化标准型

化标准型

例 1. 将下述线性规划问题化为标准型

$$\min z = 3x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 = -2 \\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0 \end{cases}$$

① 将 $\min \alpha = a$ 变成 $\max \beta = -a$

$$\max \beta = -3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 = -2 \\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0 \end{cases}$$

② 将大括号中多变量的式子都变成等式

(给不等式加上或减去某个≥0的 x_n，就能变成等式)

$$\max \beta = -3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 1,\ x_4 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 2,\ x_5 \ge 0 \\ x_1 + x_2 = -2 \\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0 \end{cases}$$

③ 使所有式子最右边的数都≥0

$$\max \beta = -3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 1,\ x_4 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 2,\ x_5 \ge 0 \\ -x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0 \end{cases}$$

④ 将大括号中单变量的式子都变成皆≥0的形式

若某变量 $x_m \le 0$，则设一个≥0的新变量 x_m'

使 $x_m' = -x_m$，这样可以将 $x_m \le 0$ 变成 $x_m' \ge 0$

$$\max \beta = -3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3' + x_4 = 1,\ x_4 \ge 0 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3' - x_5 = 2,\ x_5 \ge 0 \\ -x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 \ge 0,\ x_3' \ge 0 \longrightarrow \boxed{x_3' = -x_3,\ x_3' \ge 0} \end{cases}$$

⑤ 若某变量x_p没提到\是自由变量\是无约束变量

这说明x_p可正可负可0，则设两个≥0新变量x_p'、x_p''

使$x_p' - x_p'' = x_p$

(因为俩≥0的数相减，结果就是可正可负可0)

(比如，5−3结果为正，3−5结果为负，3−3结果为0)

x_1没提到

$x_1' - x_1'' = x_1$，$x_1' \geq 0$，$x_1'' \geq 0$

$$\max \beta = -3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1' - 2x_1'' + x_2 + 4x_3' + x_4 = 1, & x_4 \geq 0,\ x_1' \geq 0,\ x_1'' \geq 0 \\ x_1' - x_1'' + 2x_2 - 2x_3' - x_5 = 2, & x_5 \geq 0,\ x_1' \geq 0,\ x_1'' \geq 0 \\ -x_1' + x_1'' - x_2 = 2, & x_1' \geq 0,\ x_1'' \geq 0 \\ x_2 \geq 0,\ x_3' \geq 0 \end{cases}$$

⑥ 把大括号里所有单变量的式子，写到最下面一行

$$\max \beta = -3x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1' - 2x_1'' + x_2 + 4x_3' + x_4 = 1 \\ x_1' - x_1'' + 2x_2 - 2x_3' - x_5 = 2 \\ -x_1' + x_1'' - x_2 = 2 \\ x_1', x_1'', x_2, x_3', x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

单纯形法

单纯形法

用单纯形法解以下线性规划问题:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

① 将题目给出的线性规划问题化为标准型

$$\Rightarrow \max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8,\ x_3 \ge 0 \\ 4x_1 + x_4 = 16,\ x_4 \ge 0 \\ 4x_2 + x_5 = 12,\ x_5 \ge 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max z = 2x_1 + 3x_2$$ 化标准型看《第二课 化标准型》

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_4 = 16 \\ 4x_2 + x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \max z = 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$

$$s.t.\begin{cases} 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 = 8 \\ 4\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5 = 16 \\ 0\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 1\cdot x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

目标函数和大括号中的每个多变量的式子中都要包含所有变量

② 根据标准型填写初始单纯形表

① $\max z = 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$

$$s.t.\begin{cases} 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 = 8 \\ 4\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5 = 16 \\ 0\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 1\cdot x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

②

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
0	x_5	0	4	0	0	1	12	
σ_j								

c_j						b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	$\cdots$	x_n		
σ_j							

1. 列数等于变量的个数
2. 行数等于大括号中多变量的式子的个数
3. c_j行的数字根据目标函数中各变量的系数找
4. 每个变量所在列的数字根据大括号中多变量式子中该变量的系数找
5. 找出变量下方已填写数字构成的矩阵中的单位矩阵，依次将该单位矩阵对应的变量写在X_B的下面
6. 将5中找到的变量上方的数字依次写在c_B的下面
7. 将大括号中多变量式子右侧数字依次填到b下面

③找出可行解

②

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
0	x_5	0	4	0	0	1	12	
σ_j								

③ 可行解 $x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=8$，$x_4=16$，$x_5=12$

令X_B所在列的变量与b所在列的数字对应相等，再令其他变量等于0

$\Rightarrow X^{(0)}=(0,0,8,16,12)$

④求出检验数 $\sigma_j=c_j-(c_{B1}\cdot x_{j1}+c_{B2}\cdot x_{j2}+\cdots)$

②

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
0	x_5	0	4	0	0	1	12	
σ_j								

$\Rightarrow$

④

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
0	x_5	0	4	0	0	1	12	
σ_j		2	3	0	0	0		

③ 可行解 $x_1=0$，$x_2=0$，$x_3=8$，$x_4=16$，$x_5=12$

$\Rightarrow X^{(0)}=(0,0,8,16,12)$

④ $\sigma_1=c_1-(c_{B1}\cdot x_{11}+c_{B2}\cdot x_{12}+c_{B3}\cdot x_{13})=2-(0\cdot 1+0\cdot 4+0\cdot 0)=2$

$\sigma_2=c_2-(c_{B1}\cdot x_{21}+c_{B2}\cdot x_{22}+c_{B3}\cdot x_{23})=3-(0\cdot 2+0\cdot 0+0\cdot 4)=3$

$\sigma_3=c_3-(c_{B1}\cdot x_{31}+c_{B2}\cdot x_{32}+c_{B3}\cdot x_{33})=0-(0\cdot 1+0\cdot 0+0\cdot 0)=0$

$\sigma_4=c_4-(c_{B1}\cdot x_{41}+c_{B2}\cdot x_{42}+c_{B3}\cdot x_{43})=0-(0\cdot 0+0\cdot 1+0\cdot 0)=0$

$\sigma_5=c_5-(c_{B1}\cdot x_{51}+c_{B2}\cdot x_{52}+c_{B3}\cdot x_{53})=0-(0\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 1)=0$

⑤观察一下 σ_j 这一行的数字看一下是否都≤0

若这些数字都≤0，则该可行解就是最优解

若这些数字有>0的，则该可行解不是最优解继续进行⑥

④

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
0	x_5	0	4	0	0	1	12	
σ_j		2	3	0	0	0		

⑤

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
0	x_5	0	4	0	0	1	12	
σ_j		2	3	0	0	0		

⑥ 找到σ_j行最大的数字那一列对应的变量x_a(进基变量)

求出$\theta_i = b_i \div x_{ai}$

⑤

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	4
0	x_4	4	0	0	1	0	16	×
0	x_5	0	4	0	0	1	12	3
σ_j		2	3	0	0	0		

⇒

⑥

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	4
0	x_4	4	0	0	1	0	16	×
0	x_5	0	4	0	0	1	12	3
σ_j		2	3	0	0	0		

⑥ $x_a = x_2$

$\theta_1 = b_1 \div x_{21} = 8 \div 2 = 4$

$\theta_2 = b_2 \div x_{22} = 16 \div 0$ 无意义

$\theta_3 = b_3 \div x_{23} = 12 \div 4 = 3$

【若θ≥0，则把θ的值填到表中

若θ<0，则不用把θ的值填到表中

若θ无意义，则不用把θ填到表中】

【注意：若求出来的θ都<0，则该线性规划问题的解为无界解】

⑦ 找到表中 θ_i 最小值对应 X_B 列的变量 x_b (出基变量)

找到x_a的列和x_b的行交叉的数字 m

⑥

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	4
0	x_4	4	0	0	1	0	16	×
0	x_5	0	4	0	0	1	12	3
σ_j		2	3	0	0	0		

⇒

⑦

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	4
0	x_4	4	0	0	1	0	16	×
0	x_5	0	4	0	0	1	12	3
σ_j		2	3	0	0	0		

⑥ $x_a = x_2$

$\theta_1 = b_1 \div x_{21} = 8 \div 2 = 4$

$\theta_2 = b_2 \div x_{22} = 16 \div 0$ 无意义

$\theta_3 = b_3 \div x_{23} = 12 \div 4 = 3$

⑦ $x_b = x_5$

⑧ 用x_a上面的数字替代x_b前面的数字，用x_a替代x_b，清空σ_j行与θ_i列

⑦

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	4
0	x_4	4	0	0	1	0	16	×
0	x_5	0	4	0	0	1	12	3
σ_j		2	3	0	0	0		

⑥ $x_a = x_2$

⑦ $x_b = x_5$

⑦

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	4
0	x_4	4	0	0	1	0	16	×
0	x_5	0	4	0	0	1	12	3
σ_j		2	3	0	0	0		

⇒

⑧

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
3	x_2	0	4	0	0	1	12	
σ_j								

⑥对 x_1、 $x_2 \cdots x_n$ 与b列组成的矩阵进行运算，将m变成1，同列其他元素变成0，形成一个新的矩阵，将该矩阵中的数字填入表格中对应的位置形成新的单纯形表并进行步骤③

⑧

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	2	1	0	0	8	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
3	x_2	0	4	0	0	1	12	
σ_j								

⇒

⑨

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j								

③找出可行解

⑨

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j								

③ 可行解 $x_1=0$， $x_2=3$， $x_3=2$， $x_4=16$， $x_5=0$

$X^{(1)}=(0,3,2,16,0)$

④求出检验数 $\sigma_j=c_j-(c_{B1}\cdot x_{j1}+c_{B2}\cdot x_{j2}+\cdots)$

⑨

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j								

⇒

④

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j		2	0	0	0	−¾		

③ 可行解 $x_1=0$， $x_2=3$， $x_3=2$， $x_4=16$， $x_5=0$

$X^{(1)}=(0,3,2,16,0)$

④ $\sigma_1=c_1-(c_{B1}\cdot x_{11}+c_{B2}\cdot x_{12}+c_{B3}\cdot x_{13})=2-(0\cdot 1+0\cdot 4+3\cdot 0)=2$

$\sigma_2=c_2-(c_{B1}\cdot x_{21}+c_{B2}\cdot x_{22}+c_{B3}\cdot x_{23})=3-(0\cdot 0+0\cdot 0+3\cdot 1)=0$

$\sigma_3=c_3-(c_{B1}\cdot x_{31}+c_{B2}\cdot x_{32}+c_{B3}\cdot x_{33})=0-(0\cdot 1+0\cdot 0+3\cdot 0)=0$

$\sigma_4=c_4-(c_{B1}\cdot x_{41}+c_{B2}\cdot x_{42}+c_{B3}\cdot x_{43})=0-(0\cdot 0+0\cdot 1+3\cdot 0)=0$

$\sigma_5=c_5-(c_{B1}\cdot x_{51}+c_{B2}\cdot x_{52}+c_{B3}\cdot x_{53})=0-[0\cdot(-\frac{1}{2})+0\cdot 0+3\cdot \frac{1}{4}]=-\frac{3}{4}$

⑤ 观察一下 σ_j 这一行的数字看一下是否都≤0

若这些数字都≤0，则该可行解就是最优解

若这些数字有>0的，则该可行解不是最优解继续进行⑥

④

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j		2	0	0	0	−¾		

⇒

⑤

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j		2	0	0	0	−¾		

⑥ 找到 σ_j 行最大的数字那一列对应的变量x_a(进基变量)

求出 $\theta_i = b_i \div x_{ai}$

⑤

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j		2	0	0	0	−¾		

⇒

⑥

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	0	1	0	−½	2	2
0	x_4	4	0	0	1	0	16	4
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	×
σ_j		2	0	0	0	−¾		

⑥ $x_a = x_1$

$\theta_1 = b_1 \div x_{11} = 2 \div 1 = 2$

$\theta_2 = b_2 \div x_{12} = 16 \div 4 = 4$

$\theta_3 = b_3 \div x_{13} = 3 \div 0 =$ 无意义

⑦ 找到表中 θ_i 最小值对应 X_B 列的变量 x_b (出基变量)

找到x_a的列和x_b的行交叉的数字m

⑥ $x_a = x_1$

⑦ $x_b = x_3$

⑥

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	0	1	0	−½	2	2
0	x_4	4	0	0	1	0	16	4
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	×
σ_j		2	0	0	0	−¾		

