

# **Modelltheorie**

**Wintersemester 2019/20**

**Mitschrift von Floris Remmert**

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro  
Abteilung für mathematische Logik  
Mathematisches Institut  
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

14. November 2019



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Theorien und Quantorenelimination</b>	<b>1</b>
1	Erinnerung	1
2	Tarskis Test	4
3	Quantorenelimination	6
4	Beispiele klassischer Theorien	11
5	Ultrafilter & der Satz von Ax	15
6	Typen	20

# Teil I

## Theorien und Quantorenelimination

### Satz 0.1 (Morley)

Sei  $T$  eine Theorie, welche ein einziges (bis auf Isomorphie) Modell der Mächtigkeit  $\aleph_0$  besitzt. Dann besitzt  $T$  für jede Kardinalzahl  $\kappa > \aleph_0$  ein einziges Modell der Mächtigkeit  $\kappa$  (bis auf Isomorphie).

## 1 Erinnerung

**Definition 1.1** • Eine Sprache  $\mathcal{L}$  ist eine Kollektion von Konstanten-, Funktions-, und Relationszeichen

- Eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  besteht aus einer nicht-leeren Grundmenge (oder Universum)  $A$  zusammen mit Interpretationen der Symbole aus  $\mathcal{L}$ :

- Für jedes Funktionszeichen  $f$  der Stelligkeit  $n$

$$f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$$

- Für jedes Relationszeichen  $R$  der Stelligkeit  $m$

$$R^{\mathcal{A}} \subset A^m$$

- Eine Einbettung  $F$  von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  ist eine injektive Abbildung  $F : A \longrightarrow B$ , welche mit den Interpretationen kompatibel<sup>1</sup> ist
- Ein Isomorphismus ist eine surjektive Einbettung.
- $\mathcal{A}$  ist eine Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ , falls  $A \subset B$  und die Inklusion  $\iota : A \longrightarrow B$  eine Einbettung bestimmt

*Bemerkung:* Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $\emptyset \neq A \subset B$ . Dann gibt es eine Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ , welche von  $A$  erzeugt wird.

Das Universum besteht aus  $A$  zusammen mit dem Abschluss von  $A$  unter allen Interpretationen der Funktionszeichen von  $\mathcal{L}$ .

---

<sup>1</sup>das bedeutet, dass Funktions- und Relationszeichen bei Hin- und Rückrichtung erhalten bleiben

**Definition 1.2**

Sei  $(I, <)$  eine partielle Ordnung. Die Ordnung ist gerichtet, falls für  $i, j \in I$  gibt es  $k \in I$  mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$ .

*Bemerkung:* Sei  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen indexiert nach der gerichteten partiellen Ordnung  $I$  derart, dass für  $i \leq j$  gilt:  $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}_j$ .

Die Menge  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  ist das Universum einer (eindeutig bestimmten)  $\mathcal{L}$ -Struktur

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \quad (1)$$

Falls  $I$  eine lineare Ordnung ist, dann ist  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Kette.

Zu 1:

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}_i}$  für ein (alle)  $i \in I$ , denn  $c^{\mathcal{A}_i} = c^{\mathcal{A}_j} = c^{\mathcal{A}_k}$ , wegen gerichteter Ordnung
- $a_1, \dots, a_n \in A = \bigcup_{i \in I} A_i \implies \exists i \in I$  mit  $a_1, \dots, a_n \in A_i$ . Also ist  $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n)$  wohldefiniert.
- $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}}$  genau dann, wenn es ein  $i \in I$  gibt mit  $a_1, \dots, a_m \in A_i$  und  $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}_i}$

Beachte, dass  $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$  für alle  $i \in I$ .

**Definition 1.3**

Eine atomare Formel ist ein Ausdruck der Form  $(t_1 \doteq t_2)$ ,  $t_1, \dots, t_k$  Terme,  $R(t_1, \dots, t_k)$ .

Die Kollektion von Formeln ist die kleinste Klasse, welche alle atomaren Formeln enthält und derart, dass:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ Formel} &\implies \neg \varphi \text{ Formel} \\ \varphi, \psi \text{ Formel} &\implies (\varphi \vee \psi) \text{ Formel} \\ \varphi \text{ Formel}, x \text{ Variable} &\implies \exists x \varphi \text{ Formel, } (x \text{ heißt dann „gebunden“}) \end{aligned}$$

Abk.:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi) &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \forall x \varphi &= \neg \exists x \neg \varphi \\ (\varphi \rightarrow \psi) &= (\neg\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \end{aligned}$$

## 1 Erinnerung

**Bemerkung:** • Jede Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  lässt sich in pränexer Normalform umschreiben:  $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ , mit  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ . Das ist eine quantorfreie Formel, diese lässt sich weiter zerlegen in KNF bzw. DNF.

- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine Aussage
- Eine Theorie ist eine Kollektion von Aussagen

### Beispiel 1.4

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur. Erweitere die Sprache zu der Sprache  $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{d_a\}_{a \in A}$ .

$\mathcal{A}$  ist eine  $\mathcal{L}_A$ -Struktur,  $d_a^{\mathcal{A}} = a$ .

- $\text{Diag}^{\text{at}}(\mathcal{A}) = \{\text{quantorenfreie } \mathcal{L}_A\text{-Aussagen } \chi \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$  heißt „atomares Diagramm“
- $\text{Diag}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{L}\text{-Aussagen } \theta \text{ mit } \mathcal{A} \models \theta\}$  heißt „vollständiges Diagramm“

Sei nun  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}_A$ -Struktur.

$\mathcal{B} \models \text{Diag}^{\text{at}}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  einbetten lässt

$$A \longrightarrow B$$

$$a \mapsto d_a^{\mathcal{B}}$$

$\mathcal{B} \models \text{Diag}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow$  die obige Abbildung ist elementar

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)], a_1, \dots, a_n \in A, \varphi[x_1, \dots, x_n]$  Formel

**Definition 1.5** •  $T$  ist konsistent, falls  $T$  ein Modell besitzt.

- $T$  ist vollständig, falls  $T$  konsistent ist und je zwei Modelle von  $T$  elementar äquivalent sind.

