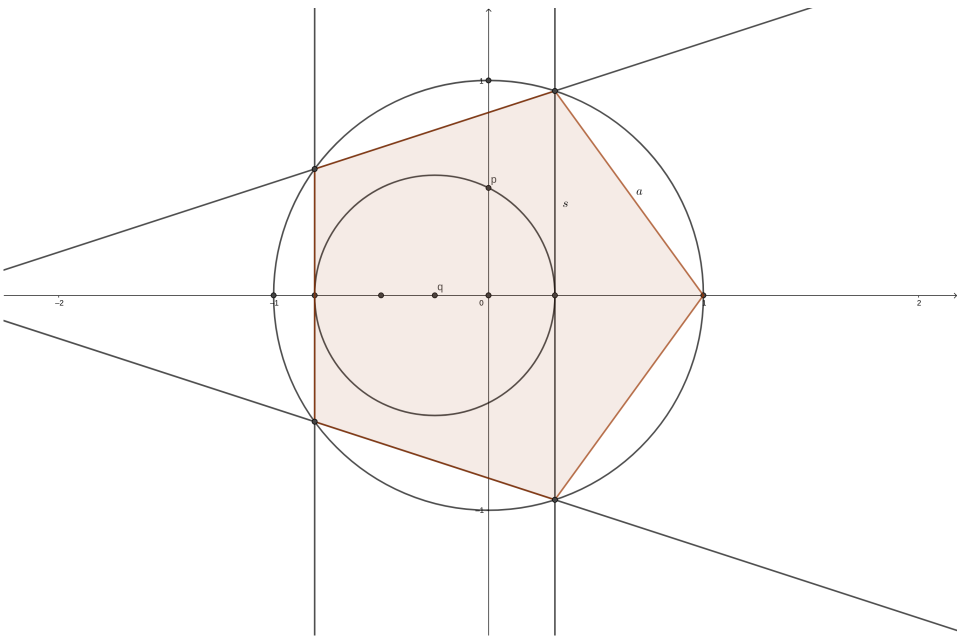
Skript Algebra

Lukas Metzger

7. November 2018

0 Konstruktion mit Zirkel und Lineal

Beispiel 0.1 (Konstruktion des regelmäßigen 5-Ecks)**.** Anleitung zur Konstruktion



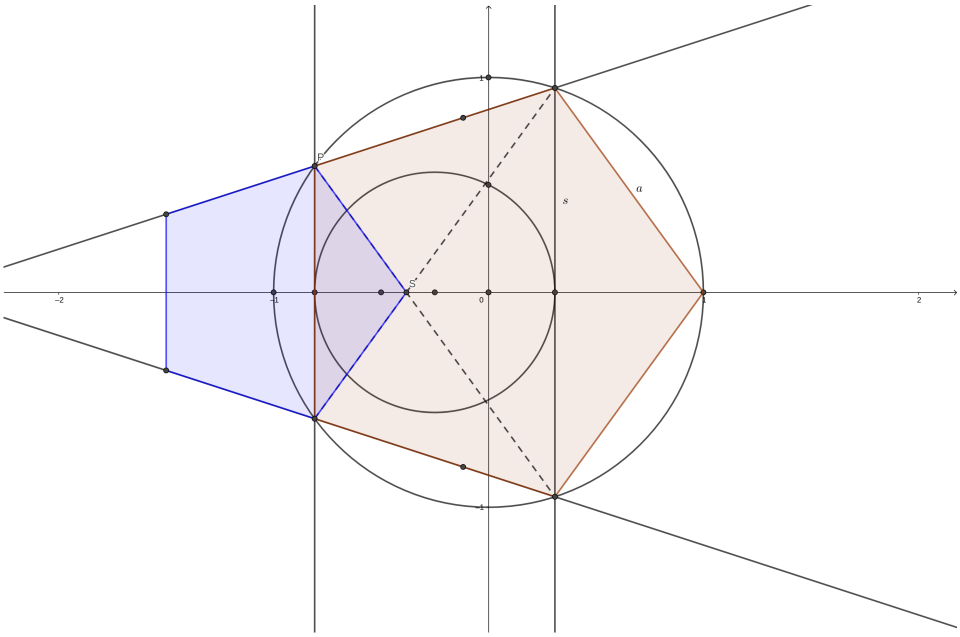
Erste Frage: Gegeben $n \in \mathbb{N}$, kann ich das regelmäßige n-Eck konstruieren?

Beispielproblem: Betrachte Das 5-Eck, sei a die Kantenkänge und s die Sekantenlänge.

Dann ist $\frac{s}{a} \notin \mathbb{Q}$.

Beweis. Angenommen $\frac{s}{a}$ wäre in $\mathbb{Q}$. Dann schreibe $\frac{s}{a} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$. Dann gibt es also eine Länge $d \in \mathbb{R}$, so dass s und a beides ganzzahlige Vielfache von d sind. $\exists n, m \in \mathbb{N}$ $a = n \cdot d, s = m \cdot d$.

Betrachte/Erweitere die Konstruktion des 5-Ecks und erhalte kleines (blaues) 5-Eck wie gezeichnet mit Sekantenlänge $s' = a$ und Kantenlänge $a' = s - a$.



Dann sind aber sowohl a' als auch s' wieder Vielfache von d. Das Verfahren kann ich wiederholen und erhalte immer kleinere 5-Ecke, deren Größe nach 0 konvergiert, wo Kanten- und Sekantenlänge ganzzahlige Vielfache von d sind. $\lightning$ $\square$

<u>Weitere Konstruktionsprobleme:</u>

- 3-Teilung des Winkels
- Verdoppelung des Würfels (d.h. Verdoppelung des Volumens)
- Quadratur des Kreises (Gegeben ein Kreis, konstruiere Quadrat mit demselben Flächeninhalt)

<u>Wiederholung:</u> Was kann ich mit Zirkel und Lineal eigentlich machen?

Antwort: 3 Konstruktionen

1) Gegeben Punkte a_1, a_2, b_1, b_2 der Ebene, betrachte die Geraden $\overline{a_1a_2}$ und b_1b_2 und erhalte Schnittpunkt $\overline{a_1a_2} \cap \overline{b_1b_2}$.

2) Gegeben Punkte a_1, a_2, b_1, b_2, b_3 der Ebene betrachte Kreis $K(b_1, \|b_2 - b_3\|)$ um b_1 mit Radius $\|b_2 - b_3\|$ und erhalte die Schnittpunkte $\overline{a_1a_2} \cap K(b_1, \|b_2 - b_3\|)$

3) Gegeben Punkte $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$, erhalte Schnittpunkte $K(a_1, \|a_2 - a_3\|) \cap K(b_1, \|b_2 - b_3\|)$

Definition 0.2. Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine Menge, $p \in \mathbb{R}^2$ ein Punkt.

Sage: p ist aus M mit Zirkel und Lineal konstruierbar, falls es Kette von Mengen gibt

$$M = M_1 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_n \ni p$$

Wobei $\forall i$ die Menge M_i entsteht aus M_{i-1} durch Hinzunahme der Punkte die durch einen Konstruktionsschritt entstehen.

Historie: Einen Durchbruch bei der Lösung dieser Probleme gab es erst, als man begann, die Punkte des $\mathbb{R}^2$ mit komplexen Zahlen zu identifizieren.

Bemerkung. Frage nach der Konstruierbarkeit macht nur Sinn, wenn M mindestens 2 Punkte enthält $\rightsquigarrow$ Häufig $M = \{0, 1\} \subset \mathbb{C}$.

In dieser Sprache

- Konstruktionsproblem: n-Eck ist äquivalent zu, kann ich die n-ten Einheitswurzeln $e^{\frac{i2\pi}{n}}$ aus $M = \{0, 1\}$ konstruieren? Ist $e^{\frac{2\pi i}{n}} \in \text{Kons}(\{0, 1\})$?
- Verdopplung des Würfels $\Leftrightarrow$ Ist $\sqrt[3]{2} \in \text{Kons}(\{0, 1\})$
- Quadratur des Kreises $\Leftrightarrow$ Ist $\sqrt{\pi} \in \text{Kons}(\{0, 1\})$
- 3-teilung des Winkels $\Leftrightarrow$ Ist für gegebenes $\varphi \in (0, 2\pi)$ $e^{\frac{i\varphi}{3}} \in \text{Kons}(\{0, 1, e^{i\varphi}\})$

Zentrale Beobachtung

Sei $M \subset \mathbb{C}$ eine Menge die 0 und 1 enthält. Sei Kons(M) die Menge der aus M konstruierbaren Punkte.

Dann ist Kons$(M) \subset \mathbb{C}$ ein Unterkörper.

Dazu zu prüfen: Konstruierbarkeit von Summen, Differenzen, Produkten, Quotienten ....

Zusammenfassung/zentrales Thema der Vorlesung

Körpererweiterung / wie können Körper ineinander enthalten sein?

1 Körpererweiterungen

1.1 Ultrakurzwiederholung zentraler Begriffe

Definition 1.1 (Gruppe)**.** Eine Gruppe ist eine Menge G zusammen mit einer Abbildung $m : G \times G \to G$ so dass folgendes gilt:

1) Assoziativ: $\forall a, b, c \in G\, m(m(a, b), c) = m(a, m(b, c))$

2) Neutrales Element: $\exists n \in G \forall a \in G : m(n, a) = m(a, n) = a$

3) Inverse Elemente: $\forall a \in G \exists b \in G : ab = ba$ und dieses Produkt ist neutrales Element wie in 2)

Lemma 1.2 (Elementare Eigenschaften von Gruppen)**.** Für jede Gruppe gilt:

- Das neutrale Element ist eindeutig

- Inverse Elemente sind eindeutig

Definition 1.3 (Abelsche Gruppe)**.** Nenne Gruppe (G, m) Abelsch, falls $\forall a, b \in G : m(a, b) = m(b, a)$.

