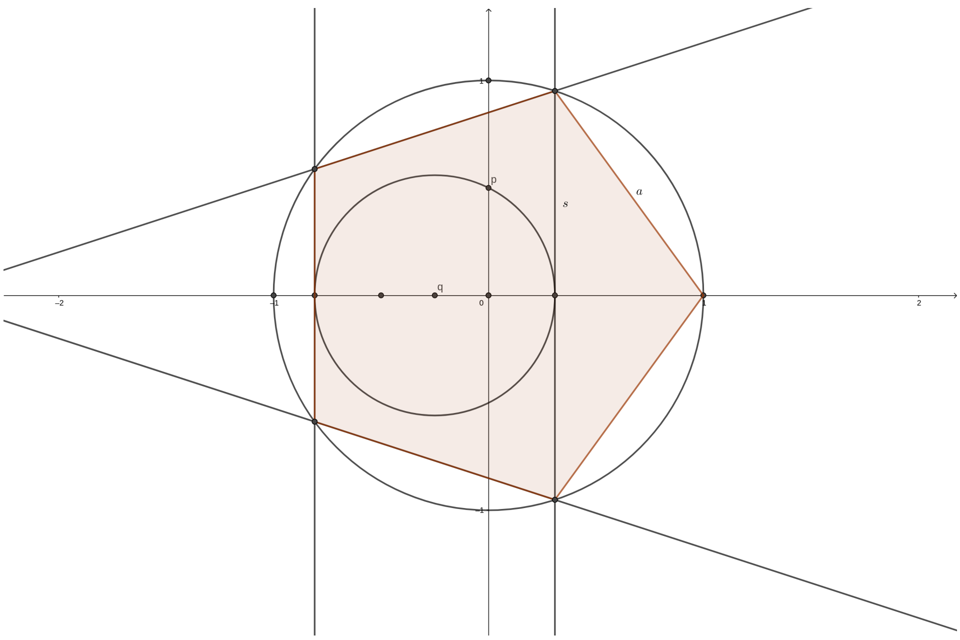
Skript Algebra

Lukas Metzger

21. November 2018

0 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Beispiel 0.1 (Konstruktion des regelmäßigen 5-Ecks)**.** Anleitung zur Konstruktion



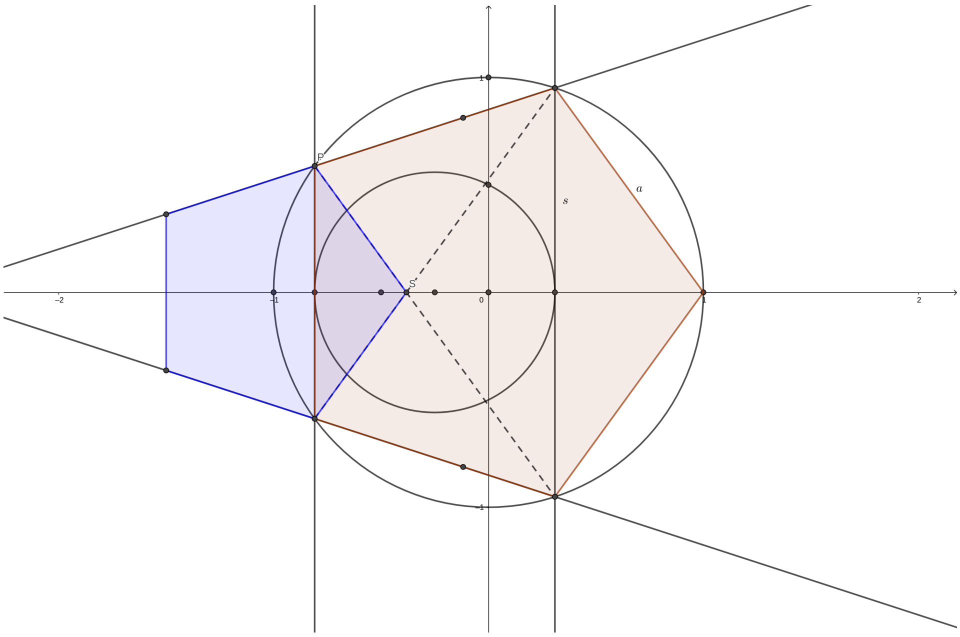
Erste Frage: Gegeben $n \in \mathbb{N}$, kann ich das regelmäßige n-Eck konstruieren?

Beispielproblem: Betrachte Das 5-Eck, sei a die Kantenkänge und s die Sekantenlänge.

Dann ist $\frac{s}{a} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis. Angenommen $\frac{s}{a}$ wäre in $\mathbb{Q}$. Dann schreibe $\frac{s}{a} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Dann gibt es also eine Länge $d \in \mathbb{R}$, so dass s und a beides ganzzahlige Vielfache von d sind. $\exists n, m \in \mathbb{N}$ $a = n \cdot d, s = m \cdot d$.

Betrachte/Erweitere die Konstruktion des 5-Ecks und erhalte kleines (blaues) 5-Eck wie gezeichnet mit Sekantenlänge $s' = a$ und Kantenlänge $a' = s - a$.



Dann sind aber sowohl a' als auch s' wieder Vielfache von d. Das Verfahren kann ich wiederholen und erhalte immer kleinere 5-Ecke, deren Größe nach 0 konvergiert, wo Kanten- und Sekantenlänge ganzzahlige Vielfache von d sind. $\lightning$ $\square$

Weitere Konstruktionsprobleme:

- 3-Teilung des Winkels
- Verdoppelung des Würfels (d.h. Verdoppelung des Volumens)
- Quadratur des Kreises (Gegeben ein Kreis, konstruiere Quadrat mit demselben Flächeninhalt)

Wiederholung: Was kann ich mit Zirkel und Lineal eigentlich machen?

Antwort: 3 Konstruktionen

1) Gegeben Punkte a_1, a_2, b_1, b_2 der Ebene, betrachte die Geraden $\overline{a_1a_2}$ und b_1b_2 und erhalte Schnittpunkt $\overline{a_1a_2} \cap \overline{b_1b_2}$.

2) Gegeben Punkte a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 der Ebene betrachte Kreis $K(b_1, \|b_2 - b_3\|)$ um b_1 mit Radius $\|b_2 - b_3\|$ und erhalte die Schnittpunkte $\overline{a_1a_2} \cap K(b_1, \|b_2 - b_3\|)$

3) Gegeben Punkte $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, erhalte Schnittpunkte $K(a_1, \|a_2 - a_3\|) \cap K(b_1, \|b_2 - b_3\|)$

Definition 0.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge, $p \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt.

Sage: p ist aus M mit Zirkel und Lineal konstruierbar, falls es Kette von Mengen gibt

$$M = M_1 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n \ni p$$

Wobei $\forall i$ die Menge M_i entsteht aus M_{i-1} durch Hinzunahme der Punkte die durch einen Konstruktionsschritt entstehen.

Historie: Einen Durchbruch bei der Lösung dieser Probleme gab es erst, als man begann, die Punkte des $\mathbb{R}^2$ mit komplexen Zahlen zu identifizieren.

Bemerkung. Frage nach der Konstruierbarkeit macht nur Sinn, wenn M mindestens 2 Punkte enthält $\rightsquigarrow$ Häufig $M = \{0, 1\} \subset \mathbb{C}$.

In dieser Sprache

- Konstruktionsproblem: n-Eck ist äquivalent zu, kann ich die n-ten Einheitswurzeln $e^{\frac{i2\pi}{n}}$ aus $M = \{0, 1\}$ konstruieren? Ist $e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \text{Kons}(\{0, 1\})$?

- Verdopplung des Würfels $\Leftrightarrow$ Ist $\sqrt[3]{2} \in \text{Kons}(\{0, 1\})$

- Quadratur des Kreises $\Leftrightarrow$ Ist $\sqrt{\pi} \in \text{Kons}(\{0, 1\})$

- 3-teilung des Winkels $\Leftrightarrow$ Ist für gegebenes $\varphi \in (0, 2\pi)$ $e^{\frac{i\varphi}{3}} \in \text{Kons}(\{0, 1, e^{i\varphi}\})$

Zentrale Beobachtung

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge die 0 und 1 enthält. Sei $\text{Kons}(M)$ die Menge der aus M konstruierbaren Punkte.

Dann ist $\text{Kons}(M) \subset \mathbb{C}$ ein Unterkörper.

Dazu zu prüfen: Konstruierbarkeit von Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten $\ldots$.

Zusammenfassung/zentrales Thema der Vorlesung

Körpererweiterung / wie können Körper ineinander enthalten sein?

1 Körpererweiterungen

1.1 Ultrakurzwiederholung zentraler Begriffe

Definition 1.1 (Gruppe)**.** Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Abbildung $m : G \times G \to G$ so dass folgendes gilt:

1) Assoziativ: $\forall a, b, c \in G\, m(m(a, b), c) = m(a, m(b, c))$

2) Neutrales Element: $\exists n \in G \forall a \in G : m(n, a) = m(a, n) = a$

3) Inverse Elemente: $\forall a \in G \exists b \in G : ab = ba$ und dieses Produkt ist neutrales Element wie in 2)

Lemma 1.2 (Elementare Eigenschaften von Gruppen)**.** Für jede Gruppe gilt:

- Das neutrale Element ist eindeutig

- Inverse Elemente sind eindeutig

Definition 1.3 (Abelsche Gruppe)**.** Nenne Gruppe (G, m) Abelsch, falls $\forall a, b \in G : m(a, b) = m(b, a)$.

Notation: Statt m schreibt man oft $+$ oder $\cdot$, wobei $+$ hauptsächlich für Abelsche Gruppen verwendet wird.

Beispiel 1.4. Beispiele für Gruppen:

- Abelsche Gruppen: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$, $(Vektorraum, +)$

- Nicht-Abelsche Gruppen: Sei M eine Menge mit > 2 Elementen. Die bijektiven Abbildungen $M \to M$ mit der Hintereinanderausführung ist eine nicht-Abelsche Gruppe.

  Sei K ein Schiefkörper, z.B. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Sei $K^* K \setminus \{0\}$. Dann ist $(K^*, \cdot)$ eine Gruppe.

- Nicht-Beispiel: $G = \mathbb{R}^3$. Ich erhalte durch das Kreuzprodukt keine Gruppenkonstruktion.

Definition 1.5 (Ring)**.** Ein Ring ist eine Menge R mit 2 Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ so dass gilt:

- $(R, +)$ ist eine Abelsche Gruppe
- Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in T (a + b) \cdot c = ac + bc$ und $a(b + c) = ab + ac$
- $(R \setminus 0, \cdot)$ ist fast Gruppe nämlich assoziativ und es existiert ein neutrales Element

Beispiel 1.6. Beispiele für Ringe:

- $\mathbb{R}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, Polynome, $\mathbb{Z}$
- Funktionen auf $\mathbb{R}/\mathbb{C}$
- holomorphe/stetige/C^∞/reell analytische lokal quadratintegrierbare Funktionen bilden ebenfalls einen Ring

Bemerkung. Mit Ringen kann ich fast rechnen wie mit Zahlen, aber ACHTUNG

- Nicht jedes Element in $R \setminus 0$ hat ein multiplikatives Inverses
- Ich kann aus $a \cdot b = 0$ und $a \neq 0$ im Allgemeinen nicht folgern, dass $b = 0$
- Ich kann aus $ab = ac$ und $a \neq 0$ im allgemeinen nicht folgern, dass $b = c$ ist

Definition 1.7 (Nullteiler)**.** Sei R ein Ring, $a \in R \setminus \{0\}$. Falls $b \neq 0$ existiert mit $a \cdot b = 0$, nenne ich a einen Nullteiler.

Ringe ohne Nullteiler heißen Nullteilerfrei oder Integritätsringe.

Definition 1.8 (Abelscher Ring)**.** Ein Ring heißt abelsch, falls $\forall a, b \in R\ ab = ba$.

Bemerkung. In der Literatur heißen unsere Ringe oft Ringe mit 1.

Beispiel 1.9. Beispiele zu Nullteilern

- $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ sind nullteilerfrei
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist nullteilerfrei $\Leftrightarrow$ n ist Prim
- Polynome sind nullteilerfrei
- Stetige Funktionen sind nicht nullteilerfrei

Bemerkung. Sei R ein Ringe. Die Menge der Elemente, die ein multiplikatives Inverses haben, wir mit R^* bezeichnet.

- $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{[x] \mid x \text{ ist teilerfremd zu } n\}$
- $(C^\infty(\mathbb{R}))^* = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } C^\infty \text{ und hat keine Nullstelle}\}$

Bemerkung. Sei R ein Ring, x eine Variable. Dann bezeichne mit $R[x]$ die Polynome mit Koeffizienten in R und Variable x.

- $1x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$
- $\frac{\pi}{4} \cdot x^2 \notin \mathbb{Z}[x]$

Definition 1.10 (Schiefkörper)**.** Schiefkörper sind Ringe R wobei $R^* = R \setminus \{0\}$

Definition 1.11 (Körper)**.** Ein Körper ist ein Schiefkörper, der auch noch kommutativ ist.

Beispiel 1.12. Beispiele für Körper und Schiefkörper

- Quaternionen sind Schiefkörper
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sind Körper
- $\mathrm{Kons}(\{0, 1\})$ ist Unterkörper von $\mathbb{C}$
- Die Menge der Rationale Funktionen über einem Körper bilden wieder einen Körper

1.2 Algebraische und transzendente Elemente

Sei L ein Körper und $k \subset L$ ein Unterkörper (z.B. $L = \mathbb{C}, k \subset \mathbb{R}$ oder $L = \mathbb{R}, k = \mathbb{Q}$).

Im Fall $k = \mathbb{Q}, L = \mathbb{R}$ wissen wir, dass es in $\mathbb{R}$ sehr unterschiedliche Elemente gibt.

- $\sqrt{7}$ ... algebraisch
- π, e ... transzendent

Definition 1.13. Situation wie oben. Sei $a \in L$ gegeben. Nenne a algebraisch über k falls es ein Polynom gibt $f \in k[x]$ und $f \neq 0$ so dass $f(a) = 0$.

Bemerkung. Nicht algebraische Elemente heißen transzendent.

