UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Grupo 42
Ing. Biomédica
Montante Arenas Flor Esthela

Profesor: Santana José de Jesús

Señales y filtros

Muestreo y reconstrucción de una señal

Muchas de las señales de interés practico proceden de fenómenos físicos que son continuos y por tanto las señales que generan son analógicos. Para procesar de forma digital estas señales es necesario convertir la señal al dominio digital.

Un convertidor de continuo a digital (ADC) consta de tres etapas. En primer lugar es necesario convertir la señal analógica en una señal discreta mediante un convertidor de tiempo continuo a discreto, C/D. Este sistema realiza un muestreo de la señal y una conversión al dominio discreto obteniendo finalmente una secuencia de muestras de la señal.

Uno de los métodos de muestreo y conversión a tiempo discreto más típicos consiste en realizar un muestreo periódico o uniforme, el cual se basa en la selección de muestras de la señal analógica en un intervalo de tiempo uniforme. El procedimiento consiste en sustituir la variable $t = nT$, donde T es el periodo de muestreo y $f_s = \frac{1}{T}$ viene dada en muestras por segundo, obteniendo una secuencia de muestras:

$$x[n] = x_a(nT), \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Esta relación entre la variable temporal analógica (t) y discreta (n) se transforma en una relación análoga entre el dominio de la frecuencia de tiempo continuo y de tiempo discreto.

En segundo lugar es necesario realizar una discretización o cuantificación en la amplitud de la señal, de modo que la amplitud de la señal sea representada por un valor seleccionado a partir de un conjunto finito de posibles valores.

Finalmente la señal cuantificada se codifica usando una representación digital con un número dado de bits, a esta operación se le denomina codificación. El sistema que realiza todas estas operaciones se le denomina convertidor Analógico Digital (ADC). Mediante este procedimiento se obtiene la señal digital apta para su procesado por un sistema digital.

Para el proceso de muestreo y conversión a tiempo discreto en el dominio de la frecuencia es interesante dividir el sistema en dos procesos: en primer lugar se realiza un muestreo con un tren de deltas y en segundo lugar se realiza un cambio de dominio de tiempo continuo a tiempo discreto, es decir, se realiza una conversión de tren de impulsos a secuencia.

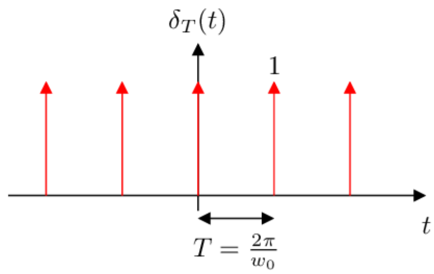

Figura 1. Tren de deltas (impulso unitario)

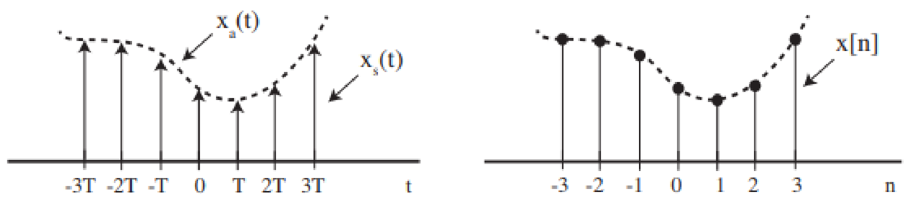

Figura 2. A la derecha se muestra un ejemplo de un tren de deltas de una señal y a la izquierda la el tren se pasa a una secuencia

Para obtener las relaciones entre las señales en el dominio de la frecuencia expresamos el tren de deltas:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

La transformada de Fourier de la señal queda:

$$S(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

donde $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$. La señal muestreada queda:

$$x_s(t) = x_a(t)s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(t)\delta(t - nT)$$

En el dominio transformado, la señal muestreada viene dada por:

$$X_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} X_a(\omega) * S(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\omega - k\omega_s)$$

Teorema de muestreo

Es importante que en el muestreo de una señal se cumpla $\omega_s > 2\omega_N$ (teorema de Nyquist-Shannon) donde ω_N representa el ancho de banda, para que los valores de la señal no se solapen o se distorsionen.

Cuando la frecuencia de Nyquist $\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$ es inferior a la frecuencia muestreada (ω_N), se produce el fenómeno conocido como aliasing, en donde hay un solapamiento entre las frecuencias originales del espectro.

Cuantización

La cuantificación convierte una sucesión de muestras de amplitud continua en una sucesión de valores discretos.

El tipo más usual de cuantización es la cuantización uniforme, en el que los niveles son todos iguales. La mayoría usan un número de niveles que es una potencia de 2. Si $L=2^B$, cada uno de los niveles es codificado a un número binario de B bits.

