

# **Modelltheorie**

**Wintersemester 2019/20**

**Mitschrift von Floris Remmert**

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro  
Abteilung für mathematische Logik  
Mathematisches Institut  
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

31. Oktober 2019



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Theorien und Quantorenelimination</b>	<b>1</b>
1	Erinnerung	1
2	Tarskis Test	4
3	Quantorenelimination	6
4	Beispiele klassischer Theorien	11

# Teil I

## Theorien und Quantorenelimination

**Satz 0.1** (Morley)

Sei  $T$  eine Theorie, welche ein einziges (bis auf Isomorphie) Modell der Mächtigkeit  $\aleph_0$  besitzt. Dann besitzt  $T$  für jede Kardinalzahl  $\kappa > \aleph_0$  ein einziges Modell der Mächtigkeit  $\kappa$  (bis auf Isomorphie).

### 1 Erinnerung

**Definition 1.1** • Eine Sprache  $\mathcal{L}$  ist eine Kollektion von Konstanten-, Funktions-, und Relationszeichen

- Eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  besteht aus einer nicht-leeren Grundmenge (oder Universum)  $A$  zusammen mit Interpretationen der Symbole aus  $\mathcal{L}$ :

- Für jedes Funktionszeichen  $f$  der Stelligkeit  $n$

$$f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$$

- Für jedes Relationszeichen  $R$  der Stelligkeit  $m$

$$R^{\mathcal{A}} \subset A^m$$

- Eine Einbettung  $F$  von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  ist eine injektive Abbildung  $F : A \longrightarrow B$ , welche mit den Interpretationen kompatibel<sup>1</sup> ist
- Ein Isomorphismus ist eine surjektive Einbettung.
- $\mathcal{A}$  ist eine Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ , falls  $A \subset B$  und die Inklusion  $\iota : A \longrightarrow B$  eine Einbettung bestimmt

*Bemerkung:* Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $\emptyset \neq A \subset B$ . Dann gibt es eine Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ , welche von  $A$  erzeugt wird.

Das Universum besteht aus  $A$  zusammen mit dem Abschluss von  $A$  unter allen Interpretationen der Funktionszeichen von  $\mathcal{L}$ .

---

<sup>1</sup>das bedeutet, dass Funktions- und Relationszeichen bei Hin- und Rückrichtung erhalten bleiben

**Definition 1.2**

Sei  $(I, <)$  eine partielle Ordnung. Die Ordnung ist gerichtet, falls für  $i, j \in I$  gibt es  $k \in I$  mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$ .

*Bemerkung:* Sei  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen indexiert nach der gerichteten partiellen Ordnung  $I$  derart, dass für  $i \leq j$  gilt:  $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}_j$ .

Die Menge  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  ist das Universum einer (eindeutig bestimmten)  $\mathcal{L}$ -Struktur

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \quad (1)$$

Falls  $I$  eine lineare Ordnung ist, dann ist  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Kette.

Zu 1:

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}_i}$  für ein (alle)  $i \in I$ , denn  $c^{\mathcal{A}_i} = c^{\mathcal{A}_j} = c^{\mathcal{A}_k}$ , wegen gerichteter Ordnung
- $a_1, \dots, a_n \in A = \bigcup_{i \in I} A_i \implies \exists i \in I$  mit  $a_1, \dots, a_n \in A_i$ . Also ist  $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n)$  wohldefiniert.
- $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}}$  gdw es ein  $i \in I$  gibt mit  $a_1, \dots, a_m \in A_i$  und  $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}_i}$

Beachte, dass  $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$  für alle  $i \in I$ .

**Definition 1.3**

Eine atomare Formel ist ein Ausdruck der Form  $(t_1 \dot{=} t_2)$ ,  $t_1, \dots, t_k$  Terme,  $R(t_1, \dots, t_k)$ .

