

# *Le vol du boomerang*

**RAPPORT DE TIPE POUR LE CONCOURS INTER ENS 2009, FILIERE MP**

**XAVIER ROGÉ & PAUL NARCHI**

Ce TIPE s'intéresse à l'étude du mouvement du boomerang. Après une étude qualitative des actions aérodynamiques qui s'appliquent sur ses pales et de la façon dont elles permettent son retour, une modélisation est proposée, qui s'appuie sur l'approximation gyroscopique et le principe fondamental de la dynamique. Les résultats obtenus sont comparés à des vols réels filmés et analysés image par image. Il en ressort que la modélisation donne des trajectoires proches de la réalité, mais les résultats numériques restent à améliorer.

## **SOMMAIRE**

<b>Introduction.....</b>	<b>3</b>
<b>I. Analyse théorique du boomerang .....</b>	<b>3</b>
1. Description du boomerang.....	3
2. Actions aérodynamiques.....	3
3. Explication de la trajectoire .....	5
<b>II. Modélisation du vol.....</b>	<b>7</b>
1. Approximations et mise en équations .....	7
2. Résultats .....	9
<b>III. Confrontation avec la réalité expérimentale .....</b>	<b>9</b>
1. Protocole expérimental .....	9
2. Comparaison entre le modèle et l'expérience .....	9
<b>Conclusion .....</b>	<b>11</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>11</b>

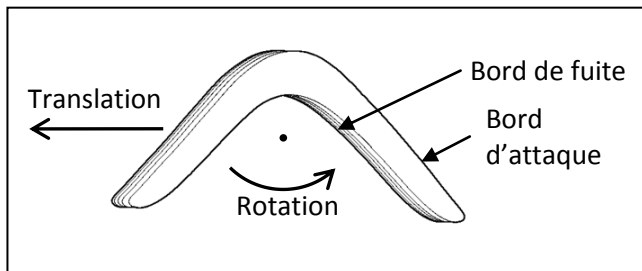


Figure 1 : Vue de l'extrados

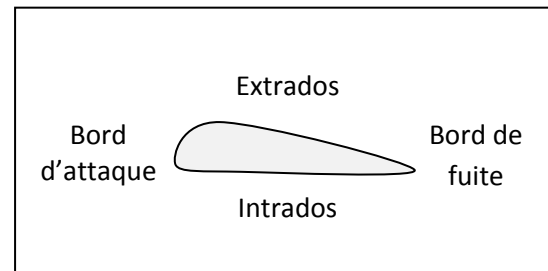


Figure 2 : Vue en coupe

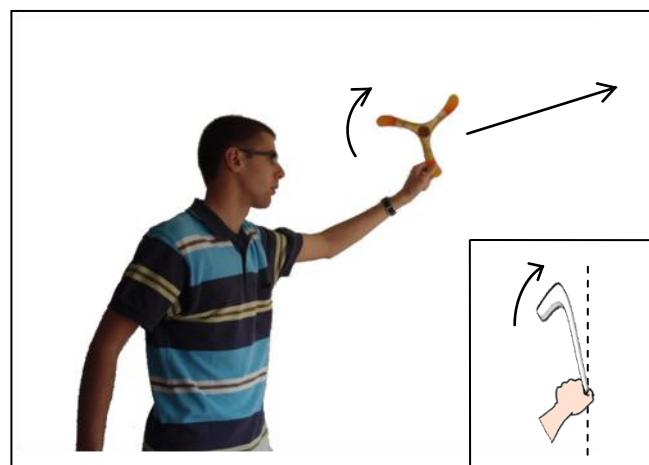


Figure 3 : Lancer du boomerang

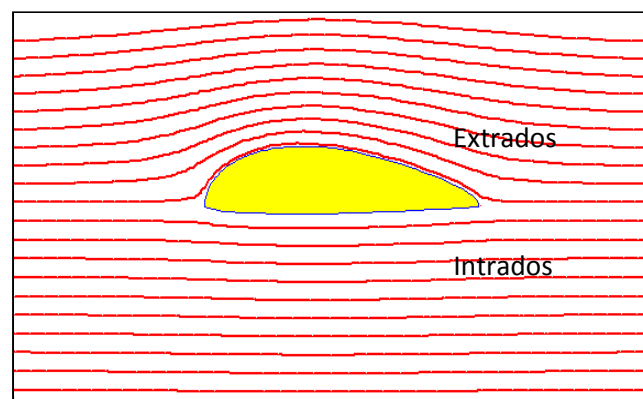


Figure 4 : Lignes de champ de la vitesse

# INTRODUCTION

Les aborigènes fabriquent et lancent des boomerangs depuis des millénaires. Mais les principes physiques sur lesquels repose son fascinant retour leur sont longtemps restés inconnus. Et pour cause, les premières explications datent de 1837<sup>1</sup>, et il a fallu attendre 1968<sup>2</sup> pour qu'une théorie soit véritablement mise au point.

