?

*Antwort:* Jedes Element von  $\text{Gal}(L/K)$  permutiert  $\{a_1, a_2, a_3\}$  erhalte also Abbildung:

$$\text{Gal}(L/K) \xrightarrow{\alpha} \text{Perm}(\{a_1, a_2, a_3\}) = S_3$$

Wissen auch: die Elemente von  $\text{Gal}(L/K)$  sind durch die Permutation eindeutig bestimmt. Also ist  $\alpha$  injektiv.

Wissen auch:  $L/K$  ist Galos, also

$$6 = [L : k] = \# \text{Gal}(L/K) = \# S_3$$

$\alpha$  ist also bijektiv.

Wie viele Elemente hat  $S_3$ ? Wie sehen die aus?

$$\{Id, (123), (12)(3), (13)(2), (23)(1), (132)\} = S_3$$

Untergruppen sind

$$\begin{aligned} &\{Id\} \\ &\{Id, (12)(3)\}, \{Id, (13)(2)\}, \{(23)(1)\} \\ &\{Id, (123), (132)\} \\ &S_3 \end{aligned}$$

Wir sehen die normalen Untergruppen sind exakt  $\{Id\}, \{Id, (123), (132)\}, S_3$ .

Welche Körpererweiterungen gibt es also?

$$\text{Fix}(Id) = L$$

$$\text{Fix}(Id, (12)(3)) = k(a_3)$$

Denn: Klar ist das Elemente von  $k$  und  $a_3$  fix sind, also  $k(a_3) \subseteq \text{Fix}(Id, (12)(3))$ . Wende 3) an mit  $H_2 = S_3, H_1 = (Id, (12)(3))$  also

$$\Rightarrow [\text{Fix}(H_1) : \text{Fix}(H_2)] = [H_2 : H_1] = 3$$

Aber  $[k(a_3), k] = 3$  also Gleichheit.

Außerdem

$\text{Fix}(Id, (13)(2)) = k(a_2)$  und  $\text{Fix}(Id, (23)(1)) = k(a_1)$  sind nicht Galois.

$$\text{Fix}(S_3) = k$$

$\text{Fix}(Id, (123), (132)) = k(i \cdot \sqrt[3]{3})$ . Warum ist  $i \cdot \sqrt[3]{3}$  überhaupt invariant? Wir wissen

$$i \cdot \sqrt[3]{3} = \frac{a_2 - a_3}{a_1} = \frac{\xi \sqrt[3]{2} - \xi^2 \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \xi - \xi^2$$

aber

$$\frac{a_3 - a_1}{a_2} = \frac{\xi^2 \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3}}{\xi \sqrt[3]{3}} = \xi - \bar{\xi} = \xi - \xi^2$$

*Beweis des Hauptsatzes.* 1) ist bereits bewiesen

2) Muss zeigen: Für jeden Zwischenkörper  $Z$  ist  $\text{Fix}(\text{Gal}(L/Z)) = Z$

Und für jede Untergruppe  $H$  ist

$$\text{Gal}(L/\text{Fix}(H)) = H$$

Letztere Aussage ist Satz von Artin, also fertig.

Sei  $Z$  gegeben. Klar per Definition  $\text{Fix}(\text{Gal}(L/Z)) \supseteq Z$ . Will Gleichheit zeigen mit Hilfe des Gradargumentes.

Artin  $L/\text{Fix}(\text{Gal}(L/Z))$  ist Galois,  $[L : \text{Fix}(\text{Gal}(L/Z))] = \# \text{Gal}(L/Z)$

Wir  $L/Z$  ist auch Galois, also  $[L : Z] = \# \text{Gal}(L/Z)$ .

