

# **Modelltheorie**

**Wintersemester 2019/20**

**Mitschrift von Floris Remmert**

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro  
Abteilung für mathematische Logik  
Mathematisches Institut  
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

20. Dezember 2019



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Erinnerung</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Theorien und Quantorenelimination</b>	<b>4</b>
2	Tarskis Test	4
3	Quantorenelimination	7
4	Beispiele klassischer Theorien	11
5	Ultrafilter & der Satz von Ax	15
<b>II</b>	<b>Typen und Saturation</b>	<b>21</b>
6	Typen	21
7	Exkurs: Einführung in die Topologie	24
8	Stoneraum von Typen einer Theorie	29
9	Typenvermeidungssatz und Isolation	32
10	Magere Mengen und Typenvermeidungssatz	35
11	Primmodelle. Existenz und Eindeutigkeit	36
12	Saturation	43
13	Fraïsses Amalgamierungsmethode für $\aleph_0$ -kategorische Theorien	51

Ziel dieser Vorlesung ist es, eine Aussage der folgenden Qualität zu erhalten:

**Satz 0.1** (Morleys Kategorizitätssatz)

Sei  $T$  eine Theorie, welche ein einziges (bis auf Isomorphie) Modell der Mächtigkeit  $\aleph_0$  besitzt. Dann besitzt  $T$  für jede Kardinalzahl  $\kappa > \aleph_0$  ein einziges Modell der Mächtigkeit  $\kappa$  (bis auf Isomorphie).

## 1 Erinnerung

**Definition 1.1** • Eine Sprache  $\mathcal{L}$  ist eine Kollektion von Konstanten-, Funktions-, und Relationszeichen

- Eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  besteht aus einer nicht-leeren Grundmenge (oder Universum)  $A$  zusammen mit Interpretationen der Symbole aus  $\mathcal{L}$ :

- Für jedes Funktionszeichen  $f$  der Stelligkeit  $n$

$$f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$$

- Für jedes Relationszeichen  $R$  der Stelligkeit  $m$

$$R^{\mathcal{A}} \subset A^m$$

- Eine Einbettung  $F$  von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  ist eine injektive Abbildung  $F : A \longrightarrow B$ , welche mit den Interpretationen kompatibel<sup>1</sup> ist
- Ein Isomorphismus ist eine surjektive Einbettung.
- $\mathcal{A}$  ist eine Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ , falls  $A \subset B$  und die Inklusion  $\iota : A \longrightarrow B$  eine Einbettung bestimmt

**Bemerkung 1.2**

Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $\emptyset \neq A \subset B$ . Dann gibt es eine Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ , welche von  $A$  erzeugt wird.

Das Universum besteht aus  $A$  zusammen mit dem Abschluss von  $A$  unter allen Interpretationen der Funktionszeichen von  $\mathcal{L}$ .

**Definition 1.3**

Sei  $(I, <)$  eine partielle Ordnung. Die Ordnung ist gerichtet, falls für  $i, j \in I$  gibt es  $k \in I$  mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$ .

---

<sup>1</sup>das bedeutet, dass Funktions- und Relationszeichen bei Hin- und Rückrichtung erhalten bleiben

**Bemerkung 1.4**

Sei  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen indexiert nach der gerichteten partiellen Ordnung  $I$  derart, dass für  $i \leq j$  gilt:  $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}_j$ .

Die Menge  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  ist das Universum einer (eindeutig bestimmten)  $\mathcal{L}$ -Struktur

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \quad (1)$$

Falls  $I$  eine lineare Ordnung ist, dann ist  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Kette.

Zu 1:

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}_i}$  für ein (alle)  $i \in I$ , denn  $c^{\mathcal{A}_i} = c^{\mathcal{A}_j} = c^{\mathcal{A}_k}$ , wegen gerichteter Ordnung
- $a_1, \dots, a_n \in A = \bigcup_{i \in I} A_i \implies \exists i \in I$  mit  $a_1, \dots, a_n \in A_i$ . Also ist  $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n)$  wohldefiniert.
- $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}}$  genau dann, wenn es ein  $i \in I$  gibt mit  $a_1, \dots, a_m \in A_i$  und  $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}_i}$

Beachte, dass  $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$  für alle  $i \in I$ .

**Definition 1.5**

Eine atomare Formel ist ein Ausdruck der Form  $(t_1 \doteq t_2)$ ,  $t_1, \dots, t_k$  Terme,  $R(t_1, \dots, t_k)$ .

Die Kollektion von Formeln ist die kleinste Klasse, welche alle atomaren Formeln enthält und derart, dass:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ Formel} &\implies \neg \varphi \text{ Formel} \\ \varphi, \psi \text{ Formel} &\implies (\varphi \vee \psi) \text{ Formel} \\ \varphi \text{ Formel}, x \text{ Variable} &\implies \exists x \varphi \text{ Formel, } (x \text{ heißt dann „gebunden“}) \end{aligned}$$

Abk.:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi) &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \forall x \varphi &= \neg \exists x \neg \varphi \\ (\varphi \rightarrow \psi) &= (\neg\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.6** • Jede Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  lässt sich in pränexer Normalform umschreiben:  $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ , mit  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ . Das ist eine quantorfreie Formel, diese lässt sich weiter zerlegen in KNF bzw. DNF.

- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine Aussage
- Eine Theorie ist eine Kollektion von Aussagen

**Beispiel 1.7**

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur. Erweitere die Sprache zu der Sprache  $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{d_a\}_{a \in A}$ .

$\mathcal{A}$  ist eine  $\mathcal{L}_A$ -Struktur,  $d_a^{\mathcal{A}} = a$ .

- $\text{Diag}^{\text{at}}(\mathcal{A}) = \{\text{quantorenfreie } \mathcal{L}_A\text{-Aussagen } \chi \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$  heißt „atomares Diagramm“
- $\text{Diag}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{L}\text{-Aussagen } \theta \text{ mit } \mathcal{A} \models \theta\}$  heißt „vollständiges Diagramm“

Sei nun  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}_A$ -Struktur.

$\mathcal{B} \models \text{Diag}^{\text{at}}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  einbetten lässt

$$A \longrightarrow B$$

$$a \mapsto d_a^{\mathcal{B}}$$

$\mathcal{B} \models \text{Diag}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow$  die obige Abbildung ist elementar

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)], a_1, \dots, a_n \in A, \varphi[x_1, \dots, x_n]$  Formel

**Definition 1.8** •  $T$  ist konsistent, falls  $T$  ein Modell besitzt.

- $T$  ist vollständig, falls  $T$  konsistent ist und je zwei Modelle von  $T$  elementar äquivalent sind.

**Satz 1.9** (Kompaktheitssatz)

Eine Theorie ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent<sup>2</sup> ist.

Wie zeigen wir, dass  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ?

**Satz 1.10** (Back & Forth)

$S = \{F : \underset{US}{\mathcal{C}} \longrightarrow \underset{US}{\mathcal{D}}, F \text{ partieller Isomorphismus zwischen } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{D} \text{ geeignet}\}^3$ .

Back: Für alle  $F \in S$  und  $b \in B$ ,  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  gibt es  $G \in S$  mit  $G \supset F$  Erweiterung und  $b \in \text{Im}(G)$ .

Forth: Für alle  $F \in S$  und  $a \in A$ ,  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  gibt es  $H \in S$ , mit  $H \supset F$  Erweiterung mit  $a \in \text{Dom}(H)$

<sup>2</sup>endlich konsistent bedeutet: jede endliche Teilmenge der Theorie besitzt ein Modell.

<sup>3</sup>bspw. endlich erzeugt

$\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  heißen dann „Back & Forth äquivalent“

$\rightarrow$  ist jedes  $F \in S$  elementar, so gilt insbesondere  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .

# Teil I

## Theorien und Quantorenelimination

### 2 Tarskis Test

**Lemma 2.1** (Tarskis Test)

Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $A \subset B$  Teilmenge derart, dass für jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  und Elemente  $a_1, \dots, a_n \in A$ :

falls:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b] \text{ für ein } b \in B \Rightarrow \text{ existiert } a \in A \text{ sodass } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \quad (2)$$

dann ist  $A$  das Universum einer elementaren Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ .

Insbesondere: Falls  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  Unterstruktur, ist  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$  erfüllt 2.

*Beweis.* Betrachte  $A \neq \emptyset \rightarrow$  Betrachte  $\varphi[y] = (y \doteq y)$ .  $B \neq \emptyset \rightarrow \exists b \in B$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[b]$ .  
 $\hookrightarrow \exists a \in A$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[a]$

Beh.: Für jedes Konstantenzeichen  $c \in \mathcal{L}$  ist  $c^{\mathcal{B}} \in A$ .  $\hookrightarrow \varphi[y] = (y \doteq c)$ ,  $\mathcal{B} \models \varphi[c^{\mathcal{B}}] \Rightarrow$  es gibt  $a \in A$  mit  $a = c^{\mathcal{B}}$ .

Beh.:  $A$  ist unter den Funktionen  $f^{\mathcal{B}}$  abgeschlossen, für jedes Funktionszeichen  $f \in \mathcal{L}$ .

Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y] = (y \doteq f(x_1, \dots, x_n)) \checkmark$

Für  $R \in \mathcal{L}$   $m$ -stellig setze  $R^{\mathcal{A}} = A^m \cap R^{\mathcal{B}} \longrightarrow$  somit bildet  $A$  eine  $\mathcal{L}$ -Unterstruktur  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{B}$ .

Noch zu zeigen:  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ , d. h.  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$   $\mathcal{L}$ -Formel.

Seien dazu  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad (3)$$

Induktiv über den Aufbau von  $\varphi$ .

$\varphi$  ist atomar  $\longrightarrow \checkmark$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] & \Leftrightarrow & \mathcal{B} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] & & \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \end{array}$$

$\varphi = \neg\psi \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]: \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A$  sodass  $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$  für ein  $a \in A \subset B \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt  $b \in B$  mit  $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xRightarrow{2}$  es gibt ein  $a \in A$  mit  $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{3} \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .

Für „insbesondere“: Angenommen, dass  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Dann:  $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$  für ein  $b \in B \Rightarrow \mathcal{B} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{A} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A$  mit  $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$

□

**Proposition 2.2** (aufwärts Löwenheim-Skolem)

Sei  $\mathcal{A}$  eine unendliche  $\mathcal{L}$ -Struktur, und  $\kappa < \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$ . Dann gibt es eine elementare  $\mathcal{L}$ -Erweiterung  $\mathcal{B} \geq \mathcal{A}$  der Mächtigkeit  $\kappa$ .

*Beweis.*  $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$ , wobei  $\{c_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$  eine Menge neuer Konstantenzeichen ist, ist konsistent weil sie endlich konsistent<sup>4</sup> ist.

Aus der Konstruktion von Henkin hat  $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$  ein Modell der Mächtigkeit der Sprache.

$\rightarrow$  ein Modell der Mächtigkeit  $\kappa$

□

**Bemerkung 2.3**

$|A| = n \in \mathbb{N}, \mathcal{B} \succeq \mathcal{A} \Rightarrow |B| = n$

**Proposition 2.4** (abwärts Löwenheim-Skolem)

Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $S \subset B$  beliebig. Dann gibt es eine elementare Unterstruktur  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  mit  $A \supset S$  und  $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$ .

---

<sup>4</sup>Kompaktheit



**Bemerkung 2.5**

$\mathbb{C}$  in der Ringsprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ ,  $S = \emptyset \Rightarrow$  es gibt eine abzählbare elementare Unterstruktur von  $\mathbb{C}$ .  $\rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \preceq \mathbb{C}$ .

*Beweis 2.4.* Setze  $S_0 = S$ . Angenommen  $S_k$  wurde bereits konstruiert, wähle für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  und Elemente  $a_1, \dots, a_n \in S_k$  ein Element  $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in B$  derart, dass  $\mathcal{B} \models ((\exists y \in \varphi)[a_1, \dots, a_n] \rightarrow \varphi[a_1, \dots, a_n, a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]}])$ . Setze  $S_{k+1} = S_k \cup \{a_{\varphi}\}_{\varphi \mathcal{L}\text{-Formel}, (a_1, \dots, a_n) \in S_k}$

Definiere  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \supset S$ . Wir überprüfen, dass  $A$  den Test von Tarski erfüllt. Sei  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$  für ein  $b \in B \Rightarrow$  es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $a_1, \dots, a_n \in S_k \Rightarrow$  es gibt ein  $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in S_{k+1} \subset A$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$

Ferner ist  $|A| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |S|\}$ . □

**Folgerung 2.6**

Sei  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine gerichtete Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen, sodass für  $i \leq j$  ist  $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$ . Dann ist  $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$  eine elementare Erweiterung jeder  $\mathcal{A}_i$ .

*Beweis.* Wir beweisen induktiv über den Aufbau von  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$ , dass für alle  $i \in I$ , für alle  $a_1, \dots, a_n \in A_i$ :  $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .

$\varphi$  atomar  $\rightarrow$  klar, denn  $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$

$\varphi = \neg \varphi \Rightarrow$  ok!

$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow$  ok!

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$ :  $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A_i$  mit  $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$   
 $\Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$   
 ind. über  $\psi$

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $b \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$  mit  $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \Rightarrow$  es gibt  $j \in I$  mit  $b \in A_j \Rightarrow$  es existiert  $k \in I$  mit  $i \leq k, j \leq k, a_1, \dots, a_n, b \in A_k$   
 $\Rightarrow \mathcal{A}_k \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xrightarrow{\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_k} \text{es gibt ein } a \in A_k \text{ mit } \mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ . □

### 3 Quantorenelimination

#### Definition 3.1

Eine Theorie  $T$  hat Quantorenelimination, falls jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  äquivalent modulo  $T$  zu einer quantorenfreien  $\mathcal{L}$ -Formel  $\psi[x_1, \dots, x_n]$  ist.

$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow \psi[x_1, \dots, x_n])$$

#### Beispiel 3.2

Sei  $\mathcal{L} := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$  gegeben. Betrachte die Menge  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und es gibt } x \in \mathbb{R} \text{ mit } ax^2 + bx + c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0\}$ .

Diese Formel ist in  $\mathcal{L}$  nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel, in  $\mathcal{L}_1 := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$  hingegen doch. Somit ist die Menge in  $\mathcal{L}_1$  quantorenfrei.

**Bemerkung 3.3** • Wenn  $T$  inkonsistent ist, dann hat  $T$  immer Quantorenelimination

- Wenn  $T$  Quantorenelimination hat, und  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  mit  $\mathcal{A} \subseteq_{\text{US}} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  Übung

**Definition 3.4** • Eine einfache Existenzformel ist eine Formel der Form  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$

- Eine primitive Existenzformel ist eine Formel der Form  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \psi[x_1, \dots, x_n, y]$ , wobei  $\psi$  eine endliche Konjunktion von atomaren Formeln und Negationen ist

#### Lemma 3.5

Eine (konsistente) Theorie  $T$  hat genau dann Quantorenelimination, wenn jede primitive Existenzformel zu einer quantorenfreien Formel äquivalent modulo  $T$  ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: klar

„ $\Leftarrow$ “: Beachte,  $\exists y(\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\exists y\psi_1 \vee \exists y\psi_2)$ . Insbesondere, wenn  $T$  Quantorenelimination für primitive Existenzformeln hat, dann hat  $T$  Quantorenelimination für einfache Existenzformeln.

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi & = & \exists y & \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n]}_{\text{umschreiben in DNF}} & \sim & \exists y(\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n) & \sim & \underbrace{\bigvee_{i=1}^n \exists y\psi_i}_{\text{primitive Existenzformel}} \\ \text{einfache Existenzformel} & & & & & & & \end{array}$$

Zu zeigen: Jede beliebige Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  ist äquivalent zu einer quantorenfreien Formel modulo  $T$ .

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] \underset{\text{pränexe Normalform}}{\sim} Q_1 y_1 \dots Q_m y_m \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\text{quantorenfrei}}, \text{ wobei } Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

Induktion über  $m$ :

$m = 0$ : ✓

$m = 1$ :  $\varphi = Q \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y]}_{\text{quantorenfrei}}$

$Q = \exists$   $\varphi$  einfache Existenzformel ✓

$Q = \forall$   $\varphi \sim \neg \underbrace{\exists y \neg \psi}_{\substack{\text{einfache} \\ \text{Existenzformel}}} \rightarrow \text{eliminieren} \rightarrow \checkmark$

$m - 1 \rightarrow m$ :  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots \underbrace{Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\varphi'[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}$ .  $\varphi'$  ist eine einfache Existenzformel, wir eliminieren also:

$\underbrace{m-1 \text{ viele Quantoren}} \underbrace{\Theta[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}_{\text{quantorenfrei}}$

$\Rightarrow$  Induktion

□

### Beispiel 3.6

Sei  $\mathcal{K} = \{\text{unendliche Mengen}\}$ . Diese Klasse lässt sich definieren durch die Theorie  $T = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j=1}^n \neg(x_i \dot{=} x_j))\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Diese Theorie ist vollständig! Betrachte jetzt die  $\exists^\infty x$  definierbaren Mengen:

$$\{b \in A \mid \mathcal{A} \models \underbrace{\varphi}_{\text{quantorenfrei}}[b, a_1, \dots, a_m]\}$$

$\updownarrow$   
endlich oder koendlich

### Lemma 3.7 (Trennungslemma)

Seien  $T_1$  und  $T_2$  zwei  $\mathcal{L}$ -Theorien, und  $\Delta$  eine Kollektion von  $\mathcal{L}$ -Aussagen, welche unter endlichen Konjunktionen und Disjunktionen abgeschlossen ist. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- (1) Es gibt eine Aussage  $\chi \in \Delta$  mit  $T_1 \models \chi$
- (2) Für alle  $\mathcal{A} \models T_1, \mathcal{B} \models T_2$  gibt es eine Aussage  $\chi \in \Delta$  mit  $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg \chi$

### Bemerkung 3.8

Das ganze ist trivial für inkonsistente Theorien.

*Beweis.*  $1 \Rightarrow 2$ : trivial!

$2 \Rightarrow 1$ : OBdA  $T_1, T_2$  konsistent. Sei  $\mathcal{A} \models T_1$ , setze  $\Sigma_{\mathcal{A}} = \{\chi, \chi \text{ Aussagen in } \Delta \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$ .