Ce Travail d'initiative personnelle encadré (TIPE) consiste, en lien avec le thème de l'**information**, en la *modélisation* de ce vol si particulier et sa confrontation avec l'expérience (*acquisition* et *traitement* de l'information).

## I. ANALYSE THEORIQUE DU BOOMERANG

### 1. DESCRIPTION DU BOOMERANG

Un boomerang est généralement constitué de deux pales formant entre elles un angle de 60° à 120°. Le nombre de pales peut aller jusqu'à 4.

Ces pales comportent deux faces : l'*intrados* qui est plat et l'*extrados* qui est bombé, ce qui dessine, en coupe, un profil similaire à celui d'une aile d'avion comportant un *bord d'attaque* arrondi et un *bord de fuite* effilé (cf. figure 1 et 2).

Le boomerang est lancé dans un plan faisant un angle faible avec la verticale, l'*extrados* légèrement au-dessus (cf. figure 3), en lui imprimant un double mouvement de rotation et de translation. La rotation se fait dans le sens tel que le bord d'attaque précède le bord de fuite.

Lorsqu'il est correctement lancé, le boomerang a une trajectoire en forme de goutte d'eau et revient vers le lanceur.

### 2. ACTIONS AERODYNAMIQUES

#### ÉCOULEMENT DE L'AIR

Lorsque le boomerang est en mouvement, l'air s'écoule autour des pales du boomerang. On peut exprimer le champ de vitesse de l'air dans l'hypothèse d'un écoulement à deux dimensions d'un fluide parfait incompressible. En effet, dans ces conditions, la vitesse  $\vec{v}$  de l'air dans le référentiel de la pale obéit aux deux équations :

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{v} = 0 & (\text{conservation de la masse}) \\ \operatorname{rot} \vec{v} = 0 & (\text{en négligeant les effets de bord}) \end{cases}$$

La vitesse  $\vec{v}$  dérive donc d'un potentiel  $\varphi$  qui vérifie  $\Delta\varphi = 0$ . On peut résoudre cette équation avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_0 & \text{à l'infini amont} \\ \vec{v} \perp \vec{n} & \text{à la surface de la pale, où } \vec{n} \text{ est un vecteur normal localement à la surface} \end{cases}$$

La résolution donne  $\vec{v}$  et permet de tracer les lignes de champ  $\varphi = C^{ste}$  (cf. figure 4).

<sup>1</sup> Joseph S. MOORE & James McCULLAGH, *Proceedings of the Royal Irish Academy* (1836-1840), « Notice respecting the kilee or boomerang », 1837

<sup>2</sup> Felix HESS, *The Aerodynamics of boomerangs*, Scientific American, n°219, novembre 1968

