Modelltheorie

Wintersemester 2019/20
Mitschrift von Floris Remmert

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Abteilung für mathematische Logik
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

21. November 2019

Inhaltsverzeichnis

Ziel dieser Vorlesung ist es, eine Aussage der folgenden Qualität zu erhalten:

Satz 0.1 (Morley)
Sei T eine Theorie, welche ein einziges (bis auf Isomorphie) Modell der Mächtigkeit $\aleph_0$ besitzt. Dann besitzt T für jede Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ ein einziges Modell der Mächtigkeit κ (bis auf Isomorphie).

1 Erinnerung

Definition 1.1

- Eine Sprache $\mathcal{L}$ ist eine Kollektion von Konstanten-, Funktions-, und Relationszeichen
- Eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ besteht aus einer nicht-leeren Grundmenge (oder Universum) A zusammen mit Interpretationen der Symbole aus $\mathcal{L}$:
  - Für jedes Funktionszeichen f der Stelligkeit n
  $$f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$$
  - Für jedes Relationszeichen R der Stelligkeit m
  $$R^{\mathcal{A}} \subset A^m$$
- Eine Einbettung F von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ ist eine injektive Abbildung $F : A \longrightarrow B$, welche mit den Interpretationen kompatibel[1] ist
- Ein Isomorphismus ist eine surjektive Einbettung.
- $\mathcal{A}$ ist eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$, falls $A \subset B$ und die Inklusion $\iota : A \longrightarrow B$ eine Einbettung bestimmt

Bemerkung 1.2
Sei $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $\emptyset \neq A \subset B$. Dann gibt es eine Unterstruktur von $\mathcal{B}$, welche von A erzeugt wird.

Das Universum besteht aus A zusammen mit dem Abschluss von A unter allen Interpretationen der Funktionszeichen von $\mathcal{L}$.

Definition 1.3
Sei $(I, <)$ eine partielle Ordnung. Die Ordnung ist gerichtet, falls für $i, j \in I$ gibt es $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

[1]das bedeutet, dass Funktions- und Relationszeichen bei Hin- und Rückrichtung erhalten bleiben

Bemerkung 1.4
Sei $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen indexiert nach der gerichteten partiellen Ordnung I derart, dass für $i \leq j$ gilt: $\mathcal{A}_i \underset{US}{\subset} \mathcal{A}_j$.

Die Menge $A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ ist das Universum einer (eindeutig bestimmten) $\mathcal{L}$-Struktur

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i\in I} \mathcal{A}_i \tag{1}$$

Falls I eine lineare Ordnung ist, dann ist $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine Kette.

Zu 1:

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}_i}$ für ein (alle) $i \in I$, denn $c^{\mathcal{A}_i} = c^{\mathcal{A}_j} = c^{\mathcal{A}_k}$, wegen gerichteter Ordnung
- $a_1, \dots a_n \in A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Longrightarrow \exists i \in I$ mit $a_1, \dots, a_n \in A_i$. Also ist $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n)$ wohldefiniert.
- $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}}$ genau dann, wenn es ein $i \in I$ gibt mit $a_1, \dots, a_m \in A_i$ und $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}_i}$

Beachte, dass $\mathcal{A}_i \underset{US}{\subset} \mathcal{A}$ für alle $i \in I$.

Definition 1.5
Eine atomare Formel ist ein Ausdruck der Form $(t_1 \doteq t_2)$, $t_1, \dots, t_k$ Terme, $R(t_1, \dots, t_k)$.

Die Kollektion von Formeln ist die kleinste Klasse, welche alle atomaren Formeln enthält und derart, dass:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ Formel} &\Longrightarrow \neg\varphi \text{ Formel} \\ \varphi, \psi \text{ Formel} &\Longrightarrow (\varphi \vee \psi) \text{ Formel} \\ \varphi \text{ Formel}, x \text{ Variable} &\Longrightarrow \exists x \varphi \text{ Formel, } (x \text{ heißt dann „gebunden“}) \end{aligned}$$

Abk.:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi) &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \forall x \varphi &= \neg\exists x \neg\varphi \\ (\varphi \to \psi) &= (\neg\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &= ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)) \end{aligned}$$

Bemerkung 1.6
- Jede Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ lässt sich in pränexer Normalform umschreiben: $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$, mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Das ist eine quantorfreie Formel, diese lässt sich weiter zerlegen in KNF bzw. DNF.

- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine Aussage
- Eine Theorie ist eine Kollektion von Aussagen

Beispiel 1.7
Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur. Erweitere die Sprache zu der Sprache $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{d_a\}_{a \in A}$.

$\mathcal{A}$ ist eine $\mathcal{L}_A$-Struktur, $d_a^{\mathcal{A}} = a$.

- $\mathrm{Diag}^{\mathrm{at}}(\mathcal{A}) = \{$quantorenfreie $\mathcal{L}_A$-Aussagen χ mit $\mathcal{A} \models \chi\}$ heißt „atomares Diagramm“
- $\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{L}$-Aussagen θ mit $\mathcal{A} \models \theta\}$ heißt „vollständiges Diagramm“

Sei nun $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}_A$-Struktur.

$$\begin{aligned} \mathcal{B} \models \mathrm{Diag}^{\mathrm{at}}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B} \text{ einbetten lässt} \\ &\quad A \longrightarrow B \\ &\quad a \mapsto d_a^{\mathcal{B}} \\ \mathcal{B} \models \mathrm{Diag}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \text{ die obige Abbildung ist } \underline{\text{elementar}} \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] &\Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[F(a_1), \ldots, F(a_n)], a_1, \ldots a_n \in A, \varphi[x_1, \ldots, x_n] \text{ Formel} \end{aligned}$$

Definition 1.8

- T ist konsistent, falls T ein Modell besitzt.
- T ist vollständig, falls T konsistent ist und je zwei Modelle von T elementar äquivalent sind.

Satz 1.9 (Kompaktheitssatz)
Eine Theorie ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent[2] ist.

Wie zeigen wir, dass $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$?

Satz 1.10 (Back & Forth)
$S = \{F : \underset{\substack{\subset \mathcal{A} \\ US}}{\mathcal{C}} \longrightarrow \underset{\substack{\subset \mathcal{B} \\ US}}{\mathcal{D}}, F$ partieller Isomorphismus zwischen $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ geeignet[3]$\}$.

Back: Für alle $F \in S$ und $b \in B$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $G \in S$ mit $G \supset F$ Erweiterung und $b \in \mathrm{Im}(G)$.

Forth: Für alle $F \in S$ und $a \in A$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $H \in S$, mit $H \supset F$ Erweiterung mit $a \in \mathrm{Dom}(H)$

[2] endlich konsistent bedeutet: jede endliche Teilmenge der Theorie besitzt ein Modell.
[3] bspw. endlich erzeugt

$\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ heißen dann „Back & Forth äquivalent"

$\to$ ist jedes $F \in S$ elementar, so gilt insbesondere $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Teil I
Theorien und Quantorenelimination

2 Tarskis Test

Lemma 2.1 (Tarskis Test)
Sei $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $A \subset B$ Teilmenge derart, dass für jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ und Elemente $a_1, \dots, a_n \in A$:
falls:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b] \text{ für ein } b \in B \Rightarrow \text{ existiert } a \in A \text{ sodass } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \quad (2)$$

dann ist A das Universum einer elementaren Unterstruktur von $\mathcal{B}$.

Insbesondere: Falls $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ Unterstruktur, ist $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow A$ erfüllt 2.

Beweis. Betrachte $A \neq \emptyset \to$ Betrachte $\varphi[y] = (y \doteq y)$. $B \neq \emptyset \to \exists b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[b]$.
$\hookrightarrow \exists a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a]$

Beh.: Für jedes Konstantenzeichen $c \in \mathcal{L}$ ist $c^{\mathcal{B}} \in A$. $\hookrightarrow \varphi[y] = (y \doteq c)$, $\mathcal{B} \models \varphi[c^{\mathcal{B}}] \Rightarrow$ es gibt $a \in A$ mit $a = c^{\mathcal{B}}$.

Beh.: A ist unter den Funktionen $f^{\mathcal{B}}$ abgeschlossen, für jedes Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$.

Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n, y] = (y \doteq f(x_1, \dots, x_n))$ ✓

Für $R \in \mathcal{L}$ m-stellig setze $R^{\mathcal{A}} = A^m \cap R^{\mathcal{B}} \longrightarrow$ somit bildet A eine $\mathcal{L}$-Unterstruktur $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$.

Noch zu zeigen: $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, d. h. $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ $\mathcal{L}$-Formel.

Seien dazu $a_1, \dots, a_n \in A$.

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad (3)$$

Induktiv über den Aufbau von φ.

φ ist atomar $\longrightarrow \checkmark$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \not\models \psi[a_1,\dots,a_n] \Leftrightarrow & & \mathcal{B} \not\models \psi[a_1,\dots,a_n] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathcal{A} \models \varphi[a1,\dots,a_n] & & \mathcal{B} \models \phi[a_1,\dots,a_n] \end{array}$$

$\varphi = \neg\psi \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = \exists y \psi[x_1,\dots,x_n,y]$: $\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ sodass $\mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n,a]$ $\underset{3}{\Rightarrow} \mathcal{B} \models \psi[a_1,\dots,a_n,a]$ für ein $a \in A \subset B \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1,\dots,a_n] \Rightarrow$ es gibt $b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1,\dots,a_n,b] \underset{2}{\Rightarrow}$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1,\dots,a_n,a] \underset{3}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models \psi[a_1,\dots,a_n,a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n]$.

