

Modelltheorie

Wintersemester 2019/20

Mitschrift von Floris Remmert

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Abteilung für mathematische Logik
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

31. Oktober 2019

Inhaltsverzeichnis

I	Theorien und Quantorenelimination	1
1	Erinnerung	1
2	Tarskis Test	4
3	Quantorenelimination	6
4	Beispiele klassischer Theorien	11

Teil I

Theorien und Quantorenelimination

Satz 0.1 (Morley)

Sei T eine Theorie, welche ein einziges (bis auf Isomorphie) Modell der Mächtigkeit \aleph_0 besitzt. Dann besitzt T für jede Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ ein einziges Modell der Mächtigkeit κ (bis auf Isomorphie).

1 Erinnerung

Definition 1.1 • Eine Sprache \mathcal{L} ist eine Kollektion von Konstanten-, Funktions-, und Relationszeichen

- Eine \mathcal{L} -Struktur \mathcal{A} besteht aus einer nicht-leeren Grundmenge (oder Universum) A zusammen mit Interpretationen der Symbole aus \mathcal{L} :

- Für jedes Funktionszeichen f der Stelligkeit n

$$f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$$

- Für jedes Relationszeichen R der Stelligkeit m

$$R^{\mathcal{A}} \subset A^m$$

- Eine Einbettung F von \mathcal{A} nach \mathcal{B} ist eine injektive Abbildung $F : A \longrightarrow B$, welche mit den Interpretationen kompatibel¹ ist
- Ein Isomorphismus ist eine surjektive Einbettung.
- \mathcal{A} ist eine Unterstruktur von \mathcal{B} , falls $A \subset B$ und die Inklusion $\iota : A \longrightarrow B$ eine Einbettung bestimmt

Bemerkung: Sei \mathcal{B} eine \mathcal{L} -Struktur, $\emptyset \neq A \subset B$. Dann gibt es eine Unterstruktur von \mathcal{B} , welche von A erzeugt wird.

Das Universum besteht aus A zusammen mit dem Abschluss von A unter allen Interpretationen der Funktionszeichen von \mathcal{L} .

¹das bedeutet, dass Funktions- und Relationszeichen bei Hin- und Rückrichtung erhalten bleiben

Definition 1.2

Sei $(I, <)$ eine partielle Ordnung. Die Ordnung ist gerichtet, falls für $i, j \in I$ gibt es $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

Bemerkung: Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von \mathcal{L} -Strukturen indexiert nach der gerichteten partiellen Ordnung I derart, dass für $i \leq j$ gilt: $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}_j$.

Die Menge $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ist das Universum einer (eindeutig bestimmten) \mathcal{L} -Struktur

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \quad (1)$$

Falls I eine lineare Ordnung ist, dann ist $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Kette.

Zu 1:

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}_i}$ für ein (alle) $i \in I$, denn $c^{\mathcal{A}_i} = c^{\mathcal{A}_j} = c^{\mathcal{A}_k}$, wegen gerichteter Ordnung
- $a_1, \dots, a_n \in A = \bigcup_{i \in I} A_i \implies \exists i \in I$ mit $a_1, \dots, a_n \in A_i$. Also ist $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n)$ wohldefiniert.
- $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}}$ gdw es ein $i \in I$ gibt mit $a_1, \dots, a_m \in A_i$ und $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}_i}$

Beachte, dass $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$ für alle $i \in I$.

Definition 1.3

Eine atomare Formel ist ein Ausdruck der Form $(t_1 \dot{=} t_2)$, t_1, \dots, t_k Terme, $R(t_1, \dots, t_k)$.

Die Kollektion von Formeln ist die kleinste Klasse, welche alle atomaren Formeln enthält und derart, dass:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ Formel} &\implies \neg \varphi \text{ Formel} \\ \varphi, \psi \text{ Formel} &\implies (\varphi \vee \psi) \text{ Formel} \\ \varphi \text{ Formel}, x \text{ Variable} &\implies \exists x \varphi \text{ Formel, } (x \text{ heißt dann „gebunden“}) \end{aligned}$$

Abk.:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi) &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \forall x \varphi &= \neg \exists x \neg \varphi \\ (\varphi \rightarrow \psi) &= (\neg\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \end{aligned}$$

Bemerkung: • Jede Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ lässt sich in pränexer Normalform umschreiben: $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$. Das ist eine quantorfreie Formel, diese lässt sich weiter zerlegen in KNF bzw. DNF.

- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine Aussage
- Eine Theorie ist eine Kollektion von Aussagen

Beispiel 1.4

Sei \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur. Erweitere die Sprache zu der Sprache $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{d_a\}_{a \in A}$.

\mathcal{A} ist eine \mathcal{L}_A -Struktur, $d_a^{\mathcal{A}} = a$.

- $\text{Diag}^{at}(\mathcal{A}) = \{\text{quantorenfreie } \mathcal{L}_A\text{-Aussagen } \chi \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$ heißt „atomares Diagramm“
- $\text{Diag}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{L}\text{-Aussagen } \theta \text{ mit } \mathcal{A} \models \theta\}$ heißt „vollständiges Diagramm“

Sei nun \mathcal{B} eine \mathcal{L}_A -Struktur.

$\mathcal{B} \models \text{Diag}^{at}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ einbetten lässt

$$A \longrightarrow B$$

$$a \mapsto d_a^{\mathcal{B}}$$

$\mathcal{B} \models \text{Diag}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow$ die obige Abbildung ist elementar

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)], a_1, \dots, a_n \in A, \varphi[x_1, \dots, x_n]$ Formel

Definition 1.5 • T ist konsistent, falls T ein Modell besitzt.

- T ist vollständig, falls T konsistent ist und je zwei Modelle von T elementar äquivalent sind.

Satz 1.6 (Kompaktheitssatz)

Eine Theorie ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent² ist.

Wie zeigen wir, dass $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$?

Satz 1.7 (Back & Forth)

$S = \{F : \underset{\substack{\mathcal{C} \\ \subseteq \\ \mathcal{A}}}{\mathcal{C}} \longrightarrow \underset{\substack{\mathcal{D} \\ \subseteq \\ \mathcal{B}}}{\mathcal{D}}, F \text{ partieller Isomorphismus zwischen } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{D} \text{ geeignet}^3\}$.

Back: Für alle $F \in S$ und $b \in B$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $G \in S$ mit $G \supset F$ Erweiterung und $b \in \text{Im}(G)$.

²endlich konsistent bedeutet: jede Teilmenge der Theorie besitzt ein Modell.

³bspw. endlich erzeugt

Forth: Für alle $F \in S$ und $a \in A$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $H \in S$, mit $H \supset F$ Erweiterung mit $a \in \text{Dom}(H)$

\mathcal{A} und \mathcal{B} heißen dann „Back & Forth äquivalent“

\rightarrow ist jedes $F \in S$ elementar, so gilt insbesondere $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

2 Tarskis Test

Lemma 2.1 (Tarskis Test)

Sei \mathcal{B} eine \mathcal{L} -Struktur und $A \subset B$ Teilmenge derart, dass für jede \mathcal{L} -Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ und Elemente $a_1, \dots, a_n \in A$:

falls:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b] \text{ für ein } b \in B \Rightarrow \text{ existiert } a \in A \text{ sodass } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \quad (2)$$

dann ist A das Universum einer elementaren Unterstruktur von \mathcal{B} .

Insbesondere: Falls $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ Unterstruktur, ist $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ erfüllt 2.

Beweis. Betrachte $A \neq \emptyset \rightarrow$ Betrachte $\varphi[y] = (y \doteq y)$. $B \neq \emptyset \rightarrow \exists b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[b]$.
 $\hookrightarrow \exists a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a]$

Beh.: Für jedes Konstantenzeichen $c \in \mathcal{L}$ ist $c^{\mathcal{B}} \in A$. $\hookrightarrow \varphi[y] = (y \doteq c)$, $\mathcal{B} \models \varphi[c^{\mathcal{B}}] \Rightarrow$ es gibt $a \in A$ mit $a = c^{\mathcal{B}}$.

Beh.: A ist unter den Funktionen $f^{\mathcal{B}}$ abgeschlossen, für jedes Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$.

Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n, y] = (y \doteq f(x_1, \dots, x_n))$ ✓

Für $R \in \mathcal{L}$ m -stellig setze $R^{\mathcal{A}} = A^m \cap R^{\mathcal{B}} \longrightarrow$ somit bildet A eine \mathcal{L} -Unterstruktur \mathcal{A} von \mathcal{B} .

Noch zu zeigen: $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, d. h. $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ \mathcal{L} -Formel.

Seien dazu $a_1, \dots, a_n \in A$.

