

10 Magnetische Phänomene

10.1 Einleitung

Das zweite grosse Gebiet der Elektrodynamik befasst sich mit Magnetfeldern und deren Beschreibung. Wie schon angetönt, sind magnetische und elektrische Phänomene eng miteinander verknüpft, was sich schlussendlich in den Maxwell-Gleichungen äussert, die eine zusammenhängende Beschreibung der Phänomene erlauben und auch die Existenz von elektromagnetischen Wellen postulieren. Damit werden wir uns im nächsten Kapitel beschäftigen. Zuerst wollen wir die Beschreibung der Magnetfelder gründlich abschliessen, denn Magnetfelder und deren Detektion sind an verschiedenen Stellen der Biologie und Chemie wichtig, als Effekte in der Natur, aber auch als experimentelle Methoden. Wir werden diese jetzt kurz ansprechen und dann weiter unten ausführlich diskutieren.

10.1.1 Navigation

Verschiedene Tiere finden sich ausserordentlich gut auf der Welt zurecht und können über sehr lange Distanzen Wege reproduzierbar zurücklegen oder den nach Hause Weg wieder finden. Bei vielen Insekten läuft das wie in der Einleitung angesprochen und wie wir bei der Optik sehen werde über die Polarisierung des Himmelslichts. Bei den meisten anderen Tieren (z.B. bei den Zugvögeln) läuft die Navigation aber über das Magnetfeld der Erde. Auch der Mensch hat bis zur Verfügbarkeit von GPS vor Allem mit Hilfe des Magnetfeldes der Erde navigiert und weite, lange Fahrten wurden erst durch die Erfindung der Kompassnadel möglich. Für die Navigation der Tiere, bzw. die Unterscheidung von lokalen Gebieten um das Nest wiederzufinden, ist ein sehr empfindlicher Magnetfeldmesser von Nöten wo die genauen Mechanismen noch immer nicht abschliessend verstanden sind. Was bekannt ist, ist dass man Tauben oder Zugvögel trainieren kann auf Magnetfelder zu reagieren, dass sie also einen solchen Sensor haben und dass er die geforderte Sensitivität hat. Es ist ebenfalls bekannt, dass es Bakterien gibt, die das Magnetfeld der Erde wahrnehmen können, indem sie in ihrem Inneren kleine magnetische Teilchen (aus Eisenoxyd) haben welche als Kompassnadel agieren. Weshalb die Teilchen diese Form und Grösse haben muss um einen effizienten Rezeptor zu machen kann man aufgrund der Physik der magnetischen Materialien verstehen, was den Rahmen unserer Vorlesung aber sprengen würde. Solche Teilchen hat man auch in anderen magnetisch navigierenden Tieren gefunden, aber bisher noch nicht in Zugvögeln. Es ist ebenfalls nicht klar wie diese mit dem Nervensystem verbunden sind. Hier gibt es noch viel für angehende BiologInnen zu tun.

10.1.2 Spektroskopische Methoden

Magnetfelder sind aber auch ein integraler Bestandteil der Standardmethoden in der Teilchenbestimmung der Chemie und Biochemie, nämlich der Massenspektrometrie und der Kernspinresonanz. In der Massenspektrometrie benutzt man eine Kombination von elektrischen und magnetischen Feldern um Moleküle (oder deren Bruchstücke) sehr empfindlich nach der Masse aufzutrennen. Die Sensitivität der Massenbestimmung und die nicht allzugrossen Materialmengen die

dazu nötig sind haben die Methode zu einem Standard in der Analyse gemacht, die inzwischen auch in der Biologie vor Allem in der Bestimmung von Proteinen grossen Einfluss hat. Um die Möglichkeiten und Grenzen der Methode zu kennen muss man allerdings ihre physikalischen Grundlagen verstehen, was wir in diesem Kapitel machen werden.

Eine fast noch wichtigere experimentelle Methode in der Chemie, Biologie und Medizin ist die der Kernspinresonanz. Sie ist heute nicht nur aus der medizinischen Diagnostik, sondern auch aus der Strukturbestimmung von Makromolekülen und der Bildgebung von biologischen Prozessen nicht mehr wegzudenken. Auch hier basiert die Methode auf den magnetischen Eigenschaften der Materie, insbesondere der Atomkerne. Ausserdem werden wir in der Behandlung der Methode viele Themen aus Kapitel 8 wieder sehen, so z.B. die Resonanz-Absorption und die Fourier-Analyse. Um die Methode richtig anwenden zu können sind verschiedene physikalische Grundlagen wichtig. Dabei ist es zum Beispiel wichtig sich des fundamentalen Unterschieds der Kernspinresonanz-Spektroskopie und der Bildgebung bewusst zu sein. Die apparativen Voraussetzungen für die jeweiligen Methoden sind sehr unterschiedlich und können physikalisch verstanden werden.

Bevor wir aber diese beiden experimentellen Methoden näher besprechen müssen wir uns die Eigenschaften von Magnetfeldern genauer anschauen.

10.2 Statische Magnetfelder

10.2.1 Phänomenologie der statischen Magnetfelder

Wir beobachten die Existenz von Kräften zwischen “magnetisierten” Metallstücken (Magnete). Die magnetischen Kräfte scheinen zwei Pole zu kennen: Gleiche Pole stossen sich ab, ungleiche ziehen sich an.

Die Erde ist auch magnetisch: Kompassnadeln zeigen nach Norden (und zwar der Nordpol der Kompass-Nadel).

Die Wirkung von Magneten auf Kompassnadeln wird durch ein magnetisches Feld \vec{B} beschrieben, das so aussieht, wie ein elektrisches Dipolfeld. Auch das Erdmagnetfeld ist ein solches magnetisches Dipolfeld.

Aber magnetische Dipole lassen sich nicht trennen. Es gibt keine magnetischen Ladungen (Monopole), jedenfalls hat man bisher keine gefunden. Der Gauss'sche Satz für Magnetfelder lautet demnach

$$\oint_{A_V} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

oder

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Der Fluss eines Magnetfeldes durch eine geschlossene Oberfläche ist immer null. Dies ist die zweite Maxwellgleichung der Elektrodynamik. Das Magnetfeld besitzt keine Quellen. Deshalb kann eine magnetische Feldlinie nirgends anfangen oder aufhören. Magnetfeldlinien müssen immer geschlossen sein.

10.2.2 Das Magnetfeld eines stationären Stromes: Ampere'sches Gesetz

Wir beobachten, dass elektrische Ströme Magnetfelder erzeugen.

Abbildung 10.127 zeigt das Magnetfeld in der Nähe eines von einem elektrischen Strom (als bewegte Ladungen zu verstehen) durchflossenen Drahtes. Sichtbar gemacht wird es durch Eisenfeilspäne, die wegen ihrer magnetischen Eigenschaften kleinen Kompassnadeln gleich sich entlang der magnetischen Feldlinien ausrichten. Man beobachtet Feldlinien, die sich zu konzentrischen Kreisen mit dem Draht als Zentrum schliessen.

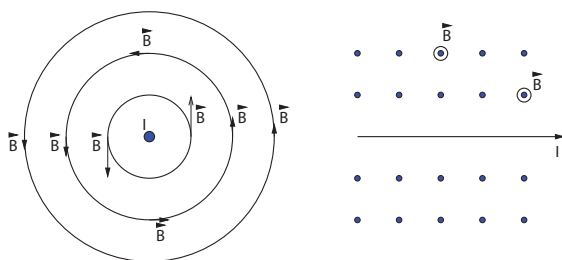


Abbildung 10.127: Magnetfeld eines stromdurchflossenen Drahtes; links: Schnitt in einer Ebene senkrecht zur Drahtachse, rechts: Schnitt in einer Ebene, die den Draht enthält.

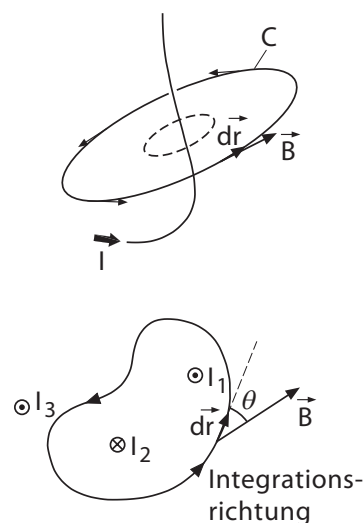
Eine quantitative Analyse ergibt ausserdem, dass das Feld mit der Stromstärke zu, und dem Abstand abnimmt: $B \propto I$ bzw. $B \propto r^{-1}$.

