厦门大学《高等代数》课程试卷

数学科学学院 各 系 2010 年级 各 专业

主考教师：杜妮、林鹭　试卷类型：（A 卷）　2011.1.13

一、　单选题（32 分. 共 8 题, 每题 4 分）

1)　设b为 3 维行向量，$V=\{(x_1,x_2,x_3)\,|\,(x_1,x_2,x_3)=b\}$，则____。C

A) 对任意的b，V 均是线性空间；　B) 对任意的b，V 均不是线性空间；

C) 只有当$b=0$时，V 是线性空间；　D) 只有当$b\neq 0$时，V 是线性空间。

2)　已知向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s$ 可以由向量组 II：$\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_t$ 线性表示，则下列叙述正确的是____。

A

A) 若向量组 I 线性无关，则$s\le t$；　B) 若向量组 I 线性相关，则$s>t$；

C) 若向量组 II 线性无关，则$s\le t$；　D) 若向量组 II 线性相关，则$s>t$。

3)　设非齐次线性方程组$AX=\beta$中未定元个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 A 的秩为 r，则____。

D

A) 当$r<n$时，方程组$AX=\beta$有无穷多解；　B) 当$r=n$时，方程组$AX=\beta$有唯一解；

C) 当$r<m$时，方程组$AX=\beta$有解；　D) 当$r=m$时，方程组$AX=\beta$有解。

4)　设A是$m\times n$阶矩阵，B是$n\times m$阶矩阵，且$AB=I$，则____。A

A) $r(A)=m, r(B)=m$；　B) $r(A)=m, r(B)=n$；

C) $r(A)=n, r(B)=m$；　D) $r(A)=n, r(B)=n$。

5)　设 K 上 3 维线性空间 V 上的线性变换φ在基ξ_1,ξ_2,ξ_3下的表示矩阵是$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$，则$\varphi$在基$\xi_1,2\xi_2,\xi_3$下的表示矩阵是____。C

A) $\begin{pmatrix}1&2&1\\2&0&2\\1&2&1\end{pmatrix}$；　B) $\begin{pmatrix}1&\frac12&1\\\frac12&0&\frac12\\1&\frac12&1\end{pmatrix}$；　C) $\begin{pmatrix}1&2&1\\\frac12&0&\frac12\\1&2&1\end{pmatrix}$；　D) $\begin{pmatrix}1&\frac12&1\\2&0&2\\1&\frac12&1\end{pmatrix}$。

6)　设φ是 V 到 U 的线性映射，$\dim V=n,\dim U=m$。若$m<n$，则φ____。B

A) 必是单射；　B) 必非单射；　C) 必是满射；　D) 必非满射。

7) 设 V、U、W 是数域 K 上的线性空间，又设 φ、ψ、γ 是都是 V 上的线性变换，则下列结论正确的有____个。B

① $\mathrm{Ker}(\varphi+\psi)\subseteq\mathrm{Ker}\varphi+\mathrm{Ker}\psi$；　② $\mathrm{Im}(\varphi+\psi)\subseteq\mathrm{Im}\varphi+\mathrm{Im}\psi$；

③ $\mathrm{Ker}\varphi\subseteq\mathrm{Ker}(\gamma\varphi)$；　④ $\mathrm{Im}\varphi\subseteq\mathrm{Im}(\varphi\gamma)$。

A) 1；　B) 2；　C) 3；　D) 4。

8) 与数域K 上的线性空间 $\mathrm{V}=\{(a,b)\,|\,a,b\in\mathrm{K}\}$ 同构的线性空间有____个。C

① $\mathrm{W}=\{(a-b,a+b)\,|\,a,b\in\mathrm{K}\}$；　② $\mathrm{W}=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{pmatrix}\middle|\, a,b\in\mathrm{K}\right\}$；

③ $\mathrm{W}=\left\{(a+b,a+b)\,|\,a,b\in\mathrm{K}\right\}$；　④ $\mathrm{W}=\left\{(a,a,b)\,|\,a,b\in\mathrm{K}\right\}$