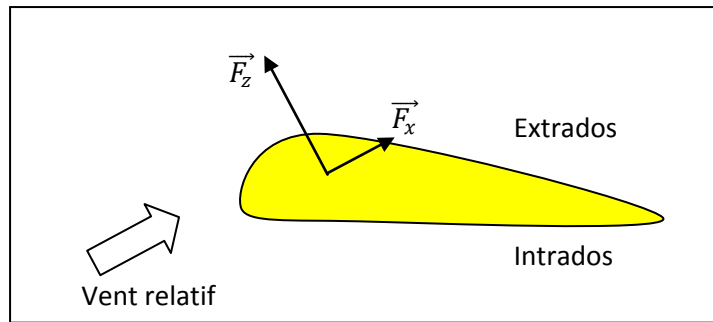


Figure 5 : Forces aérodynamiques

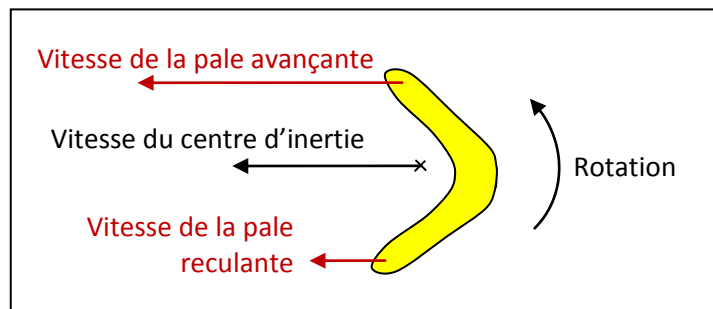


Figure 6 : Pales avançante et reculante

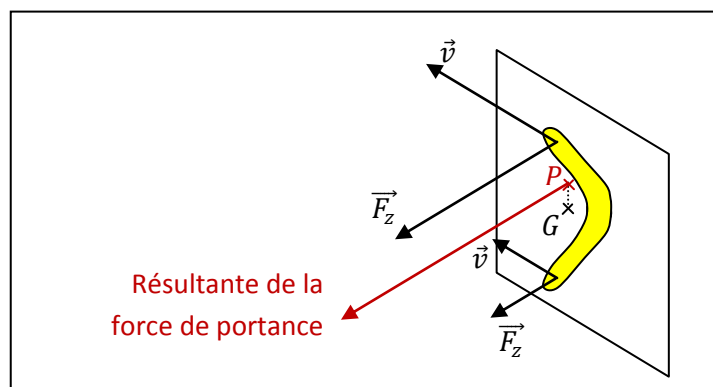


Figure 7 : Résultante de la force de portance

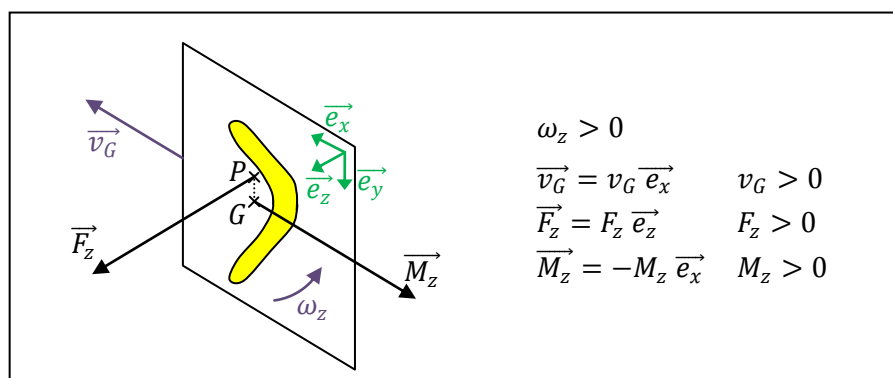


Figure 8 : Direction du moment de la force de portance

## PORTANCE ET TRAINEE

Au-dessus de l'extrados, les lignes de champ sont plus rapprochées et la vitesse augmente. Sous l'intrados, la vitesse est moindre. Or, d'après le **théorème de Bernoulli**, la pression  $P$  d'un fluide de masse volumique  $\rho$  à la vitesse  $\vec{v}$  vérifie :  $P + \frac{1}{2}\rho v^2 = C^{ste}$ . La pression est donc plus faible au-dessus de l'extrados que sous l'intrados. Les forces pressantes ont donc une résultante non nulle, dirigée de l'intrados vers l'extrados.

Plus précisément, pour un écoulement à 3 dimensions, cette résultante admet deux composantes (cf. figure 5) :

- la portance, dirigée perpendiculairement à la vitesse de l'air incident, de l'intrados vers l'extrados, de norme  $F_z = \frac{1}{2}C_z \rho v_0^2 S$
- la traînée induite, colinéaire à la vitesse, de même sens, de norme  $F_x = \frac{1}{2}C_x \rho v_0^2 S$

où  $C_z$  et  $C_x$  sont des coefficients qui dépendent de la forme de l'aile et de son angle d'incidence<sup>3</sup> (en général  $C_x \ll C_z$ ),  $\rho$  est la masse volumique de l'air incident,  $\vec{v}_0$  est sa vitesse à l'infini amont par rapport à la pale et  $S$  est une surface caractéristique de la pale.

## 3. EXPLICATION DE LA TRAJECTOIRE

### PALES AVANÇANTE ET RECLANTE

En plus de son mouvement de rotation, le boomerang est lancé avec une vitesse de translation vers l'avant. Une pale du boomerang n'a donc pas la même vitesse selon sa position. Lorsqu'elle est en haut, la pale cumule positivement les vitesses de translation et de rotations. Elle est dite *avançante*. Au contraire, lorsqu'elle est en bas, les deux vitesses se compensent en partie et la pale est dite *reclante* (cf. figure 6).

### POINT D'APPLICATION DE LA PORTANCE ET DIRECTION DE SON MOMENT

La force de portance, proportionnelle à la vitesse au carré, s'exerce donc plus fortement lorsque la pale est en haut que lorsqu'elle est en bas. Donc **le point  $P$  d'application de la résultante des forces de portance des deux pales, en moyenne sur un tour, est au-dessus du centre d'inertie** (cf. figure 7).