Betrachte jetzt  $T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}}$ . Ist diese Theorie konsistent? Nein: Wäre  $\mathcal{B} \models T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}} \hookrightarrow$  es gibt  $\chi \in \Delta$  mit  $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi \Rightarrow \chi \in \Sigma_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{B} \models \chi$ . Widerspruch!

Das bedeutet (wegen Kompaktheit), dass es  $\chi_1, \dots, \chi_r \in \Sigma_{\mathcal{A}}$  gibt mit  $T_2 \cup \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$  inkonsistent.

$$\hookrightarrow T_2 \models \bigvee_{i=1}^r \neg\chi_i \Rightarrow T_2 \models \neg\left(\underbrace{\bigwedge_{i=1}^r \chi_i}_{=\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta}\right)$$

Das heißt für jedes  $\mathcal{A} \models T_1$  gibt es  $\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta$  mit  $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}}$  und  $\mathcal{A} \models \chi_{\mathcal{A}}$ .

Sei nun  $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}}\}_{\mathcal{A} \models T_1} \overset{5}{\hookrightarrow}$  inkonsistent nach Konstruktion.

$\overset{\text{Kompaktheit}}{\Rightarrow}$  es existieren  $\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}$  mit  $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}\}$  inkonsistent. Also:

$$T_1 \models \bigvee_{j=1}^n \chi_{\mathcal{A}_j} =: \chi \in \Delta$$

$T_1 \models \chi$ . Wollen zeigen:  $T_2 \models \neg\chi$ . Aber  $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}_i}, 1 \leq i \leq n$ . □

### Folgerung 3.9

Zwei Theorien  $T_1$  und  $T_2$  werden von einer quantorenfreien Aussage getrennt, wenn je zwei Modelle  $\mathcal{A} \models T_1$  und  $\mathcal{B} \models T_2$  von einer quantorenfreien Aussage getrennt werden.

$$\rightarrow \exists \chi \text{ quantorenfrei} : \mathcal{A} \models \chi \text{ und } \mathcal{B} \models \neg\chi$$

### Satz 3.10

Sei  $T$  eine Theorie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $T$  hat Quantorenelimination.
- (2) Gegeben Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  und endlich erzeugte Unterstrukturen  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ ,  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} = \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ , wobei  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$  und  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  eine Formel. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow {}^6\mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

- (3) Gegeben Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  mit isomorph erzeugten Unterstrukturen  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$  wie in (2) und für alle  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  primitive Existenzformel, gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

<sup>5</sup>Ist das überhaupt eine Menge? Es genügt die Einschränkung bis auf Isomorphie, das sollte reichen. . .

<sup>6</sup>Durch vertauschen von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  gilt hier sogar  $\Leftrightarrow$ .

### 3 Quantorenelimination

Ferner, falls  $T$  konsistent ist, (1) gilt und je zwei Modelle von  $T$  isomorphe endlich erzeugte Unterstrukturen besitzen, dann ist  $T$  vollständig mit Quantorenelimination.

#### Bemerkung 3.11

Wie benutzen wir diesen Satz? Letztlich wollen wir Back-&-Forth-Äquivalenz zeigen.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ .  $T$  hat Quantorenelimination  $\leftarrow$  es gibt  $\psi[x_1, \dots, x_n]$  quantorenfrei mit:  $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \psi[\vec{x}])$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \mathcal{A} \models T & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{C} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \psi \text{ quantorenfrei} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{D} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{C} \approx \mathcal{D} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{B} \models T &
 \end{array}$$

(2)  $\Rightarrow$  (3): klar.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Um zu zeigen, dass  $T$  Quantorenelimination besitzt, genügt es nur primitive Existenzformeln  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  zu betrachten.

Seien dazu  $e_1, \dots, e_n$  neue Konstantenzeichen. Betrachte die Sprache  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ , sowie die Theorien  $T_1 = T \cup \{\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$  und  $T_2 = T \cup \{\neg\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$ .

Falls  $T_1$  und  $T_2$  durch eine quantorenfreie Aussage  $\underbrace{\psi[e_1, \dots, e_n]}_{\substack{\text{quantorenfreie} \\ \mathcal{L}\text{-Formel}}}$  in  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$  trennbar sind, so folgt:

$$\begin{array}{ll}
 T \cup \{\varphi[\vec{e}]\} \models \psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\} \models \neg\psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\neg\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 \Rightarrow T = (\psi[\vec{e}] \rightarrow \varphi[\vec{e}]) & \Rightarrow \underset{\text{Aufgabe}^7}{T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}})}
 \end{array}$$

Sonst, falls also  $T_1, T_2$  nicht trennbar sind, gibt es zwei Modelle  $\mathcal{A} \models T_1 \cup \{\varphi[\vec{e}]\}, \mathcal{B} \models T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\}$ , welche alle quantorenfreien Aussagen in  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$  gleich erfüllen.

Seien  $c_1 = e_1^{\mathcal{A}}, d_i = e_i^{\mathcal{B}}$ . Betrachte jetzt  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{A} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$  und  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{B} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$ . Es gilt:  $\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$  und  $\mathcal{B} \models \neg\varphi[d_1, \dots, d_n]$ .

<sup>7</sup>weil  $e_1, \dots, e_n$  neue Konstantenzeichen sind

## 4 Beispiele klassischer Theorien

Um einen Widerspruch zu bekommen genügt es zu zeigen, dass  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}, c_i \mapsto d_i$ .

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow D : \\ \underbrace{t^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n]}_{\mathcal{L}\text{-Term}} &\mapsto t^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \end{aligned}$$

Ist diese Abbildung wohldefiniert?

$$\begin{aligned} \text{Angenommen } t_1^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] &= t_2^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] \\ \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{als } \mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}\text{-Struktur}} &\models \underbrace{(t_1[e_1, \dots, e_n] \dot{=} t_2[e_1, \dots, e_n])}_{\text{quantorenfreie Aussage}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{B} &\models (t_1[\vec{e}] \dot{=} t_2[\vec{e}]) \\ \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] &= t_2^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \\ \longrightarrow &\text{wohldefiniert und injektiv} \end{aligned}$$

induktiv über den Aufbau zeigen wir: Das ist ein Isomorphismus.

Zu „ferner“: Angenommen  $T$  hat Quantorenelimination, ist konsistent und je zwei Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  haben isomorphe, endlich erzeugte Unterstrukturen

$$\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \overset{\subseteq \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \overset{\subseteq \mathcal{B}}{\simeq} \overset{c_i \mapsto d_i}{\mathcal{D}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$$

$T$  ist vollständig  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ . Sei  $\chi$  eine  $\mathcal{L}$ -Aussage und schreibe  $\chi = \chi[x_1, \dots, x_n]$ .

$$\mathcal{A} \models \chi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \chi[c_1, \dots, c_n] \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \models \chi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \chi$$

□

## 4 Beispiele klassischer Theorien

### Beispiel 4.1

$T = \exists^\infty$  hat Quantorenelimination und ist vollständig.

### Beispiel 4.2 (DLO)

DLO (dichte lineare Ordnung ohne Randpunkte). Sei  $\mathcal{L} = \{<\}$ .

$$\begin{aligned} \text{DLO} = & \{ \forall x (\neg x < x) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y ((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \exists z ((x < y) \rightarrow (x < z < y)) \} \\ & \cup \{ \forall x \exists u \exists v (u < x < v) \} \\ & \cup \{ \exists x (x = x) \} \end{aligned}$$

Diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination. Es gibt zwei Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

(1)

$$\begin{aligned}\varphi[x_1, \dots, x_n] &= \exists y \left( \bigwedge_i \overbrace{\Theta_i[x_1, \dots, x_n, y]}^{\text{atomar oder Negation davon}} \right) \\ &= \exists y (\psi_1[x_1, \dots, x_n] \wedge \bigwedge_i \bigwedge_{\substack{x_i=y \\ x_i \neq y \\ x_i < y \\ y < x_i}} \dots)\end{aligned}$$

$$x_i = y \wedge x_j = y \Leftrightarrow x_i = x_j$$

$$x_i = y \wedge y < x_j \Leftrightarrow x_i < x_j \longrightarrow \text{induktiv lassen sich alle Quantoren eliminieren}$$

(2) Gegeben  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$ , mit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Isomorphismus und  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \text{DLO}$ .

OBdA wähle  $c_1 < c_2 < \dots < c_n \xrightarrow{F} d_1 < d_2 < \dots < d_n$ .  $\longrightarrow F$  in Back-&-Forth-System.

1. Fall:  $a < c_1 \rightarrow$  wähle  $b < d_1$  in  $\mathcal{B}$ , weil  $d_i$  kein Randpunkt ist.
2. Fall:  $a > c_n \rightarrow$  wähle  $b < c_n$  in  $\mathcal{B}$ , weil  $d_i$  kein Randpunkt ist.
3. Fall:  $\exists i \mid c_i < a < c_{i+1} \rightarrow$  wähle  $b$  zwischen  $d_i$  und  $d_{i+1}$  weil  $\mathcal{B}$  dicht ist.

Vollständigkeit folgt, weil Unterstruktur und Punkt zu Punkt.

#### Beispiel 4.3 (Vektorraum)

Sei  $K$  ein Körper,  $\mathcal{L}_{\text{VR}} = \{0, +, f_\lambda\}_{\lambda \in K}$ . Dann ist die Theorie  $T \underset{\substack{\parallel \\ \text{unendliche} \\ K\text{-VR}}}{=} \{ \forall x \forall y \forall z \dots \} \dots$ <sup>8</sup>

vollständig und hat Quantorenelimination.

Wie zuvor gibt es zwei verschiedene Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

(1) Betrachte die folgende primitive Existenzformel:

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \left( \bigwedge_{\text{endlich}} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_y \dot{=} 0) \wedge \bigwedge_{\text{endlich}} \neg(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n \dot{=} 0) \right)$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

<sup>8</sup>diese Theorie ist axiomatisierbar, für eine beispielhafte Axiomatisierung vergleiche Klausur zu mathematische Logik im SS 2019.

#### 4 Beispiele klassischer Theorien

$$(1) \text{ Alle } \lambda \text{ vor der Variable } y \text{ sind Null} \rightarrow \underbrace{\bigwedge_{\text{endlich}} \lambda x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0}_{\psi[x_1 \dots x_n]}$$

(2) *Es gibt ein  $\lambda \neq 0$ . Dann gilt OBdA:  $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ . Ersetze jetzt jedes Vorkommen von  $y$  durch  $\tilde{\lambda}_1 x_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n x_n$ . Erhalte eine quantorenfreie Bedingung in  $x_1, \dots, x_n$ .*

(2) (semantisch)

Ansatz:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & ? & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \\ \langle 2 \rangle & \simeq & \langle (3, 7) \rangle \end{array}$$

Wir brauchen also:  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  unendlichdimensional, um ein Back & Forth-System zu konstruieren. Es sei dazu

$$\tilde{\mathcal{A}} \succeq \mathcal{A} \supset \langle c_1, \dots, c_n \rangle \simeq \langle d_1, \dots, d_n \rangle \subset \mathcal{B} \preceq \tilde{\mathcal{B}}$$

für  $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$  unendlichdimensional.

Insbesondere gilt jetzt auch:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$$

Angenommen  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle \xrightarrow{F} \langle d_1, \dots, d_n \rangle$  liegt in einem Back & Forth-System zwischen  $\tilde{\mathcal{A}}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Dann folgt insbesondere auch:

$$\tilde{\mathcal{B}} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

Es ergeben sich also die folgenden beiden Fragen:

(1) Finden wir ein Back & Forth-System zwischen  $\tilde{\mathcal{A}}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}$ ?

Angenommen also wir haben  $\tilde{\mathcal{A}}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}$  bereits konstruiert. Zeige: Es gibt ein Back & Forth-System.

$c \in \text{UR}$ : trivial.

$c \notin \text{UR}$ :  $\dim_K \tilde{\mathcal{B}} = \infty \geq n + 1 \rightarrow$  es gibt ein  $d \notin \langle d_1, \dots, d_n \rangle \Rightarrow G$  die Erweiterung

$$\begin{array}{ccc} \langle c_1, \dots, c_n \rangle & \longrightarrow & \langle d_1, \dots, d_n \rangle \\ c_i & \longmapsto & d_i \\ c & \longmapsto & d \end{array}$$



(2) Zur Existenz von  $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ :

So funktioniert es nicht:  $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{ \exists x \exists y \neg(\lambda x + \mu y \dot{=} 0) \}_{\substack{\lambda, \mu \in K \\ (\lambda, \mu) \neq (0,0)}}$ .

Seien  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  neue Konstantenzeichen.

$$\underbrace{\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{ \neg \sum_i \lambda_i e_i \dot{=} 0 \}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}}}_{\text{endlich konsistent}}_{n \in \mathbb{N}}$$

Zur Vollständigkeit: Das endliche Erzeugnis zweier nicht-trivialer Vektoren ist isomorph, somit folgt Vollständigkeit.

**Beispiel 4.4** (ACF)

Wir betrachten jetzt die Theorie algebraisch abgeschlossener Körper (ACF) in der Ringsprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ .

$$\text{ACF} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Körperaxiome} \\ \{ \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists y (y^k + x_{k-1}y^{k-1} + \dots + x_1y + x_0 \dot{=} 0) \}_{k \geq 1} \end{array} \right.$$

ACF hat Quantorenelimination, ist aber nicht vollständig. Die Vervollständigungen sind

$$\underbrace{\text{ACF}_0}_{1+1+\dots+1 \dot{=} 0} \quad \text{und} \quad \underbrace{\text{ACF}_p}_{\substack{1+\dots+1 \dot{=} 0 \\ p\text{-Mal}}} \quad \text{für jede Primzahl } p.$$

**Satz 4.5** (Kurzeinführung Galois'sche Theorie)

*Beweis* ACF. Betrachte OBdA die Abbildung

$$F = \text{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle) \longrightarrow \text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$$

Fall 1:  $a$  ist algebraisch über  $K$

$\hookrightarrow$  sei  $m_a(T)$  das Minimalpolynom von  $a$  über  $K$ .  $F(m_a)(T)$  ist ein normiertes Polynom über  $\text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle) \subset B$ .

$B$  ist algebraisch abgeschlossen  $\Rightarrow$  es gibt  $b$  in  $B$  mit  $F(m_a)(b) = 0 \xRightarrow{\text{Galoistheorie}} F$  lässt sich erweitern.

Fall 2:  $a$  ist transzendent über  $K = \text{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle)$ .

Wenn wir ein  $b \in B$  finden, welches transzendent über  $\text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$  ist

$$\hookrightarrow \text{Ring}_A(K, a) \simeq \text{Ring}_B(F(K), b)$$

Ziel: Wir brauchen  $\mathcal{A} \preceq \tilde{\mathcal{A}}$  mit unendlich vielen Elementen, welche algebraisch unabhängig sind.

$$\underbrace{\text{Diag}(A) \cup \{\neg(B(e_1, \dots, e_n) \doteq 0)\}_{P \in A[T_1, \dots, T_n] \setminus \{0\}}}_{\text{endlich konsistent}}_{P(e_1, \dots, e_n) \neq 0}$$

□

## 5 Ultrafilter & der Satz von Ax

Anwendung: Wir wollen eine Aussage der folgenden Art bekommen: Sei  $f : \mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C}$ .  
 $\rightarrow f$  ist surjektiv, aber nicht injektiv.

**Satz 5.1** (Ax)

Sei  $f : \mathbb{C}^n \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C}^n$  eine polynomiale<sup>9</sup> injektive Abbildung. Dann ist  $f$  surjektiv.

Motivation: Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p$ . Für einen Körper der Charakteristik  $p$  bekommen wir dann:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{g}} \xrightarrow{\text{wirkt}} \underbrace{K}_{\substack{\text{Körper der} \\ \text{Charakteristik} \\ p}} \longrightarrow K$$

$$x \longmapsto \underbrace{1 + \dots + 1}_{g\text{-Mal}} + x$$

$$\rightarrow h + (g + x) = (h + g) + x$$

Für einen Körper der Charakteristik 0:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{k}} \xrightarrow{\text{wirkt}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\underbrace{\mu_p}_{\substack{p\text{-te Einheits-} \\ \text{wurzel in } \mathbb{C}}} = \{e^{\frac{2\pi i k}{p}}\}_{0 \leq k < p} \quad z \longmapsto \omega z$$

$$\rightarrow \omega_1(\omega \cdot z) = (\omega_1 \omega) \cdot z$$

**Satz 5.2** (Lefschetz'sches Prinzip)

Eine Aussage  $\chi$  in der Ringsprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$  gilt für  $\mathbb{C}$  genau dann, wenn es unendlich viele Primzahlen  $p$  derart gibt, dass  $\chi$  in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik  $p$  gilt.

<sup>9</sup>polynomial bedeutet, dass jede Koordinate der Abbildung durch Polynome gegeben ist.

*Beweis von Satz 5.1 (Ax).* Sei  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  injektiv. Die Aussage „ $f$  injektiv  $\Rightarrow f$  surjektiv“ lässt sich als  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Aussage schreiben.

D. h. es genügt zu zeigen, dass diese Aussage für alle Körper  $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$  gilt.

Was ist  $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ ? Ein algebraischer abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$ .

Galoistheo.

$$\mathbb{F}_p^{\text{alg}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n, \text{ wobei } F_n \subset F_{n+1} \text{ endliche Körper mit Charakteristik } p.$$

$$F_1 = \{0, 1\}$$

$$F_2 = \dots$$

$$\vdots$$

Sei nun  $g : (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n \rightarrow (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$  eine surjektive polynomiale Abbildung.

Zeige:  $g$  ist surjektiv. Sei  $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$ . Dann gibt es ein  $N$ , sodass  $b_i \in \mathbb{F}_n$  für  $\mathbb{F}_n$  endlich.

