

# **Modelltheorie**

**Wintersemester 2019/20**

**Mitschrift von Floris Remmert**

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro  
Abteilung für mathematische Logik  
Mathematisches Institut  
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

12. Dezember 2019



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Erinnerung</b>	<b>1</b>
<b>I</b>	<b>Theorien und Quantorenelimination</b>	<b>4</b>
2	Tarskis Test	4
3	Quantorenelimination	7
4	Beispiele klassischer Theorien	11
5	Ultrafilter & der Satz von Ax	15
<b>II</b>	<b>Typen und Saturation</b>	<b>21</b>
6	Typen	21
7	Exkurs: Einführung in die Topologie	24
8	Stoneraum von Typen einer Theorie	29
9	Typenvermeidungssatz und Isolation	32
10	Magere Mengen und Typenvermeidungssatz	35
11	Primmodelle. Existenz und Eindeutigkeit	36
12	Saturation	41

Ziel dieser Vorlesung ist es, eine Aussage der folgenden Qualität zu erhalten:

**Satz 0.1** (Morleys Kategorizitätssatz)

Sei  $T$  eine Theorie, welche ein einziges (bis auf Isomorphie) Modell der Mächtigkeit  $\aleph_0$  besitzt. Dann besitzt  $T$  für jede Kardinalzahl  $\kappa > \aleph_0$  ein einziges Modell der Mächtigkeit  $\kappa$  (bis auf Isomorphie).

## 1 Erinnerung

**Definition 1.1** • Eine Sprache  $\mathcal{L}$  ist eine Kollektion von Konstanten-, Funktions-, und Relationszeichen

- Eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  besteht aus einer nicht-leeren Grundmenge (oder Universum)  $A$  zusammen mit Interpretationen der Symbole aus  $\mathcal{L}$ :

- Für jedes Funktionszeichen  $f$  der Stelligkeit  $n$

$$f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$$

- Für jedes Relationszeichen  $R$  der Stelligkeit  $m$

$$R^{\mathcal{A}} \subset A^m$$

- Eine Einbettung  $F$  von  $\mathcal{A}$  nach  $\mathcal{B}$  ist eine injektive Abbildung  $F : A \longrightarrow B$ , welche mit den Interpretationen kompatibel<sup>1</sup> ist
- Ein Isomorphismus ist eine surjektive Einbettung.
- $\mathcal{A}$  ist eine Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ , falls  $A \subset B$  und die Inklusion  $\iota : A \longrightarrow B$  eine Einbettung bestimmt

### Bemerkung 1.2

Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $\emptyset \neq A \subset B$ . Dann gibt es eine Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ , welche von  $A$  erzeugt wird.

Das Universum besteht aus  $A$  zusammen mit dem Abschluss von  $A$  unter allen Interpretationen der Funktionszeichen von  $\mathcal{L}$ .

### Definition 1.3

Sei  $(I, <)$  eine partielle Ordnung. Die Ordnung ist gerichtet, falls für  $i, j \in I$  gibt es  $k \in I$  mit  $i \leq k$  und  $j \leq k$ .

---

<sup>1</sup>das bedeutet, dass Funktions- und Relationszeichen bei Hin- und Rückrichtung erhalten bleiben

**Bemerkung 1.4**

Sei  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen indexiert nach der gerichteten partiellen Ordnung  $I$  derart, dass für  $i \leq j$  gilt:  $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}_j$ .

Die Menge  $A = \bigcup_{i \in I} A_i$  ist das Universum einer (eindeutig bestimmten)  $\mathcal{L}$ -Struktur

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \quad (1)$$

Falls  $I$  eine lineare Ordnung ist, dann ist  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Kette.

Zu 1:

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}_i}$  für ein (alle)  $i \in I$ , denn  $c^{\mathcal{A}_i} = c^{\mathcal{A}_j} = c^{\mathcal{A}_k}$ , wegen gerichteter Ordnung
- $a_1, \dots, a_n \in A = \bigcup_{i \in I} A_i \implies \exists i \in I$  mit  $a_1, \dots, a_n \in A_i$ . Also ist  $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n)$  wohldefiniert.
- $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}}$  genau dann, wenn es ein  $i \in I$  gibt mit  $a_1, \dots, a_m \in A_i$  und  $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}_i}$

Beachte, dass  $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$  für alle  $i \in I$ .

**Definition 1.5**

Eine atomare Formel ist ein Ausdruck der Form  $(t_1 \doteq t_2)$ ,  $t_1, \dots, t_k$  Terme,  $R(t_1, \dots, t_k)$ .

Die Kollektion von Formeln ist die kleinste Klasse, welche alle atomaren Formeln enthält und derart, dass:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ Formel} &\implies \neg \varphi \text{ Formel} \\ \varphi, \psi \text{ Formel} &\implies (\varphi \vee \psi) \text{ Formel} \\ \varphi \text{ Formel}, x \text{ Variable} &\implies \exists x \varphi \text{ Formel, } (x \text{ heißt dann „gebunden“}) \end{aligned}$$

Abk.:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi) &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \forall x \varphi &= \neg \exists x \neg \varphi \\ (\varphi \rightarrow \psi) &= (\neg\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \end{aligned}$$

**Bemerkung 1.6** • Jede Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  lässt sich in pränexer Normalform umschreiben:  $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ , mit  $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ . Das ist eine quantorfreie Formel, diese lässt sich weiter zerlegen in KNF bzw. DNF.

- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine Aussage
- Eine Theorie ist eine Kollektion von Aussagen

**Beispiel 1.7**

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur. Erweitere die Sprache zu der Sprache  $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{d_a\}_{a \in A}$ .

$\mathcal{A}$  ist eine  $\mathcal{L}_A$ -Struktur,  $d_a^{\mathcal{A}} = a$ .

- $\text{Diag}^{\text{at}}(\mathcal{A}) = \{\text{quantorenfreie } \mathcal{L}_A\text{-Aussagen } \chi \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$  heißt „atomares Diagramm“
- $\text{Diag}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{L}\text{-Aussagen } \theta \text{ mit } \mathcal{A} \models \theta\}$  heißt „vollständiges Diagramm“

Sei nun  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}_A$ -Struktur.

$\mathcal{B} \models \text{Diag}^{\text{at}}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$  einbetten lässt

$$A \longrightarrow B$$

$$a \mapsto d_a^{\mathcal{B}}$$

$\mathcal{B} \models \text{Diag}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow$  die obige Abbildung ist elementar

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)], a_1, \dots, a_n \in A, \varphi[x_1, \dots, x_n]$  Formel

**Definition 1.8** •  $T$  ist konsistent, falls  $T$  ein Modell besitzt.

- $T$  ist vollständig, falls  $T$  konsistent ist und je zwei Modelle von  $T$  elementar äquivalent sind.

**Satz 1.9** (Kompaktheitssatz)

Eine Theorie ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent<sup>2</sup> ist.

Wie zeigen wir, dass  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ?

**Satz 1.10** (Back & Forth)

$S = \{F : \underset{US}{\mathcal{C}} \longrightarrow \underset{US}{\mathcal{D}}, F \text{ partieller Isomorphismus zwischen } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{D} \text{ geeignet}^3\}$ .

Back: Für alle  $F \in S$  und  $b \in B$ ,  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  gibt es  $G \in S$  mit  $G \supset F$  Erweiterung und  $b \in \text{Im}(G)$ .

Forth: Für alle  $F \in S$  und  $a \in A$ ,  $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$  gibt es  $H \in S$ , mit  $H \supset F$  Erweiterung mit  $a \in \text{Dom}(H)$

<sup>2</sup>endlich konsistent bedeutet: jede endliche Teilmenge der Theorie besitzt ein Modell.

<sup>3</sup>bspw. endlich erzeugt

$\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  heißen dann „Back & Forth äquivalent“

$\rightarrow$  ist jedes  $F \in S$  elementar, so gilt insbesondere  $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ .

# Teil I

## Theorien und Quantorenelimination

### 2 Tarskis Test

**Lemma 2.1** (Tarskis Test)

Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $A \subset B$  Teilmenge derart, dass für jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  und Elemente  $a_1, \dots, a_n \in A$ :

falls:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b] \text{ für ein } b \in B \Rightarrow \text{ existiert } a \in A \text{ sodass } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \quad (2)$$

dann ist  $A$  das Universum einer elementaren Unterstruktur von  $\mathcal{B}$ .

Insbesondere: Falls  $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$  Unterstruktur, ist  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$  erfüllt 2.

*Beweis.* Betrachte  $A \neq \emptyset \rightarrow$  Betrachte  $\varphi[y] = (y \doteq y)$ .  $B \neq \emptyset \rightarrow \exists b \in B$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[b]$ .  
 $\hookrightarrow \exists a \in A$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[a]$

Beh.: Für jedes Konstantenzeichen  $c \in \mathcal{L}$  ist  $c^{\mathcal{B}} \in A$ .  $\hookrightarrow \varphi[y] = (y \doteq c)$ ,  $\mathcal{B} \models \varphi[c^{\mathcal{B}}] \Rightarrow$  es gibt  $a \in A$  mit  $a = c^{\mathcal{B}}$ .

Beh.:  $A$  ist unter den Funktionen  $f^{\mathcal{B}}$  abgeschlossen, für jedes Funktionszeichen  $f \in \mathcal{L}$ .

Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y] = (y \doteq f(x_1, \dots, x_n)) \checkmark$

Für  $R \in \mathcal{L}$   $m$ -stellig setze  $R^{\mathcal{A}} = A^m \cap R^{\mathcal{B}} \rightarrow$  somit bildet  $A$  eine  $\mathcal{L}$ -Unterstruktur  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{B}$ .

Noch zu zeigen:  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ , d. h.  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$   $\mathcal{L}$ -Formel.

Seien dazu  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad (3)$$

Induktiv über den Aufbau von  $\varphi$ .

$\varphi$  ist atomar  $\longrightarrow \checkmark$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] & \Leftrightarrow & \mathcal{B} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] & & \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \end{array}$$

$\varphi = \neg\psi \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]: \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A$  sodass  $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$  für ein  $a \in A \subset B \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt  $b \in B$  mit  $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xRightarrow{2}$  es gibt ein  $a \in A$  mit  $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{3} \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .

Für „insbesondere“: Angenommen, dass  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ . Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Dann:  $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$  für ein  $b \in B \Rightarrow \mathcal{B} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{A} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A$  mit  $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$

□

**Proposition 2.2** (aufwärts Löwenheim-Skolem)

Sei  $\mathcal{A}$  eine unendliche  $\mathcal{L}$ -Struktur, und  $\kappa < \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$ . Dann gibt es eine elementare  $\mathcal{L}$ -Erweiterung  $\mathcal{B} \geq \mathcal{A}$  der Mächtigkeit  $\kappa$ .

*Beweis.*  $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \dot{=} c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$ , wobei  $\{c_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$  eine Menge neuer Konstantenzeichen ist, ist konsistent weil sie endlich konsistent<sup>4</sup> ist.

Aus der Konstruktion von Henkin hat  $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \dot{=} c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$  ein Modell der Mächtigkeit der Sprache.

$\rightarrow$  ein Modell der Mächtigkeit  $\kappa$

□

**Bemerkung 2.3**

$|A| = n \in \mathbb{N}, \mathcal{B} \succeq \mathcal{A} \Rightarrow |B| = n$

**Proposition 2.4** (abwärts Löwenheim-Skolem)

Sei  $\mathcal{B}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $S \subset B$  beliebig. Dann gibt es eine elementare Unterstruktur  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  mit  $A \supset S$  und  $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$ .

---

<sup>4</sup>Kompaktheit



**Bemerkung 2.5**

$\mathbb{C}$  in der Ringsprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ ,  $S = \emptyset \Rightarrow$  es gibt eine abzählbare elementare Unterstruktur von  $\mathbb{C}$ .  $\rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \preceq \mathbb{C}$ .

*Beweis 2.4.* Setze  $S_0 = S$ . Angenommen  $S_k$  wurde bereits konstruiert, wähle für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  und Elemente  $a_1, \dots, a_n \in S_k$  ein Element  $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in B$  derart, dass  $\mathcal{B} \models ((\exists y \in \varphi)[a_1, \dots, a_n] \rightarrow \varphi[a_1, \dots, a_n, a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]}])$ . Setze  $S_{k+1} = S_k \cup \{a_{\varphi}\}_{\varphi \mathcal{L}\text{-Formel}, (a_1, \dots, a_n) \in S_k}$

Definiere  $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \supset S$ . Wir überprüfen, dass  $A$  den Test von Tarski erfüllt. Sei  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n, y]$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $a_1, \dots, a_n \in A$ .

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$  für ein  $b \in B \Rightarrow$  es gibt ein  $k \in \mathbb{N}$  mit  $a_1, \dots, a_n \in S_k \Rightarrow$  es gibt ein  $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in S_{k+1} \subset A$  mit  $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$

Ferner ist  $|A| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |S|\}$ . □

**Folgerung 2.6**

Sei  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine gerichtete Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen, sodass für  $i \leq j$  ist  $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$ . Dann ist  $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$  eine elementare Erweiterung jeder  $\mathcal{A}_i$ .

*Beweis.* Wir beweisen induktiv über den Aufbau von  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$ , dass für alle  $i \in I$ , für alle  $a_1, \dots, a_n \in A_i$ :  $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ .

$\varphi$  atomar  $\rightarrow$  klar, denn  $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$

$\varphi = \neg \varphi \Rightarrow$  ok!

$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow$  ok!

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$ :  $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $a \in A_i$  mit  $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$   
 $\Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$   
 ind. über  $\psi$

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$  es gibt ein  $b \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$  mit  $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \Rightarrow$  es gibt  $j \in I$  mit  $b \in A_j \Rightarrow$  es existiert  $k \in I$  mit  $i \leq k, j \leq k, a_1, \dots, a_n, b \in A_k$   
 $\Rightarrow \mathcal{A}_k \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xrightarrow{\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_k} \text{es gibt ein } a \in A_k \text{ mit } \mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ . □

### 3 Quantorenelimination

#### Definition 3.1

Eine Theorie  $T$  hat Quantorenelimination, falls jede  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  äquivalent modulo  $T$  zu einer quantorenfreien  $\mathcal{L}$ -Formel  $\psi[x_1, \dots, x_n]$  ist.

$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow \psi[x_1, \dots, x_n])$$

#### Beispiel 3.2

Sei  $\mathcal{L} := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$  gegeben. Betrachte die Menge  $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und es gibt } x \in \mathbb{R} \text{ mit } ax^2 + bx + c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0\}$ .

Diese Formel ist in  $\mathcal{L}$  nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel, in  $\mathcal{L}_1 := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$  hingegen doch. Somit ist die Menge in  $\mathcal{L}_1$  quantorenfrei.

**Bemerkung 3.3** • Wenn  $T$  inkonsistent ist, dann hat  $T$  immer Quantorenelimination

- Wenn  $T$  Quantorenelimination hat, und  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  mit  $\mathcal{A} \subseteq_{\text{US}} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$  Übung

**Definition 3.4** • Eine einfache Existenzformel ist eine Formel der Form  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$

- Eine primitive Existenzformel ist eine Formel der Form  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \psi[x_1, \dots, x_n, y]$ , wobei  $\psi$  eine endliche Konjunktion von atomaren Formeln und Negationen ist

#### Lemma 3.5

Eine (konsistente) Theorie  $T$  hat genau dann Quantorenelimination, wenn jede primitive Existenzformel zu einer quantorenfreien Formel äquivalent modulo  $T$  ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: klar

„ $\Leftarrow$ “: Beachte,  $\exists y(\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\exists y\psi_1 \vee \exists y\psi_2)$ . Insbesondere, wenn  $T$  Quantorenelimination für primitive Existenzformeln hat, dann hat  $T$  Quantorenelimination für einfache Existenzformeln.

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi & = & \exists y & \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n]}_{\text{umschreiben in DNF}} & \sim & \exists y(\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n) & \sim & \underbrace{\bigvee_{i=1}^n \exists y\psi_i}_{\text{primitive Existenzformel}} \\ \text{einfache Existenzformel} & & & & & & & \end{array}$$

Zu zeigen: Jede beliebige Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  ist äquivalent zu einer quantorenfreien Formel modulo  $T$ .