<u>Notation:</u> Statt m schreibt man oft $+$ oder $\cdot$, wobei $+$ hauptsächlich für Abelsche Gruppen verwendet wird.

Beispiel 1.4. Beispiele für Gruppen:

- Abelsche Gruppen: $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, +)$, $(Vektorraum, +)$

- Nicht-Abelsche Gruppen: Sei M eine Menge mit > 2 Elementen. Die bijektiven Abbildungen $M \to M$ mit der Hintereinanderausführung ist eine nicht-Abelsche Gruppe.

  Sei K ein Schiefkörper, z.B. $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Sei $K^*K \setminus \{0\}$. Dann ist $(K^*, \cdot)$ eine Gruppe.

- Nicht-Beispiel: $G = \mathbb{R}^3$. Ich erhalte durch das Kreuzprodukt keine Gruppenkonstruktion.

Definition 1.5 (Ring)**.** Ein Ring ist eine Menge R mit 2 Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ so dass gilt:

- $(R, +)$ ist eine Abelsche Gruppe
- Distributivgesetz: $\forall a, b, c \in T (a + b) \cdot c = ac + bc$ und $a(b + c) = ab + ac$
- $(R \setminus 0, \cdot)$ ist fast Gruppe nämlich assoziativ und es existiert ein neutrales Element

Beispiel 1.6. Beispiele für Ringe:

- $\mathbb{R}, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, Polynome, $\mathbb{Z}$
- Funktionen auf $\mathbb{R}/\mathbb{C}$
- holomorphe/stetige/C^∞/reell analytische lokal quadratintegrierbare Funktionen bilden ebenfalls einen Ring

Bemerkung. Mit Ringen kann ich fast rechnen wie mit Zahlen, aber ACHTUNG

- Nicht jedes Element in $R \setminus 0$ hat ein multiplikatives Inverses
- Ich kann aus $a \cdot b = 0$ und $a \neq 0$ im Allgemeinen nicht folgern, dass $b = 0$
- Ich kann aus $ab = ac$ und $a \neq 0$ im allgemeinen nicht folgern, dass $b = c$ ist

Definition 1.7 (Nullteiler)**.** Sei R ein Ring, $a \in R \setminus \{0\}$. Falls $b \neq 0$ existiert mit $a \cdot b = 0$, nenne ich a einen Nullteiler.

Ringe ohne Nullteiler heißen Nullteilerfrei oder Integritätsringe.

Definition 1.8 (Abelscher Ring)**.** Ein Ring heißt abelsch, falls $\forall a, b \in R\ ab = ba$.

Bemerkung. In der Literatur heißen unsere Ringe oft Ringe mit 1.

Beispiel 1.9. Beispiele zu Nullteilern

- $\mathbb{R}, \mathbb{Z}$ sind nullteilerfrei
- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ist nullteilerfrei $\Leftrightarrow$ n ist Prim
- Polynome sind nullteilerfrei
- Stetige Funktionen sind nicht nullteilerfrei

Bemerkung. Sei R ein Ringe. Die Menge der Elemente, die ein multiplikatives Inverses haben, wir mit R^* bezeichnet.

- $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$
- $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* = \{[x] \mid x \text{ ist teilerfremd zu } n\}$
- $(C^\infty(\mathbb{R}))^* = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist } C^\infty \text{ und hat keine Nullstelle}\}$

Bemerkung. Sei R ein Ring, x eine Variable. Dann bezeichne mit $R[x]$ die Polynome mit Koeffizienten in R und Variable x.

- $1x + 2 \in \mathbb{Z}[x]$
- $\frac{\pi}{4} \cdot x^2 \notin \mathbb{Z}[x]$

Definition 1.10 (Schiefkörper)**.** Schiefkörper sind Ringe R wobei $R^* = R \setminus \{0\}$

Definition 1.11 (Körper)**.** Ein Körper ist ein Schiefkörper, der auch noch kommutativ ist.

Beispiel 1.12. Beispiele für Körper und Schiefkörper

- Quaternionen sind Schiefkörper
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sind Körper
- $\mathrm{Kons}(\{0,1\})$ ist Unterkörper von $\mathbb{C}$
- Die Menge der Rationale Funktionen über einem Körper bilden wieder einen Körper

1.2 Algebraische und transzendente Elemente

Sei L ein Körper und $k \subset L$ ein Unterkörper (z.B. $L = \mathbb{C}, k \subset \mathbb{R}$ oder $L = \mathbb{R}, k = \mathbb{Q}$).

Im Fall $k = \mathbb{Q}, L = \mathbb{R}$ wissen wir, dass es in $\mathbb{R}$ sehr unterschiedliche Elemente gibt.

- $\sqrt{7}$ ... algebraisch
- π, e ... transzendent

Definition 1.13. Situation wie oben. Sei $a \in L$ gegeben. Nenne a algebraisch über k falls es ein Polynom gibt $f \in k[x]$ und $f \neq 0$ so dass $f(a) = 0$.

Bemerkung. Nicht algebraische Elemente heißen transzendent.

Beispiel 1.14. Beispiele für algebraische und transzendente Zahlen

- $\sqrt{7}$ ist algebraisch über $\mathbb{Q}$, denn $f(\sqrt{7}) = 0$ mit $f(x) = x^2 - 7$
- π ist nicht algebraisch über $\mathbb{Q}$ (Lindemann, 1844)

Bemerkung. In $\mathbb{R}$ gibt es praktisch keine Zahlen, die algebraisch über $\mathbb{Q}$ sind.

Wir wissen $\mathbb{Q}$ ist abzählbar, also sind auch die Polynome mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ abzählbar. Jedes Polynom hat aber nur endlich viele Nullstellen. Das heißt die Menge der algebraischen Zahlen ist abzählbar, also eine Nullmenge im Sinne der Integrationstheorie.

Beispiel 1.15. Körpererweiterung $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ - Beobachte: i ist algebraisch über $\mathbb{R}$, denn $f(i) = 0$ wobei $f(x) = x^2 + 1$

$z = i + 1$ ist Algebraisch mit $f(x) = (x-1)^2 + 1$

$z = a + bi$ ist Algebraisch mit $f(x) = \left(\frac{(x-a)}{b}\right)^2 + 1$

$\Rightarrow$ Jede komplexe Zahl ist algebraisch über $\mathbb{R}$

Definition 1.16. Eine Körpererweiterung $k \subset L$ heißt algebraisch, falls jedes $a \in L$ algebraisch über k ist.

Ansonsten nenne Körpererweiterung transzendent.

Bemerkung. Sei $k \subset L$ eine Körpererweiterung, sei $a \in L$ algebraisch über k und sei $f \in k[x]$ ein Polynom $\neq 0$ mit $f(a) = 0$.

Solche Polynome gibt es viele, wir interessieren uns für f's mit mimimalem Grad. Wenn so ein f gegeben ist:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

dann dividiere durch a_n und erhalte Polynom

$$\hat{f} = x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} \in k[x]$$

mit a als Nullstelle.

Falls $\hat{f}$ und $\overline{f}$ in $k[x]$ zwei normierte Polynome von minimalem Grad sind mit $\hat{f}(a) = \overline{f}(a) = 0$, dann betrachte Polynom $(\hat{f} - \overline{f}) \in k[x]$. Dann gilt

$$(\hat{f} - \overline{f})(a) = \hat{f}(a) - \overline{f}(a) = 0 - 0 = 0$$

und der Grad von $(\hat{f} - \overline{f})$ ist kleiner als der Grad von $\hat{f}$. Weil aber der Grad von $\hat{f}$ minimal war, folgt: $\hat{f} = \overline{f}$.

Satz 1.17. Sei $k \subset L$ eine Körpererweiterung, sei $a \in L$ algebraisch über k. Dann gibt es genau ein Polynom $f \in k[x] \setminus \{0\}$ so dass gilt:

1) $f(a) = 0$

2) $\deg f$ ist minimal unter den Graden der Polynome die a als Nullstelle haben:

$$\deg(f) = \min\{\deg g \mid g \in k[x] \setminus \{0\}, g(a) = 0\}$$

3) f ist normiert (d.h. Leitkoeffizient $= 1$)

Nenne dieses f das Minimalpolynom von a über k.

Die Zahl $\deg f$ wird als Grad von a über k bezeichnet, in Symbolen $[a : k]$

Bemerkung. Sei $k \subset L$ Erweiterung, $a \in L$ algebraisch über k. Falls $[a : k] = 1$, dann $a \in k$.

Mehr Beispiele für Körpererweiterungen

Sei $k \subset L$ eine Körpererweiterung, sei $(L_i)_{i \in I}$ eine Menge von Zwischenkörpern, d.h. $k \subseteq L_i \subseteq L$.

Dann ist auch $K := \bigcap_{i \in I} L_i$ ein Körper.

Nutzanwendung: Sei $A \subset L$ irgendeine Teilmenge. Sei $(L_i)_{i \in I}$ die Menge der Zwischenkörper $k \subseteq L_i \subseteq L$ so dass $\forall i : A \subset L_i$. Dann betrachte K und es gilt:

- $k \subseteq K \subset L$, also K ist Zwischenkörper
- $A \subseteq K$
- K ist der kleinste Zwischenkörper der A enthält

Bemerkung. Bezeichne K mit $k(A)$ und sage $k(A)$ entsteht aus k durch Adjunktion der Elemente von A.

Spezialfall: $A = \{a\}$ dann schreibe ich $k(a)$. Das ist dann der kleinste Unterkörper von L, der sowohl k als auch a enthält.