⇒

⑦

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	0	1	0	−½	2	2
0	x_4	4	0	0	1	0	16	4
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	×
σ_j		2	0	0	0	−¾		

⑥ **用x_a上面的数字替代x_b前面的数字，用x_a替代x_b，清空σ_j行与θ_i列**

⑦

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
0	x_3	1	0	1	0	−½	2	2
0	x_4	4	0	0	1	0	16	4
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	×
σ_j		2	0	0	0	−¾		

⇒

⑧

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j								

⑦ **对x_1、$x_2 \cdots x_n$与b列组成的矩阵进行运算，将m变成1，同列其他元素变成0，形成一个新的矩阵，将该矩阵中的数字填入表格中对应的位置形成新的单纯形表并进行步骤③**

⑧

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	4	0	0	1	0	16	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j								

⇒

⑨

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j								

③ **找出可行解**

⑨

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j								

③ 可行解 $x_1 = 2$，$x_2 = 3$，$x_3 = 0$，$x_4 = 8$，$x_5 = 0$

$\Rightarrow X^{(2)} = (2,3,0,8,0)$

④ **求出检验数** $\sigma_j = c_j - (c_{B1} \cdot x_{j1} + c_{B2} \cdot x_{j2} + \cdots)$

⑨

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j								

⇒

④

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j		0	0	−2	0	¼		

③ $X^{(2)} = (2,3,0,8,0)$

④ $\sigma_1 = c_1 - (c_{B1} \cdot x_{11} + c_{B2} \cdot x_{12} + c_{B3} \cdot x_{13}) = 2 - (2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0) = 0$

$\sigma_2 = c_2 - (c_{B1} \cdot x_{21} + c_{B2} \cdot x_{22} + c_{B3} \cdot x_{23}) = 3 - (2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1) = 0$

$\sigma_3 = c_3 - (c_{B1} \cdot x_{31} + c_{B2} \cdot x_{32} + c_{B3} \cdot x_{33}) = 0 - [2 \cdot 1 + 0 \cdot (-4) + 3 \cdot 0] = -2$

$\sigma_4 = c_4 - (c_{B1} \cdot x_{41} + c_{B2} \cdot x_{42} + c_{B3} \cdot x_{43}) = 0 - (2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = 0$

$\sigma_5 = c_5 - (c_{B1} \cdot x_{51} + c_{B2} \cdot x_{52} + c_{B3} \cdot x_{53}) = 0 - [2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 0 \cdot 2 + 3 \cdot \frac{1}{4}] = \frac{1}{4}$

⑤ 观察一下 σ_j 这一行的数字看一下是否都≤0

若这些数字都≤0，则该可行解就是最优解

若这些数字有>0的，则该可行解不是最优解继续进行⑥

④

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j		0	0	−2	0	¼		

⇒

⑤

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j		0	0	−2	0	¼		

⑥ 找到 σ_j 行最大的数字那一列对应的变量 x_a（进基变量）

求出 $\theta_i = b_i \div x_{a_i}$

⑤

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j		0	0	−2	0	¼		

⇒

⑥

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	×
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	4
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	12
σ_j		0	0	−2	0	¼		

⑥ $x_a = x_5$

$\theta_1 = b_1 \div x_{51} = 2 \div (-½) = -4$

$\theta_2 = b_2 \div x_{52} = 8 \div 2 = 4$

$\theta_3 = b_3 \div x_{53} = 3 \div ¼ = 12$

⑦ 找到表中 θ_i 最小值对应 X_B 列的变量 x_b（出基变量）

找到 x_a 的列和 x_b 的行交叉的数字m

⑥

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	×
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	4
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	12
σ_j		0	0	−2	0	¼		

⇒

⑦

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	×
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	4
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	12
σ_j		0	0	−2	0	¼		

⑥ $x_a = x_5$

⑦ $x_b = x_4$

⑧ 用 x_a 上面的数字替代 x_b 前面的数字，用 x_a 替代 x_b，清空 σ_j 行与 θ_i 列

⑦

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	×
0	x_4	0	0	−4	1	2	8	4
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	12
σ_j		0	0	−2	0	¼		

⇒

⑧

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	−½	2	
0	x_5	0	0	−4	1	2	8	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j								

⑦对 x_1、$x_2 \cdots x_n$ 与b列组成的矩阵进行运算，将m变成1，同列其他元素变成0，形成一个新的矩阵，将该矩阵中的数字填入表格中对应的位置形成新的单纯形表并进行步骤⑧

⑧

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	1	0	$-½$	2	
0	x_5	0	0	-4	1	2	8	
3	x_2	0	1	0	0	¼	3	
σ_j								

$\Rightarrow$

⑨

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	0	¼	0	4	
0	x_5	0	0	-2	½	1	4	
3	x_2	0	1	½	$-⅛$	0	2	
σ_j								

③找出可行解

⑨

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	0	¼	0	4	
0	x_5	0	0	-2	½	1	4	
3	x_2	0	1	½	$-⅛$	0	2	
σ_j								

③ 可行解 $x_1 = 4$，$x_2 = 2$，$x_3 = 0$，$x_4 = 0$，$x_5 = 4$

$\Rightarrow X^{(3)} = (4,2,0,0,4)$

④求出检验数 $\sigma_j = c_j - (c_{B1} \cdot x_{j1} + c_{B2} \cdot x_{j2} + \cdots)$

⑨

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	0	¼	0	4	
0	x_5	0	0	-2	½	1	4	
3	x_2	0	1	½	$-⅛$	0	2	
σ_j								

$\Rightarrow$

④

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	0	¼	0	4	
0	x_5	0	0	-2	½	1	4	
3	x_2	0	1	½	$-⅛$	0	2	
σ_j		0	0	$-3/2$	$-⅛$	0		

③ 可行解 $x_1 = 4$，$x_2 = 2$，$x_3 = 0$，$x_4 = 0$，$x_5 = 4$

$\Rightarrow X^{(3)} = (4,2,0,0,4)$

④ $\sigma_1 = c_1 - (c_{B1} \cdot x_{11} + c_{B2} \cdot x_{12} + c_{B3} \cdot x_{13}) = 2 - (2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 0) = 0$

$\sigma_2 = c_2 - (c_{B1} \cdot x_{21} + c_{B2} \cdot x_{22} + c_{B3} \cdot x_{23}) = 3 - (2 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1) = 0$

$\sigma_3 = c_3 - (c_{B1} \cdot x_{31} + c_{B2} \cdot x_{32} + c_{B3} \cdot x_{33}) = 0 - [2 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot \frac{1}{2}] = -\frac{3}{2}$

$\sigma_4 = c_4 - (c_{B1} \cdot x_{41} + c_{B2} \cdot x_{42} + c_{B3} \cdot x_{43}) = 0 - [2 \cdot ¼ + 0 \cdot ½ + 3 \cdot (-\frac{1}{8})] = -\frac{1}{8}$

$\sigma_5 = c_5 - (c_{B1} \cdot x_{51} + c_{B2} \cdot x_{52} + c_{B3} \cdot x_{53}) = 0 - (2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = 0$

⑤观察一下 σ_j 这一行的数字看一下是否都≤0
若这些数字都≤0，则该可行解就是最优解
若这些数字有>0的，则该可行解不是最优解继续进行⑥

④

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	0	¼	0	4	
0	x_5	0	0	-2	½	1	4	
3	x_2	0	1	½	$-⅛$	0	2	
σ_j		0	0	$-3/2$	$-⅛$	0		

③ 可行解 $x_1 = 4$，$x_2 = 2$，$x_3 = 0$，$x_4 = 0$，$x_5 = 4$

$\Rightarrow X^{(3)} = (4,2,0,0,4)$

⑤ $X^* = (4,2,0,0,4)$

对偶问题

例1.写出以下线性规划问题的对偶问题

$\max z = 3x_1 - x_2 + 2x_3$

$$s.t.\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 \le 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \ge 2 \\ x_1 + x_2 = -2 \\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0 \end{cases}$$

① 确定对偶问题中变量的个数m

①$m = 3$

对偶问题中的变量为y_1，y_2，y_3

原大括号中约束条件的个数m等于对偶问题中的变量个数

② 确定对偶问题的目标函数

①$m = 3$

对偶问题中的变量为y_1，y_2，y_3

②$\min\alpha = y_1 + 2y_2 - 2y_3$

若原目标函数是求max，则对偶问题的目标函数为

$\min\alpha = b_1\cdot y_1 + b_2\cdot y_2 + \cdots + b_m\cdot y_m$

若原目标函数是求min，则对偶问题的目标函数为

$\max\alpha = b_1\cdot y_1 + b_2\cdot y_2 + \cdots + b_m\cdot y_m$

b_1、$b_2 \cdots b_m$ 依次对应原大括号中约束条件右端的常数

③ 确定对偶问题中约束条件的个数n

①$m = 3$

对偶问题中的变量为y_1，y_2，y_3

②$\min\alpha = y_1 + 2y_2 - 2y_3$

③$n = 3$

$n =$ 原线性规划问题中变量的个数

④ 确定对偶问题中约束条件左边部分

①$m = 3$

对偶问题中的变量为y_1，y_2，y_3

②$\min\alpha = y_1 + 2y_2 - 2y_3$

③$n = 3$

$$\begin{array}{lr} 2\cdot y_1 + 1\cdot y_2 + 1\cdot y_3 & (1) \\ 1\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 1\cdot y_3 & (2) \\ -4\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + 0\cdot y_3 & (3) \end{array}$$

在每一个式子的左边写上$?\cdot y_1 + ?\cdot y_2 + \cdots + ?\cdot y_m$

第1个式子中的?从左到右依次对应原来大括号里约束条件中从上到下x_1的系数

第2个式子中的?从左到右依次对应原来大括号里约束条件中从上到下x_2的系数

$\vdots$

第n个式子中的?从左到右依次对应原来大括号里约束条件中从上到下x_n的系数

$$\Rightarrow \begin{array}{lr} 2y_1 + y_2 + y_3 & (1) \\ y_1 + 2y_2 + y_3 & (2) \\ -4y_1 + 2y_2 & (3) \end{array}$$

⑤ 确定对偶问题中约束条件右边的常数

①$m=3$

对偶问题中的变量为y_1，y_2，y_3

②$\min \alpha = y_1 + 2y_2 - 2y_3$

③$n=3$

$2y_1 + y_2 + y_3 \quad 3 \qquad (1)$

$y_1 + 2y_2 + y_3 \quad -1 \qquad (2)$

$-4y_1 + 2y_2 \quad 2 \qquad (3)$

第1行式子右边的常数是原问题目标函数中x_1的系数

第2行式子右边的常数是原问题目标函数中x_2的系数

⋮

第n行式子右边的常数是原问题目标函数中x_n的系数

⑥ 确定对偶问题里约束条件中的符号

①$m=3$

对偶问题中的变量为y_1，y_2，y_3

②$\min \alpha = y_1 + 2y_2 - 2y_3$

③$n=3$

$2y_1 + y_2 + y_3 = 3 \qquad (1)$

$y_1 + 2y_2 + y_3 \geq -1 \qquad (2)$

$-4y_1 + 2y_2 \leq 2 \qquad (3)$

第 1 行式子的符号由原问题中x_1的范围决定

第 2 行式子的符号由原问题中x_2的范围决定

⋮

第 n 行式子的符号由原问题中x_n的范围决定

原问题的 x_i	原目标函数max	原目标函数min
	对偶问题式子符号	对偶问题式子符号
≤ 0	$\leq$	$\geq$
≥ 0	$\geq$	$\leq$
无约束	$=$	$=$

⑦ 确定对偶问题中变量的范围

①$m=3$

对偶问题中的变量为y_1，y_2，y_3

②$\min \alpha = y_1 + 2y_2 - 2y_3$

③$n=3$

$$s.t.\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq -1 \\ -4y_1 + 2y_2 \leq 2 \\ y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3\text{无约束} \end{cases}$$

y_1 的范围由原大括号中第 1 行约束条件的符号决定

y_2 的范围由原大括号中第 2 行约束条件的符号决定

⋮

y_m 的范围由原大括号中第 m 行约束条件的符号决定

原问题式子	原目标函数max	原目标函数min
	对偶问题变量范围	对偶问题变量范围
$\leq$	≥ 0	≤ 0
$\geq$	≤ 0	≥ 0
$=$	无约束	无约束

