

Modelltheorie

Wintersemester 2019/20

Mitschrift von Floris Remmert

Prof. Dr. Amador Martin-Pizarro
Abteilung für mathematische Logik
Mathematisches Institut
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

21. November 2019

Inhaltsverzeichnis

1	Erinnerung	1
I	Theorien und Quantorenelimination	4
2	Tarskis Test	4
3	Quantorenelimination	7
4	Beispiele klassischer Theorien	11
5	Ultrafilter & der Satz von Ax	15
II	Typen und Saturation	21
6	Typen	21
7	Exkurs: Einführung in die Topologie	24
8	Stoneraum von Typen einer Theorie	29

Ziel dieser Vorlesung ist es, eine Aussage der folgenden Qualität zu erhalten:

Satz 0.1 (Morley)

Sei T eine Theorie, welche ein einziges (bis auf Isomorphie) Modell der Mächtigkeit \aleph_0 besitzt. Dann besitzt T für jede Kardinalzahl $\kappa > \aleph_0$ ein einziges Modell der Mächtigkeit κ (bis auf Isomorphie).

1 Erinnerung

Definition 1.1 • Eine Sprache \mathcal{L} ist eine Kollektion von Konstanten-, Funktions-, und Relationszeichen

- Eine \mathcal{L} -Struktur \mathcal{A} besteht aus einer nicht-leeren Grundmenge (oder Universum) A zusammen mit Interpretationen der Symbole aus \mathcal{L} :

- Für jedes Funktionszeichen f der Stelligkeit n

$$f^{\mathcal{A}} : A^n \longrightarrow A$$

- Für jedes Relationszeichen R der Stelligkeit m

$$R^{\mathcal{A}} \subset A^m$$

- Eine Einbettung F von \mathcal{A} nach \mathcal{B} ist eine injektive Abbildung $F : A \longrightarrow B$, welche mit den Interpretationen kompatibel¹ ist
- Ein Isomorphismus ist eine surjektive Einbettung.
- \mathcal{A} ist eine Unterstruktur von \mathcal{B} , falls $A \subset B$ und die Inklusion $\iota : A \longrightarrow B$ eine Einbettung bestimmt

Bemerkung 1.2

Sei \mathcal{B} eine \mathcal{L} -Struktur, $\emptyset \neq A \subset B$. Dann gibt es eine Unterstruktur von \mathcal{B} , welche von A erzeugt wird.

Das Universum besteht aus A zusammen mit dem Abschluss von A unter allen Interpretationen der Funktionszeichen von \mathcal{L} .

Definition 1.3

Sei $(I, <)$ eine partielle Ordnung. Die Ordnung ist gerichtet, falls für $i, j \in I$ gibt es $k \in I$ mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

¹das bedeutet, dass Funktions- und Relationszeichen bei Hin- und Rückrichtung erhalten bleiben

Bemerkung 1.4

Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von \mathcal{L} -Strukturen indexiert nach der gerichteten partiellen Ordnung I derart, dass für $i \leq j$ gilt: $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}_j$.

Die Menge $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ ist das Universum einer (eindeutig bestimmten) \mathcal{L} -Struktur

$$\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i \quad (1)$$

Falls I eine lineare Ordnung ist, dann ist $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Kette.

Zu 1:

- $c^{\mathcal{A}} = c^{\mathcal{A}_i}$ für ein (alle) $i \in I$, denn $c^{\mathcal{A}_i} = c^{\mathcal{A}_j} = c^{\mathcal{A}_k}$, wegen gerichteter Ordnung
- $a_1, \dots, a_n \in A = \bigcup_{i \in I} A_i \implies \exists i \in I$ mit $a_1, \dots, a_n \in A_i$. Also ist $f^{\mathcal{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathcal{A}_i}(a_1, \dots, a_n)$ wohldefiniert.
- $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}}$ genau dann, wenn es ein $i \in I$ gibt mit $a_1, \dots, a_m \in A_i$ und $(a_1, \dots, a_m) \in R^{\mathcal{A}_i}$

Beachte, dass $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$ für alle $i \in I$.

Definition 1.5

Eine atomare Formel ist ein Ausdruck der Form $(t_1 \doteq t_2)$, t_1, \dots, t_k Terme, $R(t_1, \dots, t_k)$.

Die Kollektion von Formeln ist die kleinste Klasse, welche alle atomaren Formeln enthält und derart, dass:

$$\begin{aligned} \varphi \text{ Formel} &\implies \neg \varphi \text{ Formel} \\ \varphi, \psi \text{ Formel} &\implies (\varphi \vee \psi) \text{ Formel} \\ \varphi \text{ Formel}, x \text{ Variable} &\implies \exists x \varphi \text{ Formel, } (x \text{ heißt dann „gebunden“}) \end{aligned}$$

Abk.:

$$\begin{aligned} (\varphi \wedge \psi) &= \neg(\neg\varphi \vee \neg\psi) \\ \forall x \varphi &= \neg \exists x \neg \varphi \\ (\varphi \rightarrow \psi) &= (\neg\varphi \vee \psi) \\ (\varphi \leftrightarrow \psi) &= ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)) \end{aligned}$$

Bemerkung 1.6 • Jede Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ lässt sich in pränexer Normalform umschreiben: $Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$, mit $Q_i \in \{\forall, \exists\}$. Das ist eine quantorfreie Formel, diese lässt sich weiter zerlegen in KNF bzw. DNF.

- Eine Formel ohne freie Variablen ist eine Aussage
- Eine Theorie ist eine Kollektion von Aussagen

Beispiel 1.7

Sei \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur. Erweitere die Sprache zu der Sprache $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup \{d_a\}_{a \in A}$.

\mathcal{A} ist eine \mathcal{L}_A -Struktur, $d_a^{\mathcal{A}} = a$.

- $\text{Diag}^{\text{at}}(\mathcal{A}) = \{\text{quantorenfreie } \mathcal{L}_A\text{-Aussagen } \chi \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$ heißt „atomares Diagramm“
- $\text{Diag}(\mathcal{A}) = \{\mathcal{L}\text{-Aussagen } \theta \text{ mit } \mathcal{A} \models \theta\}$ heißt „vollständiges Diagramm“

Sei nun \mathcal{B} eine \mathcal{L}_A -Struktur.

$\mathcal{B} \models \text{Diag}^{\text{at}}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ einbetten lässt

$$A \longrightarrow B$$

$$a \mapsto d_a^{\mathcal{B}}$$

$\mathcal{B} \models \text{Diag}(\mathcal{A}) \Leftrightarrow$ die obige Abbildung ist elementar

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[F(a_1), \dots, F(a_n)], a_1, \dots, a_n \in A, \varphi[x_1, \dots, x_n]$ Formel

Definition 1.8 • T ist konsistent, falls T ein Modell besitzt.

- T ist vollständig, falls T konsistent ist und je zwei Modelle von T elementar äquivalent sind.

Satz 1.9 (Kompaktheitssatz)

Eine Theorie ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent² ist.

Wie zeigen wir, dass $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$?

Satz 1.10 (Back & Forth)

$S = \{F : \underset{US}{\mathcal{C}} \longrightarrow \underset{US}{\mathcal{D}}, F \text{ partieller Isomorphismus zwischen } \mathcal{C} \text{ und } \mathcal{D} \text{ geeignet}\}^3$.

Back: Für alle $F \in S$ und $b \in B$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $G \in S$ mit $G \supset F$ Erweiterung und $b \in \text{Im}(G)$.

Forth: Für alle $F \in S$ und $a \in A$, $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ gibt es $H \in S$, mit $H \supset F$ Erweiterung mit $a \in \text{Dom}(H)$

²endlich konsistent bedeutet: jede endliche Teilmenge der Theorie besitzt ein Modell.

³bspw. endlich erzeugt

\mathcal{A} und \mathcal{B} heißen dann „Back & Forth äquivalent“

\rightarrow ist jedes $F \in S$ elementar, so gilt insbesondere $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Teil I

Theorien und Quantorenelimination

2 Tarskis Test

Lemma 2.1 (Tarskis Test)

Sei \mathcal{B} eine \mathcal{L} -Struktur und $A \subset B$ Teilmenge derart, dass für jede \mathcal{L} -Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ und Elemente $a_1, \dots, a_n \in A$:

falls:

$$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b] \text{ für ein } b \in B \Rightarrow \text{ existiert } a \in A \text{ sodass } \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \quad (2)$$

dann ist A das Universum einer elementaren Unterstruktur von \mathcal{B} .

Insbesondere: Falls $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ Unterstruktur, ist $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A}$ erfüllt 2.

Beweis. Betrachte $A \neq \emptyset \rightarrow$ Betrachte $\varphi[y] = (y \doteq y)$. $B \neq \emptyset \rightarrow \exists b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[b]$.
 $\hookrightarrow \exists a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a]$

Beh.: Für jedes Konstantenzeichen $c \in \mathcal{L}$ ist $c^{\mathcal{B}} \in A$. $\hookrightarrow \varphi[y] = (y \doteq c)$, $\mathcal{B} \models \varphi[c^{\mathcal{B}}] \Rightarrow$ es gibt $a \in A$ mit $a = c^{\mathcal{B}}$.

Beh.: A ist unter den Funktionen $f^{\mathcal{B}}$ abgeschlossen, für jedes Funktionszeichen $f \in \mathcal{L}$.

Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n, y] = (y \doteq f(x_1, \dots, x_n)) \checkmark$

Für $R \in \mathcal{L}$ m -stellig setze $R^{\mathcal{A}} = A^m \cap R^{\mathcal{B}} \rightarrow$ somit bildet A eine \mathcal{L} -Unterstruktur \mathcal{A} von \mathcal{B} .

Noch zu zeigen: $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, d. h. $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ \mathcal{L} -Formel.

Seien dazu $a_1, \dots, a_n \in A$.

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad (3)$$

Induktiv über den Aufbau von φ .