Die Kollektion von Formeln ist die kleinste Klasse, welche alle atomaren Formeln enthält und derart, dass:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ Formel} &\implies \neg \varphi \text{ Formel} \\ \varphi, \psi \text{ Formel} &\implies (\varphi \vee \psi) \text{ Formel} \\ \varphi \text{ Formel}, x \text{ Variable} &\implies \exists x \varphi \text{ Formel, } (x \text{ heißt dann „gebunden“}) \end{aligned}$$

Abk.:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi) &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \forall x \varphi &= \neg \exists x \neg \varphi \\ (\varphi \rightarrow \psi) &= (\neg\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \end{aligned}$$

*Bemerkung:* • Jede Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  lässt sich in pränexer Normalform umschreiben:  $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ . Das ist eine quantorfreie Formel, diese lässt sich weiter zerlegen in KNF bzw. DNF.

- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine Aussage
- Eine Theorie ist eine Kollektion von Aussagen

#### Beispiel 1.4

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur. Erweitere die Sprache zu der Sprache  $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{d_a\}_{a \in A}$ .

$\mathcal{A}$  ist eine  $\mathcal{L}_A$ -Struktur,  $d_a^{\mathcal{A}} = a$ .

- $\text{Diag}^{at}(\mathcal{A}) = \{\text{quantorenfreie } \mathcal{L}_A\text{-Aussagen } \chi \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$  heißt „atomares Diagramm“
- $\text{Diag}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{L}\text{-Aussagen } \theta \text{ mit } \mathcal{A} \models \theta\}$  heißt „vollständiges Diagramm“

Sei nun  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}_A$ -Struktur.

$\mathcal{B} \models \text{Diag}^{at}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  einbetten lässt

$$A \longrightarrow B$$

$$a \mapsto d_a^{\mathcal{B}}$$

$\mathcal{B} \models \text{Diag}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow$  die obige Abbildung ist elementar

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)], a_1, \dots, a_n \in A, \varphi[x_1, \dots, x_n]$  Formel

**Definition 1.5** •  $T$  ist konsistent, falls  $T$  ein Modell besitzt.

- $T$  ist vollständig, falls  $T$  konsistent ist und je zwei Modelle von  $T$  elementar äquivalent sind.

**Satz 1.6** (Kompaktheitssatz)

Eine Theorie ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent<sup>2</sup> ist.

Wie zeigen wir, dass  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ?

**Satz 1.7** (Back & Forth)

$S = \{F : \underset{\substack{\mathcal{C} \\ \subseteq \\ \mathcal{A}}}{\mathcal{C}} \longrightarrow \underset{\substack{\mathcal{D} \\ \subseteq \\ \mathcal{B}}}{\mathcal{D}}, F \text{ partieller Isomorphismus zwischen } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{D} \text{ geeignet}^3\}$ .

Back: Für alle  $F \in S$  und  $b \in B$ ,  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  gibt es  $G \in S$  mit  $G \supset F$  Erweiterung und  $b \in \text{Im}(G)$ .

<sup>2</sup>endlich konsistent bedeutet: jede Teilmenge der Theorie besitzt ein Modell.

<sup>3</sup>bspw. endlich erzeugt

Forth: Für alle  $F \in S$  und  $a \in A$ ,  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  gibt es  $H \in S$ , mit  $H \supset F$  Erweiterung mit  $a \in \text{Dom}(H)$

$\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  heißen dann „Back & Forth äquivalent“

$\rightarrow$  ist jedes  $F \in S$  elementar, so gilt insbesondere  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .

## 2 Tarskis Test

**Lemma 2.1** (Tarskis Test)

Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $A \subset B$  Teilmenge derart, dass für jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  und Elemente  $a_1, \dots, a_n \in A$ :

falls:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b] \text{ für ein } b \in B \Rightarrow \text{ existiert } a \in A \text{ sodass } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \quad (2)$$

dann ist  $A$  das Universum einer elementaren Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ .

Insbesondere: Falls  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  Unterstruktur, ist  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$  erfüllt 2.

