Aufgabe 1

1.1:

$$\widehat{\sigma}(\underbrace{b}_{x_1}\underbrace{bcabaa}_{\vec{w}_1}) = \underbrace{\sigma(b)}_{x_1}\widehat{\sigma}(\underbrace{b}_{x_2}\underbrace{cabaa}_{\vec{w}_2}) = \underbrace{\sigma(b)}_{x_1}\underbrace{\sigma(b)}_{x_2}\widehat{\sigma}(\underbrace{c}_{x_3}\underbrace{abaa}_{\vec{w}_3}) = \underbrace{\sigma(b)}_{x_1}\underbrace{\sigma(b)}_{x_2}\underbrace{\sigma(c)}_{x_3}\widehat{\sigma}(\underbrace{a}_{x_4}\underbrace{baa}_{\vec{w}_4}) =$$

$$= \underbrace{\sigma(b)}_{x_1}\underbrace{\sigma(b)}_{x_2}\underbrace{\sigma(c)}_{x_3}\underbrace{\sigma(a)}_{x_4}\widehat{\sigma}(\underbrace{b}_{x_5}\underbrace{aa}_{\vec{w}_5}) = \underbrace{\sigma(b)}_{x_1}\underbrace{\sigma(b)}_{x_2}\underbrace{\sigma(c)}_{x_3}\underbrace{\sigma(a)}_{x_4}\underbrace{\sigma(b)}_{x_5}\widehat{\sigma}(\underbrace{a}_{x_6}\underbrace{a}_{\vec{w}_6}) =$$

$$= \underbrace{\sigma(b)}_{x_1}\underbrace{\sigma(b)}_{x_2}\underbrace{\sigma(c)}_{x_3}\underbrace{\sigma(a)}_{x_4}\underbrace{\sigma(b)}_{x_5}\underbrace{\sigma(a)}_{x_6}\widehat{\sigma}(\underbrace{a}_{x_7}\underbrace{\varepsilon}_{\vec{w}_7}) = \underbrace{\underbrace{\sigma(b)}_{x_1}}_{c}\underbrace{\underbrace{\sigma(b)}_{x_2}}_{c}\underbrace{\underbrace{\sigma(c)}_{x_3}}_{a}\underbrace{\underbrace{\sigma(a)}_{x_4}}_{b}\underbrace{\underbrace{\sigma(b)}_{x_5}}_{c}\underbrace{\underbrace{\sigma(a)}_{x_6}}_{b}\underbrace{\underbrace{\sigma(b)}_{x_7}}_{b}\underbrace{\widehat{\sigma}(\underbrace{\varepsilon}_{\vec{w}_7})}_{\varepsilon} =$$

$$= ccabcbb$$

1.2:

function $\widehat{\sigma}(\text{String } w)$ returns String {
  falls $(w == \varepsilon)$, dann antworte mit ε ;
  ansonsten {
    teile das wort auf in den ersten Buchstaben $b \in \Sigma$ und den Rest des Wortes $r \in \Sigma^*$;
    berechne $c := \sigma(b) \in \Sigma$; // tatsächliches Berechnen
    berechne $d := \widehat{\sigma}(r) \in \Sigma^*$; // rekursiver Funktionsaufruf
    verbinde $e := cd \in \Sigma^*$;
    antworte mit e;
  }
}

1.3:

Sei $L := \{ba, bb\}$. $M = \text{DEA}(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $Q := \{q_0, q_1, q_2, q_T\}$ und $F := \{q_2\}$

$\Rightarrow L' := \{cb, cc\}$. $M' = DEA(Q, \Sigma, \delta', q_0, F)$

δ	a	b	c
q_0	q_T	q_1	q_T
q_1	q_2	q_2	q_T
q_2	q_T	q_T	q_T
q_T	q_T	q_T	q_T

δ'	b = σ(a)	c = σ(b)	a = σ(c)
q_0	q_T	q_1	q_T
q_1	q_2	q_2	q_T
q_2	q_T	q_T	q_T
q_T	q_T	q_T	q_T

Tabelle identisch, also $\forall q \in Q \quad \forall x \in \Sigma$: $\delta(q, x) = \delta'(q, \sigma(x))$

1.4: $\widehat{\delta}'(q, \widehat{\sigma}(\vec{x})) \overset{!}{=} \widehat{\delta}(q, \vec{x})$

Beweis durch vollständige Induktion nach der Länge des Wortes n:

Induktionsanfang n = 0: $\widehat{\delta}'(q, \widehat{\sigma}(\varepsilon)) = \varepsilon = \widehat{\delta}(q, \varepsilon)$

Induktionsschritt n → n + 1:

Sei $\vec{x} := x_1 x_2 \dots x_n x_{n+1} \in \Sigma^*$ ein Wort der Länge $|\vec{x}| = n+1$

$\widehat{\delta}'(q, \widehat{\sigma}(\vec{x})) = \widehat{\delta}'(q, \widehat{\sigma}(\boldsymbol{x_1} x_2 \dots x_n x_{n+1})) =$ // setze Definition von σ ein.