Das **Ampère'sche Gesetz** gilt für eine beliebige geschlossene Kurve C , die den Strom umschliesst. Werden mehrere stromführende Leiter vom Weg C umschlossen, so sind die Ströme zu addieren:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{r} = \mu_0 \sum_i I_i$$

Im nebenstehenden Beispiel sind nur I_1 und I_2 , nicht aber I_3 in der Summe zu berücksichtigen. Die Beiträge sind positiv zu zählen, wenn der Drehsinn der Integration mit der Stromrichtung übereinstimmt, bzw. negativ, wenn das Umgekehrte gilt. In Worten kann man das Ampère'sche Gesetz wie folgt formulieren:

Ströme bilden die Wirbelfäden des Magnetfeldes



Ein gerader Draht, in dem ein Strom I fließt, erzeugt demnach ein konzentrisches Magnetfeld. Das Ampère'sche Gesetz ergibt für einen Kreis mit Radius r um den Draht:

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Auch das Ampère'sche Gesetz lässt sich als Differentialgleichung formulieren. Dazu betrachten wir eine Schlaufe entlang der wir integrieren, wie oben betrachtet. In eine solche geschlossene

Kurve können wir immer eine Trennlinie einführen, wenn wir sie in beide Richtungen durchlaufen. Dann hebt sich entlang dieser beiden Wege das Linienintegral nämlich auf. Wir nehmen ja das Integral des Feldes mal den Weg und laufen den einmal in positive und einmal in negative Richtung, so dass in der Summe null herauskommen muss. Das heisst, wir können eine solche Kreisbetrachtung für ein beliebig kleines Element machen. Das wollen wir einmal in der $x - y$ Ebene machen. Das Kreisintegral wird dann zu einer Summe über die vier Richtungen:

$$\oint_C \vec{B} d\vec{s} = B_x(x, y)dx + B_y(x + dx, y)dy - B_x(x, y + dy)dx - B_y(x, y)dy$$

Mit der Beziehung für $B_y(x + dx, y) = B_y(x, y) + \frac{\partial B_y}{\partial x}dx$ und $B_x(x, y + dy) = B_x(x, y) + \frac{\partial B_x}{\partial y}dy$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{B} d\vec{s} &= B_x(x, y)dx + \left(B_y(x, y) + \frac{\partial B_y}{\partial x}dx \right) dy - \left(B_x(x, y) + \frac{\partial B_x}{\partial y}dy \right) dx - B_y(x, y)dy \\ &= \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dxdy \end{aligned}$$

Ausserdem wissen wir, dass dieses Integral gleich dem von der Kurve umschlossenen Strom sein muss, also

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) dxdy = \mu_0 I = \mu_0 j_z dxdy$$

wobei wir hier benützt haben, dass der Strom einer bestimmten Stromdichte entspricht und dass dieser Strom in der z -Richtung fliesst, wenn er ein Feld in der $x - y$ Ebene macht. Wenn wir also durch das Flächenelement teilen erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) = \mu_0 j_z$$

Das können wir in allen drei Raumrichtungen machen, was uns die differentielle Darstellung der dritten Maxwell-Gleichung gibt:

$$\text{rot} \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

Der physikalische Inhalt dieser Gleichung ist der gleiche wie der der integralen Gleichung, sie besagt, dass eine Stromdichte ein Wirbelfeld macht, dessen Grad der Wirbel (die Rotation) gerade der Stromdichte entspricht.

10.2.2.1 Das Magnetfeld einer Spule:

Eine lange Spule der Länge L mit N Windungen erzeugt im Innern, abgesehen von Randeffekten, ein homogenes Feld. Abbildung 10.128 zeigt wie sich das Feld aus der Summe der Felder der einzelnen Wicklungen zusammensetzt. Wählen wir für das Ampère'sche Gesetz einen Integrationsweg, wie er in Abbildung 10.128 dargestellt ist, so gilt, wenn das kleine Feld ausserhalb der Spule vernachlässigt wird,

$$\oint \vec{B} d\vec{r} = \int_0^a B dx = Ba = \mu_0 N \frac{a}{L} I$$

N ist die Anzahl Windungen für die ganze Spule der Länge L , NIa/L der vom Integrationsweg umschlossene Anteil des Stroms. Auf die gesamte Spulenlänge ausgedehnt ($a = L$) ergibt sich für das Magnetfeld im Zentrum der Spule:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} .$$

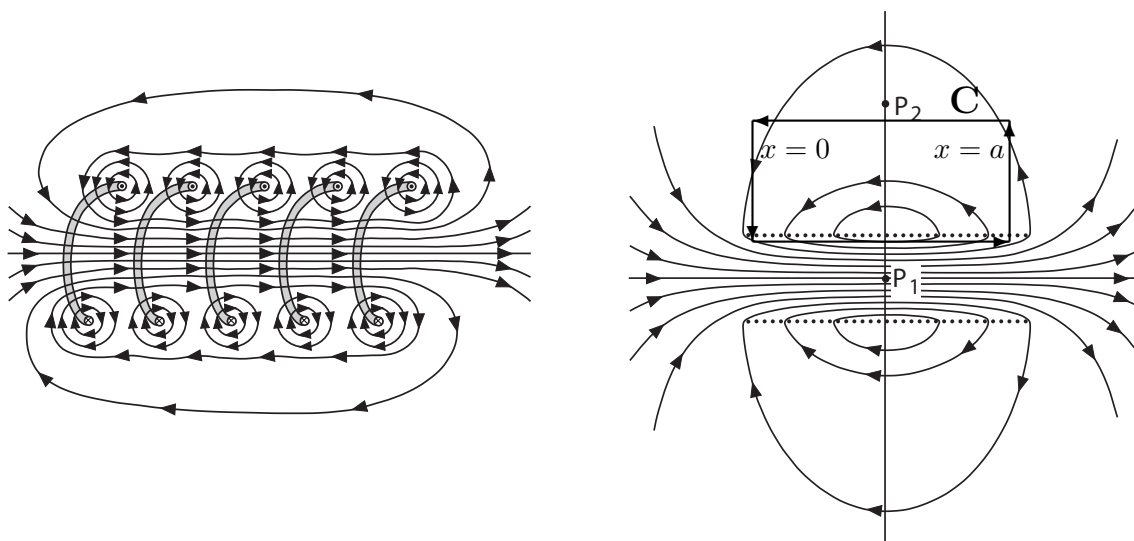


Abbildung 10.128: Magnetfeld einer Spule. Die Beiträge der einzelnen Windungen sind im linken Bild noch erkennbar. In der Nähe des Drahts findet man wie erwartet konzentrische Feldlinien. Im Zentrum addieren sich die Felder zu einem homogenen Feld parallel zur Spulenachse. Auch diese Feldlinien schliessen sich über den Aussenbereich. Die Feldliniendichte und damit die Feldstärke ist aber im Aussenbereich sehr klein. An den Rändern der Spule beobachtet man sogenannte *Streifelder*. Im rechten Bild ist für die Berechnung des Spulenfelds ein geschlossener Integrationsweg **C** markiert.

10.2.2.2 Das Magnetfeld eines Kreisstromes: Dipolfeld

Denkt man sich eine ganz kurze Spule, also eine Kreisschleife, und benützt das Gesetz von Ampere, dann sieht man, dass ein Kreisstrom ein magnetisches Dipolfeld erzeugt und zwar mit einem Dipolmoment $p_m = I\pi R^2$, das senkrecht auf der Leiterschleife steht! R ist hier der Radius der Schleife. Diese Dipole wechselwirken miteinander genauso wie es die Dipole in der Elektrostatik taten. Diese Wechselwirkung ist es, die die Kompass-Nadeln ausrichten.

In der Tat werden alle statischen Magnetfelder durch elektrische Ströme, das heisst durch bewegte elektrische Ladung erzeugt. Die Dipolfelder der anfangs beobachteten Magnete werden durch Ueberlagerung der Magnetfelder einer grossen Zahl mikroskopischer Kreisströme in den Atomen des Stabmagneten erzeugt. Dies sind einerseits die Kreisbewegungen der Elektronen um den Kern, aber andererseits auch eine Art Kreisbewegung der Elektronen um ihre eigene Achse. Man kann sich vorstellen, dass die Elektronen einen Eigendrehimpuls haben, so dass

die Drehung der Ladung einen Kreisstrom ergibt. Allerdings greift diese Vorstellung zu kurz, da soweit man bisher weiss das Elektron keine Ausdehnung hat, also kein solcher Strom existieren dürfte. Die magnetischen Momente sind aber da und messbar, also bleiben wir bei der Vorstellung der Eigendrehung. Eine richtige Behandlung der elementaren magnetischen Momente muss über die Quantenmechanik erfolgen und geht damit über die einfache Vorstellung der Eigendrehung des Elektrons hinaus. Es ergibt sich mit dieser richtigen Behandlung aber ein ähnliches Resultat wie man es aus der Vorstellung des um sich selbst drehenden Elektrons erhält, weshalb wir uns hier damit begnügen wollen. Der Betrag dieses magnetischen Moments ist also gegeben durch den Strom den die im Kreis bewegte Ladung hervorruft. Bei einer Frequenz der Rotation von $\nu = v/(2\pi r)$, wird der Strom gegeben sein durch $I = e\nu$. e ist die Elementarladung, da das Elektron ja gerade eine Elementarladung mit der Frequenz ν bewegt. Ein solcher Strom führt zu einem magnetischen Moment von $p_m = I\pi r^2 = e\pi\nu r^2 = evr/2$. Das Produkt aus Rotations-Geschwindigkeit und Abstand hängt direkt mit dem Dreh-Impuls der Rotation zusammen, $\vec{L} = m_e\vec{v} \times \vec{r}$, wobei m_e die Masse des Elektrons ist. Also erhalten wir für das Dipolmoment:

$$\vec{p}_m = \frac{e}{2m_e}\vec{L}$$

Aus der Quantenmechanik wissen wir (siehe Kap. 13), dass Drehimpulse nur in Paketen des Betrags $|\vec{L}| = \hbar$ vorkommen können (\hbar heisst auch die Planck'sche Konstante), was soviel heisst wie dass der Betrag des Dipolmoments eines Elektrons gegeben sein muss durch:

$$p_m = \frac{e\hbar}{2m_e}$$

Eine genaue Herleitung ist komplizierter und zeigt auch, dass der Eigendrehimpuls des Elektrons den Wert $\hbar/2$ hat. Jedes Elektron hat ein solches magnetisches Moment, aber in normalen Materialien ist deren Ausrichtung willkürlich angeordnet, so dass die mittlere Magnetisierung gleich null ist. Wenn man ein solches Material in ein Magnetfeld gibt, ordnen sich die Dipole entlang des Feldes an, so wie wir das für die elektrischen Dipole in E -Feldern gesehen haben. Die entsprechende Materialeigenschaft ist die magnetische Permeabilität. Die einzelnen Dipole können auch untereinander Wechselwirken, falls sich ein Teil der Momente ausrichtet entsteht ein Feld, was dann weitere Momente ausrichtet. Die Wechselwirkung zwischen den Dipolen die zur ursprünglichen Ausrichtung führt ist wiederum quantenmechanisch gegeben. Solche Materialien stellen die Grundlage aller Permanentmagnete dar.