求对偶问题最优解

求对偶问题的最优解

例1. 求以下线性规划问题对偶问题的最优解

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

用单纯形法画出原线性规划问题的最终单纯形表

$$\max z = 2\cdot x_1 + 3\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$

$$\Rightarrow \quad s.t.\begin{cases} 1\cdot x_1 + 2\cdot x_2 + 1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 = 8 \\ 4\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5 = 16 \\ 0\cdot x_1 + 4\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 1\cdot x_5 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

c_j		2	3	0	0	0	b	θ_i
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
2	x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	4	
0	x_5	0	0	-2	$\frac{1}{2}$	1	4	
3	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	2	
σ_j		0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0		

详细过程看《第四课单纯形法》

常规方法：

①若最终单纯形表中的b列的值有n个，则从后往前数n个变量并标记出他们对应的检验数，将这些检验数按从左到右的顺序写到一个括号中

①$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 0\right)$

②写出对偶问题的最优解Y^*

若原问题目标函数是max，则

$Y^* = -$①中的括号

若原问题目标函数是min，则

$Y^* =$①中的括号

①$\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 0\right)$

② $Y^* = -\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{8}, 0\right) = \left(-\left(-\frac{3}{2}\right), -\left(-\frac{1}{8}\right), -0\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}, 0\right)$

求原问题最优解

求原问题的最优解

例1. 已知以下线性规划问题的对偶问题最优解 $y_1^*=1$，$y_2^*=2$，则求原问题的最优解

$$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 6x_4$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 2x_4 \le 8 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 \le 16 \\ x_1,\ x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

①写出对偶问题

$$①\ \min \alpha = 8y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} 1\cdot y_1 + 3\cdot y_2 \ge 3 \\ 0\cdot y_1 + 1\cdot y_2 \ge 2 \\ 2\cdot y_1 + 4\cdot y_2 \ge 8 \\ 2\cdot y_1 + 2\cdot y_2 \ge 6 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

详细过程看《第六课对偶问题》

②在对偶问题"{"中约束条件的后方依次写上原问题的变量

$$①\ \min \alpha = 8y_1 + 16y_2\ ②$$

$$\begin{cases} 1\cdot y_1 + 3\cdot y_2 \ge 3 & x_1 \\ 0\cdot y_1 + 1\cdot y_2 \ge 2 & x_2 \\ 2\cdot y_1 + 4\cdot y_2 \ge 8 & x_3 \\ 2\cdot y_1 + 2\cdot y_2 \ge 6 & x_4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

③改变对偶问题约束条件的符号
"≥"变成">"；"≤"变成"<"

$$①\ \min \alpha = 8y_1 + 16y_2\ ②$$

$$③\begin{cases} 1\cdot y_1 + 3\cdot y_2 > 3 & x_1 \\ 0\cdot y_1 + 1\cdot y_2 > 2 & x_2 \\ 2\cdot y_1 + 4\cdot y_2 > 8 & x_3 \\ 2\cdot y_1 + 2\cdot y_2 > 6 & x_4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

④把对偶问题的最优解代入第③步所得到的不等式中
若不等式成立，则该不等式后方的原问题变量=0

$$①\ \min \alpha = 8y_1 + 16y_2\ ② \qquad ①\ \min \alpha = 8y_1 + 16y_2\ ②$$

$$③\begin{cases} 1\cdot 1 + 3\cdot 2 > 3 & x_1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 2 > 2 & x_2 \\ 2\cdot 1 + 4\cdot 2 > 8 & x_3 \\ 2\cdot 1 + 2\cdot 2 > 6 & x_4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow ③\begin{cases} 7 > 3 & x_1 \\ 2 > 2 & x_2 \\ 10 > 8 & x_3 \\ 6 > 6 & x_4 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow ④\ x_1 = 0, x_3 = 0$$

⑤ 若对偶问题最优解中 $y_i^* \neq 0$，则原问题 “(” 中第 i 行约束条件的符号变成等号，得到一个式子

① $\min \alpha = 8y_1 + 16y_2$ ②

$$③\begin{cases} 7 > 3 & x_1 \\ 2 > 2 & x_2 \\ 10 > 8 & x_3 \\ 6 > 6 & x_4 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

④ $x_1 = 0, x_3 = 0$

⑤ $x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 8$

$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 16$

⑥ 联立④⑤步的结果求解

① $\min \alpha = 8y_1 + 16y_2$ ②

$$③\begin{cases} 7 > 3 & x_1 \\ 2 > 2 & x_2 \\ 10 > 8 & x_3 \\ 6 > 6 & x_4 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

④ $x_1 = 0, x_3 = 0$

⑤ $x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 8$

$3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 16$

$$⑥\begin{cases} x_1 = 0, x_3 = 0 & A \\ x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 8 & B \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 16 & C \end{cases}$$

将A代入B中可以得到

$0 + 2 \times 0 + 2x_4 = 8$

$\Rightarrow 2x_4 = 8$

$\Rightarrow x_4 = 4$ D

将A和D代入C中可以得到

$3 \times 0 + x_2 + 4 \times 0 + 2 \times 4 = 16$

$\Rightarrow x_2 + 8 = 16$

$\Rightarrow x_2 = 8$

⑦ 将所有求得的原问题变量的值按从左到右的顺序写到一个括号中得到原问题的最优解

④ $x_1 = 0, x_3 = 0$

⑥ $x_4 = 4 \quad x_2 = 8$

最优解为 (0,8,0,4)

影子价格

影子价格

例1.以下是某厂生产计划的线性规划模型，请同学们

(1) 求出各资源的影子价格并指出其经济意义

(2) 判断哪种资源在达到最优生产计划时还有剩余

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

(1) 求出各资源的影子价格并指出其经济意义

①求出对偶问题的最优解

c_j		2	3	0	0	0	b
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	0	0	¼	0	4
0	x_5	0	0	−2	½	1	4
3	x_2	0	1	½	−⅛	0	2
σ_j		0	0	−3/2	−⅛	0	

① $Y^* = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{8}, 0\right)$ 详细过程看《第七课 求对偶问题的最优解》

②对偶问题最优解中的数字依次对应的就是原问题中各资源的影子价格

② 第1种资源的影子价格 $=\frac{3}{2}$　每增加1单位的第1种资源，最终收益增加 $\frac{3}{2}$ 单位

第2种资源的影子价格 $=\frac{1}{8}$　每增加1单位的第2种资源，最终收益增加 $\frac{1}{8}$ 单位

第3种资源的影子价格 $=0$　每增加1单位的第3种资源，最终收益增加0单位

影子价格的经济意义：
每增加1单位的某种资源，最终收益增加多少单位

(2) 判断哪种资源在达到最优生产计划时还有剩余

第1种资源的影子价格 $=\frac{3}{2}$

第2种资源的影子价格 $=\frac{1}{8}$

第3种资源的影子价格 $=0$

判断资源是否有剩余：
影子价格 =0：该影子价格对应的资源有剩余
影子价格 >0：该影子价格对应的资源无剩余

(2) 第3种资源在达到最优生产计划时还有剩余

灵敏度分析

灵敏度分析

例1.以下是某线性规划问题及其最终单纯形表，分析目标函数中x_1系数由2变成3，x_2系数由3变成1时，最优解是否变化

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c_j		2	3	0	0	0	b
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	0	0	¼	0	4
0	x_5	0	0	−2	½	1	4
3	x_2	0	1	½	−⅛	0	2
σ_j		0	0	−3/2	−⅛	0	

①根据目标函数变量系数的变化画新的单纯形表

①

c_j		3	1	0	0	0	b
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_1	1	0	0	¼	0	4
0	x_5	0	0	−2	½	1	4
1	x_2	0	1	½	−⅛	0	2
σ_j							

②重新计算检验数$\sigma_j = c_j - (c_{B1} \cdot x_{j1} + c_{B2} \cdot x_{j2} + \cdots)$

若σ_j行数字都≤0，则最优解不变

若σ_j行数字有>0的，则最优解发生了变化

①

c_j		3	1	0	0	0	b
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	x_1	1	0	0	¼	0	4
0	x_5	0	0	−2	½	1	4
1	x_2	0	1	½	−⅛	0	2
σ_j		0	0	−1/2	−5/8	0	

②$\sigma_j = c_j - (c_{B1} \cdot x_{j1} + c_{B2} \cdot x_{j2} + \cdots) = c_j - (c_{B1} \cdot x_{j1} + c_{B2} \cdot x_{j2} + c_{B3} \cdot x_{j3})$

$$\sigma_1 = c_1 - (c_{B1} \cdot x_{11} + c_{B2} \cdot x_{12} + c_{B3} \cdot x_{13}) = 3 - (3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0) = 0$$

$$\sigma_2 = c_2 - (c_{B1} \cdot x_{21} + c_{B2} \cdot x_{22} + c_{B3} \cdot x_{23}) = 1 - (3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1) = 0$$

$$\sigma_3 = c_3 - (c_{B1} \cdot x_{31} + c_{B2} \cdot x_{32} + c_{B3} \cdot x_{33}) = 0 - \left(3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 + 1 \cdot \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sigma_4 = c_4 - (c_{B1} \cdot x_{41} + c_{B2} \cdot x_{42} + c_{B3} \cdot x_{43}) = 0 - \left(3 \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{8}\right) = -\frac{5}{8}$$

$$\sigma_5 = c_5 - (c_{B1} \cdot x_{51} + c_{B2} \cdot x_{52} + c_{B3} \cdot x_{53}) = 0 - (3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = 0$$

∴变化后的最优解不变

例2.以下是某线性规划问题及其最终单纯形表，现同时把目标函数中 x_1、x_2 系数减少相同值，试分析在什么范围内减少时最优解不变

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c_j		2	3	0	0	0	b
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	0	0	¼	0	4
0	x_5	0	0	−2	½	1	4
3	x_2	0	1	½	$-1/8$	0	2
σ_j		0	0	$-3/2$	$-1/8$	0	

①根据目标函数变量系数的变化画新的单纯形表

① 设目标函数 x_1、x_2 系数都减少 λ ($\lambda \ge 0$)

c_j		$2-\lambda$	$3-\lambda$	0	0	0	b
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$2-\lambda$	x_1	1	0	0	¼	0	4
0	x_5	0	0	−2	½	1	4
$3-\lambda$	x_2	0	1	½	$-1/8$	0	2
σ_j							

②重新计算检验数 $\sigma_j = c_j - (c_{B1} \cdot x_{j1} + c_{B2} \cdot x_{j2} + \cdots)$

若 σ_j 行数字都≤0，则最优解不变

若 σ_j 行数字有>0的，则最优解发生了变化

c_j		$2-\lambda$	$3-\lambda$	0	0	0	b
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$2-\lambda$	x_1	1	0	0	¼	0	4
0	x_5	0	0	−2	½	1	4
$3-\lambda$	x_2	0	1	½	$-1/8$	0	2
σ_j		0	0	$1/2\lambda-3/2$	$1/8\lambda-1/8$	0	

② $\sigma_j = c_j - (c_{B1} \cdot x_{j1} + c_{B2} \cdot x_{j2} + \cdots) = c_j - (c_{B1} \cdot x_{j1} + c_{B2} \cdot x_{j2} + c_{B3} \cdot x_{j3})$

$$\sigma_1 = c_1 - (c_{B1} \cdot x_{11} + c_{B2} \cdot x_{12} + c_{B3} \cdot x_{13}) = 2 - \lambda - [(2-\lambda) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (3-\lambda) \cdot 0] = 0$$

$$\sigma_2 = c_2 - (c_{B1} \cdot x_{21} + c_{B2} \cdot x_{22} + c_{B3} \cdot x_{23}) = 3 - \lambda - [(2-\lambda) \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (3-\lambda) \cdot 1] = 0$$

$$\sigma_3 = c_3 - (c_{B1} \cdot x_{31} + c_{B2} \cdot x_{32} + c_{B3} \cdot x_{33}) = 0 - \left[(2-\lambda) \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + (3-\lambda) \cdot \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2}$$

$$\sigma_4 = c_4 - (c_{B1} \cdot x_{41} + c_{B2} \cdot x_{42} + c_{B3} \cdot x_{43}) = 0 - \left[(2-\lambda) \cdot \frac{1}{4} + 0 \cdot \frac{1}{2} + (3-\lambda) \cdot \left(-\frac{1}{8}\right)\right] = \frac{1}{8}\lambda - \frac{1}{8}$$

$$\sigma_5 = c_5 - (c_{B1} \cdot x_{51} + c_{B2} \cdot x_{52} + c_{B3} \cdot x_{53}) = 0 - [(2-\lambda) \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (3-\lambda) \cdot 0] = 0$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{2} \le 0 \\ \frac{1}{8}\lambda - \frac{1}{8} \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \le 3 \\ \lambda \le 1 \end{cases} \Rightarrow \lambda \le 1 \Rightarrow 0 \le \lambda \le 1$$