Beispiel 1.14. Beispiele für algebraische und transzendente Zahlen

- $\sqrt{7}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$, denn $f(\sqrt{7}) = 0$ mit $f(x) = x^2 - 7$
- π ist nicht algebraisch über $\mathbb{Q}$ (Lindemann, 1844)

Bemerkung. In $\mathbb{R}$ gibt es praktisch keine Zahlen, die algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind.

Wir wissen $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, also sind auch die Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ abzählbar. Jedes Polynom hat aber nur endlich viele Nullstellen. Das heißt die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar, also eine Nullmenge im Sinne der Integrationstheorie.

Beispiel 1.15. Körpererweiterung $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ - Beobachte: i ist algebraisch über $\mathbb{R}$, denn $f(i) = 0$ wobei $f(x) = x^2 + 1$

$z = i + 1$ ist Algebraisch mit $f(x) = (x-1)^2 + 1$

$z = a + bi$ ist Algebraisch mit $f(x) = \left(\frac{(x-a)}{b}\right)^2 + 1$

$\Rightarrow$ Jede komplexe Zahl ist algebraisch über $\mathbb{R}$

Definition 1.16. Eine Körpererweiterung $k \subset L$ heißt algebraisch, falls jedes $a \in L$ algebraisch über k ist.

Ansonsten nenne Körpererweiterung transzendent.

Bemerkung. Sei $k \subset L$ eine Körpererweiterung, sei $a \in L$ algebraisch über k und sei $f \in k[x]$ ein Polynom $\neq 0$ mit $f(a) = 0$.

Solche Polynome gibt es viele, wir interessieren uns für f's mit mimimalem Grad. Wenn so ein f gegeben ist:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

dann dividiere durch a_n und erhalte Polynom

$$\hat{f} = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \in k[x]$$

mit a als Nullstelle.

Falls $\hat{f}$ und $\overline{f}$ in $k[x]$ zwei normierte Polynome von minimalem Grad sind mit $\hat{f}(a) = \overline{f}(a) = 0$, dann betrachte Polynom $(\hat{f} - \overline{f}) \in k[x]$. Dann gilt

$$(\hat{f} - \overline{f})(a) = \hat{f}(a) - \overline{f}(a) = 0 - 0 = 0$$

und der Grad von $(\hat{f} - \overline{f})$ ist kleiner als der Grad von $\hat{f}$. Weil aber der Grad von $\hat{f}$ minimal war, folgt: $\hat{f} = \overline{f}$.

Satz 1.17. Sei $k \subset L$ eine Körpererweiterung, sei $a \in L$ algebraisch über k. Dann gibt es genau ein Polynom $f \in k[x] \setminus \{0\}$ so dass gilt:

1) $f(a) = 0$

2) $\deg f$ ist minimal unter den Graden der Polynome die a als Nullstelle haben:

$$\deg(f) = \min\{\deg g \mid g \in k[x] \setminus \{0\}, g(a) = 0\}$$

3) f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

Nenne dieses f das Minimalpolynom von a über k.

Die Zahl $\deg f$ wird als Grad von a über k bezeichnet, in Symbolen $[a : k]$

Bemerkung. Sei $k \subset L$ Erweiterung, $a \in L$ algebraisch über k. Falls $[a : k] = 1$, dann $a \in k$.

Mehr Beispiele für Körpererweiterungen

Sei $k \subset L$ eine Körpererweiterung, sei $(L_i)_{i \in I}$ eine Menge von Zwischenkörpern, d.h. $k \subseteq L_i \subseteq L$.

Dann ist auch $K := \bigcap_{i \in I} L_i$ ein Körper.

Nutzanwendung: Sei $A \subset L$ irgendeine Teilmenge. Sei $(L_i)_{i \in I}$ die Menge der Zwischenkörper $k \subseteq L_i \subseteq L$ so dass $\forall i : A \subset L_i$. Dann betrachte K und es gilt:

- $k \subseteq K \subset L$, also K ist Zwischenkörper
- $A \subseteq K$
- K ist der kleinste Zwischenkörper der A enthält

Bemerkung. Bezeichne K mit $k(A)$ und sage $k(A)$ entsteht aus k durch Adjunktion der Elemente von A.

Spezialfall: $A = \{a\}$ dann schreibe ich $k(a)$. Das ist dann der kleinste Unterkörper von L, der sowohl k als auch a enthält.

Definition 1.18 (Einfache Körpererweiterung)**.** Eine Körpererweiterung $k \subset L$ heißt einfach, falls a existiert, so dass $L = k(a)$.

Definition 1.19 (Grad der Körpererweiterung)**.**

$$[L : k] = \dim_k L \qquad \text{Grad der Körpererweiterung}$$

Beispiele

$$[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2 \qquad [\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$$

Satz 1.20. Sei L/k eine Körpererweiterung, $a \in L$ dann gilt

$$[a : k] = [k(a) : k]$$

Beweis. Falls a tanszendent, dann sind $1, a, a^2, \ldots$ k-linear unabhängig, also ist $\dim_k k(a) = \infty$.

Betrachte also den Fall, wo a algebraisch ist mit Minimalpolynom $f(x) = x^n + b_{n-1} + \cdots + b_0 \in k[x]$.

Klar ist: Die Elemente $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \in k(a)$ sind linear unabhängig, denn jede lineare Relation gäbe ein Polynom $g(x)$ vom Grad $< n$ mit $g(a) = 0$ $\lightning$.

Also: $\dim_k k(a) \geq n$

Um Gleichheit zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass $\langle 1, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \rangle_k =: \tilde{k}$ bereits $k(a)$. Klar ist $\tilde{k} \in k(a)$. Wegen der Minimalität von $k(a)$ genügt es für die Umkehrrichtung zu zeigen, dass $\tilde{k}$ ein Körper ist.

Klar ist $0, 1 \in \tilde{k}$.

Zu zeigen ist Abgeschlossenheit unter Addition/Subtraktion (hier klar wegen Vektorraum) und unter Multiplikation/Division (noch nicht klar).

Zwischenbehauptung: Sei $s = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i a^i \in \tilde{k}$ ein beliebiges Element. Dann ist $a \cdot s \in \tilde{k}$.

Wir wissen:

$$a \cdot s = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i a^{i+1}}_{\in \tilde{k}} + \lambda_{n-1} a^n$$

Ein Blick auf das Minimalpolynom zeigt:

$$a^n = - \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot a^i \in \tilde{k}$$

Konsequenz: Wenn $s, t \in \tilde{k}$ beliebig sind, dann $s \cdot t \in \tilde{k}$, also gilt die Abgeschlossenheit unter Multiplikation.

Letzte Aufgabe: Existenz von multiplikativen Inversen. Sei also $s \in \tilde{k}, s \neq 0$ gegeben. Wegen abgeschlossenheit unter Multiplikation ist $s, s^2, s^3, \ldots$ wieder in $\tilde{k}$. Also ist $1, s, \ldots, s^n$ linear abhängig $\Rightarrow$ s ist algebraisch über k.

Sei $p(x) = x^m + p_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots + p_0$ das Minimalpolynom.

Beobachtung: $p_0 \neq 0$, denn sonst könnte ich x ausklammern, p wäre nicht minimal. Damnach kann ich schreiben:

$$\begin{aligned} 0 = p(s) &= s^m + p_{m-1}s^{m-1} + \cdots + p_0 \\ \Leftrightarrow -p_0 &= s(s^{m-1} + p_{m-1}s^{m-1} + \cdots + p_1) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{s} &= \underbrace{\frac{1}{-p_0}}_{\in k} \underbrace{(s^{m-1+p_{m-1}s^{m-2}+\cdots+p_1})}_{\in \tilde{k} \text{ wegen Abg. unter Mult.}} \in \tilde{k} \end{aligned}$$

□

Folgerung 1.21.

1) Wenn $[a : k] = n$, dann ist $k(a) = \{\lambda_0 + \lambda_1 a + \cdots + \lambda_{n-1}a^{n-1} \mid \lambda_i \in k\}$

2) Wenn $[a : k] < \infty$, dann ist $k(a)/k$ algebraisch

Beispiel 1.22. Sei $L = \mathbb{C}, k \subset C$ ein Unterkörper, sei $b \in k$ und $a = \sqrt{b}$. Dann gilt:

$$[k(a) : k] = \begin{cases} 2 & \text{falls } a \notin k \\ 1 & \text{falls } a \in k \end{cases}$$

Proposition 1.23 (Umkehrung der Beobachtung)**.** Sei L/k eine Körpererweiterung von Grad 2. Dann entsteht L durch Adjunktion einer Quadratwurzel.

Lemma 1.24. Sei L/k eine algebraische Körpererweiterung, so dass der Erweiterungsgrad $[L : k]$ eine Primzahl ist. Dann ist die Erweiterung einfach, das heißt $\exists a \in L : L = k(a)$.

Beweis. Übung □

Beweis. (von Proposition 1.23) Wähle $a \in L$ wie im Lemma. Dann ist klar $[a : k] = 2$. Also existieren $\lambda_1, \lambda_0 \in k$, so dass $a^2 + \lambda_1 a + \lambda_0 = 0$ ist. Also:

$$a \in \underbrace{\frac{-\lambda_1}{2}}_{\in k} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)^2 - \lambda_0}}_{=b}$$

Weil a und b sich nur um Elemente von k unterscheiden, ist $k(a) = k(b)$. Das Element b ist aber Quadratwurzel! □

Bemerkung. Falls $\mathrm{char}(k) = 2$ ist, muss man die Lösungsformel richtig hinschreiben.

Satz 1.25. Sei $k \subseteq L \subseteq M$ eine Kette von Körpern. Dann ist

$$[M : k] = [M : L] \cdot [L : k]$$

Beweis. (nur im Fall, wo $[M : L] < \infty$ und $[L : k] < \infty$)

Wähle Basis $m_1, \ldots, m_a$ für M als L-Vektorraum und $l_1, \ldots, l_b$ für L als k-Vektorraum.

Behauptung: Dann bilden die Elemente $(m_i \cdot l_j)_{i,j}$ eine Basis von M als k-Vektorraum.

Erzeugendensystem: Sei $m \in M$ gegeben. Dann ist m schreibbar als

$$m = \sum_{i=1}^{a} \lambda_i \cdot m_i$$

mit $\lambda_i \in L$.

Dann kann ich jedes λ_i schreiben als

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{b} \mu_j^i \cdot l_j$$

mit $\mu_j \in k$.

Einsetzten zeigt m kann geschrieben werden als k-Linearkombination der Produkte $m_i \cdot l_j$.

Lineare Unabhängigkeit: Sei eine lineare Relation

$$0 = \sum_{i,j} \mu_j ij \cdot (m_i \cdot l_j)$$

gegeben, wobei $\mu_j ij \in k$. Dann gilt

$$0 = \sum_i \underbrace{\left(\sum_j \mu_{ij} \cdot l_j \right)}_{\in L} \cdot m_i$$

Weil die m_i per Wahl aber L-linear unabhängig sind folgt für alle i $\sum_j \underbrace{\mu_{ij}}_{\in k} \cdot l_j = 0$.

Weil die l_j per Wahl aber k-linear unabhängig sind, ist $\forall i \forall j \mu_{ij} = 0$. $\square$

Folgerung 1.26. Wenn eine Kette von Körpererweiterungen gegeben ist, $k \subseteq L \subseteq M$ und wenn $[M : k] < \infty$ dann ist $[L : k] < \infty$ und sogar ein Teiler von $[M : k]$.

Satz 1.27. Sei L/k eine Körpererweiterung, dann ist äquivalent:

1) $[L : k] < \infty$

2) L ist algebraisch über k, und es gibt endlich viele $a_1, \dots, a_n \in L : L = k(a_1, \dots, a_n)$

3) Es gibt endlich viele $a_1 \dots, a_n \in L$, die algebraisch über k sind und $L = k(a_1, \dots, a_n)$

Beweis. $\underline{1 \Rightarrow 2:}$ Sei $s \in L$ beliebig. Dann sind $1, s, s^2, \dots, s^{[L:k]}$ linear abhängig, also ist s algebraisch über k. Das heißt L/k ist algebraisch. Um $a_1, \dots, a_n$ zu finden, wähle Vektorraumbasis von L über k.

$\underline{2 \Rightarrow 3:}$ trivial

$\underline{3 \Rightarrow 1:}$ Betrachte

$$\underbrace{k}_{=:k_0} \subseteq \underbrace{k(a_1)}_{=:k_1} \subseteq \underbrace{k(a_1, a_2)}_{=:k_2} \subseteq \dots \subseteq \underbrace{k(a_1, \dots, a_n)}_{=:k_n}$$

Dann klar: $\forall i : a_i$ ist algebraisch über k_{i-1} (sogar algebraisch über k_0) also $[k_i : k_{i-1}] < \infty$, dann $k_i = k_{i-1}(a_i)$ und $[L : k] = \prod_i [k_i : k_{i-1}] < \infty$. □

Lemma 1.28 (Nutzanwendung (Transitivität der Algebraizität))**.** Sei $k \subseteq L \subseteq M$ eine Kette von Körpererweiterungen. Falls L/k algebraisch ist und M/L algebraisch ist, dann ist M/k algebraisch.

Beweis. Sei $m \in M$ gegeben. Ziel: m ist algebraisch über k.

m ist algebraisch über L, das heißt es hat ein Minimalpolynom

$$f(x) = \sum_{i=0}^{a} l_i \cdot x^i \in L[x]$$

Wir wissen auch: Jedes der l_i ist algebraisch über k.

Betrachte jetzt den Zwischenkörper $L' = k(l_0, \dots, l_a)$. Dann ist L'/k endlich und m ist algebraisch über L', also ist $m \in L'(m)$ und $L'(m)/L'$ ist endlich. Damit ist $L'(m)/k$ endlich, also algebraisch. □

Proposition 1.29. Sei $k \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Sei

$$\overline{k} := \{a \in L \mid a \text{ ist algebraisch über } k\}$$

Dann ist $\overline{k}$ ein Körper.

Man nennt $\overline{k}$ den algebraischen Abschluss von k in L.