A) 1；　B) 2；　C) 3；　D) 4。

二、 填空题（32 分. 共 8 题,每题 4 分）

1) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_r$ 线性无关，$\beta_1=2\alpha_2+3\alpha_3+...+r\alpha_r$，$\beta_2=\alpha_1+3\alpha_3+...+r\alpha_r$，……，$\beta_r=\alpha_1+2\alpha_2+...+(r-1)\alpha_{r-1}$，$\beta_{r+1}=\alpha_1+2\alpha_2+...+(r-1)\alpha_{r-1}+r\alpha_r$，则 $\beta_1,\beta_2,...,\beta_{r+1}$____（选填“线性相关”，“线性无关”，“无法确定”）。线性相关

2) 设 I：$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_s$ 和 II：$\beta_1,\beta_2,...,\beta_t$ 是线性空间 V 中两个向量组，向量组 I 可由向量组 II 线性表示，且 $r(\mathrm{I})=r(\mathrm{II})$，则向量组 I 与向量组 II____（选填“必等价”，“未必等价”），s 与 t____（选填“必相等”，“未必相等”）。必等价，未必相等

3) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 都是 4 维列向量，$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$。已知齐次线性方程组 $AX=0$ 的通解是 $k(0,1,1,0)'$。以 A^* 表示 A 的伴随矩阵，则齐次线性方程组 $A^*X=0$ 解空间的维数是____，而____是它的一个基础解系。3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 或 $\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$

4) 设 n 元齐次线性方程组 $Ax=0$ 和 $Bx=0$ 分别有 l,m 个线性无关解向量，且 $l+m>n$，则 $(A+B)x=0$____（选填“必有”，“未必有”）非零解。必有

5) 设 $\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$，$\{\eta_1,\eta_2,...,\eta_n\}$ 是 V 的两组基，$(\eta_1,\eta_2,...,\eta_n)=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)P$。又若 V 中向量 α 在基 $\{\eta_1,\eta_2,...,\eta_n\}$ 下的坐标向量是 X，则 α 在基 $\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$ 下的坐标向量是____。PX

6) 设 V_1，V_2 都是 n 维线性空间 V 的子空间，且 $\dim(V_1+V_2)=\dim V_1+1$，则 $\dim V_2-\dim(V_1\bigcap V_2)=$____。1

7) 设 φ 是 V 到 U 的线性映射，且 $\varphi(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\eta_1,\eta_2)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，其中 $\{\xi_1,\xi_2,\xi_3\}$，$\{\eta_1,\eta_2\}$ 分别是 V 和 U 的一组基，则 $\mathrm{Ker}\varphi=$____，$\mathrm{Im}\varphi=$____。$L(\xi_1)$，U 或 $L(\eta_1,\eta_2)$

8) 设 $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$，由 $X\mapsto AX$ 定义了 $\mathrm{R}^{2\times1}$ 上的线性变换 φ，则 φ 的不变子空间是____。0，$\mathrm{R}^{2\times1}$

三、 (6 分) 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系。问下列向量组 $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，$2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$，$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 是否也是齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系？为什么？

解：（法一）$(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}$，$\begin{vmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}=0$，故不是基础解系。

（法二）因 $r\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}=2<3$，表明它们线性相关，故不是基础解系。

（法三）因 $\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)-(2\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3)$，故不是基础解系。

四、 (10 分) 设 φ 是数域 K 上 n 维线性空间 V 的线性变换，α 是 V 中一个向量，且满足 $\varphi^{n-1}(\alpha)\neq0$，$\varphi^n(\alpha)=0$。证明：$\alpha,\varphi(\alpha),\ldots,\varphi^{n-1}(\alpha)$ 是 V 的一组基，并求 φ 在这组基下的表示矩阵。

证明：因 $\alpha,\varphi(\alpha),\ldots,\varphi^{n-1}(\alpha)$ 的个数恰为 V 的维数，因此要证其为 V 的基，仅需证其线性无关即可。事实上，设

$$k_0\alpha+k_1\varphi(\alpha)+\ldots+k_{n-1}\varphi^{n-1}(\alpha)=0, \qquad (*)$$

将 φ^{n-1} 同时作用于（*），结合已知条件，得 $k_0\varphi^{n-1}(\alpha)=0$，又 $\varphi^{n-1}(\alpha)\neq0$，故 $k_0=0$。类似的，将 φ^{n-2}，φ^{n-3}，…，φ 作用于（*），得 $k_1=0$，$k_2=0$，…，$k_{n-2}=0$。进而 $k_{n-1}\varphi^{n-1}(\alpha)=0$，由 $\varphi^{n-1}(\alpha)\neq0$，故 $k_{n-1}=0$。