例3.以下是某线性规划问题及其最终单纯形表，试求第一个约束条件中不等式右边的常数由8变成10后的最优解

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c_j		2	3	0	0	0	b
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	0	0	¼	0	4
0	x_5	0	0	−2	½	1	4
3	x_2	0	1	½	$-\frac{1}{8}$	0	2
σ_j		0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	

① 写出变化后的约束条件

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$①\quad s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

② 求出矩阵 $b = B^{-1}b_1$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

B^{-1}：若最终单纯形表中b列的值有n个，则从后往前数n个变量，每个变量下方的n个数字构成的矩阵就是B^{-1}

$$b_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}$$

b_1：新的大括号中约束条件右边的常数自上而下排列形成的矩阵

$$b = B^{-1}b_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 10 + \frac{1}{4} \times 16 + 0 \times 12 \\ -2 \times 10 + \frac{1}{2} \times 16 + 1 \times 12 \\ \frac{1}{2} \times 10 + \left(-\frac{1}{8}\right) \times 16 + 0 \times 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

矩阵相乘：
若 A 是 n 行矩阵，B 是 m 列矩阵，则 $C = AB$ 是 n 行 m 列矩阵，c_{ij} = A 的第 i 行每个元素与 B 的第 j 列每个元素对应相乘再相加

③ 若求最优解，则把矩阵b中的值填入最终单纯形表替换b列的值，求出最优解
若矩阵 $b \ge 0$ 则最优基不变

c_j		2	3	0	0	0	b
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	0	0	¼	0	4
0	x_5	0	0	−2	½	1	0
3	x_2	0	1	½	$-\frac{1}{8}$	0	3
σ_j		0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	

最优解 $x_1 = 4$，$x_2 = 3$，$x_3 = 0$，$x_4 = 0$，$x_5 = 0$
把这些数字都写到一个括号中可以知道最优解为(4,3,0,0,0)

令X_B所在列的变量与b所在列的数字对应相等，再令其他变量等于0

例4.以下是某线性规划问题及其最终单纯形表，分析如何减少第三个约束条件右边的常数可使最优基不变

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c_j		2	3	0	0	0	b
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	4
0	x_5	0	0	-2	$\frac{1}{2}$	1	4
3	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	2
σ_j		0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	

① 写出变化后的约束条件

① 设第三个约束条件右边常数减少 $\lambda(\lambda \ge 0)$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 - \lambda \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

② 求出矩阵 $b = B^{-1}b_1$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

B^{-1}：若最终单纯形表中b列的值有n个，则从后往前数n个变量，每个变量下方的n个数字构成的矩阵就是B^{-1}

$$b_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 12-\lambda \end{pmatrix}$$

b_1：新的大括号中约束条件右边的常数自上而下排列形成的矩阵

$$b = B^{-1}b_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\times 8 + \frac{1}{4}\times 16 + 0\times(12-\lambda) \\ -2\times 8 + \frac{1}{2}\times 16 + 1\times(12-\lambda) \\ \frac{1}{2}\times 8 + \left(-\frac{1}{8}\right)\times 16 + 0\times(12-\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4-\lambda \\ 2 \end{pmatrix}$$

矩阵相乘：
若A是n行矩阵，B是m列矩阵，则 $C = AB$ 是n行m列矩阵，c_{ij} = A的第i行每个元素与B的第j列每个元素对应相乘再相加

③ 若求最优解，则把矩阵b中的值填入最终单纯形表
替换b列的值，求出最优解
若矩阵 $b \ge 0$ 则最优基不变

$$③\begin{cases} 4 \ge 0 \\ 4-\lambda \ge 0 \Rightarrow \lambda \le 4 \Rightarrow 0 \le \lambda \le 4 \\ 2 \ge 0 \end{cases}$$

目标规划建模

例4.以下是某线性规划问题及其最终单纯形表，分析如何减少第三个约束条件右边的常数可使最优基不变

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

c_j		2	3	0	0	0	b
c_B	X_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_1	1	0	0	¼	0	4
0	x_5	0	0	−2	½	1	4
3	x_2	0	1	½	$-\frac{1}{8}$	0	2
σ_j		0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{8}$	0	

① 写出变化后的约束条件

① 设第三个约束条件右边常数减少 $\lambda(\lambda \ge 0)$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 - \lambda \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

② 求出矩阵 $b = B^{-1}b_1$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

B^{-1}：若最终单纯形表中b列的值有n个，则从后往前数n个变量，每个变量下方的n个数字构成的矩阵就是B^{-1}

$$b_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ 16 \\ 12 - \lambda \end{pmatrix}$$

b_1：新的大括号中约束条件右边的常数自上而下排列形成的矩阵

$$b = B^{-1}b_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 8 + \frac{1}{4} \times 16 + 0 \times (12 - \lambda) \\ -2 \times 8 + \frac{1}{2} \times 16 + 1 \times (12 - \lambda) \\ \frac{1}{2} \times 8 + \left(-\frac{1}{8}\right) \times 16 + 0 \times (12 - \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 - \lambda \\ 2 \end{pmatrix}$$

矩阵相乘：
若A是n行矩阵，B是m列矩阵，则C＝AB是n行m列矩阵，c_{ij}＝A的第i行每个元素与B的第j列每个元素对应相乘再相加

③ 若求最优解，则把矩阵b中的值填入最终单纯形表替换b列的值，求出最优解
若矩阵 $b \ge 0$ 则最优基不变

$$③\begin{cases} 4 \ge 0 \\ 4 - \lambda \ge 0 \Rightarrow \lambda \le 4 \ \Rightarrow 0 \le \lambda \le 4 \\ 2 \ge 0 \end{cases}$$

⑤ 在最下方写上$x_1, x_2 \cdots \geq 0$，$d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^- \cdots \geq 0$并在所有式子前面加一个大括号

① 设A的产量是x_1，B的产量是x_2 $\Rightarrow$原材料共用了设 $5x_1+6x_2$
设备工时共用了$4x_1+4x_2$，共产生利润 $6x_1+8x_2$

② $5x_1+6x_2 \leq 60$

③ $2x_1-x_2+d_1^- - d_1^+ = 0 \quad P_1$

④ $4x_1+4x_2+d_2^- - d_2^+ = 36 \quad P_2$

$x_1+d_3^- - d_3^+ = 1 \quad P_3$

$x_2+d_4^- - d_4^+ = 3 \quad P_3$

$\Rightarrow$

⑤
$$\begin{cases} 5x_1+6x_2 \leq 60 \\ 2x_1-x_2+d_1^- - d_1^+ = 0 & P_1 \\ 4x_1+4x_2+d_2^- - d_2^+ = 36 & P_2 \\ x_1+d_3^- - d_3^+ = 1 & P_3 \\ x_2+d_4^- - d_4^+ = 3 & P_3 \\ x_1, x_2 \geq 0, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^-, d_4^+, d_4^- \geq 0 \end{cases}$$

⑥ 写出目标函数$\min z = P_1? + P_2? + P_3? + \cdots$

① 设A的产量是x_1，B的产量是x_2

⑥ $\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3 (d_3^+ + d_3^- + d_4^-)$

⑤
$$\begin{cases} 5x_1+6x_2 \leq 60 \\ 2x_1-x_2+d_1^- - d_1^+ = 0 & P_1 \\ 4x_1+4x_2+d_2^- - d_2^+ = 36 & P_2 \\ x_1+d_3^- - d_3^+ = 1 & P_3 \\ x_2+d_4^- - d_4^+ = 3 & P_3 \\ x_1, x_2 \geq 0, d_1^+, d_1^-, d_2^+, d_2^-, d_3^+, d_3^-, d_4^+, d_4^- \geq 0 \end{cases}$$

【如何确定“?”】
a.找到?前面的P对应的式子中的$d_{?}$
b.看一下这一个$d_{?}$所在的式子对应的限制条件是啥
若限制条件为正好达到某值，则在这个P后面写上$d_{?}^+ + d_{?}^-$
若限制条件为超过某值，则在这个P后面写上$d_{?}^-$
若限制条件为不超过某值，则在这个P后面写上$d_{?}^+$
c.将这个P后面的各项加到一起就是我们要找的?

目标规划建模图解法

目标规划图解法

例1.用图解法解以下目标规划问题

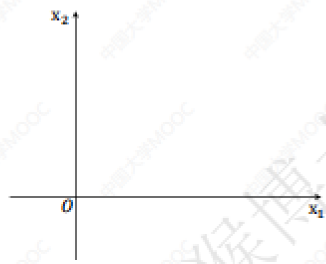
$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^- + 2d_4^-)$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 - d_1^+ + d_1^- = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - d_2^+ + d_2^- = 36 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 1 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, d_i^+, d_i^- \ge 0\,(i=1,2,3,4) \end{cases}$$

① 将目标函数中不同的$d_{i}^{\pm}$都分开，并画出$x_1 0 x_2$坐标系

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$$

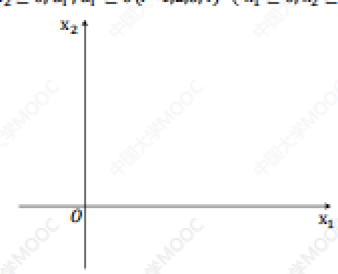
$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 - d_1^+ + d_1^- = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - d_2^+ + d_2^- = 36 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 1 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, d_i^+, d_i^- \ge 0\,(i=1,2,3,4) \end{cases}$$



② 去掉大括号中所有的$d_{i}^{\pm}$，将大括号中所有的式子都尽量变成x_2如何的式子

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$$

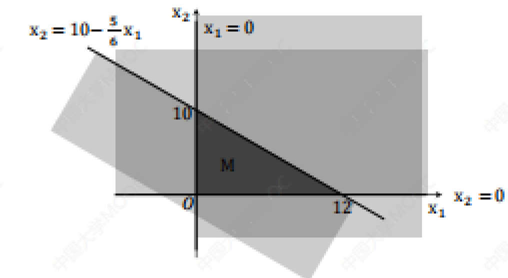
$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 - d_1^+ + d_1^- = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - d_2^+ + d_2^- = 36 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 1 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, d_i^+, d_i^- \ge 0\,(i=1,2,3,4) \end{cases} \quad ② \begin{cases} x_2 \le 10 - \frac{5}{6}x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_2 = 9 - x_1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



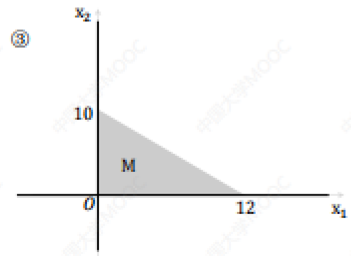
③ 画出②中不等式围成的区域M

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 - d_1^+ + d_1^- = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - d_2^+ + d_2^- = 36 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 1 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, d_i^+, d_i^- \ge 0 (i=1,2,3,4) \end{cases} \quad ② \begin{cases} x_2 \le 10 - \frac{5}{6}x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_2 = 9 - x_1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \quad x_1 = 0, x_2 = 0 \end{cases}$$



③ ⇒

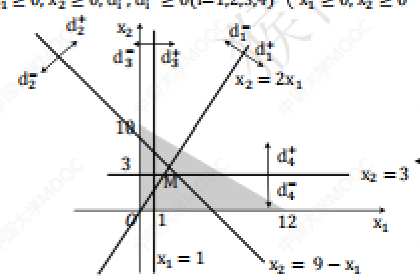


④ 画出②中等式表示的直线，并在直线两侧标上$d_{对应}^+$与$d_{对应}^-$

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 - d_1^+ + d_1^- = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - d_2^+ + d_2^- = 36 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 1 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, d_i^+, d_i^- \ge 0 (i=1,2,3,4) \end{cases} \quad ② \begin{cases} x_2 \le 10 - \frac{5}{6}x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_2 = 9 - x_1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