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] \underset{\text{pränexe Normalform}}{\sim} Q_1 y_1 \dots Q_m y_m \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\text{quantorenfrei}}, \text{ wobei } Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

Induktion über  $m$ :

$m = 0$ : ✓

$m = 1$ :  $\varphi = Q \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y]}_{\text{quantorenfrei}}$

$Q = \exists$   $\varphi$  einfache Existenzformel ✓

$Q = \forall$   $\varphi \sim \neg \underbrace{\exists y \neg \psi}_{\substack{\text{einfache} \\ \text{Existenzformel}}} \rightarrow \text{eliminieren} \rightarrow \checkmark$

$m - 1 \rightarrow m$ :  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots \underbrace{Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\varphi'[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}$ .  $\varphi'$  ist eine einfache Existenzformel, wir eliminieren also:

$\underbrace{m-1 \text{ viele Quantoren}} \underbrace{\Theta[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}_{\text{quantorenfrei}}$

$\Rightarrow$  Induktion

□

### Beispiel 3.6

Sei  $\mathcal{K} = \{\text{unendliche Mengen}\}$ . Diese Klasse lässt sich definieren durch die Theorie  $T = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j=1}^n \neg(x_i \dot{=} x_j))\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Diese Theorie ist vollständig! Betrachte jetzt die  $\exists^\infty x$  definierbaren Mengen:

$$\{b \in A \mid \mathcal{A} \models \underbrace{\varphi}_{\text{quantorenfrei}}[b, a_1, \dots, a_m]\}$$

$\updownarrow$   
endlich oder koendlich

### Lemma 3.7 (Trennungslemma)

Seien  $T_1$  und  $T_2$  zwei  $\mathcal{L}$ -Theorien, und  $\Delta$  eine Kollektion von  $\mathcal{L}$ -Aussagen, welche unter endlichen Konjunktionen und Disjunktionen abgeschlossen ist. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- (1) Es gibt eine Aussage  $\chi \in \Delta$  mit  $T_1 \models \chi$
- (2) Für alle  $\mathcal{A} \models T_1, \mathcal{B} \models T_2$  gibt es eine Aussage  $\chi \in \Delta$  mit  $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg \chi$

### Bemerkung 3.8

Das ganze ist trivial für inkonsistente Theorien.

*Beweis.*  $1 \Rightarrow 2$ : trivial!

$2 \Rightarrow 1$ : OBdA  $T_1, T_2$  konsistent. Sei  $\mathcal{A} \models T_1$ , setze  $\Sigma_{\mathcal{A}} = \{\chi, \chi \text{ Aussagen in } \Delta \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$ .

Betrachte jetzt  $T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}}$ . Ist diese Theorie konsistent? Nein: Wäre  $\mathcal{B} \models T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}} \hookrightarrow$  es gibt  $\chi \in \Delta$  mit  $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi \Rightarrow \chi \in \Sigma_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{B} \models \chi$ . Widerspruch!

Das bedeutet (wegen Kompaktheit), dass es  $\chi_1, \dots, \chi_r \in \Sigma_{\mathcal{A}}$  gibt mit  $T_2 \cup \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$  inkonsistent.

$$\hookrightarrow T_2 \models \bigvee_{i=1}^r \neg\chi_i \Rightarrow T_2 \models \neg\left(\underbrace{\bigwedge_{i=1}^r \chi_i}_{=\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta}\right)$$

Das heißt für jedes  $\mathcal{A} \models T_1$  gibt es  $\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta$  mit  $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}}$  und  $\mathcal{A} \models \chi_{\mathcal{A}}$ .

Sei nun  $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}}\}_{\mathcal{A} \models T_1} \overset{5}{\hookrightarrow}$  inkonsistent nach Konstruktion.

$\overset{\Rightarrow}{\text{Kompaktheit}}$  es existieren  $\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}$  mit  $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}\}$  inkonsistent. Also:

$$T_1 \models \bigvee_{j=1}^n \chi_{\mathcal{A}_j} =: \chi \in \Delta$$

$T_1 \models \chi$ . Wollen zeigen:  $T_2 \models \neg\chi$ . Aber  $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}_i}, 1 \leq i \leq n$ . □

### Folgerung 3.9

Zwei Theorien  $T_1$  und  $T_2$  werden von einer quantorenfreien Aussage getrennt, wenn je zwei Modelle  $\mathcal{A} \models T_1$  und  $\mathcal{B} \models T_2$  von einer quantorenfreien Aussage getrennt werden.

$$\rightarrow \exists \chi \text{ quantorenfrei} : \mathcal{A} \models \chi \text{ und } \mathcal{B} \models \neg\chi$$

### Satz 3.10

Sei  $T$  eine Theorie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $T$  hat Quantorenelimination.
- (2) Gegeben Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  und endlich erzeugte Unterstrukturen  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ ,  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} = \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$ , wobei  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$  und  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  eine Formel. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow {}^6 \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

- (3) Gegeben Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  mit isomorph erzeugten Unterstrukturen  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$  wie in (2) und für alle  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  primitive Existenzformel, gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

<sup>5</sup>Ist das überhaupt eine Menge? Es genügt die Einschränkung bis auf Isomorphie, das sollte reichen. . .

<sup>6</sup>Durch vertauschen von  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  gilt hier sogar  $\Leftrightarrow$ .

### 3 Quantorenelimination

Ferner, falls  $T$  konsistent ist, (1) gilt und je zwei Modelle von  $T$  isomorphe endlich erzeugte Unterstrukturen besitzen, dann ist  $T$  vollständig mit Quantorenelimination.

#### Bemerkung 3.11

Wie benutzen wir diesen Satz? Letztlich wollen wir Back-&-Forth-Äquivalenz zeigen.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ .  $T$  hat Quantorenelimination  $\leftarrow$  es gibt  $\psi[x_1, \dots, x_n]$  quantorenfrei mit:  $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \psi[\vec{x}])$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \mathcal{A} \models T & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{C} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \psi \text{ quantorenfrei} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{D} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{C} \approx \mathcal{D} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{B} \models T &
 \end{array}$$

(2)  $\Rightarrow$  (3): klar.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Um zu zeigen, dass  $T$  Quantorenelimination besitzt, genügt es nur primitive Existenzformeln  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  zu betrachten.

Seien dazu  $e_1, \dots, e_n$  neue Konstantenzeichen. Betrachte die Sprache  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ , sowie die Theorien  $T_1 = T \cup \{\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$  und  $T_2 = T \cup \{\neg\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$ .

Falls  $T_1$  und  $T_2$  durch eine quantorenfreie Aussage  $\underbrace{\psi[e_1, \dots, e_n]}_{\substack{\text{quantorenfreie} \\ \mathcal{L}\text{-Formel}}}$  in  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$  trennbar sind, so folgt:

$$\begin{array}{ll}
 T \cup \{\varphi[\vec{e}]\} \models \psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\} \models \neg\psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\neg\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 \Rightarrow T = (\psi[\vec{e}] \rightarrow \varphi[\vec{e}]) & \Rightarrow \underset{\text{Aufgabe}^7}{T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}})}
 \end{array}$$

Sonst, falls also  $T_1, T_2$  nicht trennbar sind, gibt es zwei Modelle  $\mathcal{A} \models T_1 \cup \{\varphi[\vec{e}]\}, \mathcal{B} \models T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\}$ , welche alle quantorenfreien Aussagen in  $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$  gleich erfüllen.

Seien  $c_1 = e_1^{\mathcal{A}}, d_i = e_i^{\mathcal{B}}$ . Betrachte jetzt  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{A} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$  und  $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{B} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$ . Es gilt:  $\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$  und  $\mathcal{B} \models \neg\varphi[d_1, \dots, d_n]$ .

<sup>7</sup>weil  $e_1, \dots, e_n$  neue Konstantenzeichen sind

## 4 Beispiele klassischer Theorien

Um einen Widerspruch zu bekommen genügt es zu zeigen, dass  $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}, c_i \mapsto d_i$ .

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow D : \\ \underbrace{t^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n]}_{\mathcal{L}\text{-Term}} &\mapsto t^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \end{aligned}$$

Ist diese Abbildung wohldefiniert?

$$\begin{aligned} \text{Angenommen } t_1^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] &= t_2^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] \\ \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{als } \mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}\text{-Struktur}} &\models \underbrace{(t_1[e_1, \dots, e_n] \dot{=} t_2[e_1, \dots, e_n])}_{\text{quantorenfreie Aussage}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{B} &\models (t_1[\vec{e}] \dot{=} t_2[\vec{e}]) \\ \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] &= t_2^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \\ \longrightarrow &\text{wohldefiniert und injektiv} \end{aligned}$$

induktiv über den Aufbau zeigen wir: Das ist ein Isomorphismus.

Zu „ferner“: Angenommen  $T$  hat Quantorenelimination, ist konsistent und je zwei Modelle  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$  haben isomorphe, endlich erzeugte Unterstrukturen

$$\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \overset{\subseteq \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \overset{\subseteq \mathcal{B}}{\simeq} \overset{c_i \mapsto d_i}{\mathcal{D}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$$

$T$  ist vollständig  $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ . Sei  $\chi$  eine  $\mathcal{L}$ -Aussage und schreibe  $\chi = \chi[x_1, \dots, x_n]$ .

$$\mathcal{A} \models \chi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \chi[c_1, \dots, c_n] \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \models \chi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \chi$$

□

## 4 Beispiele klassischer Theorien

### Beispiel 4.1

$T = \exists^\infty$  hat Quantorenelimination und ist vollständig.

### Beispiel 4.2 (DLO)

DLO (dichte lineare Ordnung ohne Randpunkte). Sei  $\mathcal{L} = \{<\}$ .

$$\begin{aligned} \text{DLO} = & \{ \forall x (\neg x < x) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y ((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \exists z ((x < y) \rightarrow (x < z < y)) \} \\ & \cup \{ \forall x \exists u \exists v (u < x < v) \} \\ & \cup \{ \exists x (x = x) \} \end{aligned}$$

Diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination. Es gibt zwei Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

(1)

$$\begin{aligned}\varphi[x_1, \dots, x_n] &= \exists y \left( \bigwedge_i \overbrace{\Theta_i[x_1, \dots, x_n, y]}^{\text{atomar oder Negation davon}} \right) \\ &= \exists y (\psi_1[x_1, \dots, x_n] \wedge \bigwedge_i \bigwedge_{\substack{x_i=y \\ x_i \neq y \\ x_i < y \\ y < x_i}} \dots)\end{aligned}$$

$$x_i = y \wedge x_j = y \Leftrightarrow x_i = x_j$$

$$x_i = y \wedge y < x_j \Leftrightarrow x_i < x_j \longrightarrow \text{induktiv lassen sich alle Quantoren eliminieren}$$

(2) Gegeben  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$ , mit  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  Isomorphismus und  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \text{DLO}$ .

OBdA wähle  $c_1 < c_2 < \dots < c_n \xrightarrow{F} d_1 < d_2 < \dots < d_n$ .  $\longrightarrow F$  in Back-&-Forth-System.

1. Fall:  $a < c_1 \rightarrow$  wähle  $b < d_1$  in  $\mathcal{B}$ , weil  $d_1$  kein Randpunkt ist.
2. Fall:  $a > c_n \rightarrow$  wähle  $b < c_n$  in  $\mathcal{B}$ , weil  $d_i$  kein Randpunkt ist.
3. Fall:  $\exists i \mid c_i < a < c_{i+1} \rightarrow$  wähle  $b$  zwischen  $d_i$  und  $d_{i+1}$  weil  $\mathcal{B}$  dicht ist.

Vollständigkeit folgt, weil Unterstruktur und Punkt zu Punkt.

#### Beispiel 4.3 (Vektorraum)

Sei  $K$  ein Körper,  $\mathcal{L}_{\text{VR}} = \{0, +, f_\lambda\}_{\lambda \in K}$ . Dann ist die Theorie  $T \underset{\text{unendliche } K\text{-VR}}{\parallel} = \{ \forall x \forall y \forall z \dots \} \dots^8$

vollständig und hat Quantorenelimination.

Wie zuvor gibt es zwei verschiedene Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

(1) Betrachte die folgende primitive Existenzformel:

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \left( \bigwedge_{\text{endlich}} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_y \dot{=} 0) \wedge \bigwedge_{\text{endlich}} \neg(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n \dot{=} 0) \right)$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

---

<sup>8</sup>diese Theorie ist axiomatisierbar, für eine beispielhafte Axiomatisierung vergleiche Klausur zu mathematische Logik im SS 2019.

#### 4 Beispiele klassischer Theorien

$$(1) \text{ Alle } \lambda \text{ vor der Variable } y \text{ sind Null} \rightarrow \underbrace{\bigwedge_{\text{endlich}} \lambda x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0}_{\psi[x_1 \dots x_n]}$$

(2) *Es gibt ein  $\lambda \neq 0$ . Dann gilt OBdA:  $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ . Ersetze jetzt jedes Vorkommen von  $y$  durch  $\tilde{\lambda}_1 x_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n x_n$ . Erhalte eine quantorenfreie Bedingung in  $x_1, \dots, x_n$ .*

(2) (semantisch)

Ansatz:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & ? & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \\ \langle 2 \rangle & \simeq & \langle (3, 7) \rangle \end{array}$$

Wir brauchen also:  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  unendlichdimensional, um ein Back & Forth-System zu konstruieren. Es sei dazu

$$\tilde{\mathcal{A}} \succeq \mathcal{A} \supset \langle c_1, \dots, c_n \rangle \simeq \langle d_1, \dots, d_n \rangle \subset \mathcal{B} \preceq \tilde{\mathcal{B}}$$

für  $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$  unendlichdimensional.

Insbesondere gilt jetzt auch:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$$

Angenommen  $\langle c_1, \dots, c_n \rangle \xrightarrow{F} \langle d_1, \dots, d_n \rangle$  liegt in einem Back & Forth-System zwischen  $\tilde{\mathcal{A}}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}$ . Dann folgt insbesondere auch:

$$\tilde{\mathcal{B}} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

Es ergeben sich also die folgenden beiden Fragen:

(1) Finden wir ein Back & Forth-System zwischen  $\tilde{\mathcal{A}}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}$ ?

Angenommen also wir haben  $\tilde{\mathcal{A}}$  und  $\tilde{\mathcal{B}}$  bereits konstruiert. Zeige: Es gibt ein Back & Forth-System.

$c \in \text{UR}$ : trivial.

$c \notin \text{UR}$ :  $\dim_K \tilde{\mathcal{B}} = \infty \geq n + 1 \rightarrow$  es gibt ein  $d \notin \langle d_1, \dots, d_n \rangle \Rightarrow G$  die Erweiterung

$$\begin{array}{ccc} \langle c_1, \dots, c_n \rangle & \longrightarrow & \langle d_1, \dots, d_n \rangle \\ c_i & \longmapsto & d_i \\ c & \longmapsto & d \end{array}$$



(2) Zur Existenz von  $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ :

So funktioniert es nicht:  $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{ \exists x \exists y \neg(\lambda x + \mu y \dot{=} 0) \}_{\substack{\lambda, \mu \in K \\ (\lambda, \mu) \neq (0,0)}}$ .

Seien  $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$  neue Konstantenzeichen.

$$\underbrace{\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{ \neg \sum_i \lambda_i e_i \dot{=} 0 \}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}}}_{\text{endlich konsistent}}$$

Zur Vollständigkeit: Das endliche Erzeugnis zweier nicht-trivialer Vektoren ist isomorph, somit folgt Vollständigkeit.