φ 在 $\alpha,\varphi(\alpha),\dots,\varphi^{n-1}(\alpha)$ 下的表示矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$。

五、 (10 分) 设 A 是 n 阶方阵且 $r(A)=r$。求证 $A^2=A$ 的充要条件是存在 $n\times r$ 矩阵 S 和 $r\times n$ 矩阵 T，使得 $A=ST$，$TS=I_r$，$r(S)=r(T)=r$。

证明：充分性。直接计算 $A^2=STST=SIT=A$。

必要性。对矩阵 A，存在可逆矩阵 P，Q 使得 $A=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q=P\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}(I_r,0)Q$。令 $S=P\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}$，$T=(I_r,0)Q$，可证 P，Q 即为所求。显然，S 和 T 分别是 $n\times r$ 矩阵和 $r\times n$ 矩阵，且因 P，Q 可逆，所以 $r(S)=r(T)=r$。下证 $TS=I_r$。由 $A^2=A$，得

$$P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q=A^2=A=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}Q。\qquad (*)$$

因 P，Q 可逆，所以

$$\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}。\qquad (**)$$

（法一）（10 级 尹思文）将（*）等式两边分别左乘 $(I_r,0)P^{-1}$，右乘 $Q^{-1}\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}$，得 $(I_r,0)QP\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}=I_r$，即 $TS=I_r$。

（法二）（10 级 李宏生，王邑良，吉子龙，夏宇静）由（**），

$$TS=(I_r,0)QP\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}=(I_r,0)\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}QP\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}=(I_r,0)\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}=I_r。$$

（法三）（**）式 $=\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}(I_r,0)QP\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}(I_r,0)=\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix}TS(I_r,0)=\begin{pmatrix} TS \\ 0\end{pmatrix}(I_r,0)=\begin{pmatrix} TS & \\ & 0\end{pmatrix}$，故 $TS=I_r$。

必要性。（法四）（10 级 李荣刚）将 A 视为线性变换 φ 在 n 维线性空间 V 的某基下的表示矩阵，由同构对应，则 $\varphi^2=\varphi$。设 φ 的秩为 r，$\{\xi_{r+1},\dots,\xi_n\}$ 是 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基，将扩成 $\{\xi_1,\dots,\xi_r,\xi_{r+1},\dots,\xi_n\}$ 为 V 的一组基，则 $\varphi(\xi_1),\dots,\varphi(\xi_r)$ 线性无关，且可证 $\{\varphi(\xi_1),\dots,\varphi(\xi_r),\xi_{r+1},\dots,\xi_n\}$ 是 V 的一组基。事实上，因为 V 的维数是 n，因此只要证明 $\{\varphi(\xi_1),\dots,\varphi(\xi_r),\xi_{r+1},\dots,\xi_n\}$ 线性无关即可。设

$$k_1\varphi(\xi_1)+\ldots+k_r\varphi(\xi_r)+k_{r+1}\xi_{r+1}+\ldots+k_n\xi_n=0,$$

将 φ 作用于式子两边，结合 $\varphi^2=\varphi$，得

$$\varphi(k_1\varphi(\xi_1)+\ldots+k_r\varphi(\xi_r)+k_{r+1}\xi_{r+1}+\ldots+k_n\xi_n)=k_1\varphi(\xi_1)+\ldots+k_r\varphi(\xi_r)=0,$$

由 $\varphi(\xi_1),\ldots,\varphi(\xi_r)$ 的线性无关性，得 $k_1=\ldots=k_r=0$，进而 $k_{r+1}=\ldots=k_n=0$。因此

$$\varphi(\varphi(\xi_1),\ldots,\varphi(\xi_r),\xi_{r+1},\ldots,\xi_n)=(\varphi(\xi_1),\ldots,\varphi(\xi_r),\xi_{r+1},\ldots,\xi_n)\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}。$$

这说明存在可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}$。令 $S=P\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix},T=(I_r,0)P^{-1}$，则 $A=ST$，$TS=I_r$，$r(S)=r(T)=r$。

（法五）（10 级 才子佳，高旸，，胡丹青，黄步跃，林琴等）因 $A^2=A$，所以存在可逆矩阵 P，使得 $A=P\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0\end{pmatrix}P^{-1}$。另 $S=P\begin{pmatrix} I_r \\ 0\end{pmatrix},T=(I_r,0)P^{-1}$，则 $A=ST$，$TS=I_r$，$r(S)=r(T)=r$。