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad (3)$$

Induktiv über den Aufbau von φ .

φ ist atomar $\longrightarrow \checkmark$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] & \Leftrightarrow & \mathcal{B} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] & & \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \end{array}$$

$\varphi = \neg\psi \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$: $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ sodass $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$ für ein $a \in A \subset B \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt $b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xRightarrow{2} \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{3} \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Für „insbesondere“: Angenommen, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ eine \mathcal{L} -Formel, $a_1, \dots, a_n \in A$. Dann: $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$ für ein $b \in B \Rightarrow \mathcal{B} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{A} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$
□

Proposition 2.2 (aufwärts Löwenheim-Skolem)

Sei \mathcal{A} eine unendliche \mathcal{L} -Struktur, und $\kappa < \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$. Dann gibt es eine elementare \mathcal{L} -Erweiterung $\mathcal{B} \geq \mathcal{A}$ der Mächtigkeit κ .

Beweis. $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$, wobei $\{c_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ eine Menge neuer Konstantenzeichen ist, ist konsistent weil sie endlich konsistent⁴ ist.

Aus der Konstruktion von Henkin hat $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$ ein Modell der Mächtigkeit der Sprache.

\rightarrow ein Modell der Mächtigkeit κ . □

Bemerkung: $|A| = n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B} \geq \mathcal{A} \Rightarrow |B| = n$

Proposition 2.3 (abwärts Löwenheim-Skolem)

Sei \mathcal{B} eine \mathcal{L} -Struktur und $S \subset B$ beliebig. Dann gibt es eine elementare Unterstruktur $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ mit $A \supset S$ und $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.

Bemerkung: \mathbb{C} in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$, $S = \emptyset \Rightarrow$ es gibt eine abzählbare elementare Unterstruktur von \mathbb{C} . $\rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \preceq \mathbb{C}$.

⁴Kompaktheit

3 Quantorenelimination

Beweis 2.3. Setze $S_0 = S$. Angenommen S_k wurde bereits konstruiert, wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$, jede \mathcal{L} -Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ und Elemente $a_1, \dots, a_n \in S_k$ ein Element $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in B$ derart, dass $\mathcal{B} \models ((\exists y \in \varphi)[a_1, \dots, a_n] \rightarrow \varphi[a_1, \dots, a_n, a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]}])$. Setze $S_{k+1} = S_k \cup \{a_{\varphi}\}_{\varphi \mathcal{L}\text{-Formel}, (a_1, \dots, a_n) \in S_k}$.

Definiere $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \supset S$. Wir überprüfen, dass A den Test von Tarski erfüllt. Sei $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ eine \mathcal{L} -Formel, $a_1, \dots, a_n \in A$.

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$ für ein $b \in B \Rightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_1, \dots, a_n \in S_k \Rightarrow$ es gibt ein $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in S_{k+1} \subset A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$

Ferner ist $|A| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |S|\}$. □

Folgerung 2.4

Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie von \mathcal{L} -Strukturen, sodass für $i \leq j$ ist $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$. Dann ist $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine elementare Erweiterung jeder \mathcal{A}_i .

Beweis. Wir beweisen induktiv über den Aufbau von $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$, dass für alle $i \in I$, für alle $a_1, \dots, a_n \in A_i$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

φ atomar \rightarrow klar, denn $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$

$\varphi = \neg \varphi \Rightarrow$ ok!

$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow$ ok!

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A_i$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$
 $\Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$
ind. über ψ

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $b \in A = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ mit $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \Rightarrow$ es gibt $j \in I$ mit $b \in \mathcal{A}_j \Rightarrow$ es existiert $k \in I$ mit $i \leq k, j \leq k, a_1, \dots, a_n, b \in \mathcal{A}_k$
 $\Rightarrow \mathcal{A}_k \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xRightarrow{\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_k}$ es gibt ein $a \in \mathcal{A}_k$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. □

3 Quantorenelimination

Definition 3.1

Eine Theorie T hat Quantorenelimination, falls jede \mathcal{L} -Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ äquivalent

3 Quantorenelimination

modulo T zu einer quantorenfreien \mathcal{L} -Formel $\psi[x_1, \dots, x_n]$ ist.

$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow \psi[x_1, \dots, x_n])$$

Beispiel 3.2

Sei $\mathcal{L} := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ gegeben. Betrachte die Menge $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und es gibt } x \in \mathbb{R} \text{ mit } ax^2 + bx + c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0\}$.