Beweis. Klar ist, dass $0, 1 \in \overline{k}$ sind. Wir müssen klären, ob mit $a, b \in \overline{k}$ auch $a+b, a-b, a \cdot b$ und gegebenenfalls für $\frac{1}{a} \in \overline{k}$ sind. Das ist aber klar, denn all diese Elemente liegen in $k(a, b)$. Nach Satz ist $k(a, b)$ algebraisch über k. □

Bemerkung. Achtung: Es gibt einen anderen Begriff von (absolutem) algebraischen Abschluss, der nicht von einem Oberkörper $L \supseteq k$ abhängt.

1.3 Lösungsformel für Polynome

Wissen aus der Schule: Quadratische Gleichungen in einer Variable haben Lösungsformel.

Wissen seit der Renaissance: Haaben Formeln für Gleichungen von Grad 3 und 4.

Beispiel: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ Setze:

$$h = -\frac{1}{2}c + \frac{1}{6}ab - \frac{1}{24}a^3$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{-3(a^2b^2 - 4a^3c - 4b^3 + 18abc - 27c^2)} \\ w_2 &= \sqrt[3]{h + \frac{1}{18}w_1} \\ w_2 &= \sqrt[3]{h - \frac{1}{18}w_1} \end{aligned}$$

Dann ist

$$x = -\frac{1}{3}a + w_2 - w_3$$

eine Lösung, wenn die Wurzeln w_2, w_3 so gewählt sind dass $w_2w_3 = \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{3}b$.

Frage: Gibt es eine Lösungsformel für Gleichungen vom Grad 5?

Bescheidener: Kann ich die Lösung überhaupt hinschreiben? (als komplizierten Ausdruck in Wurzeln/Polynomen)

Definition 1.30. Sei L/k eine Körpererweiterung, nenne diese Erweiterung Radikalerweiterung, falls es $a_1, \dots, a_n$ und $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

1) $L = k(a_1, \dots, a_m)$

2) $\forall i a_i^{m_i} \in k(a_1, \dots, a_{i-1})$ also a_i ist die m_i-te Wurzel eines Elementes aus $k(a_1, \dots a_{i-1})$.

Was bedeutet das?

1) $a_1^{m_1} \in k$ Also $k(a_1) = \langle 1, a_1, a_1^2, \ldots, a_1^{m_1-1} \rangle_k$

2) $a_2^{m_2} \in k$ Also $k(a_1, a_2) = \langle 1, a_2, a_2^2, \ldots, a_2^{m_2-1} \rangle_{k(a_1)}$

3) $\ldots$

Bescheidene Frage, präzise formuliert: Gegeben ein Polynom

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Q}[x] \text{ oder } \mathbb{R}[x]$$

gibt es dann eine Radikalerweiterung $L/\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_n)$ (beziehungsweise $L/\mathbb{R}$) so dass f in L eine Nullstelle hat? Gerne $L \subseteq \mathbb{C}$.

2 Ringe

Warum Ringe betrachten? Gegeben eine Körpererweiterung L/k und $a \in L$ und ich suche das Minimalpolynom $f_a(x) \in k[x]$.

Häufig findet man $g \in k[x]$ mit $g(a) = 0$ und muss dann entscheiden ob g das Minimalpolynom ist. Das ist gar nicht leicht!

Beobachtung: Polynomdivision zeigt:

$$g(x) = s(x) \cdot f_a(x) + \mathrm{rest}(x)$$

wobei $\deg \mathrm{rest}(x) < \deg f_a(x)$. a einsetzen ergibt

$$\underbrace{g(a)}_{=0} = s(a) \cdot \underbrace{f_a(a)}_{=0} + \mathrm{rest}(a) \Rightarrow \mathrm{rest}(a) = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{rest}(x) \equiv 0$

$\Rightarrow g(x) = s(x) \cdot f_a(x)$.

Wir sehen: Das Minimalpolynom ist ein Teiler von g im Ring der Polynome.

Ziel: Wir müssen Teilbarkeit verstehen!

2.1 Teilbarkeit

Definition 2.1. Sei R ein Ring. Dann bezeichne mit $R[x]$ den Ring der Polynome mit Variable x und Koeffizienten aus R.

Warnung: Polynome geben Funktionen $R \to R$ aber Polynome sind nicht Funktionen.

Definition 2.2. Sei $f \in R[x]$ ein Polynom. Dann definiere den Grad von f wie üblich.

Lemma 2.3. Sei R ein Integritätsring, $f, g \in R[x]$. Dann ist

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$$

Beweis. Sei $n_f = \deg(f)$ und $n_g = \deg(g)$ schreibe

$$\begin{aligned} f(x) &= a_f \cdot x^{n_f} + (\text{kleinere Terme}), a_f \neq 0 \\ g(x) &= a_g \cdot x^{n_g} + (\text{kleinere Terme}) \end{aligned}$$

Dann ist

$$(f \cdot g)(x) = a_f \cdot a_g \cdot x^{n_f + n_g} + (\text{kleinere Terme})$$

und weil R ein Integritätsring ist, ist $a_f \cdot a_g \neq 0$, also $\deg(f \cdot g) = n_f + n_g$. □

Folgerung 2.4. Sei R ein Integritätsring. Dann ist $R[x]$ selbst wieder ein Integritätsring.

Beweis. Seien $f, g \in R[x] \setminus \{0\}$.

Wir müssen zeigen: $f \cdot g \not\equiv 0 \in R[x]$ $(*)$.

Falls $\deg f = \deg g = 0$, folgt $(*)$ weil R ein Integritätsring ist.

Ansonsten folgt $(*)$, weil $\deg f \cdot g = \deg f + \deg g > 0$. □

Ausblick: Dann ist $(R[x])[y]$ auch wieder ein Integritätsring. Und natürlich ist $(R[x])[y] \simeq R[x, y]$.

Folgerung 2.5. Sei R ein Integritätsring. Dann ist $(R[x])^* = R^*$.

Beweis. Sei $f(x) \in (R[x])^*$, das heißt $\exists g(x) \in R[x] : f \cdot g \equiv 1$.

$\Rightarrow \deg f + \deg g = \deg 1 = 0$

$\Rightarrow \deg f = 0$, also ist Polynom f konstant, ebenso für g. □

Bemerkung. Per Induktion folgt auch $(R[x_1, \ldots, x_n])^* = R^*$

Definition 2.6. Sei R ein Ring, seien $s, r \in R$ Elemente. Ich sage: s ist Teiler von r (in Symbolen $s \mid r$), wenn es $a \in R$ gibt, so dass $s \cdot a = r$.

Lemma 2.7. Sei R ein Integritätsring, seien s, r Elemente. Dann ist äquivalent

1) $\exists \varepsilon \in R^*, s = \varepsilon \cdot r$

2) $s \mid r$ und $r \mid s$

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, nenne ich s und r assoziiert (in Symbolen $s \sim r$).

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2)✓

2) $\Rightarrow$ 1) Aus $s \mid r$ und $r \mid s \Rightarrow a, b \in R : s \cdot a = r$ und $r \cdot b = s$.

$\Rightarrow (r \cdot b) \cdot a \Rightarrow r(ba - 1) = 0$

Da R Integritätsring ist: $\Rightarrow ba = 1 \qquad \Rightarrow b, a, \in R^*$ □

Definition 2.8. Sei R ein Integritätsring, seien $s, r \in R$ Elemente. Dannn nenne s einen echten Teiler von r (in Symbolen $s \parallel r$) falls gilt:

1) $s \mid r$

2) $s \notin R^*$

3) r und s sind nicht assoziiert

Definition 2.9. Sei R ein Integritätsring. Ein Element $r \in R$ heißt irreduzibel, falls $r \notin R^*$ und falls r keine echten Teiler hat.

Beispiel 2.10. Die irreduziblen Elemente von $R = \mathbb{Z}$ sind exakt $\pm$(Primzahl).

Lemma 2.11. Sei R ein Integritätsring. Seien $r, s, t, s_1, s_2, u, v \in R$. Dann gilt:

1) $r \mid r$

2) $r \mid s$ und $s \mid t \Rightarrow r \mid t$

3) $r \mid s_1$ und $r \mid s_2 \Rightarrow r \mid (s_1 + s_2)$

4) $r \mid s_1$ und $r \mid (s_1 + s_2) \Rightarrow r \mid s_2$

5) $r \mid s$ und $u \mid v \Rightarrow ru \mid sv$

Nächstes Ziel: In $\mathbb{Z}$ ist jede Zahl darstellbar als Produkt von Primzahlen und die Darstellung ist eindeutig bis auf Reihenfolge und Vorzeichen.

Wunschtraum: Sei R ein Integritätsring. Dann ist jedes Element eindeutig darstellbar als Produkt von irreduziblen Elementen.

Beispiel 2.12. Betrachte $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b \cdot \sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$

Dieser Ring ist ein Unterring von $\mathbb{C}$ und deshalb Nullteilerfrei und

$$9 = 3 \cdot 3 = \underbrace{(2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})}_{2^2 - (\sqrt{-5})^2}$$

Die Elemente $3, 2 \pm \sqrt{-5}$ sind irreduzibel und nicht zueinander assoziiert.

Definition 2.13. Sei R ein Integritätsring. Eine Teilerkette ist eine Folge $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus R, so dass $\forall i \; r_{i+1} \mid r_i$. Ich sage, im Ring R gilt der Teilerkettensatz für Elemente, falls in jeder Teilerkette die stärkere Bedigung $r_{i+1} \parallel r_i$ nur endlich oft gilt.

Beispiel 2.14. Im Ring $\mathbb{Z}$ gilt der Teilerkettensatz für Elemente, denn falls $r_{i+1} \parallel r_i$ ist, dann gilt $|r_{i+1}| < |r_i|$.

Analog im Polynomring mit deg statt $|\cdot|$.

Satz 2.15. Sei R ein Integritätsring in dem der Teilerkettensatz für Elemente gilt. Dann ist jedes $r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$ als Produkt von endliche vielen irreduziblen Elementen darstellbar.

Beweis. (Noether Rekursion) Wir wollen zeigen, dass $M = \{r \in R \mid r \notin R^*, r \neq 0 \text{ und } r \text{ nicht als Produkt von endlich vielen irreduziblen darstellbar}\}$ leer ist. Widerspruchsbeweis: angenommen $M \neq \emptyset$.

Beobachtungen:

1) $\forall r \in M$ r ist nicht irreduziblen (denn sonst wäre r eine Darstellung), also hat r echte Teiler

2) $\exists r \in M$, so dass alle echten Teiler von r nicht mehr in M liegen (denn sonst nehme echten Teiler aus M, widerhole das Verfahren, erhalte unendliche Teilerkette wo ich in jedem Schritt echte Teiler habe $\lightning$ zur Annahme)

Also gegeben r wie in Beobachtung 2), dann ist jeder echte Teiler als Produkt von endlich vielen irreduziblen darstellbar, also auch r selbst. (Schreibe $r = r_1 \cdot r_2$ mit r_1, r_2 echte Teiler. Dann $r_1 = a_1 \cdots a_n, r_2 = b_1 \dots b_m$ mit $\forall i, j a_i, b_j$ irreduzibel dann $r = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$) $\lightning$. $\square$

Definition 2.16. Sei R ein Integritätsring, sei $r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$. Seien

$$r = a_1 \cdots a_n = b_1 \cdots b_m$$

zwei Darstellungen von r als Produkt von endlich vielen Irreduziblen.

Nenne die Darstellung äquivalent, falls gilt

1) gleich lang: $n = m$

2) $\exists$ Permutation $\sigma \in S_n$ und Einheiten $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \in R^*$ so dass $\forall i : a_i = \varepsilon_i \cdot b_{\sigma(i)}$

Bemerkung. In Ringen, in denen der Teilerkettensatz gilt, sind Darstellungen nicht immer äquivalent! Zum Beispiel $R = \mathbb{Z}\sqrt{-5}$.

Das Problem ist, dass die irreduziblen Elemente in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht unbedingt prim sind.

Definition 2.17. Sei R ein Integritätsring, $r \in R, r \neq 0$ ein Element. Nenne r prim falls $\forall a, b \in R$

$$r \mid (a \cdot b) \qquad \Longrightarrow \qquad r \mid a \text{ oder } r \mid b$$

Beispiel 2.18. In $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist $(2 + \sqrt{-5})$ irreduzibel, aber nicht prim, denn $(2 + \sqrt{-5}) \mid 3 \cdot 3$ aber $(2 + \sqrt{-5}) \nmid 3$.

Lemma 2.19 (Elementare Rechenregeln für Prim-Elemente)**.** Sei R ein Integritätsring, $p, q \in R$

1) p prim $\Rightarrow$ p irreduzibel

2) p prim, $p \sim s \Rightarrow s$ prim

3) p, q prim und $p \mid q \Rightarrow p \sim q$

4) p prim und $p \mid a_1 \cdots a_n \Rightarrow \exists i\; p \mid a_i$

Beweis. zu 1)

Sei p prim. Angenommen p habe echten Teiler $a \in R$. Dann sei $b \in R$ so dass $p = a \cdot b$, insbesondere $p \mid ab$. Also $p \mid a$ oder $p \mid b$. oBdA gelte $p \mid a$.

Also $\exists h \in R, p \cdot h = a$. Einsetzen liefert

$$p = p \cdot h \cdot b \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(1 - hb) = 0 \qquad \underset{R \text{ Integritätsring}}{\Longleftrightarrow} \qquad 1 = h \cdot b$$

$\Rightarrow b$ ist eine Einheit, kein echter Teiler. $\square$

Satz 2.20. Im Ring $\mathbb{Z}$ ist jedes irreduzible Element auch prim.

Beweis. Angenommen es existiert in $\mathbb{Z}$ ein irreduzibles Element p, das nicht prim ist. Dann ist $-p$ irreduzibel und auch nicht prim. Wir können also oBdA annehmen $p > 0$. Wir können auch annehmen das p das kleinste positive, irreduzible Element ist, das nicht prim ist.

Also $\exists a, b \in \mathbb{N} : p \mid a \cdot b$ aber $p \nmid a$ und $p \nmid b$.

Division mit Rest liefert

$$\begin{aligned} a &= x \cdot a + a' && \text{wobei } a' < p \\ b &= y \cdot p + b' && \text{wobei } b' < p \end{aligned}$$

Sehe sofort $p \nmid a'$ und $p \nmid b'$.

Sehe auch $a \cdot b = xyp^2 + (xb' + a'y)p + a'b'$ also $p \mid a'b'$.