Ferner können wir  $N$  so wählen, dass alle Koeffizienten aus  $g$  in  $\mathbb{F}_n$  liegen.

$$\begin{array}{ccc} g|_{\mathbb{F}_N^n} : \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} & \longrightarrow & \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} \text{ ist injektiv (geerbt)} \\ & & \Downarrow \text{endlich} \\ & & \text{surjektiv} \end{array}$$

□

*Beweis Lefschetz'sches Prinzip (Satz 5.2).* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $\chi$  eine  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Aussage derart, dass  $\mathbb{C} \models \chi$ . Dann ist  $\underbrace{\text{ACF}_0}_{\text{alle elementar äquivalent}} \cup \{\neg\chi\}$  inkonsistent, weil  $\text{ACF}_0$  vollständig ist.

Dann gibt es eine endliche Teilmenge  $T_0 \subset \text{ACF}_0 \cup \{\neg\chi\}$ , welche inkonsistent ist.  
 $\Rightarrow$  Es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$  sodass:

$$T_0 \subset \underbrace{\text{ACF} \cup \{\neg(\underbrace{1 + \dots + 1}_k \doteq 0)\}_{k < N}}_{\text{inkonsistent}} \cup \{\neg\chi\}$$

Für  $p > N$  eine Primzahl:  $\text{ACF}_p \models \chi$

„ $\Leftarrow$ “  $\rightsquigarrow$  Ultrafilter und Satz von Łoś

□

Exkurs: Sei im Folgenden  $I \neq \emptyset$ .

**Definition 5.3**

Ein Ultrafilter  $\mathcal{U}$  auf  $I$  ist ein endlich additives Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \{0, 1\}$$

**Bemerkung 5.4**

Die Definition entspricht der von Blatt 1 Aufgabe 3, denn:

- (1)  $\mu_{\mathcal{U}}(I) = 1, \mu_{\mathcal{U}}(\emptyset) = 0$ .
- (2)  $\mu_{\mathcal{U}}(X) = 1 \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$   
 $X \subset Y \subset I$
- (3) Angenommen  $\mu_{\mathcal{U}}(X) = \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$  aber  $\mu_{\mathcal{U}}(X \cap Y) = 0$ . Dann gilt  $X = X \setminus Y \dot{\cup} X \cap Y \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(X \setminus Y) = 1$  und  $\mu_{\mathcal{U}}(Y \setminus X) = 1$ , sowie  $I \supset X \cup Y = (X \setminus Y) \dot{\cup} (Y \setminus X) \dot{\cup} (X \cap Y) \rightsquigarrow \mu_{\mathcal{U}}(I) = 1 \geq 1 + 1 + 0$ , ein Widerspruch.
- (4) Gegeben  $X \subset I$  entweder  $X \in \mathcal{U}$  oder  $I \setminus X \in \mathcal{U}$   
 $\mu_{\mathcal{U}}(X)=1 \qquad \qquad \mu_{\mathcal{U}}(I \setminus X)=1$

**Definition 5.5**

Ein Hauptultrafilter ist ein Maß der Form  $\delta_x$  für ein  $x \in I$ .

**Definition 5.6**

Falls  $I$  unendlich ist, so gibt es generische/reiche Ultrafilter, nämlich die Ultrafilter, welche alle koendlichen Mengen enthalten.

**Definition 5.7**

Angenommen  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  ist eine  $\mathcal{L}$ -Struktur. Sei ferner  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter. Definiere eine Äquivalenzrelation<sup>10</sup> auf  $\prod_{\mathcal{U}} A_i$ :

$$\underbrace{\prod_{\mathcal{U}} A_i}_{\text{kartesisches Produkt}}$$

$$(a_i)_{i \in I} \sim_{\mathcal{U}} (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{U} \iff \mu_{\mathcal{U}}(\{i \in I \mid a_i = b_i\}) = 1$$

**Definition 5.8**

Sei  $\prod_{\mathcal{U}} A_i$  die Menge  $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$ . Wir definieren Interpretationen der Symbole aus  $\mathcal{L}$  auf

$$\prod_{\mathcal{U}} A_i:$$

- Sei  $c \in \mathcal{L}$  ein Konstantenzeichen. Definiere:

$$c^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} = (c^{\mathcal{A}_i})_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

---

<sup>10</sup>vergleiche dazu Blatt 1, Aufgabe 3

- Sei  $f \in \mathcal{L}$  ein  $n$ -stelliges Funktionszeichen. Definiere:

$$f^{\prod_{\mathcal{U}} A_i}([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}) = (f^{\mathcal{A}_i}(a_1^i, \dots, a_n^i))_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

Ist das wohldefiniert? Ja, denn fast überall gleich.

- Sei  $\mathcal{R}$  ein  $m$ -stelliges Relationszeichen auf  $\mathcal{L}$ . Definiere:

$$([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_m]_{\mathcal{U}}) \in \mathcal{R}^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} \iff \{i \in I \mid (a_1^i, \dots, a_m^i) \in \mathcal{R}^{\mathcal{A}_i}\} \in \mathcal{U}$$

Wenn  $\mathcal{U}$  ein Hauptfilter ist, dann ist er erzeugt vom Element  $\{i_0\}$ .

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}\text{-Struktur} \\ \overbrace{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i}^{\varphi} \rightarrow \mathcal{A}_{i_0} \text{ ist ein Isomorphismus} \\ (a_i)_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}} \mapsto a_{i_0} \end{array}$$

### Definition 5.9

Wenn  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter ist, dann ist  $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}$  die Ultrapotenz.

### Beispiel 5.10

Sei  $\mathcal{U}$  ein reicher/generischer Ultrafilter auf  $\mathbb{N}$ . Betrachte  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$ .

$$\mathcal{N}^{\mathcal{U}} \ni (1, 2, 3, \dots) / \sim_{\mathcal{U}} > (1, 1, 1, \dots) / \sim_{\mathcal{U}}$$

### Satz 5.11 (Satz von Łoś)

Sei  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $I$ ,  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen,  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel und  $[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}} \in \prod_{\mathcal{U}} A_i$ . Dann gilt:

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \iff \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1^i, \dots, a_n^i]\} \in \mathcal{U}$$

*Beweis.* Induktiv über den Aufbau von  $\varphi$ . Sei  $\varphi = (t_1 \dot{=} t_2)$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i &\models (t_1[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \dot{=} t_2[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}]) \\ &\iff t_1^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i} [[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \dot{=} t_2^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i} [[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \\ &\stackrel{\text{induktiv über den Aufbau}}{\iff} \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models t_1[a_1^i, \dots, a_n^i] \dot{=} t_2[a_1^i, \dots, a_n^i]\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

□

**Folgerung 5.12**

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $I$ . Betrachte  $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}$ . Das ist eine elementare Erweiterung von  $\mathcal{A}$  bezüglich der Abbildung  $A \longrightarrow \prod_{\mathcal{U}} A$ .  
 $a \longmapsto (a)_{i \in I / \sim_{\mathcal{U}}}$

Einbettung,  
injektiv

*Beweis.* Sei  $\varphi$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Zu zeigen ist:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{A}_i^{\mathcal{U}} \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}]$$

„ $\Rightarrow$ “: Mit Satz von Łoś gilt:

$$\mathcal{A}_i^{\mathcal{U}} \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \iff \{i \in I \mid \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\} \in \mathcal{U}$$

Da dieser Ausdruck jedoch der gesamten Menge  $I$  entspricht, folgt die Behauptung direkt.

„ $\Leftarrow$ “: Die leere Menge liegt nicht in  $\mathcal{U}$ , also gibt es  $i$  sodass die Formel gilt, da diese jedoch von  $i$  unabhängig ist, gilt sie immer.  $\square$

*Beweis Lefschetz'sches Prinzip (5.2) „ $\Leftarrow$ “.* Sei

$$S = \left\{ p \text{ Primzahl} \mid \begin{array}{l} \text{ein algebraisch abgeschlossener Körper mit} \\ \text{Charakteristik } p \text{ erfüllt die Aussage } \chi \end{array} \right\}$$

Zeige:  $S$  ist unendlich. Sei  $P \subset \mathbb{N}$  Primzahlen. Betrachte jetzt

$$\mathcal{B} = \{X \cap S \subset P \mid X \subset P \text{ koendlich}\} \quad (4)$$

Ist  $\mathcal{B}$  eine Filterbasis?  $X \cap S = \emptyset$  ist endlich  $\iff S \subset P \setminus X$  unendlich, ein Widerspruch.

Weiter gilt  $(X_1 \cap S) \cap (X_2 \cap S) = \underbrace{(X_1 \cap X_2)}_{\text{koendlich}} \cap S$ .

$\xRightarrow{\text{Blatt 1}}$  es gibt einen Ultrafilter, welcher alle Elemente aus  $\mathcal{B}$  enthält.

Sei im Weiteren  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $P$ , welcher  $\mathcal{B}$  enthält.  $X \cap S \in \mathcal{U}$  ist für alle  $X \subset P$  koendlich.

$\hookrightarrow$   $\mathcal{U}$  ist reich (kein Hauptultrafilter). Für  $p_0 \in P$  ist  $P \setminus \{p_0\}$  koendlich.

$\Rightarrow P \setminus \{p_0\} \cap S \in \mathcal{U}$ .

$\hookrightarrow S \in \mathcal{U}$

## 5 Ultrafilter & der Satz von Ax

Sei  $K = \prod_{\mathcal{U}} K_p$ , wobei  $K_p$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$  ist derart, dass

$$\begin{cases} K_p \models \chi & p \in S \\ \text{egal bspw. } \mathbb{F}_p^{\text{alg}} & p \notin S \end{cases}$$

$$(1) K \models \text{ACF}_0$$

$$(2) K \models \chi, \text{ weil } \{p \in P \mid K_p \models \chi\} \supset S \in \mathcal{U}$$

$\text{ACF}_0$  ist vollständig  $\Rightarrow \mathbb{C} \models \chi$ . □

**Satz 5.13** (Kompaktheitssatz)

Eine Theorie  $T$  ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent ist.

*Beweis.* OBdA ist  $T$  unendlich. Sei  $I = \{\emptyset \neq S \subset T \text{ endlich}\}$ . Für  $s \in I$  gibt es eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}_s$ , sodass  $\mathcal{A}_s \models \chi$  für jedes  $\chi \in s$ . Sei weiter

$$B_s = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für jedes } \chi \in s\}$$

Ist  $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s \in I}$  eine Filterbasis?

$$(1) \emptyset \neq B_s \ni s$$

$$(2) B_{s_1} \cap B_{s_2} = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für alle } \chi \text{ aus } s_2\} = B_{s_1 \cup s_2} \in \mathcal{B}!$$

Sei  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $I$ , sodass  $B_s \in \mathcal{U}$  für jedes  $\emptyset \neq s \subset T$  endlich. Sei  $\mathcal{A} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_s$ .

Zu zeigen ist:  $\mathcal{A} \models T$  (sei  $\chi \in T$ , zeige  $\mathcal{A} \models \chi$ ).

$$\text{Satz von Łoś} \quad \underbrace{\{s \in T \mid \mathcal{A}_s \models \chi\}}_{B_{\{\chi\}}} \in \mathcal{U}$$

□

# Teil II

## Typen und Saturation

### 6 Typen

Sei im Folgenden  $\mathcal{L}$  eine Sprache und  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur.

#### Definition 6.1

Ein partieller Typ  $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$  mit Parametern aus  $B$  ist eine Kollektion von Formeln in der Sprache  $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$ , welche in der (kanonischen)  $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  endlich erfüllbar ist, das heißt für alle  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \Sigma$  gibt es ein Tupel  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  mit  $\mathcal{A} \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n)$  für  $1 \leq i \leq m$ .

$\mathcal{A}$  realisiert  $\Sigma$ , falls es ein Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  gibt, sodass  $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$  für alle  $\varphi \in \Sigma$ . Sonst vermeidet  $\mathcal{A}$  den partiellen Typ  $\Sigma$ .

#### Beispiel 6.2

Betrachte  $(\mathbb{R}, 0, <)$ . Sei  $\Sigma(x) = \{0 < x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}}$  ein partieller Typ.

Wird  $\Sigma$  realisiert oder vermieden?  $\rightsquigarrow$  vermieden

Sei jedoch  $\Sigma' = \{\sqrt{2} \leq x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > \sqrt{2}}}$ .  $\rightsquigarrow$  realisiert von  $\sqrt{2}$

Betrachte nun  $\Sigma$  auf  $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{R}$ . Hier realisiert  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$  den partiellen Typen  $\Sigma$ !

#### Bemerkung 6.3

Sei  $\mathcal{A}$  eine unendliche Struktur. Dann gibt es immer einen partiellen Typen, der vermieden wird:  $\{\neg(x \doteq a)\}_{a \in A}$ .

#### Bemerkung 6.4

Sei  $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$  ein partieller Typ über  $C$  in  $\mathcal{A}$ . Dann gibt es eine elementare Erweiterung  $\underbrace{\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}}_{\mathcal{L} \cup \{c\}_{c \in C}\text{-Struktur}}$ , welche  $\Sigma$  realisiert.

*Beweis.* Seien  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  neue Konstantenzeichen. Schreibe  $T = \text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \Sigma(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ .  $T$  ist eine  $\mathcal{L}_A \cup \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ -Theorie. Falls  $\mathcal{B} \models T$ , dann ist  $\{\zeta_1^{\mathcal{B}}, \dots, \zeta_n^{\mathcal{B}}\}$  eine Realisierung von  $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ .



## 6 Typen

*Zu zeigen ist:  $T$  endlich konsistent.*

$T_0 \underset{\text{endlich}}{\subset} T \longrightarrow T_0 \subset \text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\varphi_i[\zeta_1, \dots, \zeta_n]\}_{i \in M}$  für  $\varphi_1, \dots, \varphi_M \in \Sigma$ ,  $M \in \mathbb{N}$ .  
 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$  ist in  $\mathcal{A}$  realisierbar von  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ .  
 $\longrightarrow$  Setze  $\tilde{\mathcal{A}}$  die  $\mathcal{L}_A \cup \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ -Struktur aus  $\mathcal{A}$  mit Interpretationen  $\zeta_i^{\tilde{\mathcal{A}}} = a_i$ .  $\square$

### Definition 6.5

Ein  $n$ -Typ über  $C \subset A$  in der Struktur  $\mathcal{A}$  ist ein partieller Typ in der Variable  $x_1, \dots, x_n$  über  $C$ , welcher maximal endlich erfüllbar ist bezüglich der Inklusion zwischen partiellen Typen über  $C$ .

$S_n^{\mathcal{A}}(C)$  ist die Menge aller Typen in  $\mathcal{A}$  über  $C$ .

$$S^{\mathcal{A}}(C) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^{\mathcal{A}}(C)$$

### Bemerkung 6.6

$S_n^{\mathcal{A}}(C) \neq \emptyset$ . Gegeben  $b_1, \dots, b_n \in A$ , setze

$$\text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) = \{\varphi[x_1, \dots, x_n] \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel} \mid \mathcal{A} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]\}$$

ist ein  $n$ -Typ über  $C$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n] \notin \text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C)$ . Zu zeigen ist:  $\text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) \cup \{\varphi[x_1, \dots, x_n]\}$  nicht endlich erfüllbar. Aus der Annahme folgt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \not\models \varphi[b_1, \dots, b_n] \\ \implies & \mathcal{A} \models \neg \varphi[b_1, \dots, b_n] \\ \implies & \neg \varphi[x_1, \dots, x_n] \in \text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) \\ \implies & \text{Widerspruch zur Maximalität} \end{aligned}$$

Sei nun  $p(x_1, \dots, x_n) \in S_n^{\mathcal{A}}(C)$ . Gegeben  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  eine  $\mathcal{L}_C$ -Formel. Zu zeigen ist:  $\varphi \in p$  oder  $\neg \varphi \in p$ .

Angenommen  $\varphi \notin p \implies p \subsetneq \underbrace{p(x_1, \dots, x_n) \cup \{\varphi[x_1, \dots, x_n]\}}_{\text{endlich erfüllbar}}$

$\rightsquigarrow$  Es gibt  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in p$  sodass  $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi$  in  $A$  nicht erfüllbar ist. Insbesondere

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \not\models \exists x_1, \dots, x_n \left( \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n] \right) \\ \iff & \mathcal{A} \models \neg \exists x_1, \dots, x_n \left( \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n] \right) \\ \iff & \mathcal{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \left( \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \neg \varphi[x_1, \dots, x_n] \right) \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass  $p \subseteq p(x_1, \dots, x_n) \cup \{\neg \varphi[x_1, \dots, x_n]\}$  endlich erfüllbar ist. Sei dazu  $\psi_1, \dots, \psi_r \in p$ . Wir wollen zeigen:

$$\mathcal{A} \models \exists x_1, \dots, x_n \left( \bigwedge_{j=1}^r \psi_j[x_1, \dots, x_n] \wedge \neg \varphi[x_1, \dots, x_n] \right)$$

## 6 Typen

$\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_r \in p$ ,  $p$  ist insbesondere partieller Typ.

$\hookrightarrow$  es gibt  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  mit  $\mathcal{A} \models \bigwedge \varphi_i[a_1, \dots, a_k] \wedge \bigwedge \psi_j[a_1, \dots, a_n]$ .

$\implies \mathcal{A} \models \neg \varphi[a_1, \dots, a_n]$  □

Allgemeiner: Sei  $T$  eine konsistente Theorie in der Sprache  $\mathcal{L}$ . Definiere:  $n$ -Typ in  $T$  ist eine Kollektion von  $\mathcal{L}$ -Formeln in  $x_1, \dots, x_n$ , welche endlich konsistent mit  $T$  ist, es gilt also für  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$ :  $T \cup \{ \exists x_1, \dots, x_n (\bigwedge_{j=1}^m \varphi_j[x_1, \dots, x_m]) \}$  ist konsistent, und maximal bezüglich Inklusion mit dieser Eigenschaft:

Für  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $C \subset A$ . Dann sei  $T$  die  $\mathcal{L}_C$ -Theorie von  $\mathcal{A}$ .

$$\underbrace{p \in S_n(T)}_{n\text{-Typ von } T} \Leftrightarrow p \in S_n^{\mathcal{A}}(C)$$

### Folgerung 6.7

Gegeben eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  gibt es  $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$ , welche alle Typen in  $S^{\mathcal{A}}(A)$  realisiert.