Definition 1.18 (Einfache Körpererweiterung)**.** Eine Körpererweiterung $k \subset L$ heißt einfach, falls a existiert, so dass $L = k(a)$.

Definition 1.19 (Grad der Körpererweiterung)**.**

$$[L : k] = \dim_k L \qquad \text{Grad der Körpererweiterung}$$

Beispiele

$$[\mathbb{C} : \mathbb{R}] = 2 \qquad [\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = \infty$$

Satz 1.20. Sei L/k eine Körpererweiterung, $a \in L$ dann gilt

$$[a : k] = [k(a) : k]$$

Beweis. Falls a tanszendent, dann sind $1, a, a^2, \ldots$ k-linear unabhängig, also ist $\dim_k k(a) = \infty$.

Betrachte also den Fall, wo a algebraisch ist mit Minimalpolynom $f(x) = x^n + b_{n-1} + \cdots + b_0 \in k[x]$.

Klar ist: Die Elemente $1, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \in k(a)$ sind linear unabhängig, denn jede lineare Relation gäbe ein Polynom $g(x)$ vom Grad $< n$ mit $g(a) = 0$ ↯.

Also: $\dim_k k(a) \geq n$

Um Gleichheit zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass $\langle 1, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \rangle_k =: \tilde{k}$ bereits $k(a)$. Klar ist $\tilde{k} \in k(a)$. Wegen der Minimalität von $k(a)$ genügt es für die Umkehrrichtung zu zeigen, dass $\tilde{k}$ ein Körper ist.

Klar ist $0, 1 \in \tilde{k}$.

Zu zeigen ist Abgeschlossenheit unter Addition/Subtraktion (hier klar wegen Vektorraum) und unter Multiplikation/Division (noch nicht klar).

Zwischenbehauptung: Sei $s = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i a^i \in \tilde{k}$ ein beliebiges Element. Dann ist $a \cdot s \in \tilde{k}$.

Wir wissen:

$$a \cdot s = \underbrace{\sum_{i=0}^{n-2} \lambda_i a^{i+1}}_{\in \tilde{k}} + \lambda_{n-1} a^n$$

Ein Blick auf das Minimalpolynom zeigt:

$$a^n = -\sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot a^i \in \tilde{k}$$

Konsequenz: Wenn $s, t \in \tilde{k}$ beliebig sind, dann $s \cdot t \in \tilde{k}$, also gilt die Abgeschlossenheit unter Multiplikation.

Letzte Aufgabe: Existenz von multiplikativen Inversen. Sei also $s \in \tilde{k}, s \neq 0$ gegeben. Wegen abgeschlossenheit unter Multiplikation ist $s, s^2, s^3, \ldots$ wieder in $\tilde{k}$. Also ist $1, s, \ldots, s^n$ linear abhängig $\Rightarrow$ s ist algebraisch über k.

Sei $p(x) = x^m + p_{m-1} \cdot x^{m-1} + \cdots + p_0$ das Minimalpolynom.

Beobachtung: $p_0 \neq 0$, denn sonst könnte ich x ausklammern, p wäre nicht minimal. Damnach kann ich schreiben:

$$
\begin{aligned}
0 = p(s) &= s^m + p_{m-1}s^{m-1} + \cdots + p_0 \\
\Leftrightarrow -p_0 &= s(s^{m-1} + p_{m-1}s^{m-1} + \cdots + p_1) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{s} &= \underbrace{\frac{1}{-p_0}}_{\in k} \underbrace{(s^{m-1+p_{m-1}s^{m-2}+\cdots+p_1})}_{\in \tilde{k} \text{ wegen Abg. unter Mult.}} \in \tilde{k}
\end{aligned}
$$

$\square$

Folgerung 1.21.

1) Wenn $[a : k] = n$, dann ist $k(a) = \{\lambda_0 + \lambda_1 a + \cdots + \lambda_{n-1}a^{n-1} \mid \lambda_i \in k\}$

2) Wenn $[a : k] < \infty$, dann ist $k(a)/k$ algebraisch

Beispiel 1.22. Sei $L = \mathbb{C}, k \subset C$ ein Unterkörper, sei $b \in k$ und $a = \sqrt{b}$. Dann gilt:

$$
[k(a) : k] = \begin{cases} 2 & \text{falls } a \notin k \\ 1 & \text{falls } a \in k \end{cases}
$$

Proposition 1.23 (Umkehrung der Beobachtung)**.** Sei L/k eine Körpererweiterung von Grad 2. Dann entsteht L durch Adjunktion einer Quadratwurzel.

Lemma 1.24. Sei L/k eine algebraische Körpererweiterung, so dass der Erweiterungsgrad $[L : k]$ eine Primzahl ist. Dann ist die Erweiterung einfach, das heißt $\exists a \in L : L = k(a)$.

Beweis. Übung $\square$

Beweis. (von Proposition 1.23) Wähle $a \in L$ wie im Lemma. Dann ist klar $[a : k] = 2$. Also existieren $\lambda_1, \lambda_0 \in k$, so dass $a^2 + \lambda_1 a + \lambda_0 = 0$ ist. Also:

$$
a \in \underbrace{\frac{-\lambda_1}{2}}_{\in k} \pm \underbrace{\sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{2}\right)^2 - \lambda_0}}_{=b}
$$

Weil a und b sich nur um Elemente von k unterscheiden, ist $k(a) = k(b)$. Das Element b ist aber Quadratwurzel! $\square$

Bemerkung. Falls char$(k) = 2$ ist, muss man die Lösungsformel richtig hinschreiben.

Satz 1.25. Sei $k \subseteq L \subseteq M$ eine Kette von Körpern. Dann ist

$$[M : k] = [M : L] \cdot [L : k]$$

Beweis. (nur im Fall, wo $[M : L] < \infty$ und $[L : k] < \infty$)

Wähle Basis $m_1, \ldots, m_a$ für M als L-Vektorraum und $l_1, \ldots, l_b$ für L als k-Vektorraum.

Behauptung: Dann bilden die Elemente $(m_i \cdot l_j)_{i,j}$ eine Basis von M als k-Vektorraum.

Erzeugendensystem: Sei $m \in M$ gegeben. Dann ist m schreibbar als

$$m = \sum_{i=1}^{a} \lambda_i \cdot m_i$$

mit $\lambda_i \in L$.

Dann kann ich jedes λ_i schreiben als

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{b} \mu_j^i \cdot l_j$$

mit $\mu_j \in k$.

Einsetzten zeigt m kann geschrieben werden als k-Linearkombination der Produkte $m_i \cdot l_j$.

Lineare Unabhängigkeit: Sei eine lineare Relation

$$0 = \sum_{i,j} \mu_j ij \cdot (m_i \cdot l_j)$$

gegeben, wobei $\mu_j ij \in k$. Dann gilt

$$0 = \sum_i \underbrace{\left(\sum_j \mu_{ij} \cdot l_j \right)}_{\in L} \cdot m_i$$

Weil die m_i per Wahl aber L-linear unabhängig sind folgt für alle i $\sum_j \underbrace{\mu_{ij}}_{\in k} \cdot l_j = 0$.

Weil die l_j per Wahl aber k-linear unabhängig sind, ist $\forall i \forall j \mu_{ij} = 0$. $\square$

Folgerung 1.26. Wenn eine Kette von Körpererweiterungen gegeben ist, $k \subseteq L \subseteq M$ und wenn $[M : k] < \infty$ dann ist $[L : k] < \infty$ und sogar ein Teiler von $[M : k]$.

Satz 1.27. Sei L/k eine Körpererweiterung, dann ist äquivalent:

1) $[L : k] < \infty$

2) L ist algebraisch über k, und es gibt endlich viele $a_1, \dots, a_n \in L : L = k(a_1, \dots, a_n)$

3) Es gibt endlich viele $a_1 \dots, a_n \in L$, die algebraisch über k sind und $L = k(a_1, \dots, a_n)$

Beweis. <u>$1 \Rightarrow 2$:</u> Sei $s \in L$ beliebig. Dann sind $1, s, s^2, \dots, s^{[L:k]}$ linear abhängig, also ist s algebraisch über k. Das heißt L/k ist algebraisch. Um $a_1, \dots, a_n$ zu finden, wähle Vektorraumbasis von L über k.

<u>$2 \Rightarrow 3$:</u> trivial

<u>$3 \Rightarrow 1$:</u> Betrachte

$$\underbrace{k}_{=:k_0} \subseteq \underbrace{k(a_1)}_{=:k_1} \subseteq \underbrace{k(a_1, a_2)}_{=:k_2} \subseteq \cdots \subseteq \underbrace{k(a_1, \dots, a_n)}_{=:k_n}$$

Dann klar: $\forall i : a_i$ ist algebraisch über k_{i-1} (sogar algebraisch über k_0) also $[k_i : k_{i-1}] < \infty$, dann $k_i = k_{i-1}(a_i)$ und $[L : k] = \prod_i [k_i : k_{i-1}] < \infty$. □

Lemma 1.28 (Nutzanwendung (Transitivität der Algebraizität))**.** Sei $k \subseteq L \subseteq M$ eine Kette von Körpererweiterungen. Falls L/k algebraisch ist und M/L algebraisch ist, dann ist M/k algebraisch.

Beweis. Sei $m \in M$ gegeben. Ziel: m ist algebraisch über k.

m ist algebraisch über L, das heißt es hat ein Minimalpolynom

$$f(x) = \sum_{i=0}^{a} l_i \cdot x^i \in L[x]$$

Wir wissen auch: Jedes der l_i ist algebraisch über k.