Für „insbesondere“: Angenommen, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. Sei $\varphi[x_1,\dots,x_n,y]$ eine $\mathcal{L}$-Formel, $a_1,\dots,a_n \in A$. Dann: $\mathcal{B} \models \varphi[a_1,\dots,a_n,b]$ für ein $b \in B \Rightarrow \mathcal{B} \models (\exists y \varphi)[a_1,\dots,a_n]$ $\underset{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models (\exists y \varphi)[a_1,\dots,a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[a_1,\dots,a_n,a] \underset{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}}{\Rightarrow} \mathcal{B} \models \varphi[a_1,\dots,a_n,a] \checkmark$

$\square$

Proposition 2.2 (aufwärts Löwenheim-Skolem)
Sei $\mathcal{A}$ eine unendliche $\mathcal{L}$-Struktur, und $\kappa < \max\{|A|,|\mathcal{L}|\}$. Dann gibt es eine elementare $\mathcal{L}$-Erweiterung $\mathcal{B} \geq \mathcal{A}$ der Mächtigkeit κ.

Beweis. $\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$, wobei $\{c_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ eine Menge neuer Konstantenzeichen ist, ist konsistent weil sie endlich konsistent[4] ist.

Aus der Konstruktion von Henkin hat $\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$ ein Modell der Mächtigkeit der Sprache.

$\rightarrow$ ein Modell der Mächtigkeit κ $\square$

Bemerkung 2.3
$|A| = n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A} \Rightarrow |B| = n$

Proposition 2.4 (abwärts Löwenheim-Skolem)
Sei $\mathcal{B}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $S \subset B$ beliebig. Dann gibt es eine elementare Unterstruktur $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ mit $A \supset S$ und $|A| \leq \max\{|S|,|\mathcal{L}|,\aleph_0\}$.

[4] Kompaktheit

Bemerkung 2.5
$\mathbb{C}$ in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$, $S = \emptyset \Rightarrow$ es gibt eine abzählbare elementare Unterstruktur von $\mathbb{C}$. $\rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \preceq \mathbb{C}$.

Beweis 2.4. Setze $S_0 = S$. Angenommen S_k wurde bereits konstruiert, wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$, jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \ldots, x_n, y]$ und Elemente $a_1, \ldots, a_n \in S_k$ ein Element $a_{\varphi[a_1,\ldots,a_n,y]} \in B$ derart, dass $\mathcal{B} \models ((\exists y \in \varphi)[a_1, \ldots, a_n] \rightarrow \varphi[a_1, \ldots, a_n, a_{\varphi[a_1,\ldots,a_n,y]}])$. Setze $S_{k+1} = S_k \cup \{a_\varphi\}_{\varphi\mathcal{L}\text{-Formel, } (a_1,\ldots,a_n)\in S_k}$

Definiere $A = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} S_k \supset S$. Wir überprüfen, dass A den Test von Tarski erfüllt. Sei $\varphi = \varphi[x_1, \ldots, x_n, y]$ eine $\mathcal{L}$-Formel, $a_1, \ldots, a_n \in A$.

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, b]$ für ein $b \in B \Rightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_1, \ldots a_n \in S_k \Rightarrow$ es gibt ein $a_{\varphi[a_1,\ldots,a_n,y]} \in S_{k+1} \subset A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n, a]$✓

Ferner ist $|A| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |S|\}$. □

Folgerung 2.6
Sei $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ eine gerichtete Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen, sodass für $i \leq j$ ist $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$. Dann ist $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{i\in I} \mathcal{A}_i$ eine elementare Erweiterung jeder $\mathcal{A}_i$.

Beweis. Wir beweisen induktiv über den Aufbau von $\varphi = \varphi[x_1, \ldots, x_n]$, dass für alle $i \in I$, für alle $a_1, \ldots, a_n \in A_i$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.

φ atomar $\rightarrow$ klar, denn $\mathcal{A}_i \underset{US}{\subset} \mathcal{A}$

$\varphi = \neg\varphi \Rightarrow$ ok!

$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow$ ok!

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \ldots, x_n, y]$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A_i$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \ldots, a_n, a]$ $\underset{\text{ind. über } \psi}{\Rightarrow} \mathcal{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $b \in A = \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ mit $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \ldots, a_n, b] \Rightarrow$ es gibt $j \in I$ mit $b \in A_j \Rightarrow$ es existiert $k \in I$ mit $i \leq k$, $j \leq k$, $a_1, \ldots, a_n, b \in A_k$
$\Rightarrow \mathcal{A}_k \models \psi[a_1, \ldots, a_n, b] \underset{\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_k}{\Rightarrow}$ es gibt ein $a \in A_k$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \ldots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.
□

3 Quantorenelimination

Definition 3.1
Eine Theorie T hat Quantorenelimination, falls jede $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ äquivalent modulo T zu einer quantorenfreien $\mathcal{L}$-Formel $\psi[x_1, \dots, x_n]$ ist.

$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n(\varphi[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow \psi[x_1, \dots, x_n])$$

Beispiel 3.2
Sei $\mathcal{L} := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ gegeben. Betrachte die Menge $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a \neq 0$ und es gibt $x \in \mathbb{R}$ mit $ax^2 + bx + c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 | a \neq 0$ und $b^2 - 4ac \geq 0\}$.

Diese Formel ist in $\mathcal{L}$ nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel, in $\mathcal{L}_1 := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$ hingegen doch. Somit ist die Menge in $\mathcal{L}_1$ quantorenfrei.

Bemerkung 3.3
- Wenn T inkonsistent ist, dann hat T immer Quantorenelimination
- Wenn T Quantorenelimination hat, und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ mit $\mathcal{A} \underset{\text{US}}{\subseteq} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ Übung

Definition 3.4
- Eine einfache Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$
- Eine primitive Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \psi[x_1, \dots, x_n, y]$, wobei ψ eine endliche Konjunktion von atomaren Formeln und Negationen ist

Lemma 3.5
Eine (konsistente) Theorie T hat genau dann Quantorenelimination, wenn jede primitive Existenzformel zu einer quantorenfreien Formel äquivalent modulo T ist.

Beweis. „$\Rightarrow$“: klar

„$\Leftarrow$“: Beachte, $\exists y(\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\exists y \psi_1 \vee \exists y \psi_2)$. Insbesondere, wenn T Quantorenelimination für primitive Existenzformeln hat, dann hat T Quantorenelimination für einfache Existenzformeln.

$$\underset{\text{einfache Existenzformel}}{\varphi} = \exists y \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n]}_{\text{umschreiben in DNF}} \sim \exists y(\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n) \sim \underbrace{\bigvee_{i=1}^{n} \exists y \psi_i}_{\text{primitive Existenzformel}}$$

Zu zeigen: Jede beliebige Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ ist äquivalent zu einer quantorenfreien Formel modulo T.

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] \underbrace{\sim}_{\substack{\text{pränexe} \\ \text{Normalform}}} Q_1 y_1 \dots Q_m y_m \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\text{quantorenfrei}}, \text{ wobei } Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

Induktion über m:

$m = 0$: ✓

$m = 1$: $\varphi = Q \underbrace{\psi[x_1, \ldots, x_n, y]}_{\text{quantorenfrei}}$

$Q = \exists$ φ einfache Existenzformel ✓

$Q = \forall$ $\varphi \sim \neg \underbrace{\exists y \neg \psi}_{\substack{\text{einfache}\\ \text{Existenzformel}}} \to \text{eliminieren} \to$ ✓

$m - 1 \to m$: $\varphi[x_1, \ldots, x_n] = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \ldots \underbrace{Q_m y_m \psi[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]}_{\varphi'[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}]}$. φ' ist eine einfache Existenzformel, wir eliminieren also:

$$\underbrace{\qquad}_{m-1 \text{ viele Quantoren}} \underbrace{\Theta[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{m-1}]}_{\text{quantorenfrei}}$$

$\Rightarrow$ Induktion

□

Beispiel 3.6
Sei $\mathcal{K} = \{\text{unendliche Mengen}\}$. Diese Klasse lässt sich definieren durch die Theorie $T = \{\exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j = 1}^{n} \neg(x_i \doteq x_j))\}_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Theorie ist vollständig! Betrachte jetzt die definierbaren Mengen: $\exists^\infty x$

$$\{b \in A | \mathcal{A} \models \underbrace{\underbrace{\varphi}_{\text{quantorenfrei}} \quad [b, a_1, \ldots, a_m]}_{\updownarrow \atop \text{endlich oder koendlich}}\}$$

Lemma 3.7 (Trennungslemma)
Seien T_1 und T_2 zwei $\mathcal{L}$-Theorien, und Δ eine Kollektion von $\mathcal{L}$-Aussagen, welche unter endlichen Konjunktionen und Disjunktionen abgeschlossen ist. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

(1) Es gibt eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $T_1 \models \chi$

(2) Für alle $\mathcal{A} \models T_1$, $\mathcal{B} \models T_2$ gibt es eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi$

Bemerkung 3.8
Das ganze ist trivial für inkonsistente Theorien.

Beweis. <u>1 ⇒ 2:</u> trivial!

<u>2 ⇒ 1:</u> OBdA T_1, T_2 konsistent. Sei $\mathcal{A} \models T_1$, setze $\Sigma_\mathcal{A} = \{\chi, \chi$ Aussagen in Δ mit $\mathcal{A} \models \chi\}$.

Betrachte jetzt $T_2 \cup \Sigma_\mathcal{A}$. Ist diese Theorie konsistent? Nein: Wäre $\mathcal{B} \models T_2 \cup \Sigma_\mathcal{A} \hookrightarrow$ es gibt $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi \Rightarrow \chi \in \Sigma_\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} \models \chi$. Widerspruch!

