Modelltheorie

Wintersemester 2019/20
Mitschrift von Floris Remmert

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Abteilung für mathematische Logik
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

31. Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

Teil I
Theorien und Quantorenelimination

Satz 0.1 (Morley)
Sei T eine Theorie, welche ein einziges (bis auf Isomorphie) Modell der Mächtigkeit $\aleph_0$ besitzt. Dann besitzt T für jede Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ ein einziges Modell der Mächtigkeit κ (bis auf Isomorphie).

1 Erinnerung

Definition 1.1

- *Eine Sprache $\mathcal{L}$ ist eine Kollektion von Konstanten-, Funktions-, und Relationszeichen*
- *Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ besteht aus einer <u>nicht-leeren</u> Grundmenge (oder Universum) A zusammen mit Interpretationen der Symbole aus $\mathcal{L}$:*
  - *Für jedes Funktionszeichen f der Stelligkeit n*
    $$f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$$
  - *Für jedes Relationszeichen R der Stelligkeit m*
    $$R^{\mathcal{A}} \subset A^m$$
- *Eine Einbettung F von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine <u>injektive</u> Abbildung $F : A \longrightarrow B$, welche mit den Interpretationen kompatibel[1] ist*
- *Ein Isomorphismus ist eine surjektive Einbettung.*
- *$\mathcal{A}$ ist eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$, falls $A \subset B$ und die Inklusion $\iota : A \longrightarrow B$ eine Einbettung bestimmt*

Bemerkung: Sei $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $\emptyset \neq A \subset B$. Dann gibt es eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$, welche von A erzeugt wird.

Das Universum besteht aus A zusammen mit dem Abschluss von A unter allen Interpretationen der Funktionszeichen von $\mathcal{L}$.

[1] das bedeutet, dass Funktions- und Relationszeichen bei Hin- und Rückrichtung erhalten bleiben

Definition 1.2
Sei $(I,<)$ eine partielle Ordnung. Die Ordnung ist gerichtet, falls für $i,j \in I$ gibt es $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

Bemerkung: Sei $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen indexiert nach der gerichteten partiellen Ordnung I derart, dass für $i \leq j$ gilt: $\mathcal{A}_i \underset{US}{\subset} \mathcal{A}_j$.

Die Menge $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ ist das Universum einer (eindeutig bestimmten) $\mathcal{L}$-Struktur

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i \tag{1}$$

Falls I eine lineare Ordnung ist, dann ist $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Kette.

Zu 1:

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}_i}$ für ein (alle) $i \in I$, denn $c^{\mathcal{A}_i} = c^{\mathcal{A}_j} = c^{\mathcal{A}_k}$, wegen gerichteter Ordnung
- $a_1, \dots a_n \in A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Longrightarrow \exists i \in I$ mit $a_1, \dots, a_n \in A_i$. Also ist $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n)$ wohldefiniert.
- $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}}$ gdw es ein $i \in I$ gibt mit $a_1, \dots, a_m \in A_i$ und $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}_i}$

Beachte, dass $\mathcal{A}_i \underset{US}{\subset} \mathcal{A}$ für alle $i \in I$.

Definition 1.3
Eine atomare Formel ist ein Ausdruck der Form $(t_1 \doteq t_2)$, $t_1, \dots, t_k$ Terme, $R(t_1, \dots, t_k)$.

Die Kollektion von Formeln ist die kleinste Klasse, welche alle atomaren Formeln enthält und derart, dass:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ Formel} &\Longrightarrow \neg\varphi \text{ Formel} \\ \varphi, \psi \text{ Formel} &\Longrightarrow (\varphi \vee \psi) \text{ Formel} \\ \varphi \text{ Formel}, x \text{ Variable} &\Longrightarrow \exists x \varphi \text{ Formel, } (x \text{ heißt dann „gebunden“}) \end{aligned}$$

Abk.:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi) &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \forall x \varphi &= \neg\exists x \neg\varphi \\ (\varphi \to \psi) &= (\neg\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &= ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \end{aligned}$$

Bemerkung:
- Jede Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ lässt sich in pränexer Normalform umschreiben: $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$. Das ist eine quantorfreie Formel, diese lässt sich weiter zerlegen in KNF bzw. DNF.
- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine Aussage
- Eine Theorie ist eine Kollektion von Aussagen

Beispiel 1.4
Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Erweitere die Sprache zu der Sprache $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{d_a\}_{a \in A}$.

