Proof. $a, b \in \mathbb{R}$ とする．ある数 $r \in \mathbb{R}$ について,n 桁目まで等しい有限小数を $\overline{r}$ とする．また,$r = \overline{r} + \varepsilon_r$ を満たす ε_r を取る. すると以下の条件を満たす.

$$\frac{1}{2}r = \begin{cases} \frac{1}{2}\overline{r} + \frac{1}{2}\varepsilon_r (r \text{ の } n \text{ 桁目が偶数}) \\ \frac{1}{2}\overline{r} + 5 \times 10^{-(n+1)} + \frac{1}{2}\varepsilon_r (r \text{ の } n \text{ 桁目が奇数}) \end{cases}$$

ここで,

$$\frac{1}{2}\overline{r} = \begin{cases} \overline{\frac{1}{2}r} (\overline{r}\text{の } n \text{ 桁目が偶数}) \\ \overline{\frac{1}{2}r} + 5 \times 10^{-(n+1)} (\overline{r}\text{の } n \text{ 桁目が奇数}) \end{cases}$$

が言える. また,$a, b \in \mathbb{R}$ について

①a, b の n 桁目が共に偶数のとき

$\overline{a}, \overline{b}$ の n 桁目も偶数であるから,

$$\left|\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \overline{(\frac{1}{2}\overline{a} + \frac{1}{2}\overline{b})}\right| = \left|\frac{\overline{a}}{2} + \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\overline{b}}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} - \overline{\frac{\overline{a}}{2} + \frac{\overline{b}}{2}}\right| \tag{1}$$

$$= \left|\overline{\frac{\overline{a}}{2} + \frac{\overline{b}}{2}} + \frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2} - \overline{\frac{\overline{a}}{2} + \frac{\overline{b}}{2}}\right| \tag{2}$$

$$= \left|\frac{\varepsilon_a}{2} + \frac{\varepsilon_b}{2}\right| \tag{3}$$

㋐$\varepsilon_a < \varepsilon_b$ のとき

$$a + \frac{1}{2}(b - a) = \overline{a} + \varepsilon_a + \frac{1}{2}(\overline{b} + \varepsilon_b - \overline{a} - \varepsilon_a) \tag{4}$$

$$= \overline{a} + \varepsilon_a + \frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a}) + \frac{1}{2}\varepsilon_b - \frac{1}{2}\varepsilon_a \tag{5}$$

$$= \overline{a} + \varepsilon_a + \frac{1}{2}\overline{(\overline{b} - \overline{a})} + \frac{1}{2}\varepsilon_b - \frac{1}{2}\varepsilon_a \tag{6}$$

$$= \overline{a} + \overline{\frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a})} + \frac{1}{2}\varepsilon_b + \frac{1}{2}\varepsilon_a \tag{7}$$

$$= \overline{\overline{a} + \overline{\frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a})}} + \frac{1}{2}\varepsilon_b + \frac{1}{2}\varepsilon_a \tag{8}$$

だから

$$\left|a + \frac{1}{2}(b - a) - \overline{(\overline{a} + \frac{1}{2}(\overline{b} - \overline{a}))}\right| = \left|\frac{1}{2}\varepsilon_b + \frac{1}{2}\varepsilon_a\right| \tag{9}$$

が成り立つから,(3),(9) より, 数値誤差は等しい.

い $\varepsilon_a > \varepsilon_b$ のとき

$$a + \frac{1}{2}(b-a) = \overline{a} + \varepsilon_a + \frac{1}{2}(\overline{(b - 1.0 \times 10^{-n})} + 1.0 \times 10^{-n} + \varepsilon_b - \overline{a} - \varepsilon_a) \tag{10}$$

$$= \overline{a} + \varepsilon_a + \frac{1}{2}(\bar{b} - \overline{a}) + \frac{1}{2}\varepsilon_b - \frac{1}{2}\varepsilon_a \tag{11}$$

$$= \overline{a} + \varepsilon_a + \frac{1}{2}\overline{(\bar{b} - \overline{a})} + \frac{1}{2}\varepsilon_b - \frac{1}{2}\varepsilon_a \tag{12}$$

$$= \overline{a} + \overline{\frac{1}{2}(\bar{b} - \overline{a})} + \frac{1}{2}\varepsilon_b + \frac{1}{2}\varepsilon_a \tag{13}$$

$$= \overline{\overline{a} + \overline{\frac{1}{2}(\bar{b} - \overline{a})}} + \frac{1}{2}\varepsilon_b + \frac{1}{2}\varepsilon_a \tag{14}$$

② ③ ④ □