Beweis. Betrachte  $A \neq \emptyset \rightarrow$  Betrachte  $\varphi[y] = (y \doteq y)$ .  $B \neq \emptyset \rightarrow \exists b \in B$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[b]$ .  
 $\hookrightarrow \exists a \in A$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[a]$

Beh.: Für jedes Konstantenzeichen  $c \in \mathcal{L}$  ist  $c^{\mathcal{B}} \in A$ .  $\hookrightarrow \varphi[y] = (y \doteq c)$ ,  $\mathcal{B} \models \varphi[c^{\mathcal{B}}] \Rightarrow$  es gibt  $a \in A$  mit  $a = c^{\mathcal{B}}$ .

Beh.:  $A$  ist unter den Funktionen  $f^{\mathcal{B}}$  abgeschlossen, für jedes Funktionszeichen  $f \in \mathcal{L}$ .

Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y] = (y \doteq f(x_1, \dots, x_n)) \checkmark$

Für  $R \in \mathcal{L}$   $m$ -stellig setze  $R^{\mathcal{A}} = A^m \cap R^{\mathcal{B}} \longrightarrow$  somit bildet  $A$  eine  $\mathcal{L}$ -Unterstruktur  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{B}$ .

Noch zu zeigen:  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ , d. h.  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$   $\mathcal{L}$ -Formel.

Seien dazu  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad (3)$$

Induktiv über den Aufbau von  $\varphi$ .

$\varphi$  ist atomar  $\longrightarrow \checkmark$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] & \Leftrightarrow & \mathcal{B} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] & & \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \end{array}$$

$\varphi = \neg\psi \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$ :  $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A$  sodass  $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$  für ein  $a \in A \subset B \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt  $b \in B$  mit  $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xRightarrow{2} \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A$  mit  $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{3} \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .

Für „insbesondere“: Angenommen, dass  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Dann:  $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$  für ein  $b \in B \Rightarrow \mathcal{B} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{A} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A$  mit  $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$   
□

**Proposition 2.2** (aufwärts Löwenheim-Skolem)

Sei  $\mathcal{A}$  eine unendliche  $\mathcal{L}$ -Struktur, und  $\kappa < \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$ . Dann gibt es eine elementare  $\mathcal{L}$ -Erweiterung  $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}$  der Mächtigkeit  $\kappa$ .

*Beweis.*  $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$ , wobei  $\{c_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$  eine Menge neuer Konstantenzeichen ist, ist konsistent weil sie endlich konsistent<sup>4</sup> ist.

Aus der Konstruktion von Henkin hat  $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$  ein Modell der Mächtigkeit der Sprache.

$\rightarrow$  ein Modell der Mächtigkeit  $\kappa$  □

*Bemerkung:*  $|A| = n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A} \Rightarrow |B| = n$

**Proposition 2.3** (abwärts Löwenheim-Skolem)

Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $S \subset B$  beliebig. Dann gibt es eine elementare Unterstruktur  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  mit  $A \supset S$  und  $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$ .

*Bemerkung:*  $\mathbb{C}$  in der Ringsprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ ,  $S = \emptyset \Rightarrow$  es gibt eine abzählbare elementare Unterstruktur von  $\mathbb{C}$ .  $\rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \preceq \mathbb{C}$ .

---

<sup>4</sup>Kompaktheit



### 3 Quantorenelimination

*Beweis 2.3.* Setze  $S_0 = S$ . Angenommen  $S_k$  wurde bereits konstruiert, wähle für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  und Elemente  $a_1, \dots, a_n \in S_k$  ein Element  $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in B$  derart, dass  $\mathcal{B} \models ((\exists y \in \varphi)[a_1, \dots, a_n] \rightarrow \varphi[a_1, \dots, a_n, a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]}])$ . Setze  $S_{k+1} = S_k \cup \{a_{\varphi}\}_{\varphi \mathcal{L}\text{-Formel}, (a_1, \dots, a_n) \in S_k}$

Definiere  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \supset S$ . Wir überprüfen, dass  $A$  den Test von Tarski erfüllt. Sei  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$  für ein  $b \in B \Rightarrow$  es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $a_1, \dots, a_n \in S_k \Rightarrow$  es gibt ein  $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in S_{k+1} \subset A$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$

Ferner ist  $|A| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |S|\}$ . □

#### Folgerung 2.4

Sei  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine gerichtete Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen, sodass für  $i \leq j$  ist  $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$ . Dann ist  $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$  eine elementare Erweiterung jeder  $\mathcal{A}_i$ .