主要错误：法二、法三中 $TS=I$ 没有证明。

六、 (10 分) 设 V 是数域 K 上 n 维线性空间，φ,σ 是 V 上线性变换，且 $\varphi^2=0$，$\sigma^2=0$，$\varphi\sigma+\sigma\varphi=id_{\mathrm{V}}$，其中 id_{V} 是 V 上恒等变换。求证：

（1） $\mathrm{V}=\mathrm{Ker}\varphi\oplus\mathrm{Ker}\sigma$；

（2）V 必是偶数维线性空间。

证明：（1）对 $\forall\alpha\in\mathrm{V}$，$\alpha=\varphi\sigma(\alpha)+\sigma\varphi(\alpha)=\beta+\gamma$。由已知 $\varphi^2=0$，$\sigma^2=0$，得 $\varphi(\beta)=\varphi^2(\sigma(\alpha))=0$，$\sigma(\gamma)=\sigma^2(\varphi(\gamma))=0$，即 $\beta\in\mathrm{Ker}\varphi$，$\gamma\in\mathrm{Ker}\sigma$。说明 $\mathrm{V}=\mathrm{Ker}\varphi+\mathrm{Ker}\sigma$。

此外，对 $\forall\alpha\in\mathrm{Ker}\varphi\bigcap\mathrm{Ker}\sigma$，$\varphi(\alpha)=0,\sigma(\alpha)=0$。由 $\varphi\sigma+\sigma\varphi=id_{\mathrm{V}}$，得 $\alpha=\varphi\sigma(\alpha)+\sigma\varphi(\alpha)=0$。说明 $\mathrm{Ker}\varphi\bigcap\mathrm{Ker}\sigma=0$。

综上，即得 $\mathrm{V}=\mathrm{Ker}\varphi\oplus\mathrm{Ker}\sigma$。

（2）（法一）设 $r(\varphi)=r$，则 $\dim\mathrm{Ker}\varphi=n-r$。由（1），若 $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r\}$ 是 $\mathrm{Ker}\sigma$ 的一组基，$\{\xi_{r+1},\xi_{r+2},\ldots,\xi_n\}$ 是 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一组基，则 $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_r,\xi_{r+1},\xi_{r+2},\ldots,\xi_n\}$ 是 V 的一组基。从而 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\ldots,\varphi(\xi_r)$ 线性无关，且由 $\varphi^2=0$，知 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),\ldots,\varphi(\xi_r)\in\mathrm{Ker}\varphi$，意味着 $r\le n-r$。同理，

$\sigma(\xi_{r+1}),\sigma(\xi_{r+2}),...,\sigma(\xi_n)$ 线性无关，且由 $\sigma^2=0$，知 $\sigma(\xi_{r+1}),\sigma(\xi_{r+2}),...,\sigma(\xi_n)\in \mathrm{Ker}\sigma$，意味着 $n-r\le r$。因此 $n-r=r$，即 $n=2r$。

（法二）（10 吴璇）设 $\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_r\}$ 是 $\mathrm{Ker}\sigma$ 的一组基，由于 $\varphi^2=0$，所以 $\varphi(\xi_i)\in \mathrm{Ker}\varphi, 1\le i\le k$。下面证明 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),...,\varphi(\xi_k)$ 线性无关。事实上，设 $c_1\varphi(\xi_1)+c_2\varphi(\xi_2)+...+c_k\varphi(\xi_k)=0$。两边同时作用 σ，则

$$c_1\sigma\varphi(\xi_1)+c_2\sigma\varphi(\xi_2)+...+c_k\sigma\varphi(\xi_k)=0 \qquad (*)$$

而 $\xi_i=\varphi\sigma(\xi_i)+\sigma\varphi(\xi_i)=\sigma\varphi(\xi_i)$，所以（*）式即为 $c_1\xi_1+c_2\xi_2+...+c_k\xi_k=0$，从而 $c_i=0, 1\le i\le k$。因此 $\varphi(\xi_1),\varphi(\xi_2),...,\varphi(\xi_k)$ 线性无关。故 $k=\dim \mathrm{Ker}\sigma\le \dim \mathrm{Ker}\varphi$。同理，$\dim \mathrm{Ker}\varphi\le \dim \mathrm{Ker}\sigma$。从而 $\dim \mathrm{Ker}\varphi=\dim \mathrm{Ker}\sigma$，则 $\dim \mathrm{V}=\dim \mathrm{Ker}\sigma+\dim \mathrm{Ker}\varphi=2k$ 为偶数。

