# Modelltheorie

**Wintersemester 2019/20**
**Mitschrift von Floris Remmert**

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Abteilung für mathematische Logik
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

9. Februar 2020

# Inhaltsverzeichnis

1 Erinnerung 1

I Theorien und Quantorenelimination 5

2 Tarskis Test 5

3 Quantorenelimination 8

4 Beispiele klassischer Theorien 13

5 Ultrafilter & der Satz von Ax 17

II Typen und Saturation 23

6 Typen 23

7 Exkurs: Einführung in die Topologie 26

8 Stoneraum von Typen einer Theorie 31

9 Typenvermeidungssatz und Isolation 35

10 Magere Mengen und Typenvermeidungssatz 38

III Total transzendente Theorien und Kategorizität 40

11 Primmodelle. Existenz und Eindeutigkeit 40

12 Saturation 47

13 Fraïssés Amalgamierungsmethode für $\aleph_0$-kategorische Theorien 56

14 Ununterscheidbare Folgen 62

14.1 Exkurs . . . . . . . . . . 68

Ziel dieser Vorlesung ist es, eine Aussage der folgenden Qualität zu erhalten:

**Satz 0.1** (Morleys Kategorizitätssatz)
Sei $T$ eine Theorie, welche ein einziges (bis auf Isomorphie) Modell der Mächtigkeit $\aleph_0$ besitzt. Dann besitzt $T$ für jede Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ ein einziges Modell der Mächtigkeit $\kappa$ (bis auf Isomorphie).

# 1 Erinnerung

**Definition 1.1**

- Eine Sprache $\mathcal{L}$ ist eine Kollektion von Konstanten-, Funktions-, und Relationszeichen

- Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ besteht aus einer nicht-leeren Grundmenge (oder Universum) $A$ zusammen mit Interpretationen der Symbole aus $\mathcal{L}$:

  - Für jedes Funktionszeichen $f$ der Stelligkeit $n$
$$f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$$

  - Für jedes Relationszeichen $R$ der Stelligkeit $m$
$$R^{\mathcal{A}} \subset A^m$$

- Eine Einbettung $F$ von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $F : A \longrightarrow B$, welche mit den Interpretationen kompatibel[1] ist

- Ein Isomorphismus ist eine surjektive Einbettung.

- $\mathcal{A}$ ist eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$, falls $A \subset B$ und die Inklusion $\iota : A \longrightarrow B$ eine Einbettung bestimmt

**Bemerkung 1.2**
Sei $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $\emptyset \neq A \subset B$. Dann gibt es eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$, welche von A erzeugt wird.

Das Universum besteht aus $A$ zusammen mit dem Abschluss von $A$ unter allen Interpretationen der Funktionszeichen von $\mathcal{L}$.

**Definition 1.3**
Sei $(I, <)$ eine partielle Ordnung. Die Ordnung ist gerichtet, falls für $i, j \in I$ gibt es $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

[1] das bedeutet, dass Funktions- und Relationszeichen bei Hin- und Rückrichtung erhalten bleiben

**Bemerkung 1.4**
Sei $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen indexiert nach der gerichteten partiellen Ordnung $I$ derart, dass für $i \leq j$ gilt: $\mathcal{A}_i \underset{US}{\subset} \mathcal{A}_j$.

Die Menge $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ ist das Universum einer (eindeutig bestimmten) $\mathcal{L}$-Struktur

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i \tag{1}$$

Falls $I$ eine lineare Ordnung ist, dann ist $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine <u>Kette</u>.

<u>Zu 1:</u>

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}_i}$ für ein (alle) $i \in I$, denn $c^{\mathcal{A}_i} = c^{\mathcal{A}_j} = c^{\mathcal{A}_k}$, wegen gerichteter Ordnung
- $a_1, \ldots a_n \in A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Longrightarrow \exists i \in I$ mit $a_1, \ldots, a_n \in A_i$. Also ist $f^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \ldots, a_n)$ wohldefiniert.
- $(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathcal{A}}$ genau dann, wenn es ein $i \in I$ gibt mit $a_1, \ldots, a_m \in A_i$ und $(a_1, \ldots, a_m) \in R^{\mathcal{A}_i}$

<u>Beachte</u>, dass $\mathcal{A}_i \underset{US}{\subset} \mathcal{A}$ für alle $i \in I$.

**Definition 1.5**
Eine atomare Formel ist ein Ausdruck der Form $(t_1 \doteq t_2)$, $t_1, \ldots, t_k$ Terme, $R(t_1, \ldots, t_k)$.

Die Kollektion von Formeln ist die kleinste Klasse, welche alle atomaren Formeln enthält und derart, dass:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ Formel} &\Longrightarrow \neg\varphi \text{ Formel} \\ \varphi, \psi \text{ Formel} &\Longrightarrow (\varphi \vee \psi) \text{ Formel} \\ \varphi \text{ Formel}, x \text{ Variable} &\Longrightarrow \exists x\varphi \text{ Formel, } (x \text{ heißt dann „gebunden“}) \end{aligned}$$

<u>Abk.:</u>

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi) &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \forall x\varphi &= \neg\exists x\neg\varphi \\ (\varphi \to \psi) &= (\neg\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &= ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.6**
- Jede Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ lässt sich in <u>pränexer Normalform</u> umschreiben: $Q_1y_1Q_2y_2 \ldots Q_my_m\psi[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$, mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Das ist eine quantorfreie Formel, diese lässt sich weiter zerlegen in KNF bzw. DNF.

- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine Aussage
- Eine Theorie ist eine Kollektion von Aussagen

**Beispiel 1.7**
Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Erweitere die Sprache zu der Sprache $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{d_a\}_{a \in A}$.

$\mathcal{A}$ ist eine $\mathcal{L}_A$-Struktur, $d_a^{\mathcal{A}} = a$.

- $\mathrm{Diag}^{\mathrm{at}}(\mathcal{A}) = \{$quantorenfreie $\mathcal{L}_A$-Aussagen $\chi$ mit $\mathcal{A} \models \chi\}$ heißt „atomares Diagramm"
- $\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{L}$-Aussagen $\theta$ mit $\mathcal{A} \models \theta\}$ heißt „vollständiges Diagramm"

Sei nun $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}_A$-Struktur.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \models \mathrm{Diag}^{\mathrm{at}}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} \text{ einbetten lässt} \\ &\quad A \longrightarrow B \\ &\quad a \mapsto d_a^{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} \models \mathrm{Diag}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \text{die obige Abbildung ist } \underline{\text{elementar}} \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] &\Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[F(a_1), \ldots, F(a_n)], a_1, \ldots a_n \in A, \varphi[x_1, \ldots, x_n] \text{ Formel} \end{aligned}$$

**Definition 1.8**
- $T$ ist konsistent, falls $T$ ein Modell besitzt.
- $T$ ist vollständig, falls $T$ konsistent ist und je zwei Modelle von $T$ elementar äquivalent sind.

**Satz 1.9** (Kompaktheitssatz)
Eine Theorie ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent[2] ist.

Wie zeigen wir, dass $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$?

**Satz 1.10** (Back & Forth)
$S = \{F : \underset{US}{\underset{\subset \mathcal{A}}{\mathcal{C}}} \longrightarrow \underset{US}{\underset{\subset \mathcal{B}}{\mathcal{D}}}, F$ partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ geeignet[3]$\}$.

Back: Für alle $F \in S$ und $b \in B$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $G \in S$ mit $G \supset F$ Erweiterung und $b \in \mathrm{Im}(G)$.

Forth: Für alle $F \in S$ und $a \in A$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $H \in S$, mit $H \supset F$ Erweiterung mit $a \in \mathrm{Dom}(H)$

[2] endlich konsistent bedeutet: jede endliche Teilmenge der Theorie besitzt ein Modell.
[3] bspw. endlich erzeugt

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen dann „Back & Forth äquivalent“

$\to$ ist jedes $F \in S$ <u>elementar</u>, so gilt insbesondere $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

# Teil I
# Theorien und Quantorenelimination

## 2 Tarskis Test

**Lemma 2.1** (Tarskis Test)
Sei $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $A \subset B$ Teilmenge derart, dass für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n \in A$:
falls:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, b] \text{ für ein } b \in B \Rightarrow \text{ existiert } a \in A \text{ sodass } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, a] \quad (2)$$

dann ist $A$ das Universum einer elementaren Unterstruktur von $\mathcal{B}$.

Insbesondere: Falls $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ Unterstruktur, ist $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow A$ erfüllt 2.

*Beweis.* Betrachte $A \neq \emptyset \rightarrow$ Betrachte $\varphi[y] = (y \dot{=} y)$. $B \neq \emptyset \rightarrow \exists b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[b]$. $\hookrightarrow \exists a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a]$

Beh.: Für jedes Konstantenzeichen $c \in \mathcal{L}$ ist $c^{\mathcal{B}} \in A$. $\hookrightarrow \varphi[y] = (y \dot{=} c)$, $\mathcal{B} \models \varphi[c^{\mathcal{B}}] \Rightarrow$ es gibt $a \in A$ mit $a = c^{\mathcal{B}}$.

Beh.: $A$ ist unter den Funktionen $f^{\mathcal{B}}$ abgeschlossen, für jedes Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$.

Sei $\varphi[x_1, \ldots, x_n, y] = (y \dot{=} f(x_1, \ldots, x_n))$ ✓

Für $R \in \mathcal{L}$ $m$-stellig setze $R^{\mathcal{A}} = A^m \cap R^{\mathcal{B}} \longrightarrow$ somit bildet $A$ eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$.

Noch zu zeigen: $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, d. h. $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ $\mathcal{L}$-Formel.

Seien dazu $a_1, \ldots, a_n \in A$.

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \quad (3)$$

Induktiv über den Aufbau von $\varphi$.

$\varphi$ ist atomar $\longrightarrow \checkmark$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \not\models \psi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow & & \mathcal{B} \not\models \psi[a_1, \ldots, a_n] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathcal{A} \models \varphi[a1, \ldots, a_n] & & \mathcal{B} \models \phi[a_1, \ldots, a_n] \end{array}$$

$\varphi = \neg\psi \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \ldots, x_n, y]$: $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ sodass $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, a]$ $\underset{3}{\Rightarrow} \mathcal{B} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, a]$ für ein $a \in A \subset B \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow$ es gibt $b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, b] \underset{2}{\Rightarrow}$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, a] \underset{3}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

Für „insbesondere“: Angenommen, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. Sei $\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]$ eine $\mathcal{L}$-Formel, $a_1, \ldots, a_n \in A$. Dann: $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, b]$ für ein $b \in B \Rightarrow \mathcal{B} \models (\exists y \varphi)[a_1, \ldots, a_n]$ $\underset{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models (\exists y \varphi)[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, a] \underset{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}}{\Rightarrow} \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, a] \checkmark$ □

**Proposition 2.2** (aufwärts Löwenheim-Skolem)
Sei $\mathcal{A}$ eine unendliche $\mathcal{L}$-Struktur, und $\kappa < \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$. Dann gibt es eine elementare $\mathcal{L}$-Erweiterung $\mathcal{B} \geq \mathcal{A}$ der Mächtigkeit $\kappa$.

*Beweis.* $\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$, wobei $\{c_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ eine Menge neuer Konstantenzeichen ist, ist konsistent weil sie endlich konsistent[4] ist.

Aus der Konstruktion von Henkin hat $\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$ ein Modell der Mächtigkeit der Sprache.

$\rightarrow$ ein Modell der Mächtigkeit $\kappa$ □

**Bemerkung 2.3**
$|A| = n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A} \Rightarrow |B| = n$

**Proposition 2.4** (abwärts Löwenheim-Skolem)
Sei $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $S \subset B$ beliebig. Dann gibt es eine elementare Unterstruktur $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ mit $A \supset S$ und $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.

[4] Kompaktheit

**Bemerkung 2.5**
$\mathbb{C}$ in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$, $S = \emptyset \Rightarrow$ es gibt eine abzählbare elementare Unterstruktur von $\mathbb{C}$. $\rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \preceq \mathbb{C}$.

*Beweis 2.4.* Setze $S_0 = S$. Angenommen $S_k$ wurde bereits konstruiert, wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$, jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ und Elemente $a_1, \dots, a_n \in S_k$ ein Element $a_{\varphi[a_1,\dots,a_n,y]} \in B$ derart, dass $\mathcal{B} \models ((\exists y \in \varphi)[a_1, \dots, a_n] \rightarrow \varphi[a_1, \dots, a_n, a_{\varphi[a_1,\dots,a_n,y]}])$. Setze $S_{k+1} = S_k \cup \{a_\varphi\}_{\varphi \mathcal{L}\text{-Formel},\, (a_1,\dots,a_n) \in S_k}$

Definiere $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} S_k \supset S$. Wir überprüfen, dass $A$ den Test von Tarski erfüllt. Sei $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ eine $\mathcal{L}$-Formel, $a_1, \dots, a_n \in A$.

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$ für ein $b \in B \Rightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_1, \dots a_n \in S_k \Rightarrow$ es gibt ein $a_{\varphi[a_1,\dots,a_n,y]} \in S_{k+1} \subset A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a]$✓

Ferner ist $|A| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |S|\}$. □

**Folgerung 2.6**
Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen, sodass für $i \leq j$ ist $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$. Dann ist $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine elementare Erweiterung jeder $\mathcal{A}_i$.

*Beweis.* Wir beweisen induktiv über den Aufbau von $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$, dass für alle $i \in I$, für alle $a_1, \dots, a_n \in A_i$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

$\varphi$ atomar $\rightarrow$ klar, denn $\mathcal{A}_i \underset{US}{\subset} \mathcal{A}$

$\varphi = \neg\varphi \Rightarrow$ ok!

$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow$ ok!

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A_i$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$ $\underset{\text{ind. über } \psi}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $b \in A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ mit $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \Rightarrow$ es gibt $j \in I$ mit $b \in A_j \Rightarrow$ es existiert $k \in I$ mit $i \leq k$, $j \leq k$, $a_1, \dots, a_n, b \in A_k$
$\Rightarrow \mathcal{A}_k \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \underset{\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_k}{\Rightarrow}$ es gibt ein $a \in A_k$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. □

# 3 Quantorenelimination

**Definition 3.1**
Eine Theorie $T$ hat Quantorenelimination, falls jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ äquivalent modulo $T$ zu einer quantorenfreien $\mathcal{L}$-Formel $\psi[x_1, \ldots, x_n]$ ist.

$$T \models \forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi[x_1, \ldots, x_n] \leftrightarrow \psi[x_1, \ldots, x_n])$$

**Beispiel 3.2**
Sei $\mathcal{L} := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ gegeben. Betrachte die Menge $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a \neq 0$ und es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $ax^2 + bx + c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a \neq 0$ und $b^2 - 4ac \geq 0\}$.

Diese Formel ist in $\mathcal{L}$ nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel, in $\mathcal{L}_1 := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$ hingegen doch. Somit ist die Menge in $\mathcal{L}_1$ quantorenfrei.

**Bemerkung 3.3**
- Wenn $T$ inkonsistent ist, dann hat $T$ immer Quantorenelimination
- Wenn $T$ Quantorenelimination hat, und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ mit $\mathcal{A} \underset{\text{US}}{\subseteq} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ Übung

**Definition 3.4**
- Eine einfache Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \ldots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \ldots, x_n, y]$
- Eine primitive Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \ldots, x_n] = \psi[x_1, \ldots, x_n, y]$, wobei $\psi$ eine endliche Konjunktion von atomaren Formeln und Negationen ist

**Lemma 3.5**
Eine (konsistente) Theorie T hat genau dann Quantorenelimination, wenn jede primitive Existenzformel zu einer quantorenfreien Formel äquivalent modulo T ist.

*Beweis.* „$\Rightarrow$“: klar

„$\Leftarrow$“: Beachte, $\exists y(\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\exists y\psi_1 \vee \exists y\psi_2)$. Insbesondere, wenn $T$ Quantorenelimination für primitive Existenzformeln hat, dann hat T Quantorenelimination für einfache Existenzformeln.

$$\underset{\text{einfache Existenzformel}}{\varphi} = \exists y \underbrace{\psi[x_1, \ldots, x_n]}_{\text{umschreiben in DNF}} \sim \exists y(\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n) \sim \underbrace{\bigvee_{i=1}^{n} \exists y \psi_i}_{\text{primitive Existenzformel}}$$

Zu zeigen: Jede beliebige Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ ist äquivalent zu einer quantorenfreien Formel modulo $T$.

$$\varphi[x_1, \ldots, x_n] \underbrace{\sim}_{\substack{\text{pränexe}\\ \text{Normalform}}} Q_1 y_1 \ldots Q_m y_m \underbrace{\psi[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]}_{\text{quantorenfrei}}, \text{ wobei } Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

Induktion über $m$:

$m = 0$: ✓

$m = 1$: $\varphi = Q\underbrace{\psi[x_1, \ldots, x_n, y]}_{\text{quantorenfrei}}$

$Q = \exists$ $\varphi$ einfache Existenzformel ✓

$Q = \forall$ $\varphi \sim \neg \underbrace{\exists y \neg\psi}_{\substack{\text{einfache}\\\text{Existenzformel}} \to \text{eliminieren} \to ✓}$

$m-1 \to m$: $\varphi[x_1, \ldots, x_n] = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \ldots \underbrace{Q_m y_m \psi[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]}_{\varphi'[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_{m-1}]}$. $\varphi'$ ist eine einfache Existenzformel, wir eliminieren also:

$$\underbrace{\qquad}_{m-1 \text{ viele Quantoren}} \underbrace{\Theta[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}]}_{\text{quantorenfrei}}$$

$\Rightarrow$ Induktion

□

**Beispiel 3.6**
Sei $\mathcal{K} = \{$unendliche Mengen$\}$. Diese Klasse lässt sich definieren durch die Theorie $T = \{\exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j = 1}^{n} \neg(x_i \doteq x_j))\}_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Theorie ist vollständig! Betrachte jetzt die definierbaren Mengen: $\exists^\infty x$

$$\{b \in A | \mathcal{A} \models \underbrace{\underbrace{\varphi}_{\text{quantorenfrei}} [b, a_1, \ldots, a_m]\}}_{\substack{\updownarrow\\\text{endlich oder koendlich}}}$$

**Lemma 3.7** (Trennungslemma)
Seien $T_1$ und $T_2$ zwei $\mathcal{L}$-Theorien, und $\Delta$ eine Kollektion von $\mathcal{L}$-Aussagen, welche unter endlichen Konjunktionen und Disjunktionen abgeschlossen ist. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

(1) Es gibt eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $T_1 \models \chi$

(2) Für alle $\mathcal{A} \models T_1$, $\mathcal{B} \models T_2$ gibt es eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi$

**Bemerkung 3.8**
Das ganze ist trivial für inkonsistente Theorien.

*Beweis.* $\underline{1 \Rightarrow 2}$: trivial!

$\underline{2 \Rightarrow 1}$: OBdA $T_1, T_2$ konsistent. Sei $\mathcal{A} \models T_1$, setze $\Sigma_{\mathcal{A}} = \{\chi, \chi$ Aussagen in $\Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi\}$.

Betrachte jetzt $T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}}$. Ist diese Theorie konsistent? Nein: Wäre $\mathcal{B} \models T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}} \hookrightarrow$ es gibt $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi \Rightarrow \chi \in \Sigma_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{B} \models \chi$. Widerspruch!

Das bedeutet (wegen Kompaktheit), dass es $\chi_1, \ldots, \chi_r \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ gibt mit $T_2 \cup \{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ inkonsistent.

$$\hookrightarrow T_2 \models \bigvee_{i=1}^{r} \neg\chi_i \Rightarrow T_2 \models \neg( \underbrace{\bigwedge_{i=1}^{r} \chi_i}_{=\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta} )$$

Das heißt für jedes $\mathcal{A} \models T_1$ gibt es $\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta$ mit $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{A} \models \chi_{\mathcal{A}}$.

Sei nun $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}}\}_{\mathcal{A} \models T_1}$.[5] $\hookrightarrow$ inkonsistent nach Konstruktion.

$\underset{\text{Kompaktheit}}{\Rightarrow}$ es existieren $\chi_{\mathcal{A}_1}, \ldots \chi_{\mathcal{A}_n}$ mit $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}_1}, \ldots, \chi_{\mathcal{A}_n}\}$ inkonsistent. Also:
$T_1 \models \bigvee_{j=1}^{n} \chi_{\mathcal{A}_j} =: \chi \in \Delta$

$T_1 \models \chi$. Wollen zeigen: $T_2 \models \neg\chi$. Aber $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}_i}, 1 \leq i \leq n$. $\square$

**Folgerung 3.9**
Zwei Theorien $T_1$ und $T_2$ werden von einer quantorenfreien Aussage getrennt, wenn je zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1$ und $\mathcal{B} \models T_2$ von einer quantorenfreien Aussage getrennt werden.

$$\rightarrow \exists\chi \text{ quantorenfrei } : \mathcal{A} \models \chi \text{ und } \mathcal{B} \models \neg\chi$$

**Satz 3.10**
Sei $T$ eine Theorie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) $T$ hat Quantorenelimination.

(2) Gegeben Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ und endlich erzeugte Unterstrukturen $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, $\langle d_1, \ldots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} = \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ und $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ eine Formel. Dann gilt:
$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n] \Rightarrow {}^{6}\mathcal{B} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$$

(3) Gegeben Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit isomorph erzeugten Unterstrukturen $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \ldots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$ wie in (2) und für alle $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ primitive Existenzformel, gilt:
$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$$

[5] Ist das überhaupt eine Menge? Es genügt die Einschränkung bis auf Isomorphie, das sollte reichen...
[6] Durch vertauschen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt hier sogar $\Leftrightarrow$.

Ferner, falls $T$ konsistent ist, (1) gilt und je zwei Modelle von $T$ isomorphe endlich erzeugte Unterstrukturen besitzen, dann ist $T$ vollständig mit Quantorenelimination.

**Bemerkung 3.11**
Wie benutzen wir diesen Satz? Letztlich wollen wir Back-&-Forth-Äquivalenz zeigen.

*Beweis.* (1) $\Rightarrow$ (2): Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n]$. T hat Quantorenelimination $\longleftarrow$ es gibt $\psi[x_1, \dots, x_n]$ quantorenfrei mit: $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \psi[\vec{x}])$

$$\begin{array}{ll} & \mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \\ \underset{\mathcal{A}\models T}{\Leftrightarrow} & \mathcal{A} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\ \underset{\psi \text{ quantorenfrei}}{\Leftrightarrow} & \mathcal{C} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\ \underset{\mathcal{C}\simeq\mathcal{D}}{\Leftrightarrow} & \mathcal{D} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\ \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\ \underset{\mathcal{B}\models T}{\Leftrightarrow} & \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \end{array}$$

(2) $\Rightarrow$ (3): klar.

(3) $\Rightarrow$ (1): Um zu zeigen, dass $T$ Quantorenelimination besitzt, genügt es nur primitive Existenzformeln $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ zu betrachten.

Seien dazu $e_1, \dots, e_n$ neue Konstantenzeichen. Betrachte die Sprache $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$, sowie die Theorien $T_1 = T \cup \{\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$ und $T_2 = T \cup \{\neg\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$.

Falls $T_1$ und $T_2$ durch eine quantorenfreie Aussage $\underbrace{\psi[e_1, \dots, e_n]}_{\substack{\text{quantorenfreie} \\ \mathcal{L}\text{-Formel}}}$ in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ trennbar sind, so folgt:

$$\begin{array}{ll} T \cup \{\varphi[\vec{e}]\} \models \psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\ T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\} \models \neg\psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\neg\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\ \Rightarrow T = (\psi[\vec{e}] \rightarrow \varphi[\vec{e}]) & \underset{\text{Aufgabe}^7}{\Rightarrow} T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}}) \end{array}$$

Sonst, falls also $T_1, T_2$ nicht trennbar sind, gibt es zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1 \cup \{\varphi[\vec{e}]\}, \mathcal{B} \models T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\}$, welche alle quantorenfreien Aussagen in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ gleich erfüllen.