*Beweis.* Wir beweisen induktiv über den Aufbau von  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$ , dass für alle  $i \in I$ , für alle  $a_1, \dots, a_n \in A_i$ :  $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .

$\varphi$  atomar  $\rightarrow$  klar, denn  $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$

$\varphi = \neg \varphi \Rightarrow$  ok!

$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow$  ok!

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$ :  $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A_i$  mit  $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$   
 $\Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$   
ind. über  $\psi$

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $b \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$  mit  $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \Rightarrow$  es gibt  $j \in I$  mit  $b \in A_j \Rightarrow$  es existiert  $k \in I$  mit  $i \leq k, j \leq k, a_1, \dots, a_n, b \in A_k$   
 $\Rightarrow \mathcal{A}_k \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xRightarrow{\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_k}$  es gibt ein  $a \in A_k$  mit  $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ . □

## 3 Quantorenelimination

#### Definition 3.1

Eine Theorie  $T$  hat Quantorenelimination, falls jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  äquivalent

### 3 Quantorenelimination

modulo  $T$  zu einer quantorenfreien  $\mathcal{L}$ -Formel  $\psi[x_1, \dots, x_n]$  ist.

$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow \psi[x_1, \dots, x_n])$$

#### Beispiel 3.2

Sei  $\mathcal{L} := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$  gegeben. Betrachte die Menge  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und es gibt } x \in \mathbb{R} \text{ mit } ax^2 + bx + c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0\}$ .

Diese Formel ist in  $\mathcal{L}$  nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel, in  $\mathcal{L}_1 := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$  hingegen doch. Somit ist die Menge in  $\mathcal{L}_1$  quantorenfrei.

*Bemerkung:* • Wenn  $T$  inkonsistent ist, dann hat  $T$  immer Quantorenelimination

- Wenn  $T$  Quantorenelimination hat, und  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  mit  $\mathcal{A} \subseteq_{\text{US}} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  Übung

**Definition 3.3** • Eine einfache Existenzformel ist eine Formel der Form  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$

- Eine primitive Existenzformel ist eine Formel der Form  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \psi[x_1, \dots, x_n, y]$ , wobei  $\psi$  eine endliche Konjunktion von atomaren Formeln und Negationen ist

#### Lemma 3.4

Eine (konsistente) Theorie  $T$  hat genau dann Quantorenelimination, wenn jede primitive Existenzformel zu einer quantorenfreien Formel äquivalent modulo  $T$  ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: klar

„ $\Leftarrow$ “: Beachte,  $\exists y(\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\exists y\psi_1 \vee \exists y\psi_2)$ . Insbesondere, wenn  $T$  Quantorenelimination für primitive Existenzformeln hat, dann hat  $T$  Quantorenelimination für einfache Existenzformeln.

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & = \exists y \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n]}_{\text{umschreiben in DNF}} & \sim \exists y(\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n) & \sim & \underbrace{\bigvee_{i=1}^n \exists y\psi_i}_{\text{primitive Existenzformel}} \\ \text{einfache Existenzformel} & & & & \end{array}$$

Zu zeigen: Jede beliebige Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  ist äquivalent zu einer quantorenfreien Formel modulo  $T$ .