$\mathcal{A}$ ist eine $\mathcal{L}_A$-Struktur, $d_a^{\mathcal{A}} = a$.

- $\mathrm{Diag}^{at}(\mathcal{A}) = \{$*quantorenfreie $\mathcal{L}_A$-Aussagen χ mit $\mathcal{A} \models \chi$*$\}$ *heißt „atomares Diagramm"*
- $\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) = \{$*$\mathcal{L}$-Aussagen θ mit $\mathcal{A} \models \theta$*$\}$ *heißt „vollständiges Diagramm"*

Sei nun $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}_A$-Struktur.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \models \mathrm{Diag}^{at}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} \textit{ einbetten lässt} \\ & A \longrightarrow B \\ & a \mapsto d_a^{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} \models \mathrm{Diag}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \textit{die obige Abbildung ist } \underline{\textit{elementar}} \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] &\Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)], a_1, \dots a_n \in A, \varphi[x_1, \dots, x_n] \textit{ Formel} \end{aligned}$$

Definition 1.5
- *T ist konsistent, falls T ein Modell besitzt.*
- *T ist vollständig, falls T konsistent ist und je zwei Modelle von T elementar äquivalent sind.*

Satz 1.6 (Kompaktheitssatz)
Eine Theorie ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent[2] ist.

Wie zeigen wir, dass $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$?

Satz 1.7 (Back & Forth)
$S = \{F : \underset{\underset{US}{\subset \mathcal{A}}}{\mathcal{C}} \longrightarrow \underset{\underset{US}{\subset \mathcal{B}}}{\mathcal{D}}$, *$F$ partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ geeignet[3]*$\}$.

Back: Für alle $F \in S$ und $b \in B$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $G \in S$ mit $G \supset F$ Erweiterung und $b \in \mathrm{Im}(G)$.

[2] endlich konsistent bedeutet: jede Teilmenge der Theorie besitzt ein Modell.
[3] bspw. endlich erzeugt

Forth: Für alle $F \in S$ und $a \in A$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $H \in S$, mit $H \supset F$ Erweiterung mit $a \in \mathrm{Dom}(H)$

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen dann „Back & Forth äquivalent“

$\rightarrow$ ist jedes $F \in S$ elementar, so gilt insbesondere $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

2 Tarskis Test

Lemma 2.1 (Tarskis Test)
Sei $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $A \subset B$ Teilmenge derart, dass für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n \in A$:
falls:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, b] \text{ für ein } b \in B \Rightarrow \text{ existiert } a \in A \text{ sodass } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, a] \tag{2}$$

dann ist A das Universum einer elementaren Unterstruktur von $\mathcal{B}$.

Insbesondere: Falls $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ Unterstruktur, ist $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow A$ erfüllt 2.

Beweis. Betrachte $A \neq \emptyset \rightarrow$ Betrachte $\varphi[y] = (y \doteq y)$. $B \neq \emptyset \rightarrow \exists b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[b]$. $\hookrightarrow \exists a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a]$

Beh.: Für jedes Konstantenzeichen $c \in \mathcal{L}$ ist $c^{\mathcal{B}} \in A$. $\hookrightarrow \varphi[y] = (y \doteq c)$, $\mathcal{B} \models \varphi[c^{\mathcal{B}}] \Rightarrow$ es gibt $a \in A$ mit $a = c^{\mathcal{B}}$.

Beh.: A ist unter den Funktionen $f^{\mathcal{B}}$ abgeschlossen, für jedes Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$.

Sei $\varphi[x_1, \ldots, x_n, y] = (y \doteq f(x_1, \ldots, x_n))$ ✓

Für $R \in \mathcal{L}$ m-stellig setze $R^{\mathcal{A}} = A^m \cap R^{\mathcal{B}} \longrightarrow$ somit bildet A eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$.

Noch zu zeigen: $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, d. h. $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ $\mathcal{L}$-Formel.

Seien dazu $a_1, \ldots, a_n \in A$.