Seien $c_1 = e_i^{\mathcal{A}}, d_i = e_i^{\mathcal{B}}$. Betrachte jetzt $\langle c_1, \dots, c_n\rangle_{\mathcal{A}} \underset{\mathcal{L}\text{-US}}{\subset} \mathcal{A}\mid_{\mathcal{L}}$ und $\langle d_1, \dots, d_n\rangle_{\mathcal{B}} \underset{US}{\subset} \mathcal{B}\mid_{\mathcal{L}}$. Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$ und $\mathcal{B} \models \neg\varphi[d_1, \dots, d_n]$.

[7] weil $e_1, \dots, e_n$ neue Konstantenzeichen sind

Um einen Widerspruch zu bekommen genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}, c_i \mapsto d_i$.

$$C \longrightarrow D :$$
$$\underbrace{t^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n]}_{\mathcal{L}\text{-Term}} \mapsto t^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n]$$

Ist diese Abbildung wohldefiniert?

$$\begin{aligned}
&\text{Angenommen } t_1^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] = t_2^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] \\
&\Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{als } \mathcal{L}\cup\{e_1,\dots,e_n\}\text{-Struktur}} \models (\underbrace{t_1[e_1, \dots, e_n] \doteq t_2[e_1, \dots, e_n]}_{\text{quantorenfreie Aussage}}) \\
&\Leftrightarrow \mathcal{B} \models (t_1[\vec{e}] \doteq t_2[\vec{e}]) \\
&\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] = t_2^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \\
&\longrightarrow \text{wohldefiniert und injektiv}
\end{aligned}$$

induktiv über den Aufbau zeigen wir: Das ist ein Isomorphismus.

Zu „ferner“: Angenommen $T$ hat Quantorenelimination, ist konsistent und je zwei Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ haben isomorphe, endlich erzeugte Unterstrukturen

$$\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \overset{\subset \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \underset{c_i \mapsto d_i}{\simeq} \overset{\subset \mathcal{B}}{\mathcal{D}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$$

$T$ ist vollständig $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Sei $\chi$ eine $\mathcal{L}$-Aussage und schreibe $\chi = \chi[x_1, \dots, x_n]$.

$$\mathcal{A} \models \chi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \chi[c_1, \dots, c_n] \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \models \chi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \chi$$

$\square$

# 4 Beispiele klassischer Theorien

**Beispiel 4.1**
$T = \exists^\infty$ hat Quantorenelimination und ist vollständig.

**Beispiel 4.2** (DLO)
DLO (dichte lineare Ordnung ohne Randpunkte). Sei $\mathcal{L} = \{<\}$.

$$\begin{aligned}\mathrm{DLO} = &\{\forall x(\neg x < x)\}\\ &\cup \{\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to (x < z))\}\\ &\cup \{\forall x \forall y((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x))\}\\ &\cup \{\forall x \forall y \exists z((x < y) \to (x < z < y))\}\\ &\cup \{\forall x \exists u \exists v(u < x < v)\}\\ &\cup \{\exists x(x = x)\}\end{aligned}$$

Diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination. Es gibt zwei Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

(1)

$$\begin{aligned}\varphi[x_1, \ldots, x_n] &= \exists y(\bigwedge_i \overbrace{\Theta_i[x_1, \ldots, x_n, y]}^{\substack{\text{atomar oder}\\ \text{Negation davon}}})\\ &= \exists y(\psi_1[x_1, \ldots, x_n] \wedge \bigwedge_i \substack{x_i = y\\ x_i \neq y\\ x_i < y\\ y < x_i})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&x_i = y \wedge x_j = y \Leftrightarrow x_i = x_j\\ &x_i = y \wedge y < x_j \Leftrightarrow x_i < x_j \quad \longrightarrow \text{ induktiv lassen sich alle Quantoren eliminieren}\end{aligned}$$

(2) Gegeben $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \underset{\subset \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \simeq \underset{\subset \mathcal{B}}{\mathcal{D}} = \langle d_1, \ldots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$, mit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Isomorphismus und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \mathrm{DLO}$.

OBdA wähle $c_1 < c_2 < \cdots < c_n \underset{F}{\mapsto} d_1 < d_2 < \cdots < d_n$. $\longrightarrow$ $F$ in Back-&-Forth-System.

1. Fall: $a < c_1 \to$ wähle $b < d_1$ in $\mathcal{B}$, weil $d_1$ kein Randpunkt ist.
2. Fall: $a > c_n \to$ wähle $b < d_n$ in $\mathcal{B}$, weil $d_n$ kein Randpunkt ist.
3. Fall: $\exists i \mid c_i < a < c_{i+1} \to$ wähle $b$ zwischen $d_i$ und $d_{i+1}$ weil $\mathcal{B}$ dicht ist.

Vollständigkeit folgt, weil Unterstruktur und Punkt zu Punkt.

**Beispiel 4.3** (Vektorraum)
Sei $K$ ein Körper, $\mathcal{L}_{\text{VR}} = \{0, +, f_\lambda\}_{\lambda \in K}$. Dann ist die Theorie $\underset{\substack{\| \\ \text{unendliche} \\ K\text{-VR}}}{T} = \{\, \forall x \, \forall y \, \forall z \ldots \} \ldots$ [8] vollständig und hat Quantorenelimination.

Wie zuvor gibt es zwei verschiedene Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

(1) Betrachte die folgende primitive Existenzformel:

$$\varphi[x_1, \ldots, x_n] = \exists y \left( \bigwedge_{\text{endlich}} (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_y \doteq 0) \wedge \bigwedge_{\text{endlich}} \neg (\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n \doteq 0) \right)$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

(1) *Alle $\lambda$ vor der Variable $y$ sind Null* $\rightarrow \underbrace{\bigwedge_{\text{endlich}} \lambda x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0}_{\psi[x_1 \ldots x_n]}$

(2) *Es gibt ein $\lambda \neq 0$.* Dann gilt OBdA: $y \doteq \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Ersetze jetzt jedes Vorkommen von y durch $\tilde{\lambda}_1 x_1 + \cdots + \tilde{\lambda}_n x_n$. Erhalte eine quantorenfreie Bedingung in $x_1, \ldots x_n$.

(2) (semantisch)

Ansatz:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & ? & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \\ \langle 2 \rangle & \simeq & \langle (3,7) \rangle \end{array}$$

Wir brauchen also: $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ undendlichdimensional, um ein Back & Forth-System zu konstruieren. Es sei dazu

$$\tilde{\mathcal{A}} \succeq \mathcal{A} \supset \langle c_1, \ldots, c_n \rangle \simeq \langle d_1, \ldots, d_n \rangle \subset \mathcal{B} \preceq \tilde{\mathcal{B}}$$

für $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ undendlichdimensional.

Insbesondere gilt jetzt auch:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n] \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n]$$

Angenommen $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \xrightarrow{F} \langle d_1, \ldots, d_n \rangle$ liegt in einem Back & Forth-System zwischen $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$. Dann folgt insbesondere auch:

$$\tilde{\mathcal{B}} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$$

Es ergeben sich also die folgenden beiden Fragen:

[8] diese Theorie ist axiomatisierbar, für eine beispielhafte Axiomatisierung vergleiche Klausur zu mathematische Logik im SS 2019.

(1) Finden wir ein Back & Forth-System zwischen $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$?

Angenommen also wir haben $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ bereits konstruiert. Zeige: Es gibt ein Back & Forth-System.

$c \in$ UR: trivial.

$c \notin$ UR: $\dim_K \tilde{\mathcal{B}} = \infty \geq n+1 \longrightarrow$ es gibt ein $d \notin \langle d_1, \dots, d_n \rangle \Rightarrow$ $G$ die Erweiterung

$$\begin{aligned} \langle c_1, \dots, c_n \rangle &\longrightarrow \langle d_1, \dots, d_n \rangle \\ c_i &\longmapsto d_i \\ c &\longmapsto d \end{aligned}$$

(2) Zur Existenz von $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$:

So funktioniert es nicht: $\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\ \exists x\ \exists y \neg(\lambda x + \mu y \dot{=} 0)\}_{\substack{\lambda,\mu \in K \\ (\lambda,\mu) \neq (0,0)}}$.

Seien $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ neue Konstantenzeichen.

$$\underbrace{\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg \sum_i \lambda_i e_i \dot{=} 0\}_{\substack{(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in K^n \setminus \{(0,\dots,0)\} \\ n \in \mathbb{N}}}}_{\text{endlich konsistent}}$$

Zur Vollständigkeit: Das endliche Erzeugnis zweier nicht-trivialer Vektoren ist isomorph, somit folgt Vollständigkeit.

**Beispiel 4.4** (ACF)
Wir betrachten jetzt die Theorie algebraisch abgeschlossener Körper (ACF) in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\mathrm{Ring}} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$.

$$\mathrm{ACF} = \begin{cases} \text{Körperaxiome} \\ \{\ \forall x_0\ \forall x_1 \dots\ \forall x_{k-1}\ \exists y (y^k + x_{k-1} y^{k-1} + \dots + x_1 y + x_0 \dot{=} 0)\}_{k \geq 1} \end{cases}$$

ACF hat Quantorenelimination, ist aber nicht vollständig. Die Vervollständigungen sind $\underbrace{\mathrm{ACF}_0}_{1+1+\dots+1 \dot{\neq} 0}$ und $\underbrace{\mathrm{ACF}_p}_{\underbrace{1+\dots+1}_{p\text{-Mal}} \dot{=} 0}$ für jede Primzahl $p$.

**Satz 4.5** (Kurzeinführung Galois'sche Theorie)

*Beweis* ACF. Betrachte OBdA die Abbildung

$$F = \mathrm{Quot}(\langle c_1, \ldots, c_n \rangle) \longrightarrow \mathrm{Quot}(\langle d_1, \ldots, d_n \rangle)$$

<u>Fall 1:</u> $a$ ist algebraisch über $K$

$\hookrightarrow$ sei $m_a(T)$ das Minimalpolynom von $a$ über $K$. $F(m_a)(T)$ ist ein normiertes Polynom über $\mathrm{Quot}(\langle d_1, \ldots, d_n \rangle) \subset B$.

$B$ ist algebraisch abgeschlossen $\Rightarrow$ es gibt $b$ in $B$ mit $F(m_a)(b) = 0 \overset{\text{Galoistheorie}}{\Longrightarrow}$ $F$ lässt sich erweitern.

<u>Fall 2:</u> $a$ ist transzendent über $K = \mathrm{Quot}(\langle c_1, \ldots, c_n \rangle)$.

Wenn wir ein $b \in B$ finden, welches transzendent über $\mathrm{Quot}(\langle d_1, \ldots, d_n \rangle)$ ist

$\hookrightarrow \mathrm{Ring}_A(K, a) \simeq \mathrm{Ring}_B(F(K), b)$

<u>Ziel:</u> Wir brauchen $\mathcal{A} \preceq \tilde{\mathcal{A}}$ mit unendlich vielen Elementen, welche algebraisch unabhängig sind.

$$\underbrace{\mathrm{Diag}(A) \cup \{\neg(B(e_1, \ldots, e_n) \dot{=} 0)\}_{\substack{P \in A[T_1, \ldots, T_n] \setminus \{0\} \\ P(e_1, \ldots e_n) \neq 0}}}_{\text{endlich konsistent}}$$

$\square$

# 5 Ultrafilter & der Satz von Ax

Anwendung: Wir wollen eine Aussage der folgenden Art bekommen: Sei $f : \underset{z \longmapsto z^2}{\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}}$.
$\rightarrow f$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

**Satz 5.1** (Ax)
Sei $f : \mathbb{C}^n \underset{z \longmapsto z^2}{\longrightarrow} \mathbb{C}^n$ eine polynomiale[9] injektive Abbildung. Dann ist $f$ surjektiv.

Motivation: Sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $p$. Für einen Körper der Charakteristik $p$ bekommen wir dann:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{g}} \underset{\text{wirkt}}{\curvearrowright} \underbrace{K}_{\substack{\text{Körper der} \\ \text{Charakteristik} \\ p}} \longrightarrow K$$

$$x \longmapsto \underbrace{1 + \cdots + 1}_{g\text{-Mal}} + x$$

$$\rightarrow h + (g + x) = (h + g) + x$$

Für einen Körper der Charakteristik 0:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{k}} \underset{\text{wirkt}}{\curvearrowright} \qquad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\underbrace{\mu_p}_{\substack{p\text{-te Einheits-} \\ \text{wurzel in } \mathbb{C}}} = \{e^{\frac{2\pi i k}{p}}\}_{0 \leq k < p} \qquad z \longmapsto \omega z$$

$$\rightarrow \omega_1(\omega \cdot z) = (\omega_1 \omega) \cdot z$$

**Satz 5.2** (Lefschetz'sches Prinzip)
Eine Aussage $\chi$ in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ gilt für $\mathbb{C}$ genau dann, wenn es unendlich viele Primzahlen $p$ derart gibt, dass $\chi$ in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik $p$ gilt.

*Beweis von Satz 5.1 (Ax).* Sei $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ injektiv. Die Aussage „$f$ injektiv $\Rightarrow f$ surjektiv" lässt sich als $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$-Aussage schreiben.

D. h. es genügt zu zeigen, dass diese Aussage für alle Körper $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ gilt.

Was ist $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$? Ein algebraischer abgeschlossener Körper der Charakteristik $p$. Galoistheo.

[9] polynomial bedeutet, dass jede Koordinate der Abbildung durch Polynome gegeben ist.

$$\mathbb{F}_p^{\text{alg}} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n, \text{ wobei } F_n \subset F_{n+1} \text{ endliche Körper mit Charakteristik } p.$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \{0,1\} \\ F_2 &= \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sei nun $g : (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n \longrightarrow (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$ eine surjektive polynomiale Abbildung.

Zeige: $g$ ist surjektiv. Sei $(b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$. Dann gibt es ein $N$, sodass $b_i \in \mathbb{F}_n$ für $\mathbb{F}_n$ endlich.

Ferner können wir $N$ so wählen, dass alle Koeffizienten aus $g$ in $\mathbb{F}_n$ liegen.

$$g_{\restriction \mathbb{F}_N^n} : \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} \text{ ist injektiv (geerbt)}$$

$$\Downarrow \text{ endlich}$$

$$\text{surjektiv}$$

□

*Beweis Lefschetz'sches Prinzip (Satz 5.2).* „$\Rightarrow$“ Sei $\chi$ eine $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$-Aussage derart, dass $\mathbb{C} \models \chi$. Dann ist $\underbrace{\text{ACF}_0}_{\substack{\text{alle elementar}\\ \text{äquivalent}}} \cup\{\neg\chi\}$ inkonsistent, weil $\text{ACF}_0$ vollständig ist.

Dann gibt es eine endliche Teilmenge $T_0 \subset \text{ACF}_0 \cup\{\neg\chi\}$, welche inkonsistent ist. $\Rightarrow$ Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ sodass:

$$T_0 \subset \underbrace{\text{ACF} \cup\{\neg(\underbrace{1+\cdots+1}_{k} \doteq 0)\}_{k<N} \cup \{\neg\chi\}}_{\text{inkonsistent}}$$

Für $p > N$ eine Primzahl: $\text{ACF}_p \models \chi$

„$\Leftarrow$“ $\rightsquigarrow$ Ultrafilter und Satz von Łoś

□

Exkurs: Sei im Folgenden $I \neq \emptyset$.

**Definition 5.3**
Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf $I$ ist ein endlich additives Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \{0,1\}$$

**Bemerkung 5.4**
Die Definition entspricht der von Blatt 1 Aufgabe 3, denn:

(1) $\mu_{\mathcal{U}}(I) = 1$, $\mu_{\mathcal{U}}(\emptyset) = 0$.

(2) $\underset{X \subset Y \subset I}{\mu_{\mathcal{U}}(X)} = 1 \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$

(3) Angenommen $\mu_{\mathcal{U}}(X) = \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$ aber $\mu_{\mathcal{U}}(X \cap Y) = 0$. Dann gilt $X = X \setminus Y \dot{\cup} X \cap Y \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(X \setminus Y) = 1$ und $\mu_{\mathcal{U}}(Y \setminus X) = 1$, sowie $I \supset X \cup Y = (X \setminus Y) \dot{\cup} (Y \setminus X) \dot{\cup} (X \cap Y)$. $\rightsquigarrow \mu_{\mathcal{U}}(I) = 1 \geq 1 + 1 + 0$, ein Widerspruch.

(4) Gegeben $X \subset I$ entweder $\underset{\mu_{\mathcal{U}}(X)=1}{X \in \mathcal{U}}$ oder $\underset{\mu_{\mathcal{U}}(I \setminus X)=1}{I \setminus X \in \mathcal{U}}$

**Definition 5.5**
Ein Hauptultrafilter ist ein Maß der Form $\delta_x$ für ein $x \in I$.

**Definition 5.6**
Falls I undendlich ist, so gibt es generische/reiche Ultrafilter, nämlich die Ultrafilter, welche alle koendlichen Mengen enthalten.

**Definition 5.7**
Angenommen $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ist eine $\mathcal{L}$-Struktur. Sei ferner $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. Definiere eine Äquivalenzrelation[10] auf $\underbrace{\prod_{\mathcal{U}}}_{\substack{\text{karthesisches}\\ \text{Produkt}}} A_i$:

$$(a_i)_{i \in I} \sim_{\mathcal{U}} (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{U} \iff \mu_{\mathcal{U}}(\{i \in I \mid a_i = b_i\}) = 1$$

**Definition 5.8**
Sei $\underbrace{\prod_{\mathcal{U}} A_i}_{\neq \emptyset}$ die Menge $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$. Wir definieren Interpretationen der Symbole aus $\mathcal{L}$ auf $\prod_{\mathcal{U}} A_i$:

- Sei $c \in \mathcal{L}$ ein Konstantenzeichen. Definiere:
$$c^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} = (c^{\mathcal{A}_i})_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

- Sei $f \in \mathcal{L}$ ein $n$-stelliges Funktionszeichen. Definiere:
$$f^{\prod_{\mathcal{U}} A_i}([a_1]_{\mathcal{U}}, \ldots, [a_n]_{\mathcal{U}}) = (f^{\mathcal{A}_i}(a_1^i, \ldots, a_n^i))_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

  Ist das wohldefiniert? Ja, denn fast überall gleich.

[10] vergleiche dazu Blatt 1, Aufgabe 3

- Sei $\mathcal{R}$ ein $m$-stelliges Relationszeichen auf $\mathcal{L}$. Definiere:

$$([a_1]_\mathcal{U}, \dots, [a_m]_\mathcal{U}) \in \mathcal{R}^{\prod_\mathcal{U} A_i} \iff \{i \in I \mid (a_1^i, \dots, a_n^i) \in \mathcal{R}^{\mathcal{A}_i}\} \in \mathcal{U}$$

Wenn $\mathcal{U}$ ein Hauptfilter ist, dann ist er erzeugt vom Element $\{i_0\}$.

$$\begin{aligned} \overbrace{\prod_\mathcal{U} \mathcal{A}_i}^{\mathcal{L}\text{-Struktur}} &\xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}_{i_0} \text{ ist ein Isomorphismus} \\ (a_i)_{i\in I}/\sim_\mathcal{U} &\longmapsto a_{i_0} \end{aligned}$$

**Definition 5.9**
Wenn $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, dann ist $\mathcal{A}^\mathcal{U} = \prod_\mathcal{U} \mathcal{A}$ die Ultrapotenz.

**Beispiel 5.10**
Sei $\mathcal{U}$ ein reicher/generischer Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Betrachte $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$.

$$\mathcal{N}^\mathcal{U} \ni (1, 2, 3, \dots)/\sim_\mathcal{U} > (1, 1, 1, \dots)/\sim_\mathcal{U}$$

**Satz 5.11** (Satz von Łoś)
Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $I$, $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen, $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ eine $\mathcal{L}$-Formel und $[a_1]_\mathcal{U}, \dots, [a_n]_\mathcal{U} \in \prod_\mathcal{U} A_i$. Dann gilt:

$$\prod_\mathcal{U} \mathcal{A}_i \models \varphi[[a_1]_\mathcal{U}, \dots, [a_n]_\mathcal{U}] \iff \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi[a^1, \dots, a^n]\} \in \mathcal{U}$$

*Beweis.* Induktiv über den Aufbau von $\varphi$. Sei $\varphi = (t_1 \doteq t_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\prod_\mathcal{U} A_i \models (t_1[[a_1]_\mathcal{U}, \dots, [a_n]_\mathcal{U}] \doteq t_2[[a_1]_s crU, \dots, [a_n]_\mathcal{U}]) \\ &\Leftrightarrow t_1^{\prod_\mathcal{U} \mathcal{A}_i}[[a_1]_\mathcal{U}, \dots, [a_n]_\mathcal{U}] \doteq t_2^{\prod_\mathcal{U} \mathcal{A}_i}[[a_1]_\mathcal{U}, \dots, [a_n]_\mathcal{U}] \\ &\underset{\substack{\text{induktiv über} \\ \text{den Aufbau}}}{\Leftrightarrow} \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models t_1[a_i^1, \dots, a_i^n] \doteq t_2[a_i^1, \dots, a_i^n]\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

□

**Folgerung 5.12**
Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $I$. Betrachte $\mathcal{A}^\mathcal{U} = \prod_\mathcal{U} \mathcal{A}$. Das ist eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$ bezüglich der Abbildung $\underset{a \longmapsto (a)_{i\in I}/\sim_\mathcal{U}}{A \longrightarrow \prod_\mathcal{U} A}$.

Einbettung, injektiv

*Beweis.* Sei $\varphi$ eine $\mathcal{L}$-Formel, $a_1, \dots, a_n \in A$. Zu zeigen ist:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{A}_i^\mathcal{U} \models \varphi[[a_1]_\mathcal{U}, \dots, [a_n]_\mathcal{U}]$$

„⇒“: Mit Satz von Łoś gilt:

$$\mathcal{A}_i^{\mathcal{U}} \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \iff \{i \in I \mid \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\} \in \mathcal{U}$$

Da dieser Ausdruck jedoch der gesamten Menge I entspricht, folgt die Behauptung direkt.

„⇐“: Die leere Menge liegt nicht in $\mathcal{U}$, also gibt es $i$ sodass die Formel gilt, da diese jedoch von $i$ unabhängig ist, gilt sie immer. □

*Beweis Lefschetz'sches Prinzip* (5.2) „⇐“. Sei

$$S = \left\{ p \text{ Primzahl} \mid \begin{array}{l} \text{ein algebraisch abgeschlossener Körper mit} \\ \text{Charakteristik } p \text{ erfüllt die Aussage } \chi \end{array} \right\}$$

Zeige: $S$ ist unendlich. Sei $P \subset \mathbb{N}$ Primzahlen. Betrachte jetzt

$$\mathcal{B} = \{X \cap S \subset P \mid X \subset P \text{ koendlich}\} \tag{4}$$

Ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis? $X \cap S = \emptyset$ ist endlich $\iff$ $S \subset P \setminus X$ unendlich, ein Widerspruch.

Weiter gilt $(X_1 \cap S) \cap (X_2 \cap S) = \underbrace{(X_1 \cap X_2)}_{\text{koendlich}} \cap S$.

$\overset{\text{Blatt 1}}{\Rightarrow}$ es gibt einen Ultrafilter, welcher alle Elemente aus $\mathcal{B}$ enthält.

Sei im Weiteren $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $P$, welcher $\mathcal{B}$ enthält. $X \cap S \in \mathcal{U}$ ist für alle $X \subset P$ koendlich.

$\hookrightarrow$ $\mathcal{U}$ ist reich (kein Hauptultrafilter). Für $p_0 \in P$ ist $P \setminus \{p_0\}$ koendlich.
$\Rightarrow$ $P \setminus \{p_0\} \cap S \in \mathcal{U}$.