Betrachte jetzt den Zwischenkörper $L' = k(l_0, \dots, l_a)$. Dann ist L'/k endlich und m ist algebraisch über L', also ist $m \in L'(m)$ und $L'(m)/L'$ ist endlich. Damit ist $L'(m)/k$ endlich, also algebraisch. □

Proposition 1.29. Sei $k \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Sei

$$\overline{k} := \{a \in L \mid a \text{ ist algebraisch über } k\}$$

Dann ist $\overline{k}$ ein Körper.

Man nennt $\overline{k}$ den algebraischen Abschluss von k in L.

Beweis. Klar ist, dass $0,1 \in \overline{k}$ sind. Wir müssen klären, ob mit $a,b \in \overline{k}$ auch $a{+}b, a{-}b, a{\cdot}b$ und gegebenenfalls für $\frac{1}{a} \in \overline{k}$ sind. Das ist aber klar, denn all diese Elemente liegen in $k(a,b)$. Nach Satz ist $k(a,b)$ algebraisch über k. □

Bemerkung. Achtung: Es gibt einen anderen Begriff von (absolutem) algebraischen Abschluss, der nicht von einem Oberkörper $L \supseteq k$ abhängt.

1.3 Lösungsformel für Polynome

Wissen aus der Schule: Quadratische Gleichungen in einer Variable haben Lösungsformel.

Wissen seit der Renaissance: Haaben Formeln für Gleichungen von Grad 3 und 4.

Beispiel: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ Setze:

$$h = -\frac{1}{2}c + \frac{1}{6}ab - \frac{1}{24}a^3$$

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{-3(a^2b^2 - 4a^3c - 4b^3 + 18abc - 27c^2)} \\ w_2 &= \sqrt[3]{h + \frac{1}{18}w_1} \\ w_2 &= \sqrt[3]{h - \frac{1}{18}w_1} \end{aligned}$$

Dann ist

$$x = -\frac{1}{3}a + w_2 - w_3$$

eine Lösung, wenn die Wurzeln w_2, w_3 so gewählt sind dass $w_2w_3 = \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{3}b$.

Frage: Gibt es eine Lösungsformel für Gleichungen vom Grad 5?

Bescheidener: Kann ich die Lösung überhaupt hinschreiben? (als komplizierten Ausdruck in Wurzeln/Polynomen)

Definition 1.30. Sei L/k eine Körpererweiterung, nenne diese Erweiterung Radikalerweiterung, falls es $a_1, \dots, a_n$ und $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

1) $L = k(a_1, \dots, a_m)$

2) $\forall i a_i^{m_i} \in k(a_1, \dots, a_{i-1})$ also a_i ist die m_i-te Wurzel eines Elementes aus $k(a_1, \dots a_{i-1})$.

Was bedeutet das?

1) $a_1^{m_1} \in k$ Also $k(a_1) = \langle 1, a_1, a_1^2, \dots, a_1^{m_1-1} \rangle_k$

2) $a_2^{m_2} \in k$ Also $k(a_1, a_2) = \langle 1, a_2, a_2^2, \dots, a_2^{m_2-1} \rangle_{k(a_1)}$

3) $\dots$

Bescheidene Frage, präzise formuliert: Gegeben ein Polynom

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in \mathbb{Q}[x] \text{ oder } \mathbb{R}[x]$$

gibt es dann eine Radikalerweiterung $L/\mathbb{Q}(a_0, \dots, a_n)$ (beziehungsweise $L/\mathbb{R}$) so dass f in L eine Nullstelle hat? Gerne $L \subseteq \mathbb{C}$.

2 Ringe

Warum Ringe betrachten? Gegeben eine Körpererweiterung L/k und $a \in L$ und ich suche das Minimalpolynom $f_a(x) \in k[x]$.

Häufig findet man $g \in k[x]$ mit $g(a) = 0$ und muss dann entscheiden ob g das Minimalpolynom ist. Das ist gar nicht leicht!

Beobachtung: Polynomdivision zeigt:

$$g(x) = s(x) \cdot f_a(x) + \mathrm{rest}(x)$$

wobei $\deg \mathrm{rest}(x) < \deg f_a(x)$. a einsetzen ergibt

$$\underbrace{g(a)}_{=0} = s(a) \cdot \underbrace{f_a(a)}_{=0} + \mathrm{rest}(a) \Rightarrow \mathrm{rest}(a) = 0$$

$\Rightarrow \mathrm{rest}(x) \equiv 0$

$\Rightarrow g(x) = s(x) \cdot f_a(x)$.

Wir sehen: Das Minimalpolynom ist ein Teiler von g im Ring der Polynome.

Ziel: Wir müssen Teilbarkeit verstehen!

2.1 Teilbarkeit

Definition 2.1. Sei R ein Ring. Dann bezeichne mit $R[x]$ den Ring der Polynome mit Variable x und Koeffizienten aus R.

Warnung: Polynome geben Funktionen $R \to R$ aber Polynome sind nicht Funktionen.

Definition 2.2. Sei $f \in R[x]$ ein Polynom. Dann definiere den Grad von f wie üblich.

Lemma 2.3. Sei R ein Integritätsring, $f, g \in R[x]$. Dann ist

$$\deg(f \cdot g) = \deg(f) + \deg(g)$$

Beweis. Sei $n_f = \deg(f)$ und $n_g = \deg(g)$ schreibe

$$\begin{aligned} f(x) &= a_f \cdot x^{n_f} + (\text{kleinere Terme}), a_f \neq 0 \\ g(x) &= a_g \cdot x^{n_g} + (\text{kleinere Terme}) \end{aligned}$$

Dann ist

$$(f \cdot g)(x) = a_f \cdot a_g \cdot x^{n_f + n_g} + (\text{kleinere Terme})$$

und weil R ein Integritätsring ist, ist $a_f \cdot a_g \neq 0$, also $\deg(f \cdot g) = n_f + n_g$. $\square$

Folgerung 2.4. Sei R ein Integritätsring. Dann ist $R[x]$ selbst wieder ein Integritätsring.

Beweis. Seien $f, g \in R[x] \setminus \{0\}$.

Wir müssen zeigen: $f \cdot g \not\equiv 0 \in R[x]$ $(*)$.

Falls $\deg f = \deg g = 0$, folgt $(*)$ weil R ein Integritätsring ist.

Ansonsten folgt $(*)$, weil $\deg f \cdot g = \deg f + \deg g > 0$. $\square$

Ausblick: Dann ist $(R[x])[y]$ auch wieder ein Integritätsring. Und natürlich ist $(R[x])[y] \simeq R[x, y]$.

Folgerung 2.5. Sei R ein Integritätsring. Dann ist $(R[x])^* = R^*$.

Beweis. Sei $f(x) \in (R[x])^*$, das heißt $\exists g(x) \in R[x] : f \cdot g \equiv 1$.

$\Rightarrow \deg f + \deg g = \deg 1 = 0$

$\Rightarrow \deg f = 0$, also ist Polynom f konstant, ebenso für g. $\square$

Bemerkung. Per Induktion folgt auch $(R[x_1, \dots, x_n])^* = R^*$

Definition 2.6. Sei R ein Ring, seien $s, r \in R$ Elemente. Ich sage: s ist Teiler von r (in Symbolen $s \mid r$), wenn es $a \in R$ gibt, so dass $s \cdot a = r$.

Lemma 2.7. Sei R ein Integritätsring, seien s, r Elemente. Dann ist äquivalent

1) $\exists \varepsilon \in R^*, s = \varepsilon \cdot r$

2) $s \mid r$ und $r \mid s$

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, nenne ich s und r assoziiert (in Symbolen $s \sim r$).

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2)✓

2) $\Rightarrow$ 1) Aus $s \mid r$ und $r \mid s \Rightarrow a, b \in R : s \cdot a = r$ und $r \cdot b = s$.

$\Rightarrow (r \cdot b) \cdot a \Rightarrow r(ba - 1) = 0$

Da R Integritätsring ist: $\Rightarrow ba = 1 \qquad \Rightarrow b, a, \in R^*$ □

Definition 2.8. Sei R ein Integritätsring, seien $s, r \in R$ Elemente. Dannn nenne s einen echten Teiler von r (in Symbolen $s \parallel r$) falls gilt:

1) $s \mid r$

2) $s \notin R^*$

3) r und s sind nicht assoziiert

Definition 2.9. Sei R ein Integritätsring. Ein Element $r \in R$ heißt irreduzibel, falls $r \notin R^*$ und falls r keine echten Teiler hat.

Beispiel 2.10. Die irreduziblen Elemente von $R = \mathbb{Z}$ sind exakt $\pm$(Primzahl).

Lemma 2.11. Sei R ein Integritätsring. Seien $r, s, t, s_1, s_2, u, v \in R$. Dann gilt:

1) $r \mid r$

2) $r \mid s$ und $s \mid t \Rightarrow r \mid t$

3) $r \mid s_1$ und $r \mid s_2 \Rightarrow r \mid (s_1 + s_2)$

4) $r \mid s_1$ und $r \mid (s_1 + s_2) \Rightarrow r \mid s_2$

5) $r \mid s$ und $u \mid v \Rightarrow ru \mid sv$

Nächstes Ziel: In $\mathbb{Z}$ ist jede Zahl darstellbar als Produkt von Primzahlen und die Darstellung ist eindeutig bis auf Reihenfolge und Vorzeichen.

Wunschtraum: Sei R ein Integritätsring. Dann ist jedes Element eindeutig darstellbar als Produkt von irreduziblen Elementen.

Beispiel 2.12. Betrachte $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b \cdot \sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$

Dieser Ring ist ein Unterring von $\mathbb{C}$ und deshalb Nullteilerfrei und

$$9 = 3 \cdot 3 = \underbrace{(2 + \sqrt{-5})(2 - \sqrt{-5})}_{2^2 - (\sqrt{-5})^2}$$

Die Elemente $3, 2 \pm \sqrt{-5}$ sind irreduzibel und nicht zueinander assoziiert.

