UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO
FACULTAD DE INGENIERÍA

Grupo 42
Ing. Biomédica
Montante Arenas Flor Esthela

Profesor: Santana José de Jesús

Transformada Wavelet

La idea fundamental detrás de las wavelets es analizar funciones de acuerdo a escalas. En el análisis por wavelets la escala que se utiliza para analizar los datos juega un papel especial. Los algoritmos que utilizan wavelets procesan los datos a diferentes escalas o resoluciones.

Si se observa una señal o función utilizando una "ventana" ancha, no se observan los pequeños detalles; en cambio, si la "ventana" utilizada es angosta, entonces se los puede observar. En análisis por wavelets, esas ventanas se ajustan automáticamente al cambiar de resolución. Esto hace que las wavelets sean una herramienta útil e interesante.

Pueden ser usadas como una técnica de filtrado para remover los componentes de alta frecuencia incluidas en los datos, o usado como un método para representar la información de manera breve. Alternativamente, tiene excelentes propiedades para la compresión de datos.

Por ejemplo, la Transformada Wavelet Discreta (DWT) transforma un vector de datos de longitud n en otro vector de coeficientes wavelets de longitud n, usando un conjunto de n funciones bases ortonormales llamadas wavelets.

Cada coeficiente wavelet se calcula tomando el producto escalar del vector de datos por una de las funciones base. El conjunto de las funciones base se deriva a partir de una única función (frecuentemente llamada "Wavelet Madre") por una serie de dilataciones y traslaciones.

La elección de la wavelet madre (y de este modo de la base o del marco de wavelets) no es única y depende del tipo de funciones o de datos a analizar.

Conceptos generales

Bases ortonormales
Las escalas son funciones que mapean un dominio de datos de entrada a un rango de datos de salida.

La función de escala básica $\phi(t)$, dilatada por un factor de escala 2^i, es desplazada con un factor de escala discreto de traslación k,

$$\phi_{i,k} = 2^{-\frac{i}{2}}\phi\left(2^{-i}t - k\right)$$

Las funciones de escala básica $\phi(t)$ que se emplean satisfacen la condición de ortogonalidad, tal que las traslaciones discretas $\{\phi(t-k)\}$ con k ∈ Z, forman un conjunto ortonormal.

Las proyecciones en $L^2(R)$ sobre el conjunto de bases ortonormales de la función de escala, forman un conjunto de subespacios V_i. Cada subespacio V_i es el conjunto de todas las posibles aproximaciones de la función en $L^2(R)$ generado por la base ortonormal de la función de escala $\{\phi(2^{-i}t-k)\}$.

Dilatación y traslación
Dada una función $g(t)$ se considérese la dilatación o escalamiento de g por a

$$g_a(t) = g\left(\frac{t}{a}\right)$$

Y la traslación de g por b

$$g^b(t) = g(t-k)$$

Aplicando simultáneamente la traslación y la dilatación se obtiene

$$g_a^b(t) = g\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Si la función $g(t)$ cumple con las propiedades

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g^2(t)dt = 1$$

Conceptos específicos

Bases Wavelet
Debido a que la proyección de una función sobre la base de la función de escala ortonormal es una aproximación menos detallada de la función en un nivel de resolución particular, se pierde algo de información en el proceso, esto significa que la función de escala ϕ no es completa a cualquier nivel.

Por lo tanto, se usan las proyecciones sobre otras funciones, denominadas wavelet ortonormales (o simplemente wavelets), para obtener la información complementaria de los detalles de la función.

$$\Psi_{i,k} = 2^{-\frac{i}{2}}\Psi(2^{-i}t-k)$$

La proyección de $f(t)$ sobre las bases wavelet ortonormales es una correlación entre $f(t)$ y $\Psi(t)$ muestreada a intervalos discretos. Las proyecciones de las funciones en $L^2(R)$ sobre la base wavelet ortonormal $\{\Psi(2^{-i}t-k)\}$, forman un subespacio W_i. Como la base wavelet {ψ(2–it–k)} es ortogonal a la base de función de escala {ϕ(2–it–k)}, dentro de la misma escala, el subespacio W_i es el complemento ortogonal del subespacio V_i.

Transformada Wavelet

De manera muy general, la Transformada Wavelet de una función $f(t)$ es la descomposición de $f(t)$ en un conjunto de funciones $\Psi_{s,\tau}(t)$, que forman una base y son llamadas Wavelet. La Transformada Wavelet se define como:

$$W_s(s,\tau) = \int f(t)\Psi^*_{s,\tau}(t)dt$$

Las Wavelets son generadas a partir de la traslación y cambio de escala de una misma función wavelet $\Psi(t)$, llamada la Wavelet madre, y se define como:

$$\Psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\Psi\left(\frac{t-\tau}{s}\right)$$

Donde s es el factor de escala, y τ es el factor de traslación.

Cambiando el valor de s se cubren rangos diferentes de frecuencias:

- Valores grandes del parámetro s corresponden a frecuencias de menor rango, o una escala grande de $\Psi_{s,\tau}(t)$.
- Valores pequeños de s corresponden a frecuencias de menor rango o una escala muy pequeña de $\Psi_{s,\tau}(t)$.

Referencias

http://www.exa.unicen.edu.ar/escuelapav/cursos/wavelets/apunte.pdf
Jesús Rubén Azor Montoya. La transformada Wavelet. Abril de 2019, de Universidad de Mendoza, Argentina.
http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/meie/osorio_s_a/capitulo2.pdf
Liliana R. Castro, Silvia M. Castro. Wavelets y sus aplicaciones. Abril de 2019, de Universidad nacional del sur, Argentina Sitio web:
http://sedici.unlp.edu.ar/bitstream/handle/10915/24289/Documento_completo.pdf?sequence=1
María Elena Domínguez Jiménez y Gabriela Sansigre Vidal. La transformada wavelet: una introducción. Abril de 2019, de Universidad Politécnica de Madrid, España.