

Modelltheorie

Wintersemester 2019/20

Mitschrift von Floris Remmert

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Abteilung für mathematische Logik
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

7. November 2019

Inhaltsverzeichnis

I	Theorien und Quantorenelimination	1
1	Erinnerung	1
2	Tarskis Test	4
3	Quantorenelimination	6
4	Beispiele klassischer Theorien	11
5	Ultrafilter & der Satz von Ax	15

Teil I

Theorien und Quantorenelimination

Satz 0.1 (Morley)

Sei T eine Theorie, welche ein einziges (bis auf Isomorphie) Modell der Mächtigkeit \aleph_0 besitzt. Dann besitzt T für jede Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ ein einziges Modell der Mächtigkeit κ (bis auf Isomorphie).

1 Erinnerung

Definition 1.1 • Eine Sprache \mathcal{L} ist eine Kollektion von Konstanten-, Funktions-, und Relationszeichen

- Eine \mathcal{L} -Struktur \mathcal{A} besteht aus einer nicht-leeren Grundmenge (oder Universum) A zusammen mit Interpretationen der Symbole aus \mathcal{L} :

- Für jedes Funktionszeichen f der Stelligkeit n

$$f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$$

- Für jedes Relationszeichen R der Stelligkeit m

$$R^{\mathcal{A}} \subset A^m$$

- Eine Einbettung F von \mathcal{A} nach \mathcal{B} ist eine injektive Abbildung $F : A \longrightarrow B$, welche mit den Interpretationen kompatibel¹ ist
- Ein Isomorphismus ist eine surjektive Einbettung.
- \mathcal{A} ist eine Unterstruktur von \mathcal{B} , falls $A \subset B$ und die Inklusion $\iota : A \longrightarrow B$ eine Einbettung bestimmt

Bemerkung: Sei \mathcal{B} eine \mathcal{L} -Struktur, $\emptyset \neq A \subset B$. Dann gibt es eine Unterstruktur von \mathcal{B} , welche von A erzeugt wird.

Das Universum besteht aus A zusammen mit dem Abschluss von A unter allen Interpretationen der Funktionszeichen von \mathcal{L} .

¹das bedeutet, dass Funktions- und Relationszeichen bei Hin- und Rückrichtung erhalten bleiben

Definition 1.2

Sei $(I, <)$ eine partielle Ordnung. Die Ordnung ist gerichtet, falls für $i, j \in I$ gibt es $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

Bemerkung: Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von \mathcal{L} -Strukturen indexiert nach der gerichteten partiellen Ordnung I derart, dass für $i \leq j$ gilt: $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}_j$.

Die Menge $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ist das Universum einer (eindeutig bestimmten) \mathcal{L} -Struktur

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \quad (1)$$

Falls I eine lineare Ordnung ist, dann ist $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Kette.

Zu 1:

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}_i}$ für ein (alle) $i \in I$, denn $c^{\mathcal{A}_i} = c^{\mathcal{A}_j} = c^{\mathcal{A}_k}$, wegen gerichteter Ordnung
- $a_1, \dots, a_n \in A = \bigcup_{i \in I} A_i \implies \exists i \in I$ mit $a_1, \dots, a_n \in A_i$. Also ist $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n)$ wohldefiniert.
- $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}}$ gdw es ein $i \in I$ gibt mit $a_1, \dots, a_m \in A_i$ und $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}_i}$

Beachte, dass $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$ für alle $i \in I$.

Definition 1.3

Eine atomare Formel ist ein Ausdruck der Form $(t_1 \doteq t_2)$, t_1, \dots, t_k Terme, $R(t_1, \dots, t_k)$.

Die Kollektion von Formeln ist die kleinste Klasse, welche alle atomaren Formeln enthält und derart, dass:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ Formel} &\implies \neg \varphi \text{ Formel} \\ \varphi, \psi \text{ Formel} &\implies (\varphi \vee \psi) \text{ Formel} \\ \varphi \text{ Formel}, x \text{ Variable} &\implies \exists x \varphi \text{ Formel, } (x \text{ heißt dann „gebunden“}) \end{aligned}$$

Abk.:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi) &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \forall x \varphi &= \neg \exists x \neg \varphi \\ (\varphi \rightarrow \psi) &= (\neg\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \end{aligned}$$

Bemerkung: • Jede Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ lässt sich in pränexer Normalform umschreiben: $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$. Das ist eine quantorfreie Formel, diese lässt sich weiter zerlegen in KNF bzw. DNF.

- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine Aussage
- Eine Theorie ist eine Kollektion von Aussagen

Beispiel 1.4

Sei \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur. Erweitere die Sprache zu der Sprache $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{d_a\}_{a \in A}$.

\mathcal{A} ist eine \mathcal{L}_A -Struktur, $d_a^{\mathcal{A}} = a$.