Also:  $[\text{Fix}(\text{Gal}(L/Z)) : Z] = 1$



3) Beweise nur die zweite Aussage. Seien also Gruppen  $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \text{Gal}(L/K)$  gegeben. Klar ist: jedes  $l \in L$ , das fix ist unter  $H_2$  ist auch fix unter  $H_1 \Rightarrow \text{Fix}(H_2) \subseteq \text{Fix}(H_1)$ . Inklusionsumkehr ist also bewiesen.

Artin  $[L : \text{Fix}(H_1)] = \#H_1$  und  $[L : \text{Fix}(H_2)] = \#H_2$

$$\Rightarrow [\text{Fix}(H_1) : \text{Fix}(H_2)] = \frac{[L : \text{Fix}(H_2)]}{[L : \text{Fix}(H_1)]} = \frac{\#H_2}{\#H_1} = [H_2 : H_1]$$

4) Sei  $\sigma$  und  $Z$  gegeben. Klar ist  $\sigma(Z)$  ist ein Zwischenkörper. Behaupte

$$\text{Gal}(L/\sigma(Z)) \supseteq \sigma \text{Gal}(L/Z)\sigma^{-1} \quad (*)$$

*Beweis der Behauptung:* Sei  $\tau \in \sigma \text{Gal}(L/Z)\sigma^{-1}$  und sei  $z \in \sigma(Z)$ . Muss zeigen, dass  $\tau(z) = z$  ist. Schreibe dazu  $\tau = \sigma\tau'\sigma^{-1}$  und  $z = \sigma(z')$  für geeignete  $\tau' \in \text{Gal}(L/Z)$ ,  $z' \in Z$ . Dann ist

$$\tau(z) = \sigma\tau'\sigma^{-1}\sigma(z') = \sigma\tau'z' = \sigma(z') = z$$

Noch zu zeigen: Wir haben Gleichheit in  $(*)$

*Beobachte:* Die Gruppen  $\text{Gal}(L/Z)$  und  $\sigma \text{Gal}(L/Z)\sigma^{-1}$  sind isomorph, haben also gleich viele Elemente.

Isomorphie ist

$$\begin{aligned} \text{Gal}(L/Z) &\rightarrow \sigma \text{Gal}(L/Z)\sigma^{-1} \\ \tau &\mapsto \sigma\tau\sigma^{-1} \end{aligned}$$

*Beobachtung:*  $L/Z$  ist Galois

$$\# \text{Gal}(L/Z) = [L : Z] = [\sigma(L) : \sigma(Z)] = [L : \sigma(Z)] = \# \text{Gal}(L/\sigma(Z))$$

Insgesamt: Die beiden Gruppen in  $(*)$  haben gleich viele Elemente!

5) Sei  $Z$  ein Zwischenkörper.

*Beobachtung 1:*  $Z/K$  ist separabel. Also:  $Z/K$  ist Galois  $\Leftrightarrow Z/K$  ist normal  $\Leftrightarrow$  für jede  $k$ -Morphismus  $\sigma : Z \rightarrow \bar{L}$  ist  $\sigma(Z) = Z$ .

*Beobachtung 2:* Jeder Morphismus  $\sigma : Z \rightarrow \bar{L}$  setzt sich fort zu Morphismus  $\bar{\sigma} : L \rightarrow \bar{L}$ . Weil  $L/K$  per Annahme Galois, also normal ist, gilt:  $\overline{\text{sigma}}(L) = L$ .

*Zusammenfassung:*  $Z/K$  ist Galois  $\Leftrightarrow \forall \sigma \in \text{Gal}(L/K) \sigma(Z) = Z$ .

$$\stackrel{2)}{\Rightarrow} \forall \sigma \in \text{Gal}(L/K) : \text{Gal}(L/\sigma(Z)) = \text{Gal}(L/Z)$$

$$\stackrel{4)}{\Rightarrow} \forall \sigma \in \text{Gal}(L/K) : \sigma \text{Gal}(L/Z) \sigma^{-1} = \text{Gal}(L/Z)$$

$$\Leftrightarrow \text{Gal}(L/Z) \text{ ist normale Untergruppe von } \text{Gal}(L/K)$$

Falls  $Z/K$  Galoisch ist, habe ich Einschränkung

$$r : \text{Gal}(L/K) \rightarrow \text{Gal}(Z/K)$$

die Abbildung  $r$  ist surjektiv, weil ich Morphismen fortsetzen kann.  $\ker(r) = \text{Gal}(L/Z)$ .