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] \underbrace{\sim}_{\substack{\text{pränexe} \\ \text{Normalform}}} Q_1 y_1 \dots Q_m y_m \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\text{quantorenfrei}}, \text{ wobei } Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

Induktion über  $m$ :

### 3 Quantorenelimination

$m = 0$ : ✓

$m = 1$ :  $\varphi = Q \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y]}_{\text{quantorenfrei}}$

$Q = \exists$   $\varphi$  einfache Existenzformel ✓

$Q = \forall$   $\varphi \sim \neg \underbrace{\exists y \neg \psi}_{\substack{\text{einfache} \\ \text{Existenzformel}}} \rightarrow \text{eliminieren} \rightarrow \checkmark$

$m - 1 \rightarrow m$ :  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots \underbrace{Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\varphi'[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}$ .  $\varphi'$  ist eine einfache Existenzformel, wir eliminieren also:

$\underbrace{m-1 \text{ viele Quantoren}} \underbrace{\Theta[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}_{\text{quantorenfrei}}$

$\Rightarrow$  Induktion

□

#### Beispiel 3.5

Sei  $\mathcal{K} = \{\text{unendliche Mengen}\}$ . Diese Klasse lässt sich definieren durch die Theorie  $T = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j=1}^n \neg(x_i \doteq x_j))\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Diese Theorie ist vollständig! Betrachte jetzt die  $\exists^\infty x$  definierbaren Mengen:

$$\{b \in A \mid \mathcal{A} \models \underbrace{\varphi}_{\text{quantorenfrei}}[b, a_1, \dots, a_m]\}$$

$\downarrow$   
endlich oder koendlich

#### Lemma 3.6 (Trennungslemma)

Seien  $T_1$  und  $T_2$  zwei  $\mathcal{L}$ -Theorien, und  $\Delta$  eine Kollektion von  $\mathcal{L}$ -Aussagen, welche unter endlichen Konjunktionen und Disjunktionen abgeschlossen ist. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- 1) Es gibt eine Aussage  $\chi \in \Delta$  mit  $T_1 \models \chi$
- 2) Für alle  $\mathcal{A} \models T_1$ ,  $\mathcal{B} \models T_2$  gibt es eine Aussage  $\chi \in \Delta$  mit  $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg \chi$

*Bemerkung:* Das ganze ist trivial für inkonsistente Theorien.

*Beweis.* 1  $\Rightarrow$  2: trivial!

### 3 Quantorenelimination

2  $\Rightarrow$  1: OBdA  $T_1, T_2$  konsistent. Sei  $\mathcal{A} \models T_1$ , setze  $\Sigma_{\mathcal{A}} = \{\chi, \chi \text{ Aussagen in } \Delta \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$ .

Betrachte jetzt  $T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}}$ . Ist diese Theorie konsistent? Nein: Wäre  $\mathcal{B} \models T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow$  es gibt  $\chi \in \Delta$  mit  $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi \Rightarrow \chi \in \Sigma_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{B} \models \chi$ . Widerspruch!

Das bedeutet (wegen Kompaktheit), dass es  $\chi_1, \dots, \chi_r \in \Sigma_{\mathcal{A}}$  gibt mit  $T_2 \cup \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$  inkonsistent.

$$\Leftrightarrow T_2 \models \bigvee_{i=1}^r \neg\chi_i \Rightarrow T_2 \models \neg\left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ =\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta}}^r \chi_i\right)$$

Das heißt für jedes  $\mathcal{A} \models T_1$  gibt es  $\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta$  mit  $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}}$  und  $\mathcal{A} \models \chi_{\mathcal{A}}$ .

Sei nun  $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}}\}_{\mathcal{A} \models T_1} \cdot^5 \Leftrightarrow$  inkonsistent nach Konstruktion.

$\xRightarrow{\text{Kompaktheit}}$  es existieren  $\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}$  mit  $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}\}$  inkonsistent. Also:

$$T_1 \models \bigvee_{j=1}^n \chi_{\mathcal{A}_j} =: \chi \in \Delta$$

$T_1 \models \chi$ . Wollen zeigen:  $T_2 \models \neg\chi$ . Aber  $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}_i}, 1 \leq i \leq n$ . □

#### Folgerung 3.7

Zwei Theorien  $T_1$  und  $T_2$  werden von einer quantorenfreien Aussage getrennt, wenn je zwei Modelle  $\mathcal{A} \models T_1$  und  $\mathcal{B} \models T_2$  von einer quantorenfreien Aussage getrennt werden.