Diese Formel ist in \mathcal{L} nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel, in $\mathcal{L}_1 := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$ hingegen doch. Somit ist die Menge in \mathcal{L}_1 quantorenfrei.

Bemerkung: • Wenn T inkonsistent ist, dann hat T immer Quantorenelimination

- Wenn T Quantorenelimination hat, und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ mit $\mathcal{A} \subseteq_{\text{US}} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ Übung

Definition 3.3 • Eine einfache Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$

- Eine primitive Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \psi[x_1, \dots, x_n, y]$, wobei ψ eine endliche Konjunktion von atomaren Formeln und Negationen ist

Lemma 3.4

Eine (konsistente) Theorie T hat genau dann Quantorenelimination, wenn jede primitive Existenzformel zu einer quantorenfreien Formel äquivalent modulo T ist.

Beweis. „ \Rightarrow “: klar

„ \Leftarrow “: Beachte, $\exists y(\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\exists y\psi_1 \vee \exists y\psi_2)$. Insbesondere, wenn T Quantorenelimination für primitive Existenzformeln hat, dann hat T Quantorenelimination für einfache Existenzformeln.

$$\begin{array}{ccccc} \varphi & = \exists y \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n]}_{\text{umschreiben in DNF}} & \sim \exists y(\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n) & \sim & \underbrace{\bigvee_{i=1}^n \exists y\psi_i}_{\text{primitive Existenzformel}} \\ \text{einfache Existenzformel} & & & & \end{array}$$

Zu zeigen: Jede beliebige Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ ist äquivalent zu einer quantorenfreien Formel modulo T .

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] \underbrace{\sim}_{\substack{\text{pränexe} \\ \text{Normalform}}} Q_1 y_1 \dots Q_m y_m \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\text{quantorenfrei}}, \text{ wobei } Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

Induktion über m :

3 Quantorenelimination

$m = 0$: ✓

$m = 1$: $\varphi = Q \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y]}_{\text{quantorenfrei}}$

$Q = \exists$ φ einfache Existenzformel ✓

$Q = \forall$ $\varphi \sim \neg \underbrace{\exists y \neg \psi}_{\substack{\text{einfache} \\ \text{Existenzformel}}} \rightarrow \text{eliminieren} \rightarrow \checkmark$

$m - 1 \rightarrow m$: $\varphi[x_1, \dots, x_n] = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots \underbrace{Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\varphi'[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}$. φ' ist eine einfache Existenzformel, wir eliminieren also:

$\underbrace{m-1 \text{ viele Quantoren}} \underbrace{\Theta[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}_{\text{quantorenfrei}}$

\Rightarrow Induktion

□

Beispiel 3.5

Sei $\mathcal{K} = \{\text{unendliche Mengen}\}$. Diese Klasse lässt sich definieren durch die Theorie $T = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j=1}^n \neg(x_i \doteq x_j))\}_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Theorie ist vollständig! Betrachte jetzt die $\exists^\infty x$ definierbaren Mengen:

$$\{b \in A \mid \mathcal{A} \models \underbrace{\varphi}_{\text{quantorenfrei}}[b, a_1, \dots, a_m]\}$$

\downarrow
endlich oder koendlich

Lemma 3.6 (Trennungslemma)

Seien T_1 und T_2 zwei \mathcal{L} -Theorien, und Δ eine Kollektion von \mathcal{L} -Aussagen, welche unter endlichen Konjunktionen und Disjunktionen abgeschlossen ist. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- 1) Es gibt eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $T_1 \models \chi$
- 2) Für alle $\mathcal{A} \models T_1$, $\mathcal{B} \models T_2$ gibt es eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg \chi$

Bemerkung: Das ganze ist trivial für inkonsistente Theorien.

Beweis. 1 \Rightarrow 2: trivial!

3 Quantorenelimination

2 \Rightarrow 1: OBdA T_1, T_2 konsistent. Sei $\mathcal{A} \models T_1$, setze $\Sigma_{\mathcal{A}} = \{\chi, \chi \text{ Aussagen in } \Delta \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$.

Betrachte jetzt $T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}}$. Ist diese Theorie konsistent? Nein: Wäre $\mathcal{B} \models T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}} \Leftrightarrow$ es gibt $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi \Rightarrow \chi \in \Sigma_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{B} \models \chi$. Widerspruch!