Wähle also a, b so, dass ab minimal ist, und dann ist $a < p, b < p, ab < p^2$.

Finde $h \in \mathbb{N} : p \cdot h = a \cdot b$.

Sei jetzt p' ein irreduzibler Teiler von $h, p' > 0$. Dann existiert $h' > 0, h = p' \cdot h'$ und $p' \leq h < p$. Nach Wahl von p (kleinstes irreduzibles das nicht prim ist) ist p' prim und $p \cdot p' \cdot h' = a \cdot b$.

Also gilt $p' \mid a \cdot b \underset{p' prim}{\Rightarrow} p' \mid a$ oder $p' \mid b$. oBdA gelte $p' \mid a$. Finde also $a' < a$ so dass $p' \cdot a' = a$. Einsetzen liefert

$$p \cdot p' \cdot h' = p' \cdot a' \cdot b \underset{\mathbb{Z}\text{ Integritätsring}}{\Longrightarrow} p \cdot h' = a'b \qquad \Longrightarrow \qquad p \mid a'b$$

Da $a'b < ab$ ist gilt nach Wahl von $a \cdot b$ (a, b Gegenbeispiel zur Prim-Eigenschaft mit minimalem Produkt) also $p \mid a'$ oder $p \mid b$. Da $a' \mid a$ ist folgt $p \mid a$ oder $p \mid b$. $\lightning$ $\square$

Satz 2.21. Sei R ein Integritätsring. Dann ist äquivalent:

1) Jedes $r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$ ist als Produkt von endlich vielen Irreduziblen darstellbar und je zwei Darstellungen sind äquivalent.

2) In R gilt der Teilerkettensatz für Elemente und alle irreduziblen sind prim.

Falls diese Eigenschaften gelten, nenne R faktoriell oder UFD.

Beweis. $\underline{1) \Rightarrow 2)}$

Teilerkettensatz: Sei $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Teilerkette. Sei i so dass $r_{i+1} \parallel r_i$ das heißt $\exists h : h \notin R^*, h \neq 0 : r_{i+1} \cdot h = r_i$.

Nach Annahme, kann r_i, r_{i+1}, h als Produkt von endlich vielen irreduziblen geschrieben werden

$$\begin{aligned} r_i &= a_1 \cdot a_n \\ r_{i+1} &= b_1 \cdots b_m \\ h &= c_1 \cdots c_k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\underbrace{b_1 \cdots b_m}_{\text{Darstellung von } r_{i+1}} \cdot c_1 \cdots c_k = \underbrace{a_1 \cdots a_n}_{\text{Darstellung von } r_i}$$

Da alle Darstellungen äquivalent sind, folgt $n = m + k > m$.

Also in der Teilerkette gibt es höchstens endlich viele echte Teiler, nämlich höchstens so viele, wie eine (jede) Darstellung von r_1 lang ist. $\Rightarrow$ Teilerkettensatz gilt

Irreduzibel $\Rightarrow$ *Prim*: Sei r irreduzibel und seien $a, b \in R\setminus\{0\}$ so dass $r \mid ab$. Also existiert $h \in R \setminus \{0\}$, so dass $r \cdot h = a \cdot b$. Wir wissen h, a, b haben Darstellung

$$a = a_1 \cdots a_n, \qquad b = b_1 \cdots b_m, \qquad h = h_1 \cdots h_k$$

Also

$$r \cdot h_1 \cdots h_k = a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_m$$

zwei Darstellungen von $a \cdot b$. Per Annahme sind diese Darstellungen äquivalent also $\exists i : r \sim a_i$ oder $\exists j : r \sim b_j$

$\Rightarrow r \mid a$ oder $r \mid b$. Also ist r prim.

$\underline{2) \Rightarrow 1)}$

Wir haben schon bewiesen: Teilerkettensatz $\Rightarrow$ Darstellbarkeit, es fehlt noch die Äquivalenz $\forall r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$ und für alle Darstellungen $r = a_1 \cdots a_n \underset{(*)}{=} b_1 \cdots b_m$ mit $n \neq m$ gilt, dass beide Darstellungen äquivalent sind.

Beweis per Induktion über n

Induktionsanfang: $n = 1 : a_1 = b_1 \cdots b_m$

Per Annahme ist a_1 prim, also $\exists j : a_1 \mid b_j$.

Rechenregeln: $a_1 \sim b_j$, insbesondere sind alle $b_k, k \neq j$ schon Einheiten. $\Rightarrow m = 1 = j$ (da die Faktoren in der Darstellung irreduzibel und keine Einheiten sind).

Induktionsschritt: Sei die Aussage für alle Zahlen $< n$ schon bewiesen.

Wieder gilt $a_1 \mid b_1 \cdots b_m \Rightarrow \exists j : a_1 \sim b_j$. oBdA sei $j = 1$ also existiert eine Einheit $\varepsilon \in R^*$ so dass $a_1 = \varepsilon b_1$.

R ist also Integritätsring, kann also in $(*)$ kürzen, erhalte

$$a_2 \cdots a_n = (\varepsilon b_2) \cdot b_3 \cdots b_m$$

Per Induktionsannahme sind diese Darstellungen äquivalent. □

Folgerung 2.22. $\mathbb{Z}$ ist faktoriell.

Folgerung 2.23. Alle Körper sind faktoriell.

Satz 2.24 (Gauß)**.** Wenn R ein faktorieller Ring ist, dann auch $R[x]$.

Und damit auch $(R[x])[y] = R[x, y]$ und auch $R[x_1, \dots, x_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir müssen zeigen:

1) In $R[x]$ gilt der Teilerkettensatz

2) Je zwei Darstellungen sind äquivalent

zu 1): Wenn $r(x), s(x) \in R[x]$ und $r(x) \parallel s(x)$, dann $\deg r(x) < \deg s(x)$ oder $\exists a \in R \setminus R^*, a \neq 0 : a \cdot r(x) = s(x)$.

$\Rightarrow$ alle Koeffizienten von s werden von a geteilt. In R gilt aber der Teilerkettensatz!

Hausaufgabe: Also gilt der Teilerkettensatz auch in $R[x]$.

zu 2): Widerspruchsbeweis! Angenommen es gibt $r(x) \in R[x], r \neq 0, r \notin R[x]^* = R^*$ so dass r zwei Darstellungen hat, die nicht äquivalent sind

$$r(x) = p_1(x) \cdots p_\alpha(x) = q_1(x) \cdots q_\beta(x) \qquad (*)$$

Ich kann oBdA einige Annahmen treffen

- $\deg r(x)$ ist minimal unter allen Polynomen die nicht äquivalente Darstellungen haben

- die irreduziblen Polynome $p_1, \dots, p_\alpha, q_1, \dots, q_\beta$ sind nach Graden sortiert also $\deg p_1 \geq \deg p_2 \geq \dots \geq \deg p_\alpha$ und $\deg q_1 \geq \deg q_2 \geq \dots \geq \deg q_\beta$

- $\deg q_1 \geq \deg p_1$

Sei $n \coloneqq \deg p_1, m = \deg q_1$. Seien a, b die Leitkoeffizienten von p_1 beziehungsweise q_1. Das heißt:

$$
\begin{aligned}
p_1 &= a \cdot x^n + (\text{lot}) \\
p_1 &= b \cdot x^m + (\text{lot})
\end{aligned}
$$

Beobachtungen:

- $\deg r(x) > 0$, denn sonst wären $r(x)$ und alle $q_i(x), p_j(x)$ konstant, also in R. Per Annahme das R faktoriell ist müssten die Darstellungen dann äquivalent sein.

  $\Rightarrow n > 0$ und $m > 0$

- Angenommen es gäbe j: $p_1 \sim q_j$. Dann könnte ich in $(*)$ auf beiden Seiten p_1 kürzen und erhielte Polynom von Grade $(\deg r(x)) - n < \deg r(x)$, das zwei nicht äquivalente Darstellungen hat $\lightning$ zur Minimalität von $\deg r(x)$.

Betrachte Hilfspolynom:

$$
s(x) = \underbrace{\Big[b \cdot p_1(x) \cdot x^{m-n} - a \cdot q_1(x)\Big]}_{\deg < \deg q_1(x)} \cdot q_2 \cdots q_\beta \tag{☼}
$$

Wir erhalten zwei offensichtliche Fälle

1) $s(x) = 0$: Dann ist
$$
b \cdot p_1(x) \cdot x^{m-n} - a \cdot q_1(x)
$$

2) $s(x) \neq 0$: Wir sehen $\deg s(x) < \deg r(x)$. Also sind je zwei Darstellungen von $s(x)$ äquivalent! Schreibe $s(x)$ um:

$$
\begin{aligned}
s(x) &= b \cdot p_1(X) x^{m-n} \cdot q_2 \cdots q_\beta - a \underbrace{q_1 \cdots q\beta}_{r(x)} \\
&= b \cdot p_1 x^{m-n} \cdot q_2 \cdot q_\beta - a \cdot p_1 \cdots p_\alpha \\
&= p_1(x) \Big[b \cdot x^{m-n} \cdot q_2(x) \cdots q_\beta(x) - a \cdot p_2(x) \cdots p_\alpha(x)\Big] && (☾)
\end{aligned}
$$

Wir können die Ausdrücke (☼) und (☾) verfeinern zu Produkten von irreduziblen indem wir die Ausdrücke in [...] als Produkt von irreduziblen schreiben. Diese Darstellungen von $s(x)$ müssen dann äquivalent sein.

Konsequenz: In der Darstellung von (☼) muss es einen Faktor geben, der zu p_1 assoziiert ist. Da $p_1 \nsim 1_2 \dots p_1 \nsim q_\beta$ muss p_1 ein Primfaktor vom [...]-Ausdruck in (☼) sein.

$$\Rightarrow \qquad p_1 \mid (bp_1 \cdot x^{m-n} - aq_1) \qquad \Rightarrow p_1 \mid aq_1$$

Insgesamt ergibt sich in jedem der beiden Fälle:

$$\exists h \in R[x]: \quad p_1(x) \cdot h(x) = a \cdot q_1(x) \tag{♠}$$

Beobachte: Wenn $a \in R^*$, dann $p_1 \mid q_1$ und $p_1 \sim q_1$ ↯. Also ist $a \in R \setminus R^*, a \neq 0$.

Zwischenbehauptung (Beweis später): Sei $p \in R$ irreduzibel. Dann ist das konstante Polynom $p \in R[x]$ prim.

Anwendung der Zwischenbehauptung: Schreibe a als Produkt von Irreduziblen. Wenn jetzt p einer der irreduziblen Faktoren ist, dann $p \mid p_1 \cdot h$.

$\Rightarrow p \mid p_1$ oder $p \mid h$. $p \mid p_1$ kann nicht sein, denn p_1 ist irreduzibel, hat also überhaupt keine echten Teiler.

Also kann ich aus (♠) p herausteilen und erhalte

$$p_1 \cdot \frac{h}{p} = \frac{a}{p} q_1$$

Das geht mit jedem Primfaktor von a erhalte also am Ende:

$$p_1 \cdot \frac{h}{a} = q_1 \qquad \Rightarrow p_1 \mid q_1 \qquad \Rightarrow p_1 \sim q_1 \qquad \Rightarrow ↯$$

Zwischenbehauptung (jetzt der Beweis): Sei $p \in R$ irreduzibel. Dann ist das konstante Polynom $p \in R[x]$ prim.

Sei $p \in R$ irreduzibel. Ich zeige die Kontraposition: wenn $a(x), b(x) \in R[x]$ Polynome sind mit $p \nmid a(x)$ und $p \nmid b(x) \Rightarrow p \nmid (a \cdot b)(x)$

Seien also $a(x), b(x)$ gegeben. Schreibe

$$\begin{aligned} a(x) &= a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \\ b(x) &= b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m \end{aligned}$$

Erinnere: $p \mid a(x) \Leftrightarrow \forall i : p \mid a_i$

Kann also minimale Indizes i und j wählen, so dass $p \nmid a_i$ und $p \nmid b_j$. Betrachte Produktpolynom $(a \cdot b)(x)$ und rechne den Koeffizienten von x^{i+j} im Produktpolynom aus. Dieser Koeffizient ist

$$\gamma \coloneqq \sum_{\substack{\alpha+\beta=i+j \\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}}} a_\alpha \cdot b_\beta$$

In dieser Summe sind alle Summanden durch p teilbar, weil stets $\alpha < i$ oder $\beta < j$ mit der Ausnahme des Summanden $\alpha = i, \beta = j, (= a_i \cdot b_j)$.

Weil R faktoriell ist per Annahme und $p \in R$ deshalb prim ist $\Rightarrow p \nmid a_i \cdot b_j$

$\Rightarrow p \nmid \gamma \qquad \Rightarrow p \nmid (a \cdot b)(x)$ $\square$

<u>Was tun wir mit faktoriellen Ringen?</u>

Sei R ein faktorieller Ring, betrachte die Äquivalenzrelation $a \sim b \Leftrightarrow a$ assoziiert zu b

Wähle Repräsentantensystem $P \subset R$ für die irreduziblen Elemente (= zu jedem irreduziblen $a \in R$ gibt es genau ein $b \in P$ mit $a \sim b$)

Wenn dann irgendein $a \in R$ gegeben ist, dann kann ich schreiben

$$a = \varepsilon \cdot \prod_{p\in P} p^{\alpha_p}$$

wobei $\varepsilon \in R^*, \alpha_p \in \mathbb{N}$ und alle bis auf endlich viele $\alpha_p = 0$.

Teilbarkeit wird dann ganz einfach. Seien $a, b \in R$

$$a = \varepsilon_a \cdot \prod_{p\in P} p^{\alpha_{a,p}}, \qquad b = \varepsilon_b \cdot \prod_{p\in P} p^{\alpha_{b,p}}$$

und

$$\begin{aligned} a \mid b &\Leftrightarrow \forall p \in P : \alpha_{a,p} \leq \alpha_{b,p} \\ a \parallel b &\Leftrightarrow (\forall p \in P : \alpha_{a,p} \leq \alpha_{b,p}) \quad \& \quad (\exists p \in P : \alpha_{a,p} < \alpha_{b,p}) \\ a \sim b &\Leftrightarrow \forall p \in P : \alpha_{a,p} = \alpha_{b,p} \end{aligned}$$

<u>Weiter mit Grundschulstoff:</u>

Sei R ein Integritätsring, seien $a, b \in R \setminus R^*, a \cdot b \neq 0$

1) Ein Element $c \in R$ heißt größter Gemeinsamer Teiler wenn gilt $c \mid a$ und $c \mid b$ und wenn für jedes andere c' mit $c' \mid a$ und $c' \mid b$ gilt $c' \mid c$.