φ ist atomar $\longrightarrow \checkmark$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] & \Leftrightarrow & \mathcal{B} \not\models \psi[a_1, \dots, a_n] \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] & & \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \end{array}$$

$\varphi = \neg\psi \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = (\psi_1 \vee \psi_2) \longrightarrow \checkmark$

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]: \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ sodass $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$ für ein $a \in A \subset B \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt $b \in B$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xRightarrow{2}$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{B} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{3} \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

Für „insbesondere“: Angenommen, dass $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$. Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ eine \mathcal{L} -Formel, $a_1, \dots, a_n \in A$. Dann: $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$ für ein $b \in B \Rightarrow \mathcal{B} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{A} \models (\exists y \varphi)[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A$ mit $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \xRightarrow{\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}} \mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$

□

Proposition 2.2 (aufwärts Löwenheim-Skolem)

Sei \mathcal{A} eine unendliche \mathcal{L} -Struktur, und $\kappa < \max\{|A|, |\mathcal{L}|\}$. Dann gibt es eine elementare \mathcal{L} -Erweiterung $\mathcal{B} \geq \mathcal{A}$ der Mächtigkeit κ .

Beweis. $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$, wobei $\{c_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ eine Menge neuer Konstantenzeichen ist, ist konsistent weil sie endlich konsistent⁴ ist.

Aus der Konstruktion von Henkin hat $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\neg(c_\alpha \doteq c_\beta)\}_{\alpha \neq \beta < \kappa}$ ein Modell der Mächtigkeit der Sprache.

\rightarrow ein Modell der Mächtigkeit κ

□

Bemerkung 2.3

$|A| = n \in \mathbb{N}, \mathcal{B} \succeq \mathcal{A} \Rightarrow |B| = n$

Proposition 2.4 (abwärts Löwenheim-Skolem)

Sei \mathcal{B} eine \mathcal{L} -Struktur und $S \subset B$ beliebig. Dann gibt es eine elementare Unterstruktur $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ mit $A \supset S$ und $|A| \leq \max\{|S|, |\mathcal{L}|, \aleph_0\}$.

⁴Kompaktheit

Bemerkung 2.5

\mathbb{C} in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$, $S = \emptyset \Rightarrow$ es gibt eine abzählbare elementare Unterstruktur von \mathbb{C} . $\rightarrow \overline{\mathbb{Q}} \preceq \mathbb{C}$.

Beweis 2.4. Setze $S_0 = S$. Angenommen S_k wurde bereits konstruiert, wähle für jedes $n \in \mathbb{N}$, jede \mathcal{L} -Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ und Elemente $a_1, \dots, a_n \in S_k$ ein Element $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in B$ derart, dass $\mathcal{B} \models ((\exists y \in \varphi)[a_1, \dots, a_n] \rightarrow \varphi[a_1, \dots, a_n, a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]}])$. Setze $S_{k+1} = S_k \cup \{a_{\varphi}\}_{\varphi \mathcal{L}\text{-Formel}, (a_1, \dots, a_n) \in S_k}$

Definiere $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \supset S$. Wir überprüfen, dass A den Test von Tarski erfüllt. Sei $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n, y]$ eine \mathcal{L} -Formel, $a_1, \dots, a_n \in A$.

$\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, b]$ für ein $b \in B \Rightarrow$ es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $a_1, \dots, a_n \in S_k \Rightarrow$ es gibt ein $a_{\varphi[a_1, \dots, a_n, y]} \in S_{k+1} \subset A$ mit $\mathcal{B} \models \varphi[a_1, \dots, a_n, a] \checkmark$

Ferner ist $|A| \leq \max\{\aleph_0, |\mathcal{L}|, |S|\}$. □

Folgerung 2.6

Sei $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine gerichtete Familie von \mathcal{L} -Strukturen, sodass für $i \leq j$ ist $\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_j$. Dann ist $\mathcal{A} = \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ eine elementare Erweiterung jeder \mathcal{A}_i .

Beweis. Wir beweisen induktiv über den Aufbau von $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$, dass für alle $i \in I$, für alle $a_1, \dots, a_n \in A_i$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$.

φ atomar \rightarrow klar, denn $\mathcal{A}_i \subseteq_{US} \mathcal{A}$

$\varphi = \neg \varphi \Rightarrow$ ok!

$\varphi = (\varphi_1 \vee \varphi_2) \Rightarrow$ ok!

$\varphi = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$: $\mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $a \in A_i$ mit $\mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a]$
 $\Rightarrow \mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$
 ind. über ψ

$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \Rightarrow$ es gibt ein $b \in A = \bigcup_{i \in I} A_i$ mit $\mathcal{A} \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \Rightarrow$ es gibt $j \in I$ mit $b \in A_j \Rightarrow$ es existiert $k \in I$ mit $i \leq k, j \leq k, a_1, \dots, a_n, b \in A_k$
 $\Rightarrow \mathcal{A}_k \models \psi[a_1, \dots, a_n, b] \xrightarrow{\mathcal{A}_i \preceq \mathcal{A}_k} \text{es gibt ein } a \in A_k \text{ mit } \mathcal{A}_i \models \psi[a_1, \dots, a_n, a] \Rightarrow \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$. □

3 Quantorenelimination

Definition 3.1

Eine Theorie T hat Quantorenelimination, falls jede \mathcal{L} -Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ äquivalent modulo T zu einer quantorenfreien \mathcal{L} -Formel $\psi[x_1, \dots, x_n]$ ist.

$$T \models \forall x_1 \dots \forall x_n (\varphi[x_1, \dots, x_n] \leftrightarrow \psi[x_1, \dots, x_n])$$

Beispiel 3.2

Sei $\mathcal{L} := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot)$ gegeben. Betrachte die Menge $\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und es gibt } x \in \mathbb{R} \text{ mit } ax^2 + bx + c = 0\} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a \neq 0 \text{ und } b^2 - 4ac \geq 0\}$.

Diese Formel ist in \mathcal{L} nicht äquivalent zu einer quantorenfreien Formel, in $\mathcal{L}_1 := (\mathbb{R}, 0, 1, +, -, \cdot, <)$ hingegen doch. Somit ist die Menge in \mathcal{L}_1 quantorenfrei.

Bemerkung 3.3 • Wenn T inkonsistent ist, dann hat T immer Quantorenelimination

- Wenn T Quantorenelimination hat, und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ mit $\mathcal{A} \subseteq_{\text{US}} \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$ Übung

Definition 3.4 • Eine einfache Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \psi[x_1, \dots, x_n, y]$

- Eine primitive Existenzformel ist eine Formel der Form $\varphi[x_1, \dots, x_n] = \psi[x_1, \dots, x_n, y]$, wobei ψ eine endliche Konjunktion von atomaren Formeln und Negationen ist

Lemma 3.5

Eine (konsistente) Theorie T hat genau dann Quantorenelimination, wenn jede primitive Existenzformel zu einer quantorenfreien Formel äquivalent modulo T ist.

Beweis. „ \Rightarrow “: klar

„ \Leftarrow “: Beachte, $\exists y(\psi_1 \vee \psi_2) \leftrightarrow (\exists y\psi_1 \vee \exists y\psi_2)$. Insbesondere, wenn T Quantorenelimination für primitive Existenzformeln hat, dann hat T Quantorenelimination für einfache Existenzformeln.

$$\begin{array}{ccccccc} \varphi & = & \exists y & \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n]}_{\text{umschreiben in DNF}} & \sim & \exists y(\psi_1 \vee \dots \vee \psi_n) & \sim & \underbrace{\bigvee_{i=1}^n \exists y\psi_i}_{\text{primitive Existenzformel}} \\ \text{einfache Existenzformel} & & & & & & & \end{array}$$

Zu zeigen: Jede beliebige Formel $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ ist äquivalent zu einer quantorenfreien Formel modulo T .

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] \underset{\text{pränexe Normalform}}{\sim} Q_1 y_1 \dots Q_m y_m \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\text{quantorenfrei}}, \text{ wobei } Q_i \in \{\forall, \exists\}$$

Induktion über m :

$m = 0$: ✓

$m = 1$: $\varphi = Q \underbrace{\psi[x_1, \dots, x_n, y]}_{\text{quantorenfrei}}$

$Q = \exists$ φ einfache Existenzformel ✓

$Q = \forall$ $\varphi \sim \neg \underbrace{\exists y \neg \psi}_{\substack{\text{einfache} \\ \text{Existenzformel}}}$ \rightarrow eliminieren \rightarrow ✓

$m - 1 \rightarrow m$: $\varphi[x_1, \dots, x_n] = Q_1 y_1 Q_2 y_2 \dots \underbrace{Q_m y_m \psi[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]}_{\varphi'[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}$. φ' ist eine einfache Existenzformel, wir eliminieren also:

$\underbrace{\phantom{Q_1 y_1 \dots Q_{m-1} y_{m-1}}}_{m-1 \text{ viele Quantoren}} \underbrace{\Theta[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{m-1}]}_{\text{quantorenfrei}}$

\Rightarrow Induktion

□

Beispiel 3.6

Sei $\mathcal{K} = \{\text{unendliche Mengen}\}$. Diese Klasse lässt sich definieren durch die Theorie $T = \{\exists x_1 \dots \exists x_n (\bigwedge_{i \neq j=1}^n \neg(x_i \dot{=} x_j))\}_{n \in \mathbb{N}}$. Diese Theorie ist vollständig! Betrachte jetzt die $\exists^\infty x$ definierbaren Mengen:

$$\{b \in A \mid \mathcal{A} \models \underbrace{\varphi}_{\text{quantorenfrei}}[b, a_1, \dots, a_m]\}$$

\updownarrow
endlich oder koendlich

Lemma 3.7 (Trennungslemma)

Seien T_1 und T_2 zwei \mathcal{L} -Theorien, und Δ eine Kollektion von \mathcal{L} -Aussagen, welche unter endlichen Konjunktionen und Disjunktionen abgeschlossen ist. Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

- (1) Es gibt eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $T_1 \models \chi$
- (2) Für alle $\mathcal{A} \models T_1, \mathcal{B} \models T_2$ gibt es eine Aussage $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg \chi$

Bemerkung 3.8

Das ganze ist trivial für inkonsistente Theorien.