Das bedeutet (wegen Kompaktheit), dass es $\chi_1, \dots, \chi_r \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ gibt mit $T_2 \cup \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ inkonsistent.

$$\Leftrightarrow T_2 \models \bigvee_{i=1}^r \neg\chi_i \Rightarrow T_2 \models \neg\left(\bigwedge_{\substack{i=1 \\ =\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta}}^r \chi_i\right)$$

Das heißt für jedes $\mathcal{A} \models T_1$ gibt es $\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta$ mit $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{A} \models \chi_{\mathcal{A}}$.

Sei nun $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}}\}_{\mathcal{A} \models T_1} \cdot^5 \Leftrightarrow$ inkonsistent nach Konstruktion.

$\xRightarrow{\text{Kompaktheit}}$ es existieren $\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}$ mit $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}\}$ inkonsistent. Also:

$$T_1 \models \bigvee_{j=1}^n \chi_{\mathcal{A}_j} =: \chi \in \Delta$$

$T_1 \models \chi$. Wollen zeigen: $T_2 \models \neg\chi$. Aber $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}_i}, 1 \leq i \leq n$. □

Folgerung 3.7

Zwei Theorien T_1 und T_2 werden von einer quantorenfreien Aussage getrennt, wenn je zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1$ und $\mathcal{B} \models T_2$ von einer quantorenfreien Aussage getrennt werden.

$$\rightarrow \exists \chi \text{ quantorenfrei} : \mathcal{A} \models \chi \text{ und } \mathcal{B} \models \neg\chi$$

Satz 3.8

Sei T eine Theorie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- 1) T hat Quantorenelimination.
- 2) Gegeben Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ und endlich erzeugte Unterstrukturen $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} = \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ und $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ eine Formel. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow {}^6\mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

- 3) Gegeben Modelle \mathcal{A}, \mathcal{B} mit isomorph erzeugten Unterstrukturen $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$ wie in 2) und für alle $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ primitive Existenzformel, gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

⁵Ist das überhaupt eine Menge? Es genügt die Einschränkung bis auf Isomorphie, das sollte reichen. . .

⁶Durch vertauschen von \mathcal{A} und \mathcal{B} gilt hier sogar \Leftrightarrow .

3 Quantorenelimination

Ferner, falls T konsistent ist, 1) gilt und je zwei Modelle von T isomorphe endlich erzeugte Unterstrukturen besitzen, dann ist T vollständig mit Quantorenelimination.

Bemerkung: Wie benutzen wir diesen Satz? Letztlich wollen wir Back-&-Forth-Äquivalenz zeigen.

Beweis. 1) \Rightarrow 2): Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n]$. T hat Quantorenelimination \leftarrow es gibt $\psi[x_1, \dots, x_n]$ quantorenfrei mit: $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \psi[\vec{x}])$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \mathcal{A} \models T & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{C} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \psi \text{ quantorenfrei} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{D} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{C} \approx \mathcal{D} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{B} \models T &
 \end{array}$$

2) \Rightarrow 3): klar.

3) \Rightarrow 1): Um zu zeigen, dass T Quantorenelimination besitzt, genügt es nur primitive Existenzformeln $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ zu betrachten.

Seien dazu e_1, \dots, e_n neue Konstantenzeichen. Betrachte die Sprache $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$, sowie die Theorien $T_1 = T \cup \{\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$ und $T_2 = T \cup \{\neg\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$.

Falls T_1 und T_2 durch eine quantorenfreie Aussage $\underbrace{\psi[e_1, \dots, e_n]}_{\substack{\text{quantorenfreie} \\ \mathcal{L}\text{-Formel}}}$ in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ trennbar sind, so folgt:

$$\begin{aligned}
 T \cup \{\varphi[\vec{e}]\} \models \psi[\vec{e}] &\Rightarrow T \models (\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\} \models \neg\psi[\vec{e}] &\Rightarrow T \models (\neg\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 \Rightarrow T &= (\psi[\vec{e}] \rightarrow \varphi[\vec{e}]) \xRightarrow{\text{Aufgabe}^7} T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}})
 \end{aligned}$$

Sonst, falls also T_1, T_2 nicht trennbar sind, gibt es zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1 \cup \{\varphi[\vec{e}]\}, \mathcal{B} \models T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\}$, welche alle quantorenfreien Aussagen in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ gleich erfüllen.