Genauso wie bei den elektrischen Dipolen kann also die Materialeigenschaft der Permeabilität bestimmen wie gross das Feld in einem Material drin ist. Allerdings können magnetische Momente auf verschiedene Arten mit einem Feld wechselwirken und so das Feld im Material sowohl erhöhen oder erniedrigen. Bei den meisten Materialien tritt eine Erniedrigung auf, so wie das auch bei den elektrischen Dipolen war. Die atomaren Dipole richten sich entgegen dem angelegten Magnetfeld aus. Man spricht denn auch von Diamagnetismus in Anlehnung zu den Dielektrika. Das von den atomaren Dipolen kreierte Feld nennt man auch die Magnetisierung \vec{M} .

Allerdings kann bei gewissen Materialien das magnetische Moment sich auch parallel zum Feld ausrichten. Diese nennt man paramagnetisch und wenn die Wechselwirkung zwischen den Dipolen stark genug ist wird die Ausrichtung so stark, dass ein Permanentmagnet entstehen kann. In diesem Fall spricht man von Ferromagnetismus.

10.2.3 Die Lorentz - Kraft

Wir haben bereits in der Mechanik bei der Diskussion der fundamentalen Kräfte die Lorentz-Kraft erwähnt, d. h. die elektromagnetische Kraft, die auf ein bewegtes geladenes Teilchen in einem Magnetfeld wirkt. Diese Wechselwirkung kann man auch als eine Wechselwirkung zwischen Magnetfeldern verstehen. Da eine bewegte Ladung nach dem Ampere'schen Gesetz ein Magnetfeld zur Folge hat das mit dem angelegten Feld wechselwirkt, kann man sich die Stärke und Richtung der Lorentz-Kraft aus der Stärke und Richtung dieses Magnetfeldes überlegen. Da das Feld der bewegten Ladung senkrecht zur Bewegung steht, wird auch die Lorentz-Kraft senkrecht zur Bewegungsrichtung sein. Ausserdem ist die Kraft proportional zum angelegten Feld und zur Stärke der bewegten Ladung:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}]$$

Diese Beziehung kann man auch als Definition für die Feldgrösse \vec{B} benutzen. Die Präsenz eines Magnetfelds kann also durch die Kraft auf eine bewegte Ladung nachgewiesen werden. Die Lorentz-Kraft definiert auch die Einheit des Magnetfeldes in SI-Einheiten:

$$[B] = \frac{\text{N}}{\text{Am}} = \text{Tesla} = \text{T} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

Das Magnetfeld der Erde ist typisch $50 \mu\text{T}$, das Feld eines Permanentmagneten typisch 0.5 T , ein starker Elektromagnet erreicht etwa 2 T , mit supraleitenden Spulen sind bis 20 T möglich. Hohe Magnetfelder finden Anwendungen in Medizin und Biologie beim Beschleunigerbau für die Strahlentherapie, bei Kernspinresonanztomographen für die Diagnostik und bei Elektronenmikroskopen.

Da die Lorentz-Kraft auf ein bewegtes Teilchen immer senkrecht zur Geschwindigkeit zeigt, bleibt der Betrag der Kraft konstant. Die Lorentz-Kraft leistet keine Arbeit. Sie kann, im Gegensatz zur Coulomb-Kraft in einem elektrischen Feld \vec{E} , die kinetische Energie nicht verändern. Bewegt sich ein Teilchen parallel zu einem Magnetfeld ($\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} \parallel \vec{B}$), so gilt für das Vektorprodukt: $\vec{v} \times \vec{B} = 0$. Es wirkt keine Lorentz-Kraft, die Geschwindigkeit \vec{v} ist konstant.

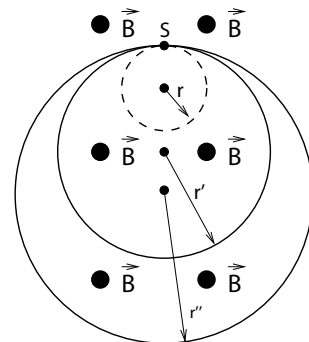
Ist hingegen die Geschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld, ($\vec{v} = \vec{v}_{\perp} \perp \vec{B}$), so lautet die Bewegungsgleichung

$$ma_{\perp} = m \frac{v_{\perp}^2}{r} = qv_{\perp} B .$$

Das Teilchen bewegt sich auf einem Kreis mit Radius r senkrecht zum Feld. Seine Umlauffrequenz ν , bzw. Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi\nu$ ist daher gegeben durch

$$2\pi\nu = \omega = \frac{v_{\perp}}{r} = \frac{qB}{m} .$$

Diese sogenannte Zyklotronfrequenz ist unabhängig von der Geschwindigkeit, d. h. Teilchen mit verschiedenen Geschwindigkeiten v_{\perp} und verschiedenen Bahnradien $r = (mv_{\perp})/(qB)$, die gleichzeitig im Punkt S starten, gehen wie gezeichnet verschieden lange Wege, kommen aber nach der gleichen Zeit zum Punkt S zurück. Das Magnetfeld zeigt senkrecht zur Papierebene. Diese Bewegung wird in einer Variante der Massenspektrometrie verwendet (siehe Kap. 10.3)



10.2.3.1 Fokussierung eines Elektronenstrahls:

Wird ein schwach divergentes Bündel von monenergetischen Elektronen in ein longitudinales Magnetfeld eingeschossen, wie z. B. in der in Abbildung 10.129 gezeigten Elektronenröhre, so sind die einzelnen Bahnkurven Schraubenlinien mit verschiedenen Radien, aber gleicher Umlauffrequenz. Da ferner

$$v_{\parallel} = v_0 \cos \phi \cong v_0 \quad (\text{für } \phi \ll 1)$$

für alle Elektronen konstant und gleich ist, erfolgt eine Fokussierung des Strahls nach dem ersten Umlauf in der Distanz $p = v_0 T = 2\pi m v_0 / (qB)$. Das Magnetfeld spielt die Rolle einer Linse, wie man sie z. B. auch in Elektronenmikroskopen technisch angewendet findet (siehe Abbildung 1.19).

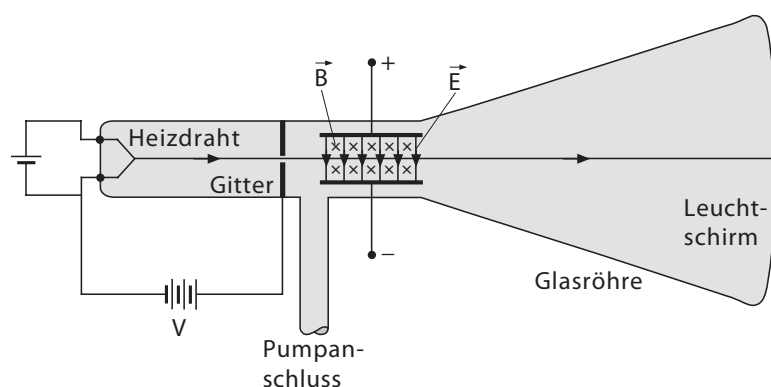


Abbildung 10.129: Schnitt durch eine Elektronenröhre: Die aus dem Heizdraht austretenden Elektronen werden bis zum Gitter auf eine Energie eV beschleunigt. Nach dem Gitter werden sie mit zeitlich variablen elektrischen oder transversalen magnetischen Feldern abgelenkt, bzw. durch longitudinale Magnetfelder fokussiert.

10.2.3.2 Kraft auf einen stromführenden Leiter

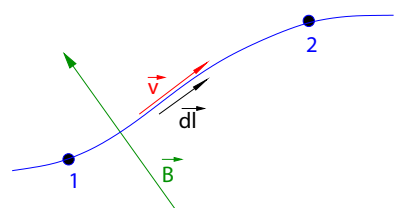
Die von einem Magnetfeld B erzeugte Lorentz-Kraft wirkt auch auf Ladungen, die sich in einem Leiter bewegen (Abbildung 10.130). Die Stärke der Kraft lässt sich aus der Stromstärke I und dem Magnetfeld \vec{B} berechnen.

Im Linienelement $d\vec{\ell}$ des gezeichneten Leiterstücks befinden sich $dq = \rho dV = \rho A d\ell$ Ladungen, wenn ρ die als über den Leiterquerschnitt A als konstant angenommene Ladungsdichte ist. dq lässt sich über die Stromdichte j und deren Zusammenhang mit der Ladungsdichte (v ist die Geschwindigkeit der Ladungen) mit dem Strom I in Verbindung bringen:

$$I = jA = \rho v A, \quad \Rightarrow dq = \frac{I}{vA} A d\ell = \frac{I}{v} d\ell.$$

Der Beitrag $d\vec{F}$ von $d\vec{\ell}$ zur Lorentz-Kraft ist dann

$$d\vec{F} = dq (\vec{v} \times \vec{B}) = \frac{I}{v} d\ell \left(v \frac{d\vec{\ell}}{d\ell} \times \vec{B} \right) = I (d\vec{\ell} \times \vec{B}).$$



Für das gesamte Leiterstück zwischen den Punkten 1 und 2 ergibt sich dann durch Integration

$$\vec{F}_L = I \int_1^2 (d\vec{\ell} \times \vec{B}) .$$

10.2.3.3 Kräfte zwischen zwei parallelen Leitern

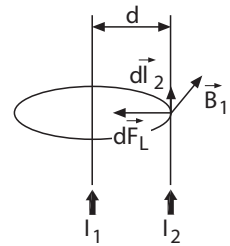
Ein stromführender Leiter erzeugt ein Magnetfeld. Durch dieses Magnetfeld wirkt eine Lorentz-Kraft auf einen zweiten stromführenden Leiter. Dessen Magnetfeld führt ebenfalls zu einer gleichgerichteten Lorentz-Kraft auf den ersten Leiter.