*Beweis.* Sei  $\{p_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$  eine Aufzählung von  $S^{\mathcal{A}}(A)$ . Wir konstruieren eine elementare Kette  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}_1 \preceq \dots \preceq \mathcal{A}_\alpha \preceq \dots$  so, dass  $\underbrace{p_\alpha}_{\substack{\text{als part. Typ} \\ \text{über } A \text{ in } \mathcal{A}_\alpha}}$  in  $\mathcal{A}_{\alpha+1}$  realisiert wird.

$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ .  $\mathcal{A}_1$  wird mithilfe des Lemmas für  $p_0$  gewonnen. Falls  $\gamma$  eine Limeszahl ist: Setze  $\mathcal{A}_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \mathcal{A}_\beta$ . Sei  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{A}_\alpha$ . □

Achtung:  $\mathcal{B}$  kann sehr groß werden!

### Beispiel 6.8

$\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <) \rightsquigarrow$  Typ für jedes Element aus  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} r \in \mathbb{R} &\longrightarrow p_r \supset \{x < r\} \cup \{s < x\}_{s < r} \\ p_r &= \{x < r\} \cup \{s < x\}_{s < r} \\ p_{r+} &= \{x > r\} \cup \{s > x\}_{s > r} \end{aligned}$$

Ziel:  $S_n(T)$  ist ein kompakter, 0-dimensionaler Hausdorff topologischer Raum  $\rightsquigarrow$  „Sto-  
neraum der Theorie  $T$ “.

## 7 Exkurs: Einführung in die Topologie

Sei  $X$  eine Menge.

### Definition 7.1

Eine Basis  $\mathcal{B}$  einer Topologie auf  $X$  ist eine Kollektion von Teilmengen derart, dass

- (1)  $\forall x \in X$  gibt es  $B \in \mathcal{B}$  mit  $x \in B$
- (2)  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in B_1 \cap B_2$  gibt es ein  $B_3 \in \mathcal{B}$  mit  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

### Definition 7.2

$U \subset X$  ist *offen*, falls es für jedes  $x \in U$  ein  $B \in \mathcal{B}$  gibt mit  $x \in B \subset U$ .

Sei  $T = \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$ . Die Kollektion  $T$  erfüllt folgende Eigenschaften:

- (1)  $\emptyset, X \in T$
- (2)  $U_1, U_2 \in T \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$
- (3) Sei  $(U_i)_{i \in I} \subset T$ . Dann ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in T$

**Beispiel 7.3** (1) die euklidische Topologie auf  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

- (2) die triviale Topologie auf  $X$  ist  $\{\emptyset, X\}$
- (3) die diskrete Topologie auf  $X$  ist  $\mathcal{P}(X)$
- (4) die koendliche Topologie auf  $X$  wird gegeben als:

$$U \subset X \text{ offen} \iff |X \setminus U| \text{ endlich, oder } U = \emptyset$$

So ist beispielsweise  $(0, 1)$  offen in  $\mathbb{R}$  für die euklidische Topologie, aber nicht für die koendliche Topologie.

### Bemerkung 7.4

$$Y \subset X \text{ ist offen} \iff \forall x \in Y \quad \underbrace{\exists U \ni x}_{\substack{U \text{ ist eine} \\ \text{Umgebung von } x}} \quad \text{mit } x \in U \subset Y$$

### Definition 7.5

Eine Menge  $C \subset X$  ist *abgeschlossen*, falls das Komplement offen ist.

### Definition 7.6

Ein topologischer Raum  $(X, T)$  ist *0-dimensional*, falls es eine Basis der Topologie gibt, welche aus offen-abgeschlossenen<sup>11</sup> Mengen besteht.

---

<sup>11</sup>Englisch: „clopen“

### Beispiel 7.7

Die diskrete Topologie ist  $0$ -dimensional, weil sie als Basis  $\{\{x\}\}_{x \in X}$  hat.

### Definition 7.8 (Trennungseigenschaften)

Sei  $(X, T)$  ein topologischer Raum.

T1 Falls  $x \neq y \in X$  gibt es Umgebungen  $\overbrace{U^x}^{\substack{\text{offene Menge} \\ \text{die } x \text{ enthält}}}$ ,  $U^y$  mit  $x \in U^x \setminus U^y, y \in U^y \setminus U^x$ .

T2 (Hausdorff) falls  $x \neq y \in X$  gibt es  $U^x, U^y$  Umgebungen mit  $U^x \cap U^y = \emptyset$

### Bemerkung 7.9

$T2 \Rightarrow T1$

**Beispiel 7.10** • Ist die euklidische Topologie T2? Ja.

- Sei  $X$  unendlich. Ist die koendliche Topologie  $T$  Hausdorff? Nein. Ist sie T1? Ja:  
 $U^x = X \setminus \{y\}, U^y = X \setminus \{x\}$

### Bemerkung 7.11

$(X, T)$  T1  $\Rightarrow$  Jeder Punkt ist abgeschlossen!

*Beweis.* Zu zeigen:  $X \setminus \{x\}$  offen

Sei  $y \in X \setminus \{x\}$ . Wir suchen  $U^y \subset X \setminus \{x\}$ . Es gilt  $x \neq y \Rightarrow U^x, U^y$ , insbesondere  $x \notin U^y \Rightarrow U^y \subset X \setminus \{x\}$  □

### Definition 7.12

$(X, T)$  topologischer Raum.

- $s \in X$  ist *isoliert*, falls  $\{x\}$  offen ist.
- $A \subset X$  ist *dicht*, falls für jede offene Menge  $\emptyset \neq U \subset X$  ist  $A \cap U \neq \emptyset$
- $x \in X$  ist ein *Häufungspunkt von A*, falls für jede Umgebung  $U^x \ni x$  gilt, dass  $U^x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

### Bemerkung 7.13

Sei  $A \subset X$ .  $\underbrace{C}_{\substack{\text{dicht} \\ \supset A}} \subset X \Rightarrow C = X$

*Beweis.* Zu zeigen ist:  $C = X$ . Sonst ist  $\underbrace{X \setminus C}_{\neq \emptyset} \overset{A \text{ dicht}}{\Rightarrow} \underbrace{A \cap U}_{\substack{\subset C \cap (X \setminus C) = \emptyset}} \neq \emptyset$ , ein Widerspruch. □

**Bemerkung 7.14**

Eine Topologie auf  $X$  ist genau dann diskret, falls jeder Punkt isoliert ist.

Übung

**Bemerkung 7.15**

Eine Teilmenge  $C \subset X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $C$  alle ihre Häufungspunkte enthält.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “:  $x \notin C \Rightarrow x \in \underbrace{X \setminus C}_{\text{offen}}$  und  $(X \setminus C) \cap \underbrace{(C \setminus \{x\})}_{=C} = \emptyset \Rightarrow x$  kein Häufungspunkt von  $C$ .

„ $\Leftarrow$ “: Zu zeigen:  $X \setminus C$  offen. Sei dazu  $x \in X \setminus C$  beliebig.  $\Rightarrow x$  ist kein Häufungspunkt von  $C \Rightarrow \exists U^x \ni x$  mit  $U^x \cap \underbrace{C \setminus \{x\}}_{=C} = \emptyset \Rightarrow x \in U^x \subset X \setminus C$   $\square$

**Definition 7.16**

Seien  $X, Y$  topologische Räume. Die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist *stetig auf*  $x_0$ , falls für jede Umgebung  $V^{f(x_0)} \ni f(x_0)$  (in  $Y$ ) das Urbild  $f^{-1}(V)$  in  $X$  offen ist.  
 $f$  ist stetig, wenn sie auf jedem Punkt in  $X$  stetig ist.

**Bemerkung 7.17**

Es genügt Urbilder von Basiselementen zu betrachten. Warum? Sei  $V$  eine Umgebung von  $f(x_0)$ .

$\hookrightarrow$  es gibt  $B$  ein Basiselement mit  $f(x_0) \in B \subset V \Rightarrow x_0 \in \underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{offen}} \subset f^{-1}(V)$

**Bemerkung 7.18**

$f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn  $f^{-1}(C)$  abgeschlossen in  $X$  ist für alle  $C \subset Y$  abgeschlossen.

$$X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$$

**Beispiel 7.19**

$f : \begin{matrix} X \rightarrow Y \\ x \mapsto y_0 \end{matrix}$  konstant. Ist  $f$  stetig? Ja, denn  $f^{-1}(x) = \begin{cases} X & x = y_0 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$ .

**Definition 7.20**

Die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist  $\begin{matrix} \text{offen} \\ \text{abgeschlossen} \end{matrix}$ , falls für jede  $\begin{matrix} \text{offene} \\ \text{abgeschlossene} \end{matrix}$  Teilmenge  $\begin{matrix} U \\ C \end{matrix}$  von  $X$  das Bild  $\begin{matrix} f(U) \\ f(C) \end{matrix}$   $\begin{matrix} \text{offen} \\ \text{abgeschlossen} \end{matrix}$  ist.

**Bemerkung 7.21**

$\text{offen} \not\Rightarrow \text{abgeschlossen}$   
 $\not\Leftarrow$

**Beispiel 7.22**

Betrachte  $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie.  $\Pi$  ist offen, aber nicht abgeschlossen: Betrachte  $x \cdot y = 1 \mapsto x \neq 0$ .  
 $\begin{matrix} \text{abgeschlossen} & & \text{nicht} \\ & & \text{abgeschlossen} \end{matrix}$

**Beispiel 7.23**

Sei  $X \rightarrow Y$  konstant unendlich mit koendlicher Topologie. Diese Abbildung ist abgeschlossen, aber nicht offen.

**Definition 7.24**

Ein Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  ist eine bijektive stetige Abbildung derart, dass die  $f^{-1}$  auch stetig  
 mengentheoretische Abbildung  $\begin{matrix} \text{bzw.} \\ f \text{ offen} \\ \text{bzw.} \\ f \text{ abgeschlossen} \end{matrix}$  ist.

**Definition 7.25**

$(X, T)$  topologischer Raum. Die Menge  $K \subset X$  ist kompakt, falls jede offene Überdeckung  $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt: Es gibt  $i_1, \dots, i_n \in I$  mit  $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ .  
 $(X, T)$  ist kompakt, wenn  $X$  kompakt ist.

**Bemerkung 7.26** • Jede endliche Menge ist kompakt

- $f : X \rightarrow Y$  stetige Abbildung,  $K \subset X$  kompakt  $\Rightarrow f(K)$  kompakt in  $Y$ .

*Beweis.* Zu zeigen:  $f(K)$  kompakt.

$$\begin{aligned} f(K) \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{V_i}_{\text{offen in } Y} &\Rightarrow K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(V_i)}_{\text{offen}} \\ &\Rightarrow K \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_n}) \\ &\Rightarrow f(K) \subset \underbrace{f(f^{-1}(V_{i_1}))}_{\subset V_{i_1}} \cup \dots \cup \underbrace{f(f^{-1}(V_{i_n}))}_{\subset V_{i_n}} \end{aligned}$$

□

**Lemma 7.27**

$K \subset X$  kompakt.  $C \subset X$  mit  $C \subset K \Rightarrow C$  kompakt.  
 abg.

*Beweis.* Sei  $C \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i}_{\text{offen}}$ .  $C$  abgeschlossen  $\implies X \setminus C$  offen.

$$K \subset X = (X \setminus C) \cup C = (X \setminus C) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{K \text{ kompakt}}^{oBdA} C \subset K \subset (X \setminus C) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \\ & \implies C \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \end{aligned}$$

✓

□

**Lemma 7.28**

$X$  Hausdorff,  $K \underset{\text{kompakt}}{\subset} X \implies K$  abgeschlossen.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass wenn  $x \notin K$ , dann ist  $x$  kein Häufungspunkt von  $K$ .

Für  $y \in K \rightarrow y \neq x \xrightarrow{x \text{ Hausdorff}} \exists U_y^x, V_y$  mit  $U_y^x \cap V_y = \emptyset \rightarrow K \subset \bigcup_{y \in K} V_y \xrightarrow{K \text{ kompakt}} K \subset V^{y_1} \cup \dots \cup V^{y_n}$  für  $y_1, \dots, y_n \in K$ .

Setze  $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}^x \ni x$  offen. Zu zeigen bleibt:  $U \cap \underbrace{K}_{=K \setminus \{x\}} = \emptyset$ .

$U \cap K \subset U \cap \left( \bigcup_{i=1}^n V^{y_i} \right) = \bigcup U \cap V^{y_i} \subset U_{y_i}^x \cap V^{y_i} \underset{\text{n. Def.}}{=} \emptyset \Rightarrow x$  ist kein Häufungspunkt. □

**Folgerung 7.29**

$X$  Hausdorff,  $(K_i)_{i \in I}$  kompakte Teilmengen.  $\implies \bigcap_{i \in I} K_i$  kompakt.

*Beweis.*  $\underbrace{\bigcap_{i \in I} K_i}_{\text{abg.}} \text{ abgeschlossen. } \xrightarrow{(7.28)} \bigcap_{i \in I} K_i \text{ kompakt.}$

□

**Folgerung 7.30**

$f : X \rightarrow Y$  stetig,  $X, Y$  topologische Räume.

$Y$  Hausdorff  $\implies f$  abgeschlossen

*Beweis.* Sei  $C \subset X$  abgeschlossen.  $\implies C$  ist kompakt  $\implies \underbrace{f(C)}_{\subset Y \text{ Hausdorff}}$  ist kompakt

$\xrightarrow{(7.28)} f(C)$  abgeschlossen.

□

## 8 Stoneraum von Typen einer Theorie

Sei  $T$  eine konsistente Theorie in der Sprache  $\mathcal{L}$ . Ein  $n$ -Typ ist eine Menge von  $\mathcal{L}$ -Formeln in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$ , welche endlich konsistent bezüglich  $T$  ist, und maximal mit dieser Eigenschaft bezüglich Inklusion.

Gegeben  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$ . Dann ist  $T \cup \{ \exists \vec{x} (\bigwedge_{i=1}^m \varphi_i[\vec{x}]) \}$  konsistent.

### Bemerkung 8.1

Wenn  $T$  vollständig ist, dann gilt

$$S_n(T) = S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset)$$

für jedes Modell  $\mathcal{A} \models T$ , wobei  $S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset)$  die Menge aller Typen  $p(x_1, \dots, x_n)$  in  $n$  Variablen ist, sodass  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$ ,  $\mathcal{A} \models \exists \vec{x} (\bigwedge_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}))$ .

Häufig:  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $B \subset A : S_n^{\mathcal{A}}(B) = S_n(\text{Th}(\mathcal{A}, b)_{b \in B})$

### Definition 8.2

Gegeben  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$ , setze

$$[\varphi] = \{p \in S_n(T) \mid \varphi \in p\}$$

### Bemerkung 8.3

Typen sind unter Deduktion abgeschlossen.

$$\begin{aligned} [\varphi \wedge \psi] &= [\varphi] \cap [\psi] \\ [\varphi \vee \psi] &= [\varphi] \cup [\psi] \\ [\neg(x_1 \dot{=} x_1)] &= \emptyset \\ [\neg\varphi] &= S_n(T) \setminus [\varphi] \\ [(x_1 \dot{=} x_1)] &= S_n(T) \end{aligned}$$

### Bemerkung 8.4

$$[\varphi] \subset [\psi] \iff T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])$$

Insbesondere  $[\varphi] = [\psi]$  genau dann, wenn  $\varphi, \psi$  logisch äquivalent modulo  $T$  sind.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Falls  $T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}]) \implies T \cup \{ \exists \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}]) \}$  konsistent. Das heißt die Menge  $\{(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}])\}$  ist ein partieller Typ.

$\xrightarrow{\text{Zorn}}$  es gibt  $p \in S_n(T)$  mit  $(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}]) \in p \xRightarrow[p \text{ unter Deduktion abgeschlossen}]{\implies} p \in [\varphi] \setminus [\psi]$ .

„ $\Leftarrow$ “:  $p \in [\varphi] \Rightarrow \varphi \in p \xRightarrow{T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])} \psi \in p \Rightarrow p \in [\psi]$ . □



**Satz 8.5**

Die Kollektion  $\{[\varphi]\}_{\varphi[x_1, \dots, x_n] \text{ eine } \mathcal{L}\text{-Formel}}$  bildet eine Basis der Topologie auf  $S_n(T)$  derart, dass  $S_n(T)$  0-dimensional, Hausdorff und kompakt ist.

*Beweis.* Basis:  $\checkmark$  wegen (8.3).

0-dimensional:  $S_n(T) \setminus [\varphi] = \underbrace{[\neg\varphi]}_{\text{offen}} \Rightarrow [\varphi]$  ist abgeschlossen (und offen).

Hausdorff: Seien  $p \neq q \in S_n(T) \Rightarrow$  es gibt  $\varphi \in p \setminus q \Rightarrow p \in [\varphi], q \in [\neg\varphi]$  *disjunkt*.

$S_n(T)$  kompakt: Es genügt zu zeigen, dass jede offene Umgebung der Form  $\bigcup_{i \in I} [\varphi_i]$  eine endliche Überdeckung besitzt, denn:

$$X = \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i}_{= \bigcup_{j \in J} B_{ij}} = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} B_{ij} \longrightarrow X \subset \underbrace{B_{i_1 j_1} \cup \dots \cup B_{i_n j_n}}_{\subset U_{i_1}}$$

Also:  $S_n(T) = \bigcup_{i \in I} [\varphi_i] \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{i \in I} [\neg\varphi_i] \xrightarrow{\text{Kompaktheitssatz}} \{\neg\varphi_i[\vec{x}]\}_{i \in I}$  nicht endlich erfüllbar in

$T \Rightarrow$  es gibt  $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}$  sodass  $T \cup \{ \exists \vec{x} (\bigwedge_{j=1}^n \neg\varphi_{i_j}[\vec{x}]) \}$  inkonsistent.

Also  $T \models \forall \vec{x} (\bigvee_{j=1}^n \varphi_{i_j}[\vec{x}]) \xrightarrow{(8.3)} S_n(T) = [\varphi_{i_1}] \cup \dots \cup [\varphi_{i_n}]$ . Sonst gäbe es  $p \in S_n(T) \setminus \bigcup_{j=1}^n [\varphi_{i_j}] \Rightarrow \neg\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n} \in p \xrightarrow[p \text{ endlich erfüllbar in } T]{} T \cup \{ \exists \vec{x} (\bigwedge_{j=1}^n \neg\varphi_{i_j}[\vec{x}]) \}$ .  $\square$

**Bemerkung 8.6**

Jede offene abgeschlossene Menge in  $S_n(T)$  ist der Form  $[\varphi]$  für eine  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ .

*Beweis.* Sei  $X$  offen-abgeschlossen.  $\xRightarrow{X \text{ offen}} X = \bigcup_{p \in X} [\varphi_p]$ , mit  $p \ni \varphi_p$ .

$X$  abgeschlossen  $\xRightarrow[S_n(T) \text{ kompakt}]{} X$  kompakt  $\xRightarrow{\text{Kompaktheit}} X = \bigcup_{i=1}^n [\varphi_{p_i}] = [\bigvee_{i=1}^n \varphi_{p_i}]$ .  $\square$

**Definition 8.7** (Erinnerung)

Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$   $\mathcal{L}$ -Strukturen.  $h : A_0 \longrightarrow B_0$  ist elementar, falls für alle  $a_1, \dots, a_n \in A_0$ ,  $\varphi = \varphi[a_1, \dots, a_n]$  gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)]$$

**Bemerkung 8.8**

Sei  $h : \overset{\subset A}{A_0} \longrightarrow \overset{\subset B}{B_0}$  elementar,  $B \supset C \supset B_0$ . Dann induziert  $h$  eine abgeschlossene stetige

surjektive Abbildung

$$\underbrace{S_n^{\mathcal{B}}(C)}_{\text{kompakt \& Hausdorff}} \xrightarrow{h_*} \underbrace{S_n^{\mathcal{A}}(A_0)}_{\text{kompakt \& Hausdorff}}$$

*Bemerkung:* Abgeschlossenheit von  $h_*$  folgt direkt mit 7.30.

$$h_*(q) = \{\varphi[x_1, \dots, x_n] \mathcal{L}_{A_0}\text{-Formel mit } \underbrace{h(q)}_{\substack{\mathcal{L}_{B_0}\text{-Formel} \\ \hookrightarrow \mathcal{L}_C\text{-Formel}}} \in q\}$$

### Beispiel 8.9

$$\varphi = (x_1 \dot{=} a_1), \quad h(\varphi) = (x_1 \dot{=} \underbrace{h(a_1)}_{\in B_0 \subset C}).$$

*Beweis von Bemerkung 8.8.* Zeige zuerst:  $h_*$  ist wohldefiniert: Sei  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in h_*(q)$ .

$$\mathbf{ZL} : \mathcal{A} \models \exists \vec{x} \left( \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i[\vec{x}] \right).$$

$$\text{Nach Voraussetzung gilt: } h(\varphi_1), \dots, h(\varphi_k) \in q \xrightarrow{\text{endlich erfüllbar}} \mathcal{B} \models \exists \vec{x} \left( \underbrace{\bigwedge_{i=1}^k h(\varphi_i[\vec{x}])}_{=\Theta[h(a_1), \dots, h(a_m)]} \right)$$

$\implies$  Behauptung.

Zeige weiter:  $h_*(q)$  ist maximal endlich erfüllbar. Es genügt zu zeigen, dass falls  $\varphi \notin h_*(q) \implies \neg\varphi \in h_*(q)$ .

Angenommen  $h_*(q) \subsetneq \Sigma$ .  $\mathbf{ZL} : \Sigma$  nicht endlich erfüllbar in  $\mathcal{A}$ .

Nach Voraussetzung gibt es  $\varphi \in \Sigma \setminus h_*(q) \implies \neg\varphi \in h_*(q) \subset \Sigma \implies \{\varphi, \neg\varphi\} \subset \Sigma$ . Sei

$$\varphi \notin h_*(q) \implies h(\varphi) \in q \xrightarrow{q \text{ vollständig}} \underbrace{\neg h(\varphi)}_{=h(\neg\varphi)} \in q \implies \neg\varphi \in h_*(q).$$

Typen  
sind Ul-  
trafilter

Zeige weiter:  $h_*$  ist stetig. Es genügt zu zeigen, dass  $h_*^{-1}([\varphi])$  offen ist.

$$\begin{aligned} [h(\underbrace{\varphi}_{\mathcal{L}_{B_0}\text{-Formel}})] &= \{q \in S_n^{\mathcal{B}}(C) \mid \underbrace{h_*(q) \in [\varphi]}_{\substack{\downarrow \\ \varphi \in h_*(q) \\ \downarrow \\ h(\varphi) \in q}}\} = h_*^{-1}([\varphi]) \end{aligned}$$

Zeige nun *Surjektivität*. Sei  $p \in S_n^{\mathcal{A}}(A_0)$ . Wir suchen ein  $q$  mit  $\underbrace{\varphi}_{\mathcal{L}_{A_0}\text{-Formel}} \in h_*(q) = p$

$$\implies h(\varphi) \in q.$$

### Beispiel 8.10

Betrachte  $(\mathbb{R}, <) \preceq \underbrace{(\mathcal{R}, <)}_{0 < \varepsilon < r, \ r > 0}$  über  $\mathbb{Q} \cup \{\varepsilon\}$ . Hier werden zwei verschiedene Typen in

einen einzigen abgebildet:

$$\begin{array}{ccc} q \in \mathbb{R} & & \\ q > x > \varepsilon & \longrightarrow & 0 < x < q \\ 0 < x < \varepsilon & & q > 0 \end{array}$$

Zur Übung: Wenn in Bemerkung 8.8  $B_0$  anstelle von  $C$  stünde, so wäre  $h_*$  ein Homöomorphismus.

Frage: Ist  $\{h(\varphi) \mid \varphi \in p\}$  endlich erfüllbar?

Seien dazu  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in p$ .  $\mathcal{Z} : \mathcal{B} \models \exists \vec{x} (\bigwedge_{i=1}^k h(\varphi_i)[\vec{x}])$

Aus dem vorherigen Teil des Beweises folgt  $\mathcal{A} \models \exists \vec{x} (\bigwedge_{i=1}^k h(\varphi_i[\vec{x}])) \implies$  Behauptung.  $\square$

### Beispiel 8.11

Sei  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  und  $A_0 \subset C$ . Dann besagt der Satz:

$$\begin{array}{ccc} S_n^{\mathcal{A}}(C) & \xrightarrow[\text{von Parametern}]{\text{Einschränkung}} & S_n^{\mathcal{A}}(A_0) \\ q & \longmapsto & q|_{A_0} \end{array}$$

## 9 Typenvermeidungssatz und Isolation

Im Folgenden betrachten wir *isolierte Typen*. Topologisch betrachtet sieht das so aus:

$$\begin{array}{ccc} \in S_n(T) & & \text{offen} \\ p & \text{isoliert} \iff & \{p\} \\ & & \text{abgeschlossen} \end{array} = [p] \text{ für eine } \mathcal{L}\text{-Formel } \varphi \in p$$

Wir möchten das syntaktisch verstehen.

### Bemerkung 9.1

Ein  $n$ -Typ  $p \in S_n(T)$  ist genau dann isoliert, wenn er eine *komplette* Formel  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$  enthält, das heißt

$$p = \{\psi \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel} \mid T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])\}$$

Insbesondere ist jeder isolierte Typ in jedem Modell von  $T$  realisiert, falls  $T$  vollständig ist!

Aufgaben (Blatt 6): Betrachte  $\overbrace{(\mathbb{R}, <)}^{\text{hat QE}}$ .

- Ist der Typ  $\{0 < x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}}$  isoliert?
- Ist der Typ  $\{(x \dot{=} 15)\}$  isoliert<sup>12</sup>?

*Beweis von Bemerkung 9.1.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $\psi \in p \Rightarrow [(\varphi \wedge \psi)] \subset [\varphi] = \{p\} \Rightarrow [\varphi] = [(\varphi \wedge \psi)] \iff T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])$

$\Rightarrow p \subseteq \{\psi \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel} \mid T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])\}$

Hier möchten wir eigentlich Gleichheit zeigen. Weil  $p$  jedoch bezüglich  $\subset$  maximal ist, genügt es zu zeigen, dass die rechte Seite endlich erfüllbar ist:  $\{\psi_1, \dots, \psi_k \mid T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi_i[\vec{x}])\}$ . Also:  $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \rightarrow (\bigwedge_{i=1}^k \psi_i[\vec{x}]))$ .

$\mathbb{Z} : T \cup \{\exists \vec{x}(\bigwedge_{i=1}^k \psi_i[\vec{x}])\}$  konsistent.

$\varphi \in \underbrace{p}_{\substack{\text{endlich} \\ \text{erfüllbar}}} \Rightarrow T \cup \{\exists \vec{x}\varphi[\vec{x}]\}$  ist konsistent  $\Rightarrow$  Behauptung.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen  $p = \underbrace{\{\psi \mid T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])\}}_{\ni \varphi}$ . Dann folgt  $\varphi \in p$ , und somit

$\{p\} \subset \underbrace{\text{klar}}_{\substack{\text{Hausdorff} \\ \psi \in p}} \bigcap_{\psi \in p} [\psi] \supset [\varphi] \ni p \Rightarrow \{p\} = [\varphi]$  ist isoliert!

Zu „Insbesondere“:  $T$  vollständig. Sei  $p$  isoliert durch  $\varphi$ .  $\xRightarrow{T \text{ vollständig}} T \models \exists \vec{x}\varphi[\vec{x}]$ . Sei  $\mathcal{M} \models T$  und  $\vec{a} \in M^{|\vec{x}|} \mid \mathcal{M} \models \varphi[\vec{a}] \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi[\vec{a}]$  für  $\psi \in p$ .  $\square$

### Bemerkung 9.2

$h : A_0 \rightarrow B_0 = \text{Im}(h)$  elementar  $\Rightarrow h_* : S_n^{\mathcal{B}}(B_0) \rightarrow S_n^{\mathcal{A}}(A_0)$  Homöomorphismus<sup>13</sup>.

### Beispiel 9.3

Sei  $T = \exists^\infty$  (diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination). Betrachte  $\mathcal{A} \models T$ . Wir wollen  $S_1^{\mathcal{A}}(A)$  besser verstehen.  $S_1^{\mathcal{A}}(A)$  enthält Typen der Form  $(x \dot{=} a)$  für jedes Element  $a$  (diese Typen sind isoliert), sowie einen Typen der Form  $\{(x \dot{=} a)\}_{a \in A}$  (ohne diesen Typen hätten wir ein Problem, denn dann wären alle Typen isoliert). Insbesondere folgt auch: Für  $A$  abzählbar gilt  $|S_1^{\mathcal{A}}(A)| \leq \aleph_0$ .

Vgl. Blatt 5 Aufgabe 3

### Beispiel 9.4

Sei  $\mathcal{G} = (G, R)$  Zufallsgraph. Alle Typen sind der Form  $\{xRa\}_{a \in A} \cup \{\neg xRb\}_{b \in G \setminus A} \cup \{\neg(x \dot{=} g)\}_{g \in G}$ . Somit folgt insbesondere  $|S_1^{\mathcal{G}}(G)| \geq 2^{|G|}$ .

### Satz 9.5 (Typenvermeidungssatz)

Sei  $T$  eine abzählbare konsistente Theorie (Theorie in einer abzählbaren Sprache),  $p \in$

<sup>12</sup>das ist nur ein Typ, denn er muss endlich erfüllbar sein

<sup>13</sup>Homöomorphismen interessieren uns, weil unter diesen Topologien erhalten bleiben

$S_n(T)$  ein nicht-isolierter  $n$ -Typ. Es gibt ein abzählbares Modell  $\mathcal{M}$  von  $T$ , welches  $p$  vermeidet, das heißt  $p$  wird nicht in  $\mathcal{M}$  realisiert.

*Beweis mit Henkins Methode.* Sei  $C$  eine abzählbare Menge von neuen Konstanten. In der Sprache  $\mathcal{L} \cup C$ , sei  $\{\varphi_m[\vec{x}]\}_{m \in \mathbb{N}}$  eine Aufzählung aller Formeln in einer Variablen. Sei  $\{\vec{c}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Aufzählung aller  $n$ -Tupel aus  $C$ . Konstruiere eine Kette  $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \dots$  von endlichen Mengen von  $(\mathcal{L} \cup C)$ -Aussagen derart, dass  $T \cup \Sigma_k$  konsistent ist für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .

$\Sigma_0 = \emptyset$ .

Angenommen  $\Sigma_k$  bereits konstruiert.

1. Fall:  $k = 2m$ . Sei  $i \in \mathbb{N}$  minimal, sodass  $c_i$  weder in  $\varphi_m$  noch in den Aussagen aus  $\Sigma_k$  vorkommt. Setze

$$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k \cup \{(\exists x \varphi_m[x] \rightarrow \varphi[c_i])\}$$

$T \cup \Sigma_{k+1}$  ist konsistent.

2. Fall:  $k = 2m + 1$ . Sei  $\bigwedge_{\chi \in \Sigma_k} \chi = \Theta[\overset{\text{Tupel aus } C}{\vec{c}}]$ , für  $\Theta$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel. OBdA schreibe  $\Theta[\vec{c}] = \Theta[\underbrace{\vec{c}_m}_{n\text{-Tupel}}, \vec{c}']$ . Setze  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists \vec{y} \Theta[\vec{x}, \vec{y}]$ .

*Bemerkung:*  $T \cup \{\exists \vec{x} \varphi[\vec{x}]\}$  ist konsistent.

Also ist  $\emptyset \neq [\varphi]$  eine nicht-leere Umgebung  $S_n(T)$ . Weil  $p$  nicht isoliert ist, gibt es  $\psi \in p$  mit  $T \not\models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \implies \psi[\vec{x}]) \implies$  es gibt ein Modell  $\underbrace{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\text{-Struktur}}$  von  $T$  mit  $\vec{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi[\vec{a}]$ , aber

$\mathcal{M} \models \neg \psi[\vec{a}]$ . Damit folgt insbesondere: es gibt ein  $\vec{d}$  in  $M$  mit  $\mathcal{M} \models \Theta[\vec{a}, \vec{d}]$ .

Setze

$$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k \cup \{\neg \psi[\vec{c}_m]\}$$

Ist  $T \cup \Sigma_{k+1}$  konsistent?  $\rightarrow$  ja.

Sei  $T' = T \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k$  ist endlich konsistent und  $C$  ist eine Menge von Henkinkonstanten für  $T \cup \Sigma_k$ .

$\implies$  Es gibt ein abzählbares Modell  $\mathcal{M}$  von  $T'$ , welches nur aus Interpretationen der Konstanten aus  $C$  besteht.

Insbesondere:  $\mathcal{M} \models T$  abzählbar.

$\mathbb{Z}$ :  $p$  wird in  $\mathcal{M}$  nicht realisiert:

Sei  $\vec{a} \in M^n \rightarrow \vec{a}$  ist die Interpretation des Tupels  $c_m^\vec{a}$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ .

$\xRightarrow[\text{Schritt } 2m+1]{\mathcal{M} \models \neg\psi[\vec{a}]}$  für ein  $\psi \in p$ . □

### Bemerkung 9.6

$p \in S_n(T)$  nicht isoliert.  $\{p\}$  abgeschlossen, aber  $\overset{\circ}{\{p\}} = \emptyset$ , wobei  $\overset{\circ}{A}$  die größte offene Menge  $U$  ist, welche ganz in  $A$  liegt. (das Innere von  $A$ )

$$\text{Warum? } U \subset \{p\} \xRightarrow[\text{offen}]{} \xRightarrow[\text{abgeschlossen und offen}]{\text{oder } U = \{p\}} \implies p \text{ isoliert.}$$

## 10 Magere Mengen und Typenvermeidungssatz

### Definition 10.1

Eine Menge  $A$  in einem topologischen Raum  $(X, T)$  ist *nirgends dicht*, falls  $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$ , wobei  $\bar{A}$  kleinste abgeschlossene Menge welche  $A$  enthält ist.

### Beispiel 10.2

Ist  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  nirgends dicht? Nein, denn  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ .

### Definition 10.3

$A$  ist *mager*<sup>14</sup>, falls  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , wobei  $A_n$  nirgends dicht.

### Satz 10.4 (Verallgemeinerter Typenvermeidungssatz)

$T$  abzählbar konsistent. Sei  $A_n \subset S_n(T)$  mager für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es ein abzählbares Modell  $\mathcal{M} \models T$ , welches alle Typen in  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  vermeidet.

Hier ohne Beweis. □

### Definition 10.5

Sei  $\mathcal{A}$  ein  $\mathcal{L}$ -Struktur. Ein  $n$ -Typ  $p \in S_n^{\mathcal{A}}(B)$ ,  $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$  ist *atomic*, falls  $p$  isoliert ist.

### Lemma 10.6

Sei  $\mathcal{A}$  ein  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $\vec{a}, \vec{b}$  endliche Tupel.

$$\underbrace{\text{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}, \vec{b})}_{\{\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel} \mid \mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}, \vec{b}]\}} \text{ ist isoliert } \iff \text{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{b}) \text{ und } \underbrace{\text{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}/\vec{b})}_{=\{\psi[\vec{x}] \text{ Formeln in } \mathcal{L} \cup \{b_1, \dots, b_n\} \mid \mathcal{A} \models \psi[\vec{a}]\}} \text{ sind beide isoliert.}$$

---

<sup>14</sup>Idee hier: „nicht so groß“

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Angenommen  $\varphi[\vec{x}, \vec{y}]$  isoliert  $\text{tp}^A(\vec{a}, \vec{b})$ . Zeige zuerst, dass  $\varphi[\vec{x}, \vec{b}]$  den Typ  $\text{tp}^A(\vec{a}/\vec{b})$  isoliert. (liegt bereits im Typ nach Definition)

Sei  $\psi[\vec{x}, \vec{b}] \in \text{tp}^A(\vec{a}/\vec{b}) \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[\vec{a}, \vec{b}]$ .

Zu zeigen:  $\mathcal{A} \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}, \vec{b}] \rightarrow \psi[\vec{x}, \vec{b}])$ .

Wegen  $\varphi[\vec{x}, \vec{y}]$  isoliert  $\text{tp}^A(\vec{a}, \vec{b})$ , gilt auch  $\mathcal{A} \models \forall \vec{x} \forall \vec{y}(\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \rightarrow \psi[\vec{x}, \vec{y}]) \Rightarrow$  Behauptung.