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \tag{3}$$

Induktiv über den Aufbau von φ.

φ ist atomar $\longrightarrow \checkmark$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \not\models \psi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow & & \mathcal{B} \not\models \psi[a_1,\dots,a_n] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathcal{A} \models \varphi[a1,\dots,a_n] & & \mathcal{B} \models \phi[a_1,\dots,a_n] \end{array}$$

$\varphi = \neg\psi \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = \exists y \psi[x_1,\dots,x_n,y]$: $\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ sodass $\mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n,a]$ $\underset{3}{\Rightarrow} \mathcal{B} \models \psi[a_1,\dots,a_n,a]$ für ein $a \in A \subset B \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Rightarrow$ es gibt $b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1,\dots,a_n,b] \underset{2}{\Rightarrow}$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1,\dots,a_n,a] \underset{3}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n,a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$.

Für „insbesondere“: Angenommen, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. Sei $\varphi[x_1,\dots,x_n,y]$ eine $\mathcal{L}$-Formel, $a_1,\dots,a_n \in A$. Dann: $\mathcal{B} \models \varphi[a_1,\dots,a_n,b]$ für ein $b \in B \Rightarrow \mathcal{B} \models (\exists y\varphi)[a_1,\dots,a_n]$ $\underset{\mathcal{A}\preceq\mathcal{B}}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models (\exists y\varphi)[a_1,\dots,a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n,a] \underset{\mathcal{A}\preceq\mathcal{B}}{\Rightarrow} \mathcal{B} \models \varphi[a_1,\dots,a_n,a] \checkmark$

$\square$

Proposition 2.2 (aufwärts Löwenheim-Skolem)
Sei $\mathcal{A}$ eine unendliche $\mathcal{L}$-Struktur, und $\kappa < \max\{|A|,|\mathcal{L}|\}$. Dann gibt es eine elementare $\mathcal{L}$-Erweiterung $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}$ der Mächtigkeit κ.

Beweis. $\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha\neq\beta<\kappa}$, wobei $\{c_\alpha\}_{\alpha<\kappa}$ eine Menge neuer Konstantenzeichen ist, ist konsistent weil sie endlich konsistent[4] ist.

Aus der Konstruktion von Henkin hat $\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha\neq\beta<\kappa}$ ein Modell der Mächtigkeit der Sprache.

$\rightarrow$ ein Modell der Mächtigkeit κ $\square$

Bemerkung: $|A| = n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A} \Rightarrow |B| = n$

Proposition 2.3 (abwärts Löwenheim-Skolem)
Sei $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $S \subset B$ beliebig. Dann gibt es eine elementare Unterstruktur $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ mit $A \supset S$ und $|A| \leq \max\{|S|,|\mathcal{L}|,\aleph_0\}$.

Bemerkung: $\mathbb{C}$ in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\mathrm{Ring}}$, $S = \emptyset \Rightarrow$ es gibt eine abzählbare elementare Unterstruktur von $\mathbb{C}$. $\rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \preceq \mathbb{C}$.

[4] Kompaktheit

Beweis 2.3. Setze $S_0 = S$. Angenommen S_k wurde bereits konstruiert, wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$, jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ und Elemente $a_1, \dots, a_n \in S_k$ ein Element $a_{\varphi[a_1,\dots,a_n,y]} \in B$ derart, dass $\mathcal{B} \models ((\exists y \in \varphi)[a_1, \dots, a_n] \to \varphi[a_1, \dots, a_n, a_{\varphi[a_1,\dots,a_n,y]}])$. Setze $S_{k+1} = S_k \cup \{a_\varphi\}_{\varphi \mathcal{L}\text{-Formel},\ (a_1,\dots,a_n) \in S_k}$

Definiere $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} S_k \supset S$. Wir überprüfen, dass A den Test von Tarski erfüllt. Sei $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ eine $\mathcal{L}$-Formel, $a_1, \dots, a_n \in A$.

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$ für ein $b \in B \Rightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_1, \dots a_n \in S_k \Rightarrow$ es gibt ein $a_{\varphi[a_1,\dots,a_n,y]} \in S_{k+1} \subset A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a]$✓

Ferner ist $|A| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |S|\}$. □

Folgerung 2.4
Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen, sodass für $i \leq j$ ist $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$. Dann ist $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine elementare Erweiterung jeder $\mathcal{A}_i$.