Die magnetische Induktion des Stroms I_1 am Ort des Leiters 2 (im Abstand d) ist

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} .$$

Die dazugehörige Kraft auf ein Leiterelement $d\vec{\ell}_2$ ist

$$d\vec{F}_{L2} = I_2 (d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1) , \Rightarrow dF_{L2} = I_2 d\ell_2 B_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 d\ell_2}{2\pi d} .$$



Die Kraft pro Längeneinheit des zweiten Leiters ist

$$\frac{dF_{L2}}{d\ell_2} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} .$$

Vertauschen der Rolle von Leiter 1 und 2 ergibt für die Kraft pro Längeneinheit des ersten Leiters

$$\frac{dF_{L1}}{d\ell_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} .$$

Für parallele Ströme finden wir anziehende Kräfte, für antiparallele Ströme abstossende.

Die Definition der Basiseinheit für den elektrischen Strom, Ampère, und damit auch derjenigen für die Ladung, Coulomb, beruht auf dieser Beziehung. Für zwei gleiche Ströme $I_1 = I_2 = 1$ A und einen Abstand von $d = 1$ m berechnen wir eine Kraft pro Längeneinheit von $2 \cdot 10^{-7}$ N/m, wie dies die Definition der Stromstärke (Abschnitt 2.2) erfordert. Die Wahl dieses Systems von Einheiten legt die Induktionskonstante auf den oben angegebenen Wert $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (Vs)/(Am) fest. Elektrische Kräfte treten wieder nicht auf, da die Leiter nicht geladen sind.

10.3 Massenspektrometer

Misst man den Krümmungsradius der Bahn, also wie weit weg von der Quelle das Ion zurückkommt, so kann man, falls Ladung, V und B bekannt sind, die Masse bestimmen:

$$r = \frac{mv}{ZeB} , \quad \Rightarrow \quad m = Ze \frac{r^2 B^2}{2V} .$$

Man kann also dann einen Detektor entlang des Abstandes fahren (siehe Fig. 10.131) und dann den Teilchenfluss als Funktion dieses Abstandes (des doppelten Krümmungsradius) messen. Damit

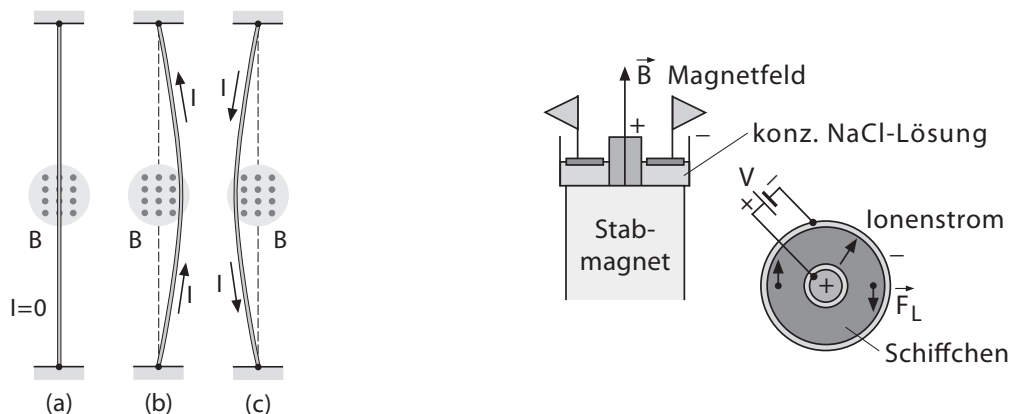


Abbildung 10.130: Zwei Vorlesungsversuche, die den Einfluss der Lorentz-Kraft auf stromführende Leiter zeigen sollen. Links: Die von einem Strom durchflossenen Metallstreifen werden je nach Stromrichtung im Feld eines Stabmagneten verschieden abgelenkt. Rechts: Die Lorentz-Kraft wirkt auch auf den Ionenstrom in der Kochsalzlösung. Der schwimmende Ring (Schiffchen mit Fähnchen) ändert den Drehsinn beim Umpolen der Stromrichtung.

erhält man ein Massenspektrum des Stoffs der analysiert wird, was einem Aufschluss über dessen Aufbau gibt.

Es gibt allerdings sehr viele verschiedene Bauarten von Massenspektrometern mit verschiedenen Prinzipien, wir wollen nun noch ein zweites Beispiel besprechen: Wie wir oben gesehen haben, führen geladene Teilchen in einem Magnetfeld eine Kreisbahn aus, mit einer ganz bestimmten Frequenz, der Zyklotronfrequenz. Wir hatten oben gefunden, dass sich eine Frequenz von $\omega = \frac{q}{m} B$. Das heisst wenn man diese Teilchenbewegung (ein Strom) misst wird dieser Oszillieren mit einer Frequenz, die nur vom angelegten Feld und der Teilchenmasse abhängt. Die Periode dieser Frequenz lässt sich leicht messen und damit bei bekanntem Magnetfeld direkt die Masse bestimmen. Wenn allerdings ein Spektrum an Massen vorhanden ist, so wie z.B. oben gezeigt, wird die Bestimmung der Frequenz schwieriger. Hier muss man sich mit einer Fourieranalyse des Signals behelfen, um die verschiedenen Frequenzen (in diesem Fall Massen) zu bestimmen. Hier entsprechen dann die Fourier-Komponenten den relativen Häufigkeiten der vorhandenen Massen.

10.4 Kernspinresonanz

Die zweite wichtige Technik die auf Magnetfeldern basiert die wir besprechen wollen ist die Kernspinresonanz. Sie basiert auf der Eigenschaft der Atom-Kerne ein magnetisches Moment zu haben, genauso wie wir das oben bei den Elektronen besprochen haben. Diese werden durch starke Magnetfelder ausgerichtet und führen dann im Magnetfeld periodische Oszillationen aus. Es gibt zwei sehr unterschiedliche Arten der Anwendung der Kernspin-Resonanz. Einerseits die vielleicht etwas bekanntere Tomographie, die sehr oft als bildgebende Methode in der medizinischen Diagnostik verwendet wird, und andererseits die Spektroskopie, die zur Strukturbestimmung oder auch in der Analytik von grosser Bedeutung ist.

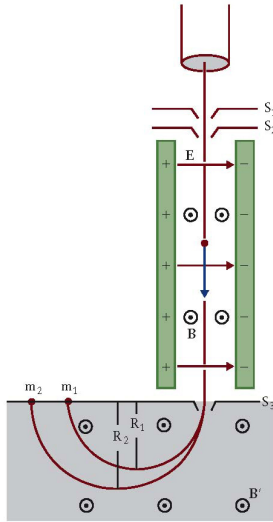


Abbildung 10.131: Schematischer Aufbau eines Massenspektrometers

Für die analytische Chemie ist es oft wichtig, die Masse von Molekülen oder deren Bestandteilen bestimmen zu können. Dazu dient das Massenspektrometer. Die Moleküle werden zunächst in einer Ionenquelle in geladene Ionen verwandelt, und dann in einem elektrischen Feld beschleunigt. Durchläuft das Ion (Ladung Ze) eine Spannungsdifferenz V , so hat es anschliessend eine kinetische Energie von

$$\frac{m}{2}v^2 = Ze \int \vec{E} d\vec{r} = ZeV.$$

Die beschleunigten Ionen passieren dann ein homogenes Magnetfeld, das senkrecht zu \vec{v} steht.

10.4.1 Grundlagen

Die Bestandteile des Atom-Kerns, die Protonen und Neutronen besitzen genauso ein magnetisches Moment wie die Elektronen. Man kann sich dieses ebenso als von einer Eigendrehung herrührend vorstellen. Da das Proton (wie auch das Neutron) etwa 2000 Mal schwerer ist als das Elektron ist allerdings das entsprechende magnetische Moment um den gleichen Faktor kleiner. Das heisst die Energie die nötig ist um ein solches magnetisches Moment zu drehen ist sehr klein und lässt sich mit Radiowellen bewerkstelligen. Allerdings ist die Energie so klein, dass sie auch leicht durch thermische Fluktuationen erreicht werden kann, was dazu führt dass im Mittel nur sehr wenige Kernspins in einem angelegten Magnetfeld ausgerichtet werden. Die meisten werden durch thermische Fluktuationen wieder ungeordnet. Um diese Effekte zu quantifizieren müssen wir zuerst die nötige Energie zur Ausrichtung ausrechnen. Die Kerne an denen Kernspin-Resonanz gemessen werden kann müssen ein resultierendes magnetisches Moment \vec{p}_m haben. Bei geradzahligem Vielfachen der Neutronen- und Protonen-Zahl können sich die magnetischen Momente der jeweiligen Bausteine aufheben und der Kern hat kein resultierendes magnetisches Moment. An solchen Kernen kann auch keine Kernspin-Resonanz gemessen werden. Das betrifft viele Kerne die in organischen Stoffen sehr häufige vorkommen wie $C - 12$, $N - 14$ oder $O - 16$. Deshalb wird Kernspin-Resonanz in solchen Stoffen mit Abstand am Meisten an Wasserstoff Kernen (also an einem einzelnen Proton) gemacht.