**Beispiel 4.4** (ACF)

Wir betrachten jetzt die Theorie algebraisch abgeschlossener Körper (ACF) in der Ringsprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$ .

$$\text{ACF} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Körperaxiome} \\ \{ \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists y (y^k + x_{k-1}y^{k-1} + \dots + x_1y + x_0 \dot{=} 0) \}_{k \geq 1} \end{array} \right.$$

ACF hat Quantorenelimination, ist aber nicht vollständig. Die Vervollständigungen sind

$$\underbrace{\text{ACF}_0}_{1+1+\dots+1 \dot{=} 0} \quad \text{und} \quad \underbrace{\text{ACF}_p}_{\substack{1+\dots+1 \dot{=} 0 \\ p\text{-Mal}}} \quad \text{für jede Primzahl } p.$$

**Satz 4.5** (Kurzeinführung Galois'sche Theorie)

*Beweis* ACF. Betrachte OBdA die Abbildung

$$F = \text{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle) \longrightarrow \text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$$

Fall 1:  $a$  ist algebraisch über  $K$

$\hookrightarrow$  sei  $m_a(T)$  das Minimalpolynom von  $a$  über  $K$ .  $F(m_a)(T)$  ist ein normiertes Polynom über  $\text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle) \subset B$ .

$B$  ist algebraisch abgeschlossen  $\Rightarrow$  es gibt  $b$  in  $B$  mit  $F(m_a)(b) = 0 \xRightarrow{\text{Galoistheorie}} F$  lässt sich erweitern.

Fall 2:  $a$  ist transzendent über  $K = \text{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle)$ .

Wenn wir ein  $b \in B$  finden, welches transzendent über  $\text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$  ist

$$\hookrightarrow \text{Ring}_A(K, a) \simeq \text{Ring}_B(F(K), b)$$

Ziel: Wir brauchen  $\mathcal{A} \preceq \tilde{\mathcal{A}}$  mit unendlich vielen Elementen, welche algebraisch unabhängig sind.

$$\underbrace{\text{Diag}(A) \cup \{\neg(B(e_1, \dots, e_n) \doteq 0)\}_{\substack{P \in A[T_1, \dots, T_n] \setminus \{0\} \\ P(e_1, \dots, e_n) \neq 0}}}_{\text{endlich konsistent}}$$

□

## 5 Ultrafilter & der Satz von Ax

Anwendung: Wir wollen eine Aussage der folgenden Art bekommen: Sei  $f : \mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C}$ .  
 $\rightarrow f$  ist surjektiv, aber nicht injektiv.

**Satz 5.1** (Ax)

Sei  $f : \mathbb{C}^n \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C}^n$  eine polynomiale<sup>9</sup> injektive Abbildung. Dann ist  $f$  surjektiv.

Motivation: Sei  $G$  eine Gruppe der Ordnung  $p$ . Für einen Körper der Charakteristik  $p$  bekommen wir dann:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{g}} \xrightarrow{\text{wirkt}} \underbrace{K}_{\substack{\text{Körper der} \\ \text{Charakteristik} \\ p}} \longrightarrow K$$

$$x \longmapsto \underbrace{1 + \dots + 1}_{g\text{-Mal}} + x$$

$$\rightarrow h + (g + x) = (h + g) + x$$

Für einen Körper der Charakteristik 0:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{k}} \xrightarrow{\text{wirkt}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\underbrace{\mu_p}_{\substack{p\text{-te Einheits-} \\ \text{wurzel in } \mathbb{C}}} = \{e^{\frac{2\pi i k}{p}}\}_{0 \leq k < p} \quad z \longmapsto \omega z$$

$$\rightarrow \omega_1(\omega \cdot z) = (\omega_1 \omega) \cdot z$$

**Satz 5.2** (Lefschetz'sches Prinzip)

Eine Aussage  $\chi$  in der Ringsprache  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$  gilt für  $\mathbb{C}$  genau dann, wenn es unendlich viele Primzahlen  $p$  derart gibt, dass  $\chi$  in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik  $p$  gilt.

<sup>9</sup>polynomial bedeutet, dass jede Koordinate der Abbildung durch Polynome gegeben ist.

*Beweis von Satz 5.1 (Ax).* Sei  $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  injektiv. Die Aussage „ $f$  injektiv  $\Rightarrow f$  surjektiv“ lässt sich als  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Aussage schreiben.

D. h. es genügt zu zeigen, dass diese Aussage für alle Körper  $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$  gilt.

Was ist  $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ ? Ein algebraischer abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$ .

Galoistheo.

$$\mathbb{F}_p^{\text{alg}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n, \text{ wobei } F_n \subset F_{n+1} \text{ endliche Körper mit Charakteristik } p.$$

$$F_1 = \{0, 1\}$$

$$F_2 = \dots$$

$$\vdots$$

Sei nun  $g : (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n \rightarrow (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$  eine surjektive polynomiale Abbildung.

Zeige:  $g$  ist surjektiv. Sei  $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$ . Dann gibt es ein  $N$ , sodass  $b_i \in \mathbb{F}_n$  für  $\mathbb{F}_n$  endlich.

Ferner können wir  $N$  so wählen, dass alle Koeffizienten aus  $g$  in  $\mathbb{F}_n$  liegen.

$$\begin{array}{ccc} g|_{\mathbb{F}_N^n} : \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} & \longrightarrow & \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} \text{ ist injektiv (geerbt)} \\ & & \Downarrow \text{endlich} \\ & & \text{surjektiv} \end{array}$$

□

*Beweis Lefschetz'sches Prinzip (Satz 5.2).* „ $\Rightarrow$ “ Sei  $\chi$  eine  $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Aussage derart, dass  $\mathbb{C} \models \chi$ . Dann ist  $\underbrace{\text{ACF}_0}_{\text{alle elementar äquivalent}} \cup \{\neg\chi\}$  inkonsistent, weil  $\text{ACF}_0$  vollständig ist.

Dann gibt es eine endliche Teilmenge  $T_0 \subset \text{ACF}_0 \cup \{\neg\chi\}$ , welche inkonsistent ist.  
 $\Rightarrow$  Es gibt ein  $N \in \mathbb{N}$  sodass:

$$T_0 \subset \underbrace{\text{ACF} \cup \{\neg(\underbrace{1 + \dots + 1}_k \doteq 0)\}_{k < N}}_{\text{inkonsistent}} \cup \{\neg\chi\}$$

Für  $p > N$  eine Primzahl:  $\text{ACF}_p \models \chi$

„ $\Leftarrow$ “  $\rightsquigarrow$  Ultrafilter und Satz von Łoś

□

Exkurs: Sei im Folgenden  $I \neq \emptyset$ .

**Definition 5.3**

Ein Ultrafilter  $\mathcal{U}$  auf  $I$  ist ein endlich additives Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \{0, 1\}$$

**Bemerkung 5.4**

Die Definition entspricht der von Blatt 1 Aufgabe 3, denn:

- (1)  $\mu_{\mathcal{U}}(I) = 1, \mu_{\mathcal{U}}(\emptyset) = 0$ .
- (2)  $\mu_{\mathcal{U}}(X) = 1 \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$   
 $X \subset Y \subset I$
- (3) Angenommen  $\mu_{\mathcal{U}}(X) = \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$  aber  $\mu_{\mathcal{U}}(X \cap Y) = 0$ . Dann gilt  $X = X \setminus Y \dot{\cup} X \cap Y \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(X \setminus Y) = 1$  und  $\mu_{\mathcal{U}}(Y \setminus X) = 1$ , sowie  $I \supset X \cup Y = (X \setminus Y) \dot{\cup} (Y \setminus X) \dot{\cup} (X \cap Y) \rightsquigarrow \mu_{\mathcal{U}}(I) = 1 \geq 1 + 1 + 0$ , ein Widerspruch.
- (4) Gegeben  $X \subset I$  entweder  $X \in \mathcal{U}$  oder  $I \setminus X \in \mathcal{U}$   
 $\mu_{\mathcal{U}}(X)=1 \qquad \qquad \mu_{\mathcal{U}}(I \setminus X)=1$

**Definition 5.5**

Ein Hauptultrafilter ist ein Maß der Form  $\delta_x$  für ein  $x \in I$ .

**Definition 5.6**

Falls  $I$  unendlich ist, so gibt es generische/reiche Ultrafilter, nämlich die Ultrafilter, welche alle koendlichen Mengen enthalten.

**Definition 5.7**

Angenommen  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  ist eine  $\mathcal{L}$ -Struktur. Sei ferner  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter. Definiere eine Äquivalenzrelation<sup>10</sup> auf  $\prod_{\mathcal{U}} A_i$ :

$$\underbrace{\prod_{\mathcal{U}} A_i}_{\text{kartesisches Produkt}}$$

$$(a_i)_{i \in I} \sim_{\mathcal{U}} (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{U} \iff \mu_{\mathcal{U}}(\{i \in I \mid a_i = b_i\}) = 1$$

**Definition 5.8**

Sei  $\prod_{\mathcal{U}} A_i$  die Menge  $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$ . Wir definieren Interpretationen der Symbole aus  $\mathcal{L}$  auf  $\prod_{\mathcal{U}} A_i$ :

$$\prod_{\mathcal{U}} A_i$$

- Sei  $c \in \mathcal{L}$  ein Konstantenzeichen. Definiere:

$$c^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} = (c^{\mathcal{A}_i})_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

---

<sup>10</sup>vergleiche dazu Blatt 1, Aufgabe 3

- Sei  $f \in \mathcal{L}$  ein  $n$ -stelliges Funktionszeichen. Definiere:

$$f^{\prod_{\mathcal{U}} A_i}([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}) = (f^{A_i}(a_1^i, \dots, a_n^i))_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

Ist das wohldefiniert? Ja, denn fast überall gleich.

- Sei  $\mathcal{R}$  ein  $m$ -stelliges Relationszeichen auf  $\mathcal{L}$ . Definiere:

$$([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_m]_{\mathcal{U}}) \in \mathcal{R}^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} \iff \{i \in I \mid (a_1^i, \dots, a_m^i) \in \mathcal{R}^{A_i}\} \in \mathcal{U}$$

Wenn  $\mathcal{U}$  ein Hauptfilter ist, dann ist er erzeugt vom Element  $\{i_0\}$ .

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}\text{-Struktur} \\ \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}_{i_0} \text{ ist ein Isomorphismus} \\ (a_i)_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}} \longmapsto a_{i_0} \end{array}$$

### Definition 5.9

Wenn  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter ist, dann ist  $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}$  die Ultrapotenz.

### Beispiel 5.10

Sei  $\mathcal{U}$  ein reicher/generischer Ultrafilter auf  $\mathbb{N}$ . Betrachte  $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$ .

$$\mathcal{N}^{\mathcal{U}} \ni (1, 2, 3, \dots) / \sim_{\mathcal{U}} > (1, 1, 1, \dots) / \sim_{\mathcal{U}}$$

### Satz 5.11 (Satz von Łoś)

Sei  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $I$ ,  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Familie von  $\mathcal{L}$ -Strukturen,  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel und  $[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}} \in \prod_{\mathcal{U}} A_i$ . Dann gilt:

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \iff \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1^i, \dots, a_n^i]\} \in \mathcal{U}$$

*Beweis.* Induktiv über den Aufbau von  $\varphi$ . Sei  $\varphi = (t_1 \dot{=} t_2)$ . Dann gilt:

$$\begin{array}{l} \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \models (t_1[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \dot{=} t_2[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}]) \\ \iff t_1^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i} [[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \dot{=} t_2^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i} [[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \\ \stackrel{\text{induktiv über den Aufbau}}{\iff} \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models t_1[a_1^i, \dots, a_n^i] \dot{=} t_2[a_1^i, \dots, a_n^i]\} \in \mathcal{U} \end{array}$$

□

**Folgerung 5.12**

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $I$ . Betrachte  $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}$ . Das ist eine elementare Erweiterung von  $\mathcal{A}$  bezüglich der Abbildung  $A \longrightarrow \prod_{\mathcal{U}} A$ .  
 $a \longmapsto (a)_{i \in I / \sim_{\mathcal{U}}}$

Einbettung,  
injektiv

*Beweis.* Sei  $\varphi$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel,  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Zu zeigen ist:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{A}_i^{\mathcal{U}} \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}]$$

„ $\Rightarrow$ “: Mit Satz von Łoś gilt:

$$\mathcal{A}_i^{\mathcal{U}} \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \iff \{i \in I \mid \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\} \in \mathcal{U}$$

Da dieser Ausdruck jedoch der gesamten Menge  $I$  entspricht, folgt die Behauptung direkt.

„ $\Leftarrow$ “: Die leere Menge liegt nicht in  $\mathcal{U}$ , also gibt es  $i$  sodass die Formel gilt, da diese jedoch von  $i$  unabhängig ist, gilt sie immer.  $\square$

*Beweis Lefschetz'sches Prinzip (5.2) „ $\Leftarrow$ “.* Sei

$$S = \left\{ p \text{ Primzahl} \mid \begin{array}{l} \text{ein algebraisch abgeschlossener Körper mit} \\ \text{Charakteristik } p \text{ erfüllt die Aussage } \chi \end{array} \right\}$$

Zeige:  $S$  ist unendlich. Sei  $P \subset \mathbb{N}$  Primzahlen. Betrachte jetzt

$$\mathcal{B} = \{X \cap S \subset P \mid X \subset P \text{ koendlich}\} \quad (4)$$

Ist  $\mathcal{B}$  eine Filterbasis?  $X \cap S = \emptyset$  ist endlich  $\iff S \subset P \setminus X$  unendlich, ein Widerspruch.

Weiter gilt  $(X_1 \cap S) \cap (X_2 \cap S) = \underbrace{(X_1 \cap X_2)}_{\text{koendlich}} \cap S$ .

$\xRightarrow{\text{Blatt 1}}$  es gibt einen Ultrafilter, welcher alle Elemente aus  $\mathcal{B}$  enthält.

Sei im Weiteren  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $P$ , welcher  $\mathcal{B}$  enthält.  $X \cap S \in \mathcal{U}$  ist für alle  $X \subset P$  koendlich.

$\hookrightarrow$   $\mathcal{U}$  ist reich (kein Hauptultrafilter). Für  $p_0 \in P$  ist  $P \setminus \{p_0\}$  koendlich.

$\Rightarrow P \setminus \{p_0\} \cap S \in \mathcal{U}$ .

$\hookrightarrow S \in \mathcal{U}$

Sei  $K = \prod_{\mathcal{U}} K_p$ , wobei  $K_p$  ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik  $p$  ist derart, dass

$$\begin{cases} K_p \models \chi & p \in S \\ \text{egal bspw. } \mathbb{F}_p^{\text{alg}} & p \notin S \end{cases}$$

$$(1) K \models \text{ACF}_0$$

$$(2) K \models \chi, \text{ weil } \{p \in P \mid K_p \models \chi\} \supset S \in \mathcal{U}$$

$\text{ACF}_0$  ist vollständig  $\Rightarrow \mathbb{C} \models \chi$ . □

**Satz 5.13** (Kompaktheitssatz)

Eine Theorie  $T$  ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent ist.

*Beweis.* OBdA ist  $T$  unendlich. Sei  $I = \{\emptyset \neq S \subset T \text{ endlich}\}$ . Für  $s \in I$  gibt es eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}_s$ , sodass  $\mathcal{A}_s \models \chi$  für jedes  $\chi \in s$ . Sei weiter

$$B_s = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für jedes } \chi \in s\}$$

Ist  $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s \in I}$  eine Filterbasis?

$$(1) \emptyset \neq B_s \ni s$$

$$(2) B_{s_1} \cap B_{s_2} = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für alle } \chi \text{ aus } s_2\} = B_{s_1 \cup s_2} \in \mathcal{B}!$$

Sei  $\mathcal{U}$  ein Ultrafilter auf  $I$ , sodass  $B_s \in \mathcal{U}$  für jedes  $\emptyset \neq s \subset T$  endlich. Sei  $\mathcal{A} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_s$ .

Zu zeigen ist:  $\mathcal{A} \models T$  (sei  $\chi \in T$ , zeige  $\mathcal{A} \models \chi$ ).

$$\text{Satz von Łoś} \quad \underbrace{\{s \in T \mid \mathcal{A}_s \models \chi\}}_{B_{\{\chi\}}} \in \mathcal{U}$$

□

# Teil II

## Typen und Saturation

### 6 Typen

Sei im Folgenden  $\mathcal{L}$  eine Sprache und  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur.