□

## 4 Gruppentheorie

### 4.1 Grundbegriffe

**Definition 4.1.** Sei  $G$  eine Gruppe,  $M$  eine Menge. Eine gruppenwirkung ist eine Abbildung

$$\alpha : G \times M \rightarrow M$$

so dass

$$1) \quad \forall m \in M : \alpha(e, m) = m$$

$$2) \quad \forall m \in M, \forall g, h \in G \quad \alpha(h, \alpha(g, m)) = \alpha(h \cdot g, m)$$

*Bemerkung.* Gegeben eine Gruppenwirkung  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  und  $g \in G$  betrachte oft die Abbildung

$$\begin{aligned} \alpha_g : M &\longrightarrow M \\ m &\longmapsto \alpha(g, m) \end{aligned}$$

(translation). Die Axiome 1) und 2) sagen:

$$\alpha_e = \text{id}_M, \forall g, h : \alpha_h \circ \alpha_g = \alpha_{h \cdot g}$$

Insbesondere: Alle  $\alpha_g$  sind bijektiv,  $(\alpha_g)^{-1} = \alpha_{g^{-1}}$ .

Insbesondere: erhalte Gruppenmorphismus

$$\underbrace{\alpha} : G \longrightarrow \text{Perm}(M)$$

$$g \longmapsto \alpha_g$$

Andersherum: Gegeben Gruppenmorphismus

$$\underline{\beta} : G \rightarrow \text{Perm}(M)$$

dann liefert

$$\beta : G \times M \longrightarrow M$$

$$(g, m) \longmapsto (\underline{\beta}(g))(m)$$

eine Gruppenwirkung.

**Beispiel 4.2.** •  $k$  ein Körper. Dann wirkt  $\text{Gl}_n(k)$  auf  $k^n$

- $(\mathbb{R}, +)$  wirkt auf  $\mathbb{R}$ .

$$a : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \longmapsto a + b$$

$$m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(a, b) \longmapsto \exp(a)b$$

- $k$  ein Körper,  $f$  ein Polynom mit Zerfällungskörper  $L$ . Sei  $G = \text{Gal}(L/K)$ . Dann habe ich natürliche Wirkungen

- $G$  wirkt auf  $L$
- $G$  wirkt auf die Nullstellenmenge von  $f$
- $G$  wirkt auf die Menge der Zwischenkörper  $k \subseteq \cdot \subseteq L$

- Sei  $G$  eine Gruppe. Dann wirkt  $G$  auf sich selbst ( $M = G$ )

$$l : G \times G \longrightarrow G$$

$$(g, m) \longmapsto g \cdot m$$

$$r : G \times G \longrightarrow G$$

$$(g, m) \longmapsto m \cdot g^{-1}$$

$$c : G \times G \longrightarrow G$$

$$(g, m) \longmapsto g \cdot m \cdot g^{-1}$$

- Variante: Sei  $H \subseteq G$  eine Untergruppe. Dann:

$$\begin{aligned} l : H \times G &\rightarrow G & (h, m) &\mapsto hm \\ r : H \times G &\rightarrow G & (h, m) &\mapsto mh^{-1} \\ c : H \times G &\rightarrow G & (h, m) &\mapsto hmh^{-1} \end{aligned}$$

- Sei ODE auf  $M$  gegeben, so dass Anfangswertprobleme für alle Zeilen lösbar sind. Dann ist die Lösungsabbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times M &\longrightarrow M \\ (t, m) &\longmapsto \text{Lösung des AWP zum Wert } m \text{ und Zeit } t \end{aligned}$$

Wirkung von  $\mathbb{R}$  auf  $M$ .