**Satz 1.6** (Kompaktheitssatz)

Eine Theorie ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent<sup>2</sup> ist.

Wie zeigen wir, dass  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ?

**Satz 1.7** (Back & Forth)

$S = \{F : \underset{\substack{\mathcal{C} \\ \cup S}}{\longrightarrow} \underset{\substack{\mathcal{D} \\ \cup S}}{\mathcal{B}}, F \text{ partieller Isomorphismus zwischen } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{D} \text{ geeignet}^3\}$ .

Back: Für alle  $F \in S$  und  $b \in B$ ,  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  gibt es  $G \in S$  mit  $G \supset F$  Erweiterung und  $b \in \text{Im}(G)$ .

<sup>2</sup>endlich konsistent bedeutet: jede endliche Teilmenge der Theorie besitzt ein Modell.

<sup>3</sup>bspw. endlich erzeugt

Forth: Für alle  $F \in S$  und  $a \in A$ ,  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  gibt es  $H \in S$ , mit  $H \supset F$  Erweiterung mit  $a \in \text{Dom}(H)$

$\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  heißen dann „Back & Forth äquivalent“

$\rightarrow$  ist jedes  $F \in S$  elementar, so gilt insbesondere  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .

## 2 Tarskis Test

**Lemma 2.1** (Tarskis Test)

Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $A \subset B$  Teilmenge derart, dass für jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  und Elemente  $a_1, \dots, a_n \in A$ :

falls:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b] \text{ für ein } b \in B \Rightarrow \text{ existiert } a \in A \text{ sodass } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \quad (2)$$

dann ist  $A$  das Universum einer elementaren Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ .

Insbesondere: Falls  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  Unterstruktur, ist  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow A$  erfüllt 2.

*Beweis.* Betrachte  $A \neq \emptyset \rightarrow$  Betrachte  $\varphi[y] = (y \doteq y)$ .  $B \neq \emptyset \rightarrow \exists b \in B$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[b]$ .  
 $\hookrightarrow \exists a \in A$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[a]$

Beh.: Für jedes Konstantenzeichen  $c \in \mathcal{L}$  ist  $c^{\mathcal{B}} \in A$ .  $\hookrightarrow \varphi[y] = (y \doteq c)$ ,  $\mathcal{B} \models \varphi[c^{\mathcal{B}}] \Rightarrow$  es gibt  $a \in A$  mit  $a = c^{\mathcal{B}}$ .

Beh.:  $A$  ist unter den Funktionen  $f^{\mathcal{B}}$  abgeschlossen, für jedes Funktionszeichen  $f \in \mathcal{L}$ .

Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y] = (y \doteq f(x_1, \dots, x_n)) \checkmark$

Für  $R \in \mathcal{L}$   $m$ -stellig setze  $R^{\mathcal{A}} = A^m \cap R^{\mathcal{B}} \longrightarrow$  somit bildet  $A$  eine  $\mathcal{L}$ -Unterstruktur  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{B}$ .

Noch zu zeigen:  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ , d. h.  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$   $\mathcal{L}$ -Formel.

Seien dazu  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad (3)$$

Induktiv über den Aufbau von  $\varphi$ .

$\varphi$  ist atomar  $\longrightarrow \checkmark$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] & \Leftrightarrow & \mathcal{B} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] & & \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \end{array}$$

$\varphi = \neg\psi \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$ :  $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A$  sodass  $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$  für ein  $a \in A \subset B \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt  $b \in B$  mit  $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xRightarrow{2} \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A$  mit  $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{3} \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .

Für „insbesondere“: Angenommen, dass  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Dann:  $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$  für ein  $b \in B \Rightarrow \mathcal{B} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{A} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A$  mit  $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$   
□

**Proposition 2.2** (aufwärts Löwenheim-Skolem)

Sei  $\mathcal{A}$  eine unendliche  $\mathcal{L}$ -Struktur, und  $\kappa < \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$ . Dann gibt es eine elementare  $\mathcal{L}$ -Erweiterung  $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}$  der Mächtigkeit  $\kappa$ .

*Beweis.*  $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$ , wobei  $\{c_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$  eine Menge neuer Konstantenzeichen ist, ist konsistent weil sie endlich konsistent<sup>4</sup> ist.

Aus der Konstruktion von Henkin hat  $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$  ein Modell der Mächtigkeit der Sprache.

$\rightarrow$  ein Modell der Mächtigkeit  $\kappa$  □

*Bemerkung:*  $|A| = n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A} \Rightarrow |B| = n$

**Proposition 2.3** (abwärts Löwenheim-Skolem)

Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $S \subset B$  beliebig. Dann gibt es eine elementare Unterstruktur  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  mit  $A \supset S$  und  $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$ .

*Bemerkung:*  $\mathbb{C}$  in der Ringsprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ ,  $S = \emptyset \Rightarrow$  es gibt eine abzählbare elementare Unterstruktur von  $\mathbb{C}$ .  $\rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \preceq \mathbb{C}$ .

---

<sup>4</sup>Kompaktheit



### 3 Quantorenelimination

*Beweis 2.3.* Setze  $S_0 = S$ . Angenommen  $S_k$  wurde bereits konstruiert, wähle für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  und Elemente  $a_1, \dots, a_n \in S_k$  ein Element  $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in B$  derart, dass  $\mathcal{B} \models ((\exists y \in \varphi)[a_1, \dots, a_n] \rightarrow \varphi[a_1, \dots, a_n, a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]}])$ . Setze  $S_{k+1} = S_k \cup \{a_{\varphi}\}_{\varphi \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel}, (a_1, \dots, a_n) \in S_k}$

Definiere  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \supset S$ . Wir überprüfen, dass  $A$  den Test von Tarski erfüllt. Sei  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$  für ein  $b \in B \Rightarrow$  es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $a_1, \dots, a_n \in S_k \Rightarrow$  es gibt ein  $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in S_{k+1} \subset A$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$

Ferner ist  $|A| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |S|\}$ . □

#### Folgerung 2.4

Sei  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine gerichtete Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen, sodass für  $i \leq j$  ist  $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$ . Dann ist  $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$  eine elementare Erweiterung jeder  $\mathcal{A}_i$ .