On note  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  une base de l'espace liée au boomerang telle que  $\vec{e}_z$  est normal au plan du boomerang et  $\vec{e}_x$  est colinéaire à la vitesse, de même sens (cf. figure 8). La vitesse de rotation propre  $\omega_z$  autour de l'axe  $\vec{e}_z$  est très grande devant les vitesses de rotation  $\omega_x$  et  $\omega_y$  autour des axes  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  :  $\omega_z \approx 10 \text{ tours/s}$  et  $\omega_x \approx \omega_y \approx 0,1 \text{ tours/s}$ , donc  $\omega_z \gg \omega_x, \omega_y$ .

De plus la vitesse de translation est, en première approximation, dans le plan du boomerang. Donc en bonne approximation, la vitesse des pales est dans le plan du boomerang. La force de portance est donc dirigée perpendiculairement au plan du boomerang :  $\vec{F}_z = F_z \vec{e}_z$ . Le moment de cette force calculé au centre d'inertie  $G$  du boomerang est donc dirigé vers l'arrière :

$\vec{M}_z = \vec{GP} \wedge \vec{F}_z = -M_z \vec{e}_x$  où  $P$  est le point d'application de la portance (cf. figure 8).

### LE RETOUR DU BOOMERANG

Si on ne tient compte que de la portance, qui est la seule force responsable du retour du boomerang, le **théorème du moment cinétique** donne :  $\frac{d\vec{\sigma}_G}{dt} = \vec{M}_z$  où  $\vec{\sigma}_G$  est le moment cinétique du boomerang calculé au centre d'inertie  $G$ .

<sup>3</sup> L'angle d'incidence est l'angle entre le plan de la pale et la vitesse de l'air incident.

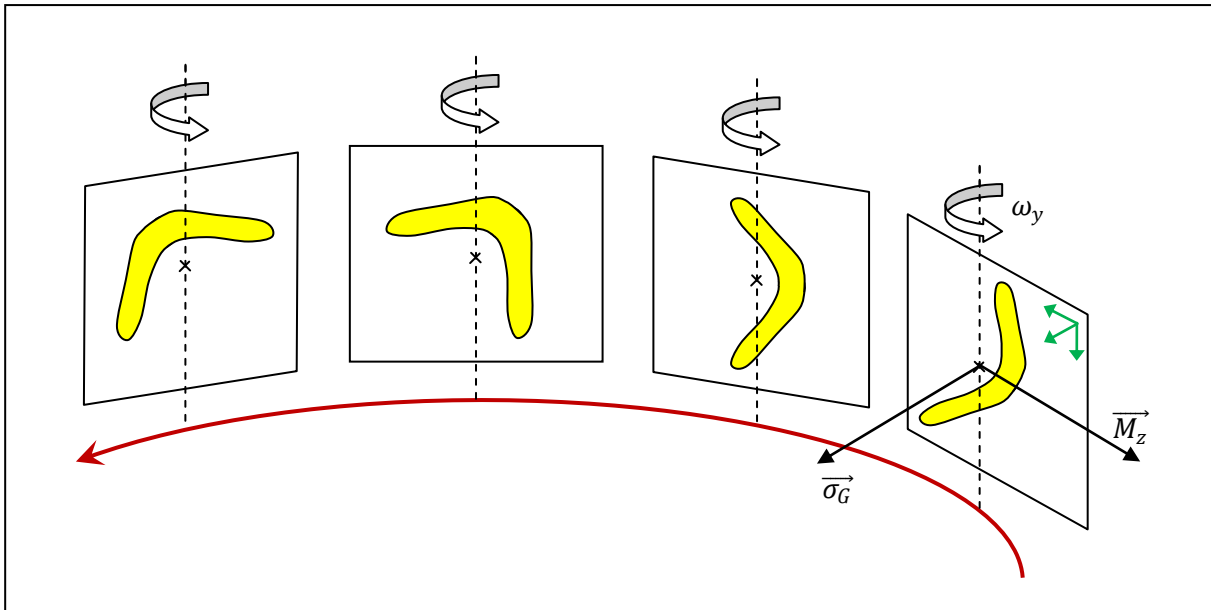


Figure 9 : Le retour du boomerang

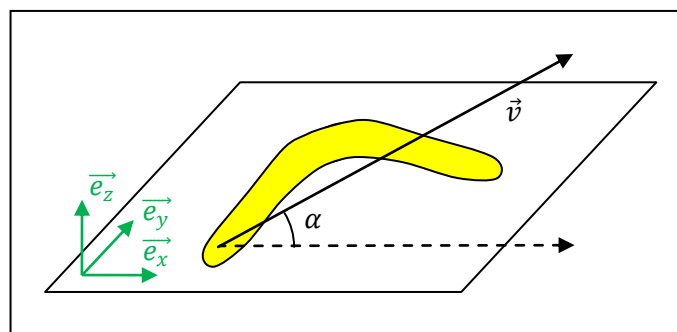


Figure 10 : Angle d'incidence  $\alpha$  d'une pale

Nous avons vu qu'en bonne approximation, le vecteur rotation peut s'écrire :  $\vec{\Omega} \approx \omega_z \vec{e}_z$ . Donc  $\vec{\sigma}_G \approx J_{Gz} \omega_z \vec{e}_z$  où  $J_{Gz}$  est le moment d'inertie du boomerang par rapport à l'axe  $Gz$ .