- $\text{Diag}^{\text{at}}(\mathcal{A}) = \{\text{quantorenfreie } \mathcal{L}_A\text{-Aussagen } \chi \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$ heißt „atomares Diagramm“
- $\text{Diag}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{L}\text{-Aussagen } \theta \text{ mit } \mathcal{A} \models \theta\}$ heißt „vollständiges Diagramm“

Sei nun \mathcal{B} eine \mathcal{L}_A -Struktur.

$\mathcal{B} \models \text{Diag}^{\text{at}}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ einbetten lässt

$$A \longrightarrow B$$

$$a \mapsto d_a^{\mathcal{B}}$$

$\mathcal{B} \models \text{Diag}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow$ die obige Abbildung ist elementar

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)], a_1, \dots, a_n \in A, \varphi[x_1, \dots, x_n]$ Formel

Definition 1.5 • T ist konsistent, falls T ein Modell besitzt.

- T ist vollständig, falls T konsistent ist und je zwei Modelle von T elementar äquivalent sind.

Satz 1.6 (Kompaktheitssatz)

Eine Theorie ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent² ist.

Wie zeigen wir, dass $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$?

Satz 1.7 (Back & Forth)

$S = \{F : \underset{\substack{\mathcal{C} \\ \cup S}}{\longrightarrow} \underset{\substack{\mathcal{D} \\ \cup S}}{\mathcal{B}}, F \text{ partieller Isomorphismus zwischen } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{D} \text{ geeignet}^3\}$.

Back: Für alle $F \in S$ und $b \in B$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $G \in S$ mit $G \supset F$ Erweiterung und $b \in \text{Im}(G)$.

²endlich konsistent bedeutet: jede Teilmenge der Theorie besitzt ein Modell.

³bspw. endlich erzeugt

Forth: Für alle $F \in S$ und $a \in A$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $H \in S$, mit $H \supset F$ Erweiterung mit $a \in \text{Dom}(H)$

\mathcal{A} und \mathcal{B} heißen dann „Back & Forth äquivalent“

\rightarrow ist jedes $F \in S$ elementar, so gilt insbesondere $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

2 Tarskis Test

Lemma 2.1 (Tarskis Test)

Sei \mathcal{B} eine \mathcal{L} -Struktur und $A \subset B$ Teilmenge derart, dass für jede \mathcal{L} -Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ und Elemente $a_1, \dots, a_n \in A$:

falls:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b] \text{ für ein } b \in B \Rightarrow \text{ existiert } a \in A \text{ sodass } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \quad (2)$$

dann ist A das Universum einer elementaren Unterstruktur von \mathcal{B} .

Insbesondere: Falls $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ Unterstruktur, ist $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow A$ erfüllt 2.

Beweis. Betrachte $A \neq \emptyset \rightarrow$ Betrachte $\varphi[y] = (y \doteq y)$. $B \neq \emptyset \rightarrow \exists b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[b]$.
 $\hookrightarrow \exists a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a]$

Beh.: Für jedes Konstantenzeichen $c \in \mathcal{L}$ ist $c^{\mathcal{B}} \in A$. $\hookrightarrow \varphi[y] = (y \doteq c)$, $\mathcal{B} \models \varphi[c^{\mathcal{B}}] \Rightarrow$ es gibt $a \in A$ mit $a = c^{\mathcal{B}}$.

Beh.: A ist unter den Funktionen $f^{\mathcal{B}}$ abgeschlossen, für jedes Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$.

Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n, y] = (y \doteq f(x_1, \dots, x_n)) \checkmark$

Für $R \in \mathcal{L}$ m -stellig setze $R^{\mathcal{A}} = A^m \cap R^{\mathcal{B}} \longrightarrow$ somit bildet A eine \mathcal{L} -Unterstruktur \mathcal{A} von \mathcal{B} .

Noch zu zeigen: $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, d. h. $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ \mathcal{L} -Formel.

Seien dazu $a_1, \dots, a_n \in A$.

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad (3)$$

Induktiv über den Aufbau von φ .

φ ist atomar $\longrightarrow \checkmark$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] & \Leftrightarrow & \mathcal{B} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] & & \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \end{array}$$

$\varphi = \neg\psi \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$: $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ sodass $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$ für ein $a \in A \subset B \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt $b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xRightarrow{2} \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{3} \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Für „insbesondere“: Angenommen, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ eine \mathcal{L} -Formel, $a_1, \dots, a_n \in A$. Dann: $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$ für ein $b \in B \Rightarrow \mathcal{B} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{A} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$
□

Proposition 2.2 (aufwärts Löwenheim-Skolem)

Sei \mathcal{A} eine unendliche \mathcal{L} -Struktur, und $\kappa < \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$. Dann gibt es eine elementare \mathcal{L} -Erweiterung $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}$ der Mächtigkeit κ .

Beweis. $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$, wobei $\{c_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ eine Menge neuer Konstantenzeichen ist, ist konsistent weil sie endlich konsistent⁴ ist.

Aus der Konstruktion von Henkin hat $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$ ein Modell der Mächtigkeit der Sprache.