**Definition 4.3.** Sei  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  eine Gruppenwirkung.

- 1) Schreibe statt  $\alpha(g, m)$  oft  $g \cdot m$ .
- 2) Gegeben  $m \in M$ . Dann betrachte alle Elemente, die ich von  $m$  erreichen kann

$$G \cdot m = \{g \cdot m \mid g \in G\}$$

Dies heißt die Bahn von  $m$ .

- 3) Gegeben Teilmenge  $N \subseteq M$  betrachte Untergruppen

$$\begin{aligned} \text{Fix}(N) &= \{g \in G \mid \forall n \in N : g \cdot n = n\} \\ \text{Stab}(N) &= \{g \in G \mid g \cdot N = N\} \end{aligned}$$

Spezialfall:  $m \in M$  gegeben. Dann nenne  $\text{Fix}(\{m\})$  die Isotropiegruppe von  $m$ .

- 4) Ein Element  $m \in M$  so dass  $\forall g \in G : g \cdot m = m$  heißt Fixpunkt der Gruppenwirkung.
- 5) Eine Gruppenwirkung heißt transitiv, falls es nur eine Bahn gibt.

Zentrale Beobachtung: Sei  $\alpha : G \times M \rightarrow M$  eine Gruppenwirkung, seien  $m_1, m_2 \in M$  gegeben. Betrachte Bahnen  $G \cdot m_1$  und  $G \cdot m_2$ . Falls die Bahnen einen Schnittpunkt haben, sind sie gleich!

*Beweis.* Sei  $m_3$  ein Schnittpunkt. Das heißt finde  $g_1, g_2 \in G : m_3 = g_1 \cdot m_1 = g_2 \cdot m_2$ .

Sei  $n \in Gm_1$  jetzt irgend ein Element, also  $n = h \cdot m_1$ , dann  $n = hg_1^{-1}g_2m_2$  also  $n \in G \cdot m_2$ .

$\Rightarrow G \cdot m_1 \subseteq G \cdot m_2$ . Andere Inklusion analog! □

Die Relation auf  $M$

$$a \sim b \Leftrightarrow \exists g \in G : a = g \cdot b \Leftrightarrow \text{Bahnen von } a \text{ und } b \text{ sind gleich}$$

ist eine Äquivalenzrelation! Die Gruppenwirkung zerlegt den Raum in eine disjunkte Vereinigung von Bahnen.

Besonders relevanter Fall: Sei  $G$  eine Gruppe,  $H \subseteq G$  eine Untergruppe, Wirkung:  $l$ . Die Bahnen heißen Rechtsnebenklassen. Die Anzahl der Bahnen wird mit  $[G : H]$  bezeichnet und heißt Index von  $H$  in  $G$ .

**Satz 4.4.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe, die auf  $M$  wirkt. Sei  $m \in M$  gegeben. Dann ist

$$\#G = \# \text{Iso}(m) \cdot \#(G \cdot m)$$

*Beweis.* Betrachte Bahnabbildung

$$\begin{aligned} b : G &\longrightarrow M \\ g &\longmapsto g \cdot m \end{aligned}$$

Bild der Bahnabbildung ist die Bahn  $G \cdot m$ . Was sind die Fasern?

$$b^{-1}(m) = \{g \in G \mid g \cdot m = m\} = \text{Iso}(m)$$

Gegeben  $h \in G$

$$b^{-1}(h \cdot m) = \{g \in G \mid g \cdot m = h \cdot m\} = h^{-1} \cdot \text{Iso}(m)$$

Also alle Urbildmengen enthalten stets  $\# \text{Iso}(m)$  Elemente. Es gibt exakt  $\#(G \cdot m)$  Urbildmengen.