Wir haben bei den elektrischen Dipolen gesehen, dass diese Energie gegeben ist durch $\Delta E = \vec{p}_m \cdot \vec{B}$. Mit dem Wert des magnetischen Moments des Protons von $p_m = 1.4 \cdot 10^{-26} \text{ J/T}$ ergibt sich selbst bei hohen Magnetfeldern von $B = 1 \text{ T}$ eine Energiedifferenz von nur $\Delta E = 1.4 \cdot 10^{-26} \text{ J}$. Wenn wir das mit der thermischen Energie $k_B T = 4 \cdot 10^{-21} \text{ J}$ bei Raumtemperatur vergleichen, sehen wir, dass diese Energie extrem leicht durch thermische Fluktuationen angeregt werden kann. Der Boltzmann-Faktor für eine solche Energie ist sehr nahe bei 1, genauer gesagt: $\exp(-\Delta E/k_B T) \simeq 1 - \Delta E/k_B T$ die Taylor-Entwicklung dürfen wir hier getrost machen, denn $\Delta E/k_B T = 3.5 \cdot 10^{-6}$ für die obigen Zahlen. Das heisst wir können uns überlegen welcher Prozentsatz der Kerne schlussendlich durch das Feld ausgerichtet wird, denn mit der Wahrscheinlichkeit des Boltzmann-Faktors wird die Ausrichtung zerstört. Durch Erhöhung des Feldes

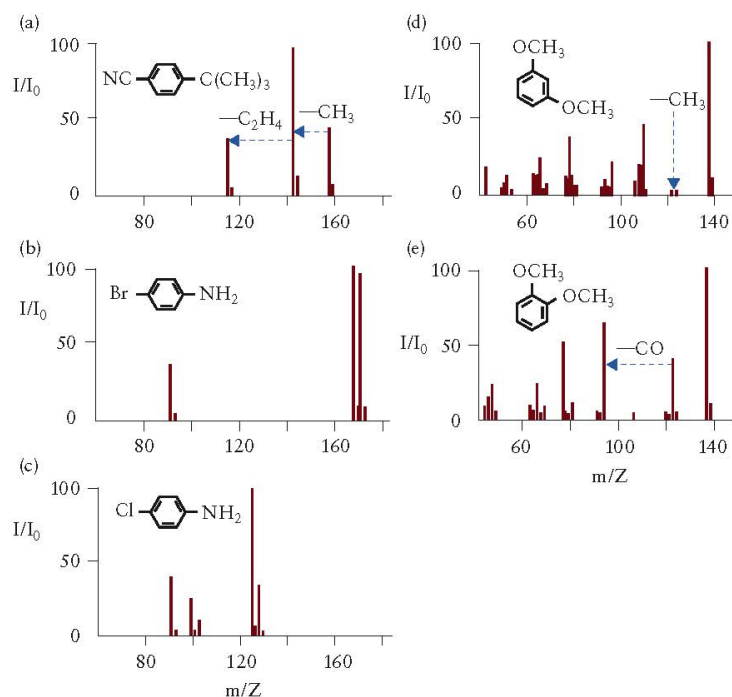


Abbildung 10.132: Spektren von einfachen organischen Molekülen

oder Erniedrigung der Temperatur lässt sich die etwas verbessern, aber in beiden Fällen ist keine sehr grosse Änderung möglich. Das heisst aus diesen Überlegungen sehen wir, dass Kernspinresonanz (oder NMR) nur Informationen über sehr viele Moleküle gibt. Da Moleküle klein sind und es auch in kleinen Volumina sehr viele davon hat kann man trotzdem sinnvolle Messungen machen, aber Einzelmolekülexperimente mit NMR sind dadurch unmöglich.

Als nächstes wollen wir uns anschauen was mit den ausgerichteten Kernspins passiert. Da das magnetische Moment mit dem Eigendrehimpuls des Protons zusammenhängt, führt die Auslenkung des magnetischen Momentes durch das angelegte Feld zu einer Rotation (Präzession) des Drehimpulses um das angelegte Feld herum. Egal in welche Richtung das Kernmoment am Anfang gezeigt hat, die Frequenz der Präzession ist gegeben durch $\omega_L = 2m_P B / \hbar = \gamma_P B$, γ_P heisst hier das gyromagnetische Verhältnis und die Frequenz nennt man auch die Larmor-Frequenz. Für einen Wasserstoffkern ergibt sich ein Wert von $\gamma_P = 42 \text{ MHz/T}$. Das heisst bei einem angelegten Feld von etwa 3T wie dies in modernen Kernspintomographen der Fall ist, präzedieren die Wasserstoff-Kernspins mit einer Frequenz von etwa 120 MHz. Diese Frequenz entspricht in etwa der von Radiowellen, was jetzt gleich wichtig wird.

Wenn wir uns nun einen präzedierenden Kernspin vorstellen, der mit einer bestimmten Frequenz präzediert, dann können wir diese Präzession ändern indem wir ein zeitlich änderliches Magnetfeld mit der gleichen Frequenz senkrecht zum Hauptfeld anlegen. Dies führt dann dazu, dass der Spin auch um dieses Feld präzediert und somit seine Ausrichtung ändert. Das macht es möglich die Ausrichtung der Spins festzulegen. Dabei ist aber das Argument von oben zu beachten, dass bei Weitem nicht alle Spins diese Ausrichtung zeigen werden. Ein solch zeitlich änderliches Magnetfeld lässt sich zum Beispiel durch einstrahlen einer elektromagnetischen Welle erreichen, wenn diese die richtige Frequenz hat. Das heisst der Mechanismus der Kernspinresonanz liegt in

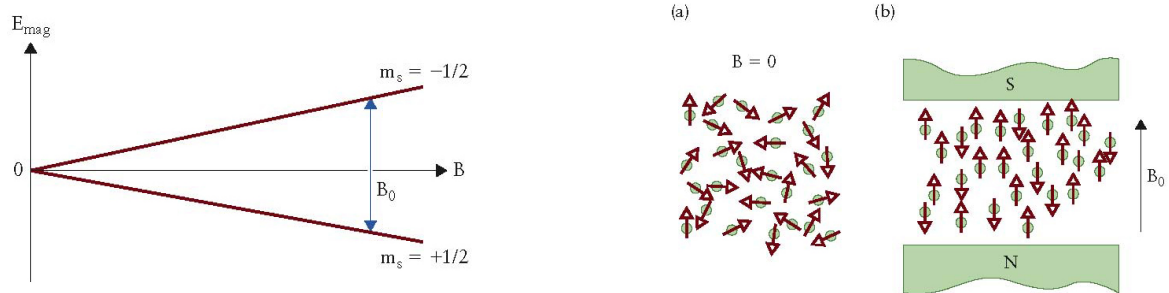


Abbildung 10.133: Links: Die Abhängigkeit der Dipolwechselwirkungsenergie vom angelegten Feld. Je nachdem ob die magnetischen Momente parallel oder antiparallel zum Feld stehen ergibt sich eine positive oder negative Energie. Um von einem Zustand zum anderen zu kommen, braucht es die Differenzenergie. Rechts: Die Situation der Ausrichtung der Momente im Magnetfeld. Ohne Feld sind alle Momente willkürlich ausgerichtet, in einem Feld ist ein kleiner Prozentsatz der Momente parallel zum Feld ausgerichtet.

der resonanten Absorption von Radiowellen (siehe die Frequenz oben) durch in einem starken Magnetfeld ausgerichtete Kernspins. Diese Resonanz ist sehr eng, da die Dämpfung im Kern sehr gering ist. Das heißt man kann durch genaue Messung der Resonanzfrequenz mit sehr hoher Genauigkeit das Magnetfeld an der Stelle eines Kernspins bestimmen. Diese höchst genaue Messung des lokalen Magnetfeldes ist die eigentliche Methode der Kernspinresonanz.

Hier gibt es nun zwei gängige Methoden um die Frequenz genau zu messen. Die erste besteht darin, die Frequenz der eingestrahlten Radiowellen zu verändern und die Transmission dieser Radiowellen durch die Probe zu messen. Bei der Resonanzfrequenz tritt Absorption auf und die Transmission wird entsprechend kleiner. Wenn man schon ziemlich genau weiß bei welcher Frequenz die Resonanz ist, kann man auch einen Puls der richtigen Länge anlegen um die Spins senkrecht zum Hauptfeld auszurichten. Diese werden dann mit der Larmor-Frequenz präzedieren, was zu einer periodischen Änderung der Magnetisierung der Probe in dieser Ebene führt. Wenn man nun die zeitliche Änderung dieser Magnetisierung misst und die Fourier-Transformation bestimmt erhält man direkt ein Maß für die Larmor-Frequenz und damit des lokalen Magnetfeldes. Wenn mehrere lokale Magnetfelder vorhanden sind, ist diese Methode meist aussagekräftiger als diejenige der Absorptions-Spektroskopie. Heutzutage wird denn auch fast nur noch die zweite Methode verwendet.

10.4.2 Spektroskopie

Wir haben uns bisher überlegt, dass wir NMR gut dazu benutzen können um Magnetfelder in einem Körper zu messen. Dies wird nun in der Spektroskopie dazu verwendet um genaue Informationen über das Molekül selber zu erhalten. Die Grundideen hiervon wollen wir uns nun kurz anschauen. Wie wir oben gesehen haben, ist es mit Hilfe der Kernspinresonanz möglich das lokale Magnetfeld an der Stelle eines Kernes sehr genau zu messen. Die Genauigkeit ist eigentlich nur durch die Homogenität des angelegten Feldes bestimmt. Das lässt sich daraus sehen, dass wenn wir nur schon eine Sekunde die Oszillation der Präzession zählen, wir auf etwa 100 Millionen zählen und damit eine statistische Genauigkeit der Frequenz von 10^{-4} erhalten. Bei einer solchen

Genauigkeit gibt es verschiedene Einflüsse auf das lokale Magnetfeld, die wesentlich sein können. Am direktesten sind die durch die elektronischen Eigenschaften der Atomhülle gegebenen. Da