\rightarrow ein Modell der Mächtigkeit κ □

Bemerkung: $|A| = n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B} \succeq \mathcal{A} \Rightarrow |B| = n$

Proposition 2.3 (abwärts Löwenheim-Skolem)

Sei \mathcal{B} eine \mathcal{L} -Struktur und $S \subset B$ beliebig. Dann gibt es eine elementare Unterstruktur $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ mit $A \supset S$ und $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.

Bemerkung: \mathbb{C} in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$, $S = \emptyset \Rightarrow$ es gibt eine abzählbare elementare Unterstruktur von \mathbb{C} . $\rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \preceq \mathbb{C}$.

⁴Kompaktheit

3 Quantorenelimination

Beweis 2.3. Setze $S_0 = S$. Angenommen S_k wurde bereits konstruiert, wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$, jede \mathcal{L} -Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ und Elemente $a_1, \dots, a_n \in S_k$ ein Element $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in B$ derart, dass $\mathcal{B} \models ((\exists y \in \varphi)[a_1, \dots, a_n] \rightarrow \varphi[a_1, \dots, a_n, a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]}])$. Setze $S_{k+1} = S_k \cup \{a_{\varphi}\}_{\varphi \mathcal{L}\text{-Formel}, (a_1, \dots, a_n) \in S_k}$

Definiere $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \supset S$. Wir überprüfen, dass A den Test von Tarski erfüllt. Sei $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ eine \mathcal{L} -Formel, $a_1, \dots, a_n \in A$.

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$ für ein $b \in B \Rightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_1, \dots, a_n \in S_k \Rightarrow$ es gibt ein $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in S_{k+1} \subset A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$

Ferner ist $|A| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |S|\}$. □

Folgerung 2.4

Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie von \mathcal{L} -Strukturen, sodass für $i \leq j$ ist $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$. Dann ist $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine elementare Erweiterung jeder \mathcal{A}_i .

Beweis. Wir beweisen induktiv über den Aufbau von $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$, dass für alle $i \in I$, für alle $a_1, \dots, a_n \in A_i$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

φ atomar \rightarrow klar, denn $\mathcal{A}_i \subset_{US} \mathcal{A}$

$\varphi = \neg \varphi \Rightarrow$ ok!

$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow$ ok!

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A_i$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$
 $\Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$
ind. über ψ

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $b \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$ mit $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \Rightarrow$ es gibt $j \in I$ mit $b \in A_j \Rightarrow$ es existiert $k \in I$ mit $i \leq k, j \leq k, a_1, \dots, a_n, b \in A_k$
 $\Rightarrow \mathcal{A}_k \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xRightarrow{\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_k}$ es gibt ein $a \in A_k$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. □

3 Quantorenelimination

Definition 3.1

Eine Theorie T hat Quantorenelimination, falls jede \mathcal{L} -Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ äquivalent

3 Quantorenelimination

modulo T zu einer quantorenfreien \mathcal{L} -Formel $\psi[x_1, \dots, x_n]$ ist.

$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow \psi[x_1, \dots, x_n])$$

Beispiel 3.2

Sei $\mathcal{L} := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ gegeben. Betrachte die Menge $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und es gibt } x \in \mathbb{R} \text{ mit } ax^2 + bx + c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0\}$.

Diese Formel ist in \mathcal{L} nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel, in $\mathcal{L}_1 := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$ hingegen doch. Somit ist die Menge in \mathcal{L}_1 quantorenfrei.

Bemerkung: • Wenn T inkonsistent ist, dann hat T immer Quantorenelimination

- Wenn T Quantorenelimination hat, und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ mit $\mathcal{A} \subseteq_{\text{US}} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ Übung

Definition 3.3 • Eine einfache Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$

- Eine primitive Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \psi[x_1, \dots, x_n, y]$, wobei ψ eine endliche Konjunktion von atomaren Formeln und Negationen ist

Lemma 3.4

Eine (konsistente) Theorie T hat genau dann Quantorenelimination, wenn jede primitive Existenzformel zu einer quantorenfreien Formel äquivalent modulo T ist.

Beweis. „ \Rightarrow “: klar

„ \Leftarrow “: Beachte, $\exists y(\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\exists y\psi_1 \vee \exists y\psi_2)$. Insbesondere, wenn T Quantorenelimination für primitive Existenzformeln hat, dann hat T Quantorenelimination für einfache Existenzformeln.

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & = \exists y \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n]}_{\text{umschreiben in DNF}} & \sim \exists y(\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n) & \sim & \underbrace{\bigvee_{i=1}^n \exists y\psi_i}_{\text{primitive Existenzformel}} \\ \text{einfache Existenzformel} & & & & \end{array}$$

Zu zeigen: Jede beliebige Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ ist äquivalent zu einer quantorenfreien Formel modulo T .