$\hookrightarrow$ $S \in \mathcal{U}$

Sei $K = \prod_{\mathcal{U}} K_p$, wobei $K_p$ ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik $p$ ist derart, dass

$$\begin{cases} K_p \models \chi & p \in S \\ \text{egal}_{\text{ bspw. } \mathbb{F}_p^{\text{alg}}} & p \notin S \end{cases}$$

(1) $K \models \mathrm{ACF}_0$

(2) $K \models \chi$, weil $\{p \in P \mid K_p \models \chi\} \supset S \in \mathcal{U}$

$\mathrm{ACF}_0$ ist vollständig $\Rightarrow\ \mathbb{C} \models \chi$. $\square$

**Satz 5.13** (Kompaktheitssatz)
Eine Theorie $T$ ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent ist.

*Beweis.* OBdA ist $T$ unendlich. Sei $I = \{\emptyset \neq S \subset T \text{ endlich}\}$. Für $s \in I$ gibt es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}_s$, sodass $\mathcal{A}_s \models \chi$ für jedes $\chi \in s$. Sei weiter

$$B_s = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für jedes } \chi \in s\}$$

Ist $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s \in I}$ eine Filterbasis?

(1) $\emptyset \neq B_s \ni s$

(2) $B_{s_1} \cap B_{s_2} = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für alle } \chi \text{ aus } s_2\} = B_{s_1 \cup s_2} \in \mathcal{B}$!

Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf $I$, sodass $B_s \in \mathcal{U}$ für jedes $\emptyset \neq s \subset T$ endlich. Sei $\mathcal{A} = \prod\limits_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_s$.

Zu zeigen ist: $\mathcal{A} \models T$ (sei $\chi \in T$, zeige $\mathcal{A} \models \chi$).

$$\overset{\text{Satz von Łoś}}{\iff} \underbrace{\{s \in T \mid \mathcal{A}_s \models \chi\}}_{B_{\{\chi\}}} \in \mathcal{U}$$ $\square$

# Teil II
# Typen und Saturation

## 6 Typen

Sei im Folgenden $\mathcal{L}$ eine Sprache und $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

**Definition 6.1**
Ein partieller Typ $\sum(x_1, \ldots, x_n)$ mit Parametern aus $B$ ist eine Kollektion von Formeln in der Sprache $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$, welche in der (kanonischen) $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$-Struktur $\mathcal{A}$ endlich erfüllbar ist, das heißt für alle $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in \sum$ gibt es ein Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in A^n$ mit $\mathcal{A} \models \varphi_i(a_1, \ldots, a_n)$ für $1 \leq i \leq m$.

$\mathcal{A}$ realisiert $\sum$, falls es ein Tupel $(a_1, \ldots, a_n)$ gibt, sodass $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ für alle $\varphi \in \sum$. Sonst $\begin{matrix}\text{vermeidet}\\\text{übergeht}\end{matrix}$ $\mathcal{A}$ den partiellen Typ $\sum$.

**Beispiel 6.2**
Betrachte $(\mathbb{R}, 0, <)$. Sei $\sum(x) = \{0 < x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}}$ ein partieller Typ.

Wird $\sum$ realisiert oder vermieden? $\rightsquigarrow$ vermieden

Sei jedoch $\sum' = \{\sqrt{2} \leq x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > \sqrt{2}}}$. $\rightsquigarrow$ realisiert von $\sqrt{2}$

Betrachte nun $\sum$ auf $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{R}$. Hier realisiert $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$ den partiellen Typen $\sum$!

**Bemerkung 6.3**
Sei $\mathcal{A}$ eine unendliche Struktur. Dann gibt es immer einen partiellen Typen, der vermieden wird: $\{\neg(x \doteq a)\}_{a \in A}$.

**Bemerkung 6.4**
Sei $\sum(x_1, \ldots, x_n)$ ein partieller Typ über $C$ in $\mathcal{A}$. Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\underbrace{\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}}_{\mathcal{L} \cup \{c\}_{c \in C}\text{-Struktur}}$, welche $\sum$ realisiert.

*Beweis.* Seien $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ neue Konstantenzeichen. Schreibe $T = \mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \sum(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$. $T$ ist eine $\mathcal{L}_A \cup \{\zeta_1, \ldots, \zeta_n\}$-Theorie. Falls $\mathcal{B} \models T$, dann ist $\{\zeta_1^{\mathcal{B}}, \ldots, \zeta_n^{\mathcal{B}}\}$ eine Realisierung von $\sum(x_1, \ldots, x_n)$.

*Zu zeigen ist: $T$ endlich konsistent.*
$T_0 \underset{\text{endlich}}{\subset} T \longrightarrow T_0 \subset \mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\varphi_i[\zeta_1, \dots, \zeta_n]\}_{i \in M}$ für $\varphi_1, \dots, \varphi_M \in \sum$, $M \in \mathbb{N}$.
$\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ ist in $\mathcal{A}$ realisierbar von $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$.
$\longrightarrow$ Setze $\tilde{\mathcal{A}}$ die $\mathcal{L}_A \cup \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$-Struktur aus $\mathcal{A}$ mit Interpretationen $\zeta_i^{\tilde{\mathcal{A}}} = a_i$. □

**Definition 6.5**
Ein $n$-Typ über $C \subset A$ in der Struktur $\mathcal{A}$ ist ein partieller Typ in der Variable $x_1, \dots, x_n$ über $C$, welcher maximal endlich erfüllbar ist bezüglich der Inklusion zwischen partiellen Typen über $C$.
$S_n^{\mathcal{A}}(C)$ ist die Menge aller Typen in $\mathcal{A}$ über $C$.

$$S^{\mathcal{A}}(C) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^{\mathcal{A}}(C)$$

**Bemerkung 6.6**
$S_n^{\mathcal{A}}(C) \neq \emptyset$. Gegeben $b_1, \dots, b_n \in A$, setze

$$\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) = \{\varphi[x_1, \dots, x_n] \ \mathcal{L}\text{-Formel} \mid \mathcal{A} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]\}$$

ist ein $n$-Typ über $C$.

*Beweis.* Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n] \notin \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C)$. Zu zeigen ist: $\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) \cup \{\varphi[x_1, \dots, x_n]\}$ nicht endlich erfüllbar. Aus der Annahme folgt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \not\models \varphi[b_1, \dots, b_n] \\ \Longrightarrow\ & \mathcal{A} \models \neg\varphi[b_1, \dots, b_n] \\ \Longrightarrow\ & \neg\varphi[x_1, \dots, x_n] \in \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) \\ \Longrightarrow\ & \text{Widerspruch zur Maximalität} \end{aligned}$$

Sei nun $p(x_1, \dots, x_n) \in S_n^{\mathcal{A}}(C)$. Gegeben $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ eine $\mathcal{L}_C$-Formel. Zu zeigen ist: $\varphi \in p$ oder $\neg\varphi \in p$.

Angenommen $\varphi \notin p$. $\Longrightarrow p \subsetneq \underbrace{p(x_1, \dots, x_n) \cup \{\varphi[x_1, \dots, x_n]\}}_{\text{endlich erfüllbar}}$
$\rightsquigarrow$ Es gibt $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in p$ sodass $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi$ in $A$ nicht erfüllbar ist. Insbesondere

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \not\models\ \exists x_1, \dots, x_n (\bigwedge \liminf_{i=1}^{k} \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n]) \\ \Longleftrightarrow\ & \mathcal{A} \models \neg\ \exists x_1, \dots, x_n (\bigwedge \liminf_{i=1}^{k} \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n]) \\ \Longleftrightarrow\ & \mathcal{A} \models\ \forall x_1 \cdots\ \forall x_n (\bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \to \neg\varphi[x_1, \dots, x_n]) \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass $p \subseteq p(x_1, \dots, x_n) \cup \{\neg\varphi[x_1, \dots, x_n]\}$ endlich erfüllbar ist. Sei dazu $\psi_1, \dots, \psi_r \in p$. Wir wollen zeigen:

$$\mathcal{A} \models\ \exists x_1, \dots, x_n (\bigwedge_{j=1}^{r} \psi_j[x_1, \dots, x_n] \wedge \neg\varphi[x_1, \dots, x_n])$$

$\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_r \in p$, $p$ ist insbesondere partieller Typ.
$\hookrightarrow$ es gibt $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ mit $\mathcal{A} \models \bigwedge \varphi_i[a_1, \dots, a_k] \wedge \bigwedge \psi_j[a_1, \dots, a_n]$.
$\implies \mathcal{A} \models \neg\varphi[a_1, \dots, a_n]$ □

Allgemeiner: Sei $T$ eine konsistente Theorie in der Sprache $\mathcal{L}$. Definiere: $n$-Typ in $T$ ist eine Kollektion von $\mathcal{L}$-Formeln in $x_1, \dots, x_n$, welche endlich konsistent mit $T$ ist, es gilt also für $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$: $T \cup \{\ \exists x_1, \dots, x_n(\bigwedge_{j=1}^{m} \varphi_j[x_1, \dots, x_m])\}$ ist konsistent, und maximal bezüglich Inklusion mit dieser Eigenschaft:

Für $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $C \subset A$. Dann sei $T$ die $\mathcal{L}_C$-Theorie von $\mathcal{A}$.

$$\underbrace{p \in S_n(T)}_{n\text{-Typ von } T} \Leftrightarrow p \in S_n^{\mathcal{A}}(C)$$

**Folgerung 6.7**
Gegeben eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ gibt es $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$, welche alle Typen in $S^{\mathcal{A}}(A)$ realisiert.

*Beweis.* Sei $\{p_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ eine Aufzählung von $S^{\mathcal{A}}(A)$. Wir konstruieren eine elementare Kette $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}_1 \preceq \cdots \preceq \mathcal{A}_\alpha \preceq \dots$ so, dass $\underbrace{p_\alpha}_{\substack{\text{als part. Typ} \\ \text{über } A \text{ in } \mathcal{A}_\alpha}}$ in $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ realisiert wird.

$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$. $\mathcal{A}_1$ wird mithilfe des Lemmas für $p_0$ gewonnen. Falls $\gamma$ eine Limeszahl ist: Setze $\mathcal{A}_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{A}_\beta$. Sei $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{A}_\lambda$. □

Achtung: $\mathcal{B}$ kann sehr groß werden!

**Beispiel 6.8**
$\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <)$ $\rightsquigarrow$ Typ für jedes Element aus $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} r \in \mathbb{R} \longrightarrow p_r &\supset \{x < r\} \cup \{s < x\}_{s<r} \\ p_r \text{ „=“ } &\{x < r\} \cup \{s < x\}_{s<r} \\ p_{r^+} &= \{x > r\} \cup \{s > x\}_{s>r} \end{aligned}$$

Ziel: $S_n(T)$ ist ein kompakter, 0-dimensionaler Hausdorff topologischer Raum $\rightsquigarrow$ „Stoneraum der Theorie $T$“.

# 7 Exkurs: Einführung in die Topologie

Sei $X$ eine Menge.

**Definition 7.1**
Eine Basis $\mathcal{B}$ einer Topologie auf $X$ ist eine Kollektion von Teilmengen derart, dass

(1) $\forall x \in X$ gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \forall x \in B_1 \cap B_2$ gibt es ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

**Definition 7.2**
$U \subset X$ ist *offen*, falls es für jedes $x \in U$ ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B \subset U$.
Sei $T = \{U \underset{\text{offen}}{\subset} X\}$. Die Kollektion $T$ erfüllt folgende Eigenschaften:

(1) $\emptyset, X \in T$

(2) $U_1, U_2 \in T \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$

(3) Sei $(U_i)_{i \in I} \subset T$. Dann ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in T$

**Beispiel 7.3** (1) die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

(2) die triviale Topologie auf $X$ ist $\{\emptyset, X\}$

(3) die diskrete Topologie auf $X$ ist $\mathcal{P}(X)$

(4) die koendliche Topologie auf $X$ wird gegeben als:

$$U \subset X \text{ offen } \iff |X \setminus U| \text{ endlich, oder } U = \emptyset$$

So ist beispielsweise $(0, 1)$ offen in $\mathbb{R}$ für die euklidische Topologie, aber nicht für die koendliche Topologie.

**Bemerkung 7.4**
$Y \subset X$ ist offen $\iff \quad \forall x \in Y \quad \underbrace{\exists \underset{\in T}{U} \ni x}_{\substack{U \text{ ist eine} \\ \text{Umgebung von } x}} \quad \text{mit } x \in U \subset Y$

**Definition 7.5**
Eine Menge $C \subset X$ ist *abgeschlossen*, falls das Komplement offen ist.

**Definition 7.6**
Ein topologischer Raum $(X, T)$ ist *0-dimensional*, falls es eine Basis der Topologie gibt, welche aus offen-abgeschlossenen[11] Mengen besteht.

[11] Englisch: „clopen“

**Beispiel 7.7**
Die diskrete Topologie ist *0-dimensional*, weil sie als Basis $\{\{x\}\}_{x\in X}$ hat.

**Definition 7.8** (Trennungseigenschaften)
Sei $(X,T)$ ein topologischer Raum.

- T1 Falls $x \neq y \in X$ gibt es Umgebungen $\overbrace{U^x}^{\substack{\text{offene Menge}\\ \text{die } x \text{ enthält}}}, U^y$ mit $x \in U^x \setminus U^y, y \in U^y \setminus U^x$.
- T2 (Hausdorff) falls $x \neq y \in X$ gibt es $U^x, U^y$ Umgebungen mit $U^x \cap U^y = \emptyset$

**Bemerkung 7.9**
$T2 \Rightarrow T1$

**Beispiel 7.10**
- Ist die euklidische Topologie T2? Ja.
- Sei $X$ unendlich. Ist die koendliche Topologie $T$ Hausdorff? Nein. Ist sie T1? Ja: $U^x = X \setminus \{y\}, U^y = X \setminus \{x\}$

**Bemerkung 7.11**
$(X,T)$ $T1 \Rightarrow$ Jeder Punkt ist abgeschlossen!

*Beweis.* Zu zeigen: $X \setminus \{x\}$ offen
Sei $y \in X \setminus \{x\}$. Wir suchen $U^y \subset X \setminus \{x\}$. Es gilt $x \neq y \Longrightarrow \begin{matrix} U^x \\ U^y \end{matrix}$, insbesondere $x \notin U^y \Longrightarrow \underset{\in Y}{U^y} \subset x \setminus \{x\}$ □

**Definition 7.12**
$(X,T)$ topologischer Raum.

- $s \in X$ ist *isoliert*, falls $\{x\}$ offen ist.
- $A \subset X$ ist *dicht*, falls für jede offene Menge $\emptyset \neq U \subset X$ ist $A \cap U \neq \emptyset$
- $x \in X$ ist ein *Häufungspunkt von $A$*, falls für jede Umgebung $U^x \ni x$ gilt, dass $U^x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

**Bemerkung 7.13**
Sei $A \underset{\text{dicht}}{\subset} X$. $\underbrace{C}_{\supset A} \underset{\text{ageschl.}}{\subset} X \Longrightarrow C = X$

*Beweis.* Zu zeigen ist: $C = X$. Sonst ist $\overbrace{\underset{\neq\emptyset}{X \setminus C}}^{U}$ offen. $\overset{A \text{ dicht}}{\Longrightarrow} \underbrace{A \cap U}_{\subset C \cap (x \setminus C) = \emptyset} \neq \emptyset$, ein Widerspruch. □

**Bemerkung 7.14**
Eine Topologie auf $X$ ist genau dann diskret, falls jeder Punkt isoliert ist. Übung

**Bemerkung 7.15**
Eine Teilmenge $C \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $C$ alle ihre Häufungspunkte enthält.

*Beweis.* „⇒“: $x \notin C \Rightarrow x \in \underbrace{X \setminus C}_{\text{offen}}$ und $(X \setminus C) \cap (\underbrace{C \setminus \{x\}}_{=C}) = \emptyset \Rightarrow x$ kein Häufungspunkt von $C$.

„⇐“: Zu zeigen: $X \setminus C$ offen. Sei dazu $x \in X \setminus C$ beliebig. $\Rightarrow x$ ist kein Häufungspunkt von C $\Rightarrow \; \exists U^x \ni x$ mit $U^x \cap \underbrace{C \setminus \{x\}}_{=C} = \emptyset \Rightarrow x \in U^x \subset X \setminus C$ □

**Definition 7.16**
Seien $X, Y$ topologische Räume. Die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist *stetig auf* $x_0$, falls für jede Umgebung $V^{f(x_0)} \ni f(x_0)$ (in $Y$) das Urbild $f^{-1}(V)$ in $X$ offen ist.
$f$ ist stetig, wenn sie auf jedem Punkt in $X$ stetig ist.

**Bemerkung 7.17**
Es genügt Urbilder von Basiselementen zu betrachten. Warum? Sei $V$ eine Umgebung von $f(x_0)$.
↪ es gibt $B$ ein Basiselement mit $f(x_0) \in B \subset V \Rightarrow x_0 \in \underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{offen}} \subset f^{-1}(V)$

**Bemerkung 7.18**
$f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in $X$ ist für alle $\underset{\text{abgeschlossen}}{C \subset Y}$.

$$X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$$

**Beispiel 7.19**
$f : \begin{array}{c} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto y_0 \end{array}$ konstant. Ist $f$ stetig? Ja, denn $f^{-1}(x) = \begin{cases} X & x = y_0 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$.

**Definition 7.20**
Die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist $\begin{array}{c}\text{offen}\\ \text{abgeschlossen}\end{array}$, falls für jede $\begin{array}{c}\text{offene}\\ \text{abgeschlossene}\end{array}$ Teilmenge $\begin{array}{c}U\\ C\end{array}$ von $X$ das Bild $\begin{array}{c}f(U)\\ f(C)\end{array}$ $\begin{array}{c}\text{offen}\\ \text{abgeschlossen}\end{array}$ ist.

**Bemerkung 7.21**

$$\text{offen} \; \begin{array}{c}\not\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{array} \; \text{abgeschlossen}$$

**Beispiel 7.22**
Betrachte $\Pi : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \longmapsto x \end{array}$ mit euklidischer Topologie. $\Pi$ ist offen, aber nicht abgeschlossen: Betrachte $\underset{\text{abgeschlossen}}{x \cdot y = 1} \mapsto \underset{\substack{\text{nicht}\\\text{abgeschlossen}}}{x \neq 0}$ .

**Beispiel 7.23**
Sei $\begin{array}{c} X \longrightarrow Y \\ \text{konstant} \end{array}$ unendlich mit koendlicher Topologie. Diese Abbildung ist abgeschlossen, aber nicht offen.

**Definition 7.24**
Ein Homöomorphismus $f : X \longrightarrow Y$ ist eine bijektive stetige Abbildung derart, dass die mengentheoretische Abbildung $\begin{array}{c} f^{-1}\text{auch stetig} \\ \text{bzw.} \\ f \text{ offen} \\ \text{bzw.} \\ f \text{ abgeschlossen} \end{array}$ ist.

**Definition 7.25**
$(X,T)$ topologischer Raum. Die Menge $K \subset X$ ist kompakt, falls jede offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i}_{\text{offen}}$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt: Es gibt $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
$(X,T)$ ist kompakt, wenn $X$ kompakt ist.

**Bemerkung 7.26**
- Jede endliche Menge ist kompakt
- $f : X \longrightarrow Y$ stetige Abbildung, $K \subset X$ kompakt $\Rightarrow f(K)$ kompakt in $Y$.

*Beweis.* Zu zeigen: $f(K)$ kompakt.

$$\begin{aligned} f(K) \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{V_i}_{\text{offen in } Y} &\Rightarrow K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(V_i)}_{\text{offen}} \\ &\Rightarrow K \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_n}) \\ &\Rightarrow f(K) \subset \underbrace{f(f^{-1}(V_{i_1})}_{\subset V_{i_1}} \cup \dots \cup \underbrace{f(f^{-1}(V_{i_n}))}_{\subset V_{i_n}} \end{aligned}$$

□

**Lemma 7.27**
$K \subset X$ kompakt. $C \underset{\text{abg.}}{\subset} X$ mit $C \subset K \Longrightarrow C$ kompakt.

*Beweis.* Sei $C \subset \bigcup_{i\in I} \underbrace{U_i}_{\text{offen}}$. $C$ abgeschlossen $\Longrightarrow X \setminus C$ offen.

$$
\begin{aligned}
K \subset X = (X \setminus C) \cup C &= (X \setminus C) \cup \bigcup_{i\in I} U_i \\
&\overset{\substack{\text{oBdA} \\ K \text{ kompakt}}}{\hookrightarrow} C \subset K \subset (X \setminus C) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \\
&\Longrightarrow C \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \qquad \checkmark
\end{aligned}
$$

$\square$

**Lemma 7.28**
$X$ Hausdorff, $K \underset{\text{kompakt}}{\subset} X \Longrightarrow K$ abgeschlossen.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass wenn $x \notin K$, dann ist $x$ kein Häufungspunkt von $K$. Für $y \in K \to y \neq x \overset{\substack{x \\ \text{Hausdorff}}}{\hookrightarrow} \exists U_y^x, V^y$ mit $U_y^x \cap V^y = \emptyset \to K \subset \bigcup_{y\in K} V^y \overset{K \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} K \subset V^{y_1} \cup \dots \cup V^{y_n}$ für $y_1, \dots, y_n \in K$.
Setze $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}^x \ni x$ offen. Zu zeigen bleibt: $U \cap \underbrace{K}_{=K\setminus\{x\}} = \emptyset$.
$U \cap K \subset U \cap (\bigcup_{i=1}^n V^{y_i}) = \bigcup U \cap V^{y_i} \subset U_{y_i}^x \cap V^{y_i} \underset{\text{n. Def.}}{=} \emptyset \Rightarrow x$ ist kein Häufungspunkt. $\square$

**Folgerung 7.29**
$X$ Hausdorff, $(K_i)_{i\in I}$ kompakte Teilmengen. $\Longrightarrow \bigcap_{i\in I} K_i$ kompakt.

*Beweis.* $\underbrace{\bigcap_{i\in I} \underbrace{K_i}_{\text{abg.}}}_{\subset K_i \text{ kompakt}}$ abgeschlossen. $\overset{(7.28)}{\Longrightarrow} \bigcap_{i\in I} K_i$ kompakt. $\square$

**Folgerung 7.30**
$f : X \longrightarrow Y$ stetig, $X, Y$ topologische Räume.

$$Y \text{ Hausdorff} \Longrightarrow f \text{ abgeschlossen}$$

*Beweis.* Sei $C \subset X$ abgeschlossen. $\Longrightarrow C$ ist kompakt $\Longrightarrow \underbrace{f(C)}_{\subset Y \text{ Hausdorff}}$ ist kompakt $\overset{(7.28)}{\Longrightarrow} f(C)$ abgeschlossen. $\square$

# 8 Stoneraum von Typen einer Theorie

Sei $T$ eine konsistente Theorie in der Sprache $\mathcal{L}$. Ein $n$-Typ ist eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln in den Variablen $x_1, \dots, x_n$, welche endlich konsistent bezüglich $T$ ist, und maximal mit dieser Eigenschaft bezüglich Inklusion.
Gegeben $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$. Dann ist $T \cup \{\ \exists \vec{x}(\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_j[\vec{x}])\}$ konsistent.

**Bemerkung 8.1**
Wenn $T$ vollständig ist, dann gilt

$$S_n(T) = S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset)$$

für jedes Modell $\mathcal{A} \models T$, wobei $S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset)$ die Menge aller Typen $p(x_1, \dots, x_n)$ in $n$ Variablen ist, sodass $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p,\ \mathcal{A} \models\ \exists \vec{x}(\bigwedge_{j=1}^{m} \varphi_j(\vec{x}))$.