Le théorème du centre d'inertie s'écrit donc :  $J_{Gz} \frac{d\omega_z}{dt} \vec{e}_z + J_{Gz} \omega_z \frac{d\vec{e}_z}{dt} = -M_z \vec{e}_x$ ,

d'où  $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = -\frac{M_z}{J_{Gz} \omega_z} \vec{e}_x$ .

On en déduit que **le plan du boomerang tourne autour de l'axe  $\vec{e}_y$  à la vitesse  $\omega_y = \frac{M_z}{J_{Gz} \omega_z}$** . Le boomerang a donc un mouvement de précession, qui explique son retour (cf. figure 9).

## II. MODELISATION DU VOL

### 1. APPROXIMATIONS ET MISE EN EQUATIONS

#### APPROXIMATIONS

La mise en équations du mouvement du boomerang nécessite des approximations. La principale est une caractéristique du mouvement gyroscopique du boomerang, déjà vue au paragraphe I.3. Elle consiste à considérer que la vitesse de rotation autour de l'axe normal au plan du boomerang est très grande devant toutes les autres composantes de la vitesse :  $\omega_z \gg \omega_x, \omega_y$ . On suppose aussi que **la vitesse des pales est dans le plan du boomerang** : l'angle d'incidence  $\alpha$  des pales (cf. figure 10) est constamment presque nul,  $\alpha \ll 1$ .

Ces deux hypothèses permettent plusieurs simplifications du problème :

- Le moment cinétique calculé au centre d'inertie  $G$  est normal au boomerang :  $\vec{\sigma}_G = \sigma_G \vec{e}_z$
- La portance s'exerce normalement au plan du boomerang :  $\vec{F}_z = F_z \vec{e}_z$
- La norme de la portance ne dépend pas de  $\alpha$ , mais seulement de la vitesse :  $\vec{F}_z = F_z(v) \vec{e}_z$

Toutes ces approximations devront être vérifiées a posteriori.

Dans les calculs, nous avons simplifié l'expression de la portance. Pour chaque pale, on considère que la force s'exerce en un seul point, situé à une distance  $L$  du centre d'inertie  $G$ , et sa valeur est celle de la moyenne de la portance sur une rotation propre du boomerang. De plus, nous avons négligé la trainée induite par la portance.

Il n'a pas non plus été tenu compte des éventuelles dissymétries de la forme du boomerang : en particulier, la modélisation ne s'applique donc correctement qu'à un tripale ou un quadripale.

#### MISE EN EQUATIONS

Le bilan des forces est le suivant :

- la portance : 
$$\begin{cases} \vec{F}_z = K_z (v_G^2 + (L\omega_z)^2) \vec{e}_z \\ \vec{M}_z = \langle L \vec{e}_r \wedge K_z (\vec{v}_G + L\omega_z \vec{e}_\theta)^2 \vec{e}_z \rangle_{\frac{2\pi}{\omega_z}} \end{cases} \text{ en coordonnées cylindriques}$$
- les forces de frottements fluides : 
$$\begin{cases} \vec{f} = -\lambda \vec{v}_G \\ \vec{\Gamma} = -\mu \omega_z \vec{e}_z \end{cases}$$
- le poids : 
$$\begin{cases} \vec{P} = m \vec{g} \\ \vec{0} \end{cases}$$

Le torseur cinétique du boomerang est : 
$$\begin{cases} \vec{p} = m \vec{v}_G \\ \vec{\sigma}_G = J_{Gz} \omega_z \vec{e}_z \end{cases}$$