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] \underbrace{\sim}_{\substack{\text{pränexe} \\ \text{Normalform}}} Q_1 y_1 \dots Q_m y_m \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\text{quantorenfrei}}, \text{ wobei } Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

Induktion über m :

3 Quantorenelimination

$m = 0$: ✓

$m = 1$: $\varphi = Q \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y]}_{\text{quantorenfrei}}$

$Q = \exists$ φ einfache Existenzformel ✓

$Q = \forall$ $\varphi \sim \neg \underbrace{\exists y \neg \psi}_{\substack{\text{einfache} \\ \text{Existenzformel}}} \rightarrow \text{eliminieren} \rightarrow \checkmark$

$m - 1 \rightarrow m$: $\varphi[x_1, \dots, x_n] = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots \underbrace{Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\varphi'[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}$. φ' ist eine einfache Existenzformel, wir eliminieren also:

$\underbrace{m-1 \text{ viele Quantoren}} \underbrace{\Theta[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}_{\text{quantorenfrei}}$

\Rightarrow Induktion

□

Beispiel 3.5

Sei $\mathcal{K} = \{\text{unendliche Mengen}\}$. Diese Klasse lässt sich definieren durch die Theorie $T = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j=1}^n \neg(x_i \doteq x_j))\}_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Theorie ist vollständig! Betrachte jetzt die $\exists^\infty x$ definierbaren Mengen:

$$\{b \in A \mid \mathcal{A} \models \underbrace{\varphi}_{\text{quantorenfrei}}[b, a_1, \dots, a_m]\}$$

\downarrow
endlich oder koendlich

Lemma 3.6 (Trennungslemma)

Seien T_1 und T_2 zwei \mathcal{L} -Theorien, und Δ eine Kollektion von \mathcal{L} -Aussagen, welche unter endlichen Konjunktionen und Disjunktionen abgeschlossen ist. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- 1) Es gibt eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $T_1 \models \chi$
- 2) Für alle $\mathcal{A} \models T_1$, $\mathcal{B} \models T_2$ gibt es eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg \chi$

Bemerkung: Das ganze ist trivial für inkonsistente Theorien.

Beweis. 1 \Rightarrow 2: trivial!

3 Quantorenelimination

2 \Rightarrow 1: OBdA T_1, T_2 konsistent. Sei $\mathcal{A} \models T_1$, setze $\Sigma_{\mathcal{A}} = \{\chi, \chi \text{ Aussagen in } \Delta \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$.

Betrachte jetzt $T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}}$. Ist diese Theorie konsistent? Nein: Wäre $\mathcal{B} \models T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow$ es gibt $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi \Rightarrow \chi \in \Sigma_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{B} \models \chi$. Widerspruch!

Das bedeutet (wegen Kompaktheit), dass es $\chi_1, \dots, \chi_r \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ gibt mit $T_2 \cup \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ inkonsistent.

$$\Leftrightarrow T_2 \models \bigvee_{i=1}^r \neg\chi_i \Rightarrow T_2 \models \neg\left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ =\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta}}^r \chi_i\right)$$

Das heißt für jedes $\mathcal{A} \models T_1$ gibt es $\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta$ mit $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{A} \models \chi_{\mathcal{A}}$.

Sei nun $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}}\}_{\mathcal{A} \models T_1} \cdot^5 \Leftrightarrow$ inkonsistent nach Konstruktion.

$\xRightarrow{\text{Kompaktheit}}$ es existieren $\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}$ mit $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}\}$ inkonsistent. Also:

$$T_1 \models \bigvee_{j=1}^n \chi_{\mathcal{A}_j} =: \chi \in \Delta$$

$T_1 \models \chi$. Wollen zeigen: $T_2 \models \neg\chi$. Aber $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}_i}, 1 \leq i \leq n$. □

Folgerung 3.7

Zwei Theorien T_1 und T_2 werden von einer quantorenfreien Aussage getrennt, wenn je zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1$ und $\mathcal{B} \models T_2$ von einer quantorenfreien Aussage getrennt werden.

$$\rightarrow \exists \chi \text{ quantorenfrei} : \mathcal{A} \models \chi \text{ und } \mathcal{B} \models \neg\chi$$

Satz 3.8

Sei T eine Theorie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) T hat Quantorenelimination.
- 2) Gegeben Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ und endlich erzeugte Unterstrukturen $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} = \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ und $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ eine Formel. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow {}^6 \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

- 3) Gegeben Modelle \mathcal{A}, \mathcal{B} mit isomorph erzeugten Unterstrukturen $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$ wie in 2) und für alle $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ primitive Existenzformel, gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

⁵Ist das überhaupt eine Menge? Es genügt die Einschränkung bis auf Isomorphie, das sollte reichen. . .

⁶Durch vertauschen von \mathcal{A} und \mathcal{B} gilt hier sogar \Leftrightarrow .

3 Quantorenelimination

Ferner, falls T konsistent ist, 1) gilt und je zwei Modelle von T isomorphe endlich erzeugte Unterstrukturen besitzen, dann ist T vollständig mit Quantorenelimination.

Bemerkung: Wie benutzen wir diesen Satz? Letztlich wollen wir Back-&-Forth-Äquivalenz zeigen.