Das bedeutet (wegen Kompaktheit), dass es $\chi_1, \ldots, \chi_r \in \Sigma_\mathcal{A}$ gibt mit $T_2 \cup \{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ inkonsistent.

$$\hookrightarrow T_2 \models \bigvee_{i=1}^{r} \neg\chi_i \Rightarrow T_2 \models \neg(\underbrace{\bigwedge_{i=1}^{r} \chi_i}_{=\chi_\mathcal{A} \in \Delta})$$

Das heißt für jedes $\mathcal{A} \models T_1$ gibt es $\chi_\mathcal{A} \in \Delta$ mit $T_2 \models \neg\chi_\mathcal{A}$ und $\mathcal{A} \models \chi_\mathcal{A}$.

Sei nun $T_1 \cup \{\neg\chi_\mathcal{A}\}_{\mathcal{A} \models T_1}$.[5] $\hookrightarrow$ inkonsistent nach Konstruktion.

$\underset{\text{Kompaktheit}}{\Rightarrow}$ es existieren $\chi_{\mathcal{A}_1}, \ldots \chi_{\mathcal{A}_n}$ mit $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}_1}, \ldots, \chi_{\mathcal{A}_n}\}$ inkonsistent. Also:
$T_1 \models \bigvee_{j=1}^{n} \chi_{\mathcal{A}_j} =: \chi \in \Delta$

$T_1 \models \chi$. Wollen zeigen: $T_2 \models \neg\chi$. Aber $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}_i}, 1 \leq i \leq n$. □

Folgerung 3.9
Zwei Theorien T_1 und T_2 werden von einer quantorenfreien Aussage getrennt, wenn je zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1$ und $\mathcal{B} \models T_2$ von einer quantorenfreien Aussage getrennt werden.

$$\rightarrow \exists\chi \text{ quantorenfrei } : \mathcal{A} \models \chi \text{ und } \mathcal{B} \models \neg\chi$$

Satz 3.10
Sei T eine Theorie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(1) T hat Quantorenelimination.

(2) Gegeben Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ und endlich erzeugte Unterstrukturen $\langle c_1, \ldots, c_n\rangle_\mathcal{A} = \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, $\langle d_1, \ldots, d_n\rangle_\mathcal{B} = \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ und $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ eine Formel. Dann gilt:
$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n] \Rightarrow{}^{6} \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$$

(3) Gegeben Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ mit isomorph erzeugten Unterstrukturen $\langle c_1, \ldots, c_n\rangle_\mathcal{A} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \ldots, d_n\rangle_\mathcal{B}$ wie in (2) und für alle $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ primitive Existenzformel, gilt:
$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$$

[5] Ist das überhaupt eine Menge? Es genügt die Einschränkung bis auf Isomorphie, das sollte reichen...
[6] Durch vertauschen von $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ gilt hier sogar ⇔.

Ferner, falls T konsistent ist, (1) gilt und je zwei Modelle von T isomorphe endlich erzeugte Unterstrukturen besitzen, dann ist T vollständig mit Quantorenelimination.

Bemerkung 3.11
Wie benutzen wir diesen Satz? Letztlich wollen wir Back-&-Forth-Äquivalenz zeigen.

Beweis. $\underline{(1) \Rightarrow (2):}$ Sei $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$. T hat Quantorenelimination $\longleftarrow$ es gibt $\psi[x_1, \ldots, x_n]$ quantorenfrei mit: $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \psi[\vec{x}])$

$$\begin{aligned}
& & \mathcal{A} &\models \varphi[c_1, \ldots, c_n] \\
&\underset{\mathcal{A}\models T}{\Leftrightarrow} & \mathcal{A} &\models \psi[c_1, \ldots, c_n] \\
&\underset{\psi \text{ quantorenfrei}}{\Leftrightarrow} & \mathcal{C} &\models \psi[c_1, \ldots, c_n] \\
&\underset{\mathcal{C}\simeq\mathcal{D}}{\Leftrightarrow} & \mathcal{D} &\models \psi[d_1, \ldots, d_n] \\
&\Leftrightarrow & \mathcal{B} &\models \psi[d_1, \ldots, d_n] \\
&\underset{\mathcal{B}\models T}{\Leftrightarrow} & \mathcal{B} &\models \varphi[d_1, \ldots, d_n]
\end{aligned}$$

$\underline{(2) \Rightarrow (3):}$ klar.

$\underline{(3) \Rightarrow (1):}$ Um zu zeigen, dass T Quantorenelimination besitzt, genügt es nur primitive Existenzformeln $\varphi[x_1, \ldots, x_n]$ zu betrachten.

Seien dazu $e_1, \ldots, e_n$ neue Konstantenzeichen. Betrachte die Sprache $\mathcal{L} \cup \{e_1, \ldots, e_n\}$, sowie die Theorien $T_1 = T \cup \{\varphi[e_1, \ldots, e_n]\}$ und $T_2 = T \cup \{\neg\varphi[e_1, \ldots, e_n]\}$.

Falls T_1 und T_2 durch eine quantorenfreie Aussage $\underbrace{\psi[e_1, \ldots, e_n]}_{\substack{\text{quantorenfreie} \\ \mathcal{L}\text{-Formel}}}$ in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \ldots, e_n\}$ trennbar sind, so folgt:

$$\begin{aligned}
&T \cup \{\varphi[\vec{e}]\} \models \psi[\vec{e}] && \Rightarrow T \models (\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
&T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\} \models \neg\psi[\vec{e}] && \Rightarrow T \models (\neg\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
&\Rightarrow T = (\psi[\vec{e}] \rightarrow \varphi[\vec{e}]) && \underset{\text{Aufgabe}^7}{\Rightarrow} T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}})
\end{aligned}$$

Sonst, falls also T_1, T_2 nicht trennbar sind, gibt es zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1 \cup \{\varphi[\vec{e}]\}, \mathcal{B} \models T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\}$, welche alle quantorenfreien Aussagen in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \ldots, e_n\}$ gleich erfüllen.

Seien $c_1 = e_i^{\mathcal{A}}, d_i = e_i^{\mathcal{B}}$. Betrachte jetzt $\langle c_1, \ldots, c_n\rangle_{\mathcal{A}} \underset{\mathcal{L}\text{-US}}{\subset} \mathcal{A}\mid_{\mathcal{L}}$ und $\langle d_1, \ldots, d_n\rangle_{\mathcal{B}} \underset{US}{\subset} \mathcal{B}\mid_{\mathcal{L}}$. Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n]$ und $\mathcal{B} \models \neg\varphi[d_1, \ldots, d_n]$.

[7] weil $e_1, \ldots, e_n$ <u>neue</u> Konstantenzeichen sind

Um einen Widerspruch zu bekommen genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}, c_i \mapsto d_i$.

$$C \longrightarrow D:$$
$$\underbrace{t^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n]}_{\mathcal{L}\text{-Term}} \mapsto t^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n]$$

Ist diese Abbildung wohldefiniert?

$$\begin{aligned}
\text{Angenommen } & t_1^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] = t_2^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] \\
\Leftrightarrow & \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{als } \mathcal{L}\cup\{e_1,\dots,e_n\}\text{-Struktur}} \models (\underbrace{t_1[e_1, \dots, e_n] \doteq t_2[e_1, \dots, e_n]}_{\text{quantorenfreie Aussage}}) \\
\Leftrightarrow & \mathcal{B} \models (t_1[\vec{e}] \doteq t_2[\vec{e}]) \\
\Leftrightarrow & t_1^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] = t_2^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \\
\longrightarrow & \text{ wohldefiniert und injektiv}
\end{aligned}$$

induktiv über den Aufbau zeigen wir: Das ist ein Isomorphismus.

Zu „ferner“: Angenommen T hat Quantorenelimination, ist konsistent und je zwei Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ haben isomorphe, endlich erzeugte Unterstrukturen

$$\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \overset{\subset \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \underset{c_i \mapsto d_i}{\simeq} \overset{\subset \mathcal{B}}{\mathcal{D}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$$

T ist vollständig $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Sei χ eine $\mathcal{L}$-Aussage und schreibe $\chi = \chi[x_1, \dots, x_n]$.

$$\mathcal{A} \models \chi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \chi[c_1, \dots, c_n] \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \models \chi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \chi$$

□

4 Beispiele klassischer Theorien

Beispiel 4.1
$T = \exists^\infty$ hat Quantorenelimination und ist vollständig.

Beispiel 4.2 (DLO)
DLO (dichte lineare Ordnung ohne Randpunkte). Sei $\mathcal{L} = \{<\}$.

$$\begin{aligned}
\text{DLO} = & \{\forall x(\neg x < x)\} \\
& \cup \{\forall x \forall y \forall z((x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z))\} \\
& \cup \{\forall x \forall y((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x))\} \\
& \cup \{\forall x \forall y \exists z((x < y) \rightarrow (x < z < y))\} \\
& \cup \{\forall x \exists u \exists v(u < x < v)\} \\
& \cup \{\exists x(x = x)\}
\end{aligned}$$

Diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination. Es gibt zwei Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

(1)

$$\begin{aligned}\varphi[x_1,\dots,x_n] &= \exists y(\bigwedge_i \overbrace{\Theta_i[x_1,\dots,x_n,y]}^{\substack{\text{atomar oder}\\ \text{Negation davon}}})\\ &= \exists y(\psi_1[x_1,\dots,x_n] \wedge \bigwedge_i \substack{x_i=y\\ x_i\neq y\\ x_i<y\\ y<x_i})\end{aligned}$$

$$x_i = y \wedge x_j = y \Leftrightarrow x_i = x_j$$
$$x_i = y \wedge y < x_j \Leftrightarrow x_i < x_j \quad \longrightarrow \text{ induktiv lassen sich alle Quantoren eliminieren}$$

(2) Gegeben $\langle c_1,\dots,c_n\rangle_{\mathcal{A}} = \underset{\subset\mathcal{A}}{\mathcal{C}} \simeq \underset{\subset\mathcal{B}}{\mathcal{D}} = \langle d_1,\dots,d_n\rangle_{\mathcal{B}}$, mit $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Isomorphismus und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \mathrm{DLO}$.