*Beweis.* Wir beweisen induktiv über den Aufbau von  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$ , dass für alle  $i \in I$ , für alle  $a_1, \dots, a_n \in A_i$ :  $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .

$\varphi$  atomar  $\rightarrow$  klar, denn  $\mathcal{A}_i \subset_{US} \mathcal{A}$

$\varphi = \neg \varphi \Rightarrow$  ok!

$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow$  ok!

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$ :  $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A_i$  mit  $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$   
 $\Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$   
ind. über  $\psi$

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $b \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$  mit  $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \Rightarrow$  es gibt  $j \in I$  mit  $b \in A_j \Rightarrow$  es existiert  $k \in I$  mit  $i \leq k, j \leq k, a_1, \dots, a_n, b \in A_k$   
 $\Rightarrow \mathcal{A}_k \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xRightarrow{\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_k}$  es gibt ein  $a \in A_k$  mit  $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ . □

## 3 Quantorenelimination

#### Definition 3.1

Eine Theorie  $T$  hat Quantorenelimination, falls jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  äquivalent

### 3 Quantorenelimination

modulo  $T$  zu einer quantorenfreien  $\mathcal{L}$ -Formel  $\psi[x_1, \dots, x_n]$  ist.

$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow \psi[x_1, \dots, x_n])$$

#### Beispiel 3.2

Sei  $\mathcal{L} := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$  gegeben. Betrachte die Menge  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und es gibt } x \in \mathbb{R} \text{ mit } ax^2 + bx + c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0\}$ .

Diese Formel ist in  $\mathcal{L}$  nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel, in  $\mathcal{L}_1 := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$  hingegen doch. Somit ist die Menge in  $\mathcal{L}_1$  quantorenfrei.

*Bemerkung:* • Wenn  $T$  inkonsistent ist, dann hat  $T$  immer Quantorenelimination

- Wenn  $T$  Quantorenelimination hat, und  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  mit  $\mathcal{A} \subseteq_{\text{US}} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  Übung

**Definition 3.3** • Eine einfache Existenzformel ist eine Formel der Form  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$

- Eine primitive Existenzformel ist eine Formel der Form  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \psi[x_1, \dots, x_n, y]$ , wobei  $\psi$  eine endliche Konjunktion von atomaren Formeln und Negationen ist

#### Lemma 3.4

Eine (konsistente) Theorie  $T$  hat genau dann Quantorenelimination, wenn jede primitive Existenzformel zu einer quantorenfreien Formel äquivalent modulo  $T$  ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: klar

„ $\Leftarrow$ “: Beachte,  $\exists y(\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\exists y\psi_1 \vee \exists y\psi_2)$ . Insbesondere, wenn  $T$  Quantorenelimination für primitive Existenzformeln hat, dann hat  $T$  Quantorenelimination für einfache Existenzformeln.

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & = \exists y \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n]}_{\text{umschreiben in DNF}} & \sim \exists y(\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n) & \sim & \underbrace{\bigvee_{i=1}^n \exists y\psi_i}_{\text{primitive Existenzformel}} \\ \text{einfache Existenzformel} & & & & \end{array}$$

Zu zeigen: Jede beliebige Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  ist äquivalent zu einer quantorenfreien Formel modulo  $T$ .

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] \underbrace{\sim}_{\substack{\text{pränexe} \\ \text{Normalform}}} Q_1 y_1 \dots Q_m y_m \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\text{quantorenfrei}}, \text{ wobei } Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

Induktion über  $m$ :

### 3 Quantorenelimination

$m = 0$ : ✓

$m = 1$ :  $\varphi = Q \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y]}_{\text{quantorenfrei}}$

$Q = \exists$   $\varphi$  einfache Existenzformel ✓

$Q = \forall$   $\varphi \sim \neg \underbrace{\exists y \neg \psi}_{\substack{\text{einfache} \\ \text{Existenzformel}}} \rightarrow \text{eliminieren} \rightarrow \checkmark$

$m - 1 \rightarrow m$ :  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots \underbrace{Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\varphi'[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}$ .  $\varphi'$  ist eine einfache Existenzformel, wir eliminieren also:

$\underbrace{m-1 \text{ viele Quantoren}} \underbrace{\Theta[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}_{\text{quantorenfrei}}$

$\Rightarrow$  Induktion

□

#### Beispiel 3.5

Sei  $\mathcal{K} = \{\text{unendliche Mengen}\}$ . Diese Klasse lässt sich definieren durch die Theorie  $T = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j=1}^n \neg(x_i \doteq x_j))\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Diese Theorie ist vollständig! Betrachte jetzt die  $\exists^\infty x$  definierbaren Mengen:

$$\{b \in A \mid \mathcal{A} \models \underbrace{\varphi}_{\text{quantorenfrei}}[b, a_1, \dots, a_m]\}$$

$\downarrow$   
endlich oder koendlich

#### Lemma 3.6 (Trennungslemma)

Seien  $T_1$  und  $T_2$  zwei  $\mathcal{L}$ -Theorien, und  $\Delta$  eine Kollektion von  $\mathcal{L}$ -Aussagen, welche unter endlichen Konjunktionen und Disjunktionen abgeschlossen ist. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- 1) Es gibt eine Aussage  $\chi \in \Delta$  mit  $T_1 \models \chi$
- 2) Für alle  $\mathcal{A} \models T_1$ ,  $\mathcal{B} \models T_2$  gibt es eine Aussage  $\chi \in \Delta$  mit  $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg \chi$

*Bemerkung:* Das ganze ist trivial für inkonsistente Theorien.

*Beweis.* 1  $\Rightarrow$  2: trivial!

### 3 Quantorenelimination

2  $\Rightarrow$  1: OBdA  $T_1, T_2$  konsistent. Sei  $\mathcal{A} \models T_1$ , setze  $\Sigma_{\mathcal{A}} = \{\chi, \chi \text{ Aussagen in } \Delta \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$ .

Betrachte jetzt  $T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}}$ . Ist diese Theorie konsistent? Nein: Wäre  $\mathcal{B} \models T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow$  es gibt  $\chi \in \Delta$  mit  $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi \Rightarrow \chi \in \Sigma_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{B} \models \chi$ . Widerspruch!