$\Rightarrow$  hat  $\# \text{Iso}(m) \cdot \#(G \cdot m)$  viele Elemente. □

Anwendung auf Spezialfall:  $H \subseteq G$  wirkt auf  $M = G$  durch Linksmultiplikation.

**Satz 4.5** (Kleiner Satz von Lagrange). Sei  $G$  eine endliche Gruppe, sei  $H \subseteq G$  eine Untergruppe. Dann  $\#G = [G : H] \cdot \#H$ .

*Beweis.* Die Menge  $G$  ist disjunkte Vereinigung von  $[G : H]$  vielen Bahnen. Müssen also zeigen: alle Bahnen enthalten exakt  $\#H$  viele Elemente. Wegen Satz 4.4 genügt es zu zeigen  $\forall g \in G : \# \text{Iso}(g) = \#H$ .

Erinnerung:  $\text{Iso}(g) = \{h \in H \mid h \cdot g = g\}$  □

**Folgerung 4.6.**  $[G : H] = \#G/\#H$ . Insbesondere ist  $[G : H]$  Teiler von  $\#G$ . Insbesondere ist  $\#H$  Teiler von  $\#G$ .

**Folgerung 4.7.** Sei  $G$  endlich.  $G$  wirke auf Menge  $M$ . Sei  $m \in M$  dann  $\#(G \cdot m) = [G : \text{Iso}(m)]$ .

### Wesentliches weiteres Beispiel

$G$  wirkt auf sich selbst durch Konjugation. Die Bahnen heißen Konjugationsklassen. Gegeben Untergruppe  $H \subseteq G$ , betrachte  $\text{Fix}(H) = \{g \in G \mid ghg^{-1} = h, \forall h \in H\} = Z(H) \subseteq G$  diese Untergruppe heißt Zentralisator von  $H$ .

$$\text{Stab}(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\} \subseteq G$$

*Beobachtung:*  $H \subseteq \text{Stab}(H)$  ist normale Untergruppe.

*Klassengleichung:* Die Gruppe  $G$  zerlegt sich in Konjugationsklassen. Wenn ich aus jeder Klassen einen Vertreter wähle  $h_1, \dots, h_n \in G$ . Dann

$$\#G = \sum_{i=1}^n H \cdot h_i = \sum_{i=1}^n [G : Z(h_i)] = \#Z(H) + \sum_{\substack{i=1 \dots n \\ h_i \notin Z(H)}} [G : Z(h_i)]$$

## 4.2 Zyklische Gruppen

Gegeben sei eine Gruppe  $G$  und ein Element  $g \in G$ . Dann gibt es einen Gruppenmorphismus

$$\begin{aligned} \varphi_g : \mathbb{Z} &\longrightarrow G \\ n &\longmapsto \begin{cases} g^n & \text{falls } n > 0 \\ e & \text{falls } n = 0 \\ (g^{-1})^n & \text{falls } n < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Bild ist eine Untergruppe von  $G$ , genannt  $\langle g \rangle$  die von  $g$  erzeugte Zyklische Untergruppe.

- Falls  $\varphi_g$  injektiv ist, dann ist  $\langle g \rangle$  isomorph zu  $\mathbb{Z}$ .
- Falls  $\varphi_g$  nicht injektiv ist, beachte  $\ker(\varphi_g)$  enthält positive Zahlen. Sei also  $n = \min(\ker(\varphi_g) \cap \mathbb{N})$ . Wie immer ist

$$\langle g \rangle \simeq (\mathbb{Z}/(n), +)$$

**Beispiel 4.8.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe. Sei  $\#G = p$  eine Primzahl. Sei  $g \in G$  gegeben. Dann ist  $\langle g \rangle \subseteq G$  also:  $\#\langle g \rangle \mid \#G$ .

$\Rightarrow$  entweder  $\langle g \rangle = \{e\}$  oder  $\langle g \rangle = G$ .