#### Definition 6.1

Ein partieller Typ  $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$  mit Parametern aus  $B$  ist eine Kollektion von Formeln in der Sprache  $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$ , welche in der (kanonischen)  $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  endlich erfüllbar ist, das heißt für alle  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \Sigma$  gibt es ein Tupel  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  mit  $\mathcal{A} \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n)$  für  $1 \leq i \leq m$ .

$\mathcal{A}$  realisiert  $\Sigma$ , falls es ein Tupel  $(a_1, \dots, a_n)$  gibt, sodass  $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$  für alle  $\varphi \in \Sigma$ . Sonst vermeidet  $\mathcal{A}$  den partiellen Typ  $\Sigma$ .

#### Beispiel 6.2

Betrachte  $(\mathbb{R}, 0, <)$ . Sei  $\Sigma(x) = \{0 < x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}}$  ein partieller Typ.

Wird  $\Sigma$  realisiert oder vermieden?  $\rightsquigarrow$  vermieden

Sei jedoch  $\Sigma' = \{\sqrt{2} \leq x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > \sqrt{2}}}$ .  $\rightsquigarrow$  realisiert von  $\sqrt{2}$

Betrachte nun  $\Sigma$  auf  $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{R}$ . Hier realisiert  $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$  den partiellen Typen  $\Sigma$ !

#### Bemerkung 6.3

Sei  $\mathcal{A}$  eine unendliche Struktur. Dann gibt es immer einen partiellen Typen, der vermieden wird:  $\{\neg(x \doteq a)\}_{a \in A}$ .

#### Bemerkung 6.4

Sei  $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$  ein partieller Typ über  $C$  in  $\mathcal{A}$ . Dann gibt es eine elementare Erweiterung  $\underbrace{\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}}_{\mathcal{L} \cup \{c\}_{c \in C}\text{-Struktur}}$ , welche  $\Sigma$  realisiert.

*Beweis.* Seien  $\zeta_1, \dots, \zeta_n$  neue Konstantenzeichen. Schreibe  $T = \text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \Sigma(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ .  $T$  ist eine  $\mathcal{L}_A \cup \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ -Theorie. Falls  $\mathcal{B} \models T$ , dann ist  $\{\zeta_1^{\mathcal{B}}, \dots, \zeta_n^{\mathcal{B}}\}$  eine Realisierung von  $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ .



## 6 Typen

*Zu zeigen ist:  $T$  endlich konsistent.*

$T_0 \underset{\text{endlich}}{\subset} T \longrightarrow T_0 \subset \text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\varphi_i[\zeta_1, \dots, \zeta_n]\}_{i \in M}$  für  $\varphi_1, \dots, \varphi_M \in \Sigma$ ,  $M \in \mathbb{N}$ .  
 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$  ist in  $\mathcal{A}$  realisierbar von  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ .  
 $\longrightarrow$  Setze  $\tilde{\mathcal{A}}$  die  $\mathcal{L}_A \cup \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ -Struktur aus  $\mathcal{A}$  mit Interpretationen  $\zeta_i^{\tilde{\mathcal{A}}} = a_i$ .  $\square$

### Definition 6.5

Ein  $n$ -Typ über  $C \subset A$  in der Struktur  $\mathcal{A}$  ist ein partieller Typ in der Variable  $x_1, \dots, x_n$  über  $C$ , welcher maximal endlich erfüllbar ist bezüglich der Inklusion zwischen partiellen Typen über  $C$ .

$S_n^{\mathcal{A}}(C)$  ist die Menge aller Typen in  $\mathcal{A}$  über  $C$ .

$$S^{\mathcal{A}}(C) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^{\mathcal{A}}(C)$$

### Bemerkung 6.6

$S_n^{\mathcal{A}}(C) \neq \emptyset$ . Gegeben  $b_1, \dots, b_n \in A$ , setze

$$\text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) = \{\varphi[x_1, \dots, x_n] \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel} \mid \mathcal{A} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]\}$$

ist ein  $n$ -Typ über  $C$ .

*Beweis.* Sei  $\varphi[x_1, \dots, x_n] \notin \text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C)$ . Zu zeigen ist:  $\text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) \cup \{\varphi[x_1, \dots, x_n]\}$  nicht endlich erfüllbar. Aus der Annahme folgt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \not\models \varphi[b_1, \dots, b_n] \\ \implies & \mathcal{A} \models \neg \varphi[b_1, \dots, b_n] \\ \implies & \neg \varphi[x_1, \dots, x_n] \in \text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) \\ \implies & \text{Widerspruch zur Maximalität} \end{aligned}$$

Sei nun  $p(x_1, \dots, x_n) \in S_n^{\mathcal{A}}(C)$ . Gegeben  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$  eine  $\mathcal{L}_C$ -Formel. Zu zeigen ist:  $\varphi \in p$  oder  $\neg \varphi \in p$ .

Angenommen  $\varphi \notin p \implies p \subsetneq \underbrace{p(x_1, \dots, x_n) \cup \{\varphi[x_1, \dots, x_n]\}}_{\text{endlich erfüllbar}}$

$\rightsquigarrow$  Es gibt  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in p$  sodass  $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi$  in  $A$  nicht erfüllbar ist. Insbesondere

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \not\models \exists x_1, \dots, x_n \left( \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n] \right) \\ \iff & \mathcal{A} \models \neg \exists x_1, \dots, x_n \left( \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n] \right) \\ \iff & \mathcal{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \left( \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \neg \varphi[x_1, \dots, x_n] \right) \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass  $p \subseteq p(x_1, \dots, x_n) \cup \{\neg \varphi[x_1, \dots, x_n]\}$  endlich erfüllbar ist. Sei dazu  $\psi_1, \dots, \psi_r \in p$ . Wir wollen zeigen:

$$\mathcal{A} \models \exists x_1, \dots, x_n \left( \bigwedge_{j=1}^r \psi_j[x_1, \dots, x_n] \wedge \neg \varphi[x_1, \dots, x_n] \right)$$

## 6 Typen

$\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_r \in p$ ,  $p$  ist insbesondere partieller Typ.

$\hookrightarrow$  es gibt  $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$  mit  $\mathcal{A} \models \bigwedge \varphi_i[a_1, \dots, a_k] \wedge \bigwedge \psi_j[a_1, \dots, a_n]$ .

$\implies \mathcal{A} \models \neg \varphi[a_1, \dots, a_n]$  □

Allgemeiner: Sei  $T$  eine konsistente Theorie in der Sprache  $\mathcal{L}$ . Definiere:  $n$ -Typ in  $T$  ist eine Kollektion von  $\mathcal{L}$ -Formeln in  $x_1, \dots, x_n$ , welche endlich konsistent mit  $T$  ist, es gilt also für  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$ :  $T \cup \{ \exists x_1, \dots, x_n (\bigwedge_{j=1}^m \varphi_j[x_1, \dots, x_m]) \}$  ist konsistent, und maximal bezüglich Inklusion mit dieser Eigenschaft:

Für  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur und  $C \subset A$ . Dann sei  $T$  die  $\mathcal{L}_C$ -Theorie von  $\mathcal{A}$ .

$$\underbrace{p \in S_n(T)}_{n\text{-Typ von } T} \Leftrightarrow p \in S_n^{\mathcal{A}}(C)$$

### Folgerung 6.7

Gegeben eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  gibt es  $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$ , welche alle Typen in  $S^{\mathcal{A}}(A)$  realisiert.

*Beweis.* Sei  $\{p_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$  eine Aufzählung von  $S^{\mathcal{A}}(A)$ . Wir konstruieren eine elementare Kette  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}_1 \preceq \dots \preceq \mathcal{A}_\alpha \preceq \dots$  so, dass  $\underbrace{p_\alpha}_{\substack{\text{als part. Typ} \\ \text{über } A \text{ in } \mathcal{A}_\alpha}}$  in  $\mathcal{A}_{\alpha+1}$  realisiert wird.

$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$ .  $\mathcal{A}_1$  wird mithilfe des Lemmas für  $p_0$  gewonnen. Falls  $\gamma$  eine Limeszahl ist: Setze  $\mathcal{A}_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \mathcal{A}_\beta$ . Sei  $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{A}_\alpha$ . □

Achtung:  $\mathcal{B}$  kann sehr groß werden!

### Beispiel 6.8

$\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <) \rightsquigarrow$  Typ für jedes Element aus  $\mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} r \in \mathbb{R} &\longrightarrow p_r \supset \{x < r\} \cup \{s < x\}_{s < r} \\ p_r &\text{ „}=\text{“ } \{x < r\} \cup \{s < x\}_{s < r} \\ p_{r+} &= \{x > r\} \cup \{s > x\}_{s > r} \end{aligned}$$

Ziel:  $S_n(T)$  ist ein kompakter, 0-dimensionaler Hausdorff topologischer Raum  $\rightsquigarrow$  „Sto-  
neraum der Theorie  $T$ “.

## 7 Exkurs: Einführung in die Topologie

Sei  $X$  eine Menge.

### Definition 7.1

Eine Basis  $\mathcal{B}$  einer Topologie auf  $X$  ist eine Kollektion von Teilmengen derart, dass

- (1)  $\forall x \in X$  gibt es  $B \in \mathcal{B}$  mit  $x \in B$
- (2)  $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in B_1 \cap B_2$  gibt es ein  $B_3 \in \mathcal{B}$  mit  $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

### Definition 7.2

$U \subset X$  ist *offen*, falls es für jedes  $x \in U$  ein  $B \in \mathcal{B}$  gibt mit  $x \in B \subset U$ .

Sei  $T = \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$ . Die Kollektion  $T$  erfüllt folgende Eigenschaften:

- (1)  $\emptyset, X \in T$
- (2)  $U_1, U_2 \in T \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$
- (3) Sei  $(U_i)_{i \in I} \subset T$ . Dann ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in T$

**Beispiel 7.3** (1) die euklidische Topologie auf  $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

- (2) die triviale Topologie auf  $X$  ist  $\{\emptyset, X\}$
- (3) die diskrete Topologie auf  $X$  ist  $\mathcal{P}(X)$
- (4) die koendliche Topologie auf  $X$  wird gegeben als:

$$U \subset X \text{ offen} \iff |X \setminus U| \text{ endlich, oder } U = \emptyset$$

So ist beispielsweise  $(0, 1)$  offen in  $\mathbb{R}$  für die euklidische Topologie, aber nicht für die koendliche Topologie.

### Bemerkung 7.4

$$Y \subset X \text{ ist offen} \iff \forall x \in Y \quad \underbrace{\exists U \ni x}_{\substack{U \text{ ist eine} \\ \text{Umgebung von } x}} \quad \text{mit } x \in U \subset Y$$

### Definition 7.5

Eine Menge  $C \subset X$  ist *abgeschlossen*, falls das Komplement offen ist.

### Definition 7.6

Ein topologischer Raum  $(X, T)$  ist *0-dimensional*, falls es eine Basis der Topologie gibt, welche aus offen-abgeschlossenen<sup>11</sup> Mengen besteht.

---

<sup>11</sup>Englisch: „clopen“

### Beispiel 7.7

Die diskrete Topologie ist  $0$ -dimensional, weil sie als Basis  $\{\{x\}\}_{x \in X}$  hat.

### Definition 7.8 (Trennungseigenschaften)

Sei  $(X, T)$  ein topologischer Raum.

T1 Falls  $x \neq y \in X$  gibt es Umgebungen  $\overbrace{U^x}^{\substack{\text{offene Menge} \\ \text{die } x \text{ enthält}}}$ ,  $U^y$  mit  $x \in U^x \setminus U^y, y \in U^y \setminus U^x$ .

T2 (Hausdorff) falls  $x \neq y \in X$  gibt es  $U^x, U^y$  Umgebungen mit  $U^x \cap U^y = \emptyset$

### Bemerkung 7.9

$T2 \Rightarrow T1$

**Beispiel 7.10** • Ist die euklidische Topologie T2? Ja.

- Sei  $X$  unendlich. Ist die koendliche Topologie  $T$  Hausdorff? Nein. Ist sie T1? Ja:  
 $U^x = X \setminus \{y\}, U^y = X \setminus \{x\}$

### Bemerkung 7.11

$(X, T)$  T1  $\Rightarrow$  Jeder Punkt ist abgeschlossen!

*Beweis.* Zu zeigen:  $X \setminus \{x\}$  offen

Sei  $y \in X \setminus \{x\}$ . Wir suchen  $U^y \subset X \setminus \{x\}$ . Es gilt  $x \neq y \Rightarrow U^x, U^y$ , insbesondere  $x \notin U^y \Rightarrow U^y \subset X \setminus \{x\}$  □

### Definition 7.12

$(X, T)$  topologischer Raum.

- $s \in X$  ist *isoliert*, falls  $\{s\}$  offen ist.
- $A \subset X$  ist *dicht*, falls für jede offene Menge  $\emptyset \neq U \subset X$  ist  $A \cap U \neq \emptyset$
- $x \in X$  ist ein *Häufungspunkt von A*, falls für jede Umgebung  $U^x \ni x$  gilt, dass  $U^x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

### Bemerkung 7.13

Sei  $A \subset X$ .  $\underbrace{C}_{\substack{\text{dicht} \\ \supset A}} \subset X \Rightarrow C = X$

*Beweis.* Zu zeigen ist:  $C = X$ . Sonst ist  $\underbrace{X \setminus C}_{\neq \emptyset} \overset{A \text{ dicht}}{\Rightarrow} \underbrace{A \cap U}_{\subset C \cap (X \setminus C) = \emptyset} \neq \emptyset$ , ein Widerspruch. □

**Bemerkung 7.14**

Eine Topologie auf  $X$  ist genau dann diskret, falls jeder Punkt isoliert ist.

Übung

**Bemerkung 7.15**

Eine Teilmenge  $C \subset X$  ist genau dann abgeschlossen, wenn  $C$  alle ihre Häufungspunkte enthält.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “:  $x \notin C \Rightarrow x \in \underbrace{X \setminus C}_{\text{offen}}$  und  $(X \setminus C) \cap \underbrace{(C \setminus \{x\})}_{=C} = \emptyset \Rightarrow x$  kein Häufungspunkt von  $C$ .

„ $\Leftarrow$ “: Zu zeigen:  $X \setminus C$  offen. Sei dazu  $x \in X \setminus C$  beliebig.  $\Rightarrow x$  ist kein Häufungspunkt von  $C \Rightarrow \exists U^x \ni x$  mit  $U^x \cap \underbrace{C \setminus \{x\}}_{=C} = \emptyset \Rightarrow x \in U^x \subset X \setminus C$   $\square$

**Definition 7.16**

Seien  $X, Y$  topologische Räume. Die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist *stetig auf*  $x_0$ , falls für jede Umgebung  $V^{f(x_0)} \ni f(x_0)$  (in  $Y$ ) das Urbild  $f^{-1}(V)$  in  $X$  offen ist.  
 $f$  ist stetig, wenn sie auf jedem Punkt in  $X$  stetig ist.

**Bemerkung 7.17**

Es genügt Urbilder von Basiselementen zu betrachten. Warum? Sei  $V$  eine Umgebung von  $f(x_0)$ .

$\hookrightarrow$  es gibt  $B$  ein Basiselement mit  $f(x_0) \in B \subset V \Rightarrow x_0 \in \underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{offen}} \subset f^{-1}(V)$

**Bemerkung 7.18**

$f : X \rightarrow Y$  ist genau dann stetig, wenn  $f^{-1}(C)$  abgeschlossen in  $X$  ist für alle  $C \subset Y$  abgeschlossen.

$$X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$$

**Beispiel 7.19**

$f : \begin{matrix} X \rightarrow Y \\ x \mapsto y_0 \end{matrix}$  konstant. Ist  $f$  stetig? Ja, denn  $f^{-1}(x) = \begin{cases} X & x = y_0 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$ .

**Definition 7.20**

Die Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  ist  $\begin{matrix} \text{offen} \\ \text{abgeschlossen} \end{matrix}$ , falls für jede  $\begin{matrix} \text{offene} \\ \text{abgeschlossene} \end{matrix}$  Teilmenge  $\begin{matrix} U \\ C \end{matrix}$  von  $X$  das Bild  $\begin{matrix} f(U) \\ f(C) \end{matrix}$   $\begin{matrix} \text{offen} \\ \text{abgeschlossen} \end{matrix}$  ist.