El proceso de cuantificación genera una diferencia entre la señal original $\{x_s[n])\}$, y la cuantificada $\{x_q[n]\}$. La medida de esta diferencia se llama error o ruido de cuantificación

$$\varepsilon[\mathrm{n}] = x_s[n] - x_q[n]$$

Se define la relación señal a ruido de cuantización (SNR_Q) como la relación entre la potencia P_S de la señal y la potencia P_N del error $\varepsilon[\mathrm{n}]$.

$$P_S = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_S^2\,[n]$$

$$P_N = \frac{1}{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varepsilon^2[n]$$

$$SNR_Q = 10log\frac{P_S}{P_N}$$

Espectro de potencia

La transformada de Fourier de una señal determinista (denominada espectro de x(t)) es

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt$$

Y mediante la transformada inversa de Fourier se recupera la señal original

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Cuando tratamos de aplicar lo anterior a procesos estocásticos nos encontramos con un problema, y es que puede ocurrir que X(ω) no exista para determinadas realizaciones. Para solventar este problema se define el espectro de densidad de potencia.

Sea X(t) un proceso aleatorio y denotemos por $x_T(t)$ a la porción de realización del proceso entre los instantes −T y T, entre los cuales existe la integral de la función en valor absoluto en este intervalo. Y con la energía en este intervalo al dividirse por 2T, se obtiene la potencia

$$P(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{2T}d\omega$$

Pero debe incluirse el azar para que se cubra toda la función y no solo cierto rango, por lo que al final se obtiene

$$P_{XX} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T\to\infty} \frac{E|X_T(\omega)|^2}{2T} d\omega$$

Transformada de Fourier discreta (DFT)

El uso de esta transformada implica la solución de integrales que hacen el análisis continuo para todo tiempo. Resulta más útil considerar el proceso de manera discreta y no continua, ya que los sistemas de adquisición de datos no pueden obtener ni analizar la totalidad de la información.

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{j2\pi kn}{N}}$$

Donde N es el número de muestras, n es la enésima muestra original y k es el késimo término de la DFT.

Transformada de Fourier continua

La transformada Fourier de una señal unidimensional o función continua es una transformación de dicha señal que nos permite calcular la contribución de cada valor de frecuencia a la formación de la señal. La expresión matemática de dicho cálculo es

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df$$

Donde $j = \sqrt{-1}$ y $e^{j2\pi ft} = \cos(2\pi ft) - isen(2\pi ft)$.

Transformada de Fourier de corto tiempo

La Transformada de Fourier ventaneada también se conoce como Transformada de Fourier de Tiempo Corto (STFT: Short Time Fourier Transform). La STFT recorre la señal en función de las variables tiempo y frecuencia. La STFT divide la señal en pequeños segmentos, y calcula la FT de cada segmento por separado; de esta forma, se logra una representación tiempo-frecuencia de la señal, que permite conocer no sólo el valor de sus componentes en frecuencia, sino también su ubicación temporal; sin embargo, la información de localización tiempo-frecuencia sólo puede obtenerse con una exactitud limitada, determinada por el ancho de la ventana temporal utilizada.
La transformada de Fourier de una señal resultante se mueve simultáneamente con la ventana que recorre el eje del tiempo (eje x), dando como resultado una representación en dos dimensiones tiempo y frecuencia.

- En tiempo continuo la función que se va a transformar se multiplica por una función ventana $\{\omega(t)\}$ comúnmente la de Hann o la Gaussiana:

$$STFT\{x(t)\} \equiv X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\omega(t-\tau)e^{-j\omega t} dt$$

- En tiempo discreto la información a ser transformada podría ser dividida en pedazos o tramas. Cada pedazo es una transformada de Fourier, y el resultado complejo se agrega a una matriz, que almacena magnitud y fase para cada punto en tiempo y frecuencia. Donde, $x[n]$ es la señal y $\omega[n]$ es la ventana. En este caso m es discreta y ω es continua

$$STFT\{x[t]\} \equiv X(m,\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\omega[n-m]e^{-j\omega n}$$

Diseño filtro FIR
Se diseña la función de transferencia en respuesta de la frecuencia H(ω).

Con la transformada discreta de Fourier (DTFT) se obtiene la inversa de H(ω) para obtener la respuesta al impulso h(n).

En los filtros ideales, h(n) tiene una longitud infinita o muy larga por lo que se tiene que limitar a cierto número de muestras y hacer un filtro finito (orden M), por lo cual h(n) debe de ser truncada usando el método del ventaneo y con esto el orden del filtro queda como M+1.
Además se necesita que h(n) sea causal por lo que se le agrega un retardo desplazándolo a la derecha en M/2.

Una vez que es causal y estable, se tendría una respuesta en magnitud y fase similar a la del filtro original.

Diseño filtro IIIR
Para sistemas IIR la relación entrada-salida viene establecida por la expresión:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] + \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

La función del sistema se rige por la expresión

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h[n]z^{-n} = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{K=0}^{M} b_k z^{-k}}{1-\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

Los sistemas IIR no van a poder presentar una característica de fase exactamente lineal si queremos que sean causales. La solución más habitual se basa en aproximar el módulo de la función de transferencia sin preocuparnos de la fase, bien porque no sea importante o bien porque se ajuste en una etapa posterior de tipo paso-todo.