2) Ein Element $c \in R$ heißt kleinstes gemeinsames Vielfaches, wenn $a \mid c$ und $b \mid c$ ist und für alle $c' \in R$ mit $a \mid c'$ und $b \mid c'$ gilt $c \mid c'$.

Satz 2.25. Sei R faktoriell. Seien $a, b \in R$ dann existieren ggT und kgV.

Beweis. Wähle Repräsentantensystem $P \subset R$. Schreibe

$$a = \varepsilon_a \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_{a,p}}, \qquad b = \varepsilon_b \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_{b,p}}$$

Setze

$$\mathrm{ggT}(a, b) := \prod_{p \in P} p^{\min(\alpha_{a,p}, \alpha_{b,p})}$$

und

$$\mathrm{kgV}(a, b) := \prod_{p \in P} p^{\max(\alpha_{a,p}, \alpha_{b,p})}$$

Blick nach oben zeigt, dass dies exakt die Bedingungen erfüllt. $\square$

Satz 2.26. Seien $f, g \in k[x]$ Polynome. Betrachte Divisionsreste

$$f = q_1 \cdot g + r_1 \tag{1}$$
$$g = q_2 \cdot r_1 + r_2 \tag{2}$$

Definiere dann induktiv Polynome r_n als Divisionsrest

$$r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n \tag{n}$$

Beobachtung: Die Grade der Polynome $r_1, r_2, \ldots$ werden immer kleiner. Der Prozess stoppt also nach endlich vielen Schritten das heißt irgendwann geht die Division auf. Es existiert also $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n + 0 \tag{n+1}$$

Dann ist $r_n = \mathrm{ggT}(f, g)$.

Beweis. 1) Wenn t ein gemeinsamer Teiler von f, g ist

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} t \mid r_1 \qquad \ldots \qquad \overset{(n)}{\Longrightarrow} t \mid r_n$$
$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} t \mid r_2$$

2) Andere Richtung analog:

$$\begin{aligned} (n+1) &\Longrightarrow r_n \mid r_{n-1} \\ (n) &\Longrightarrow r_n \mid r_{n-2} \\ &\vdots \\ (2) &\Longrightarrow r_n \mid g \\ (1) &\Longrightarrow r_n \mid f \end{aligned}$$

Da $k[t]$ faktoriell ist genügen 1) + 2) um $r_n = \mathrm{ggT}$ zu zeigen.

$\square$

2.2 Der Quotientenkörper eines Integritätsrings

Ziel: Gegeben ein Ring R, suche einen möglichst kleinen Körper k s.d. $R \subset k$ (besser: so dass es einen injektiven Ringmorphismus $R \hookrightarrow k$ gibt). Wir denken an $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

Beobachtung: So etwas kann es nicht geben, wenn R Nullteiler hat! Betrachte also nur Integritätsringe.

Definition 2.27. Sei R ein Integritätsring. Ein Quotientenkörper von R ist ein Körper k zusammen mit einem injektiven Ringmorphismus $\varphi : R \to k$ so dass folgende (universelle) Eigenschaft gilt: Wann immer $\Phi : R \to L$ ein injektiver Ringmorphismus in einen Körper ist, dann gibt es genau einen Körpermorphismus $\eta : k \to L$ so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[d, "\exists ! \eta"] \\ R \arrow[r, "\Phi"'] & L \end{tikzcd}$$

Bemerkung. Körpermorphismen $k \xrightarrow{\eta} L$ sind immer injektiv! Denn wäre $a \in k \setminus \{0\}, a \in \ker(\eta)$. Dann

$$1_L = \eta(1_k) = \eta(a \cdot a^{-1}) = \underbrace{\eta(a)}_{=O_L} \cdot ?$$

Widerspruch!

Satz 2.28. Sei R ein Integritätsring. Dann existiert ein Quotientenkörper $(k, \varphi : R \to k)$. Dieser ist eindeutig bis auf kanonische Isomorphie. Das bedeutet: Wenn $(k', \varphi' : R \to k')$ ein weiterer Quotientenkörper ist, dann existiert genau ein Körperisomorphismus $\eta : k \to k'$ so das das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[d, "\exists! \eta"] \\
R \arrow[r, "\varphi'"'] & k
\end{tikzcd}$$

Beweis. Eindeutigkeit: Seien Quotientenkörper $(k, \varphi : R \to k)$ sowie $(k', \varphi' : R \to k')$ gegeben. Nach der universellen Eigenschaft existiert dann genau ein Körpermorphismus $\eta : k \to k'$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[d, "\eta"] \\
R \arrow[r, "\varphi'"'] & k
\end{tikzcd}$$

Wir wissen auch: Weil k' Quotientenkörper ist, existiert genau ein Körpermorphismus $\eta' : k' \to k$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[d, "\eta"] \\
R \arrow[r, "\varphi'"'] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k' \arrow[d, "\eta'"] \\
R \arrow[r, "\varphi"'] & k
\end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft angewandt auf

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[dd, "\mathbb{1}_k"', "\eta' \circ \eta"] \\
R \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & \\
R \arrow[r, "\varphi"'] & k
\end{tikzcd}$$

zeigt: $\eta' \circ \eta = \mathbb{1}_k$.

Genauso folgt $\eta \circ \eta' = \mathbb{1}_{k'}$. Also ist der Körpermorphismus η' die Umkehrung von η.

<u>Existenz:</u> Ich konstruiere den Quotientenkörper wie folgt:

1) Betrachte die Menge
$$B = \{(a,b) \in R \times R \mid b \neq 0\}$$
und sage (a,b) ist äquivalent zu (a',b') wenn gilt $ab' = a'b$. Das ist eine Äquivalenzrelation. Symmetrie und Reflexivität sind klar per Definition. Wir müssen also noch die Transitivität zeigen: Seien also Tupel gegeben so dass
$$\begin{array}{ccc} & (a,b) \sim (a',b') & (a',b') \sim (a'',b'') \\ \Leftrightarrow & ab' = a'b & a'b'' = a''b' \end{array}$$
Und damit dann
$$\Rightarrow \quad ab' \cdot a'b'' = a'b \cdot a''b'$$
Im Integritätsring falls $a' \neq 0$
$$\Rightarrow \quad ab'' = a''b \quad \Leftrightarrow \quad (a,b) \sim (a'',b'')$$
Falls $a' = 0$ ist der Beweis sowieso einfach.

Definiere als Menge
$$k := B/\sim$$

Notation: Die Äquivalenzklasse von (a,b) wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet.

Betrachte die Abbildung
$$\varphi : R \to k, a \mapsto \frac{a}{1}$$

Diese Abbildung ist injektiv, denn
$$\varphi(a) = \varphi(a') \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{1} = \frac{a'}{1} \quad \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad a \cdot 1 = a' \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = a'$$

2) Definiere auf k die Struktur eines Körpers mit Verknüpfungen
$$\begin{aligned} \cdot : k \times k \to k, \quad & \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \mapsto \frac{ac}{bd} \\ + : k \times k \to k, \quad & \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \mapsto \frac{ad+cb}{bd} \end{aligned}$$

Muss noch nachrechnen: Wohldefiniertheit

Das bedeutet: Gegeben $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sowie $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c'}{d'}$ mit $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ sowie $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, dann gilt $\frac{ad+cb}{bd} = \frac{a'd'+c'b'}{b'd'}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & (ad + cb) \cdot b'd' = (a'd' + c'b') \cdot bd \\ \Leftrightarrow \quad & adb'd' + cbb'd' = a'd'bd + c'b'bd \end{aligned}$$

Wir wissen $ab' = a'b$ und $cd' = c'd$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 0$$

Die Addition ist wohldefiniert.

Hausaufgabe: Dasselbe für Multiplikation

Lästige Rechnerei: Diese Verknüpfungen definieren eine Körperstruktur auf k so dass die Abbildung $\varphi : R \to k$ ein Ringmorphismus ist. Es gilt

$$0_k = \frac{0}{1} \qquad 1_k = \frac{1}{1} \qquad \text{falls } a \neq 0 \text{ dann} \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

3) Beweis der universellen Eigenschaft

Sei Körper L gegeben und ein injektiver Ringmorphismus $\Phi : R \to L$, dann müssen wir zeigen $\exists! \eta : k \to L$ so dass ...

Eindeutigkeit: Angenommen wir hätten η so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[d, "\exists!\eta"] \\ R \arrow[r, "\Phi"'] & L \end{tikzcd}$$

dann gilt für alle $a \in R$

$$\eta(\varphi(a)) = \Phi(\mathbb{1}_R(a)) \Leftrightarrow \eta\left(\frac{a}{1}\right) = \Phi(a)$$

Falls $a \neq 0$ ist gilt

$$\eta\left(\frac{1}{a}\right) = \eta\left(\left(\frac{a}{1}\right)^{-1}\right) \overset{\text{Körpermorphismus}}{=} \eta\left(\frac{a}{1}\right)^{-1}$$

also gilt für alle $\frac{a}{b} \in k$

$$\eta\left(\frac{a}{b}\right) = \eta\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b}\right) = \eta\left(\frac{a}{1}\right) \cdot \eta\left(\frac{1}{b}\right) = \Phi(a) \cdot (\Phi(b))^{-1}$$

also ist η eindeutig.

<u>Existenz:</u> Definiere

$$\eta : k \to L, \quad \frac{a}{b} \mapsto \Phi(a) \cdot \Phi(b)^{-1}$$

Wieder ist Wohldefiniertheit zu prüfen: Seien $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Wir müssen zeigen:

$$\begin{aligned}
& & \Phi(a)\Phi(b)^{-1} &= \Phi(a')\Phi(b')^{-1} \\
&\Leftrightarrow & \Phi(a) \cdot \Phi(b') &= \Phi(a')\Phi(b) \\
&\Leftrightarrow & \Phi(ab') &= \Phi(a'b) \\
&\Leftrightarrow & &\text{Wahr, wegen Annahme}
\end{aligned}$$

Nachrechnen: das ist ein Körperisomorphismus.

□

Beispiel 2.29.

- $R = \mathbb{Z}$ dann ist $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$
- R ein Körper, dann ist $Q(R) = R$
- $R = \mathbb{Z}[2 + \sqrt{-5}]$, dann ist $Q(R) = \mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5}) \subset \mathbb{C}$

  Grund: Wir haben eine Inklusion $R \subset \mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5})$ deshalb gibt es Körpermorphismus $Q(R) \to \mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5})$.

  Dieser ist surjektiv, denn $Q(R)$ enthält das Element $a = 2 + \sqrt{-5}$. Wir wissen aber $\mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5})$ ist der kleinste Körper der dieses Element enthält.

- Sei R faktoriell. Wähle Repräsentantensystem $P \subset R$. Dann kann ich alle Elemente von $Q(R)$ auf eindeutige Weise schreiben als

  $$\varepsilon \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_p}$$

  wobei $\varepsilon \in R^*, \alpha_p \in \mathbb{Z}$ und fast alle $\alpha_p = 0$.

<u>Warum das alles?</u>

Wenn R faktoriell ist, kann ich manchmal entscheiden, ob Polynome in $R[x]$ irreduzibel sind.

Beispiel: $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$

Behauptung: f ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$

Anbenommen es gäbe einen echten Teiler, dann gäbe es einen linearen Teiler das heißt

$$\exists a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0 : f(x) = (ax + b)g(x)$$

wobei $g(x)$ quadratisch in $\mathbb{Z}[x]$.

Sehe sofort: $a \in \{\pm 1\}, b \in \{\pm 1, \pm 2\}$

Nachrechnen: keine dieser Möglichkeiten ist ein Teiler

Der folgende Satz zeigt, dass f auch in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

Satz 2.30 (Satz von Gauß)**.** Sei R ein faktorieller Ring. Falls $f(x) \in R[x]$ irreduzibel als Element von $R[x]$, dann ist f auch irreduzibel als Element von $Q(R)[x]$.

Vorbemerkung: Sei $f \in Q(R)[x]$ irgendein Polynom. Dann existiert $a \in Q(R)$ so dass $a \cdot f(x) \subset R[x]$ und ggT(Koeffizienten von $a \cdot f(x)) = 1$ (Koeffizienten sind Teilerfremd).

Beweis dazu: Auf Hauptnenner bringen und durch größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten teilen.

Beweis. Angenommen wir haben $f(x) \in R[x]$ welches als Polynom in $Q(R)[x]$ reduzibel ist. Das heißt es existieren Polynome $q(x), p(x) \in Q(R)[x]$ mit q, p nicht konstant, so dass $f(x) = q(x) \cdot p(x)$.

Ziel: Schreibe f als Produkt $f = q'(x) \cdot p'(x)$ wobei $q', p' \in R[x]$ echte Teiler sind.

Beobachtung: Wenn $\gamma \in R$ jeden Koeffizienten von f teilt und $\gamma \notin R^*, \gamma \neq 0$ dann ist γ ein echter Teiler von f und wir sind fertig. Wir nehmen also ab sofort an, dass die Koeffizienten von f teilerfremd sind.

Wende Vorbemerkung auf Polynome $p(x), q(x)$ an, erhalte $a, b \in Q(R)$ so dass $a \cdot p(x) \in R[x]$ und $b \cdot q(x) \in R[x]$ und Koeffizienten dieser Polynome jeweils Teilerfremd in R.

Durch Multiplikation erhalte Gleichung

$$a \cdot b \cdot f(x) = a \cdot p(x) \cdot b \cdot q(x) \in R[x] \tag{$*$}$$

Beachte die linke Seite ist in $R[x]$, weil beide Faktoren der rechten Seite in $R[x]$ sind.

Behauptung: Es ist $a \cdot b \in R$.