Beweis. Wir beweisen induktiv über den Aufbau von $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$, dass für alle $i \in I$, für alle $a_1, \dots, a_n \in A_i$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

φ atomar $\to$ klar, denn $\mathcal{A}_i \underset{US}{\subset} \mathcal{A}$

$\varphi = \neg\varphi \Rightarrow$ ok!

$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow$ ok!

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A_i$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$ $\underset{\text{ind. über } \psi}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $b \in A = \bigcup\limits_{i \in I} A_i$ mit $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \Rightarrow$ es gibt $j \in I$ mit $b \in A_j \Rightarrow$ es existiert $k \in I$ mit $i \leq k$, $j \leq k$, $a_1, \dots, a_n, b \in A_k$
$\Rightarrow \mathcal{A}_k \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \underset{\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_k}{\Rightarrow}$ es gibt ein $a \in A_k$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. □

3 Quantorenelimination

Definition 3.1
Eine Theorie T hat Quantorenelimination, falls jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ äquivalent

modulo T zu einer quantorenfreien $\mathcal{L}$-Formel $\psi[x_1, \ldots, x_n]$ ist.

$$T \models \forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi[x_1, \ldots, x_n] \leftrightarrow \psi[x_1, \ldots, x_n])$$

Beispiel 3.2
Sei $\mathcal{L} \coloneqq (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ gegeben. Betrachte die Menge $\{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | a \neq 0$ und es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $ax^2 + bx + c = 0\} = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 | a \neq 0$ und $b^2 - 4ac \geq 0\}$.

Diese Formel ist in $\mathcal{L}$ nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel, in $\mathcal{L}_1 \coloneqq (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$ hingegen doch. Somit ist die Menge in $\mathcal{L}_1$ quantorenfrei.

Bemerkung:

- Wenn T inkonsistent st, dann hat T immer Quantorenelimination
- Wenn T Quantorenelimination hat, und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ mit $\mathcal{A} \underset{\text{US}}{\subseteq} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ Übung

Definition 3.3

- *Eine einfache Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \ldots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \ldots, x_n, y]$*
- *Eine primitive Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \ldots, x_n] = \psi[x_1, \ldots, x_n, y]$, wobei ψ eine endliche Konjunktion von atomaren Formeln und Negationen ist*

Lemma 3.4
Eine (konsistente) Theorie T hat genau dann Quantoreneliminantion, wenn jede primitive Existenzformel zu einer quantorenfreien Formel äquivalent modulo T ist.

Beweis. „$\Rightarrow$“: klar

„$\Leftarrow$“: Beachte, $\exists y(\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\exists y \psi_1 \vee \exists y \psi_2)$. Insbesondere, wenn T Quantorenelimination für primitive Existenzformeln hat, dann hat T Quantorenelimination für einfache Existenzformeln.

$$\underset{\text{einfache Existenzformel}}{\varphi} = \exists y \underbrace{\psi[x_1, \ldots, x_n]}_{\text{umschreiben in DNF}} \sim \exists y(\psi_1 \vee \cdots \vee \psi_n) \sim \underbrace{\bigvee_{i=1}^{n} \exists y \psi_i}_{\text{primitive Existenzformel}}$$

Zu zeigen: Jede beliebige Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ ist äquivalent zu einer quantorenfreien Formel modulo T.

$$\varphi[x_1, \ldots, x_n] \underbrace{\sim}_{\substack{\text{pränexe} \\ \text{Normalform}}} Q_1 y_1 \ldots Q_m y_m \underbrace{\psi[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]}_{\text{quantorenfrei}}, \text{ wobei } Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

Induktion über m:

$m = 0$: ✓

$m = 1$: $\varphi = Q \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y]}_{\text{quantorenfrei}}$

$Q = \exists \ \varphi$ einfache Existenzformel ✓

$Q = \forall \ \varphi \sim \neg \underbrace{\exists y \neg \psi}_{\substack{\text{einfache} \\ \text{Existenzformel}}} \to \text{eliminieren} \to$ ✓