Häufig: $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $B \subset A : S_n^{\mathcal{A}}(B) = S_n(\mathrm{Th}(\mathcal{A}, b)_{b \in B})$

**Definition 8.2**
Gegeben $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$, setze

$$[\varphi] = \{p \in S_n(T) \mid \varphi \in p\}$$

**Bemerkung 8.3**
Typen sind unter Deduktion abgeschlossen.

$$\begin{aligned}
&[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi] \\
&[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi] \\
&[\neg(x_1 \doteq x_1)] = \emptyset \\
&[\neg \varphi] = S_n(T) \setminus [\varphi] \\
&[(x_1 \doteq x_1)] = S_n(T)
\end{aligned}$$

**Bemerkung 8.4**

$$[\varphi] \subset [\psi] \iff T \models\ \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to \psi[\vec{x}])$$

Insbesondere $[\varphi] = [\psi]$ genau dann, wenn $\varphi, \psi$ logisch äquivalent modulo $T$ sind.

*Beweis.* „$\Rightarrow$“: Falls $T \models\ \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to \psi[\vec{x}]) \Longrightarrow T \cup \{\ \exists \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg \psi[\vec{x}])\}$ konsistent. Das heißt die Menge $\{(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg \psi[\vec{x}])\}$ ist ein partieller Typ.
$\overset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow}$ es gibt $p \in S_n(T)$ mit $(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg \psi[\vec{x}]) \in p \underset{\substack{p \text{ unter} \\ \text{Deduktion} \\ \text{abgeschlossen}}}{\Longrightarrow} p \in [\varphi] \setminus [\psi]$.

„$\Leftarrow$“: $p \in [\varphi] \Rightarrow \varphi \in p \overset{T \models\ \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to \psi[\vec{x}])}{\Longrightarrow} \psi \in p \Rightarrow p \in [\psi]$. □

**Satz 8.5**
Die Kollektion $\{[\varphi]\}_{\varphi[x_1,\ldots,x_n] \text{ eine } \mathcal{L}\text{-Formel}}$ bildet eine Basis der Topologie auf $S_n(T)$ derart, dass $S_n(T)$ 0-dimensional, Hausdorff und kompakt ist.

*Beweis.* Basis: ✓ wegen (8.3).

0-dimensional: $S_n(T) \setminus [\varphi] = \underbrace{[\neg\varphi]}_{\text{offen}} \Rightarrow [\varphi]$ ist abgeschlossen (und offen).

Hausdorff: Seien $p \neq q \in S_n(T) \Rightarrow$ es gibt $\varphi \in p \setminus q \Rightarrow p \in [\varphi], q \in [\neg\varphi]$ *disjunkt.*

$S_n(T)$ kompakt: Es genügt zu zeigen, dass jede offene Umgebung der Form $\bigcup_{i \in I} [\varphi_i]$ eine endliche Überdeckung besitzt, denn:

$$X = \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i}_{=\bigcup_{j \in J} B_{ij}} = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} B_{ij} \longrightarrow X \subset \underbrace{B_{i_1 j_1} \cup \cdots \cup B_{i_n j_n}}_{\subset U_{i_1}}$$

Also: $S_n(T) = \bigcup_{i \in I} [\varphi_i] \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{i \in I} [\neg\varphi_i] \overset{\text{Kompaktheitssatz}}{\Longrightarrow} \{\neg\varphi_i[\vec{x}]\}_{i \in I}$ nicht endlich erfüllbar in T $\Rightarrow$ es gibt $\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n}$ sodass $T \cup \{\ \exists\vec{x}(\bigwedge_{j=1}^{n} \neg\varphi_{ij}[\vec{x}])\}$ inkonsistent.
Also $T \models \ \forall\vec{x}(\bigvee_{j=1}^{n} \varphi_{ij}[\vec{x}]) \overset{(8.3)}{\Longrightarrow} S_n(T) = [\varphi_{i_1}] \cup \cdots \cup [\varphi_{i_n}]$. Sonst gäbe es $p \in S_n(T) \setminus \bigcup_{j=1}^{n} [\varphi_{ij}] \Rightarrow \neg\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_n} \in p \underset{\substack{p \text{ endlich} \\ \text{erfüllbar} \\ \text{in } T}}{\Longrightarrow} T \cup \{\ \exists\vec{x}(\bigwedge_{j=1}^{n} \neg\varphi_{ij}[\vec{x}])\}$. □

**Bemerkung 8.6**
Jede offene abgeschlossene Menge in $S_n(T)$ ist der Form $[\varphi]$ für eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$.

*Beweis.* Sei $X$ offen-abgeschlossen. $\underset{X \text{ offen}}{\Longrightarrow} X = \bigcup_{p \in X} [\varphi_p]$, mit $p \ni \varphi_p$.
$X$ abgeschlossen $\underset{\substack{S_n(T) \\ \text{kompakt}}}{\Longrightarrow} X$ kompakt $\underset{\text{Kompaktheit}}{\Longrightarrow} X = \bigcup_{i=1}^{n} [\varphi_{p_i}] = [\bigvee_{i=1}^{n} \varphi_{p_i}]$. □

**Definition 8.7** (Erinnerung)
Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ $\mathcal{L}$-Strukturen. $h : A_0 \longrightarrow B_0$ ist elementar, falls für alle $a_1, \ldots, a_n \in A_0$, $\varphi = \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Longleftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \ldots, h(a_n)]$$

**Bemerkung 8.8**
Sei $h : \overset{\subset A}{A_0} \longrightarrow \overset{\subset B}{B_0}$ elementar, $B \supset C \supset B_0$. Dann induziert $h$ eine abgeschlossene stetige

surjektive Abbildung

$$\underbrace{S_n^{\mathcal{B}}(C)}_{\substack{\text{kompakt \&}\\ \text{Hausdorff}}} \xrightarrow{h_*} \underbrace{S_n^{\mathcal{A}}(A_0)}_{\substack{\text{kompakt \&}\\ \text{Hausdorff}}}$$

*Bemerke:* Abgeschlossenheit von $h_*$ folgt direkt mit 7.30.

$$h_*(q) = \left\{ \varphi[x_1, \dots x_n] \mathcal{L}_{A_0}\text{-Formel mit } \underbrace{h(q)}_{\substack{\mathcal{L}_{B_0}\text{-Formel}\\ \hookrightarrow \mathcal{L}_C\text{-Formel}}} \in q \right\}$$

**Beispiel 8.9**
$\varphi = (x_1 \doteq a_1)$, $h(\varphi) = (x_1 \doteq \underbrace{h(a_1)}_{\in B_0 \subset C})$.

*Beweis von Bemerkung 8.8.* Zeige zuerst: $h_*$ ist *wohldefiniert*: Sei $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in h_*(q)$.
$\not{\mathbb{Z}}$ : $\mathcal{A} \models \exists \vec{x}(\bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i[\vec{x}])$.

Nach Voraussetzung gilt: $h(\varphi_1), \dots, h(\varphi_k) \in q \overset{\substack{\text{endlich}\\ \text{erfüllbar}}}{\Longrightarrow} \mathcal{B} \models \exists \vec{x} \underbrace{\left( \bigwedge_{i=1}^{k} h(\varphi_i[\vec{x}]) \right)}_{=\Theta[h(a_1), \dots, h(a_m)]}$

$\Longrightarrow$ Behauptung.

Zeige weiter: $h_*(q)$ ist *maximal endlich erfüllbar*. Es genügt zu zeigen, dass falls $\varphi \notin h_*(q) \Longrightarrow \neg\varphi \in h_*(q)$.
Angenommen $h_*(q) \subsetneq \sum$. $\not{\mathbb{Z}}$ : $\sum$ nicht endlich erfüllbar in $\mathcal{A}$.
Nach Voraussetzung gibt es $\varphi \in \sum \setminus h_*(q)$. $\Longrightarrow \neg\varphi \in h_*(q) \subset \sum \Longrightarrow \{\varphi, \neg\varphi\} \subset \sum$. Sei $\varphi \notin h_*(q) \Longrightarrow h(\varphi) \in q \overset{q \text{ vollständig}}{\Longrightarrow} \underbrace{\neg h(\varphi)}_{=h(\neg\varphi)} \in q \Longrightarrow \neg\varphi \in h_*(q)$. Typen sind Ultrafilter

Zeige weiter: $h_*$ ist *stetig*. Es genügt zu zeigen, dass $h_*^{-1}([\varphi])$ offen ist.

$$[h(\overbrace{\varphi}^{\mathcal{L}_{B_0}\text{-Formel}})] = \{q \in S_n^{\mathcal{B}}(C) \mid \underbrace{h_*(q) \in [\varphi]}_{\substack{\updownarrow\\ \varphi \in h_*(q)\\ \updownarrow\\ h(\varphi) \in q}}\} = h_*^{-1}([\varphi])$$

Zeige nun *Surjektivität*. Sei $p \in S_n^{\mathcal{A}}(A_0)$. Wir suchen ein $q$ mit $\underbrace{\varphi}_{\mathcal{L}_{A_0}\text{-Formel}} \in h_*(q) = p$

$\Longrightarrow h(\varphi) \in q$.

**Beispiel 8.10**
Betrachte $(\mathbb{R},<) \preceq \underbrace{(\mathcal{R},<)}_{0<\varepsilon<r,\ r>0}$ über $\mathbb{Q} \cup \{\varepsilon\}$. Hier werden zwei verschiedene Typen in einen einzigen abgebildet:

$$\begin{matrix} q \in \mathbb{R} \\ q > x > \varepsilon \\ 0 < x < \varepsilon \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} 0 < x < q \\ q > 0 \end{matrix}$$

Zur Übung: Wenn in Bemerkung 8.8 $B_0$ anstelle von $C$ stünde, so wäre $h_*$ ein Homöomorphismus.

Frage: Ist $\{h(\varphi) \mid \varphi \in p\}$ endlich erfüllbar?
Seien dazu $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in p$. $\mathbb{Z}$: $\mathcal{B} \models \exists \vec{x}(\bigwedge_{i=1}^{k} h(\varphi_i)[\vec{x}])$
Aus dem vorherigen Teil des Beweises folgt $\mathcal{A} \models \exists \vec{x}(\bigwedge_{i=1}^{k} h(\varphi_i[\vec{x}])) \Longrightarrow$ Behauptung. $\square$

**Beispiel 8.11**
Sei $\mathcal{A} = \mathcal{B}$ und $A_0 \subset C$. Dann besagt der Satz:

$$\begin{matrix} S_n^{\mathcal{A}}(C) & \xrightarrow{\substack{\text{Einschränkung} \\ \text{von Prametern}}} & S_n^{\mathcal{A}}(A_0) \\ q & \longmapsto & q_{\restriction A_0} \end{matrix}$$

# 9 Typenvermeidungssatz und Isolation

Im Folgenden betrachten wir *isolierte Typen*. Topologisch betrachtet sieht das so aus:

$$\overset{\in S_n(T)}{p} \text{ isoliert } \iff \underset{\text{abgeschlossen}}{\overset{\text{offen}}{\{p\}}} = [p] \text{für eine } \mathcal{L}\text{-Formel } \varphi \in p$$

Wir möchten das syntaktisch verstehen.

**Bemerkung 9.1**
Ein $n$-Typ $p \in S_n(T)$ ist genau dann isoliert, wenn er eine *komplette* Formel $\varphi = \varphi[x_1, \ldots, x_n]$ enthält, das heißt

$$p = \{\psi \ \mathcal{L}\text{-Formel} \mid T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to \psi[\vec{x}])\}$$

<u>Insbesondere</u> ist jeder isolierte Typ in jedem Modell von $T$ realisiert, falls $T$ vollständig ist!

<u>Aufgaben</u> (Blatt 6): Betrachte $\overbrace{(\mathbb{R}, <)}^{\text{hat QE}}$.

- Ist der Typ $\{0 < x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}}$ isoliert?
- Ist der Typ $\{(x \doteq 15)\}$ isoliert[12]?

*Beweis von Bemerkung 9.1.* <u>„⇒“</u>: Sei $\psi \in p$. $\Longrightarrow \left[\underbrace{(\varphi \wedge \psi)}_{\in p}\right] \subset [\varphi] = \{p\} \Longrightarrow [\varphi] = [(\varphi \wedge \psi)] \iff T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to \psi[\vec{x}])$

$\Longrightarrow p \subseteq \{\psi \ \mathcal{L}\text{-Formel} \mid T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to \psi[\vec{x}])\}$
Hier möchten wir eigentlich Gleichheit zeigen. Weil $p$ jedoch bezüglich $\subset$ maximal ist, genügt es zu zeigen, dass die rechte Seite endlich erfüllbar ist: $\{\psi_1, \ldots, \psi_k \mid T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to \psi_i[\vec{x}])\}$. Also: $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to (\bigwedge_{i=1}^{k} \psi_i[\vec{x}]))$.
$\lightning$ : $T \cup \left\{ \exists \vec{x} \left( \bigwedge_{i=1}^{k} \psi_i\,[\vec{x}] \right) \right\}$ konsistent.
$\varphi \in \underbrace{p}_{\substack{\text{endlich} \\ \text{erfüllbar}}} \Longrightarrow T \cup \{\exists \vec{x} \varphi[\vec{x}]\}$ ist konsistent $\Longrightarrow$ Behauptung.

[12] das ist nur ein Typ, denn er muss endlich erfüllbar sein

„$\Leftarrow$“: Angenommen $p = \underbrace{\{\psi \mid T \models \forall\vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to \psi[\vec{x}])\}}_{\ni\varphi}$. Dann folgt $\varphi \in p$, und somit

$\{p\} \underbrace{\overset{\subset \text{ klar}}{=}}_{\text{Hausdorff}} \bigcap_{\psi\in p} [\psi] \supset [\varphi] \ni p \Longrightarrow \{p\} = [\varphi]$ ist isoliert!

Zu „Insbesondere“: $T$ vollständig. Sei $p$ isoliert durch $\varphi$. $\overset{T \text{ vollständig}}{\Longrightarrow} T \models \exists\vec{x}\varphi[\vec{x}]$. Sei $\mathcal{M} \models T$ und $\vec{a} \in M^{|\vec{x}|} \mid \mathcal{M} \models \varphi[\vec{a}] \Longrightarrow \mathcal{M} \models \psi[\vec{a}]$ für $\psi \in p$. □

**Bemerkung 9.2**
$h : A_0 \longrightarrow B_0 = \mathrm{Im}(h)$ elementar $\Longrightarrow h_* : S_n^{\mathcal{B}}(B_0) \longrightarrow S_n^{\mathcal{A}}(A_0)$ Homöomorphismus[13].

**Beispiel 9.3**
Sei $T = \exists^\infty$ (diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination). Betrachte $\mathcal{A} \models T$. Wir wollen $S_1^{\mathcal{A}}(A)$ besser verstehen. $S_1^{\mathcal{A}}(A)$ enthält Typen der Form $(x \doteq a)$ für jedes Element $a$ (diese Typen sind isoliert), sowie einen Typen der Form $\{\neg(x \doteq a)\}_{a\in A}$ (ohne diesen Typen hätten wir ein Problem, denn dann wären alle Typen isoliert). Insbesondere folgt auch: Für $A$ abzählbar gilt $|S_1^{\mathcal{A}}(A)| \leq \aleph_0$.

Vgl. Blatt 5 Aufgabe 3

**Beispiel 9.4**
Sei $\mathcal{G} = (G, R)$ Zufallsgraph. Alle Typen sind der Form $\{xRa\}_{a\in A} \cup \{\neg xRb\}_{b\in G\setminus A} \cup \{\neg(x \doteq g)\}_{g\in G}$. Somit folgt insbesondere $|S_1^{\mathcal{G}}(G)| \geq 2^{|G|}$.

**Satz 9.5** (Typenvermeidungssatz)
Sei $T$ eine abzählbare konsistente Theorie (Theorie in einer abzählbaren Sprache), $p \in S_n(T)$ ein nicht-isolierter $n$-Typ. Es gibt ein abzählbares Modell $\mathcal{M}$ von $T$, welches $p$ vermeidet, das heißt $p$ wird nicht in $\mathcal{M}$ realisiert.

*Beweis mit Henkins Methode.* Sei $C$ eine abzählbare Menge von neuen Konstanten. In der Sprache $\mathcal{L} \cup C$, sei $\{\varphi_m[\vec{x}]\}_{m\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung aller Formeln in einer Variablen. Sei $\{\vec{c_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung aller $n$-Tupel aus $C$. Konstruiere eine Kette $\sum_0 \subset \sum_1 \subset \sum_2 \subset \dots$ von endlichen Mengen von $(\mathcal{L} \cup C)$-Aussagen derart, dass $T \cup \sum_k$ konsistent ist für jedes $k \in \mathbb{N}$.
$\sum_0 = \emptyset$.
Angenommen $\sum_k$ bereits konstruiert.

1. Fall: $k = 2m$. Sei $i \in \mathbb{N}$ minimal, sodass $c_i$ weder in $\varphi_m$ noch in den Aussagen aus $\sum_k$ vorkommt. Setze

$$\sum_{k+1} = \sum_k \cup \{(\ \exists x\varphi_m[x] \to \varphi[c_i])\}$$

$T \cup \sum_{k+1}$ ist konsistent.

[13]Homöomorphismen interessieren uns, weil unter diesen Topologien erhalten bleiben

<u>2. Fall:</u> $k = 2m+1$. Sei $\bigwedge_{\chi \in \sum_k} \chi = \Theta[\overbrace{\vec{c}}^{\text{Tupel aus } C}]$, für $\Theta$ eine $\mathcal{L}$-Formel. OBdA schreibe $\Theta[\vec{c}] = \Theta[\underbrace{\vec{c_m}}_{n\text{-Tupel}}, \vec{c}]$. Setze $\varphi[x_1, \ldots, x_n] = \exists \vec{y} \Theta[\vec{x}, \vec{y}]$.

*Bemerke:* $T \cup \{ \exists \vec{x} \varphi[\vec{x}]\}$ ist konsistent.
Also ist $\emptyset \neq [\varphi]$ eine nicht-leere Umgebung $S_n(T)$. Weil $p$ nicht isoliert ist, gibt es $\psi \in p$ mit $T \not\models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}]) \Longrightarrow$ es gibt ein Modell $\underbrace{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\text{-Struktur}}$ von $T$ mit $\vec{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi[\vec{a}]$, aber $\mathcal{M} \models \neg\psi[\vec{a}]$. Damit folgt insbesondere: es gibt ein $\vec{d}$ in $M$ mit $\mathcal{M} \models \Theta[\vec{a}, \vec{d}]$.

Setze

$$\sum_{k+1} = \sum_k \cup \{\neg\psi[\vec{c_m}]\}$$

Ist $T \cup \sum_{k+1}$ konsistent? $\rightarrow$ ja.
Sei $T' = T \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \sum_k$ ist endlich konsistent und $C$ ist eine Menge von Henkinkonstanten für $T \cup \sum_k$.

$\underset{\text{Beweis von Henkin}}{\Longrightarrow}$ Es gibt ein abzählbares Modell $\mathcal{M}$ von $T'$, welches nur aus Interpretationen der Konstanten aus $C$ besteht.

<u>Insbesondere:</u> $\mathcal{M} \models T$ abzählbar.
$\mathbb{Z}$ : $p$ wird in $\mathcal{M}$ nicht realisiert:
Sei $\vec{a} \in M^n \rightarrow \vec{a}$ ist die Interpretation des Tupels $\vec{c_m}$ für eon $m \in \mathbb{N}$.
$\underset{\text{Schritt } 2m+1}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{M} \models \neg\psi[\vec{a}]$ für ein $\psi \in p$. □

**Bemerkung 9.6**
$p \in S_n(T)$ nicht isoliert. $\{p\}$ abgeschlossen, aber $\{\mathring{p}\} = \emptyset$, wobei $\mathring{A}$ die größte offene Menge $U$ ist, welche ganz in $A$ liegt. (das Innere von $A$)

*Warum?* $\underset{\text{offen}}{U} \subset \{p\} \Longrightarrow \begin{matrix} U = \emptyset \\ \text{oder} \\ \underbrace{U = \{p\}}_{\text{abgeschlossen und offen}} \end{matrix} \Longrightarrow p$ isoliert.

# 10 Magere Mengen und Typenvermeidungssatz

**Definition 10.1**
Eine Menge $A$ in einem topologischen Raum $(X, T)$ ist *nirgends dicht*, falls $\mathring{\bar{A}} = \emptyset$, wobei $\bar{A}$ kleinste abgeschlossene Menge welche $A$ enthält ist.

**Beispiel 10.2**
Ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ nirgends dicht? Nein, denn $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \mathring{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$.

**Definition 10.3**
$A$ ist *mager*[14], falls $A = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$, wobei $A_n$ nirgends dicht.

**Satz 10.4** (Verallgemeinerter Typenvermeidungssatz)
$T$ abzählbar konsistent. Sei $A_n \subset S_n(T)$ mager für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein abzählbares Modell $\mathcal{M} \models T$, welches alle Typen in $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ vermeidet.

*Hier ohne Beweis.* □

**Definition 10.5**
Sei $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{L}$-Struktur. Ein $n$-Typ $p \in S_n^{\mathcal{A}}(B), \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ist *atomar*, falls $p$ isoliert ist.

**Lemma 10.6**
Sei $\mathcal{A}$ ein $\mathcal{L}$-Struktur, $\vec{a}, \vec{b}$ endliche Tupel.

$$\underbrace{\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}, \vec{b})}_{\{\varphi[\vec{x},\vec{y}]\ \mathcal{L}\text{-Formel} \mid \mathcal{A} \models \varphi[\vec{a},\vec{b}]\}} \quad \text{ist isoliert} \iff \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{b}) \text{ und } \underbrace{\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}/\vec{b})}_{\substack{=\{\psi[\vec{x}] \text{ Formeln in} \\ \mathcal{L} \cup \{b_1,\ldots,b_n\} \mid \mathcal{A} \models \psi[\vec{a}]}} \quad \text{sind beide isoliert.}$$

*Beweis.* „$\Rightarrow$“: Angenommen $\varphi[\vec{x}, \vec{y}]$ isoliert $\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}, \vec{b})$. Zeige zuerst, dass $\varphi[\vec{x}, \vec{b}]$ den Typ $\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}/\vec{b})$ isoliert. (liegt bereits im Typ nach Definition)

Sei $\psi[\vec{x}, \vec{b}] \in \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}/\vec{b}) \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[\vec{a}, \vec{b}]$.

Zu zeigen: $\mathcal{A} \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}, \vec{b}] \to \psi[\vec{x}, \vec{b}])$.
Wegen $\varphi[\vec{x}, \vec{y}]$ isoliert $\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}, \vec{b})$, gilt auch $\mathcal{A} \models \forall \vec{x}\, \forall \vec{y}(\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \to \psi[\vec{x}, \vec{y}]) \Rightarrow$ Behauptung.

Für $\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{b}) \ni \underline{\exists \vec{x} \varphi[\vec{x}, \vec{y}]} \to$ zeige, dass diese Formel den Typ isoliert.

$$\mathcal{A} \models \forall \vec{y}(\exists \vec{x} \varphi[\vec{x}, \vec{y}] \to \Theta[\vec{y}]), \quad \underbrace{\Theta \in \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{b})}_{\mathcal{A} \models \Theta[\vec{b}] \Rightarrow \mathcal{A} \models \Theta[\vec{a},\vec{b}]}.$$

[14] Idee hier: „nicht so groß“

Sei $\vec{b_1} \in A$ beliebig mit $\mathcal{A} \models \exists \vec{x} \varphi[\vec{x}, \vec{b_1}] \Rightarrow$ es gibt ein $\vec{a_1} \in A$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a_1}, \vec{b_1}]$.

Es gilt immer $\mathcal{A} \models \forall \vec{x}\, \forall \vec{y}(\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \to \Theta[\vec{y}]) \Longrightarrow \mathcal{A} \models \Theta[\vec{b_1}]$.

„$\Leftarrow$“: Sei $\Theta[\vec{y}] \in \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{b})$ und $\varphi[\vec{x}, \vec{b}] \in \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}/\vec{b})$ isolierende Formeln. Setze $\psi[\vec{x}, \vec{y}] = (\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \wedge \Theta[\vec{y}]) \in \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}, \vec{b})$.