Si los coeficientes a_k y b_k de H(z) son reales, los polos y los ceros aparecen por parejas conjugadas o son reales. Para que el sistema sea estable y causal todos los polos deben situarse exactamente en el interior de la circunferencia unidad (o ser coincidentes con ceros en dicha circunferencia), no habiendo restricción para los ceros.

Wavelet continua y discreta
Las wavelets y el análisis de multiresolución constituyen una potente herramienta para afrontar problemas fundamentales en el tratamiento de señales. Entre ellos se encuentran la reducción del ruido, la compresión de señales o la detección de determinados patrones o irregularidades locales en ciertos tipos de señales.

La transformada wavelet es una transformación de la señal que la divide en dos tipos de subseñales, la tendencia y las fluctuaciones. La tendencia viene a ser una copia de la señal a menor resolución y las fluctuaciones almacenan información referida a los cambios locales en la señal inicial. La tendencia y las fluctuaciones más significativas permiten una compresión de la señal a cambio de descartar información irrelevante y de la eliminación del ruido producido por los aparatos y las condiciones de medida. Según el tipo de medición realizada el ruido correspondiente se comporta matemáticamente siguiendo distribuciones de probabilidad gaussianas, uniformes. El estudio de las fluctuaciones permite detectar anomalías o disfunciones en el comportamiento esperado de la señal inicial. También permite la comparación con patrones para detectar formas en una señal eléctrica de forma automática.

Existen dos tipos de wavelets las continuas y las discretas. El tratamiento con wavelets discretas permite su aplicación directa a procesos computacionales. Las wavelets continuas presentan por una parte la dificultad de su manejo al tener que evaluar un gran número de integrales y tener en consecuencia una redundancia de información, pero por otra parte permiten la flexibilidad de poder adaptarse a situaciones en las que las discretas no dan un resultado satisfactorio.

Wavelet ortogonal

Una wavelet ortogonal es una wavelet cuya transformada asociada es ortogonal. Es decir, la transformada wavelet inversa es el adjunto de la transformada wavelet.

La función de escala es una función refinable. Es decir, es una ecuación funcional fractal, llamada ecuación de refinamiento (relación de doble escala o ecuación de dilatación):

$$\phi(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k\, \phi(2x - k)$$

donde la secuencia $a_0, \dots, a_{N-1}$ de números reales se llama secuencia de escala o máscara de escala. La wavelet propiamente dicha se obtiene mediante una combinación lineal similar,

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{M-1} b_k\, \phi(2x - k)$$

donde la secuencia $b_0, \dots, b_{M-1}$ de números reales se llama secuencia wavelet o máscara de wavelet.

Una condición necesaria para la ortogonalidad de las wavelets es que la secuencia de escalamiento es ortogonal a cualquier desplazamiento de la misma por un número par de coeficientes:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n a_{n+2m}$$

Existen muchas wavelets madre agrupadas en familias según su utilidad

Wavelet Haar

Sea N la dimensión del espacio donde nos encontramos, entonces, el número de wavelets de Haar de primer nivel es N/2 y se definen como:

$$w_1^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0$$

$$w_2^1 = 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0$$

$$w_{\frac{N}{2}}^{1} = 0, \dots, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Wavelet Daubechies

Conjunto de wavelets ortonormales apropiadas para aplicarse en el análisis de selakes discretas

$$w_1^1 = \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4, 0, \dots, 0$$

$$w_2^1 = 0, 0, \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4, 0, \dots, 0$$

$$w_{\frac{N}{2}}^{1} = 0, \dots, 0, \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \beta_4$$

$$w_1^1 = \beta_3,\ \beta_4, 0, \dots, 0,\ \beta_1,\ \beta_2$$

Referencias

http://agamenon.tsc.uah.es/Asignaturas/it/tds/apuntes/tds_tema_2_teoria.pdf
http://isa.uniovi.es/~arobles/ra2/pdf/mues.pdf
https://w3.ual.es/~vruiz/Docencia/Apuntes/Signals/Theory/index.html
https://tecnocronica.wordpress.com/2017/01/19/que-es-el-aliasing-explicacion-y-efectos-curiosos/
http://www4.tecnun.es/asignaturas/tratamiento%20digital/tema5.pdf
https://rodas5.us.es/file/e03edbde-413e-4ecf-04bb-c70de576f08a/3/analisis_frec_scorm.zip/page_06.htm
http://ccc.inaoep.mx/~pgomez/cursos/pds/slides/S5-DFT.pdf
https://ccrma.stanford.edu/workshops/cm2007/topics/clases/PDFs/07espectral1_handout.pdf
https://www.uv.es/soriae/tema_5_pds.pdf
https://ocw.upc.edu/sites/all/modules/ocw/estadistiques/download.php?file=11480/2011/1/52847/tema2.transf_fourier_v29may2009-2742.pdf
http://www3.fi.mdp.edu.ar/tds/material/8-Filtros_IIR.pdf
http://www.upv.es/frechet/wavelets/senyales/indice.htm
http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/meie/osorio_s_a/capitulo2.pdf
http://repositori.uji.es/xmlui/bitstream/handle/10234/177642/TFG_Olivera%20Rodriguez%2C%20Nahuel.pdf?sequence=1&isAllowed=y