Definition 2.13. Sei R ein Integritätsring. Eine Teilerkette ist eine Folge $(r_i)_{i \in \mathbb{N}}$ von Elementen aus R, so dass $\forall i \; r_{i+1} \mid r_i$. Ich sage, im Ring R gilt der Teilerkettensatz für Elemente, falls in jeder Teilerkette die stärkere Bedigung $r_{i+1} \parallel r_i$ nur endlich oft gilt.

Beispiel 2.14. Im Ring $\mathbb{Z}$ gilt der Teilerkettensatz für Elemente, denn falls $r_{i+1} \parallel r_i$ ist, dann gilt $|r_{i+1}| < |r_i|$.

Analog im Polynomring mit deg statt $|\cdot|$.

Satz 2.15. Sei R ein Integritätsring in dem der Teilerkettensatz für Elemente gilt. Dann ist jedes $r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$ als Produkt von endliche vielen irreduziblen Elementen darstellbar.

Beweis. (Noether Rekursion) Wir wollen zeigen, dass $M = \{r \in R \mid r \notin R^*, r \neq 0 \text{ und } r \text{ nicht als Produkt von endlich vielen irreduziblen darstellbar}\}$ leer ist. Widerspruchsbeweis: angenommen $M \neq \emptyset$.

Beobachtungen:

1) $\forall r \in M$ r ist nicht irreduziblen (denn sonst wäre r eine Darstellung), also hat r echte Teiler

2) $\exists r \in M$, so dass alle echten Teiler von r nicht mehr in M liegen (denn sonst nehme echten Teiler aus M, widerhole das Verfahren, erhalte unendliche Teilerkette wo ich in jedem Schritt echte Teiler habe $\lightning$ zur Annahme)

Also gegeben r wie in Beobachtung 2), dann ist jeder echte Teiler als Produkt von endlich vielen irreduziblen darstellbar, also auch r selbst. (Schreibe $r = r_1 \cdot r_2$ mit r_1, r_2 echte Teiler. Dann $r_1 = a_1 \cdots a_n, r_2 = b_1 \dots b_m$ mit $\forall i, j a_i, b_j$ irreduzibel dann $r = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_m$) $\lightning$. $\square$

Definition 2.16. Sei R ein Integritätsring, sei $r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$. Seien

$$r = a_1 \cdots a_n = b_1 \cdots b_m$$

zwei Darstellungen von r als Produkt von endlich vielen Irreduziblen.

Nenne die Darstellung äquivalent, falls gilt

1) gleich lang: $n = m$

2) $\exists$ Permutation $\sigma \in S_n$ und Einheiten $\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \in R^*$ so dass $\forall i : a_i = \varepsilon_i \cdot b_{\sigma(i)}$

Bemerkung. In Ringen, in denen der Teilerkettensatz gilt, sind Darstellungen nicht immer äquivalent! Zum Beispiel $R = \mathbb{Z}\sqrt{-5}$.

Das Problem ist, dass die irreduziblen Elemente in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht unbedingt prim sind.

Definition 2.17. Sei R ein Integritätsring, $r \in R, r \neq 0$ ein Element. Nenne r prim falls $\forall a, b \in R$

$$r \mid (a \cdot b) \qquad \Longrightarrow \qquad r \mid a \text{ oder } r \mid b$$

Beispiel 2.18. In $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist $(2 + \sqrt{-5})$ irreduzibel, aber nicht prim, denn $(2 + \sqrt{-5}) \mid 3 \cdot 3$ aber $(2 + \sqrt{-5}) \nmid 3$.

Lemma 2.19 (Elementare Rechenregeln für Prim-Elemente)**.** Sei R ein Integritätsring, $p, q \in R$

1) p prim $\Rightarrow p$ irreduzibel

2) p prim, $p \sim s \Rightarrow s$ prim

3) p, q prim und $p \mid q \Rightarrow p \sim q$

4) p prim und $p \mid a_1 \cdots a_n \Rightarrow \exists i \; p \mid a_i$

Beweis. zu 1)

Sei p prim. Angenommen p habe echten Teiler $a \in R$. Dann sei $b \in R$ so dass $p = a \cdot b$, insbesondere $p \mid ab$. Also $p \mid a$ oder $p \mid b$. oBdA gelte $p \mid a$.

Also $\exists h \in R, p \cdot h = a$. Einsetzen liefert

$$p = p \cdot h \cdot b \qquad \Longleftrightarrow \qquad p(1 - hb) = 0 \qquad \underset{R \text{ Integritätsring}}{\Longleftrightarrow} \qquad 1 = h \cdot b$$

$\Rightarrow b$ ist eine Einheit, kein echter Teiler. $\square$

Satz 2.20. Im Ring $\mathbb{Z}$ ist jedes irreduzible Element auch prim.

Beweis. Angenommen es existiert in $\mathbb{Z}$ ein irreduzibles Element p, das nicht prim ist. Dann ist $-p$ irreduzibel und auch nicht prim. Wir können also oBdA annehmen $p > 0$. Wir können auch annehmen das p das kleinste positive, irreduzible Element ist, das nicht prim ist.

Also $\exists a, b \in \mathbb{N} : p \mid a \cdot b$ aber $p \nmid a$ und $p \nmid b$.

Division mit Rest liefert

$$a = x \cdot a + a' \qquad \text{wobei } a' < p$$
$$b = y \cdot p + b' \qquad \text{wobei } b' < p$$

Sehe sofort $p \nmid a'$ und $p \nmid b'$.

Sehe auch $a \cdot b = xyp^2 + (xb' + a'y)p + a'b'$ also $p \mid a'b'$.

Wähle also a, b so, dass ab minimal ist, und dann ist $a < p, b < p, ab < p^2$.

Finde $h \in \mathbb{N} : p \cdot h = a \cdot b$.

Sei jetzt p' ein irreduzibler Teiler von $h, p' > 0$. Dann existiert $h' > 0, h = p' \cdot h'$ und $p' \leq h < p$. Nach Wahl von p (kleinstes irreduzibles das nicht prim ist) ist p' prim und $p \cdot p' \cdot h' = a \cdot b$.

Also gilt $p' \mid a \cdot b \underset{p'prim}{\Rightarrow} p' \mid a$ oder $p' \mid b$. oBdA gelte $p' \mid a$. Finde also $a' < a$ so dass $p' \cdot a' = a$. Einsetzen liefert

$$p \cdot p' \cdot h' = p' \cdot a' \cdot b \underset{\mathbb{Z}\text{ Integritätsring}}{\Longrightarrow} p \cdot h' = a'b \qquad \Longrightarrow \qquad p \mid a'b$$

Da $a'b < ab$ ist gilt nach Wahl von $a \cdot b$ (a, b Gegenbeispiel zur Prim-Eigenschaft mit minimalem Produkt) also $p \mid a'$ oder $p \mid b$. Da $a' \mid a$ ist folgt $p \mid a$ oder $p \mid b$. $\lightning$ $\square$

Satz 2.21. Sei R ein Integritätsring. Dann ist äquivalent:

1) Jedes $r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$ ist als Produkt von endlich vielen Irreduziblen darstellbar und je zwei Darstellungen sind äquivalent.

2) In R gilt der Teilerkettensatz für Elemente und alle irreduziblen sind prim.

Falls diese Eigenschaften gelten, nenne R faktoriell oder UFD.

Beweis. $\underline{1) \Rightarrow 2)}$

Teilerkettensatz: Sei $(r_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Teilerkette. Sei i so dass $r_{i+1} \parallel r_i$ das heißt $\exists h : h \notin R^*, h \neq 0 : r_{i+1} \cdot h = r_i$.

Nach Annahme, kann r_i, r_{i+1}, h als Produkt von endlich vielen irreduziblen geschrieben werden

$$\begin{aligned} r_i &= a_1 \cdot a_n \\ r_{i+1} &= b_1 \cdots b_m \\ h &= c_1 \cdots c_k \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\underbrace{b_1 \cdots b_m}_{\text{Darstellung von } r_{i+1}} \cdot c_1 \cdots c_k = \underbrace{a_1 \cdots a_n}_{\text{Darstellung von } r_i}$$

Da alle Darstellungen äquivalent sind, folgt $n = m + k > m$.

Also in der Teilerkette gibt es höchstens endlich viele echte Teiler, nämlich höchstens so viele, wie eine (jede) Darstellung von r_1 lang ist. $\Rightarrow$ Teilerkettensatz gilt

Irreduzibel $\Rightarrow$ *Prim*: Sei r irreduzibel und seien $a, b \in R\setminus\{0\}$ so dass $r \mid ab$. Also existiert $h \in R \setminus \{0\}$, so dass $r \cdot h = a \cdot b$. Wir wissen h, a, b haben Darstellung

$$a = a_1 \cdots a_n, \qquad b = b_1 \cdots b_m, \qquad h = h_1 \cdots h_k$$

Also

$$r \cdot h_1 \cdots h_k = a_1 \cdots a_n \cdot b_1 \cdots b_m$$

zwei Darstellungen von $a \cdot b$. Per Annahme sind diese Darstellungen äquivalent also $\exists i : r \sim a_i$ oder $\exists j : r \sim b_j$

$\Rightarrow r \mid a$ oder $r \mid b$. Also ist r prim.