③④



【如何标$d_{对应}^+$与$d_{对应}^-$】

若直线为竖直线或者经过1、3象限，则

在直线右侧标注上直线对应的原式子中的$d_{对应}^+$，

在直线左侧标注上直线对应的原式子中的$d_{对应}^-$

若直线为水平线或者经过2、4象限，则

在直线上侧标注上直线对应的原式子中的$d_{对应}^+$，

在直线下侧标注上直线对应的原式子中的$d_{对应}^-$

⑤ 按照 P 从小到大的顺序依次画出 P 后面的$d_{编号}$对应的区域

(若P相同，则优先画出P的系数大的$d_{编号}$对应的区域)

找一下这个区域与前面存在的区域相交的区域

若相交区域存在，则只保留相交区域

若相交区域不存在，则在前面存在的区域中找到最接近新区域的部分

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$$

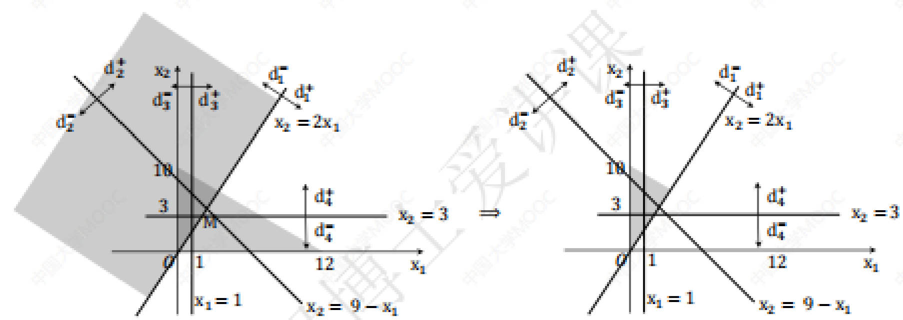
$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 - d_1^+ + d_1^- = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - d_2^+ + d_2^- = 36 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 1 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, d_i^+, d_i^- \ge 0 (i=1,2,3,4) \end{cases} \quad ② \begin{cases} x_2 \le 10 - \frac{5}{6}x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_2 = 9 - x_1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

【如何画$d_{编号}$对应的区域】

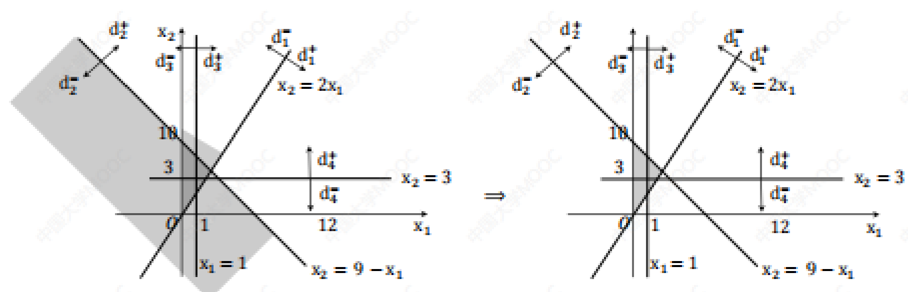
若目标函数中$d_{编号}$为：

$$\begin{cases} d_{编号}^+ \text{，则保留它对应的直线} d_{编号}^- \text{的一侧} \\ d_{编号}^- \text{，则保留它对应的直线} d_{编号}^+ \text{的一侧} \\ d_{编号}^+ + d_{编号}^- \text{，则保留它对应的直线} \end{cases}$$

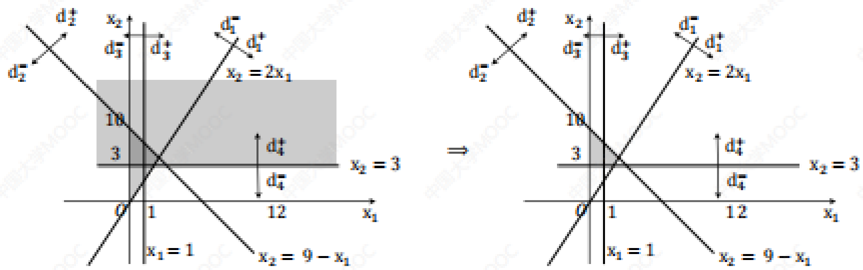
$$\min z = P_1 \boxed{d_1^+} + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$$



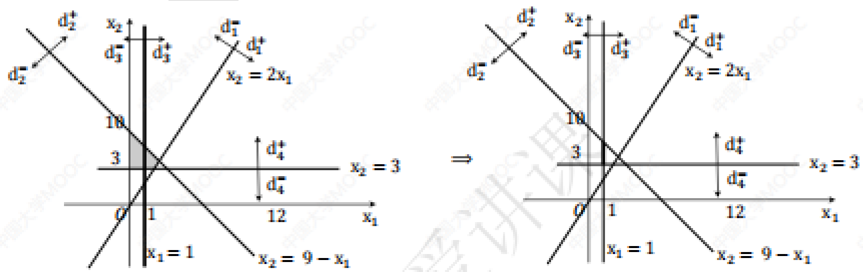
$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 \boxed{d_2^+} + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$$



$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$



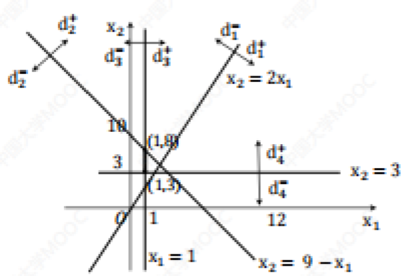
$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$



⑥ 满意解为⑤中得到的区域

$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$

$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 - d_1^+ + d_1^- = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - d_2^+ + d_2^- = 36 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 1 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, d_i^+, d_i^- \ge 0 (i=1,2,3,4) \end{cases} \quad ② \begin{cases} x_2 \le 10 - \frac{5}{6}x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_2 = 9 - x_1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



⑥ 满意解为点(1,3)到点(1,8)之间的线段

例2.用图解法解以下目标规划问题

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^- + 2d_4^-)$$

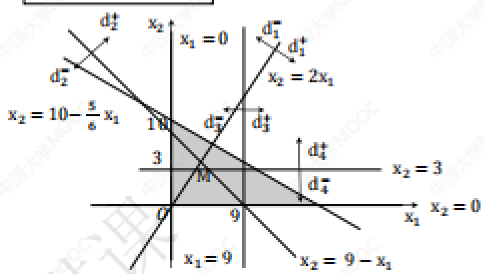
$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 - d_1^+ + d_1^- = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - d_2^+ + d_2^- = 36 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 9 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, d_i^+, d_i^- \ge 0\,(i=1,2,3,4) \end{cases}$$

④画出②中等式表示的直线，并在直线两侧标上d_i^+与d_i^-

第①至④步与例1相同

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$$

$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 - d_1^+ + d_1^- = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - d_2^+ + d_2^- = 36 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 9 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, d_i^+, d_i^- \ge 0(i=1,2,3,4) \end{cases} \quad ② \begin{cases} x_2 \le 10 - \frac{5}{6}x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_2 = 9 - x_1 \\ x_1 = 9 \\ x_2 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



⑤按照P从小到大的顺序依次画出P后面的d_i对应的区域

(若P相同，则优先画出P的系数大的d_i对应的区域)

找一下这个区域与前面存在的区域相交的区域

若相交区域存在，则只保留相交区域

若相交区域不存在，则在前面存在的区域中找到最接近新区域的部分

$$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$$

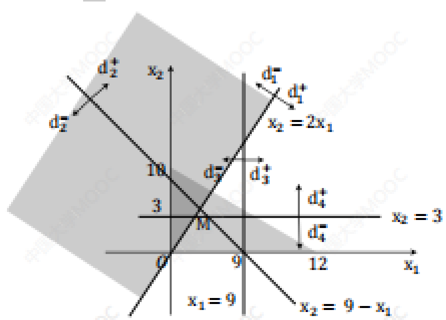
$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 - d_1^+ + d_1^- = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - d_2^+ + d_2^- = 36 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 1 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, d_i^+, d_i^- \ge 0(i=1,2,3,4) \end{cases} \quad ② \begin{cases} x_2 \le 10 - \frac{5}{6}x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_2 = 9 - x_1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

【如何画d_i对应的区域】

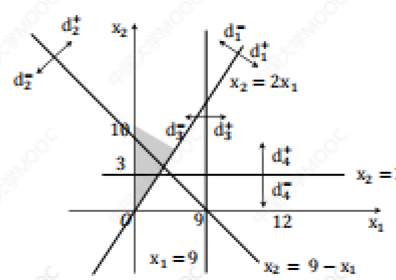
若目标函数中d_i为：

$$\begin{cases} d_i^- \text{，则保留它对应的直线}d_i^+\text{的一侧} \\ d_i^+ \text{，则保留它对应的直线}d_i^-\text{的一侧} \\ d_i^+ + d_i^- \text{，则保留它对应的直线} \end{cases}$$

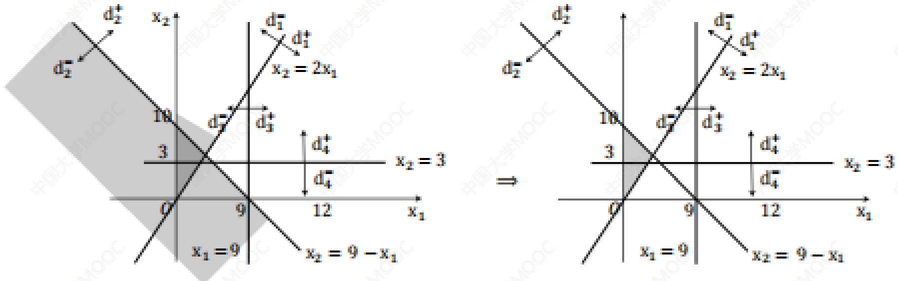
$$\min z = P_1 \boxed{d_1^+} + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$$



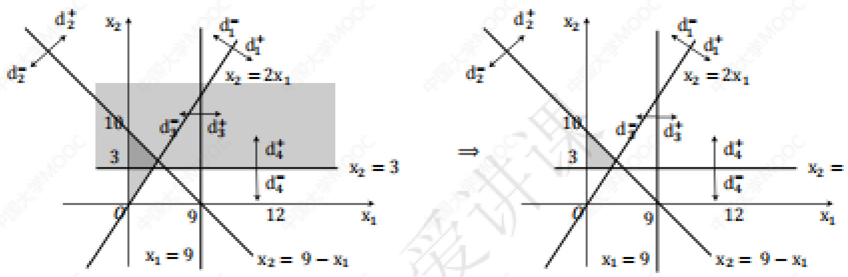
⇒



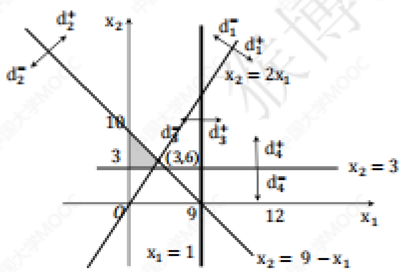
$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$



$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$



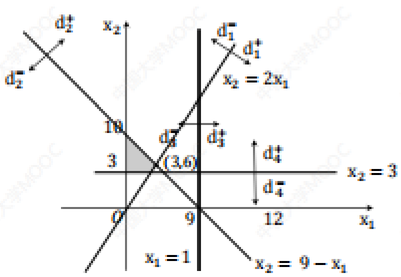
$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$



⑥ 满意解为⑤中得到的区域

$\min z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3(d_3^+ + d_3^-) + 2P_3 d_4^-$

$$s.t.\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 \le 60 \\ 2x_1 - x_2 - d_1^+ + d_1^- = 0 \\ 4x_1 + 4x_2 - d_2^+ + d_2^- = 36 \\ x_1 - d_3^+ + d_3^- = 1 \\ x_2 - d_4^+ + d_4^- = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, d_i^+, d_i^- \ge 0 (i=1,2,3,4) \end{cases} \quad ② \begin{cases} x_2 \le 10 - \frac{5}{6}x_1 \\ x_2 = 2x_1 \\ x_2 = 9 - x_1 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$



⑥ 满意解为点(3,6)

整数规划建模

整数规划建模

例1. 某厂生产A、B、C三种机器，都需要用到甲、乙、丙三种零件
每台机器的单位利润、零件消耗以及现有零件数量如下：

单耗＼零件 机器	甲(个)	乙(个)	丙(个)	利润（千元/台）
A(件)	6	80	50	8
B(件)	8	50	10	5
C(件)	7	60	30	7
现有零件	540	4000	2000	