Das bedeutet (wegen Kompaktheit), dass es  $\chi_1, \dots, \chi_r \in \Sigma_{\mathcal{A}}$  gibt mit  $T_2 \cup \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$  inkonsistent.

$$\Leftrightarrow T_2 \models \bigvee_{i=1}^r \neg\chi_i \Rightarrow T_2 \models \neg\left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ =\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta}}^r \chi_i\right)$$

Das heißt für jedes  $\mathcal{A} \models T_1$  gibt es  $\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta$  mit  $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}}$  und  $\mathcal{A} \models \chi_{\mathcal{A}}$ .

Sei nun  $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}}\}_{\mathcal{A} \models T_1} \cdot^5 \Leftrightarrow$  inkonsistent nach Konstruktion.

$\xRightarrow{\text{Kompaktheit}}$  es existieren  $\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}$  mit  $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}\}$  inkonsistent. Also:

$$T_1 \models \bigvee_{j=1}^n \chi_{\mathcal{A}_j} =: \chi \in \Delta$$

$T_1 \models \chi$ . Wollen zeigen:  $T_2 \models \neg\chi$ . Aber  $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}_i}, 1 \leq i \leq n$ . □

#### Folgerung 3.7

Zwei Theorien  $T_1$  und  $T_2$  werden von einer quantorenfreien Aussage getrennt, wenn je zwei Modelle  $\mathcal{A} \models T_1$  und  $\mathcal{B} \models T_2$  von einer quantorenfreien Aussage getrennt werden.

$$\rightarrow \exists \chi \text{ quantorenfrei} : \mathcal{A} \models \chi \text{ und } \mathcal{B} \models \neg\chi$$

#### Satz 3.8

Sei  $T$  eine Theorie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1)  $T$  hat Quantorenelimination.
- 2) Gegeben Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  und endlich erzeugte Unterstrukturen  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ ,  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} = \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ , wobei  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$  und  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  eine Formel. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow {}^6 \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

- 3) Gegeben Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  mit isomorph erzeugten Unterstrukturen  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$  wie in 2) und für alle  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  primitive Existenzformel, gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

<sup>5</sup>Ist das überhaupt eine Menge? Es genügt die Einschränkung bis auf Isomorphie, das sollte reichen. . .

<sup>6</sup>Durch vertauschen von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  gilt hier sogar  $\Leftrightarrow$ .

### 3 Quantorenelimination

Ferner, falls  $T$  konsistent ist, 1) gilt und je zwei Modelle von  $T$  isomorphe endlich erzeugte Unterstrukturen besitzen, dann ist  $T$  vollständig mit Quantorenelimination.

*Bemerkung:* Wie benutzen wir diesen Satz? Letztlich wollen wir Back-&-Forth-Äquivalenz zeigen.

*Beweis.* 1)  $\Rightarrow$  2): Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ .  $T$  hat Quantorenelimination  $\leftarrow$  es gibt  $\psi[x_1, \dots, x_n]$  quantorenfrei mit:  $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \psi[\vec{x}])$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \mathcal{A} \models T & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{C} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \psi \text{ quantorenfrei} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{D} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{C} \approx \mathcal{D} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{B} \models T &
 \end{array}$$

2)  $\Rightarrow$  3): klar.

3)  $\Rightarrow$  1): Um zu zeigen, dass  $T$  Quantorenelimination besitzt, genügt es nur primitive Existenzformeln  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  zu betrachten.

Seien dazu  $e_1, \dots, e_n$  neue Konstantenzeichen. Betrachte die Sprache  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ , sowie die Theorien  $T_1 = T \cup \{\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$  und  $T_2 = T \cup \{\neg\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$ .

Falls  $T_1$  und  $T_2$  durch eine quantorenfreie Aussage  $\underbrace{\psi[e_1, \dots, e_n]}_{\substack{\text{quantorenfreie} \\ \mathcal{L}\text{-Formel}}}$  in  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$  trennbar sind, so folgt:

$$\begin{array}{ll}
 T \cup \{\varphi[\vec{e}]\} \models \psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\} \models \neg\psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\neg\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 \Rightarrow T = (\psi[\vec{e}] \rightarrow \varphi[\vec{e}]) & \Rightarrow \underset{\text{Aufgabe}^7}{T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}})}
 \end{array}$$

Sonst, falls also  $T_1, T_2$  nicht trennbar sind, gibt es zwei Modelle  $\mathcal{A} \models T_1 \cup \{\varphi[\vec{e}]\}, \mathcal{B} \models T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\}$ , welche alle quantorenfreien Aussagen in  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$  gleich erfüllen.

Seien  $c_1 = e_1^{\mathcal{A}}, d_i = e_i^{\mathcal{B}}$ . Betrachte jetzt  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{A} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$  und  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{B} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$ . Es gilt:  $\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$  und  $\mathcal{B} \models \neg\varphi[d_1, \dots, d_n]$ .

<sup>7</sup>weil  $e_1, \dots, e_n$  neue Konstantenzeichen sind

## 4 Beispiele klassischer Theorien

Um einen Widerspruch zu bekommen genügt es zu zeigen, dass  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}, c_i \mapsto d_i$ .

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow D : \\ \underbrace{t^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n]}_{\mathcal{L}\text{-Term}} &\mapsto t^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \end{aligned}$$

Ist diese Abbildung wohldefiniert?

$$\begin{aligned} \text{Angenommen } t_1^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] &= t_2^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] \\ \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{als } \mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}\text{-Struktur}} &\models \underbrace{(t_1[e_1, \dots, e_n] \doteq t_2[e_1, \dots, e_n])}_{\text{quantorenfreie Aussage}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{B} &\models (t_1[\vec{e}] \doteq t_2[\vec{e}]) \\ \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] &= t_2^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \\ \longrightarrow &\text{wohldefiniert und injektiv} \end{aligned}$$

induktiv über den Aufbau zeigen wir: Das ist ein Isomorphismus.