Für  $\text{tp}^A(\vec{b}) \ni \exists \vec{x} \varphi[\vec{x}, \vec{y}] \rightarrow$  zeige, dass diese Formel den Typ isoliert.

$$\mathcal{A} \models \forall \vec{y}(\exists \vec{x} \varphi[\vec{x}, \vec{y}] \rightarrow \Theta[\vec{y}]), \quad \Theta \in \text{tp}^A(\vec{b}) \quad .$$

$\mathcal{A} \models \Theta[\vec{b}] \Rightarrow \mathcal{A} \models \Theta[\vec{a}, \vec{b}]$

Sei  $\vec{b}_1 \in A$  beliebig mit  $\mathcal{A} \models \exists \vec{x} \varphi[\vec{x}, \vec{b}_1] \Rightarrow$  es gibt ein  $\vec{a}_1 \in A$  mit  $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}_1, \vec{b}_1]$ .

Es gilt immer  $\mathcal{A} \models \forall \vec{x} \forall \vec{y}(\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \rightarrow \Theta[\vec{y}]) \implies \mathcal{A} \models \Theta[\vec{b}_1]$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\Theta[\vec{y}] \in \text{tp}^A(\vec{b})$  und  $\varphi[\vec{x}, \vec{b}] \in \text{tp}^A(\vec{a}/\vec{b})$  isolierende Formeln. Setze  $\psi[\vec{x}, \vec{y}] = (\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \wedge \Theta[\vec{y}]) \in \text{tp}^A(\vec{a}, \vec{b})$ .

$\mathcal{Z} : \mathcal{A} \models \forall \vec{x} \forall \vec{y}(\psi[\vec{x}, \vec{y}] \rightarrow \chi[\vec{x}, \vec{y}])$  für alle  $\chi \in \text{tp}^A(\vec{a}/\vec{b}) : \mathcal{A} \models \chi[\vec{x}, \vec{y}]$ .

$\chi[\vec{x}, \vec{b}] \in \text{tp}^A(\vec{a}/\vec{b}) \Rightarrow \mathcal{A} \models \underbrace{\forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}, \vec{b}] \rightarrow \chi[\vec{x}, \vec{b}])}_{\Theta_1[\vec{b}]}$ . Also  $\Theta_1[\vec{y}] \in \text{tp}^A(\vec{b}) \rightarrow \mathcal{A} \models \forall \vec{y}(\Theta[\vec{y}] \rightarrow$

$\Theta_1[\vec{y}])$ .

Sei nun  $\vec{a}_1, \vec{b}_1 \in A$  mit  $\mathcal{A} \models \psi[\vec{a}_1, \vec{b}_1] \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}_1, \vec{b}_1] \\ \text{und} \\ \mathcal{A} \models \Theta[\vec{b}_1] \end{array} \right. . \xrightarrow{\text{mit „also“}} \mathcal{A} \models \Theta_1[\vec{b}_1] \xRightarrow{\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}_1, \vec{b}_1]} \mathcal{A} \models \chi[\vec{a}_1, \vec{b}_1]$

$\mathcal{A} \models \chi[\vec{a}_1, \vec{b}_1]$ . □

## 11 Primmodelle. Existenz und Eindeutigkeit

Ab jetzt:  $T$  ist eine konsistente abzählbare Theorie.

### Definition 11.1

$\mathcal{M} \models T$  ist ein *Primmodell*, falls  $\mathcal{M}$  sich in jedes andere Modell von  $T$  elementar einbetten lässt.

### Beispiel 11.2

$\underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{Primmodell}}, \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \dots, \mathbb{Q}^n, \dots, \mathbb{Q}^\omega$ . Wegen Quantorenelimination ist jede Einbettung elementar!

**Bemerkung 11.3** • Wenn  $T$  ein Primmodell besitzt, dann ist  $T$  vollständig

- Wenn  $\mathcal{M}$  ein Primmodell von  $T$  ist, dann ist  $\mathcal{M}$  abzählbar
- Wenn  $\mathcal{M}$  ein Primmodell von  $T$  ist, dann ist der Typ  $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a})$  für  $\vec{a} \in M$  immer atomar isoliert (sonst finde Modell das Typen nicht realisiert. Einbettung liefert doch eine Realisierung)

Ab jetzt:  $T$  ist vollständige, abzählbare Theorie ohne endliche Modelle.

**Satz 11.4**

$T$  wie oben.  $\mathcal{M} \models T$  ist genau dann prim, wenn  $\mathcal{M}$  abzählbar ist und für jedes Tupel  $\vec{a} \in M$  endlich gilt, dass  $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a})$  atomar ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: ✓ (gerade gesehen)

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\mathcal{N} \models T$  beliebig.  $\mathbb{Z}_{\mathcal{L}} : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$  elementar.

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Aufzählung von  $M$ . Konstruiere eine Kette  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  elementarer Abbildungen zwischen endlich erzeugten Teilmengen von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  derart, dass  $a \in \text{Dom}(f_{n+1})$ .

Sei  $f_0 = \emptyset \xrightarrow{T \text{ vollst.}} \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ .

Angenommen  $f_n$  konsistent. Betrachte  $\underline{a_n}$ .

1. Fall:  $a_n \in \text{Dom}(f_n) \rightarrow f_{n+1} = f_n$

2. Fall: Sonst schreibe  $\vec{a}$  eine Aufzählung von  $\text{Dom}(f_n)$ ,  $\vec{b} \in N$  eine Aufzählung von  $\text{Im}(f_n)$ .

$\text{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a}, a_n) \text{ atomar} \implies \underbrace{\text{tp}^{\mathcal{M}}(a_n/\vec{a})}_{\in S_1^{\mathcal{M}}(\vec{a})} \text{ ist atomar.}$

$f_n^{-1} : \vec{b} \longrightarrow \vec{a}$  elementar.  $\rightarrow (f_n^{-1})_* : S_1^{\mathcal{M}}(\vec{a}) \longrightarrow S_1^{\mathcal{N}}(\vec{b})$  Homöomorphismus (denn die Parametermenge ist gleich).

Insbesondere: Topologie bleibt erhalten:  $(f_n^{-1})_*(\text{tp}^{\mathcal{M}}(a_n/\vec{a}))$  ist isoliert  $\Rightarrow$  wird in  $\mathcal{N}$  von Element  $b$  realisiert.

Setze  $f_{n+1} = f_n \cup \{(a_n, b)\}$ .



$$\mathcal{M} \models \varphi[a_n, \vec{a}] \Leftrightarrow \varphi[x, \vec{a}] \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(a/\vec{a}) \xLeftrightarrow[\text{Bild unter } (f_n^{-1})_*] \varphi[\vec{x}, \vec{b}] \in \text{tp}^{\mathcal{N}}(b/\vec{b}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi[b, \vec{b}].$$

□

**Folgerung 11.5**

Das Primmodell einer vollständigen abzählbaren Theorie  $T$  ist, wenn es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig.

*Beweis.* Analog.

□

**Beispiel 11.6** (Beispiele von Primmodellen) •  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\rightarrow \mathbb{Q}$

- $\exists^\infty \rightarrow \mathcal{M}$  abzählbar
- $\text{ACF}_0 \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}$
- $\mathcal{M} = \{0, 1\}^\omega$  in der Sprache  $\mathcal{L} = \{P_s\}$ ,  $s$  endliche Folge von 0, 1.  $P_s^{\mathcal{M}}(t) = \{\text{der Anfang von } t \text{ ist } s\}$ .  
 $T = \text{Th}(\mathcal{M})$  hat Quantorenelimination:

$$\underbrace{\exists y(\bigwedge \varphi[x_1, \dots, x_n, y])}_{\text{primitive Existenzformel}} \sim \Theta[x_1, \dots, x_n] \wedge \exists y \rho[y] \sim \begin{cases} x_1 \dot{=} x_1 & \text{eine Tautologie} \\ \neg x_1 \dot{=} x_1 & \text{immer falsch} \end{cases}$$

Zudem

$$T \vdash \forall x (P_{000}(x) \vee P_{001}(x) \vee P_{010}(x) \vee P_{011}(x) \vee P_{100}(x) \vee P_{110}(x) \vee P_{111}(x) \vee P_{101}(x))$$

$\rightarrow$  Man kann keine Typen isolieren, weil sich Typen nicht eindeutig durch endlich viele Aussagen bestimmen lassen.

**Satz 11.7**

Es sei  $T$  vollständig, abzählbar mit unendlichen Modellen. Dann gilt:

$T$  besitzt ein Primmodell  $\Leftrightarrow$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  liegen die isolierten Typen dicht in  $S_n(T)$ .

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $[\varphi[x_1, \dots, x_n]] \neq \emptyset$  in  $S_n(T)$ .  $T$  besitzt ein Primmodell  $\mathcal{M}$ .

Also  $T \cup \{\exists \vec{x} \varphi[\vec{x}]\}$  konsistent.  $\xRightarrow[\mathcal{M} \text{ Modell}]{T \text{ vollständig}} \mathcal{M} \models \exists \vec{x} \varphi[\vec{x}] \Rightarrow$  es gibt ein  $\vec{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi[\vec{a}]$ .

Dann gilt  $\underbrace{\text{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a})}_{\substack{\text{isoliert, weil Typen} \\ \text{in Primmodell} \\ \text{immer isoliert}}} \in [\varphi]$ .

„ $\Leftarrow$ “: Ein abzählbares Modell  $\mathcal{M} \models T$  ist dann prim, falls für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $\mathcal{M}$  die Menge von Formeln  $\Sigma_n = \{\neg \varphi[x_1, \dots, x_n]\}_{\varphi \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel}, [\varphi] = \{\text{pt}\} \text{ in } S_n(T)}$

Ein  $n$ -Typ  $p$  enthält  $\Sigma_n \Leftrightarrow p \in \overbrace{\bigcap_{\substack{\varphi[x_1, \dots, x_n] \\ \mathcal{L}\text{-Formel mit} \\ [\varphi] = \{\text{pt}\}}}^{\text{Schnitte abgeschlossener Mengen} \\ \text{sind abgeschlossen}} [\neg\varphi]$

Wenn  $\bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi]$  mager ist, dann gibt es ein abzählbares Modell, welches kein  $\underbrace{\Sigma_n}_{\text{Primmodell}}$  realisiert.

Wir zeigen  $\bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi]$  nirgends dicht. Wie sieht das Innere von  $\underbrace{\bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi]}_{\text{abgeschlossen}}$  aus?

Sei  $U \subset \bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi]$ . Es genügt, den Fall  $U = [\psi]$  zu betrachten.

$\mathbb{Z} : [\psi] = \emptyset$ . Falls  $[\psi] \neq \emptyset \Rightarrow$  es gibt ein  $p \in [\psi]$  isolierter Typ  $\Rightarrow$  es gibt eine isolierende Formel  $\chi \in p$ . Somit  $p \in \bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi] \Rightarrow p \in [\neg\chi]$ . Widerspruch, denn jetzt enthält  $p$  eine Formel und deren Negation.  $\square$

### Definition 11.8

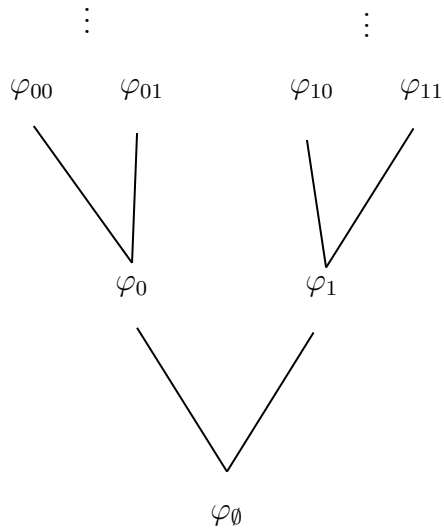
Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur. Ein binärer Baum von Formeln in einer freien Variablen mit Parametern aus  $A$  ist eine Menge  $\{\varphi_s[x]\}_{s \in <\omega_2}$  ( $s$  ist also eine endliche Folge von  $0, 1$ ) von  $\mathcal{L}_A$ -Formeln mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\mathcal{A} \models \exists x \varphi_s[x]$  für jede endliche Folge  $s$
- (2)  $\mathcal{A} \models \forall x ((\varphi_{s \wedge 0}[x] \vee \varphi_{s \wedge 1}[x]) \rightarrow \varphi_s[x])$
- (3)  $\mathcal{A} \models \neg \exists x (\varphi_{s \wedge 0}[x] \wedge \varphi_{s \wedge 1}[x])$

### Definition 11.9

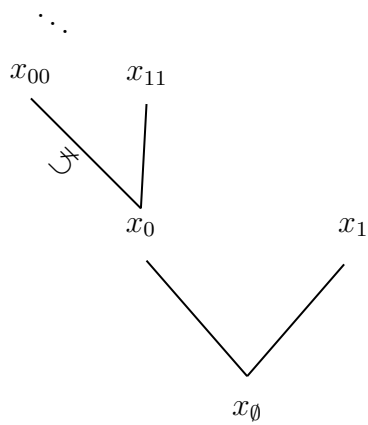
$T$  ist *total transzendent*, falls  $T$  kein Modell besitzt, in welchem es einen binären Baum von Formeln in einer Variablen gibt.

**Beispiel 11.10**



**Beispiel 11.11**

$T = \exists^\infty. \underbrace{X \subseteq M}_{\text{definierbar}} \text{ mit Parametern } \longrightarrow X \text{ endlich oder koendlich}^{15}.$

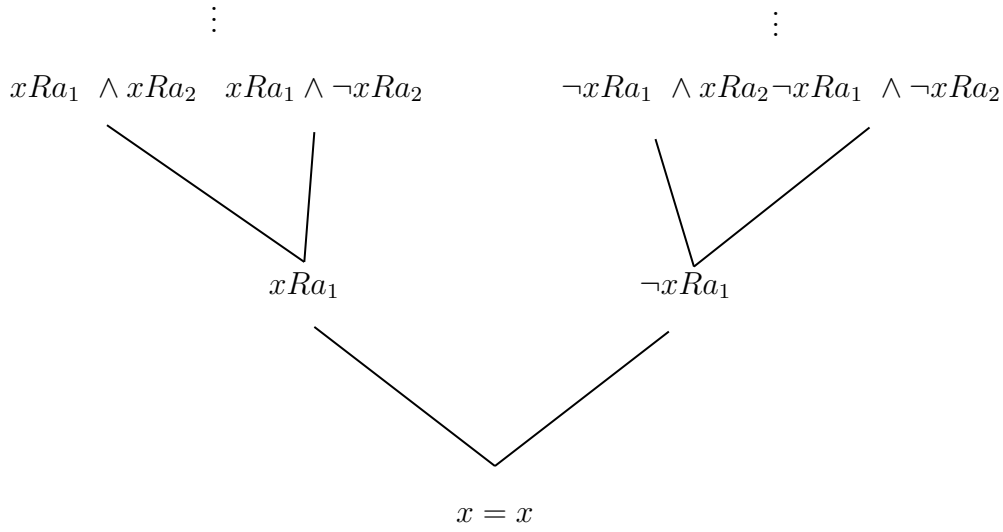



---

<sup>15</sup>das ist genau, was Morleys Kategorizitätssatz besagt (versteckt)

**Beispiel 11.12** (Nicht-Beispiel)

$T = \text{Zufallsgraphen}$ .



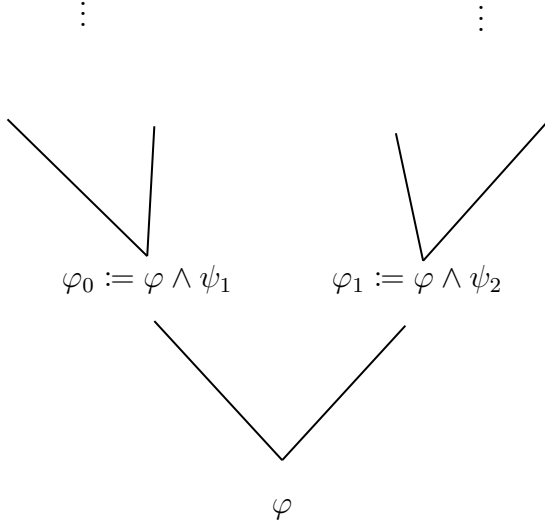
**Lemma 11.13**

$T$  vollständig abzählbar mit unendlichen Modellen. Falls  $T$  total transzendent ist, dann liegen für jedes  $\mathcal{M} \models T$ ,  $\underbrace{A \subseteq M}_{\text{abzählbar}}$  die isolierten Typen dicht in  $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ .

Insbesondere besitzt  $T$  ein Primmodell.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass die isolierten Typen dicht in  $S_1^{\mathcal{M}}(A)$  liegen (vgl. Blatt 6, Aufgabe 3). Sonst gibt es eine offene, nicht-leere Umgebung ohne isolierte Typen. OBdA wird diese Umgebung durch  $[\varphi[x]]$  gegeben.

$0 \neq |[\varphi]| \geq 2$ . Finde also  $p \neq q \in [\varphi]$ .



Dadurch bricht der Baum nicht ab.  $\square$

**Definition 11.14**

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $C \subset A$ .  $B \subset A$  ist *konstruktibel über  $C$* , falls  $B = (b_\alpha)_{\alpha < \lambda}$  so<sup>16</sup>, dass der Typ  $\text{tp}^{\mathcal{A}}(b_\alpha/C, (b_\beta)_{\beta < \alpha})$  isoliert ist für alle  $\alpha < \lambda$ .

**Bemerkung 11.15**

$T$  eine Theorie,  $\mathcal{A} \models T$ ,  $C \subset A$ .  $T_C = T \cup \text{Diag}(C)$ . Wenn  $T_C$  ein konstruktibles Modell (über  $C$ ) besitzt, dann ist dieses Modell ein Primmodell von  $T_C$ .

*Beweis.* Sei  $\mathcal{M} = (m_i)_{i < \lambda}$  konstruktibel über  $C$ ,  $\mathcal{N} \models T_C$  beliebig.  $\mathbb{Z} : \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}$ .