OBdA wähle $c_1 < c_2 < \cdots < c_n \underset{F}{\mapsto} d_1 < d_2 < \cdots < d_n$. $\longrightarrow$ F in Back-&-Forth-System.

1. Fall: $a < c_1 \to$ wähle $b < d_1$ in $\mathcal{B}$, weil d_i kein Randpunkt ist.
2. Fall: $a > c_n \to$ wähle $b < c_n$ in $\mathcal{B}$, weil d_i kein Randpunkt ist.
3. Fall: $\exists i \mid c_i < a < c_{i+1} \to$ wähle b zwischen d_i und d_{i+1} weil $\mathcal{B}$ dicht ist.

Vollständigkeit folgt, weil Unterstruktur und Punkt zu Punkt.

Beispiel 4.3 (Vektorraum)
Sei K ein Körper, $\mathcal{L}_{\mathrm{VR}} = \{0, +, f_\lambda\}_{\lambda\in K}$. Dann ist die Theorie $\underset{\substack{\text{unendliche}\\ K\text{-VR}}}{\underset{\|}{T}} = \{\ \forall x\, \forall y\, \forall z \dots\}\dots$[8] vollständig und hat Quantorenelimination.

Wie zuvor gibt es zwei verschiedene Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

(1) Betrachte die folgende primitive Existenzformel:

$$\varphi[x_1,\dots,x_n] = \exists y(\bigwedge_{\text{endlich}} (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n + \lambda_y \doteq 0) \wedge \bigwedge_{\text{endlich}} \neg(\mu_1 x_1 + \cdots + \mu_n x_n \doteq 0)$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

[8]diese Theorie ist axiomatisierbar, für eine beispielhafte Axiomatisierung vergleiche Klausur zu mathematische Logik im SS 2019.

(1) *Alle λ vor der Variable y sind Null* $\rightarrow \underbrace{\bigwedge_{\text{endlich}} \lambda x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0}_{\psi[x_1 \ldots x_n]}$

(2) *Es gibt ein $\lambda \neq 0$.* Dann gilt OBdA: $y \dot{=} \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$. Ersetze jetzt jedes Vorkommen von y durch $\tilde{\lambda}_1 x_1 + \cdots + \tilde{\lambda}_n x_n$. Erhalte eine quantorenfreie Bedingung in $x_1, \ldots x_n$.

(2) (semantisch)

Ansatz:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & ? & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \\ \langle 2 \rangle & \simeq & \langle (3,7) \rangle \end{array}$$

Wir brauchen also: $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ undendlichdimensional, um ein Back & Forth-System zu konstruieren. Es sei dazu

$$\tilde{\mathcal{A}} \succeq \mathcal{A} \supset \langle c_1, \ldots, c_n \rangle \simeq \langle d_1, \ldots, d_n \rangle \subset \mathcal{B} \preceq \tilde{\mathcal{B}}$$

für $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ undendlichdimensional.

Insbesondere gilt jetzt auch:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n] \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \varphi[c_1, \ldots, c_n]$$

Angenommen $\langle c_1, \ldots, c_n \rangle \xrightarrow{F} \langle d_1, \ldots, d_n \rangle$ liegt in einem Back & Forth-System zwischen $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$. Dann folgt insbesondere auch:

$$\tilde{\mathcal{B}} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \ldots, d_n]$$

Es ergeben sich also die folgenden beiden Fragen:

(1) Finden wir ein Back & Forth-System zwischen $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$?

Angenommen also wir haben $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ bereits konstruiert. Zeige: Es gibt ein Back & Forth-System.

$c \in$ UR: trivial.

$c \notin$ UR: $\dim_K \tilde{\mathcal{B}} = \infty \geq n+1 \longrightarrow$ es gibt ein $d \notin \langle d_1, \ldots, d_n \rangle \Rightarrow$ G die Erweiterung

$$\begin{aligned} \langle c_1, \ldots, c_n \rangle &\longrightarrow \langle d_1, \ldots, d_n \rangle \\ c_i &\longmapsto d_i \\ c &\longmapsto d \end{aligned}$$

(2) Zur Existenz von $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$:

So funktioniert es nicht: $\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\ \exists x\ \exists y \neg(\lambda x + \mu y \dot{=} 0)\}_{\substack{\lambda,\mu \in K \\ (\lambda,\mu)\neq(0,0)}}$.

Seien $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ neue Konstantenzeichen.

$$\underbrace{\mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg \sum_i \lambda_i e_i \dot{=} 0\}_{\substack{(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in K^n \setminus \{(0,\dots,0)\} \\ n\in\mathbb{N}}}}_{\text{endlich konsistent}}$$

Zur Vollständigkeit: Das endliche Erzeugnis zweier nicht-trivialer Vektoren ist Isomorph, somit folgt Vollständigkeit.

Beispiel 4.4 (ACF)
Wir betrachten jetzt die Theorie algebraisch abgeschlossener Körper (ACF) in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\mathrm{Ring}} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$.

$$\mathrm{ACF} = \begin{cases} \text{Körperaxiome} \\ \{\ \forall x_0\ \forall x_1 \dots\ \forall x_{k-1}\ \exists y (y^k + x_{k-1} y^{k-1} + \dots + x_1 y + x_0 \dot{=} 0)\}_{k\geq 1} \end{cases}$$

ACF hat Quantorenelimination, ist aber nicht vollständig. Die Vervollständigungen sind $\underbrace{\mathrm{ACF}_0}_{1+1+\dots+1 \dot{=} 0}$ und $\underbrace{\mathrm{ACF}_p}_{\underbrace{1+\dots+1}_{p\text{-Mal}} \dot{=} 0}$ für jede Primzahl p.

Satz 4.5 (Kurzeinführung Galois'sche Theorie)

Beweis ACF. Betrachte OBdA die Abbildung

$$F = \mathrm{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle) \longrightarrow \mathrm{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$$

Fall 1: a ist algebraisch über K

$\hookrightarrow$ sei $m_a(T)$ das Minimalpolynom von a über K. $F(m_a)(T)$ ist ein normiertes Polynom über $\mathrm{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle) \subset B$.

B ist algebraisch abgeschlossen $\Rightarrow$ es gibt b in B mit $F(m_a)(b) = 0 \overset{\text{Galoistheorie}}{\Longrightarrow} F$ lässt sich erweitern.

Fall2: a ist transzendent über $K = \mathrm{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle)$.

Wenn wir ein $b \in B$ finden, welches transzendent über $\mathrm{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$ ist

$\hookrightarrow \mathrm{Ring}_A(K,a) \simeq \mathrm{Ring}_B(F(K),b)$

Ziel: Wir brauchen $\mathcal{A} \preceq \tilde{\mathcal{A}}$ mit unendlich vielen Elementen, welche algebraisch unabhängig sind.

$$\underbrace{\mathrm{Diag}(A) \cup \{\neg(B(e_1,\dots,e_n)\dot{=}0)\}_{\substack{P\in A[T_1,\dots,T_n]\setminus\{0\} \\ P(e_1,\dots e_n)\neq 0}}}_{\text{endlich konsistent}}$$

□

5 Ultrafilter & der Satz von Ax

Anwendung: Wir wollen eine Aussage der folgenden Art bekommen: Sei $f : \substack{\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C} \\ z\longmapsto z^2}$.
$\rightarrow f$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Satz 5.1 (Ax)
Sei $f : \mathbb{C}^n \underset{z\longmapsto z^2}{\longrightarrow} \mathbb{C}^n$ eine polynomiale[9] injektive Abbildung. Dann ist f surjektiv.

Motivation: Sei G eine Gruppe der Ordnung p. Für einen Körper der Charakteristik p bekommen wir dann:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni\bar{g}} \underset{\text{wirkt}}{\curvearrowright} \underbrace{K}_{\substack{\text{Körper der} \\ \text{Charakteristik} \\ p}} \longrightarrow K$$

$$x \longmapsto \underbrace{1+\cdots+1}_{g\text{-Mal}} + x$$

$$\rightarrow h + (g+x) = (h+g) + x$$

Für einen Körper der Charakteristik 0:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni\bar{k}} \underset{\text{wirkt}}{\curvearrowright} \qquad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\underbrace{\mu_p}_{\substack{p\text{-te Einheits-} \\ \text{wurzel in } \mathbb{C}}} = \{e^{\frac{2\pi i k}{p}}\}_{0\leq k<p} \qquad z \longmapsto \omega z$$

$$\rightarrow \omega_1(\omega\cdot z) = (\omega_1\omega)\cdot z$$

Satz 5.2 (Lefschetz'sches Prinzip)
Eine Aussage χ in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\mathrm{Ring}}$ gilt für $\mathbb{C}$ genau dann, wenn es unendlich viele Primzahlen p derart gibt, dass χ in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p gilt.

[9] polynomial bedeutet, dass jede Koordinate der Abbildung durch Polynome gegeben ist.

Beweis von Satz 5.1 (Ax). Sei $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ injektiv. Die Aussage „f injektiv $\Rightarrow f$ surjektiv" lässt sich als $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$-Aussage schreiben.