$= \widehat{\delta}'(q, \boldsymbol{\sigma(x_1)}\, \widehat{\sigma}(x_2 \dots x_n x_{n+1})) =$ // setze Definition von $\widehat{\delta}$ ein.

$= \widehat{\delta}'(\boldsymbol{\delta'(q, \sigma(x_1))}, \widehat{\sigma}(x_2 \dots x_n x_{n+1})) \overset{IV}{=}$ // Induktionsvoraussetzung

$= \widehat{\delta}(\boldsymbol{\delta'(q, \sigma(x_1))}, x_2 \dots x_n x_{n+1}) \overset{1.3}{=}$ // Teilaufgabe 1.3 oder Induktionsanfang n=1

$= \widehat{\delta}(\boldsymbol{\delta(q, x_1)}, x_2 \dots x_n x_{n+1}) = \widehat{\delta}(q, \boldsymbol{x_1} x_2 \dots x_n x_{n+1}) = \widehat{\delta}(q, \vec{x})$

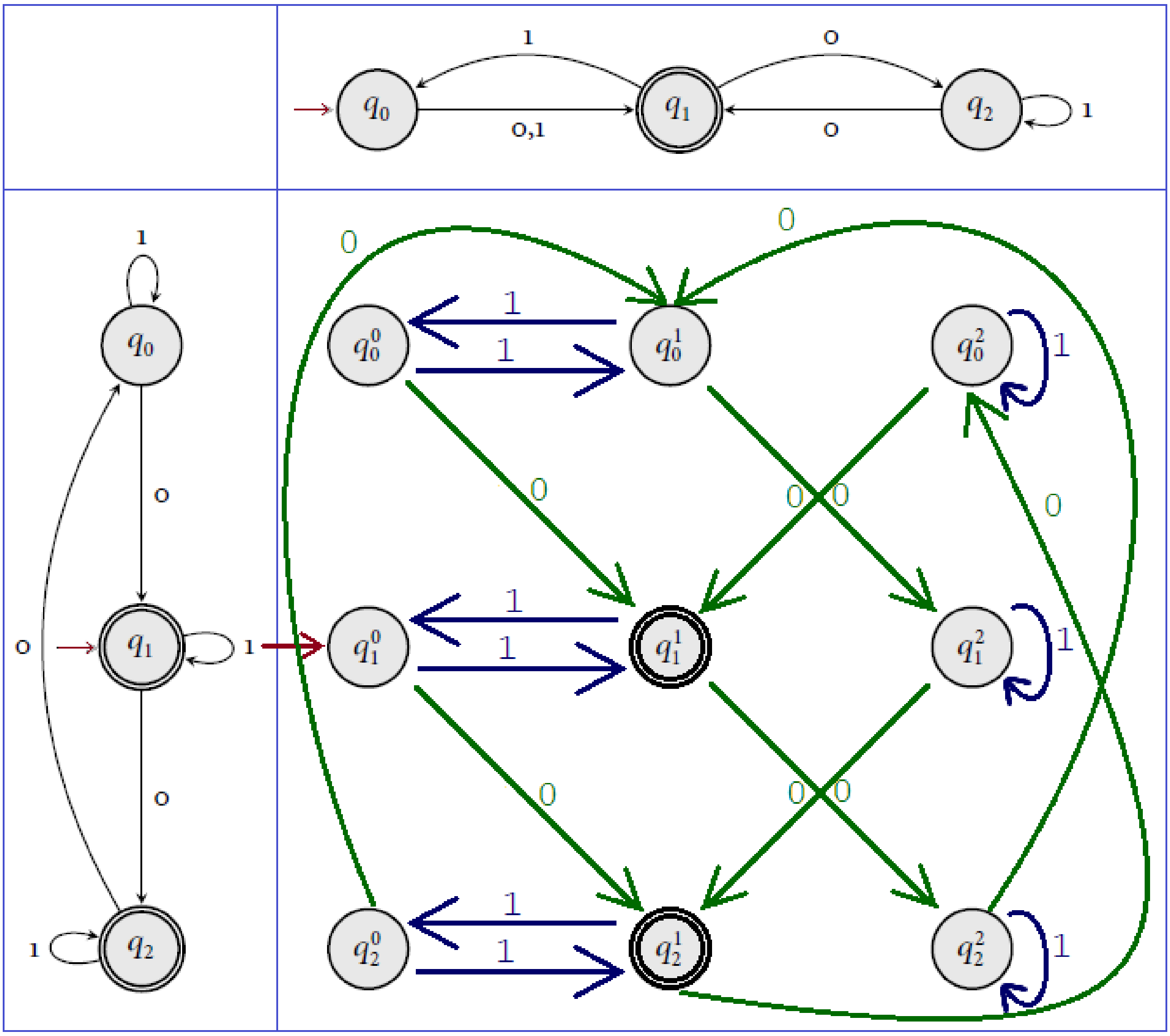
Aufgabe 2

gegeben: $\forall i \in \{1,2\}:\ M_i \ := \ \text{DEA}(Q_i,\ \Sigma,\ \delta_i,\ q_{(0,\,i)},\ F_i)$

Ergebnis:

$M \ = \ \text{DEA}(Q_1 \times Q_2,\ \Sigma,\ \delta,\ (q_{(0,\,1)}, q_{(0,\,2)}),\ F_1 \times F_2) \quad \text{mit} \quad \delta:\ (Q_1 \times Q_2) \times \Sigma \rightarrow (Q_1 \times Q_2)$

$\forall\, q_{(\_,1)} \in Q_1 \ \ \forall\, q_{(\_,2)} \in Q_2 \ \ \forall\, a \in \Sigma:\ \ \delta((q_{(\_,1)},\ q_{(\_,2)}),\ a) \ := \ (\delta_1(q_{(\_,1)},\ a), \delta_2(q_{(\_,2)},\ a))$



<u>Abgeschlossenheit regulärer Sprachen unter beliebiger endlicher Schnittmenge</u>:

gegeben: $\forall i \in \{1,\ldots,n\}:\ M_i \ := \ \text{DEA}(Q_i,\ \Sigma,\ \delta_i,\ q_{(0,\,i)},\ F_i)$

Ergebnis:

$M \ = \ \text{DEA}(\prod_{i=1}^{n} Q_i,\ \Sigma,\ \delta,\ (q_{(0,\,1)}, \ldots, q_{(0,\,n)}),\ \prod_{i=1}^{n} F_i) \quad \text{mit} \quad \delta:\ (\prod_{i=1}^{n} Q_i) \times \Sigma \rightarrow \prod_{i=1}^{n} Q_i$