Konsequenz:

- 1)  $G$  hat überhaupt keine Untergruppen.
- 2)  $G$  ist zyklisch.

**Definition 4.9.** Sei  $G$  eine Gruppe und  $g \in G$ , definiere:

$$\text{ord}(g) = \min\{n \in \mathbb{N} : g^n = e\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

$\text{ord}(g) = \#(g)$ , falls endlich ist  $\text{ord}(g) \mid \#G$

**Beispiel 4.10.** 1) Falls  $\#G$  eine Primzahl ist, dann ist  $G$  zyklisch.

2) Gegeben  $n \in \mathbb{N}$  betrachte  $G = \{\xi \in \mathbb{C} \mid \xi^n = 1\}$ .

3) Sei  $R$  ein Integritätsring, sei  $G \subset (R^*, \cdot)$  endlich. Dann ist  $G$  zyklisch.

*Beweis.* Weil  $R \hookrightarrow Q(R)$  eingebettet ist, können wir ohne Einschränkung annehmen.  $R = k$  ist ein Körper. Sei  $m = \max\{\text{ord}(h) \mid h \in G\}$ . Dann gilt  $\forall g \in G$

$$g^m = \underbrace{(g^{\text{ord}(g)})}_{=e}^{m/\text{ord}(g)} = e$$

Also: alle  $g \in G$  sind Nullstellen des Polynoms  $x^m - 1$ . Dieses Polynom hat maximal  $m$  Nullstellen  $\Rightarrow \#G \leq m$ . Wenn ich  $g \in G$  nehme mit  $\text{ord}(g) = m$  dann ist  $\#(g) = m$ . Insbesondere  $G = (g)$ ,  $G$  ist zyklisch.  $\square$

## 4.3 Die Sätze von Sylow

Frage: Wenn  $G$  endliche Gruppe ist,  $H \subseteq G$  eine Untergruppe, dann  $\#H \mid \#G$ . Wenn ich  $n \in \mathbb{N}$  habe mit  $n \mid \#G$  gibt es dann auch eine Untergruppe  $H$  mit  $\#H = n$ ?

Sylow-Sätze geben Teilantwort. Die Zentrale Beobachtung ist einfach!

**Lemma 4.11.** Sei  $G$  eine Gruppe, sei  $\#G = p^n$  für  $p$  Primzahl,  $n \in \mathbb{N}$ .  $G$  wirke auf endliche Menge  $M$ . Setze  $M_0 = \text{Fix}(G)$ . Dann ist  $\#M \equiv \#M_0 \pmod{p}$ .

*Beweis.*  $M$  ist disjunkte Vereinigung der Bahnen. Bahnen mit einem Element sind exakt die Fixpunkte. Wenn  $B$  eine Bahn mit mehr als einem Element ist, dann  $1 < \#B \mid p^n \Rightarrow \#B \equiv 0 \pmod{p}$ .  $\square$

**Satz 4.12** (Satz von Cauchy). Sei  $G$  endliche Gruppe und sei  $p$  eine Primzahl so dass  $p \mid \#G$ . Dann gibt es ein  $g \in G : \text{ord}(g) = p$ .

*Beweis.* Betrachte  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$ . Diese Gruppe wirkt auf  $\underbrace{G \times \cdots \times G}_{p\text{-mal}}$  durch Zyklische Vertauschung:

$$1 : (g_1, \dots, g_p) \mapsto (g_p, g_1, \dots, g_{p-1})$$

Beobachte: Die Menge  $M = \{(g_1, \dots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = e\}$  ist stabil unter der Wirkung von  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ .

Beobachte:  $\#M = (\#G)^{p-1}$

Beobachte: Fixpunkte der  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ -Wirkung auf  $M$  sind Elemente der Form  $\underbrace{(g, \dots, g)}_{p\text{-mal}}$  mit  $g^p = e$ .