$m - 1 \to m$: $\varphi[x_1, \dots, x_n] = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots \underbrace{Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\varphi'[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}$. φ' ist eine einfache Existenzformel, wir eliminieren also:

$$\underbrace{\qquad}_{m-1 \text{ viele Quantoren}} \underbrace{\Theta[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}_{\text{quantorenfrei}}$$

$\Rightarrow$ Induktion

□

Beispiel 3.5
Sei $\mathcal{K} = \{$unendliche Mengen$\}$. Diese Klasse lässt sich definieren durch die Theorie $T = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j = 1}^{n} \neg(x_i \doteq x_j))\}_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Theorie ist vollständig! Betrachte jetzt die definierbaren Mengen: $\exists^\infty x$

$$\{b \in A | \mathcal{A} \models \underbrace{\underbrace{\varphi}_{\textit{quantorenfrei}} [b, a_1, \dots, a_m]}_{\substack{\updownarrow \\ \textit{endlich oder koendlich}}}\}$$

Lemma 3.6 (Trennungslemma)
Seien T_1 und T_2 zwei $\mathcal{L}$-Theorien, und Δ eine Kollektion von $\mathcal{L}$-Aussagen, welche unter endlichen Konjunktionen und Disjunktionen abgeschlossen ist. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

1) Es gibt eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $T_1 \models \chi$

2) Für alle $\mathcal{A} \models T_1$, $\mathcal{B} \models T_2$ gibt es eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi$

Bemerkung: Das ganze ist trivial für inkonsistente Theorien.

Beweis. 1 $\Rightarrow$ 2: trivial!

<u>2 ⇒ 1:</u> OBdA T_1, T_2 konsistent. Sei $\mathcal{A} \models T_1$, setze $\Sigma_\mathcal{A} = \{\chi, \chi$ Aussagen in Δ mit $\mathcal{A} \models \chi\}$.

Betrachte jetzt $T_2 \cup \Sigma_\mathcal{A}$. Ist diese Theorie konsistent? Nein: Wäre $\mathcal{B} \models T_2 \cup \Sigma_\mathcal{A} \hookrightarrow$ es gibt $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi \Rightarrow \chi \in \Sigma_\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \models \chi$. Widerspruch!

Das bedeutet (wegen Kompaktheit), dass es $\chi_1, \ldots, \chi_r \in \Sigma_\mathcal{A}$ gibt mit $T_2 \cup \{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ inkonsistent.

$$\hookrightarrow T_2 \models \bigvee_{i=1}^{r} \neg\chi_i \Rightarrow T_2 \models \neg(\underbrace{\bigwedge_{i=1}^{r} \chi_i}_{=\chi_\mathcal{A} \in \Delta})$$

Das heißt für jedes $\mathcal{A} \models T_1$ gibt es $\chi_\mathcal{A} \in \Delta$ mit $T_2 \models \neg\chi_\mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \models \chi_\mathcal{A}$.

Sei nun $T_1 \cup \{\neg\chi_\mathcal{A}\}_{\mathcal{A} \models T_1}$.[5] $\hookrightarrow$ inkonsistent nach Konstruktion.

$\underset{\text{Kompaktheit}}{\Rightarrow}$ es existieren $\chi_{\mathcal{A}_1}, \ldots \chi_{\mathcal{A}_n}$ mit $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}_1}, \ldots, \chi_{\mathcal{A}_n}\}$ inkonsistent. Also:
$T_1 \models \bigvee_{j=1}^{n} \chi_{\mathcal{A}_j} =: \chi \in \Delta$

$T_1 \models \chi$. Wollen zeigen: $T_2 \models \neg\chi$. Aber $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}_i}, 1 \leq i \leq n$. □

Folgerung 3.7
Zwei Theorien T_1 und T_2 werden von einer quantorenfreien Aussage getrennt, wenn je zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1$ und $\mathcal{B} \models T_2$ von einer quantorenfreien Aussage getrennt werden.

$$\rightarrow \exists\chi \textit{ quantorenfrei } : \mathcal{A} \models \chi \textit{ und } \mathcal{B} \models \neg\chi$$

Satz 3.8
Sei T eine Theorie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1) *T hat Quantorenelimination.*