$\underline{2) \Rightarrow 1)}$

Wir haben schon bewiesen: Teilerkettensatz $\Rightarrow$ Darstellbarkeit, es fehlt noch die Äquivalenz $\forall r \in R, r \notin R^*, r \neq 0$ und für alle Darstellungen $r = a_1 \cdots a_n \underset{(*)}{=} b_1 \cdots b_m$ mit $n \neq m$ gilt, dass beide Darstellungen äquivalent sind.

Beweis per Induktion über n

Induktionsanfang: $n = 1 : a_1 = b_1 \cdots b_m$

Per Annahme ist a_1 prim, also $\exists j : a_1 \mid b_j$.

Rechenregeln: $a_1 \sim b_j$, insbesondere sind alle $b_k, k \neq j$ schon Einheiten. $\Rightarrow m = 1 = j$ (da die Faktoren in der Darstellung irreduzibel und keine Einheiten sind).

Induktionsschritt: Sei die Aussage für alle Zahlen $< n$ schon bewiesen.

Wieder gilt $a_1 \mid b_1 \cdots b_m \Rightarrow \exists j : a_1 \sim b_j$. oBdA sei $j = 1$ also existiert eine Einheit $\varepsilon \in R^*$ so dass $a_1 = \varepsilon b_1$.

R ist also Integritätsring, kann also in $(*)$ kürzen, erhalte

$$a_2 \cdots a_n = (\varepsilon b_2) \cdot b_3 \cdots b_m$$

Per Induktionsannahme sind diese Darstellungen äquivalent. □

Folgerung 2.22. $\mathbb{Z}$ ist faktoriell.

Folgerung 2.23. Alle Körper sind faktoriell.

Satz 2.24 (Gauß)**.** Wenn R ein faktorieller Ring ist, dann auch $R[x]$.

Und damit auch $(R[x])[y] = R[x, y]$ und auch $R[x_1, \dots, x_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir müssen zeigen:

1) In $R[x]$ gilt der Teilerkettensatz

2) Je zwei Darstellungen sind äquivalent

zu 1): Wenn $r(x), s(x) \in R[x]$ und $r(x) \parallel s(x)$, dann $\deg r(x) < \deg s(x)$ oder $\exists a \in R \setminus R^*, a \neq 0 : a \cdot r(x) = s(x)$.

$\Rightarrow$ alle Koeffizienten von s werden von a geteilt. In R gilt aber der Teilerkettensatz!

Hausaufgabe: Also gilt der Teilerkettensatz auch in $R[x]$.

zu 2): Widerspruchsbeweis! Angenommen es gibt $r(x) \in R[x], r \neq 0, r \notin R[x]^* = R^*$ so dass r zwei Darstellungen hat, die nicht äquivalent sind

$$r(x) = p_1(x) \cdots p_\alpha(x) = q_1(x) \cdots q_\beta(x) \qquad (*)$$

Ich kann oBdA einige Annahmen treffen

- $\deg r(x)$ ist minimal unter allen Polynomen die nicht äquivalente Darstellungen haben

- die irreduziblen Polynome $p_1, \dots, p_\alpha, q_1, \dots, q_\beta$ sind nach Graden sortiert also $\deg p_1 \geq \deg p_2 \geq \dots \geq \deg p_\alpha$ und $\deg q_1 \geq \deg q_2 \geq \dots \geq \deg q_\beta$

- $\deg q_1 \geq \deg p_1$

Sei $n \coloneqq \deg p_1, m = \deg q_1$. Seien a, b die Leitkoeffizienten von p_1 beziehungsweise q_1. Das heißt:

$$\begin{aligned} p_1 &= a \cdot x^n + (\text{lot}) \\ p_1 &= b \cdot x^m + (\text{lot}) \end{aligned}$$

Beobachtungen:

- $\deg r(x) > 0$, denn sonst wären $r(x)$ und alle $q_i(x), p_j(x)$ konstant, also in R. Per Annahme das R faktoriell ist müssten die Darstellungen dann äquivalent sein.

  $\Rightarrow n > 0$ und $m > 0$

- Angenommen es gäbe j: $p_1 \sim q_j$. Dann könnte ich in $(*)$ auf beiden Seiten p_1 kürzen und erhielte Polynom von Grade $(\deg r(x)) - n < \deg r(x)$, das zwei nicht äquivalente Darstellungen hat $\lightning$ zur Minimalität von $\deg r(x)$.

Betrachte Hilfspolynom:

$$s(x) = \underbrace{\Big[b \cdot p_1(x) \cdot x^{m-n} - a \cdot q_1(x)\Big]}_{\deg < \deg q_1(x)} \cdot q_2 \cdots q_\beta \tag{☼}$$

Wir erhalten zwei offensichtliche Fälle

1) $s(x) = 0$: Dann ist
$$b \cdot p_1(x) \cdot x^{m-n} - a \cdot q_1(x)$$

2) $s(x) \neq 0$: Wir sehen $\deg s(x) < \deg r(x)$. Also sind je zwei Darstellungen von $s(x)$ äquivalent! Schreibe $s(x)$ um:

$$\begin{aligned} s(x) &= b \cdot p_1(X) x^{m-n} \cdot q_2 \cdots q_\beta - a \underbrace{q_1 \cdots q\beta}_{r(x)} \\ &= b \cdot p_1 x^{m-n} \cdot q_2 \cdot q_\beta - a \cdot p_1 \cdots p_\alpha \\ &= p_1(x) \Big[b \cdot x^{m-n} \cdot q_2(x) \cdots q_\beta(x) - a \cdot p_2(x) \cdots p_\alpha(x)\Big] \qquad (☾) \end{aligned}$$

Wir können die Ausdrücke (☼) und (☾) verfeinern zu Produkten von irreduziblen indem wir die Ausdrücke in [...] als Produkt von irreduziblen schreiben. Diese Darstellungen von $s(x)$ müssen dann äquivalent sein.

Konsequenz: In der Darstellung von (☼) muss es einen Faktor geben, der zu p_1 assoziiert ist. Da $p_1 \nsim 1_2 \dots p_1 \nsim q_\beta$ muss p_1 ein Primfaktor vom [...]-Ausdruck in (☼) sein.

$$\Rightarrow \qquad p_1 \mid (bp_1 \cdot x^{m-n} - aq_1) \qquad \Rightarrow p_1 \mid aq_1$$

Insgesamt ergibt sich in jedem der beiden Fälle:

$$\exists h \in R[x]: \quad p_1(x) \cdot h(x) = a \cdot q_1(x) \tag{🔔}$$

Beobachte: Wenn $a \in R^*$, dann $p_1 \mid q_1$ und $p_1 \sim q_1$ ↯. Also ist $a \in R \setminus R^*, a \neq 0$.

Zwischenbehauptung (Beweis später): Sei $p \in R$ irreduzibel. Dann ist das konstante Polynom $p \in R[x]$ prim.

Anwendung der Zwischenbehauptung: Schreibe a als Produkt von Irreduziblen. Wenn jetzt p einer der irreduziblen Faktoren ist, dann $p \mid p_1 \cdot h$.

$\Rightarrow p \mid p_1$ oder $p \mid h$. $p \mid p_1$ kann nicht sein, denn p_1 ist irreduzibel, hat also überhaupt keine echten Teiler.

Also kann ich aus (🔔) p herausteilen und erhalte

$$p_1 \cdot \frac{h}{p} = \frac{a}{p} q_1$$

Das geht mit jedem Primfaktor von a erhalte also am Ende:

$$p_1 \cdot \frac{h}{a} = q_1 \qquad \Rightarrow p_1 \mid q_1 \qquad \Rightarrow p_1 \sim q_1 \qquad \Rightarrow \text{↯}$$

Zwischenbehauptung (jetzt der Beweis): Sei $p \in R$ irreduzibel. Dann ist das konstante Polynom $p \in R[x]$ prim.

Sei $p \in R$ irreduzibel. Ich zeige die Kontraposition: wenn $a(x), b(x) \in R[x]$ Polynome sind mit $p \nmid a(x)$ und $p \nmid b(x) \Rightarrow p \nmid (a \cdot b)(x)$

Seien also $a(x), b(x)$ gegeben. Schreibe

$$a(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$
$$b(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$

Erinnere: $p \mid a(x) \Leftrightarrow \forall i : p \mid a_i$

Kann also minimale Indizes i und j wählen, so dass $p \nmid a_i$ und $p \nmid b_j$. Betrachte Produktpolynom $(a \cdot b)(x)$ und rechne den Koeffizienten von x^{i+j} im Produktpolynom aus. Dieser Koeffizient ist

$$\gamma \coloneqq \sum_{\substack{\alpha+\beta=i+j \\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}}} a_\alpha \cdot b_\beta$$

In dieser Summe sind alle Summanden durch p teilbar, weil stets $\alpha < i$ oder $\beta < j$ mit der Ausnahme des Summanden $\alpha = i, \beta = j, (= a_i \cdot b_j)$.

Weil R faktoriell ist per Annahme und $p \in R$ deshalb prim ist $\Rightarrow p \nmid a_i \cdot b_j$

$\Rightarrow p \nmid \gamma \qquad \Rightarrow p \nmid (a \cdot b)(x)$ $\square$

<u>Was tun wir mit faktoriellen Ringen?</u>

Sei R ein faktorieller Ring, betrachte die Äquivalenzrelation $a \sim b \Leftrightarrow a$ assoziiert zu b

Wähle Repräsentantensystem $P \subset R$ für die irreduziblen Elemente (= zu jedem irreduziblen $a \in R$ gibt es genau ein $b \in P$ mit $a \sim b$)

Wenn dann irgendein $a \in R$ gegeben ist, dann kann ich schreiben

$$a = \varepsilon \cdot \prod_{p\in P} p^{\alpha_p}$$

wobei $\varepsilon \in R^*, \alpha_p \in \mathbb{N}$ und alle bis auf endlich viele $\alpha_p = 0$.