$\Rightarrow g = e$  oder  $\text{ord}(g) = p$ .

Wir wissen:

1)  $\# \text{Fix}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \geq 1$ , denn  $(e \dots e) \in \text{Fix}(\dots)$

2) Lemma:  $\# \text{Fix}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \equiv 0 \pmod{p}$

$\Rightarrow \# \text{Fix}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \geq p$ . Also existiert ein Element der Ordnung  $p$ .  $\square$

**Definition 4.13.** Sei  $p$  eine Primzahl. Eine Gruppe heißt  $p$ -Gruppe, wenn  $\forall g \in G : \text{ord}(g) = p^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .

**Satz 4.14.** Sei  $G$  eine endliche Gruppe, sei  $p$  eine Primzahl. Dann sind äquivalent:

1)  $G$  ist  $p$ -Gruppe

2)  $\#G = p^m$  für geeignetes  $m \in \mathbb{N}$

*Beweis.* 2)  $\Rightarrow$  1) Klar, denn wir wissen:

$$\forall g \in G : \text{ord}(g) \mid \#G = p^m$$



$\Rightarrow \text{ord}(g)$  ist Potenz von  $p$

1)  $\Rightarrow$  2) Beweis der Kontraposition!

Angenommen  $\#G$  ist keine Potenz von  $p$ .

$\Rightarrow$  Es gibt Primzahl  $q \neq p$  mit  $q \mid \#G$ .

Cauchy: Es gibt ein Element  $g \in G$  mit  $\text{ord}(g) = q$ .

$\Rightarrow G$  ist keine  $p$ -Gruppe. □

**Lemma 4.15.** Sei  $G$  eine endliche  $p$ -Gruppe. Dann:  $G$  hat nicht triviales Zentrum

$$Z(G) \supsetneq \{e\}$$

*Beweis.* Betrachte die Wirkung von  $G$  auf  $M = G$  durch Konjugation. Dann  $Z(G) = \text{Fix}(G)$ .

Wieder gilt:  $\{e\} \subseteq \text{Fix}(G)$

$\# \text{Fix}(G) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow \# \text{Fix}(G) \geq p$ . □

**Definition 4.16.** Sei  $G$  eine Gruppe,  $p$  eine Primzahl. Eine  $p$ -Sylowgruppe ist eine maximal große  $p$ -Untergruppe von  $G$ .

**Satz 4.17** (ohne Beweis). Mit Zorns Lemma existieren Sylowgruppen.

**Lemma 4.18.** Sei  $G$  eine Gruppe, sei  $G_p \subseteq G$  eine  $p$ -Sylowgruppe, sei  $g \in G$  ein Element  $\Rightarrow gG_pg^{-1}$  ist eine Sylowgruppe.

*Beweis.* Klar ist  $\#G_p = \#gG_pg^{-1}$  also ist  $gG_pg^{-1}$  schon mal eine  $p$ -Gruppe. Angenommen  $gG_pg^{-1}$  wäre nicht maximal das heißt  $p$ -Gruppe  $U$  mit  $gG_pg^{-1} \subsetneq U \Rightarrow G_p \subsetneq g^{-1}Ug$  und  $g^{-1}Ug \simeq U$  also  $p$ -Gruppe.

$\Rightarrow G_p$  nicht Sylow! □

**Lemma 4.19.** Sei  $G$  endlich, sei  $U \subseteq G$  eine  $p$ -Untergruppe dann gilt:

$$[G : U] = [N(U) : U]$$

(Erinnerung:  $N(U) = \{g \in G \mid gUg^{-1} = U\}$  Das ist eine Untergruppe von  $G$  und  $U$  ist normal in  $N(U)$ )

*Beweis.* Betrachte die Wirkung von  $U$  auf  $G$  durch linkstranslation. Sei  $M = \text{Quot}$ . Anders gesagt  $M = \text{Menge der Bahnen}$  also

$$M = \{U \cdot g \mid g \in G\}$$

Nachrechnen:  $U$  wirkt auf der Menge  $M$  durch:

$$\begin{aligned} U \times M &\longrightarrow M \\ (u, U \cdot g) &\longmapsto U \cdot g \cdot u^{-1} \end{aligned}$$

Betrachte wieder  $M_0 \subseteq M$ , die Fixpunktmenge dieser Wirkung.