Beweis. $1 \Rightarrow 2$: trivial!

$2 \Rightarrow 1$: OBdA T_1, T_2 konsistent. Sei $\mathcal{A} \models T_1$, setze $\Sigma_{\mathcal{A}} = \{\chi, \chi \text{ Aussagen in } \Delta \text{ mit } \mathcal{A} \models \chi\}$.

Betrachte jetzt $T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}}$. Ist diese Theorie konsistent? Nein: Wäre $\mathcal{B} \models T_2 \cup \Sigma_{\mathcal{A}} \hookrightarrow$ es gibt $\chi \in \Delta$ mit $\mathcal{A} \models \chi, \mathcal{B} \models \neg\chi \Rightarrow \chi \in \Sigma_{\mathcal{A}} \Rightarrow \mathcal{B} \models \chi$. Widerspruch!

Das bedeutet (wegen Kompaktheit), dass es $\chi_1, \dots, \chi_r \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ gibt mit $T_2 \cup \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ inkonsistent.

$$\hookrightarrow T_2 \models \bigvee_{i=1}^r \neg\chi_i \Rightarrow T_2 \models \neg\left(\underbrace{\bigwedge_{i=1}^r \chi_i}_{=\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta}\right)$$

Das heißt für jedes $\mathcal{A} \models T_1$ gibt es $\chi_{\mathcal{A}} \in \Delta$ mit $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}}$ und $\mathcal{A} \models \chi_{\mathcal{A}}$.

Sei nun $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}}\}_{\mathcal{A} \models T_1} \overset{5}{\hookrightarrow}$ inkonsistent nach Konstruktion.

$\overset{\text{Kompaktheit}}{\Rightarrow}$ es existieren $\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}$ mit $T_1 \cup \{\neg\chi_{\mathcal{A}_1}, \dots, \chi_{\mathcal{A}_n}\}$ inkonsistent. Also:

$$T_1 \models \bigvee_{j=1}^n \chi_{\mathcal{A}_j} =: \chi \in \Delta$$

$T_1 \models \chi$. Wollen zeigen: $T_2 \models \neg\chi$. Aber $T_2 \models \neg\chi_{\mathcal{A}_i}, 1 \leq i \leq n$. □

Folgerung 3.9

Zwei Theorien T_1 und T_2 werden von einer quantorenfreien Aussage getrennt, wenn je zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1$ und $\mathcal{B} \models T_2$ von einer quantorenfreien Aussage getrennt werden.

$$\rightarrow \exists \chi \text{ quantorenfrei} : \mathcal{A} \models \chi \text{ und } \mathcal{B} \models \neg\chi$$

Satz 3.10

Sei T eine Theorie. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) T hat Quantorenelimination.
- (2) Gegeben Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ und endlich erzeugte Unterstrukturen $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} = \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ und $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ eine Formel. Dann gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow {}^6 \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

- (3) Gegeben Modelle \mathcal{A}, \mathcal{B} mit isomorph erzeugten Unterstrukturen $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$ wie in (2) und für alle $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ primitive Existenzformel, gilt:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Rightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

⁵Ist das überhaupt eine Menge? Es genügt die Einschränkung bis auf Isomorphie, das sollte reichen. . .

⁶Durch vertauschen von \mathcal{A} und \mathcal{B} gilt hier sogar \Leftrightarrow .

3 Quantorenelimination

Ferner, falls T konsistent ist, (1) gilt und je zwei Modelle von T isomorphe endlich erzeugte Unterstrukturen besitzen, dann ist T vollständig mit Quantorenelimination.

Bemerkung 3.11

Wie benutzen wir diesen Satz? Letztlich wollen wir Back-&-Forth-Äquivalenz zeigen.

Beweis. (1) \Rightarrow (2): Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n]$. T hat Quantorenelimination \leftarrow es gibt $\psi[x_1, \dots, x_n]$ quantorenfrei mit: $T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \psi[\vec{x}])$

$$\begin{array}{ll}
 & \mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{A} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \mathcal{A} \models T & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{C} \models \psi[c_1, \dots, c_n] \\
 \psi \text{ quantorenfrei} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{D} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{C} \approx \mathcal{D} & \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \psi[d_1, \dots, d_n] \\
 \Leftrightarrow & \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \\
 \mathcal{B} \models T &
 \end{array}$$

(2) \Rightarrow (3): klar.

(3) \Rightarrow (1): Um zu zeigen, dass T Quantorenelimination besitzt, genügt es nur primitive Existenzformeln $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ zu betrachten.

Seien dazu e_1, \dots, e_n neue Konstantenzeichen. Betrachte die Sprache $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$, sowie die Theorien $T_1 = T \cup \{\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$ und $T_2 = T \cup \{\neg\varphi[e_1, \dots, e_n]\}$.

Falls T_1 und T_2 durch eine quantorenfreie Aussage $\underbrace{\psi[e_1, \dots, e_n]}_{\substack{\text{quantorenfreie} \\ \mathcal{L}\text{-Formel}}}$ in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ trennbar sind, so folgt:

$$\begin{array}{ll}
 T \cup \{\varphi[\vec{e}]\} \models \psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\} \models \neg\psi[\vec{e}] & \Rightarrow T \models (\neg\varphi[\vec{e}] \rightarrow \psi[\vec{e}]) \\
 \Rightarrow T = (\psi[\vec{e}] \rightarrow \varphi[\vec{e}]) & \Rightarrow \underset{\text{Aufgabe}^7}{T \models \forall \vec{x}(\varphi[\vec{x}] \leftrightarrow \underbrace{\psi[\vec{x}]}_{\text{quantorenfrei}})}
 \end{array}$$

Sonst, falls also T_1, T_2 nicht trennbar sind, gibt es zwei Modelle $\mathcal{A} \models T_1 \cup \{\varphi[\vec{e}]\}, \mathcal{B} \models T \cup \{\neg\varphi[\vec{e}]\}$, welche alle quantorenfreien Aussagen in $\mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}$ gleich erfüllen.

Seien $c_1 = e_1^{\mathcal{A}}, d_i = e_i^{\mathcal{B}}$. Betrachte jetzt $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{A} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$ und $\langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}} \subseteq_{\mathcal{L}\text{-US}} \mathcal{B} \upharpoonright_{\mathcal{L}}$. Es gilt: $\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$ und $\mathcal{B} \models \neg\varphi[d_1, \dots, d_n]$.

⁷weil e_1, \dots, e_n neue Konstantenzeichen sind

4 Beispiele klassischer Theorien

Um einen Widerspruch zu bekommen genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}, c_i \mapsto d_i$.

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow D : \\ \underbrace{t^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n]}_{\mathcal{L}\text{-Term}} &\mapsto t^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \end{aligned}$$

Ist diese Abbildung wohldefiniert?

$$\begin{aligned} \text{Angenommen } t_1^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] &= t_2^{\mathcal{A}}[c_1, \dots, c_n] \\ \Leftrightarrow \underbrace{\mathcal{A}}_{\text{als } \mathcal{L} \cup \{e_1, \dots, e_n\}\text{-Struktur}} &\models \underbrace{(t_1[e_1, \dots, e_n] \dot{=} t_2[e_1, \dots, e_n])}_{\text{quantorenfreie Aussage}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{B} &\models (t_1[\vec{e}] \dot{=} t_2[\vec{e}]) \\ \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] &= t_2^{\mathcal{B}}[d_1, \dots, d_n] \\ \longrightarrow &\text{wohldefiniert und injektiv} \end{aligned}$$

induktiv über den Aufbau zeigen wir: Das ist ein Isomorphismus.

Zu „ferner“: Angenommen T hat Quantorenelimination, ist konsistent und je zwei Modelle $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models T$ haben isomorphe, endlich erzeugte Unterstrukturen

$$\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \overset{\subseteq \mathcal{A}}{\mathcal{C}} \overset{\subseteq \mathcal{B}}{\simeq} \overset{c_i \mapsto d_i}{\mathcal{D}} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$$

T ist vollständig $\Leftrightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$. Sei χ eine \mathcal{L} -Aussage und schreibe $\chi = \chi[x_1, \dots, x_n]$.

$$\mathcal{A} \models \chi \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \chi[c_1, \dots, c_n] \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \mathcal{B} \models \chi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \chi$$

□

4 Beispiele klassischer Theorien

Beispiel 4.1

$T = \exists^\infty$ hat Quantorenelimination und ist vollständig.

Beispiel 4.2 (DLO)

DLO (dichte lineare Ordnung ohne Randpunkte). Sei $\mathcal{L} = \{<\}$.

$$\begin{aligned} \text{DLO} = & \{ \forall x (\neg x < x) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \forall z ((x < y \wedge y < z) \rightarrow (x < z)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y ((x = y) \vee (x < y) \vee (y < x)) \} \\ & \cup \{ \forall x \forall y \exists z ((x < y) \rightarrow (x < z < y)) \} \\ & \cup \{ \forall x \exists u \exists v (u < x < v) \} \\ & \cup \{ \exists x (x = x) \} \end{aligned}$$

Diese Theorie ist vollständig und hat Quantorenelimination. Es gibt zwei Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

(1)

$$\begin{aligned}\varphi[x_1, \dots, x_n] &= \exists y \left(\bigwedge_i \overbrace{\Theta_i[x_1, \dots, x_n, y]}^{\text{atomar oder Negation davon}} \right) \\ &= \exists y (\psi_1[x_1, \dots, x_n] \wedge \bigwedge_i \bigwedge_{\substack{x_i=y \\ x_i \neq y \\ x_i < y \\ y < x_i}} \dots)\end{aligned}$$

$$x_i = y \wedge x_j = y \Leftrightarrow x_i = x_j$$

$$x_i = y \wedge y < x_j \Leftrightarrow x_i < x_j \longrightarrow \text{induktiv lassen sich alle Quantoren eliminieren}$$

(2) Gegeben $\langle c_1, \dots, c_n \rangle_{\mathcal{A}} = \mathcal{C} \simeq \mathcal{D} = \langle d_1, \dots, d_n \rangle_{\mathcal{B}}$, mit $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Isomorphismus und $\mathcal{A}, \mathcal{B} \models \text{DLO}$.