问如何制定生产计划可使该厂利润最大，请建立数学模型。

① 将该问题看做线性规划建模问题并建立一个线性规划数学模型

① 设A机器的产量是x_1件，B机器的产量是x_2件，C机器的产量是x_3件

$\Rightarrow$ 甲零件共用了$6x_1+8x_2+7x_3$，乙零件共用了$80x_1+50x_2+60x_3$，

丙零件共用了$50x_1+10x_2+30x_3$，共赚了利润$8x_1+5x_2+7x_3$

$$\max z=8x_1+5x_2+7x_3$$

$$s.t.\begin{cases}6x_1+8x_2+7x_3\le 540\\80x_1+50x_2+60x_3\le 4000\\50x_1+10x_2+30x_3\le 2000\\x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

② 在大括号中各变量的取值范围后方加上限制条件“各变量都是整数”

① 设A机器的产量是x_1件，B机器的产量是x_2件，C机器的产量是x_3件

$\Rightarrow$ 甲零件共用了$6x_1+8x_2+7x_3$，乙零件共用了$80x_1+50x_2+60x_3$，

丙零件共用了$50x_1+10x_2+30x_3$，共赚了利润$8x_1+5x_2+7x_3$

$$\max z=8x_1+5x_2+7x_3$$

$$s.t.\begin{cases}6x_1+8x_2+7x_3\le 540\\80x_1+50x_2+60x_3\le 4000\\50x_1+10x_2+30x_3\le 2000\\x_1,x_2,x_3\ge 0,\ x_1,x_2,x_3\ \text{都是整数}\end{cases}$$

②

例2. 某厂拟从 A、B、C 三个城市选建几个经销联营点，现各城市设点所需的资金、人力、设备和利润如下，为使利润最大，问厂方应选择哪几个城市设点，建立数学模型

资源 / 城市	应投资金（百万元）	应投人力（人）	应投设备（套）	获利（10万元）
A	4	5	1	4.5
B	6	4	1	3.8
C	12	12	1	9.5
资源限制	15	10	2	

①设第1个东西有 $x_1=\begin{cases}1 & \text{选择该东西}\\0 & \text{不选择该东西}\end{cases}$

第2个东西有 $x_2=\begin{cases}1 & \text{选择该东西}\\0 & \text{不选择该东西}\end{cases}$

⋮　⋮　⋮

① 设 A 城市有 $x_1=\begin{cases}1 & \text{选择A城市}\\0 & \text{不选择A城市}\end{cases}$　B城市有 $x_2=\begin{cases}1 & \text{选择B城市}\\0 & \text{不选择B城市}\end{cases}$

C 城市有 $x_3=\begin{cases}1 & \text{选择C城市}\\0 & \text{不选择C城市}\end{cases}$

⇒ 资金共用了 $4x_1+6x_2+12x_3$，人力共用了 $5x_1+4x_2+12x_3$

设备共用了 $x_1+x_2+x_3$，共赚了利润 $4.5x_1+3.8x_2+9.5x_3$

②确定目标函数 $\max z=c_1\cdot x_1+c_2\cdot x_2+\cdots+c_n\cdot x_n$

或 $\min z=c_1\cdot x_1+c_2\cdot x_2+\cdots+c_n\cdot x_n$

① 设 A 城市有 $x_1=\begin{cases}1 & \text{选择A城市}\\0 & \text{不选择A城市}\end{cases}$　B城市有 $x_2=\begin{cases}1 & \text{选择B城市}\\0 & \text{不选择B城市}\end{cases}$

C 城市有 $x_3=\begin{cases}1 & \text{选择C城市}\\0 & \text{不选择C城市}\end{cases}$

⇒ 资金共用了 $4x_1+6x_2+12x_3$，人力共用了 $5x_1+4x_2+12x_3$

设备共用了 $x_1+x_2+x_3$，共赚了利润 $4.5x_1+3.8x_2+9.5x_3$

② $\max z=4.5x_1+3.8x_2+9.5x_3$

③列个"s.t.{"把各个约束条件列上去

① 设 A 城市有 $x_1=\begin{cases}1 & \text{选择A城市}\\0 & \text{不选择A城市}\end{cases}$　B城市有 $x_2=\begin{cases}1 & \text{选择B城市}\\0 & \text{不选择B城市}\end{cases}$

C 城市有 $x_3=\begin{cases}1 & \text{选择C城市}\\0 & \text{不选择C城市}\end{cases}$

⇒ 资金共用了 $4x_1+6x_2+12x_3$，人力共用了 $5x_1+4x_2+12x_3$

设备共用了 $x_1+x_2+x_3$，共赚了利润 $4.5x_1+3.8x_2+9.5x_3$

② $\max z=4.5x_1+3.8x_2+9.5x_3$

③ $s.t.\begin{cases}4x_1+6x_2+12x_3\le 15\\5x_1+4x_2+12x_3\le 10\\x_1+x_2+x_3\le 2\end{cases}$

④在"{"最后写上 $x_1=0,1$，$x_2=0,1\cdots$

① 设 A 城市有 $x_1=\begin{cases}1 & \text{选择A城市}\\0 & \text{不选择A城市}\end{cases}$　B城市有 $x_2=\begin{cases}1 & \text{选择B城市}\\0 & \text{不选择B城市}\end{cases}$

C 城市有 $x_3=\begin{cases}1 & \text{选择C城市}\\0 & \text{不选择C城市}\end{cases}$

⇒ 资金共用了 $4x_1+6x_2+12x_3$，人力共用了 $5x_1+4x_2+12x_3$

设备共用了 $x_1+x_2+x_3$，共赚了利润 $4.5x_1+3.8x_2+9.5x_3$

② $\max z=4.5x_1+3.8x_2+9.5x_3$

③④ $s.t.\begin{cases}4x_1+6x_2+12x_3\le 15\\5x_1+4x_2+12x_3\le 10\\x_1+x_2+x_3\le 2\\x_1=0,1,\ x_2=0,1,\ x_3=0,1\end{cases}$

匈牙利法

指派问题

例1.求下表所示效率矩阵的指派问题的最小解

人员	任务				
	A	B	C	D	E
甲	13	7	8	7	10
乙	7	8	6	6	6
丙	7	18	10	13	9
丁	14	15	6	6	9
戊	4	9	8	10	9

① 写出系数矩阵

$$\begin{pmatrix} 13 & 7 & 8 & 7 & 10 \\ 7 & 8 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 18 & 10 & 13 & 9 \\ 14 & 15 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 9 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix} \longleftarrow \boxed{\text{系数矩阵：表格中所有数字组成的矩阵}}$$

② 将系数矩阵的每一行的各元素都减去本行的最小元素

$$\begin{pmatrix} 13 & 7 & 8 & 7 & 10 \\ 7 & 8 & 6 & 6 & 6 \\ 7 & 18 & 10 & 13 & 9 \\ 14 & 15 & 6 & 6 & 9 \\ 4 & 9 & 8 & 10 & 9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 13-7 & 7-7 & 8-7 & 7-7 & 10-7 \\ 7-6 & 8-6 & 6-6 & 6-6 & 6-6 \\ 7-7 & 18-7 & 10-7 & 13-7 & 9-7 \\ 14-6 & 15-6 & 6-6 & 6-6 & 9-6 \\ 4-4 & 9-4 & 8-4 & 10-4 & 9-4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

③ 将②结果的每一列的各元素都减去本列的最小元素

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6-0 & 0-0 & 1-0 & 0-0 & 3-0 \\ 1-0 & 2-0 & 0-0 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 11-0 & 3-0 & 6-0 & 2-0 \\ 8-0 & 9-0 & 0-0 & 0-0 & 3-0 \\ 0-0 & 5-0 & 4-0 & 6-0 & 5-0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

④ 标记所有的0元素(圈出或者划掉)

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & \cancel{0} & 3 \\ 1 & 2 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 0 & \cancel{0} & 3 \\ \cancel{0} & 5 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

a. 找到只有一个0元素的行，取其中的一行，圈出该行0元素，划掉这个0元素同列的其他0元素，重复进行该步骤，直到找不到只有一个0元素的行则进行步骤b

b. 找到只有一个0元素的列，取其中的一列，圈出该列0元素，划掉这个0元素同行的其他0元素，重复进行该步骤，直到找不到只有一个0元素的列则进行步骤c

c. 看一下是否还有包含两个或两个以上0元素的行，若有则进行步骤d，若没有则圈出剩下的0并进行步骤⑤

d. 选择0元素最少的一行(若有不止一行的0元素都最少那么随便选择一行就行)，看一下本行哪个0元素所在列的0元素个数最少(若有不止一个0元素所在列的0元素个数都最少，那么随便选择一个就行)，圈出这个0元素，并划掉这个0元素同行以及同列的其他0元素，继续进行步骤c

⑤若圈出的0元素数等于矩阵的行列数，则继续步骤⑩

若圈出的0元素数小于矩阵的行列数，则继续步骤⑥

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & \cancel{0} & 3 \\ 1 & 2 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 0 & \cancel{0} & 3 \\ \cancel{0} & 5 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

圈出0元素数：4＜矩阵行列数：5

⑥打"√"

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & \cancel{0} & 3 \\ 1 & 2 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 0 & \cancel{0} & 3 \\ \cancel{0} & 5 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{matrix} \\ \begin{matrix} \surd & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} & \end{array} \longleftarrow$$

a. 在没有⓪的行右边打"√"

b. 在已打"√"的行中所有含$\cancel{0}$的列下面打"√"，若无法进行，则进行步骤d

c. 在打"√"的列中⓪所在的行右边打"√"，继续进行步骤b，若无法进行，则进行步骤d

d. 在没有打"√"的行画横线，在打"√"的列画竖线

⑦找出未画直线的区域中的最小元素

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & \cancel{0} & 3 \\ 1 & 2 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 0 & \cancel{0} & 3 \\ \cancel{0} & 5 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{matrix} \\ \begin{matrix} \surd & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} & \end{array}$$

⑧将打"√"行的各元素都减去该最小元素

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & \cancel{0} & 3 \\ 1 & 2 & \cancel{0} & \cancel{0} & 0 \\ 0 & 11 & 3 & 6 & 2 \\ 8 & 9 & 0 & \cancel{0} & 3 \\ \cancel{0} & 5 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{matrix} \\ \begin{matrix} \surd & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0-2 & 11-2 & 3-2 & 6-2 & 2-2 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0-2 & 5-2 & 4-2 & 6-2 & 5-2 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{matrix} \\ \begin{matrix} \surd & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 1 & 4 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{matrix} \\ \begin{matrix} \surd & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} & \end{array}$$

⑨将打"√"列的各元素都加上该最小元素，继续进行步骤④

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 1 & 4 & 0 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{matrix} \\ \begin{matrix} \surd & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 6+2 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1+2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2+2 & 9 & 1 & 4 & 0 \\ 8+2 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ -2+2 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{matrix} \\ \begin{matrix} \surd & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 4 & 0 \\ 10 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{matrix} \\ \begin{matrix} \surd & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} & \end{array}$$

④标记所有的0元素(圈出或者划掉)

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 1 & 4 & 0 \\ 10 & 9 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \surd \\ \\ \surd \end{matrix} \\ \begin{matrix} \surd & \quad & \quad & \quad & \quad \end{matrix} & \end{array} \longrightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & \cancel{0} & 3 \\ 3 & 2 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 9 & 1 & 4 & 0 \\ 10 & 9 & 0 & \cancel{0} & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

⑧若圈出的0元素数等于矩阵的行列数，则继续步骤⑨

若圈出的0元素数小于矩阵的行列数，则继续步骤⑥

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & \cancel{0} & 3 \\ 3 & 2 & \cancel{0} & 0 & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 9 & 1 & 4 & 0 \\ 10 & 9 & 0 & \cancel{0} & 3 \\ 0 & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

圈出0元素数：5=矩阵行列数：5

⑨观察0元素的位置，在原表格中标记出对应的位置

即可得到指派方案

$$\begin{pmatrix} 8 & \boxed{0} & 1 & \cancel{0} & 3 \\ 3 & 2 & \cancel{0} & \boxed{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 9 & 1 & 4 & \boxed{0} \\ 10 & 9 & \boxed{0} & \cancel{0} & 3 \\ \boxed{0} & 3 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