Teilbarkeit wird dann ganz einfach. Seien $a, b \in R$

$$a = \varepsilon_a \cdot \prod_{p\in P} p^{\alpha_{a,p}}, \qquad b = \varepsilon_b \cdot \prod_{p\in P} p^{\alpha_{b,p}}$$

und

$$\begin{aligned} a \mid b &\Leftrightarrow \forall p \in P : \alpha_{a,p} \leq \alpha_{b,p} \\ a \parallel b &\Leftrightarrow (\forall p \in P : \alpha_{a,p} \leq \alpha_{b,p}) \quad \& \quad (\exists p \in P : \alpha_{a,p} < \alpha_{b,p}) \\ a \sim b &\Leftrightarrow \forall p \in P : \alpha_{a,p} = \alpha_{b,p} \end{aligned}$$

<u>Weiter mit Grundschulstoff:</u>

Sei R ein Integritätsring, seien $a, b \in R \setminus R^*, a \cdot b \neq 0$

1) Ein Element $c \in R$ heißt größter Gemeinsamer Teiler wenn gilt $c \mid a$ und $c \mid b$ und wenn für jedes andere c' mit $c' \mid a$ und $c'b$ gilt $c' \mid c$.

2) Ein Element $c \in R$ heißt kleinstes gemeinsames Vielfaches, wenn $a \mid c$ und $b \mid c$ ist und für alle $c' \in R$ mit $a \mid c'$ und $b \mid c'$ gilt $c \mid c'$.

Satz 2.25. Sei R faktoriell. Seien $a, b \in R$ dann existieren ggT und kgV.

Beweis. Wähle Repräsentantensystem $P \subset R$. Schreibe

$$a = \varepsilon_a \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_{a,p}}, \qquad b = \varepsilon_b \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_{b,p}}$$

Setze

$$\mathrm{ggT}(a, b) := \prod_{p \in P} p^{\min(\alpha_{a,p}, \alpha_{b,p})}$$

und

$$\mathrm{kgV}(a, b) := \prod_{p \in P} p^{\max(\alpha_{a,p}, \alpha_{b,p})}$$

Blick nach oben zeigt, dass dies exakt die Bedingungen erfüllt. □

Satz 2.26. Seien $f, g \in k[x]$ Polynome. Betrachte Divisionsreste

$$f = q_1 \cdot g + r_1 \tag{1}$$
$$g = q_2 \cdot r_1 + r_2 \tag{2}$$

Definiere dann induktiv Polynome r_n als Divisionsrest

$$r_{n-2} = q_n \cdot r_{n-1} + r_n \tag{n}$$

Beobachtung: Die Grade der Polynome $r_1, r_2, \dots$ werden immer kleiner. Der Prozess stoppt also nach endlich vielen Schritten das heißt irgendwann geht die Division auf. Es existiert also $n \in \mathbb{N}$ so dass

$$r_{n-1} = q_{n+1} \cdot r_n + 0 \tag{n+1}$$

Dann ist $r_n = \mathrm{ggT}(f, g)$.

Beweis. 1) Wenn t ein gemeinsamer Teiler von f, g ist

$$\overset{(1)}{\Longrightarrow} t \mid r_1 \qquad \dots \qquad \overset{(n)}{\Longrightarrow} t \mid r_n$$
$$\overset{(2)}{\Longrightarrow} t \mid r_2$$

2) Andere Richtung analog:

$$\begin{aligned}(n+1) &\implies r_n \mid r_{n+1}\\ (n) &\implies r_n \mid r_{n+1}\\ &\vdots\\ (2) &\implies r_n \mid g\\ (1) &\implies r_n \mid f\end{aligned}$$

Da $k[t]$ faktoriell ist genügen 1) + 2) um $r_n = \text{ggT}$ zu zeigen.

□

2.2 Der Quotientenkörper eines Integritätsrings

Ziel: Gegeben ein Ring R, suche einen möglichst kleinen Körper k s.d. $R \subset k$ (besser: so dass es einen injektiven Ringmorphismus $R \hookrightarrow k$ gibt). Wir denken an $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$.

Beobachtung: So etwas kann es nicht geben, wenn R Nullteiler hat! Betrachte also nur Integritätsringe.

Definition 2.27. Sei R ein Integritätsring. Ein Quotientenkörper von R ist ein Körper k zusammen mit einem injektiven Ringmorphismus $\varphi : R \to k$ so dass folgende (universelle) Eigenschaft gilt: Wann immer $\Phi : R \to L$ ein injektiver Ringmorphismus in einen Körper ist, dann gibt es genau einen Körpermorphismus $\eta : k \to L$ so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[d, "\exists!\eta"] \\ R \arrow[r, "\Phi"'] & L \end{tikzcd}$$

Bemerkung. Körpermorphismen $k \xrightarrow{\eta} L$ sind immer injektiv! Denn wäre $a \in k \setminus \{0\}, a \in \ker(\eta)$. Dann

$$1_L = \eta(1_k) = \eta(a \cdot a^{-1}) = \underbrace{\eta(a)}_{=O_L} \cdot ?$$

Widerspruch!

Satz 2.28. Sei R ein Integritätsring. Dann existiert ein Quotientenkörper $(k, \varphi : R \to k)$. Dieser ist eindeutig bis auf kanonische Isomorphie. Das bedeutet: Wenn $(k', \varphi' : R \to k')$ ein weiterer Quotientenkörper ist, dann existiert genau ein Körperisomorphismus $\eta : k \to k'$ so das das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[d, "\exists!\eta"] \\
R \arrow[r, "\varphi'"'] & k
\end{tikzcd}$$

Beweis. Eindeutigkeit: Seien Quotientenkörper $(k, \varphi : R \to k)$ sowie $(k', \varphi' : R \to k')$ gegeben. Nach der universellen Eigenschaft existiert dann genau ein Körpermorphismus $\eta : k \to k'$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[d, "\eta"] \\
R \arrow[r, "\varphi'"'] & k
\end{tikzcd}$$

Wir wissen auch: Weil k' Quotientenkörper ist, existiert genau ein Körpermorphismus $\eta' : k' \to k$ so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[d, "\eta"] \\
R \arrow[r, "\varphi'"'] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k' \arrow[d, "\eta'"] \\
R \arrow[r, "\varphi"'] & k
\end{tikzcd}$$

Die universelle Eigenschaft angewandt auf

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[dd, "\mathbb{1}_k"', "\eta' \circ \eta"] \\
R \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & \\
R \arrow[r, "\varphi"'] & k
\end{tikzcd}$$

zeigt: $\eta' \circ \eta = \mathbb{1}_k$.

Genauso folgt $\eta \circ \eta' = \mathbb{1}_{k'}$. Also ist der Körpermorphismus η' die Umkehrung von η.

<u>Existenz:</u> Ich konstruiere den Quotientenkörper wie folgt:

1) Betrachte die Menge
$$B = \{(a,b) \in R \times R \mid b \neq 0\}$$
und sage (a,b) ist äquivalent zu (a',b') wenn gilt $ab' = a'b$. Das ist eine Äquivalenzrelation. Symmetrie und Reflexivität sind klar per Definition. Wir müssen also noch die Transitivität zeigen: Seien also Tupel gegeben so dass
$$\begin{array}{ccc} & (a,b) \sim (a',b') & (a',b') \sim (a'',b'') \\ \Leftrightarrow & ab' = a'b & a'b'' = a''b' \end{array}$$
Und damit dann
$$\Rightarrow \quad ab' \cdot a'b'' = a'b \cdot a''b'$$
Im Integritätsring falls $a' \neq 0$
$$\Rightarrow \quad ab'' = a''b \quad \Leftrightarrow \quad (a,b) \sim (a'',b'')$$
Falls $a' = 0$ ist der Beweis sowieso einfach.

Definiere als Menge
$$k := B/\sim$$

Notation: Die Äquivalenzklasse von (a,b) wird mit $\frac{a}{b}$ bezeichnet.

Betrachte die Abbildung
$$\varphi : R \to k, a \mapsto \frac{a}{1}$$

Diese Abbildung ist injektiv, denn
$$\varphi(a) = \varphi(a') \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{1} = \frac{a'}{1} \quad \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} \quad a \cdot 1 = a' \cdot 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = a'$$

2) Definiere auf k die Struktur eines Körpers mit Verknüpfungen
$$\begin{aligned} \cdot : k \times k \to k, &\quad \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \mapsto \frac{ac}{bd} \\ + : k \times k \to k, &\quad \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \mapsto \frac{ad + cb}{bd} \end{aligned}$$

Muss noch nachrechnen: Wohldefiniertheit

Das bedeutet: Gegeben $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ sowie $\frac{a'}{b'}$ und $\frac{c'}{d'}$ mit $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ sowie $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$, dann gilt $\frac{ad+cb}{bd} = \frac{a'd'+c'b'}{b'd'}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \qquad & (ad+cb)\cdot b'd' = (a'd'+c'b')\cdot bd \\ \Leftrightarrow \qquad & adb'd' + cbb'd' = a'd'bd + c'b'bd \end{aligned}$$

Wir wissen $ab' = a'b$ und $cd' = c'd$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 = 0$$

Die Addition ist wohldefiniert.

Hausaufgabe: Dasselbe für Multiplikation

Lästige Rechnerei: Diese Verknüpfungen definieren eine Körperstruktur auf k so dass die Abbildung $\varphi : R \to k$ ein Ringmorphismus ist. Es gilt

$$0_k = \frac{0}{1} \qquad 1_k = \frac{1}{1} \qquad \text{falls } a \neq 0 \text{ dann} \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

3) Beweis der universellen Eigenschaft

Sei Körper L gegeben und ein injektiver Ringmorphismus $\Phi : R \to L$, dann müssen wir zeigen $\exists!\eta : k \to L$ so dass ...