Zu „ferner“: Angenommen  $T$  hat Quantorenelimination, ist konsistent und je zwei Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  haben isomorphe, endlich erzeugte Unterstrukturen

$$\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \overset{\subseteq \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \overset{\subseteq \mathcal{B}}{\simeq} \overset{c_i \mapsto d_i}{\mathcal{D}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$$

$T$  ist vollständig  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ . Sei  $\chi$  eine  $\mathcal{L}$ -Aussage und schreibe  $\chi = \chi[x_1, \dots, x_n]$ .

$$\mathcal{A} \models \chi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \chi[c_1, \dots, c_n] \overset{2)}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \models \chi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \chi$$

□

## 4 Beispiele klassischer Theorien

### Beispiel 4.1

$T = \exists^\infty$  hat Quantorenelimination und ist vollständig.

### Beispiel 4.2

DLO (dichte lineare Ordnung ohne Randpunkte). Sei  $\mathcal{L} = \{<\}$ .

$$\begin{aligned} \text{DLO} = & \{ \forall x (\neg x < x) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y ((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \exists z ((x < y) \rightarrow (x < z < y)) \} \\ & \cup \{ \forall x \exists u \exists v (u < x < v) \} \\ & \cup \{ \exists x (x = x) \} \end{aligned}$$

Diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination. Es gibt zwei Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

1)

$$\begin{aligned}\varphi[x_1, \dots, x_n] &= \exists y \left( \bigwedge_i \overbrace{\Theta_i[x_1, \dots, x_n, y]}^{\text{atomar oder Negation davon}} \right) \\ &= \exists y (\psi_1[x_1, \dots, x_n] \wedge \bigwedge_i \bigwedge_{\substack{x_i=y \\ x_i \neq y \\ x_i < y \\ y < x_i}} \dots)\end{aligned}$$

$$x_i = y \wedge x_j = y \Leftrightarrow x_i = x_j$$

$$x_i = y \wedge y < x_j \Leftrightarrow x_i < x_j \longrightarrow \text{induktiv lassen sich alle Quantoren eliminieren}$$

2) Gegeben  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$ , mit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Isomorphismus und  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \text{DLO}$ .

OBdA wähle  $c_1 < c_2 < \dots < c_n \xrightarrow{F} d_1 < d_2 < \dots < d_n$ .  $\longrightarrow F$  in Back-&-Forth-System.

1. Fall:  $a < c_1 \rightarrow$  wähle  $b < d_1$  in  $\mathcal{B}$ , weil  $d_1$  kein Randpunkt ist.
2. Fall:  $a > c_n \rightarrow$  wähle  $b < c_n$  in  $\mathcal{B}$ , weil  $d_i$  kein Randpunkt ist.
3. Fall:  $\exists i \mid c_i < a < c_{i+1} \rightarrow$  wähle  $b$  zwischen  $d_i$  und  $d_{i+1}$  weil  $\mathcal{B}$  dicht ist.

Vollständigkeit folgt, weil Unterstruktur und Punkt zu Punkt.

#### Beispiel 4.3 (Vektorraum)

Sei  $K$  ein Körper,  $\mathcal{L}_{\text{VR}} = \{0, +, f_\lambda\}_{\lambda \in K}$ . Dann ist die Theorie  $T \underset{\text{unendliche } K\text{-VR}}{\parallel} = \{ \forall x \forall y \forall z \dots \} \dots^8$

vollständig und hat Quantorenelimination.

Wie zuvor gibt es zwei verschiedene Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

1) Betrachte die folgende primitive Existenzformel:

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \left( \bigwedge_{\text{endlich}} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_y \dot{=} 0) \wedge \bigwedge_{\text{endlich}} \neg(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n \dot{=} 0) \right)$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

---

<sup>8</sup>diese Theorie ist axiomatisierbar, für eine beispielhafte Axiomatisierung vergleiche Klausur zu mathematische Logik im SS 2019.

#### 4 Beispiele klassischer Theorien

$$1) \text{ Alle } \lambda \text{ vor der Variable } y \text{ sind Null} \rightarrow \underbrace{\bigwedge_{\text{endlich}} \lambda x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0}_{\psi[x_1 \dots x_n]}$$

2) *Es gibt ein  $\lambda \neq 0$ . Dann gilt OBdA:  $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ . Ersetze jetzt jedes Vorkommen von  $y$  durch  $\tilde{\lambda}_1 x_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n x_n$ . Erhalte eine quantorenfreie Bedingung in  $x_1, \dots, x_n$ .*

2) (semantisch)

Ansatz:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & ? & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \\ \langle 2 \rangle & \simeq & \langle (3, 7) \rangle \end{array}$$

Wir brauchen also:  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  unendlichdimensional, um ein Back & Forth-System zu konstruieren. Es sei dazu

$$\tilde{\mathcal{A}} \succeq \mathcal{A} \supset \langle c_1, \dots, c_n \rangle \simeq \langle d_1, \dots, d_n \rangle \subset \mathcal{B} \preceq \tilde{\mathcal{B}}$$

für  $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$  unendlichdimensional.

Insbesondere gilt jetzt auch:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$$

Angenommen  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle \xrightarrow{F} \langle d_1, \dots, d_n \rangle$  liegt in einem Back & Forth-System zwischen  $\tilde{\mathcal{A}}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Dann folgt insbesondere auch:

$$\tilde{\mathcal{B}} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

Es ergeben sich also die folgenden beiden Fragen:

1) Finden wir ein Back & Forth-System zwischen  $\tilde{\mathcal{A}}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}$ ?

Angenommen also wir haben  $\tilde{\mathcal{A}}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}$  bereits konstruiert. Zeige: Es gibt ein Back & Forth-System.

$c \in \text{UR}$ : trivial.

$c \notin \text{UR}$ :  $\dim_K \tilde{\mathcal{B}} = \infty \geq n + 1 \rightarrow$  es gibt ein  $d \notin \langle d_1, \dots, d_n \rangle \Rightarrow G$  die Erweiterung

$$\begin{array}{ccc} \langle c_1, \dots, c_n \rangle & \longrightarrow & \langle d_1, \dots, d_n \rangle \\ c_i & \longmapsto & d_i \\ c & \longmapsto & d \end{array}$$



2) Zur Existenz von  $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ :

So funktioniert es nicht:  $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{ \exists x \exists y \neg(\lambda x + \mu y \dot{=} 0) \}_{\substack{\lambda, \mu \in K \\ (\lambda, \mu) \neq (0,0)}}$ .