**Bemerkung 7.21**

offen  $\not\Rightarrow$  abgeschlossen  
 $\not\Leftarrow$

**Beispiel 7.22**

Betrachte  $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie.  $\Pi$  ist offen, aber nicht abgeschlossen: Betrachte  $x \cdot y = 1 \mapsto x \neq 0$ .  
 $\begin{matrix} \text{abgeschlossen} & & \text{nicht} \\ & & \text{abgeschlossen} \end{matrix}$

**Beispiel 7.23**

Sei  $X \rightarrow Y$  konstant unendlich mit koendlicher Topologie. Diese Abbildung ist abgeschlossen, aber nicht offen.

**Definition 7.24**

Ein Homöomorphismus  $f : X \rightarrow Y$  ist eine bijektive stetige Abbildung derart, dass die  $f^{-1}$  auch stetig  
 mengentheoretische Abbildung  $\begin{matrix} \text{bzw.} \\ f \text{ offen} \\ \text{bzw.} \\ f \text{ abgeschlossen} \end{matrix}$  ist.

**Definition 7.25**

$(X, T)$  topologischer Raum. Die Menge  $K \subset X$  ist kompakt, falls jede offene Überdeckung  $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt: Es gibt  $i_1, \dots, i_n \in I$  mit  $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$ .  
 $(X, T)$  ist kompakt, wenn  $X$  kompakt ist.

**Bemerkung 7.26** • Jede endliche Menge ist kompakt

- $f : X \rightarrow Y$  stetige Abbildung,  $K \subset X$  kompakt  $\Rightarrow f(K)$  kompakt in  $Y$ .

*Beweis.* Zu zeigen:  $f(K)$  kompakt.

$$\begin{aligned} f(K) \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{V_i}_{\text{offen in } Y} &\Rightarrow K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(V_i)}_{\text{offen}} \\ &\Rightarrow K \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_n}) \\ &\Rightarrow f(K) \subset \underbrace{f(f^{-1}(V_{i_1}))}_{\subset V_{i_1}} \cup \dots \cup \underbrace{f(f^{-1}(V_{i_n}))}_{\subset V_{i_n}} \end{aligned}$$

□

**Lemma 7.27**

$K \subset X$  kompakt.  $C \subset X$  mit  $C \subset K \Rightarrow C$  kompakt.  
 abg.

*Beweis.* Sei  $C \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i}_{\text{offen}}$ .  $C$  abgeschlossen  $\implies X \setminus C$  offen.

$$K \subset X = (X \setminus C) \cup C = (X \setminus C) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{K \text{ kompakt}}^{oBdA} C \subset K \subset (X \setminus C) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \\ & \implies C \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \end{aligned}$$

✓

□

**Lemma 7.28**

$X$  Hausdorff,  $K \underset{\text{kompakt}}{\subset} X \implies K$  abgeschlossen.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass wenn  $x \notin K$ , dann ist  $x$  kein Häufungspunkt von  $K$ .

Für  $y \in K \rightarrow y \neq x \xrightarrow{x \text{ Hausdorff}} \exists U_y^x, V_y$  mit  $U_y^x \cap V_y = \emptyset \rightarrow K \subset \bigcup_{y \in K} V_y \xrightarrow{K \text{ kompakt}} K \subset V^{y_1} \cup \dots \cup V^{y_n}$  für  $y_1, \dots, y_n \in K$ .

Setze  $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}^x \ni x$  offen. Zu zeigen bleibt:  $U \cap \underbrace{K}_{=K \setminus \{x\}} = \emptyset$ .

$U \cap K \subset U \cap \left( \bigcup_{i=1}^n V^{y_i} \right) = \bigcup U \cap V^{y_i} \subset U_{y_i}^x \cap V^{y_i} \underset{\text{n. Def.}}{=} \emptyset \Rightarrow x$  ist kein Häufungspunkt. □

**Folgerung 7.29**

$X$  Hausdorff,  $(K_i)_{i \in I}$  kompakte Teilmengen.  $\implies \bigcap_{i \in I} K_i$  kompakt.

*Beweis.*  $\underbrace{\bigcap_{i \in I} K_i}_{\text{abg.}} \text{ abgeschlossen. } \xrightarrow{(7.28)} \bigcap_{i \in I} K_i \text{ kompakt.}$

□

**Folgerung 7.30**

$f : X \rightarrow Y$  stetig,  $X, Y$  topologische Räume.

$Y$  Hausdorff  $\implies f$  abgeschlossen

*Beweis.* Sei  $C \subset X$  abgeschlossen.  $\implies C$  ist kompakt  $\implies \underbrace{f(C)}_{\subset Y \text{ Hausdorff}}$  ist kompakt

$\xrightarrow{(7.28)} f(C)$  abgeschlossen.

□

## 8 Stoneraum von Typen einer Theorie

Sei  $T$  eine konsistente Theorie in der Sprache  $\mathcal{L}$ . Ein  $n$ -Typ ist eine Menge von  $\mathcal{L}$ -Formeln in den Variablen  $x_1, \dots, x_n$ , welche endlich konsistent bezüglich  $T$  ist, und maximal mit dieser Eigenschaft bezüglich Inklusion.

Gegeben  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$ . Dann ist  $T \cup \{ \exists \vec{x} (\bigwedge_{i=1}^m \varphi_i[\vec{x}]) \}$  konsistent.

### Bemerkung 8.1

Wenn  $T$  vollständig ist, dann gilt

$$S_n(T) = S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset)$$

für jedes Modell  $\mathcal{A} \models T$ , wobei  $S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset)$  die Menge aller Typen  $p(x_1, \dots, x_n)$  in  $n$  Variablen ist, sodass  $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$ ,  $\mathcal{A} \models \exists \vec{x} (\bigwedge_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}))$ .

Häufig:  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $B \subset A : S_n^{\mathcal{A}}(B) = S_n(\text{Th}(\mathcal{A}, b)_{b \in B})$

### Definition 8.2

Gegeben  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$ , setze

$$[\varphi] = \{p \in S_n(T) \mid \varphi \in p\}$$

### Bemerkung 8.3

Typen sind unter Deduktion abgeschlossen.

$$[\varphi \wedge \psi] = [\varphi] \cap [\psi]$$

$$[\varphi \vee \psi] = [\varphi] \cup [\psi]$$

$$[\neg(x_1 \dot{=} x_1)] = \emptyset$$

$$[\neg\varphi] = S_n(T) \setminus [\varphi]$$

$$[(x_1 \dot{=} x_1)] = S_n(T)$$

### Bemerkung 8.4

$$[\varphi] \subset [\psi] \iff T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])$$

Insbesondere  $[\varphi] = [\psi]$  genau dann, wenn  $\varphi, \psi$  logisch äquivalent modulo  $T$  sind.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Falls  $T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}]) \implies T \cup \{ \exists \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}]) \}$  konsistent. Das heißt die Menge  $\{(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}])\}$  ist ein partieller Typ.

$\xrightarrow{\text{Zorn}}$  es gibt  $p \in S_n(T)$  mit  $(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}]) \in p \xRightarrow[p \text{ unter Deduktion abgeschlossen}]{\implies} p \in [\varphi] \setminus [\psi]$ .

„ $\Leftarrow$ “:  $p \in [\varphi] \Rightarrow \varphi \in p \xRightarrow{T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])} \psi \in p \Rightarrow p \in [\psi]$ . □



**Satz 8.5**

Die Kollektion  $\{[\varphi]\}_{\varphi[x_1, \dots, x_n] \text{ eine } \mathcal{L}\text{-Formel}}$  bildet eine Basis der Topologie auf  $S_n(T)$  derart, dass  $S_n(T)$  0-dimensional, Hausdorff und kompakt ist.

*Beweis.* Basis:  $\checkmark$  wegen (8.3).

0-dimensional:  $S_n(T) \setminus [\varphi] = \underbrace{[\neg\varphi]}_{\text{offen}} \Rightarrow [\varphi]$  ist abgeschlossen (und offen).

Hausdorff: Seien  $p \neq q \in S_n(T) \Rightarrow$  es gibt  $\varphi \in p \setminus q \Rightarrow p \in [\varphi], q \in [\neg\varphi]$  *disjunkt*.

$S_n(T)$  kompakt: Es genügt zu zeigen, dass jede offene Umgebung der Form  $\bigcup_{i \in I} [\varphi_i]$  eine endliche Überdeckung besitzt, denn:

$$X = \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i}_{= \bigcup_{j \in J} B_{ij}} = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} B_{ij} \longrightarrow X \subset \underbrace{B_{i_1 j_1} \cup \dots \cup B_{i_n j_n}}_{\subset U_{i_1}}$$

Also:  $S_n(T) = \bigcup_{i \in I} [\varphi_i] \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{i \in I} [\neg\varphi_i] \xrightarrow{\text{Kompaktheitssatz}} \{\neg\varphi_i[\vec{x}]\}_{i \in I}$  nicht endlich erfüllbar in

$T \Rightarrow$  es gibt  $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}$  sodass  $T \cup \{ \exists \vec{x} (\bigwedge_{j=1}^n \neg\varphi_{i_j}[\vec{x}]) \}$  inkonsistent.

Also  $T \models \forall \vec{x} (\bigvee_{j=1}^n \varphi_{i_j}[\vec{x}]) \xrightarrow{(8.3)} S_n(T) = [\varphi_{i_1}] \cup \dots \cup [\varphi_{i_n}]$ . Sonst gäbe es  $p \in S_n(T) \setminus \bigcup_{j=1}^n [\varphi_{i_j}] \Rightarrow \neg\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n} \in p \xrightarrow[p \text{ endlich erfüllbar in } T]{\Rightarrow} T \cup \{ \exists \vec{x} (\bigwedge_{j=1}^n \neg\varphi_{i_j}[\vec{x}]) \}$ .  $\square$

**Bemerkung 8.6**

Jede offene abgeschlossene Menge in  $S_n(T)$  ist der Form  $[\varphi]$  für eine  $\mathcal{L}$ -Formel  $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ .

*Beweis.* Sei  $X$  offen-abgeschlossen.  $\xRightarrow{X \text{ offen}} X = \bigcup_{p \in X} [\varphi_p]$ , mit  $p \ni \varphi_p$ .

$X$  abgeschlossen  $\xRightarrow[S_n(T) \text{ kompakt}]{\Rightarrow} X$  kompakt  $\xRightarrow{\text{Kompaktheit}} X = \bigcup_{i=1}^n [\varphi_{p_i}] = [\bigvee_{i=1}^n \varphi_{p_i}]$ .  $\square$

**Definition 8.7** (Erinnerung)

Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$   $\mathcal{L}$ -Strukturen.  $h : A_0 \longrightarrow B_0$  ist elementar, falls für alle  $a_1, \dots, a_n \in A_0$ ,  $\varphi = \varphi[a_1, \dots, a_n]$  gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{B} \models \varphi[h(a_1), \dots, h(a_n)]$$

**Bemerkung 8.8**

Sei  $h : \overset{\subset A}{A_0} \longrightarrow \overset{\subset B}{B_0}$  elementar,  $B \supset C \supset B_0$ . Dann induziert  $h$  eine abgeschlossene stetige

surjektive Abbildung

$$\underbrace{S_n^{\mathcal{B}}(C)}_{\text{kompakt \& Hausdorff}} \xrightarrow{h_*} \underbrace{S_n^{\mathcal{A}}(A_0)}_{\text{kompakt \& Hausdorff}}$$

*Bemerkung:* Abgeschlossenheit von  $h_*$  folgt direkt mit 7.30.

$$h_*(q) = \{\varphi[x_1, \dots, x_n] \mathcal{L}_{A_0}\text{-Formel mit } \underbrace{h(q)}_{\substack{\mathcal{L}_{B_0}\text{-Formel} \\ \hookrightarrow \mathcal{L}_C\text{-Formel}}} \in q\}$$

### Beispiel 8.9

$$\varphi = (x_1 \dot{=} a_1), \quad h(\varphi) = (x_1 \dot{=} \underbrace{h(a_1)}_{\in B_0 \subset C}).$$

*Beweis von Bemerkung 8.8.* Zeige zuerst:  $h_*$  ist wohldefiniert: Sei  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in h_*(q)$ .

$$\mathbb{Z} : \mathcal{A} \models \exists \vec{x} \left( \bigwedge_{i=1}^k \varphi_i[\vec{x}] \right).$$

$$\text{Nach Voraussetzung gilt: } h(\varphi_1), \dots, h(\varphi_k) \in q \xrightarrow{\text{endlich erfüllbar}} \mathcal{B} \models \exists \vec{x} \left( \underbrace{\bigwedge_{i=1}^k h(\varphi_i[\vec{x}])}_{=\Theta[h(a_1), \dots, h(a_m)]} \right)$$

$\implies$  Behauptung.

Zeige weiter:  $h_*(q)$  ist maximal endlich erfüllbar. Es genügt zu zeigen, dass falls  $\varphi \notin h_*(q) \implies \neg\varphi \in h_*(q)$ .

Angenommen  $h_*(q) \subsetneq \Sigma$ .  $\mathbb{Z} : \Sigma$  nicht endlich erfüllbar in  $\mathcal{A}$ .

Nach Voraussetzung gibt es  $\varphi \in \Sigma \setminus h_*(q)$ .  $\implies \neg\varphi \in h_*(q) \subset \Sigma \implies \{\varphi, \neg\varphi\} \subset \Sigma$ . Sei

$$\varphi \notin h_*(q) \implies h(\varphi) \in q \xrightarrow{q \text{ vollständig}} \underbrace{\neg h(\varphi)}_{=h(\neg\varphi)} \in q \implies \neg\varphi \in h_*(q).$$

Typen  
sind Ul-  
trafilter

Zeige weiter:  $h_*$  ist stetig. Es genügt zu zeigen, dass  $h_*^{-1}([\varphi])$  offen ist.

$$\begin{aligned} [h(\underbrace{\varphi}_{\mathcal{L}_{B_0}\text{-Formel}})] &= \{q \in S_n^{\mathcal{B}}(C) \mid \underbrace{h_*(q) \in [\varphi]}_{\substack{\downarrow \\ \varphi \in h_*(q) \\ \downarrow \\ h(\varphi) \in q}}\} = h_*^{-1}([\varphi]) \end{aligned}$$

Zeige nun *Surjektivität*. Sei  $p \in S_n^{\mathcal{A}}(A_0)$ . Wir suchen ein  $q$  mit  $\underbrace{\varphi}_{\mathcal{L}_{A_0}\text{-Formel}} \in h_*(q) = p$

$$\implies h(\varphi) \in q.$$

### Beispiel 8.10

Betrachte  $(\mathbb{R}, <) \preceq \underbrace{(\mathcal{R}, <)}_{0 < \varepsilon < r, \ r > 0}$  über  $\mathbb{Q} \cup \{\varepsilon\}$ . Hier werden zwei verschiedene Typen in

einen einzigen abgebildet:

$$\begin{array}{ccc} q \in \mathbb{R} & & \\ q > x > \varepsilon & \longrightarrow & 0 < x < q \\ 0 < x < \varepsilon & & q > 0 \end{array}$$

Zur Übung: Wenn in Bemerkung 8.8  $B_0$  anstelle von  $C$  stünde, so wäre  $h_*$  ein Homöomorphismus.

Frage: Ist  $\{h(\varphi) \mid \varphi \in p\}$  endlich erfüllbar?