$\forall_{1 \le i \le n} \ \ \forall\, q_{(\_,i)} \in Q_i \ \ \forall\, a \in \Sigma:\ \ \delta((q_{(\_,1)}, \ldots,\ q_{(\_,n)}),\ a) \ := \ (\delta_1(q_{(\_,1)},\ a), \ldots, \delta_n(q_{(\_,n)},\ a))$

Aufgabe 3

Die Äquivalenzklassen für die Relation R_L sind: [ε], [0] und [00].
Die Äquivalenzklassen für die Relation R_M sind: [ε], [0], [1], [10] und [00].

Knoten	**Repräsentant**	**z | xz ∈ L**	**z | xz ∉ L**
q_0 / q_2	[ε] = [1]	00, 100, 0100, 1100	ε, **0**, 1,10, 11, 0101
q_1 / q_3	[0] = [10]	**0**, 00, 100, 0100, 1100	ε, 1, 10, 11, 0101
q_4	[00]	ε, 0, 1, 00, 01	

Erkannte Sprache: Wörter, die 00 enthalten.

Aufgabe 4

$S \to SA \mid a$
$A \to BS$
$B \to BB \mid BS \mid b \mid c$

		j=1	j=2	j=3	j=4	j=5
a	i = 1	S $\square \to a$	- $\square \to SS$	- $\square \to \cancel{S-}, \cancel{-B}$	- $\square \to \cancel{S-}, \cancel{-B}, \cancel{-B}$	- $\square \to SS, \cancel{-(BA)}, \cancel{-(AB)}, \cancel{-S}$
a	i = 2	S $\square \to a$	- $\square \to SB$	- $\square \to SB, \cancel{-B}$	S $\square \to S(BA), \cancel{-(AB)}, \cancel{-S}$	
c	i = 3	B $\square \to c$	B $\square \to BB$	BA $\square \to B(AB), BS$		
b	i = 4	B $\square \to b$	AB $\square \to BS$			
a	i = 5	S $\square \to a$				

Das Wort aacba ist NICHT in der Sprache enthalten.

Um die Komplementärsprache zu entscheiden, muss man die Antwort des Algorithmus invertieren, also aus return Akzeptiert wird return Nicht akzeptiert und umgekehrt.