OBdA wähle $c_1 < c_2 < \dots < c_n \xrightarrow{F} d_1 < d_2 < \dots < d_n$. $\longrightarrow F$ in Back-&-Forth-System.

1. Fall: $a < c_1 \rightarrow$ wähle $b < d_1$ in \mathcal{B} , weil d_i kein Randpunkt ist.
2. Fall: $a > c_n \rightarrow$ wähle $b < c_n$ in \mathcal{B} , weil d_i kein Randpunkt ist.
3. Fall: $\exists i \mid c_i < a < c_{i+1} \rightarrow$ wähle b zwischen d_i und d_{i+1} weil \mathcal{B} dicht ist.

Vollständigkeit folgt, weil Unterstruktur und Punkt zu Punkt.

Beispiel 4.3 (Vektorraum)

Sei K ein Körper, $\mathcal{L}_{\text{VR}} = \{0, +, f_\lambda\}_{\lambda \in K}$. Dann ist die Theorie $T \underset{\text{unendliche } K\text{-VR}}{\parallel} = \{ \forall x \forall y \forall z \dots \} \dots^8$

vollständig und hat Quantorenelimination.

Wie zuvor gibt es zwei verschiedene Methoden, um Quantorenelimination zu zeigen:

(1) Betrachte die folgende primitive Existenzformel:

$$\varphi[x_1, \dots, x_n] = \exists y \left(\bigwedge_{\text{endlich}} (\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n + \lambda_y \dot{=} 0) \wedge \bigwedge_{\text{endlich}} \neg(\mu_1 x_1 + \dots + \mu_n x_n \dot{=} 0) \right)$$

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

⁸diese Theorie ist axiomatisierbar, für eine beispielhafte Axiomatisierung vergleiche Klausur zu mathematische Logik im SS 2019.

4 Beispiele klassischer Theorien

$$(1) \text{ Alle } \lambda \text{ vor der Variable } y \text{ sind Null} \rightarrow \underbrace{\bigwedge_{\text{endlich}} \lambda x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0}_{\psi[x_1 \dots x_n]}$$

(2) *Es gibt ein $\lambda \neq 0$. Dann gilt OBdA: $y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$. Ersetze jetzt jedes Vorkommen von y durch $\tilde{\lambda}_1 x_1 + \dots + \tilde{\lambda}_n x_n$. Erhalte eine quantorenfreie Bedingung in x_1, \dots, x_n .*

(2) (semantisch)

Ansatz:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q} & ? & \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q} \\ \langle 2 \rangle & \simeq & \langle (3, 7) \rangle \end{array}$$

Wir brauchen also: \mathcal{A} und \mathcal{B} unendlichdimensional, um ein Back & Forth-System zu konstruieren. Es sei dazu

$$\tilde{\mathcal{A}} \succeq \mathcal{A} \supset \langle c_1, \dots, c_n \rangle \simeq \langle d_1, \dots, d_n \rangle \subset \mathcal{B} \preceq \tilde{\mathcal{B}}$$

für $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$ unendlichdimensional.

Insbesondere gilt jetzt auch:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1, \dots, c_n] \Leftrightarrow \tilde{\mathcal{A}} \models \varphi[c_1, \dots, c_n]$$

Angenommen $\langle c_1, \dots, c_n \rangle \xrightarrow{F} \langle d_1, \dots, d_n \rangle$ liegt in einem Back & Forth-System zwischen $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$. Dann folgt insbesondere auch:

$$\tilde{\mathcal{B}} \models \varphi[d_1, \dots, d_n] \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi[d_1, \dots, d_n]$$

Es ergeben sich also die folgenden beiden Fragen:

(1) Finden wir ein Back & Forth-System zwischen $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$?

Angenommen also wir haben $\tilde{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mathcal{B}}$ bereits konstruiert. Zeige: Es gibt ein Back & Forth-System.

$c \in \text{UR}$: trivial.

$c \notin \text{UR}$: $\dim_K \tilde{\mathcal{B}} = \infty \geq n + 1 \rightarrow$ es gibt ein $d \notin \langle d_1, \dots, d_n \rangle \Rightarrow G$ die Erweiterung

$$\begin{array}{ccc} \langle c_1, \dots, c_n \rangle & \longrightarrow & \langle d_1, \dots, d_n \rangle \\ c_i & \longmapsto & d_i \\ c & \longmapsto & d \end{array}$$

(2) Zur Existenz von $\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}$:

So funktioniert es nicht: $\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{ \exists x \exists y \neg(\lambda x + \mu y \dot{=} 0) \}_{\substack{\lambda, \mu \in K \\ (\lambda, \mu) \neq (0,0)}}$.

Seien $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ neue Konstantenzeichen.

$$\underbrace{\text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{ \neg \sum_i \lambda_i e_i \dot{=} 0 \}_{(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}}}_{\text{endlich konsistent}}_{n \in \mathbb{N}}$$

Zur Vollständigkeit: Das endliche Erzeugnis zweier nicht-trivialer Vektoren ist Isomorph, somit folgt Vollständigkeit.

Beispiel 4.4 (ACF)

Wir betrachten jetzt die Theorie algebraisch abgeschlossener Körper (ACF) in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\text{Ring}} = \{0, 1, +, -, \cdot\}$.

$$\text{ACF} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Körperaxiome} \\ \{ \forall x_0 \forall x_1 \dots \forall x_{k-1} \exists y (y^k + x_{k-1}y^{k-1} + \dots + x_1y + x_0 \dot{=} 0) \}_{k \geq 1} \end{array} \right.$$

ACF hat Quantorenelimination, ist aber nicht vollständig. Die Vervollständigungen sind

$$\underbrace{\text{ACF}_0}_{1+1+\dots+1 \dot{=} 0} \quad \text{und} \quad \underbrace{\text{ACF}_p}_{\underbrace{1+\dots+1}_{p\text{-Mal}} \dot{=} 0} \quad \text{für jede Primzahl } p.$$

Satz 4.5 (Kurzeinführung Galois'sche Theorie)

Beweis ACF. Betrachte OBdA die Abbildung

$$F = \text{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle) \longrightarrow \text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$$

Fall 1: a ist algebraisch über K

\hookrightarrow sei $m_a(T)$ das Minimalpolynom von a über K . $F(m_a)(T)$ ist ein normiertes Polynom über $\text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle) \subset B$.

B ist algebraisch abgeschlossen \Rightarrow es gibt b in B mit $F(m_a)(b) = 0 \xRightarrow{\text{Galoistheorie}} F$ lässt sich erweitern.

Fall 2: a ist transzendent über $K = \text{Quot}(\langle c_1, \dots, c_n \rangle)$.

Wenn wir ein $b \in B$ finden, welches transzendent über $\text{Quot}(\langle d_1, \dots, d_n \rangle)$ ist

$$\hookrightarrow \text{Ring}_A(K, a) \simeq \text{Ring}_B(F(K), b)$$

Ziel: Wir brauchen $\mathcal{A} \preceq \tilde{\mathcal{A}}$ mit unendlich vielen Elementen, welche algebraisch unabhängig sind.

$$\underbrace{\text{Diag}(A) \cup \{\neg(B(e_1, \dots, e_n) \doteq 0)\}_{P \in A[T_1, \dots, T_n] \setminus \{0\}}}_{\text{endlich konsistent}}_{P(e_1, \dots, e_n) \neq 0}$$

□

5 Ultrafilter & der Satz von Ax

Anwendung: Wir wollen eine Aussage der folgenden Art bekommen: Sei $f : \mathbb{C} \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C}$.
 $\rightarrow f$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

Satz 5.1 (Ax)

Sei $f : \mathbb{C}^n \xrightarrow{z \mapsto z^2} \mathbb{C}^n$ eine polynomiale⁹ injektive Abbildung. Dann ist f surjektiv.

Motivation: Sei G eine Gruppe der Ordnung p . Für einen Körper der Charakteristik p bekommen wir dann:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{g}} \xrightarrow{\text{wirkt}} \underbrace{K}_{\substack{\text{Körper der} \\ \text{Charakteristik} \\ p}} \longrightarrow K$$

$$x \longmapsto \underbrace{1 + \dots + 1}_{g\text{-Mal}} + x$$

$$\rightarrow h + (g + x) = (h + g) + x$$

Für einen Körper der Charakteristik 0:

$$\underbrace{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}_{\ni \bar{k}} \xrightarrow{\text{wirkt}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\underbrace{\mu_p}_{\substack{p\text{-te Einheits-} \\ \text{wurzel in } \mathbb{C}}} = \{e^{\frac{2\pi i k}{p}}\}_{0 \leq k < p} \quad z \longmapsto \omega z$$

$$\rightarrow \omega_1(\omega \cdot z) = (\omega_1 \omega) \cdot z$$

Satz 5.2 (Lefschetz'sches Prinzip)

Eine Aussage χ in der Ringsprache $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ gilt für \mathbb{C} genau dann, wenn es unendlich viele Primzahlen p derart gibt, dass χ in einem algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik p gilt.

⁹polynomial bedeutet, dass jede Koordinate der Abbildung durch Polynome gegeben ist.