D. h. es genügt zu zeigen, dass diese Aussage für alle Körper $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ gilt.

Was ist $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$? Ein algebraischer abgeschlossener Körper der Charakteristik p. Galoistheo.

$$\mathbb{F}_p^{\text{alg}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n, \text{ wobei } F_n \subset F_{n+1} \text{ endliche Körper mit Charakteristik } p.$$

$$\begin{aligned} F_1 &= \{0,1\} \\ F_2 &= \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Sei nun $g : (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n \longrightarrow (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$ eine surjektive polynomiale Abbildung.

Zeige: g ist surjektiv. Sei $(b_1, \ldots, b_n) \in (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$. Dann gibt es ein N, sodass $b_i \in \mathbb{F}_n$ für $\mathbb{F}_n$ endlich.

Ferner können wir N so wählen, dass alle Koeffizienten aus g in $\mathbb{F}_n$ liegen.

$$g_{\restriction \mathbb{F}_N^n} : \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} \longrightarrow \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} \text{ ist injektiv (geerbt)}$$

$$\Downarrow \text{ endlich}$$

$$\text{surjektiv}$$

□

Beweis Lefschetz'sches Prinzip (Satz 5.2). „$\Rightarrow$" Sei χ eine $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$-Aussage derart, dass $\mathbb{C} \models \chi$. Dann ist $\underbrace{\text{ACF}_0}_{\substack{\text{alle elementar} \\ \text{äquivalent}}} \cup \{\neg\chi\}$ inkonsistent, weil ACF_0 vollständig ist.

Dann gibt es eine endliche Teilmenge $T_0 \subset \text{ACF}_0 \cup \{\neg\chi\}$, welche inkonsistent ist. $\Rightarrow$ Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ sodass:

$$T_0 \subset \underbrace{\text{ACF} \cup \{\neg(\underbrace{1 + \cdots + 1}_{k} \doteq 0)\}_{k<N} \cup \{\neg\chi\}}_{\text{inkonsistent}}$$

Für $p > N$ eine Primzahl: $\text{ACF}_p \models \chi$

„$\Leftarrow$" $\rightsquigarrow$ Ultrafilter und Satz von Łoś

□

Exkurs: Sei im Folgenden $I \neq \emptyset$.

Definition 5.3
Ein Ultrafilter $\mathcal{U}$ auf I ist ein endlich additives Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \{0,1\}$$

Bemerkung 5.4
Die Definition entspricht der von Blatt 1 Aufgabe 3, denn:

(1) $\mu_{\mathcal{U}}(I) = 1$, $\mu_{\mathcal{U}}(\emptyset) = 0$.

(2) $\underset{X \subset Y \subset I}{\mu_{\mathcal{U}}(X)} = 1 \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$

(3) Angenommen $\mu_{\mathcal{U}}(X) = \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$ aber $\mu_{\mathcal{U}}(X \cap Y) = 0$. Dann gilt $X = X \setminus Y \dot{\cup} X \cap Y \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(X \setminus Y) = 1$ und $\mu_{\mathcal{U}}(Y \setminus X) = 1$, sowie $I \supset X \cup Y = X \setminus Y \dot{\cup} Y \setminus X \dot{\cup} X \cap Y$. $\rightsquigarrow \mu_{\mathcal{U}}(I) = 1 \geq 1 + 1 + 0$, ein Widerspruch.

(4) Gegeben $X \subset I$ entweder $\underset{\mu_{\mathcal{U}}(X)=1}{X \in \mathcal{U}}$ oder $\underset{\mu_{\mathcal{U}}(I \setminus X)=1}{I \setminus X \in \mathcal{U}}$

Definition 5.5
Ein Hauptultrafilter ist ein Maß der Form δ_x für ein $x \in I$.

Definition 5.6
Falls I undendlich ist, so gibt es generisch/reiche Ultrafilter, nämlich die Ultrafilter, welche alle koendlichen Mengen enthalten.

Definition 5.7
Angenommen $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ist eine $\mathcal{L}$-Struktur. Sei ferner $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter. Definiere eine Äquivalenzrelation[10] auf $\underbrace{\prod_{\mathcal{U}}}_{\text{karthesisches Produkt}} A_i$:

$$(a_i)_{i \in I} \sim_{\mathcal{U}} (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{U} \iff \mu_{\mathcal{U}}(\{i \in I \mid a_i = b_i\}) = 1$$

Definition 5.8
Sei $\underbrace{\prod_{\mathcal{U}} A_i}_{\neq \emptyset}$ die Menge $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$. Wir definieren Interpretationen der Symbole aus $\mathcal{L}$ auf $\prod_{\mathcal{U}} A_i$:

- Sei $c \in \mathcal{L}$ ein Konstantenzeichen. Definiere:

$$c^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} = (c^{\mathcal{A}_i})_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

[10] vergleiche dazu Blatt 1, Aufgabe 3

- Sei $f \in \mathcal{L}$ ein n-stelliges Funktionszeichen. Definiere:

$$f^{\prod_{\mathcal{U}} A_i}([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}) = (f^{\mathcal{A}_i}(a_1^i, \dots, a_n^i))_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

  Ist das wohldefiniert? Ja, denn fast überall gleich.

- Sei $\mathcal{R}$ ein m-stelliges Relationszeichen auf $\mathcal{L}$. Definiere:

$$([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_m]_{\mathcal{U}}) \in \mathcal{R}^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} \iff \{i \in I \mid (a_1^i, \dots, a_n^i) \in \mathcal{R}^{\mathcal{A}_i}\} \in \mathcal{U}$$

Wenn $\mathcal{U}$ ein Hauptfilter ist, dann ist er erzeugt vom Element $\{i_0\}$.

$$\begin{aligned} \overbrace{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i}^{\mathcal{L}\text{-Struktur}} &\xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}_{i_0} \text{ ist ein Isomorphismus} \\ (a_i)_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}} &\longmapsto a_{i_0} \end{aligned}$$

Definition 5.9
Wenn $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter ist, dann ist $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}$ die Ultrapotenz.

Beispiel 5.10
Sei $\mathcal{U}$ ein reicher/generischer Ultrafilter auf $\mathbb{N}$. Betrachte $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$.

$$\mathcal{N}^{\mathcal{U}} \ni (1, 2, 3, \dots) / \sim_{\mathcal{U}} > (1, 1, 1, \dots) / \sim_{\mathcal{U}}$$

Satz 5.11 (Satz von Łoś)
Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von $\mathcal{L}$-Strukturen, $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ eine $\mathcal{L}$-Formel und $[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}} \in \prod_{\mathcal{U}} A_i$. Dann gilt:

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \iff \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi[a^1, \dots, a^n]\} \in \mathcal{U}$$

Beweis. Induktiv über den Aufbau von φ. Sei $\varphi = (t_1 \dot{=} t_2)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &\prod_{\mathcal{U}} A_i \models (t_1[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \dot{=} t_2[[a_1]_s crU, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}]) \\ &\Leftrightarrow t_1^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i}[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \dot{=} t_2^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i}[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \\ &\underset{\substack{\text{induktiv über} \\ \text{den Aufbau}}}{\Leftrightarrow} \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models t_1[a_i^1, \dots, a_i^n] \dot{=} t_2[a_i^1, \dots, a_i^n]\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

$\square$

Folgerung 5.12
Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I. Betrachte $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}$. Das ist eine elementare Erweiterung von $\mathcal{A}$ bezüglich der Abbildung $\underset{a \longmapsto (a)_{i \in I}/\sim_{\mathcal{U}}}{A \longrightarrow \prod_{\mathcal{U}} A}$. Einbettung, injektiv

Beweis. Sei φ eine $\mathcal{L}$-Formel, $a_1, \dots, a_n \in A$. Zu zeigen ist:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Longleftrightarrow \mathcal{A}_i^{\mathcal{U}} \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}]$$

„$\Rightarrow$“: Mit Satz von Łoś gilt:

$$\mathcal{A}_i^{\mathcal{U}} \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \Longleftrightarrow \{i \in I \mid \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\} \in \mathcal{U}$$

Da dieser Ausdruck jedoch der gesamten Menge I entspricht, folgt die Behauptung direkt.

„$\Leftarrow$“: Die leere Menge liegt nicht in $\mathcal{U}$, also gibt es i sodass die Formel gilt, da diese jedoch von i unabhängig ist, gilt sie immer. $\square$

Beweis Lefschetz'sches Prinzip (5.2) „$\Leftarrow$“. Sei

$$S = \left\{ p \text{ Primzahl} \mid \begin{array}{l} \text{ein algebraisch abgeschlossener Körper mit} \\ \text{Charakteristik } p \text{ erfüllt die Aussage } \chi \end{array} \right\}$$

Zeige: S ist unendlich. Sei $P \subset \mathbb{N}$ Primzahlen. Betrachte jetzt

$$\mathcal{B} = \{X \cap S \subset P \mid X \subset P \text{ koendlich}\} \tag{4}$$

Ist $\mathcal{B}$ eine Filterbasis? $X \cap S = \emptyset$ ist endlich $\Longleftrightarrow$ $S \subset P \setminus X$ unendlich, ein Widerspruch.

Weiter gilt $(X_1 \cap S) \cap (X_2 \cap S) = \underbrace{(X_1 \cap X_2)}_{\text{koendlich}} \cap S$.

$\overset{\text{Blatt 1}}{\Rightarrow}$ es gibt einen Ultrafilter, welcher alle Elemente aus $\mathcal{B}$ enthält.