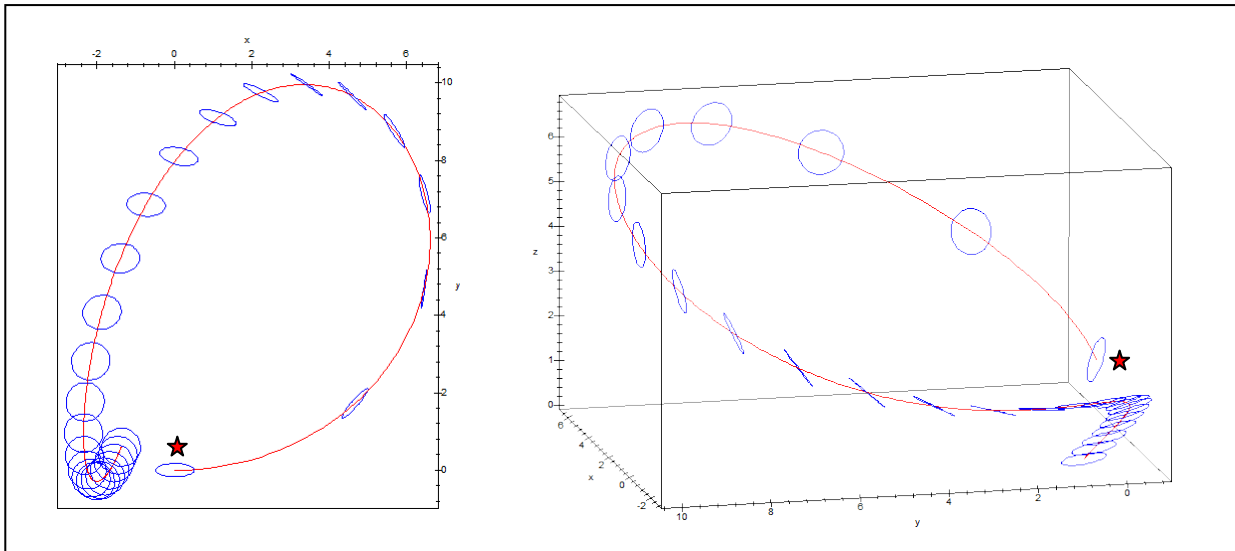


Figure 11 : Une trajectoire obtenue par la modélisation, vue du dessus et du côté  
L'étoile repère la position initiale.

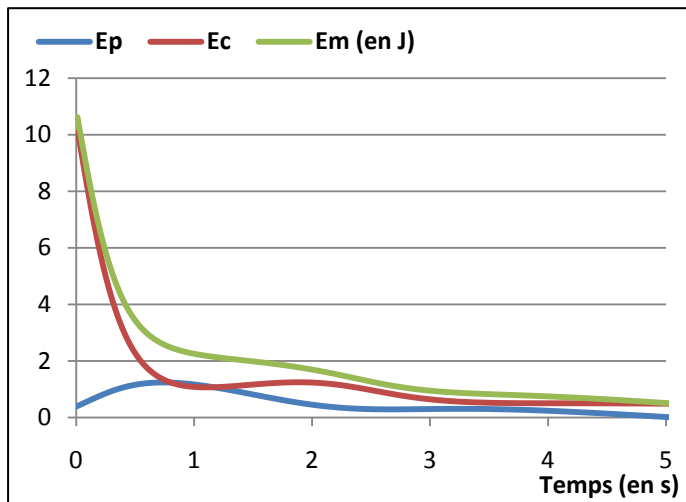


Figure 12 : Variation des énergies potentielle ( $E_p$ ), cinétique ( $E_c$ ) et mécanique ( $E_m$ ) au cours du vol, d'après la modélisation

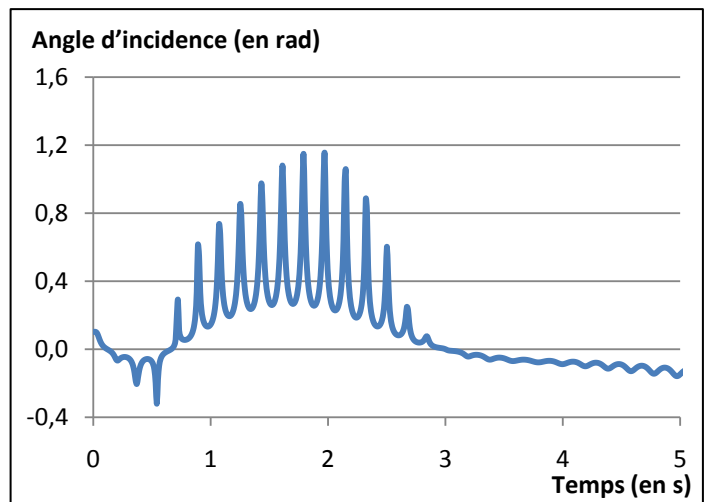


Figure 13 : Variation de l'angle d'incidence d'une pale au cours du vol, d'après la modélisation