<u>Eindeutigkeit:</u> Angenommen wir hätten η so dass das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, dash, "\mathbb{1}_R"'] & k \arrow[d, "\exists!\eta"] \\ R \arrow[r, "\Phi"'] & L \end{tikzcd}$$

dann gilt für alle $a \in R$

$$\eta(\varphi(a)) = \Phi(\mathbb{1}_R(a)) \Leftrightarrow \eta\left(\frac{a}{1}\right) = \Phi(a)$$

Falls $a \neq 0$ ist gilt

$$\eta\left(\frac{1}{a}\right) = \eta\left(\left(\frac{a}{1}\right)^{-1}\right) \overset{\text{Körpermorphismus}}{=} \eta\left(\frac{a}{1}\right)^{-1}$$

also gilt für alle $\frac{a}{b} \in k$

$$\eta\left(\frac{a}{b}\right) = \eta\left(\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{b}\right) = \eta\left(\frac{a}{1}\right) \cdot \eta\left(\frac{1}{b}\right) = \Phi(a) \cdot (\Phi(b))^{-1}$$

also ist η eindeutig.

<u>Existenz:</u> Definiere

$$\eta : k \to L, \quad \frac{a}{b} \mapsto \Phi(a) \cdot \Phi(b)^{-1}$$

Wieder ist Wohldefiniertheit zu prüfen: Seien $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. Wir müssen zeigen:

$$\begin{aligned} & \Phi(a)\Phi(b)^{-1} = \Phi(a')\Phi(b')^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad & \Phi(a) \cdot \Phi(b') = \Phi(a')\Phi(b) \\ \Leftrightarrow \quad & \Phi(ab') = \Phi(a'b) \\ \Leftrightarrow \quad & \text{Wahr, wegen Annahme} \end{aligned}$$

Nachrechnen: das ist ein Körperisomorphismus.

$\square$

Beispiel 2.29.

- $R = \mathbb{Z}$ dann ist $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q}$

- R ein Körper, dann ist $Q(R) = R$

- $R = \mathbb{Z}[2 + \sqrt{-5}]$, dann ist $Q(R) = \mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5}) \subset \mathbb{C}$

  Grund: Wir haben eine Inklusion $R \subset \mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5})$ deshalb gibt es Körpermorphismus $Q(R) \to \mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5})$.

  Dieser ist surjektiv, denn $Q(R)$ enthält das Element $a = 2 + \sqrt{-5}$. Wir wissen aber $\mathbb{Q}(2 + \sqrt{-5})$ ist der kleinste Körper der dieses Element enthält.

- Sei R faktoriell. Wähle Repräsentantensystem $P \subset R$. Dann kann ich alle Elemente von $Q(R)$ auf eindeutige Weise schreiben als

  $$\varepsilon \cdot \prod_{p \in P} p^{\alpha_p}$$

  wobei $\varepsilon \in R^*, \alpha_p \in \mathbb{Z}$ und fast alle $\alpha_p = 0$.

<u>Warum das alles?</u>

Wenn R faktoriell ist, kann ich manchmal entscheiden, ob Polynome in $R[x]$ irreduzibel sind.

Beispiel: $f(x) = x^3 - 2 \in \mathbb{Z}[x]$

Behauptung: f ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$

Anbenommen es gäbe einen echten Teiler, dann gäbe es einen linearen Teiler das heißt

$$\exists a, b \in \mathbb{Z}, a \neq 0 : f(x) = (ax + b)g(x)$$

wobei $g(x)$ quadratisch in $\mathbb{Z}[x]$.

Sehe sofort: $a \in \{\pm 1\}, b \in \{\pm 1, \pm 2\}$

Nachrechnen: keine dieser Möglichkeiten ist ein Teiler

Der folgende Satz zeigt, dass f auch in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel ist.

Satz 2.30 (Satz von Gauß)**.** Sei R ein faktorieller Ring. Falls $f(x) \in R[x]$ irreduzibel als Element von $R[x]$, dann ist f auch irreduzibel als Element von $Q(R)[x]$.

Vorbemerkung: Sei $f \in Q(R)[x]$ irgendein Polynom. Dann existiert $a \in Q(R)$ so dass $a \cdot f(x) \subset R[x]$ und ggT(Koeffizienten von $a \cdot f(x)) = 1$ (Koeffizienten sind Teilerfremd).

Beweis dazu: Auf Hauptnenner bringen und durch größten gemeinsamen Teiler der Koeffizienten teilen.

Beweis. Angenommen wir haben $f(x) \in R[x]$ welches als Polynom in $Q(R)[x]$ reduzibel ist. Das heißt es existieren Polynome $q(x), p(x) \in Q(R)[x]$ mit q, p nicht konstant, so dass $f(x) = q(x) \cdot p(x)$.

Ziel: Schreibe f als Produkt $f = q'(x) \cdot p'(x)$ wobei $q', p' \in R[x]$ echte Teiler sind.

Beobachtung: Wenn $\gamma \in R$ jeden Koeffizienten von f teilt und $\gamma \notin R^*, \gamma \neq 0$ dann ist γ ein echter Teiler von f und wir sind fertig. Wir nehmen also ab sofort an, dass die Koeffizienten von f teilerfremd sind.

Wende Vorbemerkung auf Polynome $p(x), q(x)$ an, erhalte $a, b \in Q(R)$ so dass $a \cdot p(x) \in R[x]$ und $b \cdot q(x) \in R[x]$ und Koeffizienten dieser Polynome jeweils Teilerfremd in R.

Durch Multiplikation erhalte Gleichung

$$a \cdot b \cdot f(x) = a \cdot p(x) \cdot b \cdot q(x) \in R[x] \tag{$*$}$$

Beachte die linke Seite ist in $R[x]$, weil beide Faktoren der rechten Seite in $R[x]$ sind.

Behauptung: Es ist $a \cdot b \in R$.

Beweis: Angenommen $a \cdot b \notin R$ das heißt es existiert Primelement $p \in R$, welches in der Darstellung von $a \cdot b$ mit negativem Exponenten auftritt. Da aber $a \cdot b \cdot f(x) \in R[x]$ muss die Darstellung jedes Koeffizienten das Element p mit positivem Exponenten enthalten. Also $p \mid$ Koeffizienten $\lightning$ zu ggT(Koeffizienten) $= 1$

Behauptung: Es gilt sogar $a \cdot b \in R^*$

Beweis: Angenommen $a \cdot b \notin R^*$. Dann hätte ich einen echten irreduziblen Teiler $\gamma \in R$ irreduzibel mit $\gamma \mid a \cdot b$.

$$\Rightarrow \gamma \mid a \cdot b \cdot f(x) \qquad \Rightarrow \gamma \mid [a \cdot p(x)][b \cdot q(x)]$$

Erinnerung: $\gamma \in R$ irreduzibel $\Rightarrow \gamma$ prim in $R[x]$.

Also gilt

$$\gamma \mid a \cdot p(x) \qquad \text{oder} \qquad \gamma \mid b \cdot q(x)$$

oBdA sei $\gamma \mid a \cdot p(x)$ $\lightning$ zur Wahl von a.

Damit kann ich $(*)$ umschreiben zu

$$f(x) = \underbrace{\left[(a \cdot b)^{-1} \cdot a \cdot p(x)\right]}_{\in R[x]} \cdot \underbrace{[b \cdot q(x)]}_{\in R[x]}$$

□

Zusammenfassung: Wir sind jetzt inder Lage, für ganzzahlige Polynome zu entscheiden, ob sie in $\mathbb{Q}[x]$ irreduzibel sind. (z.B. $x^3 - 2$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[x]$, Folgerung $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$ denn wir wissen jetzt, dass $x^3 - 2$ das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ ist)

Erinnerung: Das geht so:

Lagrangesche Interpolationsformel (= Polynom von Grad $\leq n$ ist durch seine Werte an $n+1$ Stellen festgelegt) Sei k Körper, $f(x) \in k[x]$ Polynome von Grad $\leq n$, seien $a_1, \ldots, a_{n+1} \in k$ unterschiedliche Körperlementente. Dann ist f durch die Werte $f(a_i)$ eindeutig festgelegt, nämlich

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n+1} f(a_j) \prod_{k \neq j} \frac{x - a_k}{a_j - a_k} =: h(x) \in k[x]$$

Dann gilt für alle i

$$h(a_i) = \sum_{j=1}^{n+1} f(a_j) \prod_{k \neq j} \frac{a_i - a_k}{a_j - a_k} = f(a_i) \prod_{k \neq i} \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = f(a_i)$$

$\Rightarrow h - f$ ist Polynom von Grad $\leq n$ mit Nullstellen $a_1, \ldots, a_{n+1}$

$\Rightarrow h - f = 0$

Damit haben wir folgendes Verfahren, um irreduzibilität in $\mathbb{Z}[x]$ und also auch in $\mathbb{Q}[x]$ zu testen.

Gegeben $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ von Grad $\leq n$ so dass ggT(Koeffizienten) = 1.

Wähle $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{Z}$ so dass $f(a_i) \neq 0$ und betrachte $f(a_1), \ldots, f(a_n) \in \mathbb{Z}$.

Wir wissen, wenn $g(x)$ ein Teiler von $f(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$ ist, dann gilt für alle i $q(a_i) \mid f(a_i)$

Für $g(a_i)$ gibt es also nur endlich viele Möglichkeiten.

Nur endlich viele Polynome kommen als Teiler in Frage. Wir müssen also durch Polynomdivision testen, ob die Kandidatenpolynome tatsächlich Teiler sind.