Seien  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  neue Konstantenzeichen.

$$\underbrace{\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{ \neg \sum_i \lambda_i e_i \dot{=} 0 \}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}}}_{\text{endlich konsistent}}$$

Zur Vollständigkeit: Das endliche Erzeugnis zweier nicht-trivialer Vektoren ist Isomorph, somit folgt Vollständigkeit.

**Beispiel 4.4**

ACF Wir betrachten jetzt die Theorie algebraisch abgeschlossener Körper (ACF) in der Ringsprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ .

$$\text{ACF} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Körperaxiome} \\ \{ \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists y (y^k + x_{k-1}y^{k-1} + \dots + x_1y + x_0 \dot{=} 0) \}_{k \geq 1} \end{array} \right.$$

ACF hat Quantorenelimination, ist aber nicht vollständig. Die Vervollständigungen sind

$$\underbrace{\text{ACF}_0}_{1+1+\dots+1 \dot{=} 0} \quad \text{und} \quad \underbrace{\text{ACF}_p}_{\substack{1+\dots+1 \dot{=} 0 \\ p\text{-Mal}}} \quad \text{für jede Primzahl } p.$$

**Satz 4.5** (Kurzeinführung Galois'sche Theorie)

*Beweis 4.4.* Betrachte OBdA die Abbildung

$$F = \text{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle) \longrightarrow \text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$$

Fall 1:  $a$  ist algebraisch über  $K$

$\hookrightarrow$  sei  $m_a(T)$  das Minimalpolynom von  $a$  über  $K$ .  $F(m_a)(T)$  ist ein normiertes Polynom über  $\text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle) \subset B$ .

$B$  ist algebraisch abgeschlossen  $\Rightarrow$  es gibt  $b$  in  $B$  mit  $F(m_a)(b) = 0 \xRightarrow{\text{Galoistheorie}} F$  lässt sich erweitern.

Fall 2:  $a$  ist transzendent über  $K = \text{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle)$ .

Wenn wir ein  $b \in B$  finden, welches transzendent über  $\text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$  ist

$$\hookrightarrow \text{Ring}_A(K, a) \simeq \text{Ring}_B(F(K), b)$$

Ziel: Wir brauchen  $\mathcal{A} \preceq \tilde{\mathcal{A}}$  mit unendlich vielen Elementen, welche algebraisch unabhängig sind.

$$\underbrace{\text{Diag}(A) \cup \{\neg(B(e_1, \dots, e_n) \doteq 0)\}_{\substack{P \in A[T_1, \dots, T_n] \setminus \{0\} \\ P(e_1, \dots, e_n) \neq 0}}}_{\text{endlich konsistent}}$$

□

## 5 Ultrafilter & der Satz von Ax

Anwendung: Wir wollen eine Aussage der folgenden Art bekommen: Sei  $f : \mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C}$ .  
 $\rightarrow f$  ist surjektiv, aber nicht injektiv.

**Satz 5.1** (Ax)

Sei  $f : \mathbb{C}^n \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C}^n$  eine polynomiale<sup>9</sup> injektive Abbildung. Dann ist  $f$  surjektiv.

Motivation: Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p$ . Für einen Körper der Charakteristik  $p$  bekommen wir dann:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{g}} \xrightarrow{\text{wirkt}} \underbrace{K}_{\substack{\text{Körper der} \\ \text{Charakteristik} \\ p}} \longrightarrow K$$

$$x \longmapsto \underbrace{1 + \dots + 1}_{g\text{-Mal}} + x$$

$$\rightarrow h + (g + x) = (h + g) + x$$

Für einen Körper der Charakteristik 0:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{k}} \xrightarrow{\text{wirkt}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\underbrace{\mu_p}_{\substack{p\text{-te Einheits-} \\ \text{wurzel in } \mathbb{C}}} = \{e^{\frac{2\pi i k}{p}}\}_{0 \leq k < p} \quad z \longmapsto \omega z$$

$$\rightarrow \omega_1(\omega \cdot z) = (\omega_1 \omega) \cdot z$$

**Satz 5.2** (Lefschetz'sches Prinzip)

Eine Aussage  $\chi$  in der Ringsprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$  gilt für  $\mathbb{C}$  genau dann, wenn es unendlich viele Primzahlen  $p$  derart gibt, dass  $\chi$  in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik  $p$  gilt.

<sup>9</sup>polynomial bedeutet, dass jede Koordinate der Abbildung durch Polynome gegeben ist.

*Beweis von Satz 5.1 (Satz von Ax).* Sei  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  injektiv. Die Aussage „ $f$  injektiv  $\Rightarrow f$  surjektiv“ lässt sich als  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Aussage schreiben.

D. h. es genügt zu zeigen, dass diese Aussage für alle Körper  $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$  gilt.

Was ist  $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ ? Ein algebraischer abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$ .

Galoistheo.

$$\mathbb{F}_p^{\text{alg}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n, \text{ wobei } F_n \subset F_{n+1} \text{ endliche Körper mit Charakteristik } p.$$

$$F_1 = \{0, 1\}$$

$$F_2 = \dots$$

$$\vdots$$

Sei nun  $g : (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n \rightarrow (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$  eine surjektive polynomiale Abbildung.

Zeige:  $g$  ist surjektiv. Sei  $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$ . Dann gibt es ein  $N$ , sodass  $b_i \in \mathbb{F}_n$  für  $\mathbb{F}_n$  endlich.

Ferner können wir  $N$  so wählen, dass alle Koeffizienten aus  $g$  in  $\mathbb{F}_n$  liegen.

$$\begin{array}{ccc} g|_{\mathbb{F}_N^n} : \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} & \longrightarrow & \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} \text{ ist injektiv (geerbt)} \\ & & \Downarrow \text{endlich} \\ & & \text{surjektiv} \end{array}$$

□

*Beweis vom Prinzip von Lefschetz (Satz 5.2).* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $\chi$  eine  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Aussage derart, dass  $\mathbb{C} \models \chi$ . Dann ist  $\underbrace{\text{ACF}_0}_{\text{alle elementar äquivalent}} \cup \{\neg\chi\}$  inkonsistent, weil  $\text{ACF}_0$  vollständig ist.