人员	任务				
	A	B	C	D	E
甲	13	7	8	7	10
乙	7	8	6	6	6
丙	7	18	10	13	9
丁	14	15	6	6	9
戊	4	9	8	10	9

⑩∴最小解是甲做B任务，乙做D任务，丙做E任务，丁做C任务，戊做A任务

最速下降法

例 求 $S = f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 10x_1 - 4x_2 + 60$ 的极小值点， $\varepsilon=0.1$

解:①从起点 $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 出发：

a.计算该点梯度：$G^{(0)} = \nabla f(X^{(0)}) = \begin{bmatrix} g_1^{(0)} \\ g_2^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - 10 \\ 2x_2 - x_1 - 4 \end{bmatrix}_{X^{(0)}} = \begin{bmatrix} -10 \\ -4 \end{bmatrix}$

b.计算该梯度的单位方向：$E^{(0)} = \begin{bmatrix} e_1^{(0)} \\ e_2^{(0)} \end{bmatrix} = \dfrac{G^{(0)}}{\|G^{(0)}\|} = \begin{bmatrix} \dfrac{g_1^{(0)}}{\|G^{(0)}\|} \\ \dfrac{g_2^{(0)}}{\|G^{(0)}\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.93 \\ -0.37 \end{bmatrix}$

c.以 $E^{(0)}$ 的反方向 $P^{(0)} = -E^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.93 \\ 0.37 \end{bmatrix}$ 为一维搜索方向

在此方向上寻找最优步长 $h^{(0)}$ 使得：

$$J(h^{(0)}) = f(X^{(0)} + h^{(0)} \cdot P^{(0)}) = \underset{h}{Min}\, f(X^{(0)} + h \cdot P^{(0)}) = \underset{h}{Min}\, f(0.93h, 0.37h)$$

$$= 0.6577h^2 - 10.78h + 60 \qquad 令 \frac{dJ(h)}{dh} = 0, 得 h^{(0)} = 8.21946$$

d.求得新点 $X^{(1)} = X^{(0)} + h^{(0)} \cdot P^{(0)} = \begin{bmatrix} 7.63 \\ 3.05 \end{bmatrix}$

②从点 $X^{(1)}$ 出发，照此进行下去，直至满足给定的精度 $\varepsilon=0.1$ 为止

$|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)})| < 0.1$ 或 $\|G^{(k)}\| < 0.1$

最后得极小值点为：$X^* \approx (8,6)^T, f(X^*) \approx 8$

计算结果见下表：

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$g_1^{(k)} = 2x_1 - x_2 - 10$	$g_2^{(k)} = 2x_2 - x_1 - 4$	$\|\|G^{(k)}\|\|$	$e_1 = \frac{g_1^{(k)}}{\|\|G^{(k)}\|\|}$	$e_2 = \frac{g_2^{(k)}}{\|\|G^{(k)}\|\|}$	$h^{(k)}$	$f(X^{(k)})$	$\|f(X^{(k+1)}) - f(X^{(k)})\|$
0	0	0	-10	-4	10.77	-0.93	-0.37	8.22	60	
1	7.63	3.05	2.21	-5.53	5.59	0.37	-0.93	2.21	15.74	44.26
2	6.81	5.11	-1.49	-0.60	1.60	-0.93	-0.37	1.22	9.15	6.59
3	7.95	5.56	0.33	-0.82	0.89	0.37	-0.93	0.33	8.17	0.98
4	7.82	5.87	-0.22	-0.09	0.24	-0.93	-0.37	0.18	8.03	0.14
5	7.99	5.93	0.05	-0.12	0.13	0.37	-0.928	0.05	8.0037	0.026

$$\therefore x^* \approx (8,6)^T, f^*_{max} \approx 8$$

共轭梯度法

例 求 $S = f(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 10x_1 - 4x_2 + 60$ 的极小值点。

解：① 从起点$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$出发，

搜索方向为：$P^{(0)} = -G^{(0)} = -\nabla f(X^{(0)}) = -\begin{bmatrix} g_1^{(0)} \\ g_2^{(0)} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2x_1 - x_2 - 10 \\ 2x_2 - x_1 - 4 \end{bmatrix}_{X^{(0)}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$J(h) = f(X^{(0)} + h \cdot P^{(0)}) = f(10h, 4h) = 76h^2 - 116h + 60$$

令$\frac{dJ(h)}{dh} = 152h - 116 = 0$，得最优步长$h^{(0)} = 0.763157894$

求得新点 $X^{(1)} = X^{(0)} + h^{(0)} \cdot P^{(0)} = \begin{bmatrix} 7.63 \\ 3.05 \end{bmatrix}$

② 从起点$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 7.63 \\ 3.05 \end{bmatrix}$出发，

搜索方向为：$P^{(1)} = -G^{(1)} + \beta^{(0)} \cdot P^{(0)} = -G^{(1)} + \frac{[G^{(1)}]^T \cdot G^{(1)}}{[G^{(0)}]^T \cdot G^{(0)}} \cdot P^{(0)}$

$$= -\begin{bmatrix} g_1^{(1)} \\ g_2^{(1)} \end{bmatrix} + \frac{g_1^{(1)2} + g_2^{(1)2}}{g_1^{(0)2} + g_2^{(0)2}} \cdot P^{(0)} = \begin{bmatrix} -2.2105 \\ 5.526 \end{bmatrix} + \frac{35.4226}{116} \cdot \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8435 \\ 6.7479 \end{bmatrix}$$

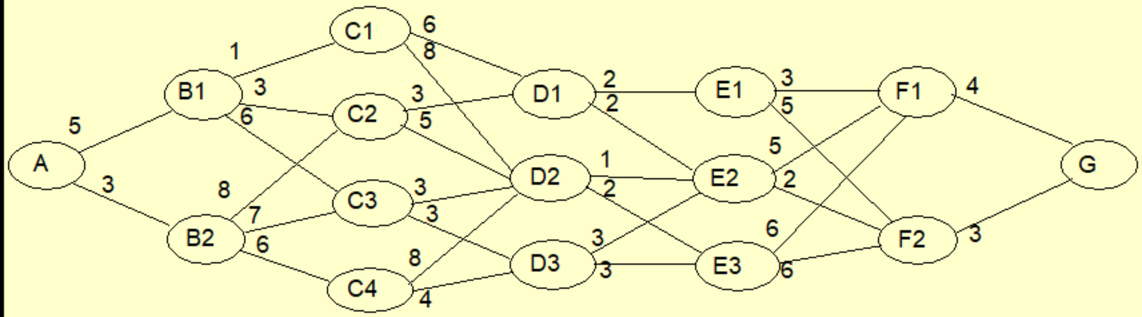
$$J(h) = f(X^{(1)} + h \cdot P^{(1)}) = f(7.63 + 0.8435h, 3.05 + 6.7479h)$$

令$\frac{dJ(h)}{dh} = 0$，得最优步长$h^{(1)} = 0.43678$

求得新点 $X^{(2)} = X^{(1)} + h^{(1)} \cdot P^{(1)} = \begin{bmatrix} 7.9993 \\ 5.9997 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \end{bmatrix}$，$S^{(2)} = 8$，为所求的极小点。

动态规划最短路径

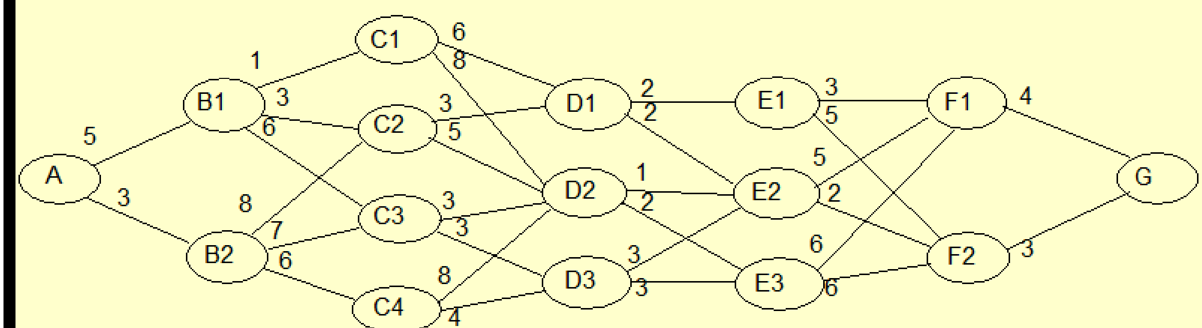
例　最短路问题



当k=6时

s_6	u_6	$v_6(s_6, u_6)+f_7(s_7)$	$f_6(s_6)$
F_1	F_1G	4+0=4*	4
F_2	F_2G	3+0=3*	3

例　最短路问题



当k=5时

s_5	u_5	$v_5(s_5, u_5)+f_6(s_6)$	$f_5(s_5)$
E_1	E_1F_1	3+4=7*	7
	E_1F_2	5+3=8	
E_2	E_2F_1	5+4=9	5
	E_2F_2	2+3=5*	
E_3	E_3F_1	6+4=10	9
	E_3F_2	6+3=9*	

当k=4时

s_4	u_4	$v_4(s_4, u_4)+f_5(s_5)$	$f_4(s_4)$
D_1	D_1E_1 D_1E_2	2+7=9 2+5=7*	7
D_2	D_2E_2 D_2E_3	1+5=6* 2+9=11	6
D_3	D_3E_2 D_3E_3	3+5=8* 3+9=12	8

当k=3时

s_3	u_3	$v_3(s_3, u_3)+f_4(s_4)$	$f_3(s_3)$
C_1	C_1D_1 C_1D_2	6+7=13* 8+6=14	13
C_2	C_2D_1 C_2D_2	3+7=10* 5+6=11	10
C_3	C_3D_2 C_3D_3	3+6=9* 3+8=11	9
C_4	C_4D_2 C_4D_3	8+6=14 4+8=12*	12

当k=2时

s_2	u_2	$v_2(s_2, u_2)+f_3(s_3)$	$f_2(s_2)$
B_1	B_1C_1 B_1C_2 B_1C_3	1+13=14 3+10=13* 6+9=15	13
B_2	B_2C_2 B_2C_3 B_2C_4	8+9=17 7+9=16* 6+12=18	16

当k=1时

s_1	u_1	$v_1(s_1, u_1)+f_2(s_2)$	$f_1(s_1)$
A	AB_1 AB_2	5+13=18* 3+16=19	18

由此可以看出，A到G的最短路长为18，路径为：$A \to B_1 \to C_2 \to D_1 \to E_2 \to F_2 \to G$

动态规划建模

动态规划建模

例1.现有5台设备，分配给甲、乙、丙三个工厂，收益如表

请建立动态规划模型

工厂＼设备	0	1	2	3	4	5
甲	0	4	6	11	11	11
乙	0	5	9	11	12	12
丙	0	3	7	9	11	12

①把什么东西分给谁，那么谁的总数就是n

① 东西=设备　谁=工厂　工厂的总数n=3　　(草稿纸)

②确定阶段变量k: k=1,2,⋯,n

① 东西=设备　谁=工厂　工厂的总数n=3　　(草稿纸)

② 阶段变量k：k=1,2,3

③确定状态变量s_k: s_k是分配给第k个谁到第n个谁的东西数

① 东西=设备　谁=工厂　工厂的总数n=3　　(草稿纸)

② 阶段变量k：k=1,2,3

③ 状态变量s_k：s_k是分配给第k个工厂到第3个工厂的设备数

④确定决策变量x_k: x_k是分配给第k个谁的东西数

① 东西=设备　谁=工厂　工厂的总数n=3　　(草稿纸)

② 阶段变量k：k=1,2,3

③ 状态变量s_k：s_k是分配给第k个工厂到第3个工厂的设备数

④ 决策变量x_k：x_k是分配给第k个工厂的设备数

⑤确定确定状态转移方程s_{k+1}: $s_{k+1}=s_k-x_k$

① 东西=设备　谁=工厂　工厂的总数n=3　　(草稿纸)

② 阶段变量k：k=1,2,3

③ 状态变量s_k：s_k是分配给第k个工厂到第3个工厂的设备数

④ 决策变量x_k：x_k是分配给第k个工厂的设备数

⑤ 状态转移方程s_{k+1}：$s_{k+1}=s_k-x_k$

⑥确定阶段指标函数$P_k(x_k)$: 第k个谁分配x_k的东西时的收益

① 东西=设备　谁=工厂　工厂的总数n=3　　(草稿纸)