Beweis von Satz 5.1 (Ax). Sei $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ injektiv. Die Aussage „ f injektiv $\Rightarrow f$ surjektiv“ lässt sich als $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Aussage schreiben.

D. h. es genügt zu zeigen, dass diese Aussage für alle Körper $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$ gilt.

Was ist $\mathbb{F}_p^{\text{alg}}$? Ein algebraischer abgeschlossener Körper der Charakteristik p .

Galoistheo.

$$\mathbb{F}_p^{\text{alg}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n, \text{ wobei } F_n \subset F_{n+1} \text{ endliche Körper mit Charakteristik } p.$$

$$F_1 = \{0, 1\}$$

$$F_2 = \dots$$

$$\vdots$$

Sei nun $g : (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n \rightarrow (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$ eine surjektive polynomiale Abbildung.

Zeige: g ist surjektiv. Sei $(b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{F}_p^{\text{alg}})^n$. Dann gibt es ein N , sodass $b_i \in \mathbb{F}_n$ für \mathbb{F}_n endlich.

Ferner können wir N so wählen, dass alle Koeffizienten aus g in \mathbb{F}_n liegen.

$$\begin{array}{ccc} g|_{\mathbb{F}_N^n} : \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} & \longrightarrow & \underbrace{\mathbb{F}_N^n}_{\text{endlich}} \text{ ist injektiv (geerbt)} \\ & & \Downarrow \text{endlich} \\ & & \text{surjektiv} \end{array}$$

□

Beweis Lefschetz'sches Prinzip (Satz 5.2). „ \Rightarrow “ Sei χ eine $\mathcal{L}_{\text{Ring}}$ -Aussage derart, dass $\mathbb{C} \models \chi$. Dann ist $\underbrace{\text{ACF}_0}_{\text{alle elementar äquivalent}} \cup \{\neg\chi\}$ inkonsistent, weil ACF_0 vollständig ist.

Dann gibt es eine endliche Teilmenge $T_0 \subset \text{ACF}_0 \cup \{\neg\chi\}$, welche inkonsistent ist.
 \Rightarrow Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ sodass:

$$T_0 \subset \underbrace{\text{ACF} \cup \{\neg(\underbrace{1 + \dots + 1}_k \doteq 0)\}_{k < N}}_{\text{inkonsistent}} \cup \{\neg\chi\}$$

Für $p > N$ eine Primzahl: $\text{ACF}_p \models \chi$

„ \Leftarrow “ \rightsquigarrow Ultrafilter und Satz von Łoś

□

Exkurs: Sei im Folgenden $I \neq \emptyset$.

Definition 5.3

Ein Ultrafilter \mathcal{U} auf I ist ein endlich additives Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mu_{\mathcal{U}} : \mathcal{P}(I) \longrightarrow \{0, 1\}$$

Bemerkung 5.4

Die Definition entspricht der von Blatt 1 Aufgabe 3, denn:

- (1) $\mu_{\mathcal{U}}(I) = 1, \mu_{\mathcal{U}}(\emptyset) = 0$.
- (2) $\mu_{\mathcal{U}}(X) = 1 \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$
 $X \subset Y \subset I$
- (3) Angenommen $\mu_{\mathcal{U}}(X) = \mu_{\mathcal{U}}(Y) = 1$ aber $\mu_{\mathcal{U}}(X \cap Y) = 0$. Dann gilt $X = X \setminus Y \dot{\cup} X \cap Y \Rightarrow \mu_{\mathcal{U}}(X \setminus Y) = 1$ und $\mu_{\mathcal{U}}(Y \setminus X) = 1$, sowie $I \supset X \cup Y = X \setminus Y \dot{\cup} Y \setminus X \dot{\cup} X \cap Y \rightsquigarrow \mu_{\mathcal{U}}(I) = 1 \geq 1 + 1 + 0$, ein Widerspruch.
- (4) Gegeben $X \subset I$ entweder $X \in \mathcal{U}$ oder $I \setminus X \in \mathcal{U}$
 $\mu_{\mathcal{U}}(X)=1$ $\mu_{\mathcal{U}}(I \setminus X)=1$

Definition 5.5

Ein Hauptultrafilter ist ein Maß der Form δ_x für ein $x \in I$.

Definition 5.6

Falls I unendlich ist, so gibt es generisch/reiche Ultrafilter, nämlich die Ultrafilter, welche alle koendlichen Mengen enthalten.

Definition 5.7

Angenommen $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ ist eine \mathcal{L} -Struktur. Sei ferner \mathcal{U} ein Ultrafilter. Definiere eine Äquivalenzrelation¹⁰ auf $\prod_{\mathcal{U}} A_i$:

$\underbrace{\prod_{\mathcal{U}} A_i}_{\text{kartesisches Produkt}}$

$$(a_i)_{i \in I} \sim_{\mathcal{U}} (b_i)_{i \in I} \iff \{i \in I \mid a_i = b_i\} \in \mathcal{U} \iff \mu_{\mathcal{U}}(\{i \in I \mid a_i = b_i\}) = 1$$

Definition 5.8

Sei $\prod_{\mathcal{U}} A_i$ die Menge $\prod_{i \in I} A_i / \sim_{\mathcal{U}}$. Wir definieren Interpretationen der Symbole aus \mathcal{L} auf $\prod_{\mathcal{U}} A_i$:

$\prod_{\mathcal{U}} A_i$:

- Sei $c \in \mathcal{L}$ ein Konstantenzeichen. Definiere:

$$c^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} = (c^{\mathcal{A}_i})_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

¹⁰vergleiche dazu Blatt 1, Aufgabe 3

- Sei $f \in \mathcal{L}$ ein n -stelliges Funktionszeichen. Definiere:

$$f^{\prod_{\mathcal{U}} A_i}([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}) = (f^{\mathcal{A}_i}(a_1^i, \dots, a_n^i))_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}}$$

Ist das wohldefiniert? Ja, denn fast überall gleich.

- Sei \mathcal{R} ein m -stelliges Relationszeichen auf \mathcal{L} . Definiere:

$$([a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_m]_{\mathcal{U}}) \in \mathcal{R}^{\prod_{\mathcal{U}} A_i} \iff \{i \in I \mid (a_1^i, \dots, a_m^i) \in \mathcal{R}^{\mathcal{A}_i}\} \in \mathcal{U}$$

Wenn \mathcal{U} ein Hauptfilter ist, dann ist er erzeugt vom Element $\{i_0\}$.

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}\text{-Struktur} \\ \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}_{i_0} \text{ ist ein Isomorphismus} \\ (a_i)_{i \in I} / \sim_{\mathcal{U}} \longmapsto a_{i_0} \end{array}$$

Definition 5.9

Wenn \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur und \mathcal{U} ein Ultrafilter ist, dann ist $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}$ die Ultrapotenz.

Beispiel 5.10

Sei \mathcal{U} ein reicher/generischer Ultrafilter auf \mathbb{N} . Betrachte $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <)$.

$$\mathcal{N}^{\mathcal{U}} \ni (1, 2, 3, \dots) / \sim_{\mathcal{U}} > (1, 1, 1, \dots) / \sim_{\mathcal{U}}$$

Satz 5.11 (Satz von Łoś)

Sei \mathcal{U} ein Ultrafilter auf I , $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ eine Familie von \mathcal{L} -Strukturen, $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ eine \mathcal{L} -Formel und $[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}} \in \prod_{\mathcal{U}} A_i$. Dann gilt:

$$\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \iff \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi[a_1^i, \dots, a_n^i]\} \in \mathcal{U}$$

Beweis. Induktiv über den Aufbau von φ . Sei $\varphi = (t_1 \dot{=} t_2)$. Dann gilt:

$$\begin{array}{l} \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i \models (t_1[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \dot{=} t_2[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}]) \\ \iff t_1^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i} [[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \dot{=} t_2^{\prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_i} [[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \\ \stackrel{\text{induktiv über den Aufbau}}{\iff} \{i \in I \mid \mathcal{A}_i \models t_1[a_1^i, \dots, a_n^i] \dot{=} t_2[a_1^i, \dots, a_n^i]\} \in \mathcal{U} \end{array}$$

□

Folgerung 5.12

Sei \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur und \mathcal{U} ein Ultrafilter auf I . Betrachte $\mathcal{A}^{\mathcal{U}} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}$. Das ist eine elementare Erweiterung von \mathcal{A} bezüglich der Abbildung $A \longrightarrow \prod_{\mathcal{U}} A$.
 $a \longmapsto (a)_{i \in I / \sim_{\mathcal{U}}}$

Einbettung,
injektiv

Beweis. Sei φ eine \mathcal{L} -Formel, $a_1, \dots, a_n \in A$. Zu zeigen ist:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \iff \mathcal{A}_i^{\mathcal{U}} \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}]$$

„ \Rightarrow “: Mit Satz von Łoś gilt:

$$\mathcal{A}_i^{\mathcal{U}} \models \varphi[[a_1]_{\mathcal{U}}, \dots, [a_n]_{\mathcal{U}}] \iff \{i \in I \mid \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]\} \in \mathcal{U}$$

Da dieser Ausdruck jedoch der gesamten Menge I entspricht, folgt die Behauptung direkt.

„ \Leftarrow “: Die leere Menge liegt nicht in \mathcal{U} , also gibt es i sodass die Formel gilt, da diese jedoch von i unabhängig ist, gilt sie immer. \square

Beweis Lefschetz'sches Prinzip (5.2) „ \Leftarrow “. Sei

$$S = \left\{ p \text{ Primzahl} \mid \begin{array}{l} \text{ein algebraisch abgeschlossener Körper mit} \\ \text{Charakteristik } p \text{ erfüllt die Aussage } \chi \end{array} \right\}$$

Zeige: S ist unendlich. Sei $P \subset \mathbb{N}$ Primzahlen. Betrachte jetzt

$$\mathcal{B} = \{X \cap S \subset P \mid X \subset P \text{ koendlich}\} \quad (4)$$

Ist \mathcal{B} eine Filterbasis? $X \cap S = \emptyset$ ist endlich $\iff S \subset P \setminus X$ unendlich, ein Widerspruch.