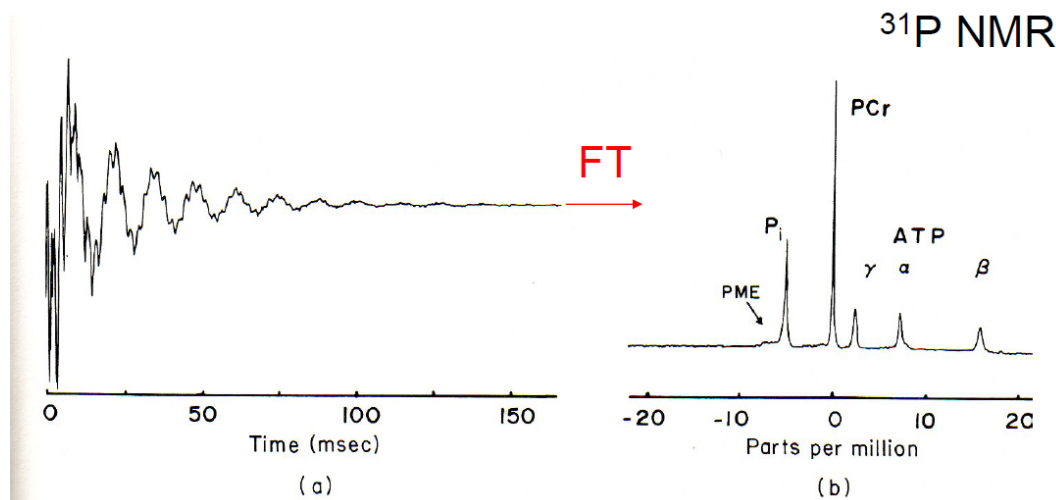


Abbildung 10.134: Schematische Darstellung eines NMR-Spektrums, das die chemische Verschiebung der einzelnen Unterteile eines ATP Moleküls zeigt. Links ist die zugehörige Oszillation der Magnetisierung gezeigt. Das Spektrum ergibt sich mit Hilfe einer Fourier-Transformation.

die Elektronen in der Atomhülle ja bewegte Ladungen sind, erfahren sie durch ein angelegtes Magnetfeld eine Lorentz-Kraft, was wiederum die Bahn der Elektronen ändert. Das ist eine Änderung eines Kreisstromes und damit eine Änderung in einem Magnetfeld. Diese wirkt sich auch auf das lokale Feld am Kern aus. Je nach der Bahn der Elektronen ergibt sich natürlich eine andere Änderung des lokalen Feldes und diese kleine Änderung (typischerweise nicht mehr als 10^{-5} wird als chemische Verschiebung in einem NMR-Spektrometer gemessen und stellt einen Fingerabdruck eines Stoffes dar. Die chemische Verschiebung wird normalerweise als $\delta = \frac{\omega - \omega_{ext}}{\omega_{ext}}$ angegeben und in ppm (part per million, also 10^{-6}) gemessen.

Wie gesagt verlangt die Bestimmung der chemischen Verschiebung eine extrem genaue Messung des lokalen Magnetfeldes, was durch die Frequenzmessung in der NMR möglich wird. Dazu ist es allerdings nötig ein extern angelegtes Magnetfeld zu kreieren, das sich über die Probe um weniger als die chemische Verschiebung ändert, sonst würde eine Änderung im Magnetfeld mit Verschiebung verwechselt. Über ein Probenvolumen von etwa 1 mm bis 1 cm darf sich das angelegte Magnetfeld also um weniger als einen Millionstel ändern!

Für kompliziertere Molekularstrukturen, können die verschiedenen chemischen Verschiebungen nicht mehr getrennt werden und spezialisierte Verfahren werden nötig, in denen die Zeitentwicklung der Kernspins weiter betrachtet wird und damit Korrelationen zwischen verschiedenen Teilen mit ähnlicher chemischer Verschiebung unterschieden werden. Dies wird unter dem Stichwort mehrdimensionale NMR Spektroskopie behandelt und sprengt den Rahmen unserer Vorlesung.

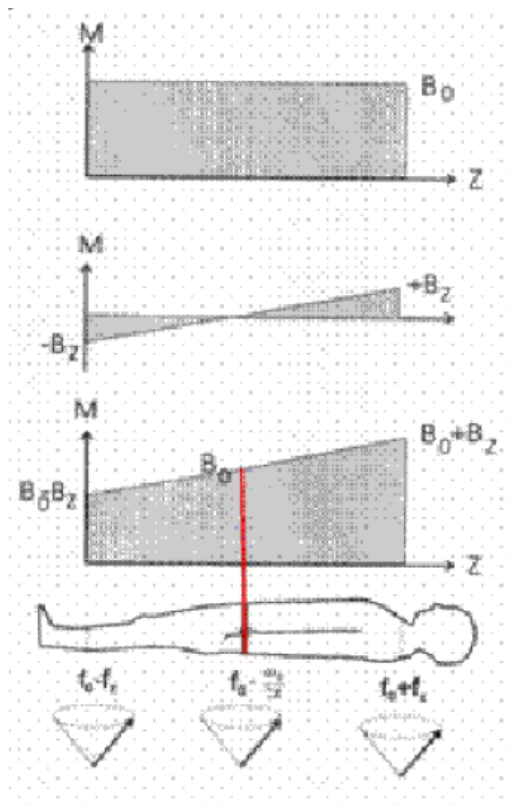


Abbildung 10.135: Schematische Erklärung zur NMR-Tomographie. Durch anlegen eines Gradientenfeldes $B(z) = B_0 + \frac{\partial B}{\partial z}z$ in der Hauptrichtung (z), werden nur Kerne in einem spezifischen Abstand vom Ursprung resonant angeregt durch einen Radiopuls der Frequenz $\omega = \gamma B(z)$. Das heisst nur diese Kerne werden in die $x-y$ Ebene gebracht durch Anlegen eines $\pi/2$ Pulses. Nur diese Kerne ergeben somit ein oszillierendes Signal $M(t)$ in der Magnetisierung. Damit ist die räumliche Information in der z -Richtung in eine Bestimmung einer anzulegenden Frequenz umgewandelt worden.

10.4.3 Tomographie

Die wohl bekannteste Anwendung der NMR ist die bildgebende Tomographie. Diese basiert zwar ebenso wie die oben behandelte Spektroskopie auf der resonanten Absorption von Radiowellen durch Kernspins in einem Magnetfeld, die räumliche Auflösung wird aber mit ganz anderen Mitteln erreicht. Anders als in der Spektroskopie wird in der Tomographie ein räumlich veränderliches Magnetfeld angelegt. Die Änderung im Raum muss nun zwingend grösser sein als die chemische Verschiebung, was die Auflösung begrenzt. Dadurch, dass ein veränderliches Feld angelegt wird, gehört nun zu jedem Ort entlang dieses Hauptfeldes eine bestimmte Resonanzfrequenz. Kerne welche mit dieser Frequenz präzedieren kommen von diesem Ort. Die Dichte an Kernen wird dann als bildgebender Kontrast verwendet.

Das Grundprinzip der NMR-Tomographie ist es also die räumliche Information in eine spektrale umzuwandeln. Das Anlegen eines Gradientenfeldes bewirkt, dass nur mit einer spezifischen $x-y$ Ebene an Spins gearbeitet wird, die in einem Bestimmten Abstand auf der z -Achse liegen. Die Tomographie gibt aber dreidimensionale Informationen, die x und y Richtungen müssen also auch noch irgendwie in spektrale Eigenschaften umgewandelt werden. Da nach dem Anlegen des ersten $\pi/2$ Pulses nur eine Schicht an Spins in der $x-y$ Ebene präzediert kann nun eine Gradientenfeld in der x Richtung angelegt werden, was zu unterschiedlichen Präzessions-Frequenzen in dieser Richtung führt. Wird dies nur für eine kurze Zeit gemacht ändert sich nicht die Frequenz, sondern die Phase der Oszillation (d.h. die Richtung des Spins zu einer bestimmten Zeit die als Zeit-Nullpunkt betrachtet wird). Zu guter Letzt wird noch in der y -Richtung ein Gradientenfeld

angelegt, wodurch sich die Frequenz der Oszillation nun zu einer y -Information wandelt.

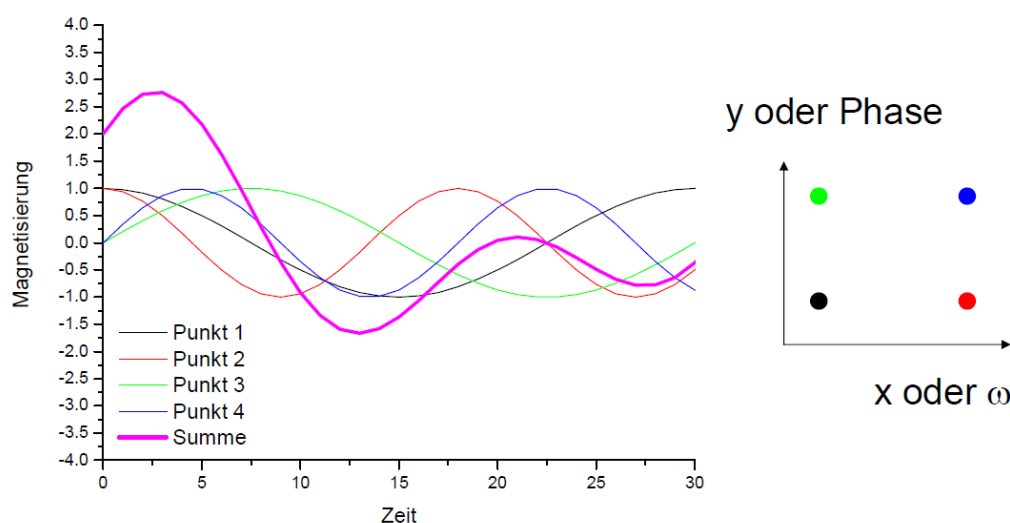


Abbildung 10.136: Schematische Darstellung der räumlichen Information aus der Ebene in der NMR-Tomographie. Die Summe der Signale von vier verschiedenen Punkten (an vier verschiedenen Orten) mit Frequenz und Phasen-Kodierung wird gemessen, die zugehörige zweidimensionale Fouriertransformation ergibt die Dichte der Kerne in der Ebene.