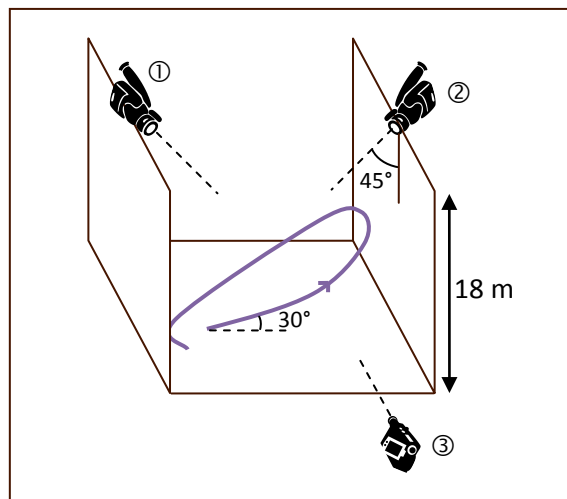


Figure 14 : Trois positions possibles de la caméra



On peut alors écrire le **théorème du centre d'inertie** et le **théorème du moment cinétique**. On obtient six équations scalaires. Or il y a six inconnues correspondant aux six degrés de liberté du boomerang. Il est donc possible de résoudre le problème si on connaît les conditions initiales, qui correspondent aux paramètres du lancer du boomerang.

## 2. RESULTATS

Les équations ont été résolues numériquement par la méthode de Runge-Kutta-Fehlberg (RKF45), sur le logiciel *Maple V*. Les valeurs des paramètres du boomerang  $(m, J_{Gz}, L)$ , des coefficients de forces  $(K_z, \lambda, \mu)$  et des conditions initiales  $(\vec{v}_0, \vec{\Omega}_0)$  ont été choisies en essayant d'approcher les valeurs réelles observées ou supposées. Cependant, elles ont été ajustées, de manière à obtenir une trajectoire proche de celle attendue, c'est-à-dire avec un retour vers le lanceur.

La figure 11 montre une des trajectoires obtenues.

On peut également avoir accès à de nombreux résultats numériques, comme les variations d'énergie (cf. figure 12). Ils permettent d'apprécier si les hypothèses émises sont justifiées. Ainsi, on peut constater qu'on a bien  $\omega_z \gg \omega_x, \omega_y$ . Par contre, l'hypothèse selon laquelle l'angle d'incidence des pales est constamment nul est remise en question (cf. figure 13) : peu après l'apogée de la trajectoire, l'angle d'incidence prend périodiquement (à la période  $\frac{2\pi}{\omega_z}$ ) des valeurs très élevées. Ceci ne semble pas nuire à la trajectoire obtenue.

## III. CONFRONTATION AVEC LA REALITE EXPERIMENTALE

### 1. PROTOCOLE EXPERIMENTAL

Pour confronter les résultats de la modélisation à la réalité expérimentale, nous avons filmé des lancers de boomerang sous plusieurs angles (cf. figure 14). Ces lancers ont été effectués par temps calme avec un boomerang tripale, afin de pouvoir les comparer à la modélisation qui ne tient pas compte des conditions atmosphériques ni des éventuelles dissymétries du boomerang.

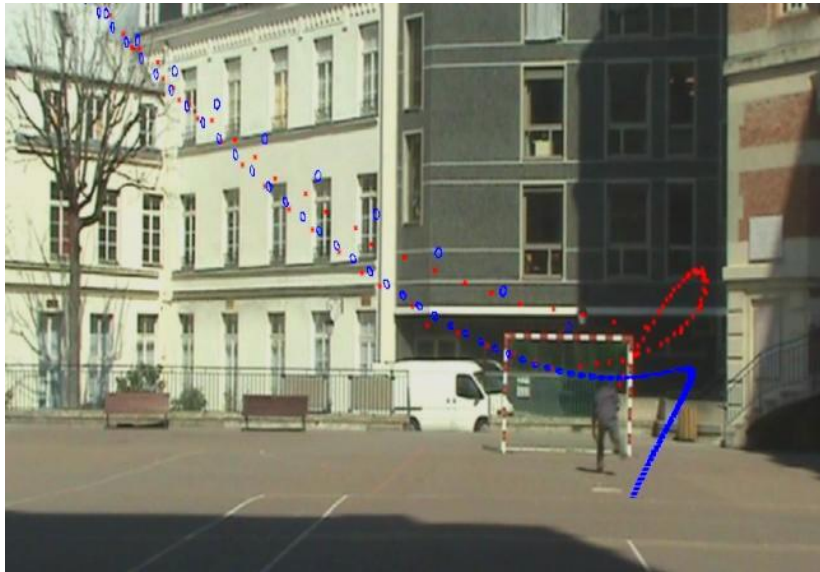
Le traitement image par image des vidéos, effectué avec le logiciel *AviStep*, permet de faire plusieurs mesures :

- vitesses initiales de rotation et de translation (grâce à la vue n°3, figure 14)
- durée entre le lancer et l'apogée de la trajectoire, entre le lancer et la chute du boomerang
- caractéristiques de la trajectoire : longueur et largeur de la goutte d'eau, rapport des ces distances (grâce à la vue n°1, figure 14)

### 2. COMPARAISON ENTRE LE MODELE ET L'EXPERIENCE

Les trajectoires filmées ont été comparées à celle obtenue par la modélisation pour un boomerang de même masse, les valeurs des autres paramètres étant choisies telles que le retour s'effectue le plus proche possible du point initial.