$\mathbb{Z}$: $\mathcal{A} \models \forall \vec{x}\, \forall \vec{y}(\psi[\vec{x}, \vec{y}] \to \chi[\vec{x}, \vec{y}])$ für alle $\chi \in \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}/\vec{b}) : \mathcal{A} \models \chi[\vec{x}, \vec{y}]$.

$\chi[\vec{x}, \vec{b}] \in \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}/\vec{b}) \Rightarrow \mathcal{A} \models \underbrace{\forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}, \vec{b}] \to \chi[\vec{a}, \vec{b}])}_{\Theta_1[\vec{b}]}$. Also $\Theta_1[\vec{y}] \in \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{b}) \to \mathcal{A} \models \forall \vec{y}(\Theta[\vec{y}] \to \Theta_1[\vec{y}])$.

Sei nun $\vec{a_1}, \vec{b_1} \in A$ mit $\mathcal{A} \models \psi[\vec{a_1}, \vec{b_1}] \begin{cases} \mathcal{A} \models \varphi[\vec{a_1}, \vec{b_1}] \\ \text{und} \\ \mathcal{A} \models \Theta[\vec{b_1}] \end{cases}. \overset{\text{mit „also“}}{\Longrightarrow} \mathcal{A} \models \Theta_1[\vec{b_1}] \underset{\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a_1}, \vec{b_1}]}{\Longrightarrow} \mathcal{A} \models \chi[\vec{a_1}, \vec{b_1}]$. □

# Teil III
# Total transzendente Theorien und Kategorizität

## 11 Primmodelle. Existenz und Eindeutigkeit

Ab jetzt: $T$ ist eine konsistente abzählbare Theorie.

**Definition 11.1**
$\mathcal{M} \models T$ ist ein *Primmodell*, falls $\mathcal{M}$ sich in jedes andere Modell von $T$ elementar einbetten lässt.

**Beispiel 11.2**
$\underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{Primmodell}}, \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \ldots, \mathbb{Q}^n, \ldots, \mathbb{Q}^\omega$. Wegen Quantorenelimination ist jede Einbettung elementar!

**Bemerkung 11.3**
- Wenn $T$ ein Primmodell besitzt, dann ist $T$ vollständig
- Wenn $\mathcal{M}$ ein Primmodell von $T$ ist, dann ist $\mathcal{M}$ abzählbar
- Wenn $\mathcal{M}$ ein Primmodell von $T$ ist, dann ist der Typ $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a})$ für $\vec{a} \in M$ immer $\begin{matrix}\text{atomar}\\\text{isoliert}\end{matrix}$ (sonst finde Modell das Typen nicht realisiert. Einbettung liefert doch eine Realisierung)

Ab jetzt: $T$ ist vollständige, abzählbare Theorie ohne endliche Modelle.

**Satz 11.4**
$T$ wie oben. $\mathcal{M} \models T$ ist genau dann prim, wenn $\mathcal{M}$ abzählbar ist und für jedes Tupel $\vec{a} \underset{\text{endlich}}{\in} M$ gilt, dass $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a})$ atomar ist.

*Beweis.* „$\Rightarrow$“: ✓ (gerade gesehen)

„$\Leftarrow$“: Sei $\mathcal{N} \models T$ beliebig. Z.z.: $\mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$ elementar.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $M$. Konstruiere eine Kette $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementarer Abbildungen zwischen endlich erzeugten Teilmengen von $\mathcal{M}$ un $\mathcal{N}$ derart, dass $a \in \mathrm{Dom}(f_{n+1})$.

Sei $f_0 = \emptyset \overset{T \text{ vollst.}}{\longrightarrow} \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$.
Angenommen $f_n$ konsistent. Betrachte $\underline{a_n}$.

<u>1. Fall:</u> $a_n \in \mathrm{Dom}(f_n) \rightarrow f_{n+1} = f_n$

<u>2. Fall:</u> Sonst schreibe $\vec{a}$ eine Aufzählung von $\mathrm{Dom}(f_n)$, $\vec{b} \in N$ eine Aufzählung von $\mathrm{Im}(f_n)$.
$\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a}, a_n)$ atomar $\Longrightarrow \underbrace{\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_n/\vec{a})}_{\in S_1^{\mathcal{M}}(\vec{a})}$ ist atomar.

$f_n^{-1} : \vec{b} \longrightarrow \vec{a}$ elementar. $\rightarrow (f_n^{-1})_* : S_1^{\mathcal{M}}(\vec{a}) \longrightarrow S_1^{\mathcal{N}}(\vec{b})$ Homöomorphismus (denn die Parametermenge ist gleich).

Insbesondere: Topologie bleibt erhalten: $(f_n^{-1})_*(\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a_n/\vec{a}))$ ist isoliert $\Rightarrow$ wird in $\mathcal{N}$ von Element $b$ realisiert.

Setze $f_{n+1} = f_n \cup \{(a_n, b)\}$.

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_n, \vec{a}] \Leftrightarrow \varphi[x, \vec{a}] \in \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(a/\vec{a}) \underset{\text{Bild unter } (f_n^{-1})_*}{\Longleftrightarrow} \varphi[\vec{x}, \vec{b}] \in \mathrm{tp}^{\mathcal{N}}(b/\vec{b}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi[b, \vec{b}].$$

□

**Folgerung 11.5**
Das Primmodell einer vollständigen abzählbaren Theorie $T$ ist, wenn es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig.

*Beweis.* Analog. □

**Beispiel 11.6** (Beispiele von Primmodellen)

- $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\longrightarrow \mathbb{Q}$
- $\exists^\infty \longrightarrow \mathcal{M}$ abzählbar
- $\mathrm{ACF}_0 \longrightarrow \bar{\mathbb{Q}}$
- $\mathcal{M} = \{0,1\}^\omega$ in der Sprache $\mathcal{L} = \{P_s\}$, $s$ endliche Folge von $0, 1$. $P_s^{\mathcal{M}}(t) = \{$der Anfang von $T$ ist $s\}$.
  $T = \mathrm{Th}(\mathcal{M})$ hat Quantorenelimination:

  $$\underbrace{\exists y \left(\bigwedge \varphi[x_1, \ldots, x_n, y]\right)}_{\text{primitive Existenzformel}} \sim \Theta[x_1, \ldots, x_n] \wedge \ \exists y \rho[y] \sim \begin{cases} x_1 \doteq x_1 & \text{eine Tautologie} \\ \neg x_1 \doteq x_1 & \text{immer falsch} \end{cases}$$

  Zudem

  $T \vdash \ \forall x (P_{000}(x) \vee P_{001}(x) \vee P_{010}(x) \vee P_{011}(x) \vee P_{100}(x) \vee P_{110}(x) \vee P_{111}(x) \vee P_{101}(x))$

$\longrightarrow$ Man kann keine Typen isolieren, weil sich Typen nicht eindeutig durch endlich viele Aussagen bestimmen lassen.

**Satz 11.7**
Es sei $T$ vollständig, abzählbar mit unendlichen Modellen. Dann gilt:
$T$ besitzt ein Primmodell $\Longleftrightarrow$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ liegen die isolierten Typen dicht in $S_n(T)$.

*Beweis.* „$\Rightarrow$": Sei $n \in \mathbb{N}$ und $[\varphi[x_1, \ldots, x_n]] \neq \emptyset$ in $S_n(T)$. $T$ besitzt ein Primmodell $\mathcal{M}$. Also $T \cup \{\exists \vec{x} \varphi[\vec{x}]\}$ konsistent. $\overset{T \text{ vollständig}}{\underset{\mathcal{M} \text{ Modell}}{\Longrightarrow}} \mathcal{M} \models \exists \vec{x} \varphi[\vec{x}] \Rightarrow$ es gibt ein $\vec{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi[\vec{a}]$.
Dann gilt $\underbrace{\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a})}_{\substack{\text{isoliert, weil Typen} \\ \text{in Primmodell} \\ \text{immer isoliert}}} \in [\varphi]$.

„$\Leftarrow$": Ein abzählbares Modell $\mathcal{M} \models T$ ist dann prim, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{M}$ die Menge von Formeln $\sum_n = \{\neg\varphi[x_1, \ldots, x_n]\}_{\varphi \; \mathcal{L}\text{-Formel, } [\varphi]=\{\mathrm{pt}\} \text{ in } S_n(T)}$

$$\text{Ein } n\text{-Typ } p \text{ enthält } \textstyle\sum_n \Leftrightarrow p \in \overbrace{\bigcap_{\substack{\varphi[x_1,\ldots,x_n] \\ \mathcal{L}\text{-Formel mit} \\ [\varphi]=\{\mathrm{pt}\}}} \underbrace{[\neg\varphi]}_{\text{abgeschlossen}}}^{\substack{\text{Schnitte abgeschlossener Mengen} \\ \text{sind abgeschlossen}}}$$

Wenn $\bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi]$ mager ist, dann gibt es ein abzählbares Modell, welches kein $\underbrace{\Sigma_n}_{\text{Primmodell}}$ realisiert.

Wir zeigen $\bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi]$ nirgends dicht. Wie sieht das Innere von $\underbrace{\bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}}}_{\text{abgeschlossen}} [\neg\varphi]$ aus?

Sei $U \underset{\text{offen}}{\subset} \bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi]$. Es genügt, den Fall $U = [\psi]$ zu betrachten.

Z: $[\psi] = \emptyset$. Falls $[\psi] \neq \emptyset \Rightarrow$ es gibt ein $p \in [\psi]$ isolierter Typ $\Longrightarrow$ es gibt eine isolierende Formel $\chi \in p$. Somit $p \in \bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi] \Longrightarrow p \in [\neg\chi]$. Widerspruch, denn jetzt enthält $p$ eine Formel und deren Negation. $\square$

**Definition 11.8**
Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Ein binärer Baum von Formeln in einer freien Variablen mit Parametern aus $A$ ist eine Menge $\{\varphi_s[x]\}_{s \in {}^{<\omega}2}$ ($s$ ist also eine endliche Folge von $0, 1$) von $\mathcal{L}_A$-Formeln mit folgenden Eigenschaften:

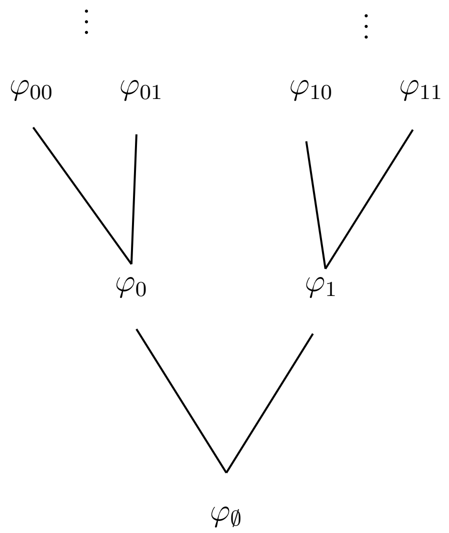
(1) $\mathcal{A} \models \exists x \varphi_s[x]$ für jede endliche Folge $s$

(2) $\mathcal{A} \models \forall x((\varphi_{s\wedge 0}[x] \vee \varphi_{s\wedge 1}[x]) \to \varphi_s[x])$

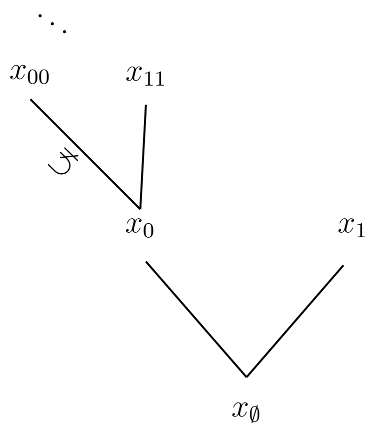
(3) $\mathcal{A} \models \neg \exists x(\varphi_{s\wedge 0}[x] \wedge \varphi_{s\wedge 1}[x])$

**Definition 11.9**
$T$ ist *total transzendent*, falls $T$ kein Modell besitzt, in welchem es einen binären Baum von Formeln in einer Variablen gibt.

**Beispiel 11.10**

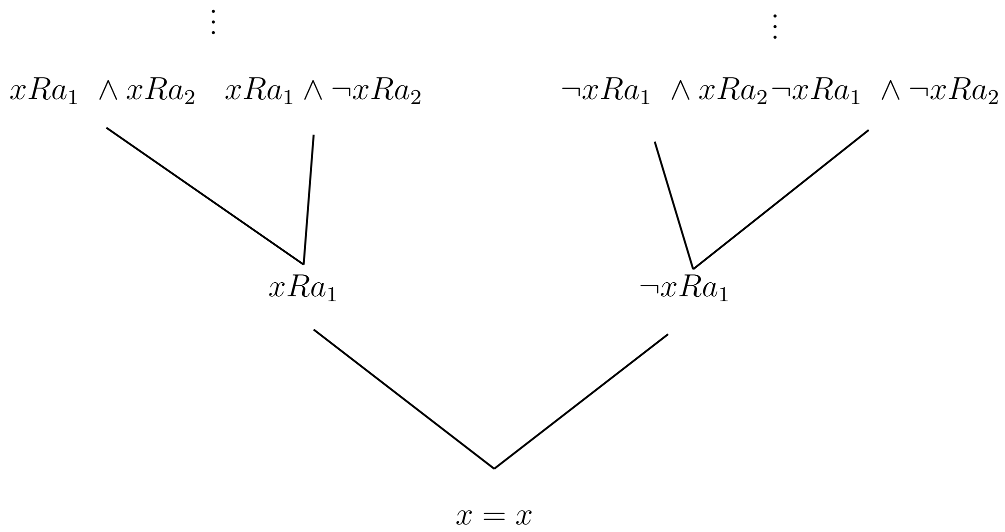



**Beispiel 11.11**
$T = \exists^\infty$. $\underbrace{X \subset}_{\text{definierbar}} M$ mit Parametern $\longrightarrow X$ endlich oder koendlich[15].




[15] das ist genau, was Morleys Kategorizitätssatz besagt (versteckt)

**Beispiel 11.12** (Nicht-Beispiel)
$T =$ Zufallsgraphen.

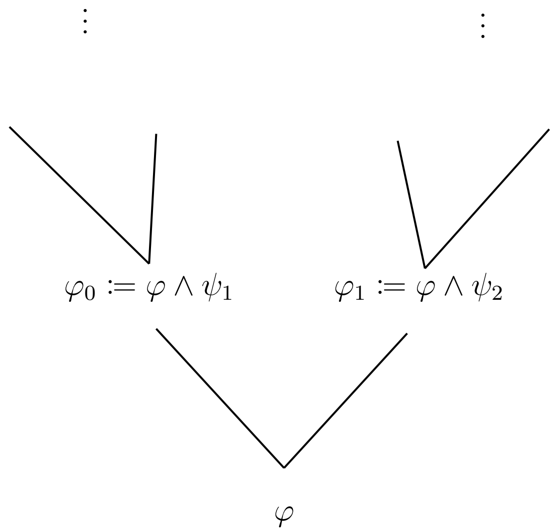



**Lemma 11.13**
$T$ vollständig abzählbar mit unendlichen Modellen. Falls $T$ total transzendent ist, dann liegen für jedes $\mathcal{M} \models T$, $\underbrace{A \subset}_{\text{abzählbar}} M$ die isolierten Typen dicht in $S_n^{\mathcal{M}}(A)$.

Insbesondere besitzt $T$ ein Primmodell.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass die isolierten Typen dicht in $S_1^{\mathcal{M}}(A)$ liegen (vgl. Blatt 6, Aufgabe 3). Sonst gibt es eine offene, nicht-leere Umgebung ohne isolierte Typen. OBdA wird diese Umgebung durch $[\varphi[x]]$ gegeben.

$0 \neq |[\varphi]| \geq 2$. Finde also $p \neq q \in [\varphi]$.




Dadurch bricht der Baum nicht ab. □

**Definition 11.14**
Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $C \subset A$. $B \subset A$ ist *konstruktibel über* $C$, falls $B = (b_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ so[16], dass der Typ $\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(b_\alpha/C, (b_\beta)_{\beta<\alpha})$ isoliert ist für alle $\alpha < \lambda$.

**Bemerkung 11.15**
$T$ eine Theorie, $\mathcal{A} \models T$, $C \subset A$. $T_C = T \cup \mathrm{Diag}(C)$. Wenn $T_C$ ein konstruktibles Modell (über $C$) besitzt, dann ist dieses Modell ein Primmodell von $T_C$.

*Beweis.* Sei $\mathcal{M} = (m_i)_{i<\lambda}$ konstruktibel über $C$, $\mathcal{N} \models T_C$ beliebig. $Z\!\!\!Z: \ \mathcal{M} \overset{\simeq}{\hookrightarrow} \mathcal{N}$.

Konstruiere eine Kette von $\mathcal{L}_C$-elementarer Abbildungen $f_\alpha : \mathrm{Dom}(f_\alpha) \subset \mathcal{M} \ldots \mathcal{N}$ so, dass $m_\alpha \in \mathrm{Dom}(f_{\alpha+1})$
$f_0 = \emptyset$.
Sei $f_\alpha$ bereits konstruiert. $m_\alpha \in \mathrm{Dom}(f_\alpha) \longrightarrow f_{\alpha+1} = f_\alpha$.
Wenn nicht: $\underbrace{(f_\alpha^{-1})_*}_{\substack{\text{Hmöomorphismus,} \\ \text{erhält Topologie}}} (\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(m_\alpha/C, (m_\beta)_{\beta<\alpha}))$ ist isoliert. $\Longrightarrow$ es wird in $\mathcal{N}$ von $b$ realisiert. $\Longrightarrow f_{\alpha+1} = f_\alpha \cup \{(a_\alpha, b)\}$. □

**Folgerung 11.16**
Je zwei konstruktible Modelle sind isomorph über $C$.

**Proposition 11.17**
Wenn $T$ total transzendent ist, dann gibt es für jedes $C \subset A$, $\mathcal{A} \models T$, ein Primmodell über $C$.

[16] ist das unabhängig von der Aufzählung? Das ist unklar, wird in dieser Vorlesung umgangen.

*Beweis.* oBdA $C \neq \emptyset$. Sei $\mathcal{A}$ ein konkretes Modell.

$$S = \left\{ (B,\alpha,f), \begin{array}{c} B \subset A \\ \alpha \in O_n \\ f:\alpha \to B \text{ Bijektion} \end{array} \begin{array}{c} \text{derart, dass für jedes } \beta < \alpha \\ \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(b_\beta / C, (b_\gamma)_{\gamma<\beta}) \text{ atomar, } b_\beta = f(\beta) \end{array} \right\}$$

Setze $(B_1,\alpha_1,f_1) \leq (B_2,\alpha_2,f_2)$, falls $B_1 \subset B_2$, $\alpha_a \leq \alpha_2$ und $f_{2\restriction\alpha_1} = f_1$; eine partielle Ordnung auf $S$.

**Bemerkung 11.18**

$$(B,\alpha,f) \in S, \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(d/B,C) \text{ atomar für ein } d \in A \Longrightarrow \left( B \cup \{d\}, S(\alpha), \begin{array}{r} S(\alpha) \longrightarrow B \cup \{d\} \\ \beta \longmapsto f(\beta) \\ \alpha \longmapsto d \end{array} \right) \in S$$

Ferner $(c, \underline{1}, \underline{0} \longrightarrow c) \in S$ für alle $c \in C \implies S \neq \emptyset$.
$S$ ist induktiv. Sei $\Gamma(B_i,\alpha_i,f_i)$ eine Kette in $S$. Setze $B = \bigcup B_i$, $\alpha = \sup \alpha_i$,
$f = \bigcup f_i : \alpha \underset{\text{Bijektion}}{\longrightarrow} B$.

Noch $\mathbb{Z}$: $(B,\alpha,f) \in S$.
Sei $\beta < \alpha$. $\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(b_\beta/C,(b_\gamma)_{\gamma<\beta})$ atomar. $b_\beta = \underbrace{f(\beta),\ \beta < \alpha_i}_{=f_i(\beta)}$ für ein $i$, sonst Widerspruch.

$b_\gamma = f_i(\gamma)$ für $\gamma < \beta < \alpha_i$. Somit: $\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(f_i(\beta)/C,(f_i(\gamma))_{\gamma<\beta})$ atomar, $(B_i,\alpha_i,f_i) \in S$.
$\Longrightarrow C \subset B$

Sei $(B,\alpha,f) \in S$ maximal.

Tarskis Test: $\varphi[x_1,\ldots,x_n,y], b_1,\ldots,b_n \in B, \mathcal{A} \models \varphi[b_1,\ldots,b_n,a]$ für ein $a \in A$. Betrachte jetzt $\emptyset \neq [\varphi[b_1,\ldots,b_n,y]]$ in $S_1^{\mathcal{A}}(B)$. $\overset{T \text{ total transzendent}}{\Longrightarrow}$ es gibt $d \in A$, sodass $\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(d/B)$ atomar ist (folgt mit (11.18)) und $\mathcal{A} \models \varphi[b_1,\ldots,b_n,d]$.

$\underbrace{(B,\alpha,f)}_{\text{maximal, somit Gleichheit}} \leq \underbrace{(B \cup \{d\}, S(\alpha), f \cup \{(\alpha,d)\})}_{\in S} \Longrightarrow d \in B \Longrightarrow$ $B$ ist Universum einer elementaren Unterstruktur. □

# 12 Saturation

Wir haben verstanden, dass wir in der Theorie der Vektorräume $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}, \dots, \mathbb{Q}^\omega$ haben, wobei $\mathbb{Q}$ das Primmodell ist. Jetzt möchten wir $\mathbb{Q}^\omega$ verstehen.

**Definition 12.1**
Sei $\kappa \geq \aleph_0$ eine Kardinalzahl. Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ ist *$\kappa$-saturiert*, falls jeder $n$-Typ über eine Menge $C \subset A, |C| < \kappa$, in $\mathcal{A}$ realisiert wird.
$\mathcal{A}$ ist *saturiert*, falls es $|A|$-saturiert ist.

**Bemerkung 12.2**
$\mathcal{A}$ ist $\kappa$-saturiert genau dann, wenn $\mathcal{A}$ jeden 1-Typ über $C \subset A$ mit $|C| < \kappa$ realisiert.

*Beweis.* „$\Rightarrow$“: klar.

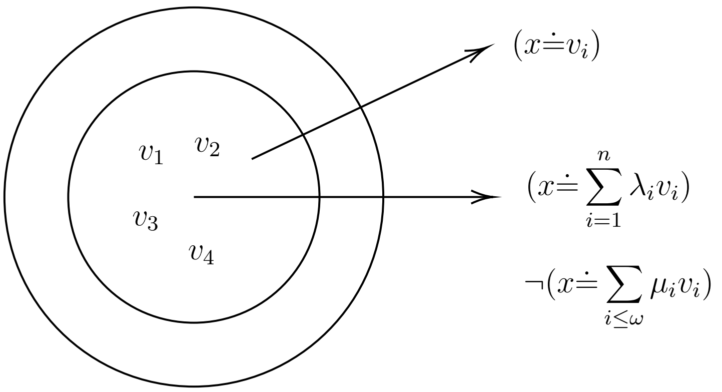
„$\Leftarrow$“: Sei $p(x,y) \in S_2^{\mathcal{A}}(C)$. Betrachte

$$\overbrace{q(x)}^{\in S_1^{\mathcal{A}}(C)} = p(x,y)\restriction_{\text{die Variable } x} = \{\varphi[x] \mid \varphi[x] \in p(x,y),\ \varphi\ \mathcal{L}_C\text{-Formel}\}$$

$\overset{\text{n. V.}}{\Longrightarrow}$ es gibt $b \in A$ Realisierung von $q$ sodass $S_1^{\mathcal{A}}(Cb)$, $|Cb| < \kappa$, $p(b,y) = \{\varphi[b,y] \mid \varphi[x,y] \in p\}$

Es gibt eine Realisierung $d$ in $\mathcal{A}$ von $p(b,y)$. Aus der Konstruktion folgt, dass $(b,d)$ den Typ $p$ realisiert. $\square$

**Beispiel 12.3**
$\mathbb{Q}^{(\omega)}$ ist $\aleph_0$-saturiert. Insbesondere werden alle Typen in $\mathbb{Q}^{(\omega)}$ realisiert!