Beweis: Angenommen $a \cdot b \notin R$ das heißt es existiert Primelement $p \in R$, welches in der Darstellung von $a \cdot b$ mit negativem Exponenten auftritt. Da aber $a \cdot b \cdot f(x) \in R[x]$ muss die Darstellung jedes Koeffizienten das Element p mit positivem Exponenten enthalten. Also $p \mid$ Koeffizienten $\lightning$ zu ggT(Koeffizienten) $= 1$

Behauptung: Es gilt sogar $a \cdot b \in R^*$

Beweis: Angenommen $a \cdot b \notin R^*$. Dann hätte ich einen echten irreduziblen Teiler $\gamma \in R$ irreduzibel mit $\gamma \mid a \cdot b$.

$$\Rightarrow \gamma \mid a \cdot b \cdot f(x) \qquad \Rightarrow \gamma \mid [a \cdot p(x)][b \cdot q(x)]$$

Erinnerung: $\gamma \in R$ irreduzibel $\Rightarrow \gamma$ prim in $R[x]$.

Also gilt

$$\gamma \mid a \cdot p(x) \qquad \text{oder} \qquad \gamma \mid b \cdot q(x)$$

oBdA sei $\gamma \mid a \cdot p(x)$ $\lightning$ zur Wahl von a.

Damit kann ich $(*)$ umschreiben zu

$$f(x) = \underbrace{\left[(a \cdot b)^{-1} \cdot a \cdot p(x)\right]}_{\in R[x]} \cdot \underbrace{[b \cdot q(x)]}_{\in R[x]}$$

$\square$

Zusammenfassung: Wir sind jetzt inder Lage, für ganzzahlige Polynome zu entscheiden, ob sie in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel sind. (z.B. $x^3 - 2$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$, Folgerung $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ denn wir wissen jetzt, dass $x^3 - 2$ das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ ist)

Erinnerung: Das geht so:

Lagrangesche Interpolationsformel (= Polynom von Grad $\leq n$ ist durch seine Werte an $n + 1$ Stellen festgelegt) Sei k Körper, $f(x) \in k[x]$ Polynome von Grad $\leq n$, seien $a_1, \ldots, a_{n+1} \in k$ unterschiedliche Körperlementente. Dann ist f durch die Werte $f(a_i)$ eindeutig festgelegt, nämlich

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f(a_j) \prod_{k \neq j} \frac{x - a_k}{a_j - a_k} =: h(x) \in k[x]$$

Dann gilt für alle i

$$h(a_i) = \sum_{j=1}^{n+1} f(a_j) \prod_{k \neq j} \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = f(a_i) \prod_{k \neq i} \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = f(a_i)$$

$\Rightarrow h - f$ ist Polynom von Grad $\leq n$ mit Nullstellen $a_1, \dots, a_{n+1}$

$\Rightarrow h - f = 0$

Damit haben wir folgendes Verfahren, um irreduzibilität in $\mathbb{Z}[x]$ und also auch in $\mathbb{Q}[x]$ zu testen.

Gegeben $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ von Grad $\leq n$ so dass ggT(Koeffizienten) $= 1$.

Wähle $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{Z}$ so dass $f(a_i) \neq 0$ und betrachte $f(a_1), \dots, f(a_n) \in \mathbb{Z}$.

Wir wissen, wenn $g(x)$ ein Teiler von $f(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$ ist, dann gilt für alle i $q(a_i) \mid f(a_i)$

Für $g(a_i)$ gibt es also nur endlich viele Möglichkeiten.

Nur endlich viele Polynome kommen als Teiler in Frage. Wir müssen also durch Polynomdivision testen, ob die Kandidatenpolynome tatsächlich Teiler sind.

Satz 2.31 (Eisenstein-Kriterium)**.** Sei R ein faktorieller Ring, sei

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \in R[x]$$

mit $n > 0$ und $\mathrm{ggT}(a_0, \dots, a_n) = 1$. Falls es ein irreduzibles gibt $p \in R$ so dass $p \mid a_0, p \mid a_1, \dots, p \mid a_{n-1}$ und $p^2 \nmid a_0$. Dann ist f irreduzibel in $R[x]$ und also auch in $Q(R)[x]$.

Beweis. Sei f wie im Satz gegeben. Angenommen ich kann f schreiben als Produkt

$$f(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x)$$

wobei $\alpha, \beta \in R[x], \deg \alpha > 0, \deg \beta > 0$.

Schreibe

$$\alpha(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots$$
$$\beta(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \dots$$

Beobachte: $a_0 = \alpha_0 \cdot \beta_0$

Per Annahme gilt: $p \mid a_0 \underset{R \text{ faktoriell}}{\Rightarrow} p \mid \alpha_0$ oder $p \mid \beta_0$.

Per Annahme $p^2 \nmid a_0$ kann p nicht beide Elemente teilen. Wir nehmen also $p \mid \alpha_0$ und $p \nmid \beta_0$ an.

Weil $\operatorname{ggT}(a_0, \dots, a_n) = 1$ wissen wir p teilt nicht alle α_i. Sei also i minimal so dass $p \nmid \alpha_i$. Wir wissen schon mal $i < n$, insbesondere $p \mid a_i$.

Es ist aber

$$a_i = \underbrace{\alpha_0\beta_i}_{\text{Vielfaches von } p} + \underbrace{\alpha_i\beta_{i-1}}_{\text{Vielfaches von } p} + \underbrace{\alpha_2\beta_{i-2}}_{\text{Vielfaches von } p} + \cdots + \underbrace{\alpha_i\beta_0}_{\text{kein Vielfaches von } p}$$

$\lightning$ zu Teilbarkeitsregeln. $\square$

Bemerkung. Polynome welche die Annahmen des Satzes erfüllen heißen Eisensteinpolynome.

Ein Beispiel dafür ist $R = \mathbb{Z}, f(x) = x^3 - 2$.

2.3 Hilfe bei der Anwendung des Eisenstein-Kriteriums

Sei R faktoriell und $\varphi : R[x] \to S$ ein Ringmorphismus in einen Integritätsring S. Angenommen φ hat die Eigenschaft dass $\forall f \in R[x] : \deg f > 0 \Rightarrow \varphi(f) \notin S^*$.

Wenn jetzt ein $f \in R[x]$ gegeben ist mit $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ mit $n > 0$ und $\operatorname{ggT}(a_0, \dots, a_n) = 1$ und $\varphi(f)$ irreduzibel ist, dann ist f irreduzibel.

Beweis. Angenommen $f(x)$ sei reduzibel in $R[x] \Rightarrow \exists \alpha(x), \beta(x) \in R[x]$ mit $f(x) = \alpha(x) \cdot \beta(x)$ und $\deg \alpha > 0, \deg \beta > 0$. Dann gilt

$$\varphi(f) = \varphi(\alpha \cdot \beta) = \underbrace{\varphi(\alpha)}_{\notin S^*} \cdot \underbrace{\varphi(\beta)}_{\notin S^*}$$

Also hat $\varphi(f)$ echte Teiler in S und ist damit nicht irreduzibel. $\square$

Wie finde ich φ?: Keine Ahnung wir müssen Rumprobieren

Beispielhafte Konstruktionen

1) Gegeben ein Ringmorphismus $\phi : R \to S$ (z.B. $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, a \mapsto a^p$)

   Betrachte dann Morphismus von Polynomringen

$$\varphi : R[x] \to S[x], \sum a_i x^i \mapsto \sum \phi(a_i) x^i$$

2) Situation wie in 1), zusätzlich sei $s \in S$ gegeben. Betrachte

$$\varphi^* : R[x] \to S, \sum a_i x^i \mapsto \sum \phi(a_i) s^i$$

3) Situation wie in 2). Betrachte Morphismus

$$\varphi^{\leftmoon} : R[x] \to s[x], \sum a_i x^i \mapsto \sum \varphi(a_i)(x - s)^i$$

Beispielhafte Nutzanwendung: Betrachte $p \in \mathbb{N}$ prim und

$$f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1 \in \mathbb{Z}[x]$$

Das ist kein Eisenstein Polynom.

Beobachte aber auch $(x-1)f(x) = x^p - 1$.

Das legt nahe folgenden Morphismus zu probieren

$$\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x], g(x) \mapsto g(x+1)$$

was ist $\varphi(f)$?

$$\varphi(x^p - 1) = \varphi((x-1)f) = \underbrace{\varphi(x-1)}_{=x} \cdot \varphi(f)$$

und außerdem

$$\varphi(x^p - 1) = (x+1)^p - 1 = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} x^i - 1$$

$$\Rightarrow \varphi(f) = \sum_{i=1}^{p} \binom{p}{i} \cdot x^{i-1}$$

das ist ein Eisenstein Polynom.

Also ist $f(x)$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$, also auch in $\mathbb{Q}[x]$.

Ernte einfahren: Wir können mit unseren Methoden einige Fragen beantworten.

Erinnerung: Gegeben $M \subset \mathbb{C}$, eine Menge die $0, 1$ enthält. Konst(M) = Menge der aus M konstruierbaren Punkte.

1) Kons(M) ist ein Unterkörper von $\mathbb{C}$

2) Wenn $z \in \text{Kons}(M) \subset \mathbb{C}$, dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ so dass $[k(z) : k] = 2^n$ wobei $k = \mathbb{Q}(M \cup \overline{M})$ und $M = \{\overline{m} \mid m \in M\}$.

Beispiel 2.32. $z = \sqrt[3]{2}$. Ist nicht aus $M = \{0, 1\}$ konstruierbar, denn in diesem Fall wäre $\overline{M} = M$ und $k = \mathbb{Q}(0, 1) = \mathbb{Q}$ aber $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2} : \mathbb{Q})] = 3$, denn wir wissen: $x^3 - 2$ ist das Minimalpolynom.

Dieselbe Argumentation liefert mehr!

Satz 2.33. Sei $\varphi \in (0, 2\pi)$ so dass $e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ transzendent ist. Dann ist der Winkel

TODO winkel durch $e^{i\varphi}$

nicht durch Zirkel und Lineal 3-teilbar.

Bemerkung. Die Abbildung
$$(0, 2\pi) \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto e^{i\varphi}$$
ist injektiv hat also überabzählbar viele Bildpunkte, es gibt aber nur abzählbar viele algebraische Zahlen. Also ist $e^{i\varphi}$ transzendent für fast alle φ.

Für dieses Problem betrachte bei gegebenem φ die Menge $M = \{0, 1, e^{i\varphi}\}$. Ist $e^{i\frac{\varphi}{3}} \in$ Kons(M)? Also betrachte ich
$$k = \mathbb{Q}(M \cup \overline{M}) = \mathbb{Q}(z) = \mathbb{Q}(e^{i\varphi})$$
Muss diskutieren: $[k(e^{i\frac{\varphi}{3}}) : k]$ das ist eine 2-er Potenz falls $e^{i\frac{\varphi}{3}}$ konstruierbar ist.

Wir sehen $e^{i\frac{\varphi}{3}}$ ist Nullstelle des Polynoms $f(x) = x^3 - e^{i\varphi} \in k[x]$. Falls f das Minimalpolynom ist, ist $[k(e^{i\frac{\varphi}{3}}) : k] = 3$, also $e^{i\frac{\varphi}{3}} \notin \text{Kons}(M)$.

Um zu sehen, dass $f \in k[x]$ tatsächlich irreduzibel ist, müssen wir k verstehen!

Behauptung: k ist isomorph zum Körper der rationalen Funktionen $\mathbb{Q}(y)$

Beweis. Ich betrachte einen Ringmorphismus
$$\mathbb{Q}[y] \to k = \mathbb{Q}(e^{i\varphi}), f(y) \mapsto f(e^{i\varphi})$$

Die Funktion ist injektiv weil $e^{i\varphi}$ transzendent ist.

Außerdem gilt

$$\mathbb{Q}[y] \to Q(\mathbb{Q}[y]) = \mathbb{Q}(y)$$

Die universelle Eigenschaft liefert einen Isomorphismus $\eta : \mathbb{Q}(y) \to k$.

η ist surjektiv weil $e^{i\varphi} = \eta(y)$ im Bild liegt und k der kleinste Körper ist, der $e^{i\varphi}$ enthält. □

Wir wollen entscheiden ob $f(x) = x^3 - e^{i\varphi} \in k[x]$ irreduzibel ist. Wir können also auch untersuchen ob $x^3 - y$ in $(\mathbb{Q}(y))[x]$ irreduzibel ist.

$\Leftrightarrow$ Ist $x^3 - y \in (\mathbb{Q}[y])[x]$ irreduzibel?

$-y$ ist prim = irreduzibel in $\mathbb{Q}[y]$ und damit ist $x^3 - y$ ein Eisenstein-Polynom.

Beispiel 2.34. Falls p prim ist und das regelmäßige p-Eck konstruierbar ist, ist $p-1$ von der Form 2^n.

Beweis. Betrachte $M = \overline{M} = \{0, 1\}$ und $k = \mathbb{Q}(M \cup \overline{M}) = \mathbb{Q}$.

Das regelmäßige p-Eck ist konstruierbar $\Leftrightarrow e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathrm{Kons}(M)$.

Falls das so ist, ist

$$\left[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) : \mathbb{Q}\right] = 2^n$$

für ein $n \in \mathbb{N}$.

Wir wissen $e^{\frac{2\pi i}{p}}$ ist Nullstelle von $x^p - 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

Aber $x^p - 1 = (x-1)(x^{p-1} + \cdots + 1)$. Das Minimalpolynom ist also $x^{p-1} + \cdots + 1$. Und damit $\left[\mathbb{Q}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) : \mathbb{Q}\right] = p - 1$. □

2.4 Ringe und Ideale

Definition 2.35. Sei R ein Ring (kommutativ, mit 1). Sei $I \subset R$ eine nicht-leere Teilmenge. Nenne I ein Ideal, falls gilt:

1) $\forall a, b, \in I : a + b \in I$

2) $\forall a \in I, \forall r \in R : ra \in I$

Bemerkung. Für nicht-kommutative Ringe definiert man Linksideale (wie oben) und Rechtsideale (mit ar statt ra in 2)).