Konstruiere eine Kette von  $\mathcal{L}_C$ -elementarer Abbildungen  $f_\alpha : \text{Dom}(f_\alpha) \subset \mathcal{M} \dots \mathcal{N}$  so, dass  $m_\alpha \in \text{Dom}(f_{\alpha+1})$

$f_0 = \emptyset$ .

Sei  $f_\alpha$  bereits konstruiert.  $m_\alpha \in \text{Dom}(f_\alpha) \rightarrow f_{\alpha+1} = f_\alpha$ .

Wenn nicht:  $\underbrace{(f_\alpha^{-1})_*}_{\text{Hmöomorphismus, erhält Topologie}} (\text{tp}^{\mathcal{M}}(m_\alpha/C, (m_\beta)_{\beta < \alpha}))$  ist isoliert.  $\implies$  es wird in  $\mathcal{N}$  von  $b$

realisiert.  $\implies f_{\alpha+1} = f_\alpha \cup \{(a_\alpha, b)\}$ .  $\square$

**Folgerung 11.16**

Je zwei konstruktible Modelle sind isomorph über  $C$ .

**Proposition 11.17**

Wenn  $T$  total transzendent ist, dann gibt es für jedes  $C \subset A$ ,  $\mathcal{A} \models T$ , ein Primmodell über  $C$ .

<sup>16</sup>ist das unabhängig von der Aufzählung? Das ist unklar, wird in dieser Vorlesung umgangen.

*Beweis.* oBdA  $C \neq \emptyset$ . Sei  $\mathcal{A}$  ein konkretes Modell.

$$S = \left\{ (B, \alpha, f), \begin{array}{c} B \subset A \\ \alpha \in O_n \\ f : \alpha \rightarrow B \text{ Bijektion} \end{array} \text{ derart, dass f\"ur jedes } \beta < \alpha \\ \text{tp}^{\mathcal{A}}(b_\beta/C, (b_\gamma)_{\gamma < \beta}) \text{ atomar, } b_\beta = f(\beta) \right\}$$

Setze  $(B_1, \alpha_1, f_1) \leq (B_2, \alpha_2, f_2)$ , falls  $B_1 \subset B_2$ ,  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  und  $f_2|_{\alpha_1} = f_1$ ; eine partielle Ordnung auf  $S$ .

**Bemerkung 11.18**

$$(B, \alpha, f) \in S, \text{tp}^{\mathcal{A}}(d/B, C) \text{ atomar f\"ur ein } d \in A \implies \left( B \cup \{d\}, S(\alpha), \begin{array}{c} S(\alpha) \longrightarrow B \cup \{d\} \\ \beta \longmapsto f(\beta) \\ \alpha \longmapsto d \end{array} \right) \in S$$

Ferner  $(c, \underline{1}, \underline{0} \longrightarrow c) \in S$  f\"ur alle  $c \in C \implies S \neq \emptyset$ .

$S$  ist induktiv. Sei  $\Gamma(B_i, \alpha_i, f_i)$  eine Kette in  $S$ . Setze  $B = \bigcup B_i$ ,  $\alpha = \sup \alpha_i$ ,  $f = \bigcup f_i : \alpha \xrightarrow{\text{Bijektion}} B$ .

Noch  $\mathbb{Z}$ :  $(B, \alpha, f) \in S$ .

Sei  $\beta < \alpha$ .  $\text{tp}^{\mathcal{A}}(b_\beta/C, (b_\gamma)_{\gamma < \beta})$  atomar.  $b_\beta = \underbrace{f(\beta)}_{=f_i(\beta)}$ ,  $\beta < \alpha_i$  f\"ur ein  $i$ , sonst Widerspruch.

$b_\gamma = f_i(\gamma)$  f\"ur  $\gamma < \beta < \alpha_i$ . Somit:  $\text{tp}^{\mathcal{A}}(f_i(\beta)/C, (f_i(\gamma))_{\gamma < \beta})$  atomar,  $(B_i, \alpha_i, f_i) \in S$ .  
 $\implies C \subset B$

Sei  $(B, \alpha, f) \in S$  maximal.

Tarskis Test:  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y], b_1, \dots, b_n \in B, \mathcal{A} \models \varphi[b_1, \dots, b_n, a]$  f\"ur ein  $a \in A$ . Betrachte jetzt  $\emptyset \neq [\varphi[b_1, \dots, b_n, y]]$  in  $S_1^{\mathcal{A}}(B)$ .  $\xrightarrow{\text{T total transzendent}} \text{es gibt } d \in A$ , sodass  $\text{tp}^{\mathcal{A}}(d/B)$  atomar ist (folgt mit (11.18)) und  $\mathcal{A} \models \varphi[b_1, \dots, b_n, d]$ .

$\underbrace{(B, \alpha, f)}_{\text{maximal, somit Gleichheit}} \leq \underbrace{(B \cup \{d\}, S(\alpha), f \cup \{(\alpha, d)\})}_{\in S} \implies d \in B \implies B \text{ ist Universum einer elementaren Unterstruktur.}$  □

## 12 Saturation

Wir haben verstanden, dass wir in der Theorie der Vektorr\"aume  $\mathbb{Q}, \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \dots, \mathbb{Q}^\omega$  haben, wobei  $\mathbb{Q}$  das Primmodell ist. Jetzt m\"ochten wir  $\mathbb{Q}^\omega$  verstehen.

**Definition 12.1**

Sei  $\kappa \geq \aleph_0$  eine Kardinalzahl. Eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  ist  $\kappa$ -saturiert, falls jeder  $n$ -Typ über eine Menge  $C \subset A, |C| < \kappa$ , in  $\mathcal{A}$  realisiert wird.

$\mathcal{A}$  ist saturiert, falls es  $|A|$ -saturiert ist.

**Bemerkung 12.2**

$\mathcal{A}$  ist  $\kappa$ -saturiert genau dann, wenn  $\mathcal{A}$  jeden 1-Typ über  $C \subset A$  mit  $|C| < \kappa$  realisiert.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: klar.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $p(x, y) \in S_2^A(C)$ . Betrachte

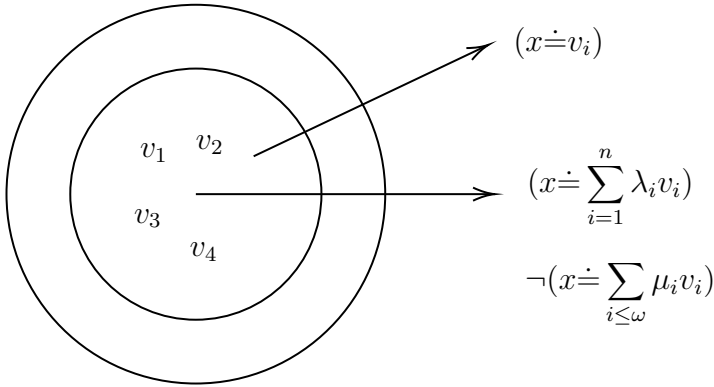
$$\underbrace{q(x)}_{\in S_1^A(C)} = p(x, y) \upharpoonright \text{die Variable } x = \{\varphi[x] \mid \varphi[x] \in p(x, y), \varphi \text{ } \mathcal{L}_C\text{-Formel}\}$$

$\stackrel{\text{n. V.}}{\implies}$  es gibt  $b \in A$  Realisierung von  $q$  sodass  $S_1^A(Cb), |Cb| < \kappa, p(b, y) = \{\varphi[b, y] \mid \varphi[x, y] \in p\}$

Es gibt eine Realisierung  $d$  in  $\mathcal{A}$  von  $p(b, y)$ . Aus der Konstruktion folgt, dass  $(b, d)$  den Typ  $p$  realisiert.  $\square$

**Beispiel 12.3**

$\mathbb{Q}^{(\omega)}$  ist  $\aleph_0$ -saturiert. Insbesondere werden alle Typen in  $\mathbb{Q}^{(\omega)}$  realisiert!


**Beispiel 12.4**

$(\mathbb{R}, <)$   $\aleph_1$ -saturiert? Nein, denn  $\{0 < x < q\}_{q \in \mathbb{Q}^{>0}}$  wird nicht in  $\mathbb{R}$  realisiert.

**Bemerkung 12.5**

Sei  $\mathcal{A}$   $\kappa$ -saturiert,  $\underbrace{X \subset A^n}_{\text{definierbar}}$  unendlich.  $\implies |X| \geq \kappa$ .

*Beweis.* Sonst:  $|X| < \kappa$ . Sei  $X = (\vec{c}_\alpha)_{\alpha < \mu}$  Aufzählung mit  $\mu < \kappa$ .

Kompaktheit

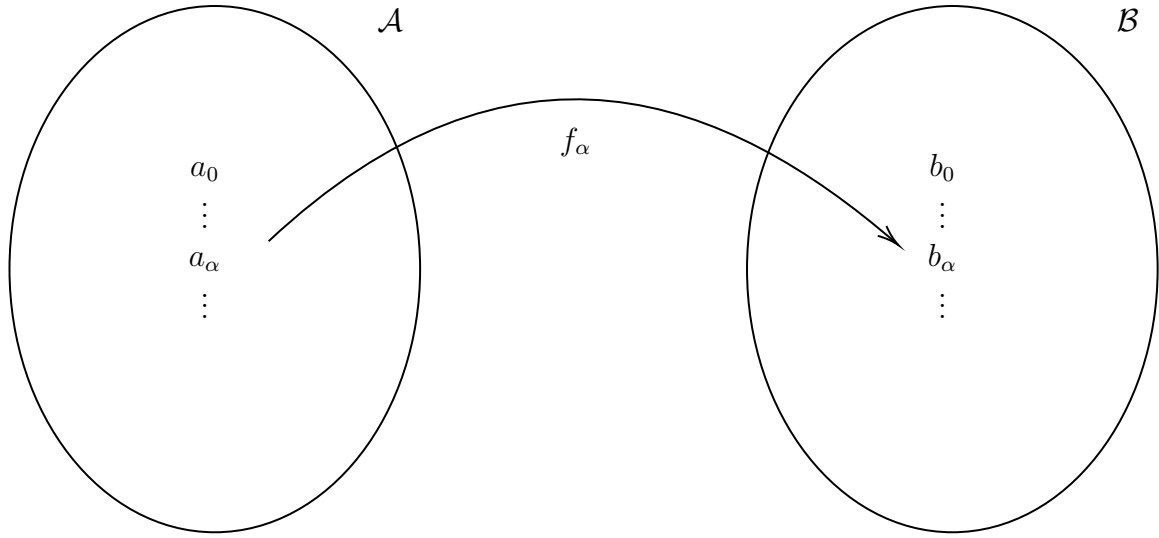
$$\sum(\vec{x}) = \{\vec{x} \in X\} \cup \{\neg(\vec{x} = \vec{c}_\alpha)\}_{\alpha < \mu}$$

ist eine partieller Typ über einer Menge  $D$  von Parametern,  $|D| < \kappa$ . Des Weiteren muss  $\Sigma$  eine Realisierung haben, das wäre jedoch ein  $c_\alpha$ . Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung 12.6**

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$  saturiert mit  $|A| = |B| \implies \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$

*Beweis.* Betrachte das folgende Bild:



$f_\alpha \subset f_{\alpha+1}$  elementare Abbildung,  $f_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} f_\beta$  für  $\gamma$  Limes, sodass  $a_\alpha \in \underbrace{\text{Dom}(f_{\alpha+1})}_{\text{Mächtigkeit } < |A|}, b_\alpha \in$

$\text{Im}(f_{\alpha+1}) \longrightarrow \bigcup f_\alpha : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$

$f_0 = \emptyset \checkmark$

Sei  $f_\alpha$  bereits konstruiert.  $\longrightarrow$  oBdA  $a_\alpha \notin \text{Dom}(f_\alpha)$ .

$\text{tp}^{\mathcal{A}}(a_\alpha / \text{Dom}(f_\alpha)) \longrightarrow$  1-Typ in  $\mathcal{B}$  über  $\text{Im}(f_\alpha)$ . Finde  $b'$  Realisierung.

$\xrightarrow{\text{saturiert}} f'_\alpha = f_\alpha \cup \{(a_\alpha, b')\}$  elementar.

Analog für  $b_\alpha$ :  $\text{tp}^{\mathcal{B}}(b_\alpha / \text{Im}(f'_\alpha)) \longrightarrow$  1-Typ in  $\mathcal{A}$  über  $\underbrace{\text{Dom}(f_\alpha) \cup \{a_\alpha\}}_{\text{Mächtigkeit } < |A|}$   $\square$

**Satz 12.7**

Sei  $\mathcal{L}$  eine abzählbare Sprache und  $A$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $\lambda \geq \aleph_0$ . Es existiert eine  $\lambda$ -saturierte elementare Erweiterung von  $A$ .

*Beweis.* Sei  $(p_\alpha)_{\alpha < \kappa}$  eine Aufzählung aller  $n$ -Typen in  $A$  über Teilmengen der Mächtigkeit  $< \lambda$ .

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}'_1 \preceq \mathcal{A}'_2 \preceq \dots \mathcal{A}'_\alpha$  realisiert den Typen  $p_\alpha$ . Setze  $\mathcal{A}_1 = \bigcup \mathcal{A}'_\alpha$ .



Iteriere  $\underbrace{\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}_1 \preceq \dots \preceq \mathcal{A}_\alpha \preceq \mathcal{A}_{\alpha+1} \preceq \dots}_{\lambda^+}$ , wobei  $\mathcal{A}_{\alpha+1}$  alle  $n$ -Typen über Teilmengen von  $A_\alpha$  der Mächtigkeit  $< \lambda$  realisiert. Kofinalität

$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha < \lambda^+} \mathcal{A}_\alpha$ .  $\mathcal{Z} : \mathcal{B}$  ist  $\lambda$ -saturiert.

Sei  $C \subset B$  mit  $|C| < \lambda$ . Es genügt zu zeigen, dass  $C \subset A_\alpha$  für ein  $\alpha < \lambda^+$ . Für jedes  $c \in C$  gibt es  $\alpha = \alpha(c) < \lambda^+$  kleinstmöglich mit  $c \in A_{\alpha(c)}$ . Wir müssen zeigen, dass es ein  $\beta < \lambda^+$  gibt, mit  $\alpha(c) \leq \beta$  für alle  $c \in C$ .

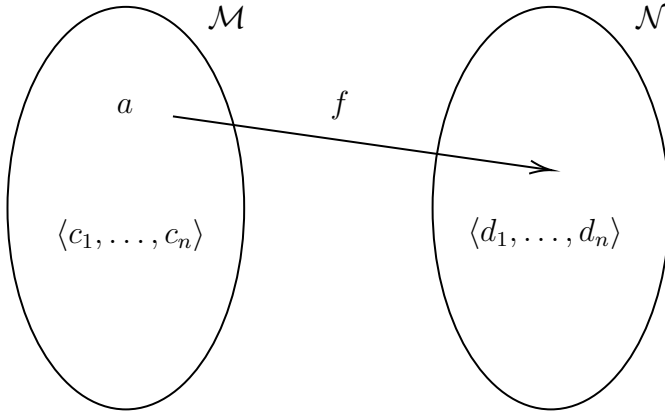
Sonst gibt es für jedes  $\beta < \lambda^+$  ein  $c \in C$  mit  $\beta < \alpha(c) \implies \lambda^+ \subset \bigcup_{\substack{c \in C \\ < \lambda}} \underbrace{\alpha(c)}_{\leq \lambda} \implies |\lambda^+| \leq \lambda$ . □

### Folgerung 12.8

Sei  $T$  eine konsistente, abzählbare Theorie mit unendlichen Modellen. Die Theorie  $T$  hat genau dann Quantorenelimination, wenn zwischen je zwei  $\aleph_0$ -saturierten Modellen von  $T$  die Kollektion aller partiellen Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen ein Back-&-Forth-System besitzt.

Ferner, wenn diese Kollektion nicht leer ist, ist  $T$  vollständig.

*Beweis.* „ $\implies$ “:  $\mathcal{M}, \mathcal{N}_0$  seien  $\aleph_0$ -saturiert.



$T$  hat Quantorenelimination  $\implies f$  ist elementar.

$\mathcal{Z} : \mathcal{M} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \implies \mathcal{N} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$

$T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}}) . \mathcal{M} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow \mathcal{N} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$ .

$\text{tp}^A(a/a_1, \dots, a_n) \longrightarrow$  1-Typ über  $d_1, \dots, d_n$  in  $\mathcal{N}$ .  $\xrightarrow[\mathcal{N}_{\aleph_0}\text{-saturiert}]{} \longrightarrow$  es wird von  $b$  in  $\mathcal{N}$  realisiert.  
 $\longrightarrow f \cup \{(a, b)\}$  ist elementar  $\Rightarrow$  definiert einen partiellen Isomorphismus  $\langle c_1, \dots, c_n, a \rangle \simeq \langle d_1, \dots, d_n, b \rangle$

$\text{„}\Leftarrow\text{“: Gegeben}$ 

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \models T & & \mathcal{N} \models T \\ \cup \text{US} & & \cup \text{US} \\ \langle c_1, \dots, c_n \rangle & & \langle d_1, \dots, d_n \rangle \end{array} .$$

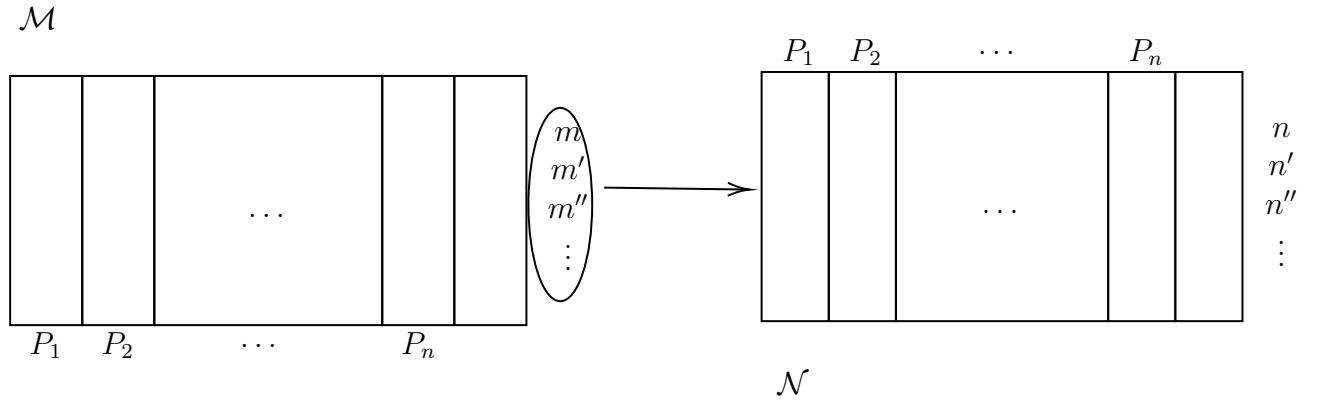
$\mathbb{Z}:$ 

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}, c_1, \dots, c_n) & \equiv & (\mathcal{N}, d_1, \dots, d_n) \\ \preceq & & \preceq \\ (\tilde{\mathcal{M}}, c_1, \dots, c_n) & \equiv & (\tilde{\mathcal{N}}, d_1, \dots, d_n) \\ \aleph_0\text{-saturiert} & \text{n. Konstr.} & \aleph_0\text{-saturiert} \end{array}$$

□

### Beispiel 12.9

$T, \mathcal{L} = \{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Jedes  $P_n$  unendlich,  $P_n$  &  $P_m$  disjunkt. Was ist das  $\aleph_0$ -saturierte Modell?