2) *Gegeben Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ und endlich erzeugte Unterstrukturen $\langle c_1, \ldots, c_n\rangle_\mathcal{A} = \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, $\langle d_1, \ldots, d_n\rangle_\mathcal{B} = \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ und $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ eine Formel. Dann gilt:*
$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n] \Rightarrow {}^{6}\mathcal{B} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$$

3) *Gegeben Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit isomorph erzeugten Unterstrukturen $\langle c_1, \ldots, c_n\rangle_\mathcal{A} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \ldots, d_n\rangle_\mathcal{B}$ wie in 2) und für alle $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ primitive Existenzformel, gilt:*
$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$$

[5] Ist das überhaupt eine Menge? Es genügt die Einschränkung bis auf Isomorphie, das sollte reichen…
[6] Durch vertauschen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt hier sogar ⇔.

Ferner, falls T konsistent ist, 1) gilt und je zwei Modelle von T isomorphe endlich erzeugte Unterstrukturen besitzen, dann ist T vollständig mit Quantorenelimination.

Bemerkung: Wie benutzen wir diesen Satz? Letztlich wollen wir Back-&-Forth-Äquivalenz zeigen.

Beweis. 1) $\Rightarrow$ 2): Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n]$. T hat Quantorenelimination $\longleftarrow$ es gibt $\psi[x_1, \dots, x_n]$ quantorenfrei mit: $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \psi[\vec{x}])$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \\
\underset{\mathcal{A}\models T}{\Leftrightarrow} & \mathcal{A} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
\underset{\psi \text{ quantorenfrei}}{\Leftrightarrow} & \mathcal{C} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
\underset{\mathcal{C}\simeq\mathcal{D}}{\Leftrightarrow} & \mathcal{D} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
\Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
\underset{\mathcal{B}\models T}{\Leftrightarrow} & \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]
\end{array}$$

2) $\Rightarrow$ 3): klar.

3) $\Rightarrow$ 1): Um zu zeigen, dass T Quantorenelimination besitzt, genügt es nur primitive Existenzformeln $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ zu betrachten.

Seien dazu $e_1, \dots, e_n$ neue Konstantenzeichen. Betrachte die Sprache $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$, sowie die Theorien $T_1 = T \cup \{\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$ und $T_2 = T \cup \{\neg\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$.

Falls T_1 und T_2 durch eine quantorenfreie Aussage $\underbrace{\psi[e_1, \dots, e_n]}_{\substack{\text{quantorenfreie} \\ \mathcal{L}\text{-Formel}}}$ in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ trennbar sind, so folgt:

$$\begin{array}{l}
T \cup \{\varphi[\vec{e}]\} \models \psi[\vec{e}] \Rightarrow T \models (\varphi[\vec{e}] \to \psi[\vec{e}]) \\
T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\} \models \neg\psi[\vec{e}] \Rightarrow T \models (\neg\varphi[\vec{e}] \to \psi[\vec{e}]) \\
\Rightarrow T = (\psi[\vec{e}] \to \varphi[\vec{e}]) \underset{\text{Aufgabe}^7}{\Rightarrow} T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}})
\end{array}$$

Sonst, falls also T_1, T_2 nicht trennbar sind, gibt es zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1 \cup \{\varphi[\vec{e}]\}, \mathcal{B} \models T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\}$, welche alle quantorenfreien Aussagen in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ gleich erfüllen.

Seien $c_1 = e_i^{\mathcal{A}}, d_i = e_i^{\mathcal{B}}$. Betrachte jetzt $\langle c_1, \dots, c_n\rangle_{\mathcal{A}} \underset{\mathcal{L}\text{-US}}{\subset} \mathcal{A}\mid_{\mathcal{L}}$ und $\langle d_1, \dots, d_n\rangle_{\mathcal{B}} \underset{US}{\subset} \mathcal{B}\mid_{\mathcal{L}}$. Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$ und $\mathcal{B} \models \neg\varphi[d_1, \dots, d_n]$.