Seien dazu  $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in p$ .  $\mathcal{Z} : \mathcal{B} \models \exists \vec{x} (\bigwedge_{i=1}^k h(\varphi_i)[\vec{x}])$

Aus dem vorherigen Teil des Beweises folgt  $\mathcal{A} \models \exists \vec{x} (\bigwedge_{i=1}^k h(\varphi_i[\vec{x}])) \implies$  Behauptung.  $\square$

### Beispiel 8.11

Sei  $\mathcal{A} = \mathcal{B}$  und  $A_0 \subset C$ . Dann besagt der Satz:

$$\begin{array}{ccc} S_n^{\mathcal{A}}(C) & \xrightarrow[\text{von Parametern}]{\text{Einschränkung}} & S_n^{\mathcal{A}}(A_0) \\ q & \longmapsto & q|_{A_0} \end{array}$$

## 9 Typenvermeidungssatz und Isolation

Im Folgenden betrachten wir *isolierte Typen*. Topologisch betrachtet sieht das so aus:

$$\begin{array}{ccc} \in S_n(T) & & \text{offen} \\ p & \text{isoliert} \iff & \{p\} \\ & & \text{abgeschlossen} \end{array} = [p] \text{ für eine } \mathcal{L}\text{-Formel } \varphi \in p$$

Wir möchten das syntaktisch verstehen.

### Bemerkung 9.1

Ein  $n$ -Typ  $p \in S_n(T)$  ist genau dann isoliert, wenn er eine *komplette* Formel  $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$  enthält, das heißt

$$p = \{\psi \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel} \mid T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])\}$$

Insbesondere ist jeder isolierte Typ in jedem Modell von  $T$  realisiert, falls  $T$  vollständig ist!

Aufgaben (Blatt 6): Betrachte  $\overbrace{(\mathbb{R}, <)}^{\text{hat QE}}$ .

- Ist der Typ  $\{0 < x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}}$  isoliert?
- Ist der Typ  $\{(x \dot{=} 15)\}$  isoliert<sup>12</sup>?

*Beweis von Bemerkung 9.1.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $\psi \in p \Rightarrow [(\varphi \wedge \psi)] \subset [\varphi] = \{p\} \Rightarrow [\varphi] = [(\varphi \wedge \psi)] \iff T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])$

$\Rightarrow p \subseteq \{\psi \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel} \mid T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])\}$

Hier möchten wir eigentlich Gleichheit zeigen. Weil  $p$  jedoch bezüglich  $\subset$  maximal ist, genügt es zu zeigen, dass die rechte Seite endlich erfüllbar ist:  $\{\psi_1, \dots, \psi_k \mid T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi_i[\vec{x}])\}$ . Also:  $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \rightarrow (\bigwedge_{i=1}^k \psi_i[\vec{x}]))$ .

$\mathbb{Z} : T \cup \{\exists \vec{x}(\bigwedge_{i=1}^k \psi_i[\vec{x}])\}$  konsistent.

$\varphi \in \underbrace{p}_{\substack{\text{endlich} \\ \text{erfüllbar}}} \Rightarrow T \cup \{\exists \vec{x}\varphi[\vec{x}]\}$  ist konsistent  $\Rightarrow$  Behauptung.

„ $\Leftarrow$ “: Angenommen  $p = \underbrace{\{\psi \mid T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])\}}_{\ni \varphi}$ . Dann folgt  $\varphi \in p$ , und somit

$\{p\} \subset \underbrace{\text{klar}}_{\substack{\text{Hausdorff} \\ \psi \in p}} \bigcap_{\psi \in p} [\psi] \supset [\varphi] \ni p \Rightarrow \{p\} = [\varphi]$  ist isoliert!

Zu „Insbesondere“:  $T$  vollständig. Sei  $p$  isoliert durch  $\varphi$ .  $\xRightarrow{T \text{ vollständig}} T \models \exists \vec{x}\varphi[\vec{x}]$ . Sei  $\mathcal{M} \models T$  und  $\vec{a} \in M^{|\vec{x}|} \mid \mathcal{M} \models \varphi[\vec{a}] \Rightarrow \mathcal{M} \models \psi[\vec{a}]$  für  $\psi \in p$ .  $\square$

### Bemerkung 9.2

$h : A_0 \rightarrow B_0 = \text{Im}(h)$  elementar  $\Rightarrow h_* : S_n^{\mathcal{B}}(B_0) \rightarrow S_n^{\mathcal{A}}(A_0)$  Homöomorphismus<sup>13</sup>.

### Beispiel 9.3

Sei  $T = \exists^\infty$  (diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination). Betrachte  $\mathcal{A} \models T$ . Wir wollen  $S_1^{\mathcal{A}}(A)$  besser verstehen.  $S_1^{\mathcal{A}}(A)$  enthält Typen der Form  $(x \dot{=} a)$  für jedes Element  $a$  (diese Typen sind isoliert), sowie einen Typen der Form  $\{(x \dot{=} a)\}_{a \in A}$  (ohne diesen Typen hätten wir ein Problem, denn dann wären alle Typen isoliert). Insbesondere folgt auch: Für  $A$  abzählbar gilt  $|S_1^{\mathcal{A}}(A)| \leq \aleph_0$ .

Vgl. Blatt 5 Aufgabe 3

### Beispiel 9.4

Sei  $\mathcal{G} = (G, R)$  Zufallsgraph. Alle Typen sind der Form  $\{xRa\}_{a \in A} \cup \{\neg xRb\}_{b \in G \setminus A} \cup \{\neg(x \dot{=} g)\}_{g \in G}$ . Somit folgt insbesondere  $|S_1^{\mathcal{G}}(G)| \geq 2^{|G|}$ .

### Satz 9.5 (Typenvermeidungssatz)

Sei  $T$  eine abzählbare konsistente Theorie (Theorie in einer abzählbaren Sprache),  $p \in$

<sup>12</sup>das ist nur ein Typ, denn er muss endlich erfüllbar sein

<sup>13</sup>Homöomorphismen interessieren uns, weil unter diesen Topologien erhalten bleiben

$S_n(T)$  ein nicht-isolierter  $n$ -Typ. Es gibt ein abzählbares Modell  $\mathcal{M}$  von  $T$ , welches  $p$  vermeidet, das heißt  $p$  wird nicht in  $\mathcal{M}$  realisiert.

*Beweis mit Henkins Methode.* Sei  $C$  eine abzählbare Menge von neuen Konstanten. In der Sprache  $\mathcal{L} \cup C$ , sei  $\{\varphi_m[\vec{x}]\}_{m \in \mathbb{N}}$  eine Aufzählung aller Formeln in einer Variablen. Sei  $\{\vec{c}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  eine Aufzählung aller  $n$ -Tupel aus  $C$ . Konstruiere eine Kette  $\Sigma_0 \subset \Sigma_1 \subset \Sigma_2 \subset \dots$  von endlichen Mengen von  $(\mathcal{L} \cup C)$ -Aussagen derart, dass  $T \cup \Sigma_k$  konsistent ist für jedes  $k \in \mathbb{N}$ .

$\Sigma_0 = \emptyset$ .

Angenommen  $\Sigma_k$  bereits konstruiert.

1. Fall:  $k = 2m$ . Sei  $i \in \mathbb{N}$  minimal, sodass  $c_i$  weder in  $\varphi_m$  noch in den Aussagen aus  $\Sigma_k$  vorkommt. Setze

$$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k \cup \{(\exists x \varphi_m[x] \rightarrow \varphi[c_i])\}$$

$T \cup \Sigma_{k+1}$  ist konsistent.

2. Fall:  $k = 2m + 1$ . Sei  $\bigwedge_{\chi \in \Sigma_k} \chi = \Theta[\overset{\text{Tupel aus } C}{\vec{c}}]$ , für  $\Theta$  eine  $\mathcal{L}$ -Formel. OBdA schreibe  $\Theta[\vec{c}] = \Theta[\underbrace{\vec{c}_m}_{n\text{-Tupel}}, \vec{c}']$ . Setze  $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists \vec{y} \Theta[\vec{x}, \vec{y}]$ .

*Bemerkung:*  $T \cup \{\exists \vec{x} \varphi[\vec{x}]\}$  ist konsistent.

Also ist  $\emptyset \neq [\varphi]$  eine nicht-leere Umgebung  $S_n(T)$ . Weil  $p$  nicht isoliert ist, gibt es  $\psi \in p$  mit  $T \not\models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \implies \psi[\vec{x}]) \implies$  es gibt ein Modell  $\underbrace{\mathcal{M}}_{\mathcal{L}\text{-Struktur}}$  von  $T$  mit  $\vec{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi[\vec{a}]$ , aber

$\mathcal{M} \models \neg \psi[\vec{a}]$ . Damit folgt insbesondere: es gibt ein  $\vec{d}$  in  $M$  mit  $\mathcal{M} \models \Theta[\vec{a}, \vec{d}]$ .

Setze

$$\Sigma_{k+1} = \Sigma_k \cup \{\neg \psi[\vec{c}_m]\}$$

Ist  $T \cup \Sigma_{k+1}$  konsistent?  $\rightarrow$  ja.

Sei  $T' = T \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma_k$  ist endlich konsistent und  $C$  ist eine Menge von Henkinkonstanten für  $T \cup \Sigma_k$ .

$\implies$  Es gibt ein abzählbares Modell  $\mathcal{M}$  von  $T'$ , welches nur aus Interpretationen der Konstanten aus  $C$  besteht.

Insbesondere:  $\mathcal{M} \models T$  abzählbar.

$\mathbb{Z}$ :  $p$  wird in  $\mathcal{M}$  nicht realisiert:

Sei  $\vec{a} \in M^n \rightarrow \vec{a}$  ist die Interpretation des Tupels  $c_m^\vec{a}$  für ein  $m \in \mathbb{N}$ .

$\xRightarrow[\text{Schritt } 2m+1]{\mathcal{M} \models \neg\psi[\vec{a}]}$  für ein  $\psi \in p$ . □

**Bemerkung 9.6**

$p \in S_n(T)$  nicht isoliert.  $\{p\}$  abgeschlossen, aber  $\overset{\circ}{\{p\}} = \emptyset$ , wobei  $\overset{\circ}{A}$  die größte offene Menge  $U$  ist, welche ganz in  $A$  liegt. (das Innere von  $A$ )

$$\text{Warum? } U \subset \{p\} \xRightarrow[\text{offen}]{} \xRightarrow[\text{abgeschlossen und offen}]{\text{oder } U = \{p\}} \implies p \text{ isoliert.}$$

## 10 Magere Mengen und Typenvermeidungssatz

**Definition 10.1**

Eine Menge  $A$  in einem topologischen Raum  $(X, T)$  ist *nirgends dicht*, falls  $\overset{\circ}{\bar{A}} = \emptyset$ , wobei  $\bar{A}$  kleinste abgeschlossene Menge welche  $A$  enthält ist.

**Beispiel 10.2**

Ist  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  nirgends dicht? Nein, denn  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \overset{\circ}{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ .

**Definition 10.3**

$A$  ist *mager*<sup>14</sup>, falls  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ , wobei  $A_n$  nirgends dicht.

**Satz 10.4** (Verallgemeinerter Typenvermeidungssatz)

$T$  abzählbar konsistent. Sei  $A_n \subset S_n(T)$  mager für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es ein abzählbares Modell  $\mathcal{M} \models T$ , welches alle Typen in  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$  vermeidet.

*Hier ohne Beweis.* □

**Definition 10.5**

Sei  $\mathcal{A}$  ein  $\mathcal{L}$ -Struktur. Ein  $n$ -Typ  $p \in S_n^{\mathcal{A}}(B), B \subset \mathcal{A}$  ist *atomic*, falls  $p$  isoliert ist.

**Lemma 10.6**

Sei  $\mathcal{A}$  ein  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $\vec{a}, \vec{b}$  endliche Tupel.

$$\underbrace{\text{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}, \vec{b})}_{\{\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel} \mid \mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}, \vec{b}]\}} \text{ ist isoliert } \iff \text{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{b}) \text{ und } \underbrace{\text{tp}^{\mathcal{A}}(\vec{a}/\vec{b})}_{=\{\psi[\vec{x}] \text{ Formeln in } \mathcal{L} \cup \{b_1, \dots, b_n\} \mid \mathcal{A} \models \psi[\vec{a}]\}} \text{ sind beide isoliert.}$$

---

<sup>14</sup>Idee hier: „nicht so groß“

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Angenommen  $\varphi[\vec{x}, \vec{y}]$  isoliert  $\text{tp}^A(\vec{a}, \vec{b})$ . Zeige zuerst, dass  $\varphi[\vec{x}, \vec{b}]$  den Typ  $\text{tp}^A(\vec{a}/\vec{b})$  isoliert. (liegt bereits im Typ nach Definition)

Sei  $\psi[\vec{x}, \vec{b}] \in \text{tp}^A(\vec{a}/\vec{b}) \Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[\vec{a}, \vec{b}]$ .

Zu zeigen:  $\mathcal{A} \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}, \vec{b}] \rightarrow \psi[\vec{x}, \vec{b}])$ .

Wegen  $\varphi[\vec{x}, \vec{y}]$  isoliert  $\text{tp}^A(\vec{a}, \vec{b})$ , gilt auch  $\mathcal{A} \models \forall \vec{x} \forall \vec{y}(\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \rightarrow \psi[\vec{x}, \vec{y}]) \Rightarrow$  Behauptung.

Für  $\text{tp}^A(\vec{b}) \ni \exists \vec{x} \varphi[\vec{x}, \vec{y}] \rightarrow$  zeige, dass diese Formel den Typ isoliert.

$$\mathcal{A} \models \forall \vec{y}(\exists \vec{x} \varphi[\vec{x}, \vec{y}] \rightarrow \Theta[\vec{y}]), \quad \Theta \in \text{tp}^A(\vec{b}) \quad .$$

$\mathcal{A} \models \Theta[\vec{b}] \Rightarrow \mathcal{A} \models \Theta[\vec{a}, \vec{b}]$

Sei  $\vec{b}_1 \in A$  beliebig mit  $\mathcal{A} \models \exists \vec{x} \varphi[\vec{x}, \vec{b}_1] \Rightarrow$  es gibt ein  $\vec{a}_1 \in A$  mit  $\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}_1, \vec{b}_1]$ .

Es gilt immer  $\mathcal{A} \models \forall \vec{x} \forall \vec{y}(\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \rightarrow \Theta[\vec{y}]) \implies \mathcal{A} \models \Theta[\vec{b}_1]$ .

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\Theta[\vec{y}] \in \text{tp}^A(\vec{b})$  und  $\varphi[\vec{x}, \vec{b}] \in \text{tp}^A(\vec{a}/\vec{b})$  isolierende Formeln. Setze  $\psi[\vec{x}, \vec{y}] = (\varphi[\vec{x}, \vec{y}] \wedge \Theta[\vec{y}]) \in \text{tp}^A(\vec{a}, \vec{b})$ .

$\mathcal{Z} : \mathcal{A} \models \forall \vec{x} \forall \vec{y}(\psi[\vec{x}, \vec{y}] \rightarrow \chi[\vec{x}, \vec{y}])$  für alle  $\chi \in \text{tp}^A(\vec{a}/\vec{b}) : \mathcal{A} \models \chi[\vec{x}, \vec{y}]$ .

$\chi[\vec{x}, \vec{b}] \in \text{tp}^A(\vec{a}/\vec{b}) \Rightarrow \mathcal{A} \models \underbrace{\forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}, \vec{b}] \rightarrow \chi[\vec{x}, \vec{b}])}_{\Theta_1[\vec{b}]}$ . Also  $\Theta_1[\vec{y}] \in \text{tp}^A(\vec{b}) \rightarrow \mathcal{A} \models \forall \vec{y}(\Theta[\vec{y}] \rightarrow$

$\Theta_1[\vec{y}])$ .

Sei nun  $\vec{a}_1, \vec{b}_1 \in A$  mit  $\mathcal{A} \models \psi[\vec{a}_1, \vec{b}_1] \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}_1, \vec{b}_1] \\ \text{und} \\ \mathcal{A} \models \Theta[\vec{b}_1] \end{array} \right. . \xrightarrow{\text{mit „also“}} \mathcal{A} \models \Theta_1[\vec{b}_1] \xRightarrow{\mathcal{A} \models \varphi[\vec{a}_1, \vec{b}_1]} \mathcal{A} \models \chi[\vec{a}_1, \vec{b}_1]$

$\mathcal{A} \models \chi[\vec{a}_1, \vec{b}_1]$ . □

## 11 Primmodelle. Existenz und Eindeutigkeit

Ab jetzt:  $T$  ist eine konsistente abzählbare Theorie.