附加题:（10 分）

设 φ，σ 是 n 维线性空间 V 上线性变换，且 $r(\varphi)+r(\sigma)\le n$。证明：存在 V 上可逆变换 τ，使得 $\varphi\tau\sigma=0$。

证明:（法一）设 $\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$ 是 V 的一组基，φ 和 σ 在该基下的表示矩阵分别是 A 和 B。

对 A,B 分别存在可逆阵 P,Q,S,T，使得 $A=P\begin{pmatrix} I_r & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}Q$，$B=S\begin{pmatrix} 0 & & \\ & I_k & \\ & & 0\end{pmatrix}T$。令 $C=Q^{-1}S^{-1}$，则 C 可逆，且 $ABC=0$。

定义 V 上线性变换 $\tau(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)C$，则 τ 可逆，且 $\varphi\tau\sigma=0$。

（法二）（10 侯晓宇，郑鹭鹏，郑鹄）如上设 $A=P\begin{pmatrix} I_p & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}Q$，$B=S\begin{pmatrix} I_q & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}T$。令

$$C=Q^{-1}\begin{pmatrix} & & I_p \\ & I_{n-p-q} & \\ I_q & & \end{pmatrix}S^{-1}。$$

（法三）（10 裴姗姗）设 $r(\varphi)=r, r(\sigma)=k$，则 $r+k\le n$，$k\le n-r$。又设 $\{\xi_{k+1},\xi_{k+2},...,\xi_n\}$ 是 $\mathrm{Ker}\sigma$ 的一组基，将其扩为 V 的一组基 $\{\xi_1,...,\xi_k,\xi_{k+1},...,\xi_n\}$，则 $\{\sigma(\xi_1),...,\sigma(\xi_k)\}$ 线性无关，记 $\eta_i=\sigma(\xi_i)$，$1\le i\le k$，将 $\{\eta_1,...,\eta_k\}$ 扩为 V 的一组基 $\{\eta_1,...,\eta_k,\eta_{k+1},...,\eta_n\}$。再设 $\{\gamma_1,...,\gamma_k,\gamma_{k+1}...,\gamma_{n-r}\}$ 是 $\mathrm{Ker}\varphi$ 的一

组基，将其扩为 V 的一组基 $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_k,\gamma_{k+1}\ldots,\gamma_{n-r},\gamma_{n-r+1},\ldots,\gamma_n\}$。定义 V 上线性变换 $\tau:\eta_i\mapsto\gamma_i$，$1\le i\le n$。则 τ 可逆，且 $\varphi\tau\sigma=0$。

（法四）（10 吴璇）设 $r(\sigma)=k$，即 $\dim\operatorname{Im}\sigma=k$。记 $\{\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_k\}$ 是 $\operatorname{Im}\sigma$ 的一组基，扩为 $\{\eta_1,\ldots,\eta_k,\eta_{k+1},\ldots,\eta_n\}$ 为 V 的一组基。

设 $r(\varphi)=r$，即 $\dim\operatorname{Im}\varphi=r$，则 $\dim\ker\varphi=n-r$。记 $\{\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-r}\}$ 是 $\ker\varphi$ 的一组基，扩为 $\{\eta_1,\ldots,\eta_{n-r},\eta_{n-r+1},\ldots,\eta_n\}$ 为 V 的一组基。

定义 V 上线性变换 $\tau:\eta_i\mapsto\xi_i,1\le i\le n$，则 τ 是 V 上可逆线性变换（因将 V 的基映射为 V 的基）。下证 $\varphi\tau\sigma=0$。

对任意 $\alpha\in V$，$\sigma(\alpha)\in\operatorname{Im}\sigma$，$\sigma(\alpha)=c_1\eta_1+c_2\eta_2+\ldots+c_k\eta_k$。因 $r(\sigma)+r(\varphi)=k+r\le n$，所以 $k\le n-r$，且 $\varphi\tau(\eta_i)=\varphi(\xi_i)0,1\le i\le k$，进而

$$\varphi\tau\sigma(\alpha)=\varphi\tau(c_1\eta_1+c_2\eta_2+\ldots+c_k\eta_k)=0。$$