$$\rightarrow \exists \chi \text{ quantorenfrei} : \mathcal{A} \models \chi \text{ und } \mathcal{B} \models \neg\chi$$

#### Satz 3.8

Sei  $T$  eine Theorie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1)  $T$  hat Quantorenelimination.
- 2) Gegeben Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  und endlich erzeugte Unterstrukturen  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ ,  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} = \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ , wobei  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$  und  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  eine Formel. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow {}^6\mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

- 3) Gegeben Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  mit isomorph erzeugten Unterstrukturen  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$  wie in 2) und für alle  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  primitive Existenzformel, gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

<sup>5</sup>Ist das überhaupt eine Menge? Es genügt die Einschränkung bis auf Isomorphie, das sollte reichen. . .

<sup>6</sup>Durch vertauschen von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  gilt hier sogar  $\Leftrightarrow$ .

### 3 Quantorenelimination

Ferner, falls  $T$  konsistent ist, 1) gilt und je zwei Modelle von  $T$  isomorphe endlich erzeugte Unterstrukturen besitzen, dann ist  $T$  vollständig mit Quantorenelimination.

*Bemerkung:* Wie benutzen wir diesen Satz? Letztlich wollen wir Back-&-Forth-Äquivalenz zeigen.

*Beweis.* 1)  $\Rightarrow$  2): Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ .  $T$  hat Quantorenelimination  $\leftarrow$  es gibt  $\psi[x_1, \dots, x_n]$  quantorenfrei mit:  $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \psi[\vec{x}])$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \mathcal{A} \models T & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{C} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \psi \text{ quantorenfrei} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{D} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{C} \approx \mathcal{D} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{B} \models T &
 \end{array}$$

2)  $\Rightarrow$  3): klar.

3)  $\Rightarrow$  1): Um zu zeigen, dass  $T$  Quantorenelimination besitzt, genügt es nur primitive Existenzformeln  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  zu betrachten.

Seien dazu  $e_1, \dots, e_n$  neue Konstantenzeichen. Betrachte die Sprache  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ , sowie die Theorien  $T_1 = T \cup \{\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$  und  $T_2 = T \cup \{\neg\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$ .

Falls  $T_1$  und  $T_2$  durch eine quantorenfreie Aussage  $\underbrace{\psi[e_1, \dots, e_n]}_{\substack{\text{quantorenfreie} \\ \mathcal{L}\text{-Formel}}}$  in  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$  trennbar sind, so folgt:

$$\begin{aligned}
 T \cup \{\varphi[\vec{e}]\} \models \psi[\vec{e}] &\Rightarrow T \models (\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\} \models \neg\psi[\vec{e}] &\Rightarrow T \models (\neg\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 \Rightarrow T &= (\psi[\vec{e}] \rightarrow \varphi[\vec{e}]) \xRightarrow{\text{Aufgabe}^7} T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}})
 \end{aligned}$$

Sonst, falls also  $T_1, T_2$  nicht trennbar sind, gibt es zwei Modelle  $\mathcal{A} \models T_1 \cup \{\varphi[\vec{e}]\}, \mathcal{B} \models T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\}$ , welche alle quantorenfreien Aussagen in  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$  gleich erfüllen.

Seien  $c_1 = e_1^{\mathcal{A}}, d_i = e_i^{\mathcal{B}}$ . Betrachte jetzt  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{A} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$  und  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{B} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$ . Es gilt:  $\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$  und  $\mathcal{B} \models \neg\varphi[d_1, \dots, d_n]$ .