② 阶段变量k：k=1,2,3

③ 状态变量s_k：s_k是分配给第k个工厂到第3个工厂的设备数

④ 决策变量x_k：x_k是分配给第k个工厂的设备数

⑤ 状态转移方程s_{k+1}：$s_{k+1}=s_k-x_k$

⑥ 阶段指标函数$P_k(x_k)$：第k个工厂分配x_k台设备时的收益

⑦ 确定最优指标函数$f_k(s_k)$：第k个谁到第n个谁分配s_k的东西时的最大收益

① 东西=设备　谁＝工厂　工厂的总数n＝3　（草稿纸）

② 阶段变量k：k=1,2,3

③ 状态变量s_k：s_k是分配给第k个工厂到第3个工厂的设备数

④ 决策变量x_k：x_k是分配给第k个工厂的设备数

⑤ 状态转移方程s_{k+1}：$s_{k+1}=s_k-x_k$

⑥ 阶段指标函数$P_k(x_k)$：第k个工厂分配x_k台设备时的收益

⑦ 最优指标函数$f_k(s_k)$：第k个工厂到第3个工厂分配s_k的设备时的最大收益

⑧ 写出方程

$$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\le x_k\le s_k}[P_k(x_k)+f_{k+1}(s_k-x_k)] \quad k=n,n-1,\cdots 1 \\ f_{n+1}(s_{n+1})=0 \end{cases}$$

① 东西=设备　谁＝工厂　工厂的总数n＝3　（草稿纸）

② 阶段变量k：k=1,2,3

③ 状态变量s_k：s_k是分配给第k个工厂到第3个工厂的设备数

④ 决策变量x_k：x_k是分配给第k个工厂的设备数

⑤ 状态转移方程s_{k+1}：$s_{k+1}=s_k-x_k$

⑥ 阶段指标函数$P_k(x_k)$：第k个工厂分配x_k台设备时的收益

⑦ 最优指标函数$f_k(s_k)$：第k个工厂到第3个工厂分配s_k的设备时的最大收益

⑧ $$\begin{cases} f_k(s_k)=\max\limits_{0\le x_k\le s_k}[P_k(x_k)+f_{k+1}(s_k-x_k)] \quad k=3,2,1 \\ f_4(s_4)=0 \end{cases}$$

动态规划求解

动态规划求解

例1. 现有5台设备，分配给甲、乙、丙三个工厂，收益如表

请问如何分配可得最大收益

工厂＼设备	0	1	2	3	4	5
甲	0	4	8	11	11	11
乙	0	5	9	11	12	12
丙	0	3	7	9	11	12

① 把什么东西分给谁，那么谁的总数就是n，东西的总数就是m

① 东西=设备　谁＝工厂　n＝3　m=5

② 画出初始表格，并填表

① 东西=设备　谁＝工厂　n＝3　m=5

k=3

s_3＼x_3	$P_3(x_3)+f_4(s_4)$						$f_3(s_3)$	x_3^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1		3					3	1
2			7				7	2
3				9			9	3
4					11		11	4
5						12	12	5

s_k＼x_k	$P_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})$					$f_k(s_k)$	x_k^*
	0	1	2	···	m		
0							
1							
2							
⋮							
m							

1. 将题目中第k个谁的收益按照从少到多的顺序填入P_k+f_{k+1}下方空格区域的左上方到右下方对角线上
2. $f_k(s_k)$空格中填入他所在行的P_k+f_{k+1}区域的值
3. x_k^*列空格中依次填入x_k行的值

③ 只保留该表格的s_k列和$f_k(s_k)$列

① 东西=设备　谁＝工厂　n＝3　m=5

s_3	$f_3(s_3)$
0	0
1	3
2	7
3	9
4	11
5	12

④ 画新表格，并填表【新表格中(k=前一个表格中的下标−1)】

若k≥2则画如下表格A，然后进行步骤⑤

若k=1则画如下表格B，然后进行步骤⑥

① 东西=设备　谁＝工厂　n＝3　m=5

s_3	$f_3(s_3)$
0	0
1	3
2	7
3	9
4	11
5	12

A

x_k / s_k	$P_k(x_k)+f_{k+1}(s_{k+1})$					$f_k(s_k)$	x_k^*
	0	1	2	…	m		
0							
1							
2							
⋮							
m							

1. 找到P_k+f_{k+1}下方空格区域的左上方到右下方对角线，在该对角线下方做这条对角线的平行线，使这些线经过所有下方的空格
2. 将题目中第k个谁的收益按照从小到大的顺序排列，将排列好的数字按照从左上到右下的顺序依次填入每条直线所经过的空格中，每条直线填到不能填为止
3. 将前一个表格中的f的值按照从小到大的顺序依次填入每一列格子的划线部分，每一列填到不能填为止
4. 将有数字的格子中的数字相加，求出值
5. $f_k(s_k)$空格中填入他所在行的P_k+f_{k+1}区域的最大值
6. x_k^*空格中填入他所在行的P_k+f_{k+1}区域的最大值对应的x_k值

k=2

x_2 / s_2	$P_2(x_2)+f_3(s_3)$						$f_2(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	3	5					5	1
2	7	8	9				9	2
3	9	12	12	11			12	1,2
4	11	14	16	14	12		16	2
5	12	16	18	18	15	12	18	2,3

⑤ 只保留该表格的s_k列和$f_k(s_k)$列

① 东西=设备　谁＝工厂　n＝3　m=5

s_2	$f_2(s_2)$
0	0
1	5
2	9
3	12
4	16
5	18

④ 画新表格，并填表【新表格中(k=前一个表格中的下标−1)】

若k≥2则画如下表格A，然后进行步骤⑤

若k=1则画如下表格B，然后进行步骤⑥

① 东西=设备　谁＝工厂　n＝3　m=5

s_2	$f_2(s_2)$
0	0
1	5
2	9
3	12
4	16
5	18

B

x_1 / s_1	$P_1(x_1)+f_2(s_2)$						$f_1(s_1)$	x_1^*
	0	1	2	3	…	m		
m								

1. 将题目中第k个谁的收益按照从少到多的顺序排列，将排列好的数字依次填入P_k+f_{k+1}区域的空格中
2. 将前一个表中f的值从大到小依次填入P_k+f_{k+1}区域的格子中
3. 将有数字的格子中的数字相加，求出值
4. $f_k(s_k)$空格中填入他所在行的P_k+f_{k+1}区域的最大值
5. x_k^*空格中填入他所在行的P_k+f_{k+1}区域的最大值对应的x_k值

k=1

x_1 / s_1	$P_1(x_1)+f_2(s_2)$						$f_1(s_1)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5		
5	18	20	20	20	16	11	20	1,2,3

⑮ 将表中x_1^*的值写出来，在每个值下面写上对应的$s_2=s_1-x_1^*$

① 东西=设备　谁=工厂　n=3　m=5

k=1

x_1 \ s_1	$P_1(x_1)+f_2(s_2)$						$f_1(s_1)$	x_1^*
	0	1	2	3	4	5		
5	18	20	20	20	16	11	20	1,2,3

s_2	$f_2(s_2)$
0	0
1	5
2	9
3	12
4	16
5	18

$x_1^*=1$
$s_2=s_1-x_1^*$
$x_1^*=2$
$s_2=s_1-x_1^*$
$x_1^*=3$
$s_2=s_1-x_1^*$

$\Rightarrow$

$x_1^*=1$
$s_2=5-1$
$x_1^*=2$
$s_2=5-2$
$x_1^*=3$
$s_2=5-3$

$\Rightarrow$

$\boxed{x_1^*=1,\ s_2=4}$
$\boxed{x_1^*=2,\ s_2=3}$
$\boxed{x_1^*=3,\ s_2=2}$

⑯ 现在的$s_{新}$是啥，那我们就看一下$s_{新}$对应的大表，看一下各$s_{新}$在表中对应的$x_{新}^*$是多少，并分别写出来，若找不到$s_{新}$对应的大表，则进行步骤③

x_2 \ s_2	$P_2(x_2)+f_3(s_3)$						$f_2(s_2)$	x_2^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1	3	5					5	1
2	7	8	9				9	2
3	9	12	12	11			12	1,2
4	11	14	16	14	12		16	2
5	12	16	18	18	15	12	18	2,3

$\boxed{x_1^*=1,\ s_2=4}$ → $x_2^*=2$, $s_3=s_2-x_2^*$
$\boxed{x_1^*=2,\ s_2=3}$ → $x_2^*=1$, $s_3=s_2-x_2^*$; $x_2^*=2$, $s_3=s_2-x_2^*$
$\boxed{x_1^*=3,\ s_2=2}$ → $x_2^*=2$, $s_3=s_2-x_2^*$

$\Rightarrow$

$\boxed{x_1^*=1,\ s_2=4}$ → $x_2^*=2$, $s_3=4-2$
$\boxed{x_1^*=2,\ s_2=3}$ → $x_2^*=1$, $s_3=3-1$; $x_2^*=2$, $s_3=3-2$
$\boxed{x_1^*=3,\ s_2=2}$ → $x_2^*=2$, $s_3=2-2$

$\Rightarrow$

$\boxed{x_1^*=1,\ s_2=4}$ → $\boxed{x_2^*=2,\ s_3=2}$
$\boxed{x_1^*=2,\ s_2=3}$ → $\boxed{x_2^*=1,\ s_3=2}$; $\boxed{x_2^*=2,\ s_3=1}$
$\boxed{x_1^*=3,\ s_2=2}$ → $\boxed{x_2^*=2,\ s_3=0}$

$\Downarrow$

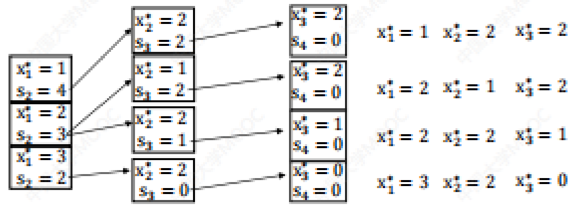
x_3 \ s_3	$P_3(x_3)+f_4(s_4)$						$f_3(s_3)$	x_3^*
	0	1	2	3	4	5		
0	0						0	0
1		3					3	1
2			7				7	2
3				9			9	3
4					11		11	4
5						12	12	5

$\boxed{x_1^*=1,\ s_2=4}$ → $\boxed{x_2^*=2,\ s_3=2}$ → $x_3^*=2$, $s_4=2-2=0$
$\boxed{x_1^*=2,\ s_2=3}$ → $\boxed{x_2^*=1,\ s_3=2}$ → $x_3^*=2$, $s_4=2-2=0$
$\boxed{x_1^*=2,\ s_2=3}$ → $\boxed{x_2^*=2,\ s_3=1}$ → $x_3^*=1$, $s_4=1-1=0$
$\boxed{x_1^*=3,\ s_2=2}$ → $\boxed{x_2^*=2,\ s_3=0}$ → $x_3^*=0$, $s_4=0-0=0$

$\Downarrow$

$\boxed{x_1^*=1,\ s_2=4}$ → $\boxed{x_2^*=2,\ s_3=2}$ → $\boxed{x_3^*=2,\ s_4=0}$
$\boxed{x_1^*=2,\ s_2=3}$ → $\boxed{x_2^*=1,\ s_3=2}$ → $\boxed{x_3^*=2,\ s_4=0}$
$\boxed{x_1^*=2,\ s_2=3}$ → $\boxed{x_2^*=2,\ s_3=1}$ → $\boxed{x_3^*=1,\ s_4=0}$
$\boxed{x_1^*=3,\ s_2=2}$ → $\boxed{x_2^*=2,\ s_3=0}$ → $\boxed{x_3^*=0,\ s_4=0}$

⑥找一下每一条路径上的x_k^*的值，就能求得最优分配方案



$x_1^* = 1 \quad x_2^* = 2 \quad x_3^* = 2$

甲工厂分配1台设备，乙工厂分配2台设备，丙工厂分配2台设备

$x_1^* = 2 \quad x_2^* = 1 \quad x_3^* = 2$

甲工厂分配2台设备，乙工厂分配1台设备，丙工厂分配2台设备

$x_1^* = 2 \quad x_2^* = 2 \quad x_3^* = 1$

甲工厂分配2台设备，乙工厂分配2台设备，丙工厂分配1台设备

$x_1^* = 3 \quad x_2^* = 2 \quad x_3^* = 0$

甲工厂分配2台设备，乙工厂分配2台设备，丙工厂分配1台设备