Weiter gilt $(X_1 \cap S) \cap (X_2 \cap S) = \underbrace{(X_1 \cap X_2)}_{\text{koendlich}} \cap S$.

$\xRightarrow{\text{Blatt 1}}$ es gibt einen Ultrafilter, welcher alle Elemente aus \mathcal{B} enthält.

Sei im Weiteren \mathcal{U} ein Ultrafilter auf P , welcher \mathcal{B} enthält. $X \cap S \in \mathcal{U}$ ist für alle $X \subset P$ koendlich.

\hookrightarrow \mathcal{U} ist reich (kein Hauptultrafilter). Für $p_0 \in P$ ist $P \setminus \{p_0\}$ koendlich.

$\Rightarrow P \setminus \{p_0\} \cap S \in \mathcal{U}$.

$\hookrightarrow S \in \mathcal{U}$

Sei $K = \prod_{\mathcal{U}} K_p$, wobei K_p ein algebraisch abgeschlossener Körper der Charakteristik p ist derart, dass

$$\begin{cases} K_p \models \chi & p \in S \\ \text{egal bspw. } \mathbb{F}_p^{\text{alg}} & p \notin S \end{cases}$$

$$(1) K \models \text{ACF}_0$$

$$(2) K \models \chi, \text{ weil } \{p \in P \mid K_p \models \chi\} \supset S \in \mathcal{U}$$

ACF_0 ist vollständig $\Rightarrow \mathbb{C} \models \chi$. □

Satz 5.13 (Kompaktheitssatz)

Eine Theorie T ist genau dann konsistent, wenn sie endlich konsistent ist.

Beweis. OBdA ist T unendlich. Sei $I = \{\emptyset \neq S \subset T \text{ endlich}\}$. Für $s \in I$ gibt es eine \mathcal{L} -Struktur \mathcal{A}_s , sodass $\mathcal{A}_s \models \chi$ für jedes $\chi \in s$. Sei weiter

$$B_s = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für jedes } \chi \in s\}$$

Ist $\mathcal{B} = \{B_s\}_{s \in I}$ eine Filterbasis?

$$(1) \emptyset \neq B_s \ni s$$

$$(2) B_{s_1} \cap B_{s_2} = \{t \in I \mid \mathcal{A}_t \models \chi \text{ für alle } \chi \text{ aus } s_2\} = B_{s_1 \cup s_2} \in \mathcal{B}!$$

Sei \mathcal{U} ein Ultrafilter auf I , sodass $B_s \in \mathcal{U}$ für jedes $\emptyset \neq s \subset T$ endlich. Sei $\mathcal{A} = \prod_{\mathcal{U}} \mathcal{A}_s$.

Zu zeigen ist: $\mathcal{A} \models T$ (sei $\chi \in T$, zeige $\mathcal{A} \models \chi$).

$$\text{Satz von Łoś} \quad \underbrace{\{s \in T \mid \mathcal{A}_s \models \chi\}}_{B_{\{\chi\}}} \in \mathcal{U}$$

□

Teil II

Typen und Saturation

6 Typen

Sei im Folgenden \mathcal{L} eine Sprache und \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur.

Definition 6.1

Ein partieller Typ $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ mit Parametern aus B ist eine Kollektion von Formeln in der Sprache $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$, welche in der (kanonischen) $\mathcal{L} \cup \{b\}_{b \in B}$ -Struktur \mathcal{A} endlich erfüllbar ist, das heißt für alle $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in \Sigma$ gibt es ein Tupel $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ mit $\mathcal{A} \models \varphi_i(a_1, \dots, a_n)$ für $1 \leq i \leq m$.

\mathcal{A} realisiert Σ , falls es ein Tupel (a_1, \dots, a_n) gibt, sodass $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ für alle $\varphi \in \Sigma$. Sonst vermeidet \mathcal{A} den partiellen Typ Σ .

Beispiel 6.2

Betrachte $(\mathbb{R}, 0, <)$. Sei $\Sigma(x) = \{0 < x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > 0}}$ ein partieller Typ.

Wird Σ realisiert oder vermieden? \rightsquigarrow vermieden

Sei jedoch $\Sigma' = \{\sqrt{2} \leq x < q\}_{\substack{q \in \mathbb{Q} \\ q > \sqrt{2}}}$. \rightsquigarrow realisiert von $\sqrt{2}$

Betrachte nun Σ auf $\prod_{\mathcal{U}} \mathbb{R}$. Hier realisiert $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$ den partiellen Typen Σ !

Bemerkung 6.3

Sei \mathcal{A} eine unendliche Struktur. Dann gibt es immer einen partiellen Typen, der vermieden wird: $\{\neg(x \doteq a)\}_{a \in A}$.

Bemerkung 6.4

Sei $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$ ein partieller Typ über C in \mathcal{A} . Dann gibt es eine elementare Erweiterung $\underbrace{\mathcal{B} \succeq \mathcal{A}}_{\mathcal{L} \cup \{c\}_{c \in C}\text{-Struktur}}$, welche Σ realisiert.

Beweis. Seien ζ_1, \dots, ζ_n neue Konstantenzeichen. Schreibe $T = \text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \Sigma(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$. T ist eine $\mathcal{L}_A \cup \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ -Theorie. Falls $\mathcal{B} \models T$, dann ist $\{\zeta_1^{\mathcal{B}}, \dots, \zeta_n^{\mathcal{B}}\}$ eine Realisierung von $\Sigma(x_1, \dots, x_n)$.

6 Typen

Zu zeigen ist: T endlich konsistent.

$T_0 \underset{\text{endlich}}{\subset} T \longrightarrow T_0 \subset \text{Diag}(\mathcal{A}) \cup \{\varphi_i[\zeta_1, \dots, \zeta_n]\}_{i \in M}$ für $\varphi_1, \dots, \varphi_M \in \Sigma$, $M \in \mathbb{N}$.
 $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ ist in \mathcal{A} realisierbar von $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$.
 \longrightarrow Setze $\tilde{\mathcal{A}}$ die $\mathcal{L}_A \cup \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ -Struktur aus \mathcal{A} mit Interpretationen $\zeta_i^{\tilde{\mathcal{A}}} = a_i$. \square

Definition 6.5

Ein n -Typ über $C \subset A$ in der Struktur \mathcal{A} ist ein partieller Typ in der Variable x_1, \dots, x_n über C , welcher maximal endlich erfüllbar ist bezüglich der Inklusion zwischen partiellen Typen über C .

$S_n^{\mathcal{A}}(C)$ ist die Menge aller Typen in \mathcal{A} über C .

$$S^{\mathcal{A}}(C) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n^{\mathcal{A}}(C)$$

Bemerkung 6.6

$S_n^{\mathcal{A}}(C) \neq \emptyset$. Gegeben $b_1, \dots, b_n \in A$, setze

$$\text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) = \{\varphi[x_1, \dots, x_n] \text{ } \mathcal{L}\text{-Formel} \mid \mathcal{A} \models \varphi[b_1, \dots, b_n]\}$$

ist ein n -Typ über C .

Beweis. Sei $\varphi[x_1, \dots, x_n] \notin \text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C)$. Zu zeigen ist: $\text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) \cup \{\varphi[x_1, \dots, x_n]\}$ nicht endlich erfüllbar. Aus der Annahme folgt:

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \not\models \varphi[b_1, \dots, b_n] \\ \implies & \mathcal{A} \models \neg \varphi[b_1, \dots, b_n] \\ \implies & \neg \varphi[x_1, \dots, x_n] \in \text{tp}^{\mathcal{A}}(b_1, \dots, b_n \mid C) \\ \implies & \text{Widerspruch zur Maximalität} \end{aligned}$$

Sei nun $p(x_1, \dots, x_n) \in S_n^{\mathcal{A}}(C)$. Gegeben $\varphi[x_1, \dots, x_n]$ eine \mathcal{L}_C -Formel. Zu zeigen ist: $\varphi \in p$ oder $\neg \varphi \in p$.

Angenommen $\varphi \notin p \implies p \subsetneq \underbrace{p(x_1, \dots, x_n) \cup \{\varphi[x_1, \dots, x_n]\}}_{\text{endlich erfüllbar}}$

\rightsquigarrow Es gibt $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in p$ sodass $\varphi_1, \dots, \varphi_k, \varphi$ in A nicht erfüllbar ist. Insbesondere

$$\begin{aligned} & \mathcal{A} \not\models \exists x_1, \dots, x_n \left(\bigwedge_{i=1}^k \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n] \right) \\ \iff & \mathcal{A} \models \neg \exists x_1, \dots, x_n \left(\bigwedge_{i=1}^k \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \wedge \varphi[x_1, \dots, x_n] \right) \\ \iff & \mathcal{A} \models \forall x_1 \cdots \forall x_n \left(\bigwedge_{i=1}^k \varphi_i[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \neg \varphi[x_1, \dots, x_n] \right) \end{aligned}$$

Es genügt zu zeigen, dass $p \subseteq p(x_1, \dots, x_n) \cup \{\neg \varphi[x_1, \dots, x_n]\}$ endlich erfüllbar ist. Sei dazu $\psi_1, \dots, \psi_r \in p$. Wir wollen zeigen:

$$\mathcal{A} \models \exists x_1, \dots, x_n \left(\bigwedge_{j=1}^r \psi_j[x_1, \dots, x_n] \wedge \neg \varphi[x_1, \dots, x_n] \right)$$

6 Typen

$\varphi_1, \dots, \varphi_k, \psi_1, \dots, \psi_r \in p$, p ist insbesondere partieller Typ.

\hookrightarrow es gibt $(a_1, \dots, a_n) \in A^n$ mit $\mathcal{A} \models \bigwedge \varphi_i[a_1, \dots, a_k] \wedge \bigwedge \psi_j[a_1, \dots, a_n]$.