Dann gibt es eine endliche Teilmenge  $T_0 \subset \text{ACF}_0 \cup \{\neg\chi\}$ , welche inkonsistent ist.  
 $\Rightarrow$  Es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$  sodass:

$$T_0 \subset \underbrace{\text{ACF} \cup \{\neg(\underbrace{1 + \dots + 1}_k \doteq 0)\}_{k < N}}_{\text{inkonsistent}} \cup \{\neg\chi\}$$

Für  $p > N$  eine Primzahl:  $\text{ACF}_p \models \chi$

„ $\Leftarrow$ “  $\rightsquigarrow$  Ultrafilter und Satz von Łoś

□

Exkurs: Sei im Folgenden  $I \neq \emptyset$ .

**Definition 5.3**

Ein Ultrafilter  $\mathcal{U}$  auf  $I$  ist ein endlich additives Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \{0, 1\}$$

*Bemerkung:* Die Definition entspricht der von Blatt 1 Aufgabe 3, denn:

- 1)  $\mu_{\mathcal{U}}(I) = 1, \mu_{\mathcal{U}}(\emptyset) = 0$ .
- 2)  $\mu_{\mathcal{U}}(X) = 1 \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$   
 $X \subset Y \subset I$
- 3) Angenommen  $\mu_{\mathcal{U}}(X) = \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$  aber  $\mu_{\mathcal{U}}(X \cap Y) = 0$ . Dann gilt  $X = X \setminus Y \dot{\cup} X \cap Y \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(X \setminus Y) = 1$  und  $\mu_{\mathcal{U}}(Y \setminus X) = 1$ , sowie  $I \supset X \cup Y = X \setminus Y \dot{\cup} Y \setminus X \dot{\cup} X \cap Y$ .  
 $\rightsquigarrow \mu_{\mathcal{U}}(I) = 1 \geq 1 + 1 + 0$ , ein Widerspruch.
- 4) Gegeben  $X \subset I$  entweder  $X \in \mathcal{U}$  oder  $I \setminus X \in \mathcal{U}$   
 $\mu_{\mathcal{U}}(X)=1$   $\mu_{\mathcal{U}}(I \setminus X)=1$

**Definition 5.4**

Ein Hauptultrafilter ist ein Maß der Form  $\delta_x$  für ein  $x \in I$ .

**Definition 5.5**

Falls  $I$  unendlich ist, so gibt es generisch/reiche Ultrafilter, nämlich die Ultrafilter, welche alle koendlichen Mengen enthalten.

**Definition 5.6**

Angenommen  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  ist eine  $\mathcal{L}$ -Struktur. Sei ferner  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter. Definiere eine Äquivalenzrelation<sup>10</sup> auf  $\prod_{\mathcal{U}} A_i$ :

$$\underbrace{\prod_{\mathcal{U}} A_i}_{\text{kartesisches Produkt}}$$

$$(a_i)_{i \in I} \sim_{\mathcal{U}} (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{U} \iff \mu_{\mathcal{U}}(\{i \in I \mid a_i = b_i\}) = 1$$

**Definition 5.7**

Sei  $\prod_{\mathcal{U}} A_i$  die Menge  $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$ . Wir definieren Interpretationen der Symbole aus  $\mathcal{L}$  auf  $\prod_{\mathcal{U}} A_i$ :

- Sei  $c \in \mathcal{L}$  ein Konstantenzeichen. Definiere:

$$c^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} = (c^{\mathcal{A}_i})_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

---

<sup>10</sup>vergleiche dazu Blatt 1, Aufgabe 3

- Sei  $f \in \mathcal{L}$  ein  $n$ -stelliges Funktionszeichen. Definiere:

$$f^{\prod_{\mathcal{U}} A_i}([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}) = (f^{A_i}(a_1^i, \dots, a_n^i))_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

Ist das wohldefiniert? Ja, denn fast überall gleich.

- Sei  $\mathcal{R}$  ein  $m$ -stelliges Relationszeichen auf  $\mathcal{L}$ . Definiere:

$$([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_m]_{\mathcal{U}}) \in \mathcal{R}^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} \iff \{i \in I \mid (a_1^i, \dots, a_m^i) \in \mathcal{R}^{A_i}\} \in \mathcal{U}$$

Wenn  $\mathcal{U}$  ein Hauptfilter ist, dann ist er erzeugt vom Element  $\{i_0\}$ .

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}\text{-Struktur} \\ \overbrace{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i}^{\varphi} \rightarrow \mathcal{A}_{i_0} \text{ ist ein Isomorphismus} \\ (a_i)_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}} \mapsto a_{i_0} \end{array}$$

### Definition 5.8

Wenn  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter ist, dann ist  $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}$  die Ultrapotenz.

### Beispiel 5.9

Sei  $\mathcal{U}$  ein reicher/generischer Ultrafilter auf  $\mathbb{N}$ . Betrachte  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$ .

$$\mathcal{N}^{\mathcal{U}} \ni (1, 2, 3, \dots) / \sim_{\mathcal{U}} > (1, 1, 1, \dots) / \sim_{\mathcal{U}}$$

### Satz 5.10 (Satz von Łoś)

Sei  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $I$ ,  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen,  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel und  $[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}} \in \prod_{\mathcal{U}} A_i$ . Dann gilt:

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \iff \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1^i, \dots, a_n^i]\} \in \mathcal{U}$$

*Beweis.* Induktiv über den Aufbau von  $\varphi$ . Sei  $\varphi = (t_1 \dot{=} t_2)$ . Dann gilt:

$$\begin{array}{l} \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \models (t_1[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \dot{=} t_2[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}]) \\ \iff t_1^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i} [[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \dot{=} t_2^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i} [[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \\ \stackrel{\text{induktiv über den Aufbau}}{\iff} \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models t_1[a_1^i, \dots, a_n^i] \dot{=} t_2[a_1^i, \dots, a_n^i]\} \in \mathcal{U} \end{array}$$

□

**Folgerung 5.11**

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $I$ . Betrachte  $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}$ . Das ist eine elementare Erweiterung von  $\mathcal{A}$  bezüglich der Abbildung  $A \longrightarrow \prod_{\mathcal{U}} A$ .  
 $a \longmapsto (a)_{i \in I / \sim_{\mathcal{U}}}$

Einbettung,  
injektiv

*Beweis.* Sei  $\varphi$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Zu zeigen ist:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{A}_i^{\mathcal{U}} \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}]$$

„ $\Rightarrow$ “: Mit Satz von Łoś gilt:

$$\mathcal{A}_i^{\mathcal{U}} \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \iff \{i \in I \mid \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\} \in \mathcal{U}$$

Da dieser Ausdruck jedoch der gesamten Menge  $I$  entspricht, folgt die Behauptung direkt.