Bemerkung.
- Die 0 ist in jedem Ideal enthalten
- $\{0\}, R$ sind immer Ideale
- Fall R ein Körper ist, sind $\{0\}$ und R die einzigen Ideale, denn

  Sei k ein Körper, $I \subset k$ ein Ideal. Angenommen $\exists a \in I \setminus \{0\}$. Sei $b \in k$ gegeben dann ist $b = (b \cdot a^{-1}).a \in I$.
- Falls $I \subset R$ ein Ideal und $1 \in I \Rightarrow I = R$

Beispiel 2.36.
- $R = \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Z}$ ein Element $I = \{\text{alle Vielfachen von } a\}$
- Besonders einfache Ideale: sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal. Nenne I ein Hauptideal falls $\exists a \in I : I = (a)$. Nenne R Hauptidealring falls alle Ideale Hauptideale sind. z.B. $\mathbb{Z}$ ist ein Hauptidealring.

  Sei $I \subset \mathbb{Z}$ ein Ideal, $I \neq (0)$. Wir wissen: I enthält positive Elemente. Sei $a \in I$ das kleinste positive Element. Will zeigen $I = (a)$. Inklusion $\supset$ ist klar. Sei also $b \in I \setminus \{0\}$ irgendein Element. oBdA sei $b > 0$. Division mit Rest:

  $$\underbrace{b}_{\in I} = \underbrace{* \cdot a}_{\in I} + c, \text{ wobei } 0 \leq c < a.$$

  Damit ist $c \in I$ aber auch $c < a \Rightarrow c = 0$ und damit $b \in (a)$.

  Das gleiche gilt falls k ein Körper und $R = k[x]$ ist.

  $R = k[x, y]$ ist kein Hauptidealring, denn $I = (x, y)$ ist kein Hauptideal, denn

  1) $I \neq R$ Genauer $1 \notin I$, denn alle Elemente von I außer 0 haben positiven Grad.

  2) Wenn I ein Hauptideal wäre, $I = (a)$, dann $a \mid x$ und $a \mid y$, Aber $\mathrm{ggT}(x, y) = 1$. Also wäre a Einheit, $I = R$ $\lightning$.

  Einige Rechenregeln

  – $(a) \subset (b) \quad \Leftrightarrow \quad b \mid a$

  – $(a) = (b) \quad \Leftrightarrow \quad a \sim b$

- R beliebiger Ring, $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine Familie von Elementen

$$I = \{r_1 \cdot a_{\lambda_1} + \dots + r_n \cdot a_{\lambda_n} \mid n \in N, r_1, \dots, r_n \in R, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \Lambda\}$$

Wir sagen das Ideal ist von $(a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ erzeugt und schreibe

$$I = ((a_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}) = (a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$$

Falls die Familie endlich ist, schreibt man auch

$$I = (a_1, \dots, a_n)$$

Definition 2.37. Sei R ein Ring und $I \subset R$ ein Ideal. Nenne I endlich erzeugt, falls es endlich viele $a_1, \dots, a_n \in I$ gibt, so dass

$$I = (a_1, \dots, a_n)$$

Bemerkung. Die Ähnlichkeit zwischen Erzeugendensystemen von Idealen und Untervektorräumen geht nicht sehr weit!

Beispiel 2.38. Sei k ein Körper (z.b. $\mathbb{R}$) und $X \subset k^n$ eine Teilmenge (z.B. X = Einheitskreis in $\mathbb{R}^2$)

Betrachte $R = k[x_1, \dots, x_n]$ und

$$I = \left\{ f \in k[x_1, \dots, x_n] \mid f(x_1, \dots, x_n) = 0 \ \forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X \right\}$$

Diese Konstruktion ist besonders interessant, falls X die Lösungsmenge eines polynomiellen Gleichungssystems ist.

Definition 2.39. Sei R ein Ring. Sage in R gilt der Teilerkettensatz für Ideale, falls jede aufsteigende Kette von Idealen

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

nach endlich vielen Schritten konstant wird.

Satz 2.40. Sei R ein Ring, dann ist äquivalent

1) Jedes Ideal ist endlich erzeugt

2) In R gilt der Teilerkettensatz für Ideale

3) In jeder nicht-leeren Menge von Idealen gibt es ein Element, das bezüglich Inklusion maximal ist

Falls diese Eigenschaften gelten, nenne R Noethersch

Beweis. $\underline{1) \Rightarrow 2)}$ Sei $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots$ eine Folge von Idealen. Beachte:

$$I = \bigcup_{i=0}^{\infty} I_i$$

ist ein Ideal, also per Annahme endlich erzeugt: $I = (a_1, \dots, a_n)$ für geeignete $a_1, \dots, a_n \in \bigcup I_i$. Dann gibt es also $i_1, \dots, i_n$ so dass $a_i \in I_{i_1}, a_2 \in I_{i_2}$ wenn $m = \max\{i_1, \dots, i_n\}$ dann $a_1 \in I_m, a_2 \in I_m, \dots$ damit gilt:

$$(a_1, \dots, a_n) \subset I_m \subset I = (a_1, \dots, a_m)$$

also $I_m = I_{m+1} = I_{m+2} = \dots$

$\underline{2) \Rightarrow 3)}$ Sei M eine nicht-leere Menge von Idealen ohne maximales Element. Sei $I_i \in M$ irgendein Element. Finde dann $I_2 \in M$ mit $I_1 \subsetneq I_2$. Da I_2 auch nicht maximal ist finde also $I_3 \in M$ mit $I_2 \subsetneq I_3$. Erhalte so eine Kette

$$I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq ...$$

$\Rightarrow$ Teilerkettensatz für Ideale gilt nicht!

$\underline{3) \Rightarrow 1)}$ Sei $I \subset R$ ein Ideal, $I \neq (0)$. Sei $M = \{J \subset I \mid J \text{ ein Ideal, } J \text{ endlich erzeugt}\}$

Wir wissen es gibt ein maximales $m \in M$. Behauptung $m = I$

Denn sonst wäre $m = (a_1, \dots, a_n) \subsetneq I$ und es gäbe $a_{n+1} \in I \setminus m$. Dann ist $m' = (a_1, \dots a_n, a_{n+1})$ endlich erzeugt, also in M und $m' \supsetneq m$ ↯ □

Satz 2.41 (Hilbert)**.** Sei R Noethersch. Dann ist auch $R[x]$ Noethersch.

Beweis. Angenommen $R[x]$ nicht Noethersch. Wir müssen zeigen R ist nicht Noethersch.

Wir wissen: Es gibt in $R[x]$ ein Ideal I, das nicht endlich erzeugt ist.

Wähle in I ein Element f von minimalem Grad. Dann ist $I \subsetneq (f_1)$, also $I \setminus (f_1) \neq \emptyset$, wähle $f_2 \in I \setminus (f_1)$ von minimalem Grad. $I \supsetneq (f_1, f_2)$ wähle $f_3 \in I \setminus (f_1, f_2)$ von minimalem Grad.

Erhalte Folge von Polynomen $f_1, f_2, f_3, \dots$ so dass $\deg f_1 \leq \deg f_2 \leq \deg f_3 \leq \dots$

Setze $n_i = \deg f_i$, $a_i =$ Leitkoeffizient von $f_i \in R$.

Will zeigen, dass folgende Kette von Idealen in R nicht stationär wird.

$$(a_1) \subseteq (a_1, a_2) \subseteq (a_1, a_2, a_3) \subseteq \dots$$

dann wird klar sein, dass R nicht Noethersch war.

Angenommen es gäbe k mit $(a_1, \dots, a_k) = (a_1, \dots, a_{k+1}) \Leftrightarrow a_{k+1} \in (a_1 \dots, a_k)$

Dann gibt es also eine Linearkombination

$$a_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} r_i a_i$$

für geeignete $r_i \in R$. Betrachte Polynom

$$s(x) = \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot x^{n_{k+1} - n_i} \cdot f_i(x)$$

Wesentliche Eigenschaft von s:

1) $\deg s = n_{k+1} = \deg f_{k+1}$

2) Leitkoeffizient $(s) = a_{k+1}$

3) $s \in (f_1, \dots, f_k)$

Betrachte $\underbrace{f_{k+1}(x)}_{\notin (f_1, \dots, f_k)} - \underbrace{s(x)}_{\in (f_1, \dots, f_k)} = t(x)$.

Damit ist $t(x) \notin (f_1, \dots, f_k)$ und $\deg t(x) < n_{k+1}$.

$\lightning$ zur Wahl von f_{k+1} als Element von $I \setminus (f_1, \dots, f_k)$ von minimalem Grad. $\square$

Satz 2.42. Sei R ein Integritätsring, der Hauptidealring ist. Dann ist R faktoriell.

Beweis. Sei p irreduzibel, seien $a, b \in R$. $p \nmid a, p \nmid b$. Dann müssen wir zeigen: $p \nmid a \cdot b$.

Wir wissen: (p, a) ist ein Hauptideal, also $\exists c \in R$ so dass $(p, a) = (c)$. Also p ist Vielfaches von c, also $c \mid p$. Aber p ist irreduzibel hat also keine echten Teiler. Also $c \in R^*$ oder $c \sim p$.

Aber $c \sim p \Leftrightarrow p \mid a$ was wir per Annahme ausschließen!

Also $c \in R^* \quad \Rightarrow (a, p) = (1)$. Es gibt also eine Linearkombination

$$1 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 p \tag{$*$}$$

Analog finde $\beta_1, \beta_2 \in R$

$$1 = \beta_1 b + \beta_2 p \tag{☾}$$

Es folgt

$$1 = \alpha_2\beta_2 p^2 + (\alpha_1\beta_2 a + \alpha_2\beta_1 b)p + \alpha_1 a\beta_1 b$$

$\Rightarrow p \nmid \alpha_1\beta_1 ab$ denn sonst würde p die Summe teilen, also auch $p \mid 1$.

$\Rightarrow p \nmid a \cdot b$ $\square$

Quotienten: Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal. Dann definiere $r, s \in R$ als äquivalent, falls $r - s \in I$.

Satz 2.43. Es gibt auf Quotientenmengen eindeutige Verknüpfungen $+, \cdot$ so dass die Quotientenabbildung

$$q : R \to R/I$$

Ringmorphismus ist.

Beispiel 2.44. $R = \mathbb{Z}, I = (p)$ das von einer Primzahl p erzeugte Hauptideal. Dann gilt

$$R/I = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p = \underline{F}_p$$

Beispiel 2.45. Sei k ein Körper, $R = k[x]$, $f \in R$ ein Polynom, sowie $I = (f)$. Dann betrachte $R/(f)$.

Beobachtung: Sei $n = \deg f$. Polynomdivison zeigt: die Polynome von $\deg < n$ bilden vollständiges Repräsentantensystem. Insbesondere $\dim_k R/(f) = n$.

Multiplikation und Addition ist sehr einfach zu beschreiben: Wenn a, b Polynome von $\deg < n$

$$[a] \cdot [b] = [c]$$

wobei c der Divisionsrest von $a \cdot b$ bei Division durch f ist.

Beispiel 2.46. Sei k ein Körper, $X \subset k^n$ eine Teilmenge (z.B. Lösungsmenge eines algebraischen Gleichungssystems).

Dann setze $R = k[x_1, \ldots, x_n]$

$$I = \{f \in R \mid f_{|X} \equiv 0\}$$

und $R/I = \{$Funktionen $X \to k$, die sich zu Polynomen $k^n \to k$ fortsetzen lassen$\}$ = Polynomiale Funktionen = algebraische Funktionen

Satz 2.47 (Universelle Eigenschaft)**.** Sei R ein Ring, sei $I \subset R$ ein Ideal. Sei $q : R \to R/I$ die Restklassenabbildung. Dann gilt folgende universelle Eigenschaft: für jeden surjektiven Ringmorphismus $\varphi : R \to S$ mit $\ker(\varphi) \supseteq I$ gibt es genau einen Ringmorphismus $\eta : R/I \to S$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "q"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & R/I \arrow[d, "\exists! \eta"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

Beweis.

<u>Eindeutigkeit:</u> Angenommen wir haben zwei Morphismen η_1, η_2. Sei $[a] \in R/I$ gegeben. Weil die Diagramme kommutieren, muss dann $\eta_1([a]) = \eta_1(q(a)) = \varphi(a) = \eta_2([a])$.

<u>Existenz:</u> Setze $\eta : R/I \to S, [a] \mapsto \varphi(a)$. Dabei ist die Wohldefiniertheit zu zeigen. Sei also $[a] = [a']$ d.h. $a - a' \in I \subset \ker(\varphi)$. Dann ist $\varphi(a) - \varphi(a') = \varphi(a - a') = 0$, also $\varphi(a) = \varphi(a')$ und die Wohldefiniertheit ist klar. Muss noch nachrechnen: η ist Ringmorphismus, bin aber zu faul. $\square$

Beispiel 2.48. Sei $\varphi : R \to S$ ein surjektiver Ringmorphismus. Dann ist $S \simeq R/\ker(\varphi)$.

Beweis. Nach universeller Eigenschaft gibt es genau eine Abbildung $\eta : R/\ker(\varphi) \to S$ so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & R/\ker(\varphi) \arrow[d, "\exists! \eta"] \\ R \arrow[r, "\varphi"'] & S \end{tikzcd}$$

Behauptung: η ist Isomorphismus. Muss zeigen: η bijektiv also injektiv und surjektiv. Surjektivität folgt sofort aus Kommutativität des Diagramms und der surjektivität von φ. Noch zu zeigen η injektiv bzw. $\ker(\eta) = 0_{R/\ker(\varphi)}$.

Sei also $[a] \in \ker(\eta)$. Wegen der Kommutativität des Diagramms:

$$0_S = \eta([a]) = \eta(q(a)) = \varphi(a) \Rightarrow a \in \ker(\varphi),$$

also $[a] = 0_{R/\ker(\varphi)}$. $\square$

Warum das Bohei um Quotienten?

Wir betrachten Körpererweiterung L/k und algebraische Elemente $a \in L$.

Wir wissen a hat Minimalpolynom $f \in k[x]$. Jedes andere Polynom $g \in k[x]$ mit $g(a) = 0$ ist Vielfaches von f. ($g(a) = 0 \Leftrightarrow g \in (f)$).

Betrachte Abbildung:

$$\begin{aligned} k[x] &\to k(a) \\ g &\mapsto g(a) \end{aligned}$$

Wir wissen:

- $\ker(\varphi) = (f)$
- Die Elemente von $k(a)$ kann ich schreiben als $\lambda_1 + \lambda_2 a + \cdots + \lambda_n a^{n-1}$ mit $\lambda_i \in k$ $\Rightarrow \varphi$ ist surjektiv!