Beobachte:

$$\begin{aligned} Z \cdot g \in M_0 &\Leftrightarrow \forall u \in U : U \cdot g \cdot u^{-1} = Ug \\ &\Leftrightarrow \forall u \in U : Ugu^{-1}g^{-1} = U \Leftrightarrow g \in N(U) \end{aligned}$$

Wir wissen:

$$[G : U] = \#M = \#M_0 \pmod{p}$$

wobei  $\#M_0 = \#\text{Bahnen der Wirkung von } U \text{ auf Gruppe } N(U) = [N(U) : U]$  □

Zusatz: Falls gilt  $p \mid [G : U]$ , dann  $[N(U) : U] = 0 \pmod{p}$

$$\Rightarrow [N(U) : U] \neq 1 \Rightarrow N(U) \subsetneq U$$

**Satz 4.20** (Sylow-Satz 1). Sei  $G$  eine endliche Gruppe, sei  $p$  eine Primzahl. Schreibe  $\#G = p^n \cdot m$  wobei  $p \nmid m$ . Dann gilt:

- 1)  $\forall 0 \leq i \leq n$  gilt: Es existiert eine  $p$ -Untergruppe von  $G$  mit  $p^i$ -Elementen.
- 2)  $\forall 0 \leq i < n$  und alle  $p$ -Untergruppen  $U \subseteq G$  mit  $p^i$  Elementen: Es gibt eine  $p$ -Untergruppe  $U' \subseteq G$  mit  $p^{i+1}$  Elementen.  $U \subseteq U'$  und  $U$  ist normal in  $U'$ .

*Beweis.* Banal:  $\{e\}$  hat  $p^0$  Elemente

Cauchy: Es existiert eine Untergruppe mit  $p$  Elementen. Per Induktion genügt es also Teil 2) zu zeigen.

Sei also  $0 \leq i < n$  gegeben, sei  $U$  mit  $p^i$  Elementen gegeben. Wissen dann (Lemma und Zusatz)  $N(U) \supsetneq U$ . Weil  $U$  normal ist in  $N(U)$  kann ich Quotientengruppe betrachten!

$$\pi : N(U) \longrightarrow N(U)/U$$

Lemma:  $[N(U) : U] = [G : U] \equiv 0 \pmod{p}$

$$\Rightarrow \#N(U)/U \equiv 0 \pmod{p}$$

$$\Rightarrow p \mid \#N(U)/U$$

Cauchy: Finde in  $N(U)/U$  eine Untergruppe  $U' \subseteq N(U)/U$  von Ordnung  $\#U = p$ . Setze  $U' := \pi^{-1}(\underline{U'})$ . Diese Gruppe hat dann  $p^{i+1}$  viele Elemente und  $U' \subseteq N(U)$ , also  $U \subseteq U'$  normal.  $\square$

**Satz 4.21** (Sylow-Satz 2). Sei  $G$  eine endliche Gruppe: Zu jeder  $p$ -Untergruppe  $U \subseteq G$  und jeder  $p$ -Sylowgruppe  $P \subseteq G$  gibt es  $g \in G : gUg^{-1} \subseteq P$ .

Insbesondere: je zwei  $p$ -Sylowgruppen sind zueinander konjugiert!

**Satz 4.22** (Sylow-Satz 3). Sei  $G$  eine endliche Gruppe  $s_p = \#p$ -Sylowgruppen

$$\Rightarrow s_p \mid \#G \text{ und } s_p \equiv 1 \pmod{p}$$