Seien $c_1 = e_1^{\mathcal{A}}, d_i = e_i^{\mathcal{B}}$. Betrachte jetzt $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{A} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$ und $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{B} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$. Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$ und $\mathcal{B} \models \neg\varphi[d_1, \dots, d_n]$.

⁷weil e_1, \dots, e_n neue Konstantenzeichen sind

4 Beispiele klassischer Theorien

Um einen Widerspruch zu bekommen genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}, c_i \mapsto d_i$.

$$C \longrightarrow D : \\ \underbrace{t^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n]}_{\mathcal{L}\text{-Term}} \mapsto t^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n]$$

Ist diese Abbildung wohldefiniert?

$$\begin{aligned} &\text{Angenommen } t_1^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] = t_2^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] \\ &\Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{als } \mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}\text{-Struktur}} \models \underbrace{(t_1[e_1, \dots, e_n] \doteq t_2[e_1, \dots, e_n])}_{\text{quantorenfreie Aussage}} \\ &\Leftrightarrow \mathcal{B} \models (t_1[\vec{e}] \doteq t_2[\vec{e}]) \\ &\Leftrightarrow t_1^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] = t_2^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \\ &\longrightarrow \text{wohldefiniert und injektiv} \end{aligned}$$

induktiv über den Aufbau zeigen wir: Das ist ein Isomorphismus.

Zu „ferner“: Angenommen T hat Quantorenelimination, ist konsistent und je zwei Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ haben isomorphe, endlich erzeugte Unterstrukturen

$$\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \underbrace{\mathcal{C}}_{\substack{\subseteq \mathcal{A} \\ c_i \mapsto d_i}} \simeq \underbrace{\mathcal{D}}_{\subseteq \mathcal{B}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$$

T ist vollständig $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Sei χ eine \mathcal{L} -Aussage und schreibe $\chi = \chi[x_1, \dots, x_n]$.

$$\mathcal{A} \models \chi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \chi[c_1, \dots, c_n] \xleftrightarrow{2)} \mathcal{B} \models \chi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \chi$$

□

4 Beispiele klassischer Theorien

Beispiel 4.1

$T = \exists^\infty$ hat Quantorenelimination und ist vollständig.

Beispiel 4.2

DLO (dichte lineare Ordnung ohne Randpunkte). Sei $\mathcal{L} = \{<\}$.

$$\begin{aligned} \text{DLO} = & \{ \forall x (\neg x < x) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y ((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \exists z ((x < y) \rightarrow (x < z < y)) \} \\ & \cup \{ \forall x \exists u \exists v (u < x < v) \} \\ & \cup \{ \exists x (x = x) \} \end{aligned}$$

4 Beispiele klassischer Theorien

Diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination.

Es gibt zwei Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

1)

$$\begin{aligned}\varphi[x_1, \dots, x_n] &= \exists y \left(\bigwedge_i \overbrace{\Theta_i[x_1, \dots, x_n, y]}^{\text{atomar oder Negation davon}} \right) \\ &= \exists y (\psi_1[x_1, \dots, x_n] \wedge \bigwedge_i \bigwedge_{\substack{x_i=y \\ x_i \neq y \\ y < x_i}} \dots)\end{aligned}$$

$$x_i = y \wedge x_j = y \Leftrightarrow x_i = x_j$$

$$x_i = y \wedge y < x_j \Leftrightarrow x_i < x_j \longrightarrow \text{induktiv lassen sich alle Quantoren eliminieren}$$

2) Gegeben $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C}_{\subseteq \mathcal{A}} \simeq \mathcal{D}_{\subseteq \mathcal{B}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$, mit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Isomorphismus und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \text{DLO}$.

OBdA wähle $c_1 < c_2 < \dots < c_n \xrightarrow{F} d_1 < d_2 < \dots < d_n$. $\longrightarrow F$ in Back-ℰ-Forth-System.

1. Fall: $a < c_1 \rightarrow$ wähle $b < d_1$ in \mathcal{B} , weil d_1 kein Randpunkt ist.
2. Fall: $a > c_n \rightarrow$ wähle $b < c_n$ in \mathcal{B} , weil d_n kein Randpunkt ist.
3. Fall: $\exists i \mid c_i < a < c_{i+1} \rightarrow$ wähle b zwischen d_i und d_{i+1} weil \mathcal{B} dicht ist.

Vollständigkeit folgt, weil Unterstruktur und Punkt zu Punkt.