**Beispiel 12.4**
$(\mathbb{R}, <)$ $\aleph_1$-saturiert? Nein, denn $\{0 < x < q\}_{q\in\mathbb{Q}^{>0}}$ wird nicht in $\mathbb{R}$ realisiert.

**Bemerkung 12.5**
Sei $\mathcal{A}$ $\kappa$-saturiert, $\underbrace{X \subset}_{\text{definierbar}} A^n$ unendlich. $\Longrightarrow |X| \geq \kappa$.

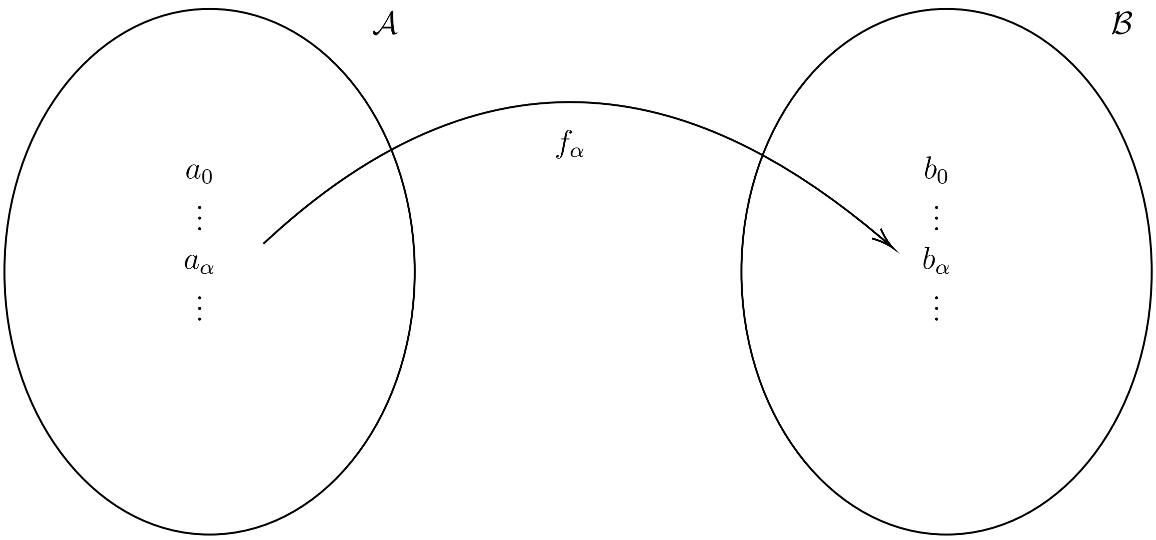
*Beweis.* Sonst: $|X| < \kappa$. Sei $X = (\vec{c_\alpha})_{\alpha<\mu}$ Aufzählung mit $\mu < \kappa$. Kompakthei

$$\sum(\vec{x}) = \{\vec{x} \in X\} \cup \{\neg(\vec{x} \doteq \vec{c_\alpha})\}_{\alpha<\mu}$$

ist eine partieller Typ über einer Menge $D$ von Parametern, $|D| < \kappa$. Des Weiteren muss $\sum$ eine Realisierung haben, das wäre jedoch ein $c_\alpha$. Widerspruch. □

**Bemerkung 12.6**
$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ saturiert mit $|A| = |B| \implies \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$

*Beweis.* Betrachte das folgende Bild:




$f_\alpha \subset f_{\alpha+1}$ elementare Abbildung, $f_\gamma = \bigcup\limits_{\beta<\gamma} f_\beta$ für $\gamma$ Limes, sodass $a_\alpha \in \underbrace{\mathrm{Dom}(f_{\alpha+1})}_{\text{Mächtigkeit } <|A|}, b_\alpha \in$ $\mathrm{Im}(f_{\alpha+1}) \longrightarrow \bigcup f_\alpha : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$

$f_0 = \emptyset$ ✓

Sei $f_\alpha$ bereits konstruiert. $\longrightarrow$ oBdA $a_\alpha \notin \mathrm{Dom}(f_\alpha)$.
$\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(a_\alpha/\mathrm{Dom}(f_\alpha)) \longrightarrow$ 1-Typ in $\mathcal{B}$ über $\mathrm{Im}(f_\alpha)$. Finde $b'$ Realisierung.
$\overset{\text{saturiert}}{\Longrightarrow} f'_\alpha = f_\alpha \cup \{(a_\alpha, b')\}$ elementar.

Analog für $b_\alpha$: $\mathrm{tp}^{\mathcal{B}}(b_\alpha/\mathrm{Im}(f'_\alpha)) \longrightarrow$ 1-Typ in $\mathcal{A}$ über $\underbrace{\mathrm{Dom}(f_\alpha) \cup \{a_\alpha\}}_{\text{Mächtigkeit } <|A|}$ □

**Satz 12.7**
Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache und $A$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $\lambda \geq \aleph_0$. Es existiert eine $\lambda$-saturierte elementare Erweiterung von $A$.

*Beweis.* Sei $(p_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ eine Aufzählung aller $n$-Typen in $A$ über Teilmengen der Mächtigkeit $< \lambda$.
$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}'_1 \preceq \mathcal{A}'_2 \preceq \ldots\ldots \mathcal{A}'_\alpha$ realisiert den Typen $p_\alpha$. Setze $\mathcal{A}_1 = \bigcup \mathcal{A}'_\alpha$.

Iteriere $\underbrace{\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}_1 \preceq \ldots \cdots \preceq \mathcal{A}_\alpha \preceq \mathcal{A}_{\alpha+1} \preceq \ldots}_{\lambda^+}$, wobei $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ <u>alle</u> $n$-Typen über Teilmengen von $A_\alpha$ der Mächtigkeit $< \lambda$ realisiert. Kofinalität

$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\lambda^+} \mathcal{A}_\alpha$. $\mathbb{Z}$: $\mathcal{B}$ ist $\lambda$-saturiert.

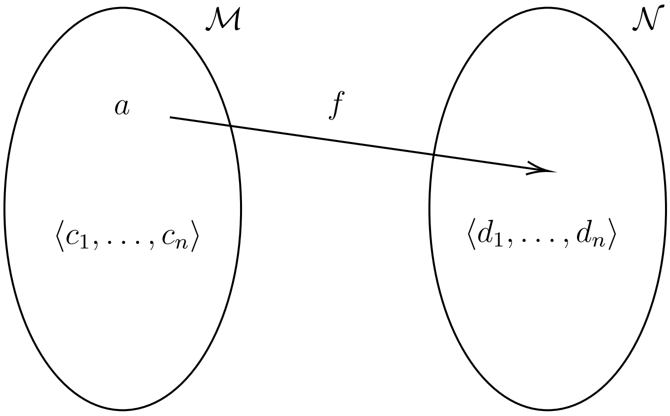
Sei $C \subset B$ mit $|C| < \lambda$. Es genügt zu zeigen, dass $C \subset A_\alpha$ für ein $\alpha < \lambda^+$. Für jedes $c \in C$ gibt es $\alpha = \alpha(c) < \lambda^+$ kleinstmöglich mit $c \in A_{\alpha(c)}$. Wir müssen zeigen, dass es ein $\beta < \lambda^+$ gibt, mit $\alpha(c) \leq \beta$ für alle $c \in C$.

Sonst gibt es für jedes $\beta < \lambda^+$ ein $c \in C$ mit $\beta < \alpha(c) \Longrightarrow \lambda^+ \subset \bigcup_{c \in \underbrace{C}_{<\lambda}} \underbrace{\alpha(c)}_{\leq\lambda} \Longrightarrow |\lambda^+| \leq \lambda$.

□

**Folgerung 12.8**
Sei $T$ eine konsistente, abzählbare Theorie mit unendlichen Modellen. Die Theorie $T$ hat genau dann Quantorenelimination, wenn zwischen je zwei $\aleph_0$-saturierten Modellen von $T$ die Kollektion aller partiellen Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen ein Back-&-Forth-System besitzt.
Ferner, wenn diese Kollektion nicht leer ist, ist $T$ vollständig.

*Beweis.* <u>„$\Rightarrow$“</u>: $\mathcal{M}, \mathcal{N}_0$ seien $\aleph_0$-saturiert.




$T$ hat Quantorenelimination $\Longrightarrow$ $f$ ist elementar.
Z: $\mathcal{M} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n] \Longrightarrow \mathcal{N} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$

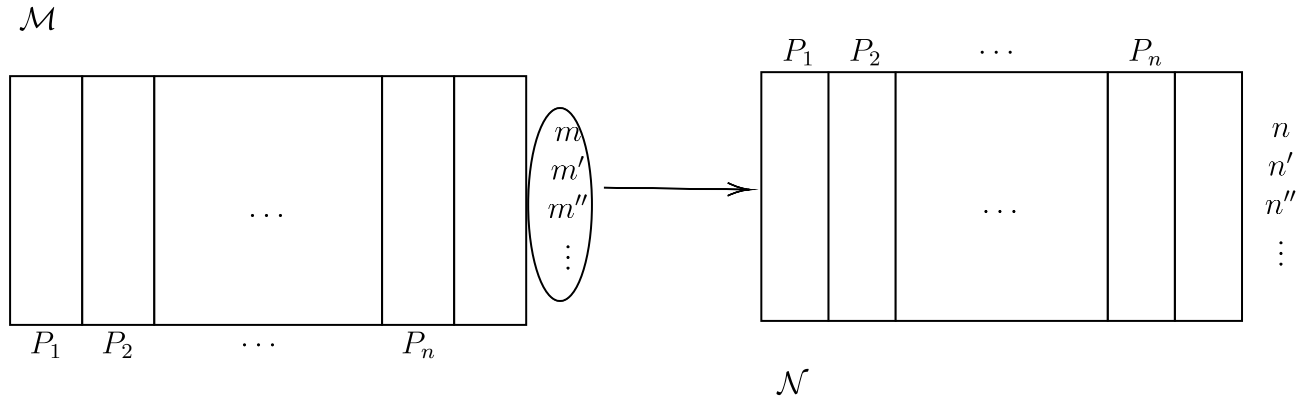
$T \models \forall\vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}})$. $\mathcal{M} \models \psi[c_1, \ldots, c_n] \Rightarrow \mathcal{N} \models \psi[d_1, \ldots, d_n] \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$.
$\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(a/a_1, \ldots, a_n) \longrightarrow$ 1-Typ über $d_1, \ldots, d_n$ in $\mathcal{N}$. $\underset{\mathcal{N}\ \aleph_0\text{-saturiert}}{\longrightarrow}$ es wird von $b$ in $\mathcal{N}$ realisiert.
$\longrightarrow$ $f \cup \{(a, b)\}$ ist elementar $\Rightarrow$ definiert einen partiellen Isomorphismus $\langle c_1, \ldots, c_n, a\rangle \simeq \langle d_1, \ldots, d_n, b\rangle$

„$\Leftarrow$": Gegeben $\begin{array}{cc} \mathcal{M} \models T & \mathcal{N} \models T \\ \cup\ \text{US} & \cup\ \text{US} \\ \langle c_1, \ldots, c_n\rangle & \langle d_1, \ldots, d_n\rangle \end{array}$.

$$\begin{array}{lccc} \text{Z}: & (\mathcal{M}, c_1, \ldots, c_n) & \equiv & (\mathcal{N}, d_1, \ldots, d_n) \\ & \preceq & & \preceq \\ & (\tilde{\mathcal{M}}, c_1, \ldots, c_n) & \equiv & (\tilde{\mathcal{N}}, d_1, \ldots, d_n) \\ & \aleph_0\text{-saturiert} & \text{n. Konstr.} & \aleph_0\text{-saturiert} \end{array}$$

□

**Beispiel 12.9**
$T$, $\mathcal{L} = \{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Jedes $P_n$ unendlich, $P_n$ & $P_m$ disjunkt. Was ist das $\aleph_0$-saturierte Modell?

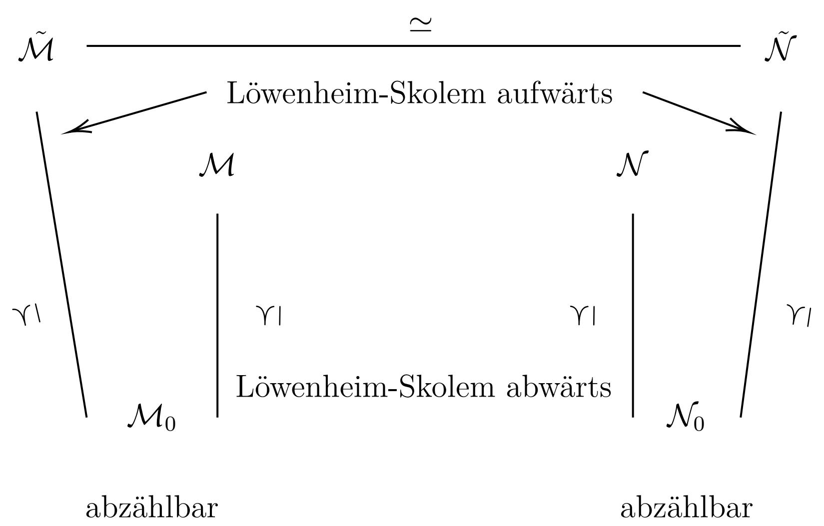



$\sum(x) = \{\neg P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ muss auch realisiert werden!

**Definition 12.10**
Sei $T$ eine abzählbare konsistente Theorie mit unendlichen Modellen und $\kappa \geq \aleph_0$ eine Kardinalzahl.
$T$ ist $\kappa$-kategorisch, falls $T$ ein einziges Modell (bis auf Isomorphie) der Mächtigkeit $\kappa$ besitzt.

**Bemerkung 12.11**
Wenn $T$ $\kappa$-kategorisch ist, dann ist $T$ vollständig.

*Beweis.* Betrachte das folgende Diagramm:




Aus $\tilde{\mathcal{M}} \simeq \tilde{\mathcal{N}}$ folgt elementare Äquivalenz, daraus folgt die Behauptung. $\square$

**Beispiel 12.12**
- die Theorie der Zufallsgraphen ist $\aleph_0$-kategorisch
- die Theorie der $\mathbb{Q}$-Vektorräume ist nicht $\aleph_0$-kategorisch
- aber: die Theorie der $\mathbb{Q}$-Vektorräume ist $\kappa$-kategorisch für jedes $\kappa > \aleph_0$

- die Theorie $\exists^\infty x$ ist kategorisch, sowohl für $\aleph_0$ als auch für $\kappa > \aleph_0$

**Satz 12.13** (Morley)
Sei $T$ eine abzählbare Theorie. $T$ ist $\lambda$-kategorisch für ein $\lambda > \aleph_0$ genau dann, wenn $T$ $\kappa$-kategorisch für jedes $\kappa > \aleph_0$ ist.

*Hier ohne Beweis.* □

**Satz 12.14** (Ryll-Nardzewski)
Folgende Aussagen sind äquivalent für eine abzählbare vollständige Theorie ohne endliche Modelle:

(a) $T$ ist $\aleph_0$-kategorisch

(b) $S_n(T)$ ist endlich für jedes $n \in \mathbb{N}$

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es nur endlich viele Formeln in $n$ freien Variablen (bis auf $T$-Äquivalenz)

**Bemerkung 12.15**
Es genügt nicht, dass $S_n(T)$ endlich für *ein* $n \in \mathbb{N}$ ist.

**Beispiel 12.16**
$T = \mathbb{Q}$-Vektorraum. $S_1(T)$ : $\begin{matrix}(x \doteq 0) \\ \neg(x \doteq 0)\end{matrix}$, aber $S_n(T)$ : $\underbrace{(x \doteq \lambda y)}_{\text{unendlich viele Möglichkeiten}}$. Vgl. dazu: Blatt xx Aufgabe yy: unendlich $\Leftrightarrow$ jeder Punkt isoliert

*Beweis Ryll-Nardzewski.* „(a) $\Rightarrow$ (b)“: Sein $n \in \mathbb{N}$ so, dass $S_n(T)$ unendlich. $\Rightarrow$ es gibt einen nicht isolierten Typen $p \in S_n(T)$. Dann wissen wir: Es gibt ein $\mathcal{N} \models T$ abzählbar, welches $p$ realisiert, und es gibt $\mathcal{M} \models T$ abzählbar, welches $p$ vermeidet. Somit folgt: $\mathcal{N} \not\cong \mathcal{M}$.

„(b) $\Rightarrow$ (c)“: Erinnerung: $\varphi[\vec{x}] \overset{T\text{-äquivalent}}{\sim} \psi[\vec{x}] \Leftrightarrow$ in $S_n(T)$ gilt $[\varphi] = [\psi]$.
Angenommen: $S_n(T)$ endlich $\overset{S_n(T)\text{ Hausdorff}}{\Longrightarrow}$ es existiert ein $\varphi_i \in p_i$ mit $\neg\varphi_i \in p_j$ für $i \neq j$. Dann liefern $\varphi_!, \ldots, \varphi_k$ endlich viele Bool'sche Kombinationen. Dies beschreibt jede mögliche Formel in Variablen $\Longrightarrow$ endlich viele $T$-Äquivalenzklassen.

„(c) $\Rightarrow$ (a)“: Zeige, dass jedes abzählbare Modell von $T$ $\aleph_0$-saturiert ist.
Sei $\mathcal{M} \models T$ abzählbar, $A \subset M$, $|A| < \aleph_0$. OBdA müssen wir nun 1-Typen über $A$ realisieren. Sei $p \in S_1^{\mathcal{M}}(A)$. $A = \{a_2, \ldots, a_k\}$. Aus (c) folgt, dass es nur endlich viele Formeln $\psi_1[x, \vec{y}], \ldots, \psi_m[x, \vec{y}]$ in $k$ Variablen modulo $T$-Äquivalenz gibt. Also gibt es nur endlich viele Formeln in einer freien Variable mit Parametern aus $A$ modulo $\underline{\mathcal{M}}$.

Setze $\underbrace{\varphi \leq \psi}_{\mathcal{L}_A\text{-Formeln}}$, falls $\mathcal{M} \models \forall x(\varphi[x] \to \psi[x])$. Diese Halbordnung ist kompatibel mit den Äquivalenzklassen modulo $\mathcal{M}$.
Sei nun $\varphi \in p$ kleinstmöglich. Noch $\mathbb{Z}$: $\psi \in p \to (\varphi \wedge \psi) \leq \varphi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \overset{\text{Modulo } \mathcal{M}}{\sim} \varphi$.
$\mathcal{M} \models \forall x(\varphi[x] \to \psi[x]) \Rightarrow$ $p$ ist isoliert $\Rightarrow$ realisiert. □

**Folgerung 12.17**
Sei $T$ vollständig und abzählbar.

$T$ ist $\aleph_0$-kategorisch $\Leftrightarrow S_n(T)$ ist endlich $\Leftrightarrow \mathcal{M} \models T, A \subset M$ endlich, $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ endlich

*Insbesondere:* Wenn $T$ $\aleph_0$-kategorisch ist, gibt es ein abzählbares $\aleph_0$-saturiertes Modell.

**Folgerung 12.18**
Sei $\mathcal{A}$ eine Struktur, $a_1, \ldots, a_n \in A$.

$$\underbrace{\mathrm{Th}(\mathcal{A})}_{=\{\chi\ \mathcal{L}\text{-Aussage}|\mathcal{A}\models\chi\}} \text{ ist } \aleph_0\text{-kategorisch } \Leftrightarrow \mathrm{Th}((A, a_1, \ldots, a_n)) \text{ ist } \aleph_0\text{-kategorisch}$$

**Folgerung 12.19**
$T$ ist $\aleph_0$-kategorisch $\Leftrightarrow$ jedes abzählbare Modell ist saturiert

**Satz 12.20** (Vaught'scher 2-Modellen-Satz)
Eine vollständige abzählbare Theorie kann nicht nur 2 abzählbare Modelle (bis auf Isomorphie) besitzen.

**Bemerkung 12.21**
Betrachte $\mathcal{L} = \{<\} \cup \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Die Theorie $\mathrm{Th}(\mathbb{Q}, <, c_n = n)$ hat 3 abzählbare Modelle (bis auf Isomorphie).[17]

*Beweis Vaught'scher 2-Modellen-Satz.* Sei $T$ abzählbar, vollständig mit genau 2 abzählbaren Modellen (nicht isomorph) $\Rightarrow$ $T$ ist nicht $\aleph_0$-kategorisch!
$\Rightarrow$ es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $S_n(T)$ unendlich
$\Rightarrow$ es gibt einen $n$-Typ $p$, der nicht isoliert ist
$\curvearrowright$ Der Typ $p$ wird in $\underset{\text{abz.}}{\mathcal{A}}$ von $\vec{a}$ realisiert
$\curvearrowright$ Der Typ $p$ wird in $\underset{\text{abz.}}{\mathcal{B}}$ vermieden

Jetzt haben wir: $\mathrm{Th}(\mathcal{A}, \vec{a})$ ist nicht $\aleph_0$-kategorisch (folgt mit (12.18)).
$\curvearrowright$ es gibt $(\mathcal{C}, \vec{c}) \models \mathrm{Th}(\mathcal{A}, \vec{a})$ mit $(\mathcal{C}, \vec{c}) \not\simeq (\mathcal{A}, \vec{a})$.[18]
Beachte, dass $\mathcal{C} \not\simeq \mathcal{B}$, denn in $\mathcal{C}$ wird $p$ durch $\vec{c}$ realisiert. □

[17] Hinweis für den Beweis: Muss eine monoton wachsende Folge eine obere Schranke haben?
[18] Unklar bleibt hier: warum sollte $\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$ nicht gelten? Der gegebene Beweis ist fehlerhaft. Ein korrekter Beweis findet sich auf Seite 54.

**Definition 12.22**
Sei $T$ abzählbar und vollständig. $T$ ist schmal, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Typ $S_n(T)$ abzählbar ist.

**Beispiel 12.23** (1) Die Theorie der $\mathbb{Q}$-Vektorräume ist schmal, aber nicht $\aleph_0$-kategorisch

(2) Die Theorie $\mathrm{ACF}_p$ mit $p = 0$ oder $p$ eine Primzahl ist nicht $\aleph_0$-kategorisch, aber schmal. Betrachte dazu insbesondere $\overline{\mathbb{Q}} \not\cong \overline{\mathbb{Q}(\pi)}$

(3) $\mathrm{Diag}(\mathbb{Q}, <)$ ist nicht schmal

(4) die Theorie aus Beispiel 12.9 ist nicht $\aleph_0$-kategorisch, aber schmal

**Lemma 12.24**
Eine vollständige, abzählbare Theorie ist genau dann schmal, wenn $T$ ein abzählbares, saturiertes Modell besitzt.

*Beweis.* „$\Leftarrow$“: Sei $\mathcal{M} \models T$ abzählbar und saturiert. Wir haben gesehen: $S_n(T) = S_n^{\mathcal{M}}(\emptyset)$ ist abzählbar, weil $\mathcal{M}$ abzählbar ist, und jeder $n$-Typ über $\emptyset$ muss in $\mathcal{M}$ realisiert werden.