Beweis. 1) \Rightarrow 2): Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n]$. T hat Quantorenelimination \leftarrow es gibt $\psi[x_1, \dots, x_n]$ quantorenfrei mit: $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \psi[\vec{x}])$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \mathcal{A} \models T & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{C} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \psi \text{ quantorenfrei} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{D} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{C} \approx \mathcal{D} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{B} \models T &
 \end{array}$$

2) \Rightarrow 3): klar.

3) \Rightarrow 1): Um zu zeigen, dass T Quantorenelimination besitzt, genügt es nur primitive Existenzformeln $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ zu betrachten.

Seien dazu e_1, \dots, e_n neue Konstantenzeichen. Betrachte die Sprache $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$, sowie die Theorien $T_1 = T \cup \{\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$ und $T_2 = T \cup \{\neg\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$.

Falls T_1 und T_2 durch eine quantorenfreie Aussage $\underbrace{\psi[e_1, \dots, e_n]}_{\substack{\text{quantorenfreie} \\ \mathcal{L}\text{-Formel}}}$ in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ trennbar sind, so folgt:

$$\begin{array}{ll}
 T \cup \{\varphi[\vec{e}]\} \models \psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\} \models \neg\psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\neg\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 \Rightarrow T = (\psi[\vec{e}] \rightarrow \varphi[\vec{e}]) & \Rightarrow \underset{\text{Aufgabe}^7}{T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}})}
 \end{array}$$

Sonst, falls also T_1, T_2 nicht trennbar sind, gibt es zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1 \cup \{\varphi[\vec{e}]\}, \mathcal{B} \models T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\}$, welche alle quantorenfreien Aussagen in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ gleich erfüllen.

Seien $c_1 = e_1^{\mathcal{A}}, d_i = e_i^{\mathcal{B}}$. Betrachte jetzt $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{A} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$ und $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{B} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$. Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$ und $\mathcal{B} \models \neg\varphi[d_1, \dots, d_n]$.

⁷weil e_1, \dots, e_n neue Konstantenzeichen sind

4 Beispiele klassischer Theorien

Um einen Widerspruch zu bekommen genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}, c_i \mapsto d_i$.

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow D : \\ \underbrace{t^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n]}_{\mathcal{L}\text{-Term}} &\mapsto t^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \end{aligned}$$

Ist diese Abbildung wohldefiniert?

$$\begin{aligned} \text{Angenommen } t_1^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] &= t_2^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] \\ \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{als } \mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}\text{-Struktur}} &\models \underbrace{(t_1[e_1, \dots, e_n] \dot{=} t_2[e_1, \dots, e_n])}_{\text{quantorenfreie Aussage}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{B} &\models (t_1[\vec{e}] \dot{=} t_2[\vec{e}]) \\ \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] &= t_2^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \\ \longrightarrow &\text{wohldefiniert und injektiv} \end{aligned}$$

induktiv über den Aufbau zeigen wir: Das ist ein Isomorphismus.

Zu „ferner“: Angenommen T hat Quantorenelimination, ist konsistent und je zwei Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ haben isomorphe, endlich erzeugte Unterstrukturen

$$\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \underbrace{\mathcal{C}}_{c_i \mapsto d_i}^{\subseteq \mathcal{A}} \simeq \underbrace{\mathcal{D}}^{\subseteq \mathcal{B}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$$

T ist vollständig $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Sei χ eine \mathcal{L} -Aussage und schreibe $\chi = \chi[x_1, \dots, x_n]$.

$$\mathcal{A} \models \chi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \chi[c_1, \dots, c_n] \xleftrightarrow{2)} \mathcal{B} \models \chi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \chi$$

□

4 Beispiele klassischer Theorien

Beispiel 4.1

$T = \exists^\infty$ hat Quantorenelimination und ist vollständig.

Beispiel 4.2

DLO (dichte lineare Ordnung ohne Randpunkte). Sei $\mathcal{L} = \{<\}$.

$$\begin{aligned} \text{DLO} = & \{ \forall x (\neg x < x) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y ((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \exists z ((x < y) \rightarrow (x < z < y)) \} \\ & \cup \{ \forall x \exists u \exists v (u < x < v) \} \\ & \cup \{ \exists x (x = x) \} \end{aligned}$$

Diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination. Es gibt zwei Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

1)

$$\begin{aligned}\varphi[x_1, \dots, x_n] &= \exists y \left(\bigwedge_i \overbrace{\Theta_i[x_1, \dots, x_n, y]}^{\text{atomar oder Negation davon}} \right) \\ &= \exists y (\psi_1[x_1, \dots, x_n] \wedge \bigwedge_i \bigwedge_{\substack{x_i=y \\ x_i \neq y \\ x_i < y \\ y < x_i}} \dots)\end{aligned}$$

$$x_i = y \wedge x_j = y \Leftrightarrow x_i = x_j$$

$$x_i = y \wedge y < x_j \Leftrightarrow x_i < x_j \longrightarrow \text{induktiv lassen sich alle Quantoren eliminieren}$$

2) Gegeben $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$, mit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Isomorphismus und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \text{DLO}$.