$\Sigma(x) = \{\neg P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  muss auch realisiert werden!

### Definition 12.10

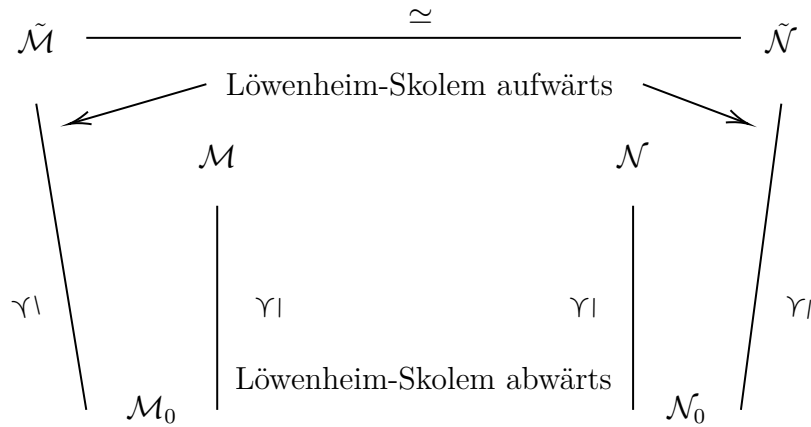
Sei  $T$  eine abzählbare konsistente Theorie mit unendlichen Modellen und  $\kappa \geq \aleph_0$  eine Kardinalzahl.

$T$  ist  $\kappa$ -kategorisch, falls  $T$  ein einziges Modell (bis auf Isomorphie) der Mächtigkeit  $\kappa$  besitzt.

### Bemerkung 12.11

Wenn  $T$   $\kappa$ -kategorisch ist, dann ist  $T$  vollständig.

*Beweis.* Betrachte das folgende Diagramm:



abzählbar

abzählbar

Aus  $\tilde{\mathcal{M}} \simeq \tilde{\mathcal{N}}$  folgt elementare Äquivalenz, daraus folgt die Behauptung.  $\square$

**Beispiel 12.12** • die Theorie der Zufallsgraphen ist  $\aleph_0$ -kategorisch

- die Theorie der  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume ist nicht  $\aleph_0$ -kategorisch
- aber: die Theorie der  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume ist  $\kappa$ -kategorisch für jedes  $\kappa > \aleph_0$
- die Theorie  $\exists^\infty x$  ist kategorisch, sowohl für  $\aleph_0$  als auch für  $\kappa > \aleph_0$

**Satz 12.13** (Morley)

Sei  $T$  eine abzählbare Theorie.  $T$  ist  $\lambda$ -kategorisch für ein  $\lambda > \aleph_0$  genau dann, wenn  $T$   $\kappa$ -kategorisch für jedes  $\kappa > \aleph_0$  ist.

*Hier ohne Beweis.*  $\square$

**Satz 12.14** (Ryll-Nardzewski)

Folgende Aussagen sind äquivalent für eine abzählbare vollständige Theorie ohne endliche Modelle:

- (a)  $T$  ist  $\aleph_0$ -kategorisch
- (b)  $S_n(T)$  ist endlich für jedes  $n \in \mathbb{N}$
- (c) Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  gibt es nur endlich viele Formeln in  $n$  freien Variablen (bis auf  $T$ -Äquivalenz)

**Bemerkung 12.15**

Es genügt nicht, dass  $S_n(T)$  endlich für *ein*  $n \in \mathbb{N}$  ist.

**Beispiel 12.16**

$T = \mathbb{Q}$ -Vektorraum.  $S_1(T) : \frac{(x \doteq 0)}{\neg(x \doteq 0)}$ , aber  $S_n(T) : \underbrace{(x \doteq \lambda y)}_{\text{unendlich viele Möglichkeiten}}$ . Vgl. dazu:

Blatt xx Aufgabe yy: unendlich  $\Leftrightarrow$  jeder Punkt isoliert

*Beweis Ryll-Nardzewski.* „(a)  $\Rightarrow$  (b)“: Seien  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $S_n(T)$  unendlich.  $\Rightarrow$  es gibt einen nicht isolierten Typen  $p \in S_n(T)$ . Dann wissen wir: Es gibt ein  $\mathcal{N} \models T$  abzählbar, welches  $p$  realisiert, und es gibt  $\mathcal{M} \models T$  abzählbar, welches  $p$  vermeidet. Somit folgt:  $\mathcal{N} \not\equiv \mathcal{M}$ .

„(b)  $\Rightarrow$  (c)“: Erinnerung:  $\varphi[\vec{x}] \stackrel{T\text{-äquivalent}}{\sim} \psi[\vec{x}] \Leftrightarrow$  in  $S_n(T)$  gilt  $[\varphi] = [\psi]$ .

Angenommen:  $S_n(T)$  endlich  $\stackrel{S_n(T) \text{ Hausdorff}}{\implies}$  es existiert ein  $\varphi_i \in p_i$  mit  $\neg\varphi_i \in p_j$  für  $i \neq j$ . Dann liefern  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  endlich viele Bool'sche Kombinationen. Dies beschreibt jede mögliche Formel in Variablen  $\implies$  endlich viele  $T$ -Äquivalenzklassen.

„(c)  $\Rightarrow$  (a)“: Zeige, dass jedes abzählbare Modell von  $T$   $\aleph_0$ -saturiert ist.

Sei  $\mathcal{M} \models T$  abzählbar,  $A \subset M$ ,  $|A| < \aleph_0$ . OBdA müssen wir nun 1-Typen über  $A$  realisieren. Sei  $p \in S_1^{\mathcal{M}}(A)$ .  $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ . Aus (c) folgt, dass es nur endlich viele Formeln  $\psi_1[x, \vec{y}], \dots, \psi_m[x, \vec{y}]$  in  $k$  Variablen modulo  $T$ -Äquivalenz gibt. Also gibt es nur endlich viele Formeln in einer freien Variable mit Parametern aus  $A$  modulo  $\mathcal{M}$ .

Setze  $\underbrace{\varphi \leq \psi}_{\mathcal{L}_A\text{-Formeln}}$ , falls  $\mathcal{M} \models \forall x(\varphi[x] \rightarrow \psi[x])$ . Diese Halbordnung ist kompatibel mit den

Äquivalenzklassen modulo  $\mathcal{M}$ .

Sei nun  $\varphi \in p$  kleinstmöglich. Noch  $\mathbb{Z}$ :  $\psi \in p \rightarrow (\varphi \wedge \psi) \leq \varphi \Rightarrow (\varphi \wedge \psi) \stackrel{\text{Modulo } \mathcal{M}}{\sim} \varphi$ .

$\mathcal{M} \models \forall x(\varphi[x] \rightarrow \psi[x]) \Rightarrow p$  ist isoliert  $\Rightarrow$  realisiert.  $\square$

**Folgerung 12.17**

Sei  $T$  vollständig und abzählbar.

$T$  ist  $\aleph_0$ -kategorisch  $\Leftrightarrow S_n(T)$  ist endlich  $\Leftrightarrow \mathcal{M} \models T, A \subset M$  endlich,  $S_n^{\mathcal{M}}(A)$  endlich

*Insbesondere:* Wenn  $T$   $\aleph_0$ -kategorisch ist, gibt es ein abzählbares  $\aleph_0$ -saturiertes Modell.

**Folgerung 12.18**

Sei  $\mathcal{A}$  eine Struktur,  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

$$\underbrace{\text{Th}(\mathcal{A})}_{=\{\chi \mid \mathcal{L}\text{-Aussage} \mid \mathcal{A} \models \chi\}} \text{ ist } \aleph_0\text{-kategorisch} \Leftrightarrow \text{Th}((A, a_1, \dots, a_n)) \text{ ist } \aleph_0\text{-kategorisch}$$

**Folgerung 12.19**

$T$  ist  $\aleph_0$ -kategorisch  $\Leftrightarrow$  jedes abzählbare Modell ist saturiert

**Satz 12.20** (Vaught'scher 2-Modellen-Satz)

Eine vollständige abzählbare Theorie kann nicht nur 2 abzählbare Modelle (bis auf Isomorphie) besitzen.

**Bemerkung 12.21**

Betrachte  $\mathcal{L} = \{<\} \cup \{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Die Theorie  $\text{Th}(\mathbb{Q}, <, c_n = n)$  hat 3 abzählbare Modelle (bis auf Isomorphie).<sup>17</sup>

*Beweis Vaught'scher 2-Modellen-Satz.* Sei  $T$  abzählbar, vollständig mit genau 2 abzählbaren Modellen (nicht isomorph)  $\Rightarrow T$  ist nicht  $\aleph_0$ -kategorisch!

$\Rightarrow$  es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $S_n(T)$  unendlich

$\Rightarrow$  es gibt einen  $n$ -Typ  $p$ , der nicht isoliert ist

$\curvearrowright$  Der Typ  $p$  wird in  $\mathcal{A}$  von  $\vec{a}$  realisiert

$\curvearrowright$  Der Typ  $p$  wird in  $\mathcal{B}$  vermieden

Jetzt haben wir:  $\text{Th}(\mathcal{A}, \vec{a})$  ist nicht  $\aleph_0$ -kategorisch (folgt mit (12.18)).

$\curvearrowright$  es gibt  $(\mathcal{C}, \vec{c}) \models \text{Th}(\mathcal{A}, \vec{a})$  mit  $(\mathcal{C}, \vec{c}) \not\cong (\mathcal{A}, \vec{a})$ .<sup>18</sup>

Beachte, dass  $\mathcal{C} \not\cong \mathcal{B}$ , denn in  $\mathcal{C}$  wird  $p$  durch  $\vec{c}$  realisiert. □

**Definition 12.22**

Sei  $T$  abzählbar und vollständig.  $T$  ist schmal, falls für jedes  $n \in \mathbb{N}$  der Typ  $S_n(T)$  abzählbar ist.

**Beispiel 12.23** (1) Die Theorie der  $\mathbb{Q}$ -Vektorräume ist schmal, aber nicht  $\aleph_0$ -kategorisch

(2) Die Theorie  $\text{ACF}_p$  mit  $p = 0$  oder  $p$  eine Primzahl ist nicht  $\aleph_0$ -kategorisch, aber schmal. Betrachte dazu insbesondere  $\bar{\mathbb{Q}} \not\cong \mathbb{Q}(\pi)$

(3)  $\text{Diag}(\mathbb{Q}, <)$  ist nicht schmal

(4) die Theorie aus Beispiel 12.9 ist nicht  $\aleph_0$ -kategorisch, aber schmal

**Lemma 12.24**

Eine vollständige, abzählbare Theorie ist genau dann schmal, wenn  $T$  ein abzählbares, saturiertes Modell besitzt.

*Beweis.* „ $\Leftarrow$ “: Sei  $\mathcal{M} \models T$  abzählbar und saturiert. Wir haben gesehen:  $S_n(T) = S_n^{\mathcal{M}}(\emptyset)$  ist abzählbar, weil  $\mathcal{M}$  abzählbar ist, und jeder  $n$ -Typ über  $\emptyset$  muss in  $\mathcal{M}$  realisiert werden.

„ $\Rightarrow$ “:  $T$  schmal  $\rightarrow S_n(T)$  abzählbar  $\hookrightarrow$  für jedes  $\mathcal{M} \models T$ ,  $A \subset M$ :  $S_n^{\mathcal{M}}(A)$  abzählbar.

Weiter konstruieren wir, wie zuvor, eine Kette von Modellen wie folgt:

$$\mathcal{M}_0 \preceq \mathcal{M}_1 \preceq \cdots \preceq \mathcal{M}_k \preceq \cdots$$

abz.        abz.        abz.

<sup>17</sup>Hinweis für den Beweis: Muss eine monoton wachsende Folge eine obere Schranke haben?

<sup>18</sup>Unklar bleibt hier: warum sollte  $\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$  nicht gelten? Der gegebene Beweis ist fehlerhaft. Ein korrekter Beweis findet sich auf Seite 51.

wobei wir jeweils alle 1-Typen auf endlichen Teilmengen betrachten und diese im nachfolgenden Modell realisieren<sup>19</sup>. Schließlich setzen wir

$$\underbrace{\mathcal{M}}_{\models T} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_k$$

$\mathcal{M}$  ist als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen ebenfalls abzählbar.  $\square$

*Korrektur Beweis Vaught'scher 2-Modellen-Satz.* Wenn  $S_n(T)$  überabzählbar wäre, dann sind wir fertig, denn ein abzählbares Modell kann nur abzählbar viele Typen realisieren  $\rightarrow$  es muss überabzählbar viele Modelle geben.

D. h. oBdA können wir annehmen, dass  $T$  schmal ist  $\Rightarrow$  es gibt  $\mathcal{A}$  saturiert, abzählbar. Wenn  $T$   $\aleph_0$ -kategorisch ist  $\rightarrow$  fertig.

Sonst gäbe es ein  $p \in S_n(T)$  nicht isoliert  $\rightarrow p$  wird im abzählbaren Modell  $\mathcal{B}$  vermieden. Aber:  $p$  wird in  $\mathcal{A}$  von  $\vec{a}$  realisiert.

$\text{Th}(\mathcal{A}, \vec{a})$  ist nicht  $\aleph_0$ -kategorisch  $\Rightarrow$  es gibt  $\underbrace{(\mathcal{C}, \vec{c})}_{\text{vermeidet einen Typ}} \neq (\mathcal{A}, \vec{a})$  abzählbar.

$\hookrightarrow \mathcal{C} \models T, \mathcal{C} \not\cong \mathcal{B}$  (weil  $\vec{c} \models p$ )

Es gilt  $\mathcal{C} \not\cong \mathcal{A}$ , weil  $\mathcal{C}$  nicht saturiert ist! Angenommen  $\mathcal{C}$  wäre saturiert. Dann finden wir ein nicht-leeres Back-&-Forth-System zwischen  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{A}$ . Insbesondere gibt es dann einen Isomorphismus mit  $\vec{c} \mapsto \vec{a}$ . Das steht im Widerspruch zur Konstruktion!  $\square$

## 13 Fraïsses Amalgamierungsmethode für $\aleph_0$ -kategorische Theorien

### Definition 13.1

Sei  $\mathcal{L}$  eine abzählbare Sprache. Eine Klasse  $\mathfrak{K}$  von endlich erzeugten abzählbaren  $\mathcal{L}$ -Strukturen ist eine *Fraïsses-Klasse*, falls  $\mathfrak{K}$  bis auf Isomorphie abzählbar ist und folgende Eigenschaften besitzt:

HP <sup>20</sup> Für  $A \in \mathfrak{K}$  und  $B \subset A$  Unterstruktur  $\Rightarrow B \in \mathfrak{K}$

JEP <sup>21</sup> Für  $A, B \in \mathfrak{K}$  gibt es ein  $D \in \mathfrak{K}$  mit

$$A \hookrightarrow D \hookleftarrow B$$

<sup>19</sup>Vergleiche dazu auch Übung xyz

<sup>20</sup>hereditary property

<sup>21</sup>joint embedding property

AP <sup>22</sup> Für alle Diagramme aus  $\mathfrak{K}$  gibt es ein  $D \in \mathfrak{K}$  mit kommutiert

**Beispiel 13.2** • Klasse aller endlichen Graphen für  $\mathcal{L} = \{R\}$

- Klasse aller endlichen Körper mit  $\text{char} = p$  mit  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ . Für JEP:  $\mathbb{F}_{p^k} \subset \mathbb{F}_{p^m}$ , AP ebenso, HP: endliche Teilringe sind
- Klasse aller zyklischen endlichen Graphen: ist keine Fraïsse-Klasse

**Definition 13.3**

Eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{M}$  ist  $\mathfrak{K}$ -reich, falls  $\mathcal{M}$  abzählbar ist und

$$\mathfrak{K} \underset{\substack{\text{bis auf} \\ \text{Isomorphie}}}{=} \{ \mathcal{A} \underset{\text{US}}{\subset} \mathcal{M}, \mathcal{A} \text{ endlich erzeugt} \}$$

und für jede endlich erzeugte Unterstruktur  $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$  und  $\mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \in \mathfrak{K}$  gibt es ein  $\mathcal{B}' \underset{\text{US}}{\subset} \mathcal{M}$  endlich erzeugt, welches  $\mathcal{A}$  enthält und

$$\mathcal{B} \underset{g}{\simeq} \mathcal{B}' \mid g(f(a)) = a \text{ für alle } a \in \mathcal{A}$$

**Bemerkung 13.4**

Es genügt für Reichheit, wenn  $\{ \mathcal{A} \underset{\text{US}}{\subset} \text{endlich erzeugt} \} \subset \mathfrak{K}$  und  $\mathcal{M}$  und den Rest von Definition 13.3 erfüllt.

*Beweis.* Sei  $\mathcal{B} \in \mathfrak{K}$  beliebig. □

---

<sup>22</sup>amalgamation property