Zusammenfassend heisst das also für ein Tomographie-Experiment: Grundsätzlich liegt das Hauptfeld als Gradientenfeld an. Ein erster $\pi/2$ Puls bei einer bestimmten Frequenz legt die Spins einer Schicht in die $x - y$ Ebene. Kurzzeitiges Anlegen eines Gradientenfeldes in der x -Richtung ändert die Phase der Oszillation in Abhängigkeit vom x Abstand. Schliesslich anlegen eines Gradientenfeldes in y -Richtung und messen der Oszillation der Magnetisierung in der $x - y$ Ebene ergibt ein Spektrum, dessen Frequenz und Phaseninformation durch eine Fourier-Transformation zu einem zweidimensionalen Dichtebild der Schicht führt in der die Spins durch den ersten Puls in die Ebene gelegt wurden. Das ist in Fig. 10.136 illustriert.

10.5 Zeitabhängige magnetische Felder: Das Faraday'sche Induktionsgesetz

Das Induktionsgesetz hat zwar keine Anwendungen in der Biologie, die Natur scheint es noch nicht entdeckt zu haben, aber in der technologischen Anwendung ist nichts in der heutigen Welt denkbar ohne Kenntnis des Induktionsgesetzes. Jegliche Stromproduktion, sowie Kommunikation mittels elektromagnetischer Wellen ist ohne Induktion undenkbar. Das Induktionsgesetz wurde 1831 von Michael Faraday entdeckt, der von 1791 bis 1867 lebte. Faraday hatte keine reguläre wissenschaftliche Ausbildung, sondern arbeitete als Buchbinderlehrling, Chemielaborant. Nichtsdestotrotz wird er oft als der bedeutendste Experimentator aller Zeiten gefeiert. Schliesslich geht nicht nur das Induktionsgesetz, aber auch das Verständnis von Elektrolyse, Dielektrika, magnetischen Materialien, Polarisationsdrehung des Lichtes im Magnetfeld und vieles andere auf ihn zurück.

10.5.1 Phänomenologie der Induktion

Beobachtung: Wir messen die elektrische Spannung an einer Drahtspule. Sie ist von null verschieden,

1. wenn sich das Magnetfeld zeitlich ändert.
2. wenn sich die Grösse der Fläche ändert, die von der Spule umrandet wird
3. wenn sich die Richtung der Fläche zu den Feldlinien ändert.

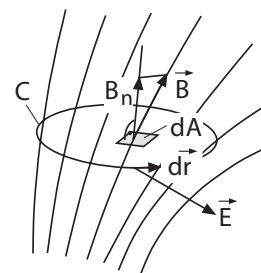
Wir definieren den magnetischen Feldfluss durch die Fläche A_C der Spule

$$\Phi_{\text{magn}} = \int_{A_C} \vec{B} d\vec{A}$$

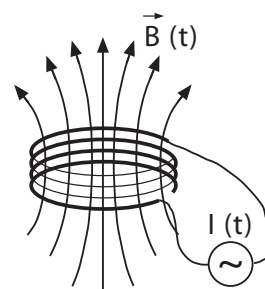
(anschaulich die Anzahl Feldlinien, die durch die Fläche gehen.) Offenbar erzeugt eine zeitliche Änderung des magnetischen Flusses ein elektrisches Feld. Dies wird im Folgenden noch etwas illustriert:

Der magnetische Fluss $d\Phi_{\text{magn}}/dt$ ändert sich, wenn

- das Feld zeitabhängig ist ($\vec{B} = \vec{B}(t)$, auch bei konstanter Fläche),
- sich die Fläche ändert ($A = A(t)$, auch wenn das Feld konstant ist),
- sich die Stellung der Fläche relative zum Feld ändert ($\phi = \phi(t)$, ϕ ist Winkel zwischen der Flächennormalen und \vec{B} , auch wenn A und \vec{B} konstant sind).



Ein zeitlich veränderliches Magnetfeld erzeugt man z. B. in dem man einen zeitlich variablen Strom durch eine Spule schickt. Umgekehrt registriert eine Spule, die einem zeitlich variablen Magnetfeld ausgesetzt wird, eine zeitabhängige, induzierte elektromotorische Kraft und damit einen zeitabhängigen Spulenstrom. So kann man z. B. die in Fernsehgeräten, oder anderen elektronischen Apparaten erzeugten Wechselfelder mit dem in einer *Pickup-Spule* induzierten Signal sichtbar machen.



Wenn man einen Stabmagneten auf eine Leiterschleife zu bewegt, vergrößert man den magnetischen Fluss durch die Schleife. Dies induziert einen Strom im Leiter. Die **Lenz'sche Regel** besagt, dass die induzierte Wirkung sich der äusseren widersetzt (sonst gäbe es ein perpetuum mobile).

Dies sieht man an den nebenstehenden Abbildungen. Die Richtung des induzierten Stroms ist so, dass das durch diesen Strom erzeugte Feld eine entgegengesetzte Polarität wie das äussere Feld hat. Dies bewirkt einerseits eine abstossende Kraft, die die Bewegung des Magneten auf die Schlaufe hin bremst, zum anderen eine Reduktion der durch das Bewegen entstehenden Flussänderung. Statt den Stabmagneten auf die Schlaufe hin zu bewegen, kann man auch die Schlaufe in das Magnetfeld hinein- und herausziehen, um eine Änderung der vom Magnetfeld durchsetzten Fläche zu erreichen. Je mehr Windungen man der Schlaufe gibt, desto grösser sind die induzierten Ströme. Die Flussänderung vervielfacht sich mit der Anzahl Windungen.

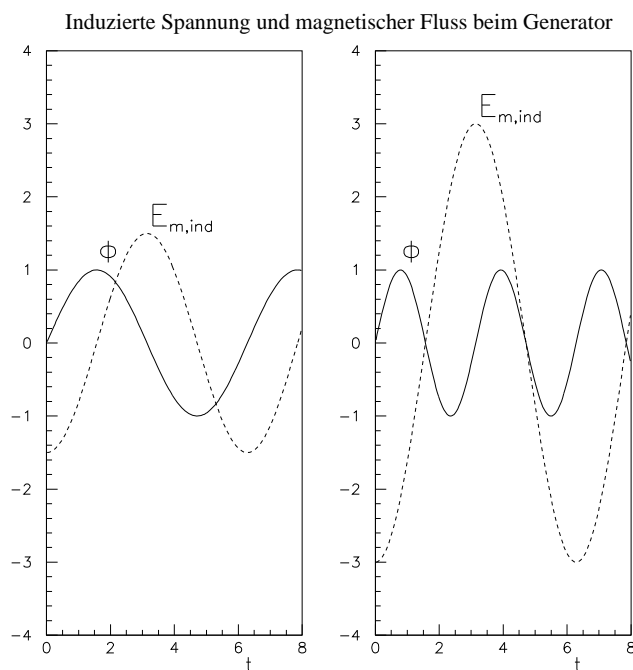
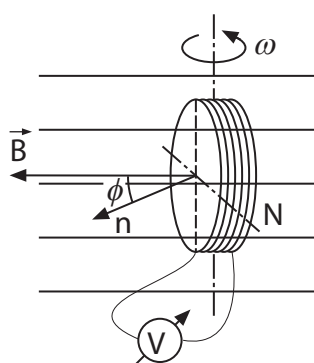
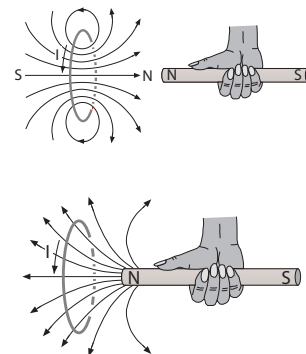


Abbildung 10.137: Wechselstromgenerator: Die Drehung einer Spule in einem Magnetfeld mit konstanter Winkelgeschwindigkeit erzeugt eine induzierte elektromotorische Kraft in der Spule. Die Amplitude der Wechselspannung nimmt mit der Drehzahl zu. In diesem Beispiel beginnt die Drehung mit der Spulenfläche parallel zum Feld.

10.5.2 Das Faraday'sche Induktionsgesetz

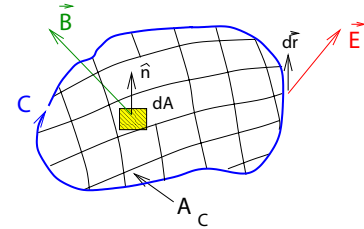
Die obigen phänomenologischen Betrachtungen werden im Induktionsgesetz von Faraday zusammengefasst. Es bildet die vierte der Maxwell-Gleichungen.

$$\text{Faraday'sches Induktionsgesetz: } V_{ind} = -\frac{d\Phi_{magn}}{dt}$$

Auf der rechten Seite steht die *zeitliche Änderung des magnetischen Flusses* Φ_{magn} durch die von C umrandete Oberfläche A_C mit dem negativen Vorzeichen. Auf der linken Seite die in dem die Fläche umrandende Leiterschleife gemessene Spannung, wenn man die Leiterschleife an einer Stelle auftrennt.

Etwas allgemeiner schreibt man für die Spannung (=Potentialdifferenz) deren Definition: $V = \int_C \vec{E} d\vec{r}$. Mit der Definition des magnetischen Flusses wird das Induktionsgesetz zu:

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = -\frac{d}{dt} \int_{A_C} \vec{B} d\vec{A}$$



Die rechte Seite des Faraday'schen Induktionsgesetzes ist dann von Null verschieden, wenn sich der Fluss ändert, d. h. wenn \vec{B} zeitabhängig ist, sich die Fläche A_C ändert, oder sich die Stellung der Fläche relativ zum Feld ändert.