<sup>7</sup>weil  $e_1, \dots, e_n$  neue Konstantenzeichen sind

## 4 Beispiele klassischer Theorien

Um einen Widerspruch zu bekommen genügt es zu zeigen, dass  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}, c_i \mapsto d_i$ .

$$C \longrightarrow D : \\ \underbrace{t^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n]}_{\mathcal{L}\text{-Term}} \mapsto t^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n]$$

Ist diese Abbildung wohldefiniert?

$$\begin{aligned} & \text{Angenommen } t_1^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] = t_2^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] \\ & \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{als } \mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}\text{-Struktur}} \models \underbrace{(t_1[e_1, \dots, e_n] \dot{=} t_2[e_1, \dots, e_n])}_{\text{quantorenfreie Aussage}} \\ & \Leftrightarrow \mathcal{B} \models (t_1[\vec{e}] \dot{=} t_2[\vec{e}]) \\ & \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] = t_2^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \\ & \longrightarrow \text{wohldefiniert und injektiv} \end{aligned}$$

induktiv über den Aufbau zeigen wir: Das ist ein Isomorphismus.

Zu „ferner“: Angenommen  $T$  hat Quantorenelimination, ist konsistent und je zwei Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  haben isomorphe, endlich erzeugte Unterstrukturen

$$\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \underbrace{\mathcal{C}}_{c_i \mapsto d_i}^{\subseteq \mathcal{A}} \simeq \underbrace{\mathcal{D}}^{\subseteq \mathcal{B}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$$

$T$  ist vollständig  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ . Sei  $\chi$  eine  $\mathcal{L}$ -Aussage und schreibe  $\chi = \chi[x_1, \dots, x_n]$ .

$$\mathcal{A} \models \chi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \chi[c_1, \dots, c_n] \xleftrightarrow{2)} \mathcal{B} \models \chi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \chi$$

□

## 4 Beispiele klassischer Theorien

### Beispiel 4.1

$T = \exists^\infty$  hat Quantorenelimination und ist vollständig.

### Beispiel 4.2

DLO (dichte lineare Ordnung ohne Randpunkte). Sei  $\mathcal{L} = \{<\}$ .

$$\begin{aligned} \text{DLO} = & \{ \forall x (\neg x < x) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y ((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \exists z ((x < y) \rightarrow (x < z < y)) \} \\ & \cup \{ \forall x \exists u \exists v (u < x < v) \} \\ & \cup \{ \exists x (x = x) \} \end{aligned}$$

#### 4 Beispiele klassischer Theorien

Diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination. Es gibt zwei Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

1)

$$\begin{aligned}\varphi[x_1, \dots, x_n] &= \exists y \left( \bigwedge_i \overbrace{\Theta_i[x_1, \dots, x_n, y]}^{\text{atomar oder Negation davon}} \right) \\ &= \exists y (\psi_1[x_1, \dots, x_n] \wedge \bigwedge_i \bigwedge_{\substack{x_i=y \\ x_i \neq y \\ y < x_i}} \dots)\end{aligned}$$

$$x_i = y \wedge x_j = y \Leftrightarrow x_i = x_j$$

$$x_i = y \wedge y < x_j \Leftrightarrow x_i < x_j \longrightarrow \text{induktiv lassen sich alle Quantoren eliminieren}$$

2) Gegeben  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C}_{\mathcal{A}} \simeq \mathcal{D}_{\mathcal{B}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$ , mit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Isomorphismus und  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \text{DLO}$ .

OBdA wähle  $c_1 < c_2 < \dots < c_n \xrightarrow[F]{} d_1 < d_2 < \dots < d_n$ .  $\longrightarrow F$  in Back-ℳ-Forth-System.

1. Fall:  $a < c_1 \rightarrow$  wähle  $b < d_1$  in  $\mathcal{B}$ , weil  $d_1$  kein Randpunkt ist.
2. Fall:  $a > c_n \rightarrow$  wähle  $b < c_n$  in  $\mathcal{B}$ , weil  $d_n$  kein Randpunkt ist.
3. Fall:  $\exists i \mid c_i < a < c_{i+1} \rightarrow$  wähle  $b$  zwischen  $d_i$  und  $d_{i+1}$  weil  $\mathcal{B}$  dicht ist.

Vollständigkeit folgt, weil Unterstruktur und Punkt zu Punkt.