„ $\Leftarrow$ “: Die leere Menge liegt nicht in  $\mathcal{U}$ , also gibt es  $i$  sodass die Formel gilt, da diese jedoch von  $i$  unabhängig ist, gilt sie immer.  $\square$

*Beweis Lefschetz'sches Prinzip (5.2) „ $\Leftarrow$ “.* Sei

$$S = \left\{ p \text{ Primzahl} \mid \begin{array}{l} \text{ein algebraisch abgeschlossener Körper mit} \\ \text{Charakteristik } p \text{ erfüllt die Aussage } \chi \end{array} \right\}$$

Zeige:  $S$  ist unendlich. Sei  $P \subset \mathbb{N}$  Primzahlen. Betrachte jetzt

$$\mathcal{B} = \{X \cap S \subset P \mid X \subset P \text{ koendlich}\} \quad (4)$$

Ist  $\mathcal{B}$  eine Filterbasis?  $X \cap S = \emptyset$  ist endlich  $\iff S \subset P \setminus X$  unendlich, ein Widerspruch.

Weiter gilt  $(X_1 \cap S) \cap (X_2 \cap S) = \underbrace{(X_1 \cap X_2)}_{\text{koendlich}} \cap S$ .

$\xRightarrow{\text{Blatt 1}}$  es gibt einen Ultrafilter, welcher alle Elemente aus  $\mathcal{B}$  enthält.

Sei im Weiteren  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $P$ , welcher  $\mathcal{B}$  enthält.  $X \cap S \in \mathcal{U}$  ist für alle  $X \subset P$  koendlich.

$\hookrightarrow \mathcal{U}$  ist reich (kein Hauptultrafilter). Für  $p_0 \in P$  ist  $P \setminus \{p_0\}$  koendlich.  $\Rightarrow P \setminus \{p_0\} \cap S \in \mathcal{U}$ .

$\hookrightarrow S \in \mathcal{U}$

## 6 Typen

Sei  $K = \prod_{\mathcal{U}} K_p$ , wobei  $K_p$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$  ist derart, dass

$$\begin{cases} K_p \models \chi & p \in S \\ \text{egal}_{\text{bspw. } \mathbb{F}_p^{\text{alg}}} & p \notin S \end{cases}$$

1)  $K \models \text{ACF}_0$

2)  $K \models \chi$ , weil  $\{p \in P \mid K_p \models \chi\} \supset S \in \mathcal{U}$

$\text{ACF}_0$  ist vollständig  $\Rightarrow \mathbb{C} \models \chi$ . □

**Satz 5.12** (Kompaktheitssatz)

Eine Theorie  $T$  ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent ist.

*Beweis.* OBdA ist  $T$  unendlich. Sei  $I = \{\emptyset \neq S \subset T \text{ endlich}\}$ . Für  $s \in I$  gibt es eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}_s$ , sodass  $\mathcal{A}_s \models \chi$  für jedes  $\chi \in s$ . Sei weiter

$$B_s = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für jedes } \chi \in s\}$$

Ist  $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s \in I}$  eine Filterbasis?

1)  $\emptyset \neq B_s \ni s$

2)  $B_{s_1} \cap B_{s_2} = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für alle } \chi \text{ aus } s_2\} = B_{s_1 \cup s_2} \in \mathcal{B}!$

Sei  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $I$ , sodass  $B_s \in \mathcal{U}$  für jedes  $\emptyset \neq s \subset T$  endlich. Sei  $\mathcal{A} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_s$ .

Zu zeigen ist:  $\mathcal{A} \models T$  (sei  $\chi \in T$ , zeige  $\mathcal{A} \models \chi$ ).

$$\xLeftrightarrow{5.10} \underbrace{\{s \in T \mid \mathcal{A}_s \models \chi\}}_{B_{\{\chi\}}} \in \mathcal{U}$$

□

## 6 Typen

Sei im Folgenden  $\mathcal{L}$  eine Sprache und  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur.

**Definition 6.1**

Ein partieller Typ  $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$  mit Parametern aus  $B$  ist eine Kollektion von Formeln in der Sprache  $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$ , welche in der (kanonischen)  $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  endlich

## 6 Typen

erfüllbar ist, das heißt für alle  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \Sigma$  gibt es ein Tupel  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  mit  $\mathcal{A} \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n)$  für  $1 \leq i \leq m$ .

$\mathcal{A}$  realisiert  $\Sigma$ , falls es ein Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  gibt, sodass  $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$  für alle  $\varphi \in \Sigma$ . Sonst vermeidet  $\mathcal{A}$  den partiellen Typ  $\Sigma$ .  
übergeht

### Beispiel 6.2

Betrachte  $(\mathbb{R}, 0, <)$ . Sei  $\Sigma(x) = \{0 < x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}}$  ein partieller Typ.

Wird  $\Sigma$  realisiert oder vermieden?  $\rightsquigarrow$  vermieden

Sei jedoch  $\Sigma' = \{\sqrt{2} \leq x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > \sqrt{2}}}$ .  $\rightsquigarrow$  realisiert von  $\sqrt{2}$

Betrachte nun  $\Sigma$  auf  $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{R}$ . Hier realisiert  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$  den partiellen Typen  $\Sigma$ !

*Bemerkung:* Sei  $\mathcal{A}$  eine unendliche Struktur. Dann gibt es immer einen partiellen Typen, der vermieden wird:  $\{\neg(x \doteq a)\}_{a \in A}$ .