### Definition 11.1

$\mathcal{M} \models T$  ist ein *Primmodell*, falls  $\mathcal{M}$  sich in jedes andere Modell von  $T$  elementar einbetten lässt.

### Beispiel 11.2

$\underbrace{\mathbb{Q}}_{\text{Primmodell}}, \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \dots, \mathbb{Q}^n, \dots, \mathbb{Q}^\omega$ . Wegen Quantorenelimination ist jede Einbettung elementar!

**Bemerkung 11.3** • Wenn  $T$  ein Primmodell besitzt, dann ist  $T$  vollständig

- Wenn  $\mathcal{M}$  ein Primmodell von  $T$  ist, dann ist  $\mathcal{M}$  abzählbar
- Wenn  $\mathcal{M}$  ein Primmodell von  $T$  ist, dann ist der Typ  $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a})$  für  $\vec{a} \in M$  immer atomar isoliert (sonst finde Modell das Typen nicht realisiert. Einbettung liefert doch eine Realisierung)

Ab jetzt:  $T$  ist vollständige, abzählbare Theorie ohne endliche Modelle.

**Satz 11.4**

$T$  wie oben.  $\mathcal{M} \models T$  ist genau dann prim, wenn  $\mathcal{M}$  abzählbar ist und für jedes Tupel  $\vec{a} \in M$  endlich gilt, dass  $\text{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a})$  atomar ist.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: ✓ (gerade gesehen)

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\mathcal{N} \models T$  beliebig.  $\mathbb{Z}_{\mathcal{L}} : \mathcal{M} \hookrightarrow \mathcal{N}$  elementar.

Sei  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Aufzählung von  $M$ . Konstruiere eine Kette  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  elementarer Abbildungen zwischen endlich erzeugten Teilmengen von  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  derart, dass  $a \in \text{Dom}(f_{n+1})$ .

Sei  $f_0 = \emptyset \xrightarrow{T \text{ vollst.}} \mathcal{M} \equiv \mathcal{N}$ .

Angenommen  $f_n$  konsistent. Betrachte  $\underline{a_n}$ .

1. Fall:  $a_n \in \text{Dom}(f_n) \rightarrow f_{n+1} = f_n$

2. Fall: Sonst schreibe  $\vec{a}$  eine Aufzählung von  $\text{Dom}(f_n)$ ,  $\vec{b} \in N$  eine Aufzählung von  $\text{Im}(f_n)$ .

$\text{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a}, a_n) \text{ atomar} \implies \underbrace{\text{tp}^{\mathcal{M}}(a_n/\vec{a})}_{\in S_1^{\mathcal{M}}(\vec{a})} \text{ ist atomar.}$

$f_n^{-1} : \vec{b} \longrightarrow \vec{a}$  elementar.  $\rightarrow (f_n^{-1})_* : S_1^{\mathcal{M}}(\vec{a}) \longrightarrow S_1^{\mathcal{N}}(\vec{b})$  Homöomorphismus (denn die Parametermenge ist gleich).

Insbesondere: Topologie bleibt erhalten:  $(f_n^{-1})_*(\text{tp}^{\mathcal{M}}(a_n/\vec{a}))$  ist isoliert  $\Rightarrow$  wird in  $\mathcal{N}$  von Element  $b$  realisiert.

Setze  $f_{n+1} = f_n \cup \{(a_n, b)\}$ .



$$\mathcal{M} \models \varphi[a_n, \vec{a}] \Leftrightarrow \varphi[x, \vec{a}] \in \text{tp}^{\mathcal{M}}(a/\vec{a}) \xLeftrightarrow[\text{Bild unter } (f_n^{-1})_*] \varphi[\vec{x}, \vec{b}] \in \text{tp}^{\mathcal{N}}(b/\vec{b}) \Leftrightarrow \mathcal{N} \models \varphi[b, \vec{b}].$$

□

**Folgerung 11.5**

Das Primmodell einer vollständigen abzählbaren Theorie  $T$  ist, wenn es existiert, bis auf Isomorphie eindeutig.

*Beweis.* Analog.

□

**Beispiel 11.6** (Beispiele von Primmodellen) •  $\mathbb{Q}$ -Vektorraum  $\rightarrow \mathbb{Q}$

- $\exists^\infty \rightarrow \mathcal{M}$  abzählbar
- $\text{ACF}_0 \rightarrow \bar{\mathbb{Q}}$
- $\mathcal{M} = \{0, 1\}^\omega$  in der Sprache  $\mathcal{L} = \{P_s\}$ ,  $s$  endliche Folge von 0, 1.  $P_s^{\mathcal{M}}(t) = \{\text{der Anfang von } t \text{ ist } s\}$ .  
 $T = \text{Th}(\mathcal{M})$  hat Quantorenelimination:

$$\underbrace{\exists y(\bigwedge \varphi[x_1, \dots, x_n, y])}_{\text{primitive Existenzformel}} \sim \Theta[x_1, \dots, x_n] \wedge \exists y \rho[y] \sim \begin{cases} x_1 \dot{=} x_1 & \text{eine Tautologie} \\ \neg x_1 \dot{=} x_1 & \text{immer falsch} \end{cases}$$

Zudem

$$T \vdash \forall x (P_{000}(x) \vee P_{001}(x) \vee P_{010}(x) \vee P_{011}(x) \vee P_{100}(x) \vee P_{110}(x) \vee P_{111}(x) \vee P_{101}(x))$$

$\rightarrow$  Man kann keine Typen isolieren, weil sich Typen nicht eindeutig durch endlich viele Aussagen bestimmen lassen.

**Satz 11.7**

Es sei  $T$  vollständig, abzählbar mit unendlichen Modellen. Dann gilt:

$T$  besitzt ein Primmodell  $\Leftrightarrow$  für jedes  $n \in \mathbb{N}$  liegen die isolierten Typen dicht in  $S_n(T)$ .

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $[\varphi[x_1, \dots, x_n]] \neq \emptyset$  in  $S_n(T)$ .  $T$  besitzt ein Primmodell  $\mathcal{M}$ .

Also  $T \cup \{\exists \vec{x} \varphi[\vec{x}]\}$  konsistent.  $\xRightarrow[\mathcal{M} \text{ Modell}]{T \text{ vollständig}} \mathcal{M} \models \exists \vec{x} \varphi[\vec{x}] \Rightarrow$  es gibt ein  $\vec{a} \in M^n \mid \mathcal{M} \models \varphi[\vec{a}]$ .

Dann gilt  $\underbrace{\text{tp}^{\mathcal{M}}(\vec{a})}_{\substack{\text{isoliert, weil Typen} \\ \text{in Primmodell} \\ \text{immer isoliert}}} \in [\varphi]$ .

„ $\Leftarrow$ “: Ein abzählbares Modell  $\mathcal{M} \models T$  ist dann prim, falls für jedes  $n \in \mathbb{N}$   $\mathcal{M}$  die Menge von Formeln  $\Sigma_n = \{\neg \varphi[x_1, \dots, x_n]\}_{\varphi \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel}, [\varphi] = \{\text{pt}\} \text{ in } S_n(T)}$

Ein  $n$ -Typ  $p$  enthält  $\Sigma_n \Leftrightarrow p \in \overbrace{\bigcap_{\substack{\varphi[x_1, \dots, x_n] \\ \mathcal{L}\text{-Formel mit} \\ [\varphi] = \{\text{pt}\}}}^{\text{Schnitte abgeschlossener Mengen} \\ \text{sind abgeschlossen}} [\neg\varphi]$

Wenn  $\bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi]$  mager ist, dann gibt es ein abzählbares Modell, welches kein  $\underbrace{\Sigma_n}_{\text{Primmodell}}$  realisiert.

Wir zeigen  $\bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi]$  nirgends dicht. Wie sieht das Innere von  $\underbrace{\bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi]}_{\text{abgeschlossen}}$  aus?

Sei  $U \subset \bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi]$ . Es genügt, den Fall  $U = [\psi]$  zu betrachten.

$\mathbb{Z} : [\psi] = \emptyset$ . Falls  $[\psi] \neq \emptyset \Rightarrow$  es gibt ein  $p \in [\psi]$  isolierter Typ  $\Rightarrow$  es gibt eine isolierende Formel  $\chi \in p$ . Somit  $p \in \bigcap_{\substack{\varphi_n \\ \text{isolierende} \\ \text{Formel}}} [\neg\varphi] \Rightarrow p \in [\neg\chi]$ . Widerspruch, denn jetzt enthält  $p$  eine Formel und deren Negation.  $\square$

### Definition 11.8

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur. Ein binärer Baum von Formeln in einer freien Variablen mit Parametern aus  $A$  ist eine Menge  $\{\varphi_s[x]\}_{s \in <\omega_2}$  ( $s$  ist also eine endliche Folge von  $0, 1$ ) von  $\mathcal{L}_A$ -Formeln mit folgenden Eigenschaften:

- (1)  $\mathcal{A} \models \exists x \varphi_s[x]$  für jede endliche Folge  $s$
- (2)  $\mathcal{A} \models \forall x ((\varphi_{s \wedge 0}[x] \vee \varphi_{s \wedge 1}[x]) \rightarrow \varphi_s[x])$
- (3)  $\mathcal{A} \models \neg \exists x (\varphi_{s \wedge 0}[x] \wedge \varphi_{s \wedge 1}[x])$

### Definition 11.9

$T$  ist *total transzendent*, falls  $T$  kein Modell besitzt, in welchem es einen binären Baum von Formeln in einer Variablen gibt.

### Beispiel 11.10

### Beispiel 11.11

$T = \exists^\infty \cdot \underbrace{X \subset M}_{\text{definierbar}} \text{ mit Parametern } \rightarrow X \text{ endlich oder koendlich}^{15}$ .

<sup>15</sup>das ist genau, was Morleys Kategoritätssatz besagt (versteckt)

**Beispiel 11.12** (Nicht-Beispiel)

$T = \text{Zufallsgraphen}$ .

**Lemma 11.13**

$T$  vollständig abzählbar mit unendlichen Modellen. Falls  $T$  total transzendent ist, dann liegen für jedes  $\mathcal{M} \models T$ ,  $\underbrace{A \subset M}_{\text{abzählbar}}$  die isolierten Typen dicht in  $S_n^{\mathcal{M}}(A)$ .

Insbesondere besitzt  $T$  ein Primmodell.

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass die isolierten Typen dicht in  $S_1^{\mathcal{M}}(A)$  liegen (vgl. Übung). Sonst gibt es eine offene, nicht-leere Umgebung ohne isolierte Typen. OBdA wird diese Umgebung durch  $[\varphi[x]]$  gegeben.

$0 \neq ||[\varphi]| \geq 2$ . Finde also  $p \neq q \in [\varphi]$ . Weil  $S_1^{\mathcal{M}}$  Hausdorff ist, finden wir insbesondere  $\psi_1 \ni p, \psi_2 \ni q$  mit  $[\psi_1] \cap [\psi_2] = \emptyset$ .

Dadurch bricht der Baum nicht ab. □

**Definition 11.14**

Sei  $\mathcal{A}$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $C \subset A$ .  $B \subset A$  ist *konstruktibel über  $C$* , falls  $B = (b_\alpha)_{\alpha < \lambda}$  so<sup>16</sup>, dass der Typ  $\text{tp}^{\mathcal{A}}(b_\alpha/C, (b_\beta)_{\beta < \alpha})$  isoliert ist für alle  $\alpha < \lambda$ .

**Bemerkung 11.15**

$T$  eine Theorie,  $\mathcal{A} \models T$ ,  $C \subset A$ .  $T_C = T \cup \text{Diag}(C)$ . Wenn  $T_C$  ein konstruktibles Modell (über  $C$ ) besitzt, dann ist dieses Modell ein Primmodell von  $T_C$ .

*Beweis.* Sei  $\mathcal{M} = (m_i)_{i < \lambda}$  konstruktibel über  $C$ ,  $\mathcal{N} \models T_C$  beliebig.  $\mathbb{Z} : \mathcal{M} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}$ .

Konstruiere eine Kette von  $\mathcal{L}_C$ -elementarer Abbildungen  $f_\alpha : \text{Dom}(f_\alpha) \subset \mathcal{M} \dots \mathcal{N}$  so, dass  $m_\alpha \in \text{Dom}(f_{\alpha+1})$

$f_0 = \emptyset$ .

Sei  $f_\alpha$  bereits konstruiert.  $m_\alpha \in \text{Dom}(f_\alpha) \rightarrow f_{\alpha+1} = f_\alpha$ .

Wenn nicht:  $\underbrace{(f_\alpha^{-1})_*}_{\text{Hmöomorphismus, erhält Topologie}}(\text{tp}^{\mathcal{M}}(m_\alpha/C, (m_\beta)_{\beta < \alpha}))$  ist isoliert.  $\implies$  es wird in  $\mathcal{N}$  von  $b$

realisiert.  $\implies f_{\alpha+1} = f_\alpha \cup \{(a_\alpha, b)\}$ . □

**Folgerung 11.16**

Je zwei konstruktible Modelle sind isomorph über  $C$ .

**Proposition 11.17**

Wenn  $T$  total transzendent ist, dann gibt es für jedes  $C \subset A$ ,  $\mathcal{A} \models T$ , ein Primmodell über  $C$ .

---

<sup>16</sup>ist das unabhängig von der Aufzählung? Das ist unklar, wird in dieser Vorlesung umgangen.

*Beweis.* oBdA  $C \neq \emptyset$ . Sei  $\mathcal{A}$  ein konkretes Modell.

$$S = \left\{ (B, \alpha, f), \begin{array}{l} B \subset A \\ \alpha \in O_n \\ f : \alpha \rightarrow B \text{ Bijektion} \end{array} \text{ derart, dass f\"ur jedes } \beta < \alpha \\ \text{tp}^{\mathcal{A}}(b_\beta/C, (b_\gamma)_{\gamma < \beta}) \text{ atomar, } b_\beta = f(\beta) \right\}$$

Setze  $(B_1, \alpha_1, f_1) \leq (B_2, \alpha_2, f_2)$ , falls  $B_1 \subset B_2$ ,  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  und  $f_2|_{\alpha_1} = f_1$ ; eine partielle Ordnung auf  $S$ .

**Bemerkung 11.18**

$$(B, \alpha, f) \in S, \text{tp}^{\mathcal{A}}(d/B, C) \text{ atomar f\"ur ein } d \in A \implies \left( B \cup \{d\}, S(\alpha), \begin{array}{l} S(\alpha) \longrightarrow B \cup \{d\} \\ \beta \longmapsto f(\beta) \\ \alpha \longmapsto d \end{array} \right) \in S$$

Ferner  $(c, \underline{1}, \underline{0} \longrightarrow c) \in S$  f\"ur alle  $c \in C \implies S \neq \emptyset$ .

$S$  ist induktiv. Sei  $\Gamma(B_i, \alpha_i, f_i)$  eine Kette in  $S$ . Setze  $B = \bigcup B_i$ ,  $\alpha = \sup \alpha_i$ ,  $f = \bigcup f_i : \alpha \xrightarrow{\text{Bijektion}} B$ .

Noch  $\mathbb{Z}$ :  $(B, \alpha, f) \in S$ .

Sei  $\beta < \alpha$ .  $\text{tp}^{\mathcal{A}}(b_\beta/C, (b_\gamma)_{\gamma < \beta})$  atomar.  $b_\beta = \underbrace{f(\beta)}_{=f_i(\beta)}$ ,  $\beta < \alpha_i$  f\"ur ein  $i$ , sonst Widerspruch.

$b_\gamma = f_i(\gamma)$  f\"ur  $\gamma < \beta < \alpha_i$ . Somit:  $\text{tp}^{\mathcal{A}}(f_i(\beta)/C, (f_i(\gamma))_{\gamma < \beta})$  atomar,  $(B_i, \alpha_i, f_i) \in S$ .  
 $\implies C \subset B$

Sei  $(B, \alpha, f) \in S$  maximal.