$\implies \mathcal{A} \models \neg \varphi[a_1, \dots, a_n]$ □

Allgemeiner: Sei T eine konsistente Theorie in der Sprache \mathcal{L} . Definiere: n -Typ in T ist eine Kollektion von \mathcal{L} -Formeln in x_1, \dots, x_n , welche endlich konsistent mit T ist, es gilt also für $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$: $T \cup \{ \exists x_1, \dots, x_n (\bigwedge_{j=1}^m \varphi_j[x_1, \dots, x_m]) \}$ ist konsistent, und maximal bezüglich Inklusion mit dieser Eigenschaft:

Für \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur und $C \subset A$. Dann sei T die \mathcal{L}_C -Theorie von \mathcal{A} .

$$\underbrace{p \in S_n(T)}_{n\text{-Typ von } T} \Leftrightarrow p \in S_n^{\mathcal{A}}(C)$$

Folgerung 6.7

Gegeben eine \mathcal{L} -Struktur \mathcal{A} gibt es $\mathcal{B} \succ \mathcal{A}$, welche alle Typen in $S^{\mathcal{A}}(A)$ realisiert.

Beweis. Sei $\{p_\alpha\}_{\alpha < \lambda}$ eine Aufzählung von $S^{\mathcal{A}}(A)$. Wir konstruieren eine elementare Kette $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}_1 \preceq \dots \preceq \mathcal{A}_\alpha \preceq \dots$ so, dass $\underbrace{p_\alpha}_{\text{als part. Typ über } A \text{ in } \mathcal{A}_\alpha}$ in $\mathcal{A}_{\alpha+1}$ realisiert wird.

$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$. \mathcal{A}_1 wird mithilfe des Lemmas für p_0 gewonnen. Falls γ eine Limeszahl ist: Setze $\mathcal{A}_\gamma = \bigcup_{\beta < \gamma} \mathcal{A}_\beta$. Sei $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B} = \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathcal{A}_\alpha$. □

Achtung: \mathcal{B} kann sehr groß werden!

Beispiel 6.8

$\mathcal{A} = (\mathbb{R}, <) \rightsquigarrow$ Typ für jedes Element aus \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} r \in \mathbb{R} &\longrightarrow p_r \supset \{x < r\} \cup \{s < x\}_{s < r} \\ p_r &\text{ „}=\text{“ } \{x < r\} \cup \{s < x\}_{s < r} \\ p_{r+} &= \{x > r\} \cup \{s > x\}_{s > r} \end{aligned}$$

Ziel: $S_n(T)$ ist ein kompakter, 0-dimensionaler Hausdorff topologischer Raum \rightsquigarrow „Sto-
neraum der Theorie T “.

7 Exkurs: Einführung in die Topologie

Sei X eine Menge.

Definition 7.1

Eine Basis \mathcal{B} einer Topologie auf X ist eine Kollektion von Teilmengen derart, dass

- (1) $\forall x \in X$ gibt es $B \in \mathcal{B}$ mit $x \in B$
- (2) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \forall x \in B_1 \cap B_2$ gibt es ein $B_3 \in \mathcal{B}$ mit $x \in B_3 \subset B_1 \cap B_2$

Definition 7.2

$U \subset X$ ist *offen*, falls es für jedes $x \in U$ ein $B \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in B \subset U$.

Sei $T = \{U \subset X \mid U \text{ offen}\}$. Die Kollektion T erfüllt folgende Eigenschaften:

- (1) $\emptyset, X \in T$
- (2) $U_1, U_2 \in T \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in T$
- (3) Sei $(U_i)_{i \in I} \subset T$. Dann ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in T$

Beispiel 7.3 (1) die euklidische Topologie auf $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$

- (2) die triviale Topologie auf X ist $\{\emptyset, X\}$
- (3) die diskrete Topologie auf X ist $\mathcal{P}(X)$
- (4) die koendliche Topologie auf X wird gegeben als:

$$U \subset X \text{ offen} \iff |X \setminus U| \text{ endlich, oder } U = \emptyset$$

So ist beispielsweise $(0, 1)$ offen in \mathbb{R} für die euklidische Topologie, aber nicht für die koendliche Topologie.

Bemerkung 7.4

$$Y \subset X \text{ ist offen} \iff \forall x \in Y \quad \underbrace{\exists U \ni x}_{\substack{U \text{ ist eine} \\ \text{Umgebung von } x}} \quad \text{mit } x \in U \subset Y$$

Definition 7.5

Eine Menge $C \subset X$ ist *abgeschlossen*, falls das Komplement offen ist.

Definition 7.6

Ein topologischer Raum (X, T) ist *0-dimensional*, falls es eine Basis der Topologie gibt, welche aus offen-abgeschlossenen¹¹ Mengen besteht.

¹¹Englisch: „clopen“

Beispiel 7.7

Die diskrete Topologie ist 0 -dimensional, weil sie als Basis $\{\{x\}\}_{x \in X}$ hat.

Definition 7.8 (Trennungseigenschaften)

Sei (X, T) ein topologischer Raum.

T1 Falls $x \neq y \in X$ gibt es Umgebungen $\overbrace{U^x, U^y}^{\substack{\text{offene Menge} \\ \text{die } x \text{ enthält}}}$ mit $x \in U^x \setminus U^y, y \in U^y \setminus U^x$.

T2 (Hausdorff) falls $x \neq y \in X$ gibt es U^x, U^y Umgebungen mit $U^x \cap U^y = \emptyset$

Bemerkung 7.9

$T2 \Rightarrow T1$

Beispiel 7.10 • Ist die euklidische Topologie T2? Ja.

- Sei X unendlich. Ist die koendliche Topologie T Hausdorff? Nein. Ist sie T1? Ja:
 $U^x = X \setminus \{y\}, U^y = X \setminus \{x\}$

Bemerkung 7.11

$(X, T)T1 \Rightarrow$ Jeder Punkt ist abgeschlossen!

Beweis. Zu zeigen: $X \setminus \{x\}$ offen

Sei $y \in X \setminus \{x\}$. Wir suchen $U^y \subset X \setminus \{x\}$. Es gilt $x \neq y \Rightarrow U^x, U^y$, insbesondere $x \notin U^y \Rightarrow U^y \subset X \setminus \{x\}$ □

Definition 7.12

(X, T) topologischer Raum.

- $s \in X$ ist *isoliert*, falls $\{x\}$ offen ist.
- $A \subset X$ ist *dicht*, falls für jede offene Menge $\emptyset \neq U \subset X$ ist $A \cap U \neq \emptyset$
- $x \in X$ ist ein *Häufungspunkt von A*, falls für jede Umgebung $U^x \ni x$ gilt, dass $U^x \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Bemerkung 7.13

Sei $A \subset X$. $\underbrace{C}_{\substack{\text{dicht} \\ \supset A}} \subset X \Rightarrow C = X$

Beweis. Zu zeigen ist: $C = X$. Sonst ist $\overbrace{X \setminus C}^U \neq \emptyset$ offen. $\xRightarrow{A \text{ dicht}} \underbrace{A \cap U}_{\substack{\subset C \cap (X \setminus C) = \emptyset}} \neq \emptyset$, ein Widerspruch. □

Bemerkung 7.14

Eine Topologie auf X ist genau dann diskret, falls jeder Punkt isoliert ist.

Übung

Bemerkung 7.15

Eine Teilmenge $C \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn C alle ihre Häufungspunkte enthält.

Beweis. „ \Rightarrow “: $x \notin C \Rightarrow x \in \underbrace{X \setminus C}_{\text{offen}}$ und $(X \setminus C) \cap \underbrace{(C \setminus \{x\})}_{=C} = \emptyset \Rightarrow x$ kein Häufungspunkt von C .

„ \Leftarrow “: Zu zeigen: $X \setminus C$ offen. Sei dazu $x \in X \setminus C$ beliebig. $\Rightarrow x$ ist kein Häufungspunkt von $C \Rightarrow \exists U^x \ni x$ mit $U^x \cap \underbrace{C \setminus \{x\}}_{=C} = \emptyset \Rightarrow x \in U^x \subset X \setminus C$ \square

Definition 7.16

Seien X, Y topologische Räume. Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist *stetig auf* x_0 , falls für jede Umgebung $V^{f(x_0)} \ni f(x_0)$ (in Y) das Urbild $f^{-1}(V)$ in X offen ist.
 f ist stetig, wenn sie auf jedem Punkt in X stetig ist.

Bemerkung 7.17

Es genügt Urbilder von Basiselementen zu betrachten. Warum? Sei V eine Umgebung von $f(x_0)$.

\hookrightarrow es gibt B ein Basiselement mit $f(x_0) \in B \subset V \Rightarrow x_0 \in \underbrace{f^{-1}(B)}_{\text{offen}} \subset f^{-1}(V)$

Bemerkung 7.18

$f : X \rightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f^{-1}(C)$ abgeschlossen in X ist für alle $C \subset Y$ abgeschlossen.

$$X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$$

Beispiel 7.19

$f : \begin{matrix} X \rightarrow Y \\ x \mapsto y_0 \end{matrix}$ konstant. Ist f stetig? Ja, denn $f^{-1}(x) = \begin{cases} X & x = y_0 \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$.

Definition 7.20

Die Abbildung $f : X \rightarrow Y$ ist $\begin{matrix} \text{offen} \\ \text{abgeschlossen} \end{matrix}$, falls für jede $\begin{matrix} \text{offene} \\ \text{abgeschlossene} \end{matrix}$ Teilmenge $\begin{matrix} U \\ C \end{matrix}$ von X das Bild $\begin{matrix} f(U) \\ f(C) \end{matrix}$ $\begin{matrix} \text{offen} \\ \text{abgeschlossen} \end{matrix}$ ist.