„$\Rightarrow$“: $T$ schmal $\rightarrow$ $S_n(T)$ abzählbar $\hookrightarrow$ für jedes $\mathcal{M} \models T$, $A \underset{\text{endlich}}{\subset} M$: $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ abzählbar. Weiter konstruieren wir, wie zuvor, eine Kette von Modellen wie folgt:

$$\underset{\text{abz.}}{\mathcal{M}_0} \preceq \underset{\text{abz.}}{\mathcal{M}_1} \preceq \dots \preceq \underset{\text{abz.}}{\mathcal{M}_k} \preceq \dots$$

wobei wir jeweils alle 1-Typen auf endlichen Teilmengen betrachten und diese im nachfolgenden Modell realisieren[19]. Schließlich setzen wir

$$\underbrace{\mathcal{M}}_{\models T} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_k$$

$\mathcal{M}$ ist als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ebenfalls abzählbar. □

*Korrekter Beweis Vaught'scher 2-Modellen-Satz.* Wenn $S_n(T)$ überabzählbar wäre, dann sind wir fertig, denn ein abzählbares Modell kann nur abzählbar viele Typen realisieren $\rightarrow$ es muss überabzählbar viele Modelle geben.

D. h. oBdA können wir annehmen, dass $T$ schmal ist $\Rightarrow$ es gibt $\mathcal{A}$ saturiert, abzählbar.
Wenn $T$ $\aleph_0$-kategorisch ist $\rightarrow$ fertig.
Sonst gäbe es ein $p \in S_n(T)$ nicht isoliert $\rightarrow$ $p$ wird im abzählbaren Modell $\mathcal{B}$ vermieden.
Aber: $p$ wird in $\mathcal{A}$ von $\vec{a}$ realisiert.
$\mathrm{Th}(\mathcal{A}, \vec{a})$ ist nicht $\aleph_0$-kategorisch $\Rightarrow$ es gibt $\underbrace{(\mathcal{C}, \vec{c})}_{\text{vermeidet einen Typ}} \not\cong (\mathcal{A}, \vec{a})$ abzählbar.

[19]Vergleiche dazu auch Übung xyz

$\hookrightarrow\ \mathcal{C} \models T$. $\mathcal{C} \not\cong \mathcal{B}$ (weil $\vec{c} \models p$)
Es gilt $\mathcal{C} \not\cong \mathcal{A}$ ,weil $\mathcal{C}$ nicht saturiert ist! Angenommen $\mathcal{C}$ wäre saturiert. Dann finden wir ein nicht-leeres Back-&-Forth-System zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{A}$. Insbesondere gibt es dann einen Isomorphismus mit $\vec{c} \longmapsto \vec{a}$. Das steht im Widerspruch zur Konstruktion! $\square$

# 13 Fraïssés Amalgamierungsmethode für $\aleph_0$-kategorische Theorien

**Definition 13.1**
Sei $\mathcal{L}$ eine abzählbare Sprache. Eine Klasse $\mathfrak{K}$ von endlich erzeugten abzählbaren $\mathcal{L}$-Strukturen ist eine *Fraïsse-Klasse*, falls $\mathfrak{K}$ bis auf Isomorphie abzählbar ist und folgende Eigenschaften besitzt:

HP [20] Für $A \in \mathfrak{K}$ und $B \subset A$ Unterstruktur $\Rightarrow B \in \mathfrak{K}$

JEP [21] Für $A, B \in \mathfrak{K}$ gibt es ein $D \in \mathfrak{K}$ mit

$$A \hookrightarrow D \hookleftarrow B$$

AP [22] Für alle Diagramme aus $\mathfrak{K}$

$$\begin{tikzcd} A & & B \\ & C \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

gibt es ein $D \in \mathfrak{K}$ sodass folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & D & \\ A \arrow[ur, hook] \arrow[rr, phantom, "\square"] & & B \arrow[ul, hook] \\ & C \arrow[ul, hook] \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

**Beispiel 13.2**
- Klasse aller endlichen Graphen für $\mathcal{L} = \{R\}$
- Klasse aller endlichen Körper mit $\mathrm{char} = p$ mit $\mathcal{L}_{\mathrm{Ring}}$. Für JEP: $\mathbb{F}_{p^k} \subset \mathbb{F}_{p^m}$, AP ebenso, HP: endliche Teilringe sind

[20]hereditary property
[21]joint embedding property
[22]amalgumation property

- Klasse aller zykelfreien endlichen Graphen: ist keine Fraïsse-Klasse

**Definition 13.3**
Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{M}$ ist $\mathfrak{K}$-reich, falls $\mathcal{M}$ abzählbar ist und

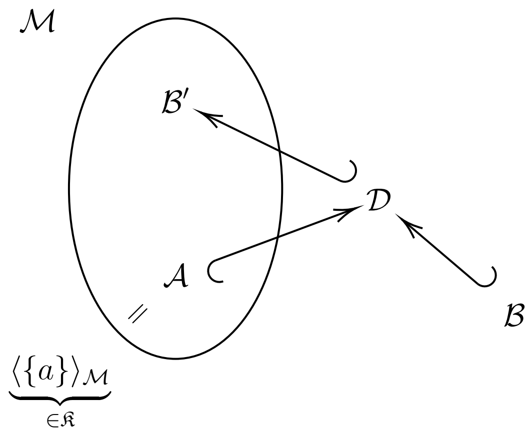
$$\mathfrak{K} \underset{\substack{\text{bis auf}\\ \text{Isomorphie}}}{=} \left\{\mathcal{A} \underset{\text{US}}{\subset} \mathcal{M}, \mathcal{A} \text{ endlich erzeugt}\right\}$$

und für jede endlich erzeugte Unterstruktur $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ und $\mathcal{A} \underset{f}{\hookrightarrow} \mathcal{B} \in \mathfrak{K}$ gibt es ein $\mathcal{B}' \underset{\text{US}}{\subset} \mathcal{M}$ endlich erzeugt, welches $\mathcal{A}$ enthält und

$$\mathcal{B} \underset{g}{\simeq} \mathcal{B}' \mid g(f(a)) = a \text{ für alle } a \in A$$

**Bemerkung 13.4**
Es genügt für Reichheit, wenn $\{\mathcal{A} \underset{\text{US}}{\subset}$ endlich erzeugt$\} \subset \mathfrak{K}$ und $\mathcal{M}$ und den Rest von Definition 13.3 erfüllt.

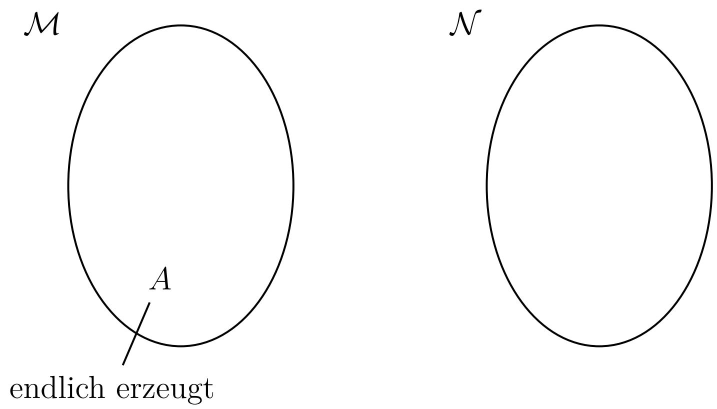
*Beweis.* Sei $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$ beliebig.



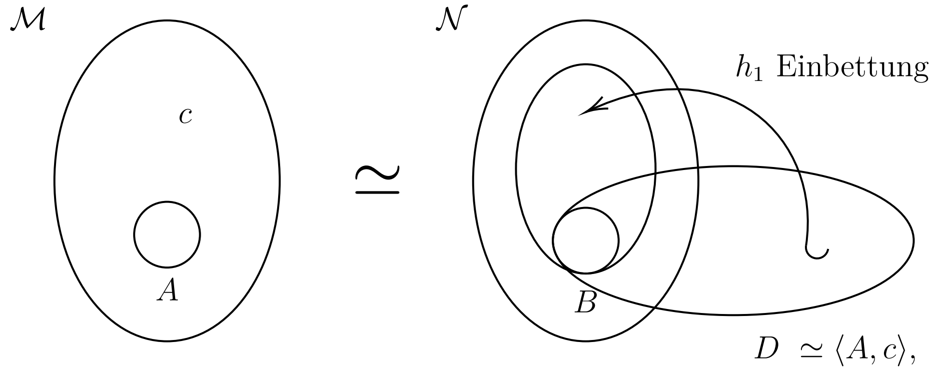

□

**Lemma 13.5**
Je zwei abzählbare $\mathfrak{K}$-reiche Strukturen sind isomorph.

*Beweis.* Konstruiere ein Back-&-Forth-System.




$A \in \mathfrak{K} = \{B \underset{\text{US}}{\subseteq} \mathcal{N}$ endlich erzeugt$\}$. Also: Es gibt ein $B \underset{\text{US}}{\subseteq} \mathcal{N}, A \simeq B$. $\hookrightarrow$ Das Back-&-Forth-System ist nicht leer.




$D \simeq \langle A, c\rangle,\ B \leftarrow A,$
$h : \langle A, c\rangle \longrightarrow D$ ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus
$\Rightarrow D \in \mathfrak{K}$

Betrachte jetzt $\underbrace{\langle A, c\rangle_{\mathcal{M}}}_{\in \mathfrak{K}}$. Es gilt: $h_1 \circ h : \langle A, c\rangle \to D$ ist ein $\mathcal{L}$-Isomorphismus, welcher den Isomorphismus $A \to B$ erweitert. $\square$

**Folgerung 13.6**
Jede abzählbare $\mathfrak{K}$-reiche Struktur ist *ultrahomogen*: Jeder partielle Isomorphismus zwischen zwei endlich erzeugten Unterstrukturen lässt sich zu einem globalen Automorphismus fortsetzen.

**Satz 13.7**
Jede Fraïsséklasse $\mathfrak{K}$ hat eine (bis auf Isomorphie) eindeutige abzählbare $\mathfrak{K}$-reiche Struktur, welche der Fraïssélimes der Klasse heißt.

**Beispiel 13.8**

- $\mathfrak{K} = \{$endliche Mengen$\} \rightsquigarrow \omega$
- $\mathfrak{K} = \{$endliche Körper der char $p\} \rightsquigarrow \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{F}_{p^n} = \overline{\mathbb{F}_p}$
- $\mathfrak{K} = \{$endliche Graphen$\} \rightsquigarrow$ Zufallsgraph

*Beweis des Satzes.* Wir konstruieren eine Kette $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1}$, wobei mit „$\subset$“ lediglich die Existenz einer Einbettung gemeint ist, keine tatsächliche Teilmenge, von Elementen aus $\mathfrak{K}$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}_n \\ & A \arrow[ul, phantom, "\underset{\text{US}}{\subseteq}" sloped] \arrow[r, hook] & B \in \mathfrak{K} \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \text{es existiert ein } n \le k \in \mathbb{N} \text{ mit } \begin{tikzcd} & \mathcal{M}_k \\ \mathcal{M}_n \arrow[ur, hook] & & \\ & & B \arrow[uul, hook', "\text{über } A"'] \\ & A \arrow[uul, dash, "\text{US}"] \arrow[ur, hook] \end{tikzcd}$$

Wir konstruieren $\mathcal{M}_n, H_n \underbrace{(k)}_{k \geq n} \in \mathfrak{K}$ so, dass:

(1) $\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1} = H_n(n)$

(2) $\mathcal{M}_n \subseteq H_n(k) \quad \underbrace{\subseteq}_{\substack{\text{wenn es Sinn} \\ \text{macht } (k \geq n+1)}} \quad H_{n+1}(k)$

(3) $\mathcal{M}_n \underset{\text{US}}{\supset} A \hookrightarrow B \Rightarrow$ es existiert $k \geq n$ mit $B \hookrightarrow \mathcal{M}_k$ über $A$ eingebettet

Für (2): <u>$n = 0$:</u> $\to$ sei $\mathcal{M}_0 \in \mathfrak{K}$ beliebig. Setze $H_0(k) = \mathcal{M}_0$ für alle $k$.

Für (1): <u>$n \to n+1$:</u> Angenommen $\mathcal{M}_n$ und $H_n(k), k \geq n$ wurden bereits konstruiert. Betrachte nun alle endlich erzeugten Unterstrukturen von $\mathcal{M}_n$ und jeweils alle Erweiterungen.

$$k \geq n+1$$

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(k) & \\
\mathcal{M}_n \arrow[ur, dashed, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \\
 & A_k \arrow[ul, phantom, sloped, "\supseteq", "\text{endl. erz. US}"'] \arrow[r, hook, "f_{n,k}"'] & B_k
\end{tikzcd}$$

$\underset{\text{wegen AP}}{\Longrightarrow}$ es gibt nur abzählbar viele Möglichkeiten

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(k) \arrow[rr, hook] & & H_{n+1}(k) \\
\mathcal{M}_n \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & & \\
 & A \arrow[ul, phantom, sloped, "\supseteq"] \arrow[r, hook, "f_{n,k}"'] & B \arrow[uur, hook] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert

Wir wollen noch (3) zeigen:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}_n & & \\
 & A \arrow[ul, phantom, sloped, "\supseteq", "\text{endl. erz.US}"'] \arrow[r, hook] & B
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ es existiert $k \geq n+1$ sodass

$$\begin{tikzcd}
 & H_n(k) & \\
\mathcal{M}_n \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] \arrow[dr, dash] & & \\
 & A = A_k \arrow[r, hook, "f_{n,k}"'] & B
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow B_k \underset{\text{über } A}{\hookrightarrow} \begin{array}{c} H_{n+1}(k) \\ \cap \\ H_{n+2}(k) \\ \cap \\ \vdots \\ H_k(k) \end{array}$$

$\mathcal{M}_{k+1}$

$\square$

**Folgerung 13.9**
Wenn die Sprache endlich ist und nur aus Konstanten- und Relationszeichen besteht, ist die Theorie des Fraïssélimes $\aleph_0$-kategorisch.

*Beweis.* Wegen Ryll-Nardzewski genügt es zu zeigen, dass die Theorie $T = \mathrm{Th}(\underbrace{\mathcal{M}}_{\text{Fraïssélimes}})$ Quantorenelimination besitzt.

Es genügt, einfache Existenzformeln $\exists y\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]$ zu betrachten, wobei $\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]$ quantorenfrei ist.

Die Sprache $\mathcal{L}$ ist endlich, ohne Funktionszeichen $\Rightarrow$ es gibt nur endlich viele Strukturen in $\mathfrak{K}$ (bis auf Isomorphie), welche von einem Erzeugendensystem der Größe $n$ kommen können. Die sind alle endlich! Insbesondere gibt es nur endlich viele solche Strukturen welche von $(a_1, \ldots, a_n)$ erzeugt werden, mit

$$\mathcal{M} \models \exists y\varphi[a_1, \ldots, a_n, y]$$

Seien $\bar{a_1}, \ldots, \bar{a_m}$ eine Aufzählung aller Möglichkeiten (bis auf $\mathcal{L}$-Isomorphie). Das heißt für jedes $(c_1, \ldots, c_n)$ Realisierung von $\exists y\varphi[x_1, \ldots, x_n, y] \Rightarrow \langle c_1, \ldots, c_n\rangle_{\mathcal{M}} \simeq \langle a'_1, \ldots, a'_n\rangle_{\mathcal{M}}$ für ein $i \leq m$.

Es gibt quantorenfreie $\mathcal{L}$-Formeln $\psi_1[x_1, \ldots, x_n], \ldots, \psi_n[x_1, \ldots, x_n]$ mit $\bar{a}_i$ Realisierung von $\psi_i$, welche den Isomorphietyp von $\langle \bar{a}_i\rangle_{\mathcal{M}}$ vollständig beschreiben.

$\mathbb{Z}$: $T \models \forall x_1 \ldots \forall x_n( \exists y\varphi[x_1, \ldots, x_n, y] \leftrightarrow \bigvee_{i=1}^{m} \psi_i[x_1, \ldots, x_n])$
$\Leftrightarrow \mathcal{M} \models \forall \bar{x}( \exists y\varphi[\bar{x}, y] \leftrightarrow \bigvee \psi_i[\bar{x}])$

„$\rightarrow$“: klar, weil $\psi_1, \ldots, \psi_m$ alle solchen Möglichkeiten beschreiben.

„$\leftarrow$“: Sei $\bar{c} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \psi_i[\bar{c}]$. $\Rightarrow \langle \bar{c}\rangle_{\mathcal{M}} \simeq \langle \bar{a}_i\rangle_{\mathcal{M}}, F : \langle \bar{a}_i\rangle_{\mathcal{M}} \longrightarrow \langle \bar{c}\rangle_{\mathcal{M}}$ partieller Isomorphismus.
$\overset{\mathcal{M}\text{ ultrahomogen}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{M}$ lässt sich durch $\tilde{F} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ Isomorphismus fortsetzen. $\mathcal{M} \models \exists y\varphi[\bar{a}_i]$ $\underset{\tilde{F}\text{ anwenden}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{M} \models \exists y\varphi[\bar{c}]$ ✓.

□

# 14 Ununterscheidbare Folgen

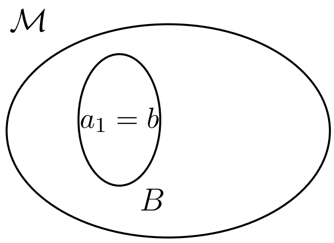
**Definition 14.1**
Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $B \subset M$ eine Menge von Parametern, $(I, <)$ eine lineare Ordnung. Die Folge $(a_i)_{i \in I}$ ist *ununterscheidbar* über $B$, falls für jedes $n \in \mathbb{N}$ jede Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$, jedes Tupel $b_1, \ldots, b_m \in B$ und alle Elemente $i_1 < \cdots < i_n, j_1 < \cdots < j_n \in I$ gilt[23]:

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}, b] \Leftrightarrow \mathcal{M} \models \varphi[a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}, b]$$

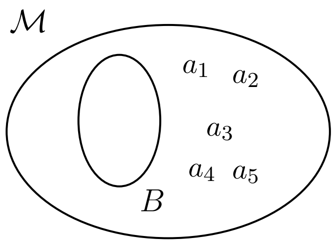
Wenn $B = \emptyset$, dann ist die Folge ununterscheidbar.

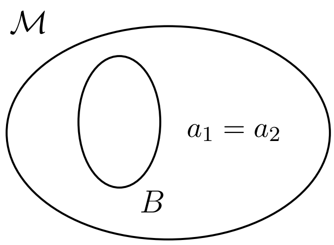
**Beispiel 14.2**

- jede konstante Folge ist immer über jeder Menge ununterscheidbar!
- $T = \exists^\infty$



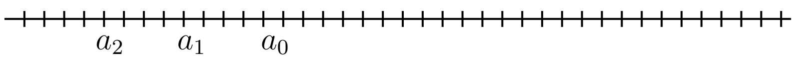

$\rightsquigarrow$ konstant




Formel in 2 Variablen: $(x_1 = x_2)$
$\rightsquigarrow$ konstant

- $T =$ DLO. Betrachte $\mathbb{Q}$ mit $B = \emptyset$




[23]ich kann sie nicht über $B$ unterscheiden

**Bemerkung 14.3**
Sei $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ eine Formel, sodass $\{m \in M \mid \mathcal{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_{n-1}, m]\}$ endlich. Sei außerdem $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine ununterscheidbare Folge mit $\mathcal{M} \models \varphi[a_1, \ldots, a_{n-1}] \Rightarrow a_k = a_l,\ k, l \in \mathbb{N}$

Ziel:

**Satz 14.4**
Sei $T$ eine vollständige Theorie mit unendlichen Modellen. Dann gibt es für jede lineare Ordnung $I$ ein Modell $\mathcal{M} \models T$ und eine nicht-triviale ununterscheidbare Folge $(a_1)_{i\in I}$ in $\mathcal{M}$.

Dafür brauchen wir den Satz von Ramsey:

**Satz 14.5** (Ramsey)
Sei $A$ unendliche Menge, $n \in \mathbb{N}$, $[A]^n = \{n\text{-elementige Teilmengen von } A\}$. Gegeben eine endliche Zerlegung $[A]^n = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$ in endliche Farben, gibt es eine unendliche Teilmenge $A_0 \subset A$ mit $[A_0]^n$ monochrom.

*Beweis.* $\underline{n = 1}$: Induktiv über $n$. $1 \rightsquigarrow$ Schubfachprinzip. ✓

$\underline{n \to n+1}$: Wähle $a_0 \in A$ fest. Der Punkt $a_0$ liefert eine Färbung von $A_n$. $x \in [A \setminus \{a_0\}]^m$ hat Farbe $j$, falls $X \cup \{a_0\}$ die Farbe $j$ besitzt. Induktiv finden wir $\underbrace{B_0 \subset}_{\text{unendlich}} A \setminus \{a_0\}$ so, dass $[B_0]^n$ monochrom ist.
Achtung: Das bedeutet nicht, dass jede $(n+1)$-elementige Teilmenge von $B_0 \cup \{a_0\}$ die gleiche Farbe hat.

Sei $a_1 \in B_0 \longrightarrow a_1 \neq a_0$. $\to$ Finde $B_1 \subseteq B_0 \setminus \{a_1\}$ sodass alle $(n+1)$-elementigen Teilmengen von $B_1 \cup \{a_2\}$, welche $a_1$ enthalten dieselbe Farbe haben.
Konstruiere Folgen

$$\begin{array}{cccc} B_{-1} = A & \supset B_0 & \supset B_1 & \supset \ldots \\ \in & \in & \in & \\ a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \end{array}$$

derart, dass die Farbe von $\left\{a_{j(0)}, \ldots, a_{j(n)}\right\}$ nur vom Element $j$ abhängt.
Betrachte $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Die Farbe von $\{ai_0, \ldots, a_{i_n}\}$ hängt nur von $i_0$ ab! Aber es gibt nur endlich viele Farben. $\hookrightarrow$ Schubfachprinzip: eine Farbe kommt unendlich oft vor.

Sei $A_0 = (a_{ij})$ diese Teilfolge. $\Rightarrow \{a_{ij_0}, \ldots, a_{ij_n}\}$ hat konstante Farbe. $\square$

**Definition 14.6**
Sei $(I, <)$ eine lineare Ordnung, $B \subset M$, $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $(a_i)_{i\in I}$ eine Folge (nicht unbedingt ununterscheidbar über $B$).
Der *Ehrenfeucht-Mostowski-Typ* $\mathrm{EM}\left((a_i)_{i\in I}/B\right)$ ist die Kollektion aller Instanzen $\varphi[x_1, \ldots, x_n, \vec{b}]$ mit $\vec{b} \in B, n \in \mathbb{N}, \varphi$ $\mathcal{L}$-Formel, derart, dass

$$\mathcal{M} \models \varphi[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}, \vec{b}]$$

für alle $i_1 < \cdots < i_n$.

**Bemerkung 14.7**
$\mathrm{EM}\left((a_i)_{i\in I}/B\right)$ ist ein „partieller Typ“.

**Beispiel 14.8**
Gegeben eine Folge, sodass alle Folgenglieder verschieden sind. Dann st $x_1 \neq x_2$ in EM.

**Bemerkung 14.9**
Wenn die Folge $(a_i)_{i\in I}$ $B$-ununterscheidbar ist, dann ist $\mathrm{EM}((a_i)_{i\in I}/B)$ vollständig.