OBdA wähle $c_1 < c_2 < \dots < c_n \xrightarrow{F} d_1 < d_2 < \dots < d_n$. $\longrightarrow F$ in Back-&-Forth-System.

1. Fall: $a < c_1 \rightarrow$ wähle $b < d_1$ in \mathcal{B} , weil d_1 kein Randpunkt ist.
2. Fall: $a > c_n \rightarrow$ wähle $b < c_n$ in \mathcal{B} , weil d_i kein Randpunkt ist.
3. Fall: $\exists i \mid c_i < a < c_{i+1} \rightarrow$ wähle b zwischen d_i und d_{i+1} weil \mathcal{B} dicht ist.

Vollständigkeit folgt, weil Unterstruktur und Punkt zu Punkt.

Beispiel 4.3 (Vektorraum)

Sei K ein Körper, $\mathcal{L}_{\text{VR}} = \{0, +, f_\lambda\}_{\lambda \in K}$. Dann ist die Theorie $T \underset{\text{unendliche } K\text{-VR}}{\parallel} = \{ \forall x \forall y \forall z \dots \} \dots^8$

vollständig und hat Quantorenelimination.

Wie zuvor gibt es zwei verschiedene Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

1) Betrachte die folgende primitive Existenzformel:

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \left(\bigwedge_{\text{endlich}} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_y \dot{=} 0) \wedge \bigwedge_{\text{endlich}} \neg(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n \dot{=} 0) \right)$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

⁸diese Theorie ist axiomatisierbar, für eine beispielhafte Axiomatisierung vergleiche Klausur zu mathematische Logik im SS 2019.

4 Beispiele klassischer Theorien

$$1) \text{ Alle } \lambda \text{ vor der Variable } y \text{ sind Null} \rightarrow \underbrace{\bigwedge_{\text{endlich}} \lambda x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0}_{\psi[x_1 \dots x_n]}$$

2) *Es gibt ein $\lambda \neq 0$. Dann gilt OBdA: $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. Ersetze jetzt jedes Vorkommen von y durch $\tilde{\lambda}_1 x_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n x_n$. Erhalte eine quantorenfreie Bedingung in x_1, \dots, x_n .*

2) (semantisch)

Ansatz:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & ? & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \\ \langle 2 \rangle & \simeq & \langle (3, 7) \rangle \end{array}$$

Wir brauchen also: \mathcal{A} und \mathcal{B} unendlichdimensional, um ein Back & Forth-System zu konstruieren. Es sei dazu

$$\tilde{\mathcal{A}} \succeq \mathcal{A} \supset \langle c_1, \dots, c_n \rangle \simeq \langle d_1, \dots, d_n \rangle \subset \mathcal{B} \preceq \tilde{\mathcal{B}}$$

für $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ unendlichdimensional.

Insbesondere gilt jetzt auch:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$$

Angenommen $\langle c_1, \dots, c_n \rangle \xrightarrow{F} \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ liegt in einem Back & Forth-System zwischen $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$. Dann folgt insbesondere auch:

$$\tilde{\mathcal{B}} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

Es ergeben sich also die folgenden beiden Fragen:

1) Finden wir ein Back & Forth-System zwischen $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$?

Angenommen also wir haben $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ bereits konstruiert. Zeige: Es gibt ein Back & Forth-System.

$c \in \text{UR}$: trivial.

$c \notin \text{UR}$: $\dim_K \tilde{\mathcal{B}} = \infty \geq n + 1 \rightarrow$ es gibt ein $d \notin \langle d_1, \dots, d_n \rangle \Rightarrow G$ die Erweiterung

$$\begin{array}{ccc} \langle c_1, \dots, c_n \rangle & \longrightarrow & \langle d_1, \dots, d_n \rangle \\ c_i & \longmapsto & d_i \\ c & \longmapsto & d \end{array}$$

2) Zur Existenz von $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$:

So funktioniert es nicht: $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{ \exists x \exists y \neg(\lambda x + \mu y \dot{=} 0) \}_{\substack{\lambda, \mu \in K \\ (\lambda, \mu) \neq (0,0)}}$.

Seien $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ neue Konstantenzeichen.

$$\underbrace{\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{ \neg \sum_i \lambda_i e_i \dot{=} 0 \}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}}}_{\text{endlich konsistent}}$$

Zur Vollständigkeit: Das endliche Erzeugnis zweier nicht-trivialer Vektoren ist Isomorph, somit folgt Vollständigkeit.