Bemerkung 7.21

$$\text{offen} \not\Rightarrow \text{abgeschlossen}$$

Beispiel 7.22

Betrachte $\Pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie. Π ist offen, aber nicht abgeschlossen: Betrachte $x \cdot y = 1 \mapsto x \neq 0$.
 $\begin{matrix} \text{abgeschlossen} & & \text{nicht} \\ & & \text{abgeschlossen} \end{matrix}$

Beispiel 7.23

Sei $X \rightarrow Y$ konstant unendlich mit koendlicher Topologie. Diese Abbildung ist abgeschlossen, aber nicht offen.

Definition 7.24

Ein Homöomorphismus $f : X \rightarrow Y$ ist eine bijektive stetige Abbildung derart, dass die f^{-1} auch stetig
 mengentheoretische Abbildung $\begin{matrix} \text{bzw.} \\ f \text{ offen} \\ \text{bzw.} \\ f \text{ abgeschlossen} \end{matrix}$ ist.

Definition 7.25

(X, T) topologischer Raum. Die Menge $K \subset X$ ist kompakt, falls jede offene Überdeckung $K \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt: Es gibt $i_1, \dots, i_n \in I$ mit $K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
 (X, T) ist kompakt, wenn X kompakt ist.

Bemerkung 7.26 • Jede endliche Menge ist kompakt

- $f : X \rightarrow Y$ stetige Abbildung, $K \subset X$ kompakt $\Rightarrow f(K)$ kompakt in Y .

Beweis. Zu zeigen: $f(K)$ kompakt.

$$\begin{aligned} f(K) \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{V_i}_{\text{offen in } Y} &\Rightarrow K \subset f^{-1}(f(K)) \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{f^{-1}(V_i)}_{\text{offen}} \\ &\Rightarrow K \subset f^{-1}(V_{i_1}) \cup \dots \cup f^{-1}(V_{i_n}) \\ &\Rightarrow f(K) \subset \underbrace{f(f^{-1}(V_{i_1}))}_{\subset V_{i_1}} \cup \dots \cup \underbrace{f(f^{-1}(V_{i_n}))}_{\subset V_{i_n}} \end{aligned}$$

□

Lemma 7.27

$K \subset X$ kompakt. $C \subset X$ mit $C \subset K \Rightarrow C$ kompakt.
 abg.

Beweis. Sei $C \subset \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i}_{\text{offen}}$. C abgeschlossen $\implies X \setminus C$ offen.

$$K \subset X = (X \setminus C) \cup C = (X \setminus C) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{K \text{ kompakt}}^{oBdA} C \subset K \subset (X \setminus C) \cup U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \\ & \implies C \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n} \end{aligned}$$

✓

□

Lemma 7.28

X Hausdorff, $K \underset{\text{kompakt}}{\subset} X \implies K$ abgeschlossen.

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass wenn $x \notin K$, dann ist x kein Häufungspunkt von K .

Für $y \in K \rightarrow y \neq x \xrightarrow{x \text{ Hausdorff}} \exists U_y^x, V_y$ mit $U_y^x \cap V_y = \emptyset \rightarrow K \subset \bigcup_{y \in K} V_y \xrightarrow{K \text{ kompakt}} K \subset V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ für $y_1, \dots, y_n \in K$.

Setze $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}^x \ni x$ offen. Zu zeigen bleibt: $U \cap \underbrace{K}_{=K \setminus \{x\}} = \emptyset$.

$U \cap K \subset U \cap (\bigcup_{i=1}^n V_{y_i}) = \bigcup U \cap V_{y_i} \subset U_{y_i}^x \cap V_{y_i} \underset{\text{n. Def.}}{=} \emptyset \Rightarrow x$ ist kein Häufungspunkt. □

Folgerung 7.29

X Hausdorff, $(K_i)_{i \in I}$ kompakte Teilmengen. $\implies \bigcap_{i \in I} K_i$ kompakt.

Beweis. $\underbrace{\bigcap_{i \in I} K_i}_{\text{abg.}} \text{ abgeschlossen. } \xrightarrow{(7.28)} \bigcap_{i \in I} K_i \text{ kompakt.}$

□

Folgerung 7.30

$f : X \rightarrow Y$ stetig, X, Y topologische Räume.

Y Hausdorff $\implies f$ abgeschlossen

Beweis. Sei $C \subset X$ abgeschlossen. $\implies C$ ist kompakt $\implies \underbrace{f(C)}_{\subset Y \text{ Hausdorff}}$ ist kompakt

$\xrightarrow{(7.28)} f(C)$ abgeschlossen.

□

8 Stoneraum von Typen einer Theorie

Sei T eine konsistente Theorie in der Sprache \mathcal{L} . Ein n -Typ ist eine Menge von \mathcal{L} -Formeln in den Variablen x_1, \dots, x_n , welche endlich konsistent bezüglich T ist, und maximal mit dieser Eigenschaft bezüglich Inklusion.

Gegeben $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$. Dann ist $T \cup \{ \exists \vec{x} (\bigwedge_{i=1}^m \varphi_i[\vec{x}]) \}$ konsistent.

Bemerkung 8.1

Wenn T vollständig ist, dann gilt

$$S_n(T) = S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset)$$

für jedes Modell $\mathcal{A} \models T$, wobei $S_n^{\mathcal{A}}(\emptyset)$ die Menge aller Typen $p(x_1, \dots, x_n)$ in n Variablen ist, sodass $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in p$, $\mathcal{A} \models \exists \vec{x} (\bigwedge_{j=1}^m \varphi_j(\vec{x}))$.

Häufig: \mathcal{A} eine \mathcal{L} -Struktur, $B \subset A : S_n^{\mathcal{A}}(B) = S_n(\text{Th}(\mathcal{A}, b)_{b \in B})$

Definition 8.2

Gegeben $\varphi = \varphi[x_1, \dots, x_n]$, setze

$$[\varphi] = \{p \in S_n(T) \mid \varphi \in p\}$$

Bemerkung 8.3

Typen sind unter Deduktion abgeschlossen.

$$\begin{aligned} [\varphi \wedge \psi] &= [\varphi] \cap [\psi] \\ [\varphi \vee \psi] &= [\varphi] \cup [\psi] \\ [\neg(x_1 \dot{=} x_1)] &= \emptyset \\ [\neg\varphi] &= S_n(T) \setminus [\varphi] \\ [(x_1 \dot{=} x_1)] &= S_n(T) \end{aligned}$$

Bemerkung 8.4

$$[\varphi] \subset [\psi] \iff T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])$$

Insbesondere $[\varphi] = [\psi]$ genau dann, wenn φ, ψ logisch äquivalent modulo T sind.

Beweis. „ \Rightarrow “: Falls $T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}]) \implies T \cup \{ \exists \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}]) \}$ konsistent. Das heißt die Menge $\{(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}])\}$ ist ein partieller Typ.

$\xrightarrow{\text{Zorn}}$ es gibt $p \in S_n(T)$ mit $(\varphi[\vec{x}] \wedge \neg\psi[\vec{x}]) \in p \xRightarrow[p \text{ unter Deduktion abgeschlossen}]{\implies} p \in [\varphi] \setminus [\psi]$.

„ \Leftarrow “: $p \in [\varphi] \Rightarrow \varphi \in p \xRightarrow{T \models \forall \vec{x} (\varphi[\vec{x}] \rightarrow \psi[\vec{x}])} \psi \in p \Rightarrow p \in [\psi]$. □

Satz 8.5

Die Kollektion $\{[\varphi]\}_{\varphi[x_1, \dots, x_n]}$ eine \mathcal{L} -Formel bildet eine Basis der Topologie auf $S_n(T)$ derart, dass $S_n(T)$ 0-dimensional, Hausdorff und kompakt ist.

Beweis. Basis: \checkmark wegen (8.3).

0-dimensional: $S_n(T) \setminus [\varphi] = \underbrace{[\neg\varphi]}_{\text{offen}} \Rightarrow [\varphi]$ ist abgeschlossen (und offen).

Hausdorff: Seien $p \neq q \in S_n(T) \Rightarrow$ es gibt $\varphi \in p \setminus q \Rightarrow p \in [\varphi], q \in [\neg\varphi]$ *disjunkt*.

$S_n(T)$ kompakt: Es genügt zu zeigen, dass jede offene Umgebung der Form $\bigcup_{i \in I} [\varphi_i]$ eine endliche Überdeckung besitzt, denn:

$$X = \bigcup_{i \in I} \underbrace{U_i}_{= \bigcup_{j \in J} B_{ij}} = \bigcup_{i \in I} B_{ij} \longrightarrow X \subset \underbrace{B_{i_1 j_1} \cup \dots \cup B_{i_n j_n}}_{\subset U_{i_1}}$$

Also: $S_n(T) = \bigcup_{i \in I} [\varphi_i] \Rightarrow \emptyset = \bigcap_{i \in I} [\neg\varphi_i] \xrightarrow{\text{Kompaktheitssatz}} \{\neg\varphi_i[\vec{x}]\}_{i \in I}$ nicht endlich erfüllbar in

$T \Rightarrow$ es gibt $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n}$ sodass $T \cup \{ \exists \vec{x} (\bigwedge_{j=1}^n \neg\varphi_{ij}[\vec{x}]) \}$ inkonsistent.

Also $T \models \forall \vec{x} (\bigvee_{j=1}^n \varphi_{ij}[\vec{x}]) \xrightarrow{(8.3)} S_n(T) = [\varphi_{i_1}] \cup \dots \cup [\varphi_{i_n}]$. Sonst gäbe es $p \in S_n(T) \setminus \bigcup_{j=1}^n [\varphi_{ij}] \Rightarrow \neg\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_n} \in p \xrightarrow[p \text{ endlich erfüllbar in } T]{} T \cup \{ \exists \vec{x} (\bigwedge_{j=1}^n \neg\varphi_{ij}[\vec{x}]) \}$ □