Sei im Weiteren $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf P, welcher $\mathcal{B}$ enthält. $X \cap S \in \mathcal{U}$ ist für alle $X \subset P$ koendlich.

$\hookrightarrow$ $\mathcal{U}$ ist reich (kein Hauptultrafilter). Für $p_0 \in P$ ist $P \setminus \{p_0\}$ koendlich.
$\Rightarrow$ $P \setminus \{p_0\} \cap S \in \mathcal{U}$.

$\hookrightarrow$ $S \in \mathcal{U}$

Sei $K = \prod_{\mathcal{U}} K_p$, wobei K_p ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p ist derart, dass

$$\begin{cases} K_p \models \chi & p \in S \\ \text{egal}_{\text{ bspw. } \mathbb{F}_p^{\text{alg}}} & p \notin S \end{cases}$$

(1) $K \models \mathrm{ACF}_0$

(2) $K \models \chi$, weil $\{p \in P \mid K_p \models \chi\} \supset S \in \mathcal{U}$

ACF_0 ist vollständig $\Rightarrow$ $\mathbb{C} \models \chi$. □

Satz 5.13 (Kompaktheitssatz)
Eine Theorie T ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent ist.

Beweis. OBdA ist T unendlich. Sei $I = \{\emptyset \neq S \subset T \text{ endlich}\}$. Für $s \in I$ gibt es eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}_s$, sodass $\mathcal{A}_s \models \chi$ für jedes $\chi \in s$. Sei weiter

$$B_s = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für jedes } \chi \in s\}$$

Ist $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s \in I}$ eine Filterbasis?

(1) $\emptyset \neq B_s \ni s$

(2) $B_{s_1} \cap B_{s_2} = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für alle } \chi \text{ aus } s_2\} = B_{s_1 \cup s_2} \in \mathcal{B}$!

Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter auf I, sodass $B_s \in \mathcal{U}$ für jedes $\emptyset \neq s \subset T$ endlich. Sei $\mathcal{A} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_s$.

Zu zeigen ist: $\mathcal{A} \models T$ (sei $\chi \in T$, zeige $\mathcal{A} \models \chi$).

$$\overset{\text{Satz von Łoś}}{\iff} \underbrace{\{s \in T \mid \mathcal{A}_s \models \chi\}}_{B_{\{\chi\}}} \in \mathcal{U}$$ □

Teil II
Typen und Saturation

6 Typen

Sei im Folgenden $\mathcal{L}$ eine Sprache und $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur.

Definition 6.1
Ein partieller Typ $\sum(x_1, \dots, x_n)$ mit Parametern aus B ist eine Kollektion von Formeln in der Sprache $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$, welche in der (kanonischen) $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$-Struktur $\mathcal{A}$ endlich erfüllbar ist, das heißt für alle $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \sum$ gibt es ein Tupel $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ mit $\mathcal{A} \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n)$ für $1 \leq i \leq m$.

$\mathcal{A}$ realisiert $\sum$, falls es ein Tupel $(a_1, \dots, a_n)$ gibt, sodass $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ für alle $\varphi \in \sum$. Sonst $\begin{matrix}\text{vermeidet}\\\text{übergeht}\end{matrix}$ $\mathcal{A}$ den partiellen Typ $\sum$.

Beispiel 6.2
Betrachte $(\mathbb{R}, 0, <)$. Sei $\sum(x) = \{0 < x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q}\\ q > 0}}$ ein partieller Typ.

Wird $\sum$ realisiert oder vermieden? $\rightsquigarrow$ vermieden

Sei jedoch $\sum' = \{\sqrt{2} \leq x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q}\\ q > \sqrt{2}}}$. $\rightsquigarrow$ realisiert von $\sqrt{2}$

Betrachte nun $\sum$ auf $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{R}$. Hier realisiert $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ den partiellen Typen $\sum$!

Bemerkung 6.3
Sei $\mathcal{A}$ eine unendliche Struktur. Dann gibt es immer einen partiellen Typen, der vermieden wird: $\{\neg(x \doteq a)\}_{a \in A}$.

Bemerkung 6.4
Sei $\sum(x_1, \dots, x_n)$ ein partieller Typ über C in $\mathcal{A}$. Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\underbrace{\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}}_{\mathcal{L} \cup \{c\}_{c \in C}\text{-Struktur}}$, welche $\sum$ realisiert.

Beweis. Seien $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ neue Konstantenzeichen. Schreibe $T = \operatorname{Diag}(\mathcal{A}) \cup \sum(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. T ist eine $\mathcal{L}_A \cup \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$-Theorie. Falls $\mathcal{B} \models T$, dann ist $\{\zeta_1^{\mathcal{B}}, \dots, \zeta_n^{\mathcal{B}}\}$ eine Realisierung von $\sum(x_1, \dots, x_n)$.

Zu zeigen ist: T endlich konsistent.
$T_0 \underset{\text{endlich}}{\subset} T \longrightarrow T_0 \subset \mathrm{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\varphi_i[\zeta_1, \dots, \zeta_n]\}_{i \in M}$ für $\varphi_1, \dots, \varphi_M \in \sum$, $M \in \mathbb{N}$.
$\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ ist in $\mathcal{A}$ realisierbar von $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$.
$\longrightarrow$ Setze $\tilde{\mathcal{A}}$ die $\mathcal{L}_A \cup \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$-Struktur aus $\mathcal{A}$ mit Interpretationen $\zeta_i^{\tilde{\mathcal{A}}} = a_i$. □

Definition 6.5
Ein n-Typ über $C \subset A$ in der Struktur $\mathcal{A}$ ist ein partieller Typ in der Variable $x_1, \dots, x_n$ über C, welcher maximal endlich erfüllbar ist bezüglich der Inklusion zwischen partiellen Typen über C.
$S_n^{\mathcal{A}}(C)$ ist die Menge aller Typen in $\mathcal{A}$ über C.

$$S^{\mathcal{A}}(C) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^{\mathcal{A}}(C)$$

Bemerkung 6.6
$S_n^{\mathcal{A}}(C) \neq \emptyset$. Gegeben $b_1, \dots, b_n \in A$, setze

$$\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) = \{\varphi[x_1, \dots, x_n] \ \mathcal{L}\text{-Formel} \mid \mathcal{A} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]\}$$

ist ein n-Typ über C.

Beweis. Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n] \notin \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C)$. Zu zeigen ist: $\mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) \cup \{\varphi[x_1, \dots, x_n]\}$ nicht endlich erfüllbar. Aus der Annahme folgt:

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \not\models \varphi[b_1, \dots, b_n] \\ \Longrightarrow\ &\mathcal{A} \models \neg\varphi[b_1, \dots, b_n] \\ \Longrightarrow\ &\neg\varphi[x_1, \dots, x_n] \in \mathrm{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) \\ \Longrightarrow\ &\text{Widerspruch zur Maximalität} \end{aligned}$$

Sei nun $p(x_1, \dots, x_n) \in S_n^{\mathcal{A}}(C)$. Gegeben $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ eine $\mathcal{L}_C$-Formel. Zu zeigen ist: $\varphi \in p$ oder $\neg\varphi \in p$.

Angenommen $\varphi \notin p$. $\Longrightarrow p \subsetneq \underbrace{p(x_1, \dots, x_n) \cup \{\varphi[x_1, \dots, x_n]\}}_{\text{endlich erfüllbar}}$
$\rightsquigarrow$ Es gibt $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in p$ sodass $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi$ in A nicht erfüllbar ist. Insbesondere

$$\begin{aligned} &\mathcal{A} \not\models\ \exists x_1, \dots, x_n (\bigwedge \liminf_{i=1}^{k} \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \land \varphi[x_1, \dots, x_n]) \\ \Longleftrightarrow\ &\mathcal{A} \models \neg\ \exists x_1, \dots, x_n (\bigwedge \liminf_{i=1}^{k} \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \land \varphi[x_1, \dots, x_n]) \\ \Longleftrightarrow\ &\mathcal{A} \models\ \forall x_1 \cdots\ \forall x_n (\bigwedge_{i=1}^{k} \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \to \neg\varphi[x_1, \dots, x_n]) \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass $p \subseteq p(x_1, \dots, x_n) \cup \{\neg\varphi[x_1, \dots, x_n]\}$ endlich erfüllbar ist. Sei dazu $\psi_1, \dots, \psi_r \in p$. Wir wollen zeigen:

$$\mathcal{A} \models\ \exists x_1, \dots, x_n (\bigwedge_{j=1}^{r} \psi_j[x_1, \dots, x_n] \land \neg\varphi[x_1, \dots, x_n])$$

$\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_r \in p$, p ist insbesondere partieller Typ.
$\hookrightarrow$ es gibt $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ mit $\mathcal{A} \models \bigwedge \varphi_i[a_1, \dots, a_k] \wedge \bigwedge \psi_j[a_1, \dots, a_n]$.
$\implies \mathcal{A} \models \neg\varphi[a_1, \dots, a_n]$ □

Allgemeiner: Sei T eine konsistente Theorie in der Sprache $\mathcal{L}$. Definiere: n-Typ in T ist eine Kollektion von $\mathcal{L}$-Formeln in $x_1, \dots, x_n$, welche endlich konsistent mit T ist, es gilt also für $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$: $T \cup \{\ \exists x_1, \dots, x_n(\bigwedge_{j=1}^{m} \varphi_j[x_1, \dots, x_m])\}$ ist konsistent, und maximal bezüglich Inklusion mit dieser Eigenschaft:

Für $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur und $C \subset A$. Dann sei T die $\mathcal{L}_C$-Theorie von $\mathcal{A}$.

$$\underbrace{p \in S_n(T)}_{n\text{-Typ von } T} \Leftrightarrow p \in S_n^{\mathcal{A}}(C)$$

Folgerung 6.7
Gegeben eine $\mathcal{L}$-Struktur $\mathcal{A}$ gibt es $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$, welche alle Typen in $S^{\mathcal{A}}(A)$ realisiert.