Beispiel 4.4

ACF Wir betrachten jetzt die Theorie algebraisch abgeschlossener Körper (ACF) in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\text{Ring}} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$.

$$\text{ACF} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Körperaxiome} \\ \{ \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists y (y^k + x_{k-1}y^{k-1} + \dots + x_1y + x_0 \dot{=} 0) \}_{k \geq 1} \end{array} \right.$$

ACF hat Quantorenelimination, ist aber nicht vollständig. Die Vervollständigungen sind

$$\underbrace{\text{ACF}_0}_{1+1+\dots+1 \dot{=} 0} \quad \text{und} \quad \underbrace{\text{ACF}_p}_{\substack{1+\dots+1 \dot{=} 0 \\ p\text{-Mal}}} \quad \text{für jede Primzahl } p.$$

Satz 4.5 (Kurzeinführung Galois'sche Theorie)

Beweis 4.4. Betrachte OBdA die Abbildung

$$F = \text{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle) \longrightarrow \text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$$

Fall 1: a ist algebraisch über K

\hookrightarrow sei $m_a(T)$ das Minimalpolynom von a über K . $F(m_a)(T)$ ist ein normiertes Polynom über $\text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle) \subset B$.

B ist algebraisch abgeschlossen \Rightarrow es gibt b in B mit $F(m_a)(b) = 0 \xRightarrow{\text{Galoistheorie}} F$ lässt sich erweitern.

Fall 2: a ist transzendent über $K = \text{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle)$.

Wenn wir ein $b \in B$ finden, welches transzendent über $\text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$ ist

$$\hookrightarrow \text{Ring}_A(K, a) \simeq \text{Ring}_B(F(K), b)$$

Ziel: Wir brauchen $\mathcal{A} \preceq \tilde{\mathcal{A}}$ mit unendlich vielen Elementen, welche algebraisch unabhängig sind.

$$\underbrace{\text{Diag}(A) \cup \{\neg(B(e_1, \dots, e_n) \doteq 0)\}_{\substack{P \in A[T_1, \dots, T_n] \setminus \{0\} \\ P(e_1, \dots, e_n) \neq 0}}}_{\text{endlich konsistent}}$$

□

5 Ultrafilter & der Satz von Ax

Anwendung: Wir wollen eine Aussage der folgenden Art bekommen: Sei $f : \mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C}$.
 $\rightarrow f$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Satz 5.1 (Ax)

Sei $f : \mathbb{C}^n \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C}^n$ eine polynomiale⁹ injektive Abbildung. Dann ist f surjektiv.

Motivation: Sei G eine Gruppe der Ordnung p . Für einen Körper der Charakteristik p bekommen wir dann:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{g}} \xrightarrow{\text{wirkt}} \underbrace{K}_{\substack{\text{Körper der} \\ \text{Charakteristik} \\ p}} \longrightarrow K$$

$$x \longmapsto \underbrace{1 + \dots + 1}_{g\text{-Mal}} + x$$

$$\rightarrow h + (g + x) = (h + g) + x$$

Für einen Körper der Charakteristik 0:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{k}} \xrightarrow{\text{wirkt}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\underbrace{\mu_p}_{\substack{p\text{-te Einheits-} \\ \text{wurzel in } \mathbb{C}}} = \{e^{\frac{2\pi i k}{p}}\}_{0 \leq k < p} \quad z \longmapsto \omega z$$

$$\rightarrow \omega_1(\omega \cdot z) = (\omega_1 \omega) \cdot z$$

Satz 5.2 (Lefschetz'sches Prinzip)

Eine Aussage χ in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ gilt für \mathbb{C} genau dann, wenn es unendlich viele Primzahlen p derart gibt, dass χ in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p gilt.

⁹polynomial bedeutet, dass jede Koordinate der Abbildung durch Polynome gegeben ist.

Beweis von Satz 5.1 (Satz von Ax). Sei $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ injektiv. Die Aussage „ f injektiv $\Rightarrow f$ surjektiv“ lässt sich als $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Aussage schreiben.

D. h. es genügt zu zeigen, dass diese Aussage für alle Körper $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ gilt.

Was ist $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$? Ein algebraischer abgeschlossener Körper der Charakteristik p .

Galoistheo.

$$\mathbb{F}_p^{\text{alg}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n, \text{ wobei } F_n \subset F_{n+1} \text{ endliche Körper mit Charakteristik } p.$$

$$F_1 = \{0, 1\}$$

$$F_2 = \dots$$

$$\vdots$$

Sei nun $g : (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n \rightarrow (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$ eine surjektive polynomiale Abbildung.

Zeige: g ist surjektiv. Sei $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$. Dann gibt es ein N , sodass $b_i \in \mathbb{F}_n$ für \mathbb{F}_n endlich.

Ferner können wir N so wählen, dass alle Koeffizienten aus g in \mathbb{F}_n liegen.

$$\begin{array}{ccc} g|_{\mathbb{F}_N^n} : \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} & \longrightarrow & \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} \text{ ist injektiv (geerbt)} \\ & & \Downarrow \text{endlich} \\ & & \text{surjektiv} \end{array}$$

□

Beweis vom Prinzip von Lefschetz (Satz 5.2). „ \Rightarrow “ Sei χ eine $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Aussage derart, dass $\mathbb{C} \models \chi$. Dann ist $\underbrace{\text{ACF}_0}_{\text{alle elementar äquivalent}} \cup \{\neg\chi\}$ inkonsistent, weil ACF_0 vollständig ist.