Comme on peut le voir sur la figure 15, les trajectoires sont très semblables. Elles diffèrent un peu à la toute fin du vol : à ce moment, le boomerang a perdu beaucoup de vitesse. Il est alors plus sensible au vent et aux autres perturbations.



En **rouge**, le pointé expérimental

En **bleu**, la modélisation

Il y a une marque toutes les 0,04 secondes.

Les deux trajectoires sont superposées sans tenir compte de l'échelle

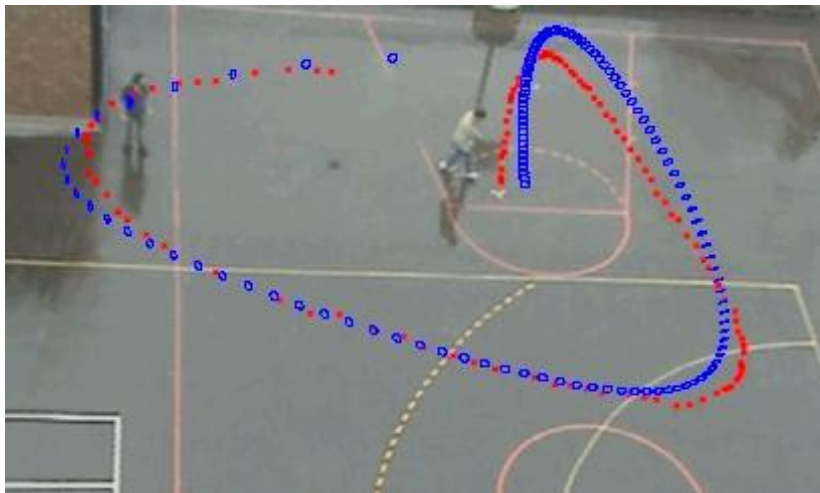







Figure 15 : Comparaison de l'expérience et de la modélisation, pour deux lancers :

- le premier vu depuis le point n°3 (cf. figure 14)
- le second vu depuis le point n°2 (modélisation identiques à celle de la figure 11)

Il est intéressant de comparer les résultats numériques obtenus par la modélisation et l'expérience.

	Mesures expérimentales	Modélisation <sup>(4)</sup>	Erreur de la modélisation
Date à l'apogée de la trajectoire	4,36 s	5,10 s	 +16%
Vitesse initiale de translation	18 m/s	27 m/s	 +50%
Vitesse initiale de rotation	53 rad/s	38 rad/s	 -28%
Amplitude de la trajectoire	17 m	11 m	 -55%
Rapport de l'amplitude sur la largeur	1,5	1,7	 +13%

L'expérience montre que **la modélisation donne une trajectoire proche de la réalité, mais les grandeurs sont faussées** en ce qui concerne les vitesses et les distances.

## CONCLUSION

La modélisation du vol du boomerang proposée permet de visualiser assez précisément la trajectoire ainsi que les conséquences de la modification de certains paramètres du lancer. Pour être véritablement utile aux amateurs qui fabriquent et lancent des boomerangs, cette modélisation doit être améliorée afin de fournir des valeurs plus proches de la réalité. L'étape suivante serait de tenir compte des conditions atmosphériques et de la forme exacte du boomerang.

## BIBLIOGRAPHIE

- Felix HESS, *Boomerangs, aerodynamics and motion*, thèse, Université de Groningen, 1975
- Didier BONIN & Olivier DUFFEZ, *L'Essentiel du boomerang*, Chiron, 1995
- Serge d'Ignazio, *Boomerang collection*, Éditions du Pécari, 2005
- C<sup>dt</sup> Roberdet, *Aérodynamique*, tome 1, « Dynamique des fluides incompressibles », cours, École de l'air, 1992
- *HowStuffWork*, « How boomerangs work », [entertainment.howstuffwork.com/boomerang.htm](http://entertainment.howstuffwork.com/boomerang.htm)
- *Boomerang passion*, [www.boomerangpassion.com](http://www.boomerangpassion.com)

<sup>4</sup> Les vitesses initiales de translation et de rotation sont des paramètres de la modélisation. Les valeurs indiquées sont celles qui permettent la trajectoire avec le retour le plus proche du lanceur. Pour d'autres paramètres acceptables, les valeurs de la modélisation peuvent varier de  $\pm 30\%$ .