Insgesamt:

$$k(a) \cong k[x]/(f)$$

Satz 2.49. Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringmorphismus. Dann gilt

1) Für jedes Ideal $I \subset S$ ist $\varphi^{-1}(I)$ ein Ideal, das $\ker(\varphi)$ enthält.

2) Wenn φ surjektiv ist, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \{\text{Ideale in } S\} &\overset{\alpha}{\to} \{\text{Ideale in } R, \text{ die } \ker(\varphi) \text{ enthalten}\} \\ I &\mapsto \varphi^{-1}(I) \end{aligned}$$

bijektiv.

3) Wenn φ surjektiv ist, $J \subset R$ ein Ideal, dann ist $\varphi(J) \subset S$ ein Ideal.

4) Wenn φ surjektiv ist, und $I \subset S$ ein Ideal ist, dann betrachte die Komposition ψ von

$$R \underset{\varphi}{\to} S \to S/I$$

und es ist $\ker(\psi) = \varphi^{-1}(I)$. Also ist $S/I \simeq R/\varphi^{-1}(I)$.

Beweis. 1) Hausaufgabe!

2) Weil φ per Annahme surjektiv ist, ist die Abbildung α injektiv. Also noch surjektivität zu zeigen. Sei also $J \subset R$ ein Ideal, das $\ker(\varphi)$ enthält. Wir wissen $S \simeq R/\ker(\varphi)$ also gibt es nach universeller Eigenschaft ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & R/\ker(\varphi) \arrow[d, "\exists! \eta"] \\ R \arrow[r, "q"'] & R/J \end{tikzcd}$$

und $J = q^{-1}((0)) = \varphi^{-1}(\eta^{-1}(0))$, setze $I = \eta^{-1}(0)$, fertig.

3) Sei $J \subset R$ ein Ideal. Muss zeigen

C 1: Wenn $a, b \in \varphi(J)$, dann ist $a + b \in \varphi(J)$. $\exists a', b' \in J$ mit $a = \varphi(a'), b = \varphi(b')$ und dann $a + b = \varphi(\underbrace{a' + b'}_{\in J})$

C2: Sei $a \in \varphi(J)$, sei $b \in S$ beliebig. Dann ist $s \cdot a \in \varphi(J)$. Weil φ surjektiv ist, $\exists s' \in R : s = \varphi(s')$. Außerdem $\exists a' \in J : a = \varphi(a')$ und $\varphi(\underbrace{s'a'}_{\in J}) = \varphi(s')\varphi(a') = sa$

4) Sei $r \in R$. Es gilt

$$\begin{aligned} r \in \ker(\psi) &\Leftrightarrow q(\varphi(r)) = 0_{S/I} \\ &\Leftrightarrow \varphi(r) \in I \\ &\Leftrightarrow r \in \varphi^{-1}(I) \end{aligned}$$

$\square$

Folgerung 2.50. Sei R noethersch (bzw. Hauptidealring). Sei $I \subset R$ ein Ideal. Dann ist R/I Noethersch (bzw. Hauptidealring).

Notation: Sei R Ring. Seien $I \subseteq J \subseteq R$ Ideale. Dann betrachte $q_I : R \to R/I$.

Das Ideal $q_I(J) \subseteq R/I$ wird mit J/I bezeichnet.

Satz 2.51 (Noetherscher Isomorphiesatz)**.** Situation wie oben. Dann

$$R/J \simeq (R/I)/(J/I)$$

Beweis. Wir haben Ringmorphismen

$$R \xrightarrow{q_I} R/I \xrightarrow{q_{J/I}} (R/I)/(J/I)$$

Wir wissen $\ker(\eta) = q_I^{-1}(J/I) = J$. Also folgt die Aussage. $\square$

<u>Haben 2 wichtige Typen von Idealen</u>

- Primideale: R ein Ring, $I \subseteq R$ ein Ideal. Nenne I prim, falls $\forall a, b \in R : a \cdot b \in I \Rightarrow a \in I \vee b \in I$

- Maximale Ideale: R ein Ring. Ein Ideal $I \subset R$ heißt maximal falls gilt

  1) $I \neq R$

  2) Wenn $J \supsetneq I$ ein echt größeres Ideal ist, dann ist $J = R$.

Beispiel 2.52.
- Sei R ein Ring, $p \in R$ ein prim-Element. Dann ist (p) ein Primideal.

- Sei k ein Körper, $R = k[x_1, \dots, x_n]$ und

  $$I = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \{ \underbrace{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}_{\text{Haben stets Nullstelle am Ursprung!}} \mid f_i \in k[x_1, \dots, x_n]\}$$

  Wir wissen $1 \notin I$, denn 1 hat keine Nullstelle.

  Beobachte: Ein Polynom liegt genau dann in I wenn der konstante Teil gleich Null ist (d.h. wenn $f(0) = 0_k$).

  Sei jetzt $J \supsetneq I$ echt größer! Sei $f \in J \setminus I$ Dann

  $$\underbrace{f}_{\in J} = \text{const}^{\neq 0} + (\underbrace{\text{Polynom ohne konstanten Teil}}_{\in I \subset J})$$

  $\Rightarrow \text{const}^{\neq 0} \in J \Rightarrow J = R$

  Variante: Seien $a_1, \dots, a_n \in k$. Dann ist $I' = (x_1 - a_1, x_2 - a_2, \dots, x_n - a_n)$ auch maximal.

  Zurück zu Beispiel ohne Variante

  $$R/I = k[x_1, \dots, x_n]/(x_1, \dots, x_n) \xrightarrow{\simeq} k$$
  $$[f] \longmapsto f(0)$$

Beispiel 2.53. Sei k ein Körper, $f \in k[x]$ irreduzibel. Dann ist (f) maximal.

Beweis. Sei $J \supsetneq (f)$ größer, sei $g \in J \setminus (f)$ ein Element (g kein Vielfaches von f).

Wissen (Euklidischer Algorithmus): $\mathrm{ggT}(f, g) \in J$. Aber f ist irreduzibel hat also keine echten Teiler d.h. $\mathrm{ggT}(f, g) = 1$ □

Satz 2.54. Sei R ein Ring, $I \subset R$ ein Ideal. Dann gilt

1) I ist prim $\Leftrightarrow$ R/I ist Integritätsring

2) I ist maximal $\Leftrightarrow$ R/I ist ein Körper

Insbesonders maximale Ideale sind prim (denn Körper sind Integritätsringe)

Beweis. <u>1) $\Rightarrow$</u>: Sei I prim. Seien $[a], [b] \in R/I$ Äquivalenzklassen von Elementen $a, b \in R$ so dass $[a] \neq 0_{R/I}$ und $[b] \neq 0_{R/I}$. Dann gilt $a \notin I$ und $b \notin I$.

Da I prim $a \cdot b \notin I \Rightarrow [a \cdot b] \neq 0_{R/I}$

<u>1) $\Leftarrow$</u>: Sei R/I ein Integritätsring. Seien $a, b \in R \setminus I$. Dann $[a] \neq 0_{R/I}$ und $[b] \neq 0_{R/I}$ und $[a \cdot b] \neq 0_{R/I}$.

$\Rightarrow ab \notin I$

<u>2) $\Rightarrow$</u>: Sei I maximal. Sei $a \in R$ mit $[a] \neq 0_{R/I}$ d.h. $a \notin I$.

Dann betrachte $J = (I, a)$. Wir wissen $J \supsetneq I$ also $(1) = J$. Also kann ich schreiben:

$$1 = f + g \cdot a \qquad \text{mit } f \in I, g \in R$$

$$\Rightarrow \underbrace{[1]}_{=1_{R/I}} = \underbrace{[f]}_{0_{R/I}} + [g] \cdot [a]$$

also ist $[g] = [a]^{-1}$ in R/I

<u>2) $\Leftarrow$</u>: Sei R/I ein Körper, sei $J \supsetneq I$ ein echtes Oberideal. Dann gibt es $a \in J \setminus I$.

Wir wissen $[a] \neq 0_{R/I}$, per Annahme $\exists b \in R$ mit $[a] \cdot [b] = [1]$. Das bedeutet $\exists f \in I$ so dass

$$\underbrace{a \cdot b}_{\in J} + \underbrace{f}_{\in I \subset J} = 1$$

das heißt $1 \in J$ d.h. $J = R$. □

Bemerkung. Teil 2) des Satzes gibt neuartige Methode, um Beispiele von Körpern zu konstruieren!

Weitere Beobachtungen/Konstruktionen mit Idealen

Sei R ein Ring, seien $I_1, \dots, I_n$ Ideale in R

- Dann ist $I_1 \cap I_2 \cap \cdots \cap I_n$ ein Ideal
- Dann ist $I_1 + \cdots + I_n = \{f_1 + \cdots + f_n \in R \mid \forall i f_i \in I_i\}$ ein Ideal

Beispiel 2.55. $R = \mathbb{Z}$ $I_1 = (a)$ $I_2 = (b)$

$I_1 \cap I_2 = (\mathrm{kgV}(a, b))$

$I_1 + I_2 = (\mathrm{ggT}(a, b))$

Definition 2.56. Zwei Ideale I_1, I_2 heißen Teilerfremd, wenn $I_1 + I_2 = (1)$.

Nutzanwendung: Manchmal hat man Aufgaben der Form: egeben Ring R gegeben Ideale $I_1, \dots, I_n$ und Elemente $r_1, \dots, r_n \in R$. Finde ein/alle $r \in R$

$$\begin{aligned} r &\equiv r_1 \mod I_1 \\ r &\equiv r_2 \mod I_2 \\ &\vdots \\ r &\equiv r_n \mod I_n \end{aligned}$$

Antwort ist Chinesischer Restsatz: Situation wie oben. Fall $\forall\ i \neq j$ die Ideale I_i und I_j stets teilerfremd sind, dann ist die Abbildung:

$$\begin{aligned} \varphi : R &\to R/I_1 \times R/I_2 \times \cdots \times R/I_n \\ r &\mapsto ([r]_{R/I_1}, [r]_{R/I_2}, \dots, [r]_{R/I_n}) \end{aligned}$$

surjektiv und $\ker(\varphi) = I_1 \cap \cdots \cap I_n$.

Beweis. Aussage über $\ker(\varphi)$ ist trivial. Müssen surjektiv zeigen!

Seien $k \neq l$ gegeben. Wir wissen $(1) = I_k + I_l$. Also existieren Elemente $a_{kl} \in I_k$ und $b_{kl} \in I_l$ so dass $1 = a_{kl} + b_{kl}$

Setze
$$s_l = \prod_{k \neq l} a_{kl} = \prod_{k \neq l} (1 - b_{kl}) \in R$$

Beobachtung: Seien $k \neq l$ gegeben. Dann $s_l \equiv 0 \mod I_k$ denn Faktor a_{kl} aus dem 1. Produkt ist $\equiv 0 \mod I_k$.

$s_l \equiv 1 \mod I_l$, denn es ist stets $b_k l \equiv 0 \mod I_l$, also jeder Faktor des Rechen Produktes $\equiv 1 \mod I_l$.

Seien $r_1, \dots, r_n \in R$ gegeben.

Setze: $r = \sum r_i \cdot s_i$ dann gilt $\forall i : r \equiv r_i \mod I_i$, also

$$\varphi(r) = [r_1] \times [r_2] \times \cdots \times [r_n]$$

$\square$

Einschub Mengenlehre

Definition 2.57. Sei M eine Menge. $\leq$ sei eine Relation. Ich nenne $\leq$ eine Halbordnung falls gilt:

1) $\forall a \in M : a \leq a$

2) Wenn $a, b, c \in M$ gegeben sind mit

$$a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

3) $\forall a, b \in M : a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$

Wir fordern nicht dass $\forall a, b \in M : a \leq b$ oder $b \leq a$ gilt. (Falls das gilt nenne $\leq$ vollständig)

Beispiel 2.58. Betrachte $S =$ Studierende, $M = \mathrm{Pot}(S)$.

Gegeben $m_1, m_2 \in M$, schreibe $m_1 \leq m_2$ falls $m_1 \subseteq m_2$ ist.

Definition 2.59. Sei $(M, \leq)$ eine Mengen mit Halbordnung. Eine Kette ist eine Teilmenge $N \subset M$, so dass die auf N induzierte Halbordnung vollständig ist. Ein Element $m \in M$ heißt obere Schranke der Kette N, falls $\forall a \in N : n \leq m$.

Beispiel 2.60. Sei $(M, \leq)$ gegeben. Sei $(n_i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Elementen so dass $n_1 \leq n_2 \leq \dots$ ist. Dann ist $N = \{n_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Kette.

Beispiel 2.61. Sei $M = \mathbb{R}$ und $\leq$ wie üblich definiert. Dann ist jede Teilmengen eine Kette, denn $\leq$ ist sowieso vollständig. Obere Schranken existieren genau dann wenn N nach oben beschränkt ist.

Satz 2.62 (Lemma von Zorn)**.** Sei $(M, \leq)$ eine halbgeordnete Megne, $M \neq \emptyset$. Falls jede Kette eine obere Schranke besitzt, dann gibt es in M ein maximales Element.

Bemerkung. Dies ist Äquivalent zum Auswahlaxiom. Sei $(M_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Mengen. Dann gibt es eine Abbildung

$$A \to \bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha$$

so dass $\forall \alpha \in A : \varphi(\alpha) \in M_\alpha$.

Satz 2.63. Sei R ein Ring. $I \subset R$ ein Ideal. Dann gibt es ein maximales Ideal $m \subset R$, das I enthält

Beweis. Sei

$$M = \{\text{Ideale } J \subset R \text{ mit } I \subseteq J \subsetneq R\}$$

wähle $\subseteq$ als Halbordnung.

Beachte: Wenn $N \subset M$ eine Kette ist, dann ist $s = \bigcup_{n \in N} n$ eine obere Schranke.

- Ketteneingenschaft garantiert, dass s ein Ideal ist
- $1 \notin s$, denn für alle $m \in M : 1 \notin m$. Also $s \subsetneq R$, also $s \in M$

Zorn: Es existiert in M ein maximales Element m.

Nachrechnen: Dies ist ein maximales Ideal in R, welches I enthält. $\square$