Es gibt hier einen wichtigen Unterschied zur Elektrostatik: Für die durch elektrische Ladungen erzeugten Felder gilt

$$\oint_C \vec{E} d\vec{r} = 0$$

Das Linienintegral des elektrischen Feldes entlang eines geschlossenen Weges C , der die Oberfläche A_C begrenzt, verschwindet. Das Feld ist konservativ. Diese Eigenschaft der von Ladungen erzeugten Felder erlaubt uns, das elektrische Potential überall zu definieren.

Im Gegensatz dazu sind durch Induktion erzeugte elektrische Felder nicht konservativ. Das Linienintegral $\oint_C \vec{E} d\vec{r}$ entlang der Umrandung der Leiterschleife ist nicht mehr null. V_{ind} kann man deshalb nur messen, wenn man die Leiterschleife an einer Stelle auftrennt. Diese Eigenschaft kann auch zu sehr kontra-intuitiven Effekten führen bei denen die gemessene Spannung vom gewählten Weg abhängt.

Dafür sind die so erzeugten elektrischen Feldlinien immer geschlossen. Das durch den magnetischen Fluss induzierte elektrische Feld ist ein Wirbelfeld.

Das elektrische Feld besteht im allgemeinen also aus zwei Anteilen:

1. von Ladungen erzeugter Teil. Dessen Feldlinien beginnen und enden immer an Ladungen. Sie sind nie geschlossen. Das Feld ist konservativ, das Potential wohldefiniert. Quantitativ wird es durch den Gauss'schen Satz der Elektrostatik bestimmt.
2. von magnetischer Induktion erzeugter Teil: Dessen Feldlinien sind immer geschlossen, sie haben kein Anfang oder Ende, das Feld ist ein Wirbelfeld. Quantitativ wird dieses Feld durch das Induktionsgesetz von Faraday bestimmt.

Die elektrischen Felder in 2. haben die gleichen Eigenschaften wie magnetische Feldlinien!

10.5.3 Anwendungen des Faraday'schen Induktionsgesetzes

10.5.3.1 Wechselstromgenerator

Beim Wechselstromgenerator (Abbildung 10.137) ändert sich der Winkel zwischen der Feld und der Spulenrichtung. Mit einem mechanischen Antrieb wird die Spule gedreht. Ist die Winkelgeschwindigkeit konstant, so gilt

$$\phi = \omega t, \quad \Phi_{\text{magn}} = NAB \cos \phi = NAB \cos \omega t,$$

wobei B das über die Spulenfläche konstante Magnetfeld und N die Zahl der Spulenwindungen ist. Die am Voltmeter ablesbare induzierte Spannung ist dann

$$V = -\frac{d\Phi_{\text{magn}}}{dt} = \omega NAB \sin \omega t$$

Wegen des induzierten Stroms wirkt im Magnetfeld auf die Spule eine abbremssende Lorentz-Kraft (Lenz !). Dieses Abbremsen muss durch die Antriebskraft aufgewogen werden. Die entsprechende mechanische Arbeit entspricht abgesehen von den Reibungsverlusten in den Lagern der Energie, die in Form von Joule'scher Wärme im externen Kreis verloren geht.

10.5.3.2 Wirbelströme:

Bewegen sich Leiter in *inhomogenen* Magnetfeldern, so werden Wirbelströme induziert. Die Lorentz-Kräfte auf diese Ströme bremsen die Bewegung ab. Im Hörsaal wird dies mit Münzen demonstriert, die in Magnetfelder fallen, bzw. mit einem Kupferpendel, das durch ein Feld schwingt. Je besser die Leitfähigkeit des Materials ist, umso grösser ist die Bremswirkung. Abbildung 10.138 illustriert die Bremswirkung an einem Beispiel. Man benützt derartige Effekte zur Dämpfung schwingender Systeme, oder allgemein als Bremsen.

10.5.3.3 Gegenseitige Induktion zweier Stromkreise

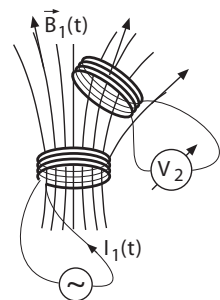
Wenn in einem ersten Stromkreis ein veränderlicher Strom $I_1(t)$ fließt, dann kann das dadurch entstandene Magnetfeld $\vec{B}_1(t)$ in einem zweiten Leiterkreis, den dieses Feld durchsetzt, einen Strom induzieren.

Die induzierte Spannung V_2 lässt sich aus der Flussänderung $d\Phi_{12}(t)/dt$ des Feldes $\vec{B}_1(t)$ in der Schleufe 2 berechnen:

$$I_1(t) \rightarrow \vec{B}_1(t) \rightarrow \Phi_{12}(t) \rightarrow U_{m,2}.$$

Bei fester gegenseitiger Lage der Stromkreise ist Φ_{12} proportional zu B_1 und damit zu I_1 :

$$\Phi_{12} = L_{12}I_1, \Rightarrow V_2 = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L_{12}\frac{dI_1}{dt}.$$



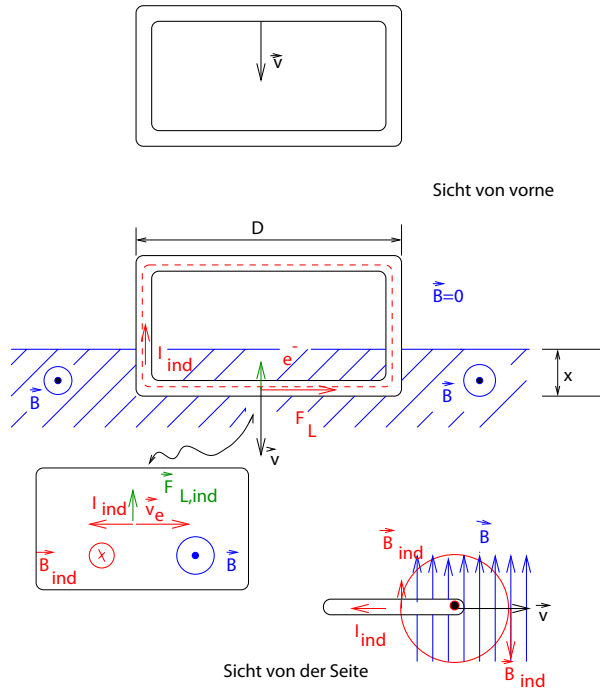


Abbildung 10.138: Das Prinzip der Wirbelstrombremse: Beim Eintauchen des Metallrings in das Magnetfeld (\vec{B}) setzt die Lorentz-Kraft (\vec{F}_L) die Leiterelektronen in Bewegung (\vec{v}_e), induziert also einen Strom (I_{ind}). Auf diesen Strom wirkt eine abbremssende Lorentzkraft ($\vec{F}_{L,ind}$), die das Fallen des Rings verlangsamt. Das vom induzierten Strom erzeugte Feld \vec{B}_{ind} reduziert das äussere Feld.

$$\frac{d\Phi_{magn}}{dt} = BD \frac{dx}{dt} = -V_{ind}$$

Der Proportionalitätsfaktor L_{12} , der nur von geometrischen Grössen (gegenseitige Lage, Fläche und Windungszahl der Schleifen) abhängt, heisst Koeffizient der gegenseitigen Induktion und wird angegeben in der Einheit:

$$[L_{12}] = \text{Henry} = \text{H} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} .$$

Für einfache Geometrien lässt sich L_{12} berechnen. Man erhält z. B. für zwei konzentrisch gewickelte, lange Spulen gleicher Fläche mit den Längen ℓ_1 und ℓ_2 ($\ell_1 \geq \ell_2$) mit N_1 und N_2 Windungen:

$$I_1 \rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell_1} \rightarrow \Phi_{12} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell_1} N_2 A = L_{12} I_1 , \Rightarrow U_{m,2} = -\frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell_1} \frac{dI_1}{dt} .$$

Man findet also

$$L_{12} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 A}{\ell_1}$$

Vertauschen wir die Rolle der beiden Spulen, d. h. fliesst in der zweiten Spule der Strom $I_2(t)$, so messen wir in der ersten Spule entsprechend

$$U_{m,1} = -L_{21} \frac{dI_2}{dt} = -\frac{\mu_0 N_2 N_1}{\ell_2} A \frac{\ell_2}{\ell_1} \frac{dI_2}{dt} .$$

Der Faktor ℓ_2/ℓ_1 rührt daher, dass das B_2 -Feld, wenn ℓ_2 kürzer ist als ℓ_1 , nur den Bruchteil ℓ_2/ℓ_1 der N_1 Windungen der ersten Spule durchfliesst. Es ergibt sich so $L_{12} = L_{21}$, eine Beziehung, die unabhängig von diesem Beispiel allgemein gültig ist. Der Koeffizient L_{12} zweier Spulen ist umso grösser, je stärker die Kopplung ist, d. h. je grösser der Fluss Φ_{12} ist, was z. B. mit einem gemeinsamen Eisenkern erreicht wird (z. B. in Transformatoren).

10.5.3.4 Die Selbstinduktion

Was oben für die Kopplung zweier Stromkreise gesagt wurde, gilt auch für einen ausgedehnten Einzelkreis, oder eine Spule. Der Fluss Φ_{11} des Feldes B_1 durchsetzt auch den erzeugenden Kreis selbst und führt dort zu einer Spannung V_1 :

$$I_1(t) \rightarrow B_1(t) \rightarrow \Phi_{11}(t) \rightarrow U_{m,1}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell_1} \Rightarrow \Phi_{11} = \frac{\mu_0 N_1 I_1}{\ell_1} N_1 A = L_{11} I_1 \Rightarrow U_{m,1} = -L_{11} \frac{dI_1}{dt} .$$

Der Faktor $L_{11} \equiv L$ heisst *Selbstinduktionskoeffizient* [Henry]. Für die gezeichnete Spule gilt $L = (\mu_0 N_1^2 A) / \ell_1$. Dieser Wert kann bedeutend vergrößert werden, wenn die Spule auf einen Eisenkern gewickelt wird.