Beweis. Sei $\{p_\alpha\}_{\alpha<\lambda}$ eine Aufzählung von $S^{\mathcal{A}}(A)$. Wir konstruieren eine elementare Kette $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}_1 \preceq \dots \preceq \mathcal{A}_\alpha \preceq \dots$ so, dass $\underbrace{p_\alpha}_{\substack{\text{als part. Typ} \\ \text{über } A \text{ in } \mathcal{A}_\alpha}}$ in $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ realisiert wird.
$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$. $\mathcal{A}_1$ wird mithilfe des Lemmas für p_0 gewonnen. Falls γ eine Limeszahl ist: Setze $\mathcal{A}_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \mathcal{A}_\beta$. Sei $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{A}_\lambda$. □

Achtung: $\mathcal{B}$ kann sehr groß werden!

Beispiel 6.8
$\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <)$ $\rightsquigarrow$ Typ für jedes Element aus $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} r \in \mathbb{R} \longrightarrow p_r \supset &\{x < r\} \cup \{s < x\}_{s<r} \\ p_r \text{ „=“ } &\{x < r\} \cup \{s < x\}_{s<r} \\ p_{r^+} = &\{x > r\} \cup \{s > x\}_{s>r} \end{aligned}$$

Ziel: $S_n(T)$ ist ein kompakter, 0-dimensionaler Hausdorff topologischer Raum $\rightsquigarrow$ „Stoneraum der Theorie T“.

7 Exkurs: Einführung in die Topologie

Sei X eine Menge.

Definition 7.1
Eine Basis $\mathcal{B}$ einer Topologie auf X ist eine Kollektion von Teilmengen derart, dass

(1) $\forall x \in X$ gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$

(2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}\ \forall x \in B_1 \cap B_2$ gibt es ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Definition 7.2
$U \subset X$ ist *offen*, falls es für jedes $x \in U$ ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B \subset U$.
Sei $T = \{U \underset{\text{offen}}{\subset} X\}$. Die Kollektion T erfüllt folgende Eigenschaften:

(1) $\emptyset, X \in T$

(2) $U_1, U_2 \in T \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$

(3) Sei $(U_i)_{i \in I} \subset T$. Dann ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in T$

Beispiel 7.3 (1) die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

(2) die triviale Topologie auf X ist $\{\emptyset, X\}$

(3) die diskrete Topologie auf X ist $\mathcal{P}(X)$

(4) die koendliche Topologie auf X wird gegeben als:

$$U \subset X \text{ offen } \iff |X \setminus U| \text{ endlich, oder } U = \emptyset$$

So ist beispielsweise $(0,1)$ offen in $\mathbb{R}$ für die euklidische Topologie, aber nicht für die koendliche Topologie.

Bemerkung 7.4
$Y \subset X$ ist offen $\iff \quad \forall x \in Y \quad \underbrace{\exists \underset{\in T}{U} \ni x}_{\substack{U \text{ ist eine} \\ \text{Umgebung von } x}} \quad$ mit $x \in U \subset Y$

Definition 7.5
Eine Menge $C \subset X$ ist *abgeschlossen*, falls das Komplement offen ist.

Definition 7.6
Ein topologischer Raum $(X.T)$ ist *0-dimensional*, falls es eine Basis der Topologie gibt, welche aus offen-abgeschlossenen[11] Mengen besteht.

Beispiel 7.7
Die diskrete Topologie ist *0-dimensional*, weil sie als Basis $\{\{x\}\}_{x \in X}$ hat.

[11] Englisch: „clopen“

Definition 7.8 (Trennungseigenschaften)
Sei (X, T) ein topologischer Raum.

T1 Falls $x \neq y \in X$ gibt es Umgebungen $\overbrace{U^x, U^y}^{\substack{\text{offene Mange} \\ \text{die } x \text{ enthält}}}$ mit $x \in U^x \setminus U^y, y \in U^y \setminus U^x$.

T2 (Hausdorff) falls $x \neq y \in X$ gibt es U^x, U^y Umgebungen mit $U^x \cap U^y = \emptyset$

Bemerkung 7.9
$T2 \Rightarrow T1$

Beispiel 7.10
- Ist die euklidische Topologie T2? Ja.
- Sei X unendlich. Ist die koendliche Topologie T Hausdorff? Nein. Ist sie T!? Ja: $U^x = X \setminus \{y\}, U^y = X \setminus \{x\}$

Bemerkung 7.11
$(X, T)T1 \Rightarrow$ Jeder Punkt ist abgeschlossen!

Beweis. Zu zeigen: $X \setminus \{x\}$ offen
Sei $y \in X \setminus \{x\}$. Wir suchen $U^y \subset X \setminus \{x\}$. Es gilt $x \neq y \implies \begin{matrix} U^x \\ U^y \end{matrix}$, insbesondere $x \notin U^y \implies \underset{\in Y}{U^y} \subset x \setminus \{x\}$ □

Definition 7.12
(X, T) topologischer Raum.

- $s \in X$ ist *isoliert*, falls $\{x\}$ offen ist.
- $A \subset X$ ist *dicht*, falls für jede offene Menge $\emptyset \neq U \subset X$ ist $A \cap U \neq \emptyset$
- $x \in X$ ist ein *Häufungspunkt von* A, falls für jede Umgebung $U^x \ni x$ gilt, dass $U^x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Bemerkung 7.13
Sei $A \underset{\text{dicht}}{\subset} X$. $\underbrace{C}_{\supset A} \underset{\text{ageschl.}}{\subset} X \implies C = X$

Beweis. Zu zeigen ist: $C = X$. Sonst ist $\underbrace{\overbrace{X \setminus C}^{U}}_{\neq\emptyset}$ offen. $\overset{A \text{ dicht}}{\implies} \underbrace{A \cap U}_{\subset C \cap (x \setminus C) = \emptyset} \neq \emptyset$, ein Widerspruch. □

Bemerkung 7.14
Eine Topologie auf X ist genau dann diskret, falls jeder Punkt isoliert ist. Übung

Bemerkung 7.15
Eine Teilmenge $C \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn C alle ihre Häufungspunkte enthält.

Beweis. „$\Rightarrow$“: $x \notin C \Rightarrow x \in \underbrace{X \setminus C}_{\text{offen}}$ und $(X \setminus C) \cap (\underbrace{C \setminus \{x\}}_{=C}) = \emptyset \Rightarrow x$ kein Häufungspunkt von C.

„$\Leftarrow$“: Zu zeigen: $X \setminus C$ offen. Sei dazu $x \in X \setminus C$ beliebig. $\Rightarrow x$ ist kein Häufungspunkt von C $\Rightarrow \ \exists U^x \ni x$ mit $U^x \cap \underbrace{C \setminus \{x\}}_{=C} = \emptyset \Rightarrow x \in U^x \subset X \setminus C$ ☐

Definition 7.16
Seien X, Y topologische Räume. Die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist *stetig auf* x_0, falls für jede Umgebung $V^{f(x_0)} \ni f(x_0)$ (in Y) das Urbild $f^{-1}(V)$ in X offen ist.
f ist stetig, wenn sie auf jedem Punkt in X stetig ist.

Bemerkung 7.17
Es genügt Urbilder von Basiselementen zu betrachten. Warum? Sei V eine Umgebung von $f(x_0)$.
$\hookrightarrow$ es gibt B ein Basiselement mit $f(x_0) \in B \subset V \Rightarrow x_0 \in \underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{offen}} \subset f^{-1}(V)$

Bemerkung 7.18
$f : X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in X ist für alle $\underset{\text{abgeschlossen}}{C \subset Y}$.

$$X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$$

Beispiel 7.19
$f : \begin{array}{l} X \longrightarrow Y \\ x \longmapsto y_0 \end{array}$ konstant. Ist f stetig? Ja, denn $f^{-1}(x) = \begin{cases} X & x = y_0 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$.

Definition 7.20
Die Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ist $\begin{array}{c}\text{offen}\\ \text{abgeschlossen}\end{array}$, falls für jede $\begin{array}{c}\text{offene}\\ \text{abgeschlossene}\end{array}$ Teilmenge $\begin{array}{c}U\\ C\end{array}$ von X das Bild $\begin{array}{c}f(U)\\ f(C)\end{array}$ $\begin{array}{c}\text{offen}\\ \text{abgeschlossen}\end{array}$ ist.

Bemerkung 7.21

$$\text{offen} \begin{array}{c}\not\Longrightarrow \\ \not\Longleftarrow\end{array} \text{abgeschlossen}$$

Beispiel 7.22
Betrachte $\Pi : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto x \end{array}$ mit euklidischer Topologie. Π ist offen, aber nicht abgeschlossen: Betrachte $\overset{\text{abgeschlossen}}{x \cdot y = 1} \mapsto \overset{\substack{\text{nicht}\\ \text{abgeschlossen}}}{x \neq 0}$.

Beispiel 7.23
Sei $\underset{\text{konstant}}{X \longrightarrow Y}$ unendlich mit koendlicher Topologie. Diese Abbildung ist abgeschlossen, aber nicht offen.