*Beweis.* $\varphi[x_1, \ldots, x_n, \vec{b}] \notin \mathrm{EM}((a_i)_{i\in I}/B) \;\Rightarrow \neg\varphi \in \mathrm{EM}((a_i)_{i\in I}/B)$
$\hookrightarrow$ es gibt $i_1 < \cdots < i_n$ sodass $\mathcal{M} \models \neg\varphi\left[a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}, \vec{b}\right] \overset{\substack{(a_i)_{i\in I}\\ B\text{-ununterscheidbar}}}{\Longrightarrow} \mathcal{M} \models \neg\varphi\left[a_{j_1}, \ldots, a_{j_n}, \vec{b}\right]$
für alle $j_1 < \cdots < j_n$. □

**Satz 14.10**
Seien $I, J$ unendliche lineare Ordnungen, $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $B \subset M$, $(a_i)_{i\in I}$ eine Folge in $M$. Dann gibt es $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M}$ (in der Sprache $\mathcal{L}_B$) und eine $B$-ununterscheidbare Folge $(c_j)j \in J$ in $\mathcal{N}$, welche den Ehrenfeucht-Mostowski-Typen $\mathrm{EM}\left((a_i)_{i\in I}/B\right)$ erfüllt.
Insbesondere: Falls $\mathcal{N} \models \varphi\left[c_1, \ldots, c_n, \vec{b}\right] \hookrightarrow$ es gibt $i_1 < \cdots < i_n \in I$ mit

$$\mathcal{M} \models \varphi\left[a_{i_j}, \ldots, a_{i_n}, \vec{b}\right]$$

*Beweis.* Falls die $a_i$ unendlich oft gleich sind, setze $c_j =$ konstant in $\mathcal{M}$.
OBdA können wir also annehmen, dass die $a_i$ alle verschieden sind. Seien $\{c_j\}_{j\in J}$ neue Konstantenzeichen. Es genügt zu zeigen, dass die $\mathcal{L}_B$-Theorie

$$\underbrace{\mathrm{Th}(\mathcal{M}, b)_{b\in B}}_{\mathcal{L}_B\text{-Theorie}} \cup \underbrace{\left\{\varphi\left[c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}, \vec{b}\right]\right\}_{\substack{\varphi\in\mathrm{EM}((a_i)/B)\\ n\in\mathbb{N}\\ j_1<\cdots<j_n}}}_{=\Delta} \cup \underbrace{\left\{\psi\left[c_{j_1}, \ldots, c_{j_n}, \vec{b}\right] \leftrightarrow \psi\left[c_{j'_1}, \ldots, c_{j'_n}, \vec{b}\right]\right\}_{\substack{\psi\ \mathcal{L}_B\text{-Formel}\\ j_1<\cdots<j_n\\ j'_1<\cdots<j'_n\\ n\in\mathbb{N}}}}_{=\mathcal{F}}$$

endlich konsistent ist.

Dazu genügt es zu zeigen, dass für alle $\underbrace{\Delta_0 \subset}_{\text{endlich}} \Delta, \underbrace{\mathcal{F}_0 \subset}_{\text{endlich}} \mathcal{F}$ die Theorie $\mathrm{Th}(\mathcal{M}, \vec{b}) \cup \{\varphi\}_{\varphi\in\Delta_0} \cup \{\psi\}_{\psi\in\mathcal{F}_0}$ konsistent ist. OBdA sind alle Formeln in $\Delta_0 \cup \mathcal{F}_0$ in $n$ freien Variablen.
Sei $A = \{a_i\}_{i\in I}$ unendlich.

$[A]^n$ bekommt seine Färbung wie folgt: $\underbrace{\vec{e}}_{\substack{\text{wachsende}\\ \text{Aufzählung}}}$ hat dieselbe Farbe wie $\vec{f}$, falls $\mathcal{M} \models \psi\left[(\vec{e})\right] \leftrightarrow \psi[(\vec{f})]$ für alle $\psi \in \mathcal{F}_0$.
$\hookrightarrow$ eine Färbung mit $\leq 2^{|\mathcal{F}|}$ Farben.

Aus dem Satz von Ramsey gibt es eine monochrome unendliche Teilmenge $A_0$ von $A$. □

**Folgerung 14.11**
Eine Theorie mit unendlichen Modellen besitzt für jedes $\alpha \in O_n$ eine nicht-triviale ununterscheidbare Folge der Länge $\alpha$ (in einem Modell).

*Beweis.* Sei $\mathcal{M} \models T$ beliebig. $(a_i)_{i \in I}$ Aufzählung von $M$. Finde $\mathcal{N} \equiv \mathcal{M} \;\Rightarrow\; \mathcal{N} \models T$ und eine ununterscheidbare Folge $(a_\beta)_{\beta<\alpha}$ in $N$. □

Sei im Folgenden immer $T$ eine vollständige, abzählbare Theorie ohne endliche Modelle.

**Satz 14.12**
Sei $T$ eine abzählbare Theorie mit unendlichen Modellen. Für jede Kardinalzahl $\kappa \geq \aleph_0$ gibt es ein Modell $\mathcal{M} \models T$ der Mächtigkeit $\kappa$ derart, dass $\mathcal{M}$ nur abzählbar viele Typen über jede abzählbare Teilmenge realisiert.

**Definition 14.13**
Für eine Kardinalzahl $\kappa \geq \aleph_0$ ist die Theorie $\kappa$-stabil, falls für jedes $\mathcal{M} \models T$ und $A \subset M$ $|A| \leq \kappa$, dann ist $|S_1^{\mathcal{M}}(A)| \leq \kappa$.

Notation: Modelltheoretiker sagen $\omega$-stabil anstatt $\aleph_0$-stabil.

**Satz 14.14**
Wenn $T$ $\kappa$-kategorisch ist für $\kappa \geq \aleph_0$, dann ist $T$ $\omega$-stabil.

*Beweis.* Sonst gäbe es $\mathcal{M} \models T$ und eine abzählbare Menge $A \subset M$ mit $|S_1^{\mathcal{M}}(A)| > \aleph_1$. OBdA können wir annehmen, dass $\mathcal{M}$ $\aleph_1$-saturiert ist.
Es gibt eine Menge $(b_\alpha)_{\alpha<\aleph_1}$ von Realisierungen verschiedener Typen über $A$ (in $\mathcal{M}$). Wegen Löwenheim-Skolem abwärts gibt es $A \cup \{b_\alpha\}_{\alpha<\aleph_1} \subseteq \tilde{\mathcal{M}} \underset{\text{in } \mathcal{L}_A}{\preceq} \mathcal{M}$ mit $|\tilde{M}| = \aleph_1$.
Wegen Löwenheim-Skolem aufwärts gibt es $\tilde{\mathcal{N}} \underset{\mathcal{L}_A}{\preceq} \mathcal{N}$ der Mächtigkeit $\kappa > \aleph_0$.
$\mathcal{N}$ ist bis auf Isomorphie das einzige Modell von $T$ der Mächtigkeit $\kappa$! Widerspruch zu Satz , da dieser abzählbar viele Typen fordert. □

**Beispiel 14.15** (Zufallsgraph)
Für jedes $A \subseteq M \rightsquigarrow$ überabzählbar viele Typen, denn $\mathcal{P}(M)$ überabzählbar. Somit nicht $\omega$-stabil.

**Beispiel 14.16** ($T = \exists^\infty$)
abzählbar!

**Beispiel 14.17**
Ist $(\mathbb{Q}, <)$ $\omega$-stabil? Bein, denn für jedes $r \in \mathbb{R}$ finden wir einen Typen.

**Bemerkung 14.18**
$T$ ist $\kappa$-stabil $\iff$ für jedes Modell $\mathcal{M} \models T$ und $A \subset M, |A| \leq \kappa$ gilt $|S_n^{\mathcal{M}}(A)| \leq \kappa$.

**Bemerkung 14.19**
$T$ ist $\omega$-stabil $\implies$ $T$ ist total transzendent[24].

*Beweis.* Sonst gäbe es einen binären Baum von Formeln in einer freien Variable mit Parametern aus einem Modell $\mathcal{M} \models T$. Das heißt der Baum braucht nur abzählbar viele Parameter aus $\underset{\text{abz.}}{A} \subset \mathcal{M} \;\Leftrightarrow\; |S_1^{\mathcal{M}}(A)| \geq 2^{\aleph_0}$ ↯. □

**Lemma 14.20**
$T$ ist total transzendendent $\Rightarrow$ $T$ ist $\kappa$-stabil für alle $\kappa \geq \aleph_0$.

*Beweis.* Sonst gäbe es $\mathcal{M} \models T, A \subset M, |A| \leq \kappa$, aber $|S_1^{\mathcal{M}}(A)| > \kappa$.

Eine $\mathcal{L}_A$-Formel $\varphi[x]$ ist *dick*, wenn $|[\varphi]| > \kappa$. Sonst ist die Formel *dünn*.

Beachte, dass $\varphi[x] = (x \doteq x)$ dick ist.
Es genügt zu zeigen, dass jede dicke Formel über $A$ zwei disjunkte dicke Fromeln über $A$ enthält
$\hookrightarrow$ es gibt einen binären Baum über $A$.

- Ein Typ über $A$ ist bestimmt, wenn wir wissen welche Formeln der Typ enthält.
- Eine dünne Formel liegt nur in höchstens $\kappa$ vielen Typen
- in der Sprache $\mathcal{L}_A$ gibt es höchstens $\kappa$ viele Formeln in einer freien Variable

Als Folgerung gibt es zumindest 2 verschiedene Typen $p, q$ in $[\varphi]$, welche keine dünne Formel enthalten.
$[\varphi] \ni p \neq q \in [\varphi]$ dick $\Rightarrow$ es gibt $\psi \in p$ mit $\neg\psi \in q$.
$\hookrightarrow \underbrace{\varphi \wedge \psi}_{\text{dick}} \in p, \underbrace{\varphi \wedge \neg\psi}_{\text{dick}} \in q$ □

**Folgerung 14.21**
Wenn $T$ $\omega$-stabil ist, dann gibt es für jede Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ ein saturiertes Modell der Mächtigkeit $\kappa$.

[24] vergleiche Übungsaufgabe 1, Blatt 9

Wir beweisen das nur für $\kappa = \aleph_1$, aber der Beweis geht genauso, wenn $\kappa$ regulär ist.

*Beweis.* Für $\alpha < \kappa$ gibt es kein $f : \alpha \longrightarrow \kappa$ welches unbeschränkt[25] ist.

Wegen Löwenheim Skolem auf- und abwärts gibt es ein $\mathcal{M} \models T$ der Mächtigkeit $\aleph_1$.
Insbesondere: $T$ $\omega$-stabil $\Rightarrow$ total transzendent $\Rightarrow$ $\aleph_1$-stabil
$|S_1^{\mathcal{M}}(M)| \leq \aleph_1$.

Mit einem Kettenargument finden wir $\mathcal{M}_1 \succeq \mathcal{M}$ der Mächtigkeit $\aleph_1$, welches alle 1-Typen über $M$ realisiert. Iteriere und finde

$$\mathcal{M} \preceq \mathcal{M}_1 \preceq \mathcal{M}_2 \preceq \cdots \preceq \mathcal{M}_\alpha \preceq \ldots$$

$\mathcal{M}_{\alpha+1}$ hat Mächtigkeit $\aleph_1$ und realisiert alle Typen über $\mathcal{M}_\alpha$
Für $\alpha$ eine Limeszahl, setze $\mathcal{M}_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} \mathcal{M}_\beta$. Setze $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{\alpha<\aleph_1} \mathcal{M}_\alpha$. Somit $|\mathcal{M}| = \aleph_1$.

ZZ : $\mathcal{M}$ saturiert.
Das heißt: Sei $A \subset M, |A| < |M| = \aleph_1$.
$\Rightarrow$ $A$ abzählbar, $A \subset \bigcup\limits_{\alpha<\aleph_1} \mathcal{M}_\alpha$. Für $a \in A$ gibt es ein $\alpha(a) \mid a \in \mathcal{M}_{\alpha(a)}$. Somit:

$$\begin{array}{rl} f : A & \longrightarrow \aleph_1 \\ a & \longmapsto \alpha(a) \end{array} \quad \text{ist nicht unbeschränkt.}$$

$\Rightarrow$ es gibt ein $\alpha < \aleph_1$ mit $A \subset \mathcal{M}_\alpha$ $\Rightarrow$ in $\mathcal{M}_{\alpha+1} \subset \mathcal{M}$ werden alle 1-Typen über $A$ realisiert. □

**Folgerung 14.22**
Eine Theorie ist genau dann $\kappa$-kategorisch, wenn jedes Modell der Mächtigkeit $\kappa$ saturiert ist.

*Beweis.* "$\Leftarrow$": $\mathcal{M}, \mathcal{N} \models T$ Modelle der Mächtigkeit $\kappa$. ZZ : $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$.
Aber $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$, saturiert nach Voraussetzung $\Rightarrow$ $\mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$ nach VL (konstruiere ein Back-&-Forth-System)

"$\Rightarrow$": $T$ $\kappa$-kategorisch $\Rightarrow$ es gibt ein saturiertes Modell der Mächtigkeit $\kappa$. Aber das Modell ist bis auf Isomorphie das einzige Modell. □

Ziel: $\mathcal{M}$ saturiert, $D \subset M, |D| < |M|$.

[25]unbeschränkt:
für $\beta < \kappa$ gibt es $\gamma < \alpha \mid \beta < f(\gamma)$

$\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben denselben Typ[26] über $D$ ($\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a}/D) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}\left(\vec{b}/D\right)$) $\Longleftrightarrow$ es einen Automorphismus $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/D)$ gibt mit $\sigma(\vec{a}) = \vec{b}$.

$$S_n^{\mathcal{M}}(D) \simeq \mathcal{M}^n / \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/D)$$

Somit: $\kappa$-kategorisch $\Rightarrow$ $\omega$-stabil $\Rightarrow$ total transzendent $\Rightarrow$ $\kappa$-stabil $\kappa > \aleph_0$.

## 14.1 Exkurs

**Bemerkung 14.23**
Sei $\mathcal{L}$ eine Sprache und $\mathcal{M}$ eine (unendliche) saturierte $\mathcal{L}$-Struktur. Gegeben $A \subset M$ mit $|A| < |M|$, haben zwei Typen $\vec{b}$ und $\vec{c}$ denselben Typ über $A$, genau dann, wenn es einen Automorphismus $\sigma : M \longrightarrow M$ derart gibt, dass $\begin{array}{c}\sigma(a) = a\\ \sigma(\vec{b}) = \vec{c}\end{array}$ für alle $a \in A$. (Schreibe $\vec{b} \equiv_A \vec{c}$)

*Beweis.* <u>"$\Leftarrow$":</u> $\mathcal{M} \models \varphi\left[\vec{b}, \vec{a}\right] \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi\left[\underbrace{\sigma(\vec{b})}_{=\vec{c}}, \underbrace{\sigma(\vec{a})}_{=\vec{a}}\right] \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi\left[\vec{c}, \vec{a}\right]$

<u>"$\Rightarrow$":</u> $\vec{b} \equiv_A \vec{c} \Rightarrow$ es gibt eine elementare Abbildung $\begin{array}{lll} A \cup \left\{\vec{b}\right\} & \longrightarrow & A \cup \{\vec{c}\} \\ a & \longmapsto & a \\ \vec{b} & \longmapsto & \vec{c} \end{array}$. Beachte, dass $|A \cup \left\{\vec{b}\right\}| \leq \max\left\{|A|, |\vec{b}|\right\} < |\mathcal{M}|$. (Genau wie im Beweis $\mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ beide saturiert, $|M| = |N| \Rightarrow \mathcal{M} \simeq \mathcal{N}$)

Finde $\sigma$ Fortsetzung auf $\mathcal{M} \longrightarrow \sigma$ Isomorphismus und $\begin{array}{c}\sigma(a) = a\\ \sigma\left(\vec{b}\right) = \vec{c}\end{array}$ für alle $a \in A$ ✓ $\square$

**Lemma 14.24**
Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, saturiert und $A \subset M, |A| < |M|$. Gegeben $X \subset M^n$ eine *definierbare* Menge (möglicherweise über andere Parameter). Wenn $X$ $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$-invariant ist: für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$ gilt $\vec{x} \in X \Leftrightarrow \sigma(\vec{x}) \in X$
dann ist $X$ definierbar über $A$.

*Beweis.* Sei $X$ definierbar durch $\Theta\left[\vec{x}, \vec{b}\right]$. $\Theta[\vec{x}, \vec{y}]$ eine $\mathcal{L}$-Formel, $\vec{b}$ die Parameter, $B = A \cup \left\{\vec{b}\right\}$. $X$ ist $\mathcal{L}_B$-definierbar.

[26]Notation: $\vec{a} \equiv_D \vec{b}$

Betrachte jetzt Restr : $S_n^{\mathcal{M}}(B) \longrightarrow S_n^{\mathcal{M}}(A)$ die Einschränkung von Parametern. Stetig & surjektiv $\Rightarrow$ abgeschlossen, also ist Restr$([\Theta])$ abgeschlossen.
$p \in \text{Restr}([\Theta]) \Leftrightarrow$ es gibt $q \in S_n^{\mathcal{M}}(B)$ mit Restr$(q) = p$ und $\Theta \in q$.

**Behauptung**
Restr$([\Theta]) \subset S_n^{\mathcal{M}}(A)$ ist auch offen

Damit folgt: es gibt eine $\mathcal{L}_A$-Formel $\varphi\left[\vec{x}\right] \mid \text{Restr}\left([\Theta]\right) = [\varphi]$

*Beweis.* Sei $p \in \text{Restr}\left([\Theta]\right)$. $\not{Z}$ : es gibt eine Umgebung $U$ von $p$ sodass $p \in \text{Restr}\left([\Theta]\right)$.

Restr$(q) = p$ und $q \ni \Theta$. Das heißt $\underbrace{p \cup \left\{\Theta\left[x, \vec{b}\right]\right\}}_{\substack{\text{endlich konsistent} \\ \text{als Menge von} \\ \mathcal{L}_B\text{-Formeln}}} \subset q$. $\overset{\substack{\mathcal{M} \text{ saturiert} \\ |B|<|M|}}{\Longleftrightarrow}$ es gibt $\vec{d} \in M^n$ mit

$\mathcal{M} \models \Theta\left[\vec{d}, \vec{b}\right] \Rightarrow \vec{d} \in X$
$p \cup \left\{\neg\Theta\left[\vec{x}, \vec{b}\right]\right\}$ muss *inkonsistent* sein.

Sonst, weil $|B| < |M|$ und $\mathcal{M}$ saturiert, gäbe es $\underbrace{\vec{c}}_{\substack{\text{Realisierung} \\ \text{von } p}} \in M^n$ Realisierung $\rightarrow$ $\mathcal{M} \models$

$\neg\Theta\left[\vec{c}, \vec{b}\right] \rightarrow \vec{c} \notin X$
$\vec{c} \equiv_A \vec{d} \Rightarrow$ es gibt $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{M}/A)$
$\sigma(\vec{c}) = \vec{d} \in X \Rightarrow \vec{c} \in X$. Widerspruch zu $X$ invariant unter Aut$(\mathcal{M}/A)$. $\square$

$$\mathcal{M} \models \forall \vec{x}(\underbrace{\bigwedge \psi_i}_{=\psi \in p} \underbrace{\left[\vec{x}\right]}_{\substack{\text{zusätzlich} \\ \text{Parameter} \\ \text{aus } A}} \rightarrow \Theta\left[\vec{x}, \vec{b}\right])$$

$\mathcal{M} \models \forall \vec{x}\left(\psi\left[\vec{x}\right] \rightarrow \Theta\left[\vec{x}, \vec{b}\right]\right), p \in [\Theta] \subset \text{Restr}\left([\Theta]\right)$.

„$\subset$“ gilt hier, $\underbrace{\text{denn für } p_1 \in [\psi]}_{\substack{\psi = \chi_1, \ldots, \chi_n \in p_1 \\ \mathcal{M} \models \exists \vec{x} \bigwedge \psi_i[\vec{x}]}}$ $\Rightarrow$ $\psi \in p_1 \Rightarrow p_1 \cup \left\{\Theta\left[\vec{x}, \vec{b}\right]\right\}$ konsistent $\Rightarrow$ es gibt
$q_1 \in [\Theta] \mid \text{Restr}(q_1) = p_1$ ✓.
Insbesondere folgt: Die Realisierung erfüllt $\Theta$.

Noch $\not{Z}$ : $X$ eird durch die $\mathcal{L}_A$-Formel $\varphi$ definiert, mit $[\varphi] = \text{Restr}\left(\left[\Theta\left[\vec{x}, \vec{b}\right]\right]\right)$.

Das heißt $\mathcal{M} \models \forall \vec{x}\left(\Theta\left[\vec{x}, \vec{b}\right] \leftrightarrow \varphi\left[\vec{x}\right]\right)$.

"$\Rightarrow$": Sei $\vec{c} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \Theta\left[\vec{c}, \vec{b}\right]$. Betrachte $\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{c}/B) \ni \Theta \stackrel{\text{Restr}}{\Longrightarrow} \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{c}/A) \in \mathrm{Restr}([\Theta]) = [\Theta] \Rightarrow \mathcal{M} \models \varphi[\vec{c}]$.

"$\Leftarrow$": Sei $\vec{c} \in M^n$ mit $\mathcal{M} \models \varphi[\vec{c}]$. $\Rightarrow \underbrace{\mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{c}/A)}_{=p} \in \underbrace{[\varphi]}_{=\mathrm{Restr}([\Theta])}$. $\Rightarrow$ es gibt $p \in S_n^{\mathcal{M}}(B), \mathrm{Restr}(q) = \mathrm{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{c}/A), q \ni \Theta$.
$\stackrel{\mathcal{M}\text{ sat.}}{\Longrightarrow}$ es gibt $\vec{d} \in M^n$ Realisierung von $q$. $\Rightarrow \mathcal{M} \models \Theta\left[\vec{d}, \vec{b}\right]$ und $\vec{d}$ Realisierung von $p$. $\Rightarrow \vec{d} \in X \stackrel{\mathcal{M}\text{ sat.}}{\Longrightarrow}$ aber $\vec{d} \equiv_A \vec{c}$. Es gibt $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A) \mid \sigma\left(\vec{d}\right) = \vec{c} \Longrightarrow \vec{c} \in X \Rightarrow \mathcal{M} \models \Theta\left[\vec{c}, \vec{b}\right]$. □

**Definition 14.25**
Sei $\mathcal{M}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $A \subset M$. $b \in M$ ist *algebraisch* über $A$, falls $b$ eine algebraische Formel $\varphi[\vec{x}, \vec{a}]$ mit Parametern aus $A$ erfüllt.

Das heißt $\mathcal{M} \models \varphi[b, \vec{a}]$ und $\mathcal{M} \models \exists^{\leq N} x\varphi[x, \vec{a}]$ für ein $b \in M$ ist *definierbar* über $A$, falls es eine Formel $\varphi$ wie oben gibt mit $\mathcal{M} \models \exists! x\varphi[x, \vec{a}]$

$\mathrm{acl}^{\mathcal{M}}(A) = \{b \in M \mid b \text{ algebraisch über } A\}$.

**Bemerkung 14.26**
$b \in M$ algebraisch über $A \subset M$, $\mathcal{M} \succeq \mathcal{N} \Leftrightarrow b$ algebraisch über $A$ (in $\mathcal{N}$).

**Bemerkung 14.27**
($T = \mathrm{ACF}_0$) $b$ algebraisch über $A \Leftrightarrow b$ Körper-algebraisch über dem von $A$ erzeugten Körper ist $\Leftrightarrow \{\sigma(b)\}, \sigma \in \mathrm{Gal}(\mathcal{M}/A)$ endlich

**Folgerung 14.28**
Sei $\mathcal{M}$ saturiert, $A \subset M, |A| < |M|, b \in M$.

(1) $b$ ist algebraisch über $A \Longleftrightarrow \{\sigma(b)\}_{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)}$ endlich

(2) $b$ ist definierbar über $A \Longleftrightarrow \{\sigma(b)\}_{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/b)}$ ist eine Erweiterung $\Longleftrightarrow \sigma(b) = b$ für alle $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)$.

*Beweis.* Um zu überprüfen, ob etwas algebraisch ist am besten im saturierten Modell überprüfen.

(1): "$\Rightarrow$": klar, weil $\sigma(b)$ auch $\underbrace{\varphi[x, \vec{a}]}_{\text{endlich viele Realisierungen}}$ realisiert.

"$\Leftarrow$": $X = \{\sigma(b)\}_{\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A)}$ endlich $\Rightarrow$ definierbar und invariant unter $\mathrm{Aut}(\mathcal{M}/A) \Rightarrow X$ ist definierbar über $A$ □