Tarskis Test:  $\varphi[x_1, \dots, x_n, y], b_1, \dots, b_n \in B, \mathcal{A} \models \varphi[b_1, \dots, b_n, a]$  f\"ur ein  $a \in A$ . Betrachte jetzt  $\emptyset \neq [\varphi[b_1, \dots, b_n, y]]$  in  $S_1^{\mathcal{A}}(B)$ .  $\xrightarrow{T \text{ total transzendent}}$  es gibt  $d \in A$ , sodass  $\text{tp}^{\mathcal{A}}(d/B)$  atomar ist (folgt mit (11.18)) und  $\mathcal{A} \models \varphi[b_1, \dots, b_n, d]$ .

$\underbrace{(B, \alpha, f)}_{\text{maximal, somit Gleichheit}} \leq \underbrace{(B \cup \{d\}, S(\alpha), f \cup \{(\alpha, d)\})}_{\in S} \implies d \in B \implies B \text{ ist Universum einer elementaren Unterstruktur.}$  □

## 12 Saturation

Wir haben verstanden, dass wir in der Theorie der Vektorr\"aume  $\mathbb{Q}, \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}, \dots, \mathbb{Q}^\omega$  haben, wobei  $\mathbb{Q}$  das Primmodell ist. Jetzt m\"ochten wir  $\mathbb{Q}^\omega$  verstehen.

**Definition 12.1**

Sei  $\kappa \geq \aleph_0$  eine Kardinalzahl. Eine  $\mathcal{L}$ -Struktur  $\mathcal{A}$  ist  $\kappa$ -saturiert, falls jeder  $n$ -Typ über eine Menge  $C \subset A, |C| < \kappa$ , in  $\mathcal{A}$  realisiert wird.

$\mathcal{A}$  ist *saturiert*, falls es  $|A|$ -saturiert ist.

**Bemerkung 12.2**

$\mathcal{A}$  ist  $\kappa$ -saturiert genau dann, wenn  $\mathcal{A}$  jeden 1-Typ über  $C \subset A$  mit  $|C| < \kappa$  realisiert.

*Beweis.* „ $\Rightarrow$ “: klar.

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $p(x, y) \in S_2^A(C)$ . Betrachte

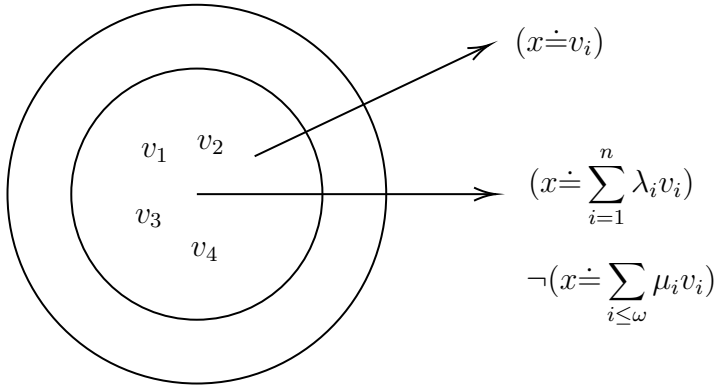
$$\underbrace{q(x)}_{\in S_1^A(C)} = p(x, y) \upharpoonright \text{die Variable } x = \{\varphi[x] \mid \varphi[x] \in p(x, y), \varphi \text{ } \mathcal{L}_C\text{-Formel}\}$$

$\stackrel{n. V.}{\implies}$  es gibt  $b \in A$  Realisierung von  $q$  sodass  $S_1^A(Cb), |Cb| < \kappa, p(b, y) = \{\varphi[b, y] \mid \varphi[x, y] \in p\}$

Es gibt eine Realisierung  $d$  in  $\mathcal{A}$  von  $p(b, y)$ . Aus der Konstruktion folgt, dass  $(b, d)$  den Typ  $p$  realisiert.  $\square$

**Beispiel 12.3**

$\mathbb{Q}^{(\omega)}$  ist  $\aleph_0$ -saturiert. Insbesondere werden alle Typen in  $\mathbb{Q}^{(\omega)}$  realisiert!


**Beispiel 12.4**

$(\mathbb{R}, <)$   $\aleph_1$ -saturiert? Nein, denn  $\{0 < x < q\}_{q \in \mathbb{Q}^{>0}}$  wird nicht in  $\mathbb{R}$  realisiert.

**Bemerkung 12.5**

Sei  $\mathcal{A}$   $\kappa$ -saturiert,  $\underbrace{X \subset A^n}_{\text{definierbar}}$  unendlich.  $\implies |X| \geq \kappa$ .

*Beweis.* Sonst:  $|X| < \kappa$ . Sei  $X = (\vec{c}_\alpha)_{\alpha < \mu}$  Aufzählung mit  $\mu < \kappa$ .

Kompaktheit

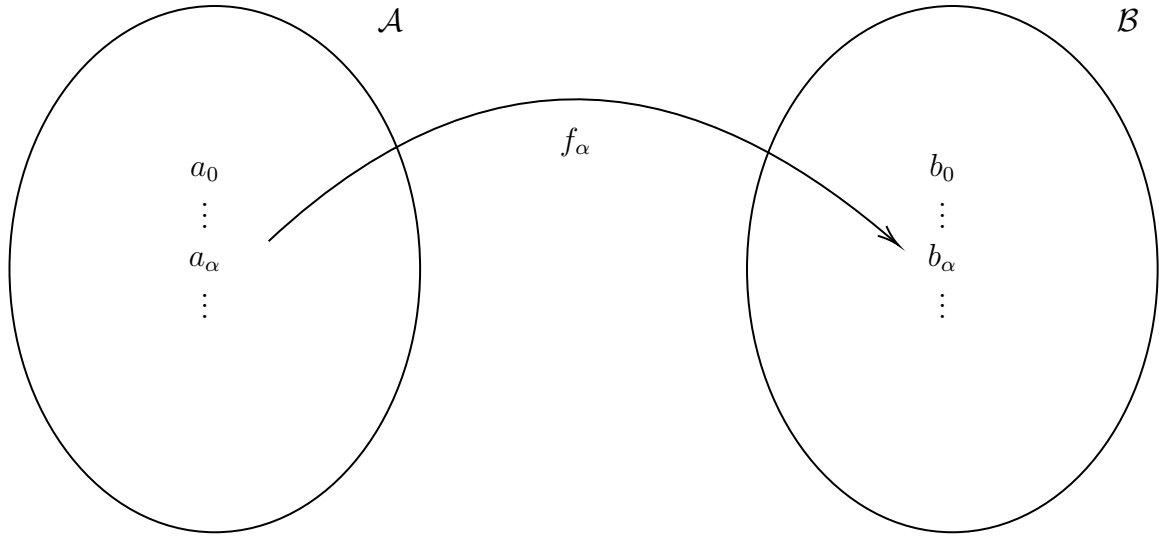
$$\sum(\vec{x}) = \{\vec{x} \in X\} \cup \{\neg(\vec{x} = \vec{c}_\alpha)\}_{\alpha < \mu}$$

ist eine partieller Typ über einer Menge  $D$  von Parametern,  $|D| < \kappa$ . Des Weiteren muss  $\Sigma$  eine Realisierung haben, das wäre jedoch ein  $c_\alpha$ . Widerspruch.  $\square$

**Bemerkung 12.6**

$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$  saturiert mit  $|A| = |B| \implies \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$

*Beweis.* Betrachte das folgende Bild:



$f_\alpha \subset f_{\alpha+1}$  elementare Abbildung,  $f_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} f_\beta$  für  $\gamma$  Limes, sodass  $a_\alpha \in \underbrace{\text{Dom}(f_{\alpha+1})}_{\text{Mächtigkeit } < |A|}, b_\alpha \in$

$\text{Im}(f_{\alpha+1}) \longrightarrow \bigcup f_\alpha : \mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$

$f_0 = \emptyset \checkmark$

Sei  $f_\alpha$  bereits konstruiert.  $\longrightarrow$  oBdA  $a_\alpha \notin \text{Dom}(f_\alpha)$ .

$\text{tp}^{\mathcal{A}}(a_\alpha / \text{Dom}(f_\alpha)) \longrightarrow$  1-Typ in  $\mathcal{B}$  über  $\text{Im}(f_\alpha)$ . Finde  $b'$  Realisierung.

$\xrightarrow{\text{saturiert}} f'_\alpha = f_\alpha \cup \{(a_\alpha, b')\}$  elementar.

Analog für  $b_\alpha$ :  $\text{tp}^{\mathcal{B}}(b_\alpha / \text{Im}(f'_\alpha)) \longrightarrow$  1-Typ in  $\mathcal{A}$  über  $\underbrace{\text{Dom}(f_\alpha) \cup \{a_\alpha\}}_{\text{Mächtigkeit } < |A|}$   $\square$

**Satz 12.7**

Sei  $\mathcal{L}$  eine abzählbare Sprache und  $A$  eine  $\mathcal{L}$ -Struktur,  $\lambda \geq \aleph_0$ . Es existiert eine  $\lambda$ -saturierte elementare Erweiterung von  $A$ .

*Beweis.* Sei  $(p_\alpha)_{\alpha < \kappa}$  eine Aufzählung aller  $n$ -Typen in  $A$  über Teilmengen der Mächtigkeit  $< \lambda$ .

$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}'_1 \preceq \mathcal{A}'_2 \preceq \dots \mathcal{A}'_\alpha$  realisiert den Typen  $p_\alpha$ . Setze  $\mathcal{A}_1 = \bigcup \mathcal{A}'_\alpha$ .

Iteriere  $\underbrace{\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}_1 \preceq \dots \preceq \mathcal{A}_\alpha \preceq \mathcal{A}_{\alpha+1} \preceq \dots}_{\lambda^+}$ , wobei  $\mathcal{A}_{\alpha+1}$  alle  $n$ -Typen über Teilmengen von  $A_\alpha$  der Mächtigkeit  $< \lambda$  realisiert. Kofinalität

$\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha < \lambda^+} \mathcal{A}_\alpha$ .  $\mathcal{Z} : \mathcal{B}$  ist  $\lambda$ -saturiert.

Sei  $C \subset B$  mit  $|C| < \lambda$ . Es genügt zu zeigen, dass  $C \subset A_\alpha$  für ein  $\alpha < \lambda^+$ . Für jedes  $c \in C$  gibt es  $\alpha = \alpha(c) < \lambda^+$  kleinstmöglich mit  $c \in A_{\alpha(c)}$ . Wir müssen zeigen, dass es ein  $\beta < \lambda^+$  gibt, mit  $\alpha(c) \leq \beta$  für alle  $c \in C$ .

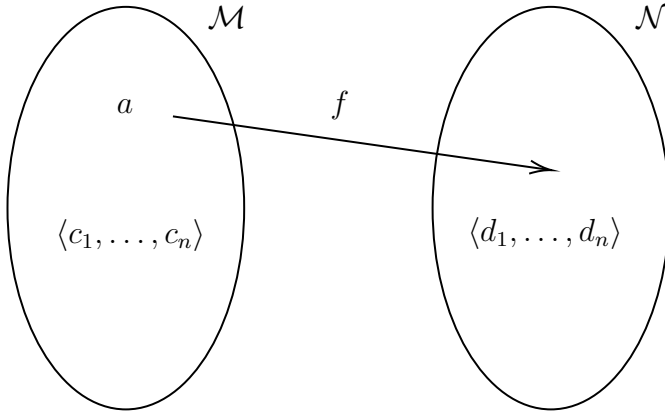
Sonst gibt es für jedes  $\beta < \lambda^+$  ein  $c \in C$  mit  $\beta < \alpha(c) \implies \lambda^+ \subset \bigcup_{\substack{c \in C \\ < \lambda}} \underbrace{\alpha(c)}_{\leq \lambda} \implies |\lambda^+| \leq \lambda$ . □

### Folgerung 12.8

Sei  $T$  eine konsistente, abzählbare Theorie mit unendlichen Modellen. Die Theorie  $T$  hat genau dann Quantorenelimination, wenn zwischen je zwei  $\aleph_0$ -saturierten Modellen von  $T$  die Kollektion aller partiellen Isomorphismen zwischen endlich erzeugten Unterstrukturen ein Back-&-Forth-System besitzt.

Ferner, wenn diese Kollektion nicht leer ist, ist  $T$  vollständig.

*Beweis.* „ $\implies$ “:  $\mathcal{M}, \mathcal{N}_0$  seien  $\aleph_0$ -saturiert.



$T$  hat Quantorenelimination  $\implies f$  ist elementar.

$\mathcal{Z} : \mathcal{M} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \implies \mathcal{N} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$

$T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}}) . \mathcal{M} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow \mathcal{N} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \Rightarrow \mathcal{N} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$ .

$\text{tp}^A(a/a_1, \dots, a_n) \longrightarrow$  1-Typ über  $d_1, \dots, d_n$  in  $\mathcal{N}$ .  $\xrightarrow[\mathcal{N} \text{ } \aleph_0\text{-saturiert}]{}$  es wird von  $b$  in  $\mathcal{N}$  realisiert.  
 $\longrightarrow f \cup \{(a, b)\}$  ist elementar  $\Rightarrow$  definiert einen partiellen Isomorphismus  $\langle c_1, \dots, c_n, a \rangle \simeq \langle d_1, \dots, d_n, b \rangle$

$\text{„}\Leftarrow\text{“: Gegeben}$ 

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \models T & & \mathcal{N} \models T \\ \cup \text{ US} & & \cup \text{ US} \\ \langle c_1, \dots, c_n \rangle & & \langle d_1, \dots, d_n \rangle \end{array} .$$

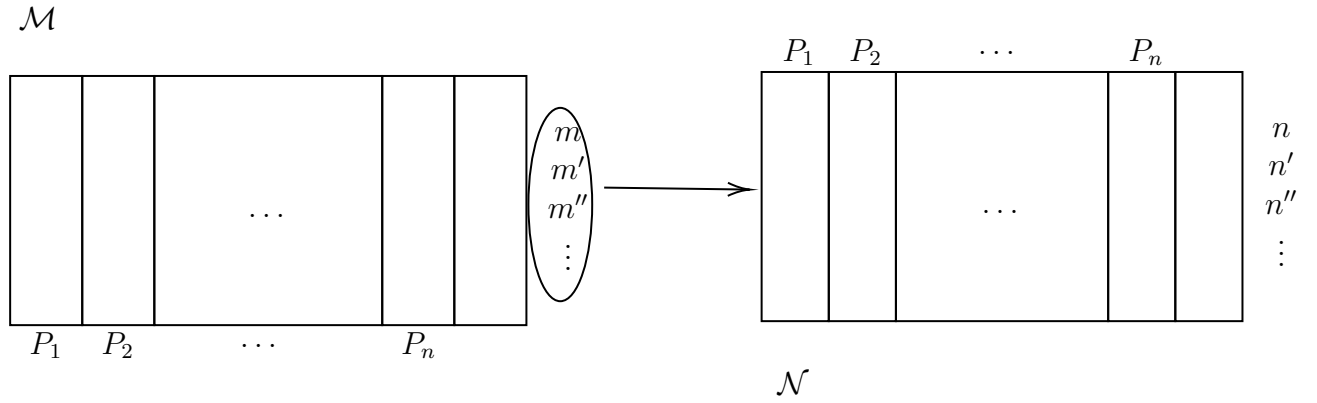
$\mathbb{Z}:$ 

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}, c_1, \dots, c_n) & \equiv & (\mathcal{N}, d_1, \dots, d_n) \\ \preceq & & \preceq \\ (\tilde{\mathcal{M}}, c_1, \dots, c_n) & \equiv & (\tilde{\mathcal{N}}, d_1, \dots, d_n) \\ \aleph_0\text{-saturiert} & \text{n. Konstr.} & \aleph_0\text{-saturiert} \end{array}$$

□

### Beispiel 12.9

$T, \mathcal{L} = \{P_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . Jedes  $P_n$  unendlich,  $P_n$  &  $P_m$  disjunkt. Was ist das  $\aleph_0$ -saturierte Modell?



$\Sigma(x) = \{\neg P_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  muss auch realisiert werden!