Definition 7.24
Ein Homöomorphismus $f : X \longrightarrow Y$ ist eine bijektive stetige Abbildung derart, dass die

$$\text{mengentheoretische Abbildung} \quad \begin{array}{c} f^{-1}\text{auch stetig} \\ \text{bzw.} \\ f \text{ offen} \\ \text{bzw.} \\ f \text{ abgeschlossen} \end{array} \quad \text{ist.}$$

Definition 7.25
(X, T) topologischer Raum. Die Menge $K \subset X$ ist kompakt, falls jede offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{i\in I} \underbrace{U_i}_{\text{offen}}$ eine endliche Überdeckung besitzt: Es gibt $i_1, \ldots, i_n \in I$ mit $K \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$.
(X, T) ist kompakt, wenn X kompakt ist.

Bemerkung 7.26
- Jede endliche Menge ist kompakt
- $f : X \longrightarrow Y$ stetige Abbildung, $K \subset X$ kompakt $\Rightarrow f(K)$ kompakt in Y.

Beweis. Zu zeigen: $f(K)$ kompakt.

$$\begin{aligned} f(K) \subset \bigcup_{i\in I} \underbrace{V_i}_{\text{offen in } Y} &\Rightarrow K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{i\in I} \underbrace{f^{-1}(V_i)}_{\text{offen}} \\ &\Rightarrow K \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{i_n}) \\ &\Rightarrow f(K) \subset \underbrace{f(f^{-1}(V_{i_1})}_{\subset V_{i_1}} \cup \cdots \cup \underbrace{f(f^{-1}(V_{i_n}))}_{\subset V_{i_n}} \end{aligned}$$

□

Lemma 7.27
$K \subset X$ kompakt. $C \underset{\text{abg.}}{\subset} X$ mit $C \subset K \Longrightarrow C$ kompakt.

Beweis. Sei $C \subset \bigcup_{i\in I} \underbrace{U_i}_{\text{offen}}$. C abgeschlossen $\Longrightarrow X \setminus C$ offen.

$$K \subset X = (X \setminus C) \cup C = (X \setminus C) \cup \bigcup_{i\in I} U_i$$

$$\overset{\substack{\text{oBdA} \\ K \text{ kompakt}}}{\hookrightarrow} \quad C \subset K \subset (x \setminus C) \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n}$$

$$\Longrightarrow C \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_n} \checkmark$$

□

Lemma 7.28
X Hausdorff, $K \underset{\text{kompakt}}{\subset} X \Longrightarrow K$ abgeschlossen.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass wenn $x \notin K$, dann ist x kein Häufungspunkt von K.
Für $y \in K \to y \neq x \overset{x}{\underset{}{\overset{\text{Hausdorff}}{\hookrightarrow}}} \exists U_y^x, V^y$ mit $U_y^x \cap V^y = \emptyset \to K \subset \bigcup_{y \in K} V^y \overset{K \text{ kompakt}}{\Longrightarrow} K \subset V^{y_1} \cup \cdots \cup V^{y_n}$ für $y_1, \ldots, y_n \in K$.
Setze $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}^x \ni x$ offen. Zu zeigen bleibt: $U \cap \underbrace{K}_{=K \setminus \{x\}} = \emptyset$.
$U \cap K \subset U \cap (\bigcup_{i=1}^{n} V^{y_i}) = \bigcup U \cap V^{y_i} \subset U_{y_i}^x \cap V^{y_i} \underset{\text{n. Def.}}{=} \emptyset \Rightarrow x$ ist kein Häufungspunkt. □

Folgerung 7.29
X Hausdorff, $(K_i)_{i \in I}$ kompakte Teilmengen. $\Longrightarrow \bigcap_{i \in I} K_i$ kompakt.

Beweis. $\underbrace{\bigcap_{i \in I} \underbrace{K_i}_{\text{abg.}}}_{\subset K_i \text{ kompakt}}$ abgeschlossen. $\overset{(7.28)}{\Longrightarrow} \bigcap_{i \in I} K_i$ kompakt. □

Folgerung 7.30
$f : X \longrightarrow Y$ stetig, X, Y topologische Räume.

$$Y \text{ Hausdorff} \Longrightarrow f \text{ abgeschlossen}$$

Beweis. Sei $C \subset X$ abgeschlossen. $\Longrightarrow C$ ist kompakt $\Longrightarrow \underbrace{f(C)}_{\subset Y \text{ Hausdorff}}$ ist kompakt $\overset{(7.28)}{\Longrightarrow} f(C)$ abgeschlossen. □

8 Stoneraum von Typen einer Theorie

Sei T eine konsistente Theorie in der Sprache $\mathcal{L}$. Ein n-Typ ist eine Menge von $\mathcal{L}$-Formeln in den Variablen $x_1, \ldots, x_n$, welche endlich konsistent bezüglich T ist, und maximal mit dieser Eigenschaft bezüglich Inklusion.
Gegeben $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in p$. Dann ist $T \cup \{ \exists \vec{x} (\bigwedge_{i=1}^{m} \varphi_j[\vec{x}])\}$ konsistent.

Bemerkung 8.1
Wenn T vollständig ist, dann gilt

$$S_n(T) = S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset)$$

für jedes Modell $\mathcal{A} \models T$, wobei $S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset)$ die Menge aller Typen $p(x_1, \dots, x_n)$ in n Variablen ist, sodass $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p, \mathcal{A} \models \exists \vec{x}(\bigwedge_{j=1}^{m} \varphi_j(\vec{x}))$.

Häufig: $\mathcal{A}$ eine $\mathcal{L}$-Struktur, $B \subset A : S_n^{\mathcal{A}}(B) = S_n(\mathrm{Th}(\mathcal{A}, b)_{b \in B})$

Definition 8.2
Gegeben $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$, setze

$$[\varphi] = \{p \in S_n(T) \mid \varphi \in p\}$$

Bemerkung 8.3
Typen sind unter Deduktion abgeschlossen.

$$\begin{aligned}
&[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi] \\
&[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi] \\
&[\neg(x_1 \doteq x_1)] = \emptyset \\
&[\neg\varphi] = S_n(T) \setminus [\varphi] \\
&[(x_1 \doteq x_1)] = S_n(T)
\end{aligned}$$

Bemerkung 8.4

$$[\varphi] \subset [\psi] \iff T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to \psi[\vec{x}])$$

Insbesondere $[\varphi] = [\psi]$ genau dann, wenn φ, ψ logisch äquivalent modulo T sind.

Beweis. „$\Rightarrow$“: Falls $T \not\models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to \psi[\vec{x}]) \Longrightarrow T \cup \{\exists \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}])\}$ konsistent. Das heißt die Menge $\{(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}])\}$ ist ein partieller Typ.
$\overset{\text{Zorn}}{\Longrightarrow}$ es gibt $p \in S_n(T)$ mit $(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}]) \in p \underset{\substack{p \text{ unter} \\ \text{Deduktion} \\ \text{abgeschlossen}}}{\Longrightarrow} p \in [\varphi] \setminus [\psi]$.

„$\Leftarrow$“: $p \in [\varphi] \Rightarrow \varphi \in p \overset{T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \to \psi[\vec{x}])}{\Longrightarrow} \psi \in p \Rightarrow p \in [\psi]$. □

Satz 8.5
Die Kollektion $\{[\varphi]\}_{\varphi[x_1, \dots, x_n] \text{ eine } \mathcal{L}\text{-Formel}}$ bildet eine Basis der Topologie auf $S_n(T)$ derart, dass $S_n(T)$ 0-dimensional, Hausdorff und kompakt ist.

Beweis. Basis: ✓ wegen (8.3).

0-dimensional: $S_n(T) \setminus [\varphi] = \underbrace{[\neg\varphi]}_{\text{offen}} \Rightarrow [\varphi]$ ist abgeschlossen (und offen).

Hausdorff: Seien $p \neq q \in S_n(T) \Rightarrow$ es gibt $\varphi \in p \setminus q \Rightarrow p \in [\varphi], q \in [\neg\varphi]$ *disjunkt.*

<u>$S_n(T)$ kompakt:</u> Es genügt zu zeigen, dass jede offene Umgebung der Form $\bigcup_{i\in I}[\varphi_i]$ eine endliche Überdeckung besitzt, denn:

$$X = \bigcup_{i\in I} \underbrace{U_i}_{=\bigcup_{j\in J} B_{ij}} = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} B_{ij} \longrightarrow X \subset \underbrace{B_{i_1 j_1} \cup \cdots \cup B_{i_n j_n}}_{\subset U_{i_1}}$$

Also: $S_n(T) = \bigcup_{i\in I}[\varphi_i] \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{i\in I}[\neg\varphi_i] \overset{\text{Kompaktheitssatz}}{\Longrightarrow} \{\neg\varphi_i[\vec{x}]\}_{i\in I}$ nicht endlich erfüllbar in T $\Rightarrow$ es gibt $\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_n}$ sodass $T \cup \{\ \exists\vec{x}(\bigwedge_{j=1}^{n} \neg\varphi_{ij}[\vec{x}])\}$ inkonsistent.

Also $T \models\ \forall\vec{x}(\bigvee_{j=1}^{n} \varphi_{ij}[\vec{x}]) \overset{(8.3)}{\Longrightarrow} S_n(T) = [\varphi_{i_1}] \cup \cdots \cup [\varphi_{i_n}]$. Sonst gäbe es $p \in S_n(T) \setminus \bigcup_{j=1}^{n}[\varphi_{ij}] \Rightarrow \neg\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_n} \in p \underset{\substack{p \text{ endlich}\\ \text{erfüllbar}\\ \text{in } T}}{\Longrightarrow} T \cup \{\{\ \exists\vec{x}(\bigwedge_{j=1}^{n} \neg\varphi_{ij}[\vec{x}])\}$ $\square$