[7] weil $e_1, \dots, e_n$ neue Konstantenzeichen sind

Um einen Widerspruch zu bekommen genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}, c_i \mapsto d_i$.

$$C \longrightarrow D :$$
$$\underbrace{t^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n]}_{\mathcal{L}\text{-Term}} \mapsto t^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n]$$

Ist diese Abbildung wohldefiniert?

$$\begin{aligned} &\text{Angenommen } t_1^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] = t_2^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{als } \mathcal{L}\cup\{e_1,\dots,e_n\}\text{-Struktur}} \models \underbrace{(t_1[e_1, \dots, e_n] \dot{=} t_2[e_1, \dots, e_n])}_{\text{quantorenfreie Aussage}} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{B} \models (t_1[\vec{e}] \dot{=} t_2[\vec{e}]) \\ &\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] = t_2^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \\ &\longrightarrow \text{wohldefiniert und injektiv} \end{aligned}$$

induktiv über den Aufbau zeigen wir: Das ist ein Isomorphismus.

Zu „ferner“: Angenommen T hat Quantorenelimination, ist konsistent und je zwei Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ haben isomorphe, endlich erzeugte Unterstrukturen

$$\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \overset{\subset \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \underset{c_i \mapsto d_i}{\simeq} \overset{\subset \mathcal{B}}{\mathcal{D}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$$

T ist vollständig $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Sei χ eine $\mathcal{L}$-Aussage und schreibe $\chi = \chi[x_1, \dots, x_n]$.

$$\mathcal{A} \models \chi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \chi[c_1, \dots, c_n] \underset{2)}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \models \chi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \chi$$

□

4 Beispiele klassischer Theorien

Beispiel 4.1
$T = \exists^\infty$ *hat Quantorenelimination und ist vollständig.*

Beispiel 4.2
DLO *(dichte lineare Ordnung ohne Randpunkte). Sei* $\mathcal{L} = \{<\}$.

$$\begin{aligned} \text{DLO} = &\{\forall x(\neg x < x)\} \\ &\cup \{\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \to (x < z))\} \\ &\cup \{\forall x \forall y((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x))\} \\ &\cup \{\forall x \forall y \exists z((x < y) \to (x < z < y))\} \\ &\cup \{\forall x \exists u \exists v(u < x < v)\} \\ &\cup \{\exists x(x = x)\} \end{aligned}$$

Diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination. Es gibt zwei Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

1)

$$\begin{aligned}\varphi[x_1,\dots,x_n] &= \exists y(\bigwedge_i \overbrace{\Theta_i[x_1,\dots,x_n,y]}^{\substack{\text{atomar oder}\\ \text{Negation davon}}}) \\ &= \exists y(\psi_1[x_1,\dots,x_n] \wedge \bigwedge_i \substack{x_i=y\\ x_i\neq y\\ x_i<y\\ y<x_i})\end{aligned}$$

$$x_i = y \wedge x_j = y \Leftrightarrow x_i = x_j$$
$$x_i = y \wedge y < x_j \Leftrightarrow x_i < x_j \quad \longrightarrow \quad \textit{induktiv lassen sich alle Quantoren eliminieren}$$

2) Gegeben $\langle c_1,\dots,c_n\rangle_{\mathcal{A}} = \underset{\subset\mathcal{A}}{\mathcal{C}} \simeq \underset{\subset\mathcal{B}}{\mathcal{D}} = \langle d_1,\dots,d_n\rangle_{\mathcal{B}}$, *mit* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *Isomorphismus und* $\mathcal{A},\mathcal{B} \models \mathrm{DLO}$.

OBdA wähle $c_1 < c_2 < \dots < c_n \underset{F}{\mapsto} d_1 < d_2 < \dots < d_n$. $\longrightarrow$ *F in Back-&-Forth-System.*

1. *Fall:* $a < c_1 \to$ *wähle* $b < d_1$ *in* $\mathcal{B}$, *weil* d_i *kein Randpunkt ist.*
2. *Fall:* $a > c_n \to$ *wähle* $b < c_n$ *in* $\mathcal{B}$, *weil* d_i *kein Randpunkt ist.*
3. *Fall:* $\exists i \mid c_i < a < c_{i+1} \to$ *wähle b zwischen* d_i *und* d_{i+1} *weil* $\mathcal{B}$ *dicht ist.*

Vollständigkeit folgt, weil Unterstruktur und Punkt zu Punkt.