Dann gibt es eine endliche Teilmenge $T_0 \subset \text{ACF}_0 \cup \{\neg\chi\}$, welche inkonsistent ist.
 \Rightarrow Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ sodass:

$$T_0 \subset \underbrace{\text{ACF} \cup \{\neg(\underbrace{1 + \dots + 1}_k \doteq 0)\}_{k < N}}_{\text{inkonsistent}} \cup \{\neg\chi\}$$

Für $p > N$ eine Primzahl: $\text{ACF}_p \models \chi$

„ \Leftarrow “ \rightsquigarrow Ultrafilter und Satz von Łoś

□

Exkurs: Sei im Folgenden $I \neq \emptyset$.

Definition 5.3

Ein Ultrafilter \mathcal{U} auf I ist ein endlich additives Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \{0, 1\}$$

Bemerkung: Die Definition entspricht der von Blatt 1 Aufgabe 3, denn:

- 1) $\mu_{\mathcal{U}}(I) = 1, \mu_{\mathcal{U}}(\emptyset) = 0$.
- 2) $\mu_{\mathcal{U}}(X) = 1 \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$
 $X \subset Y \subset I$
- 3) Angenommen $\mu_{\mathcal{U}}(X) = \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$ aber $\mu_{\mathcal{U}}(X \cap Y) = 0$. Dann gilt $X = X \setminus Y \dot{\cup} X \cap Y \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(X \setminus Y) = 1$ und $\mu_{\mathcal{U}}(Y \setminus X) = 1$, sowie $I \supset X \cup Y = X \setminus Y \dot{\cup} Y \setminus X \dot{\cup} X \cap Y$.
 $\rightsquigarrow \mu_{\mathcal{U}}(I) = 1 \geq 1 + 1 + 0$, ein Widerspruch.
- 4) Gegeben $X \subset I$ entweder $X \in \mathcal{U}$ oder $I \setminus X \in \mathcal{U}$
 $\mu_{\mathcal{U}}(X)=1$ $\mu_{\mathcal{U}}(I \setminus X)=1$

Definition 5.4

Ein Hauptultrafilter ist ein Maß der Form δ_x für ein $x \in I$.

Definition 5.5

Falls I unendlich ist, so gibt es generisch/reiche Ultrafilter, nämlich die Ultrafilter, welche alle koendlichen Mengen enthalten.

Definition 5.6

Angenommen $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ist eine \mathcal{L} -Struktur. Sei ferner \mathcal{U} ein Ultrafilter. Definiere eine Äquivalenzrelation¹⁰ auf $\prod_{\mathcal{U}} A_i$:

$$\underbrace{\prod_{\mathcal{U}} A_i}_{\text{kartesisches Produkt}}$$

$$(a_i)_{i \in I} \sim_{\mathcal{U}} (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{U} \iff \mu_{\mathcal{U}}(\{i \in I \mid a_i = b_i\}) = 1$$

Definition 5.7

Sei $\prod_{\mathcal{U}} A_i$ die Menge $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$. Wir definieren Interpretationen der Symbole aus \mathcal{L} auf $\prod_{\mathcal{U}} A_i$:

- Sei $c \in \mathcal{L}$ ein Konstantenzeichen. Definiere:

$$c^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} = (c^{\mathcal{A}_i})_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

¹⁰vergleiche dazu Blatt 1, Aufgabe 3

- Sei $f \in \mathcal{L}$ ein n -stelliges Funktionszeichen. Definiere:

$$f^{\prod \mathcal{U}}([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}) = (f^{\mathcal{A}_i}(a_1^i, \dots, a_n^i))_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

Ist das wohldefiniert? Ja, denn fast überall gleich.

- Sei \mathcal{R} ein m -stelliges Relationszeichen auf \mathcal{L} . Definiere:

$$([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_m]_{\mathcal{U}}) \in \mathcal{R}^{\prod \mathcal{U}} \iff \{i \in I \mid (a_1^i, \dots, a_m^i) \in \mathcal{R}^{\mathcal{A}_i}\} \in \mathcal{U}$$

Wenn \mathcal{U} ein Hauptfilter ist, dann ist er erzeugt vom Element $\{i_0\}$.

$$\begin{aligned} & \overbrace{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i}^{\mathcal{L}\text{-Struktur}} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}_{i_0} \text{ ist ein Isomorphismus} \\ & (a_i)_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}} \longmapsto a_{i_0} \end{aligned}$$

Definition 5.8

Wenn \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur und \mathcal{U} ein Ultrafilter ist, dann ist $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}$ die Ultrapotenz.

Beispiel 5.9

Sei \mathcal{U} ein reicher/generischer Ultrafilter auf \mathbb{N} . Betrachte $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$.

$$\mathcal{N}^{\mathcal{U}} \ni (1, 2, 3, \dots) / \sim_{\mathcal{U}} > (1, 1, 1, \dots) / \sim_{\mathcal{U}}$$