高等数学预备知识

§1．常见函数、方程、数列及不等式

【知识点 1】一元二次函数

1.定义及配方法

$$y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$$

【例】将 $y=x^2+4x+9$ 配方

【例】将 $y=3x^2-12x+12$ 配方

【例】将 $y=3x^2+2x-7$ 配方

2.性质

（1）图像是一条抛物线，顶点坐标$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$，对称轴 $x=-\frac{b}{2a}$.

（2）当$a>0$时，开口向上，在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处取最小值$\frac{4ac-b^2}{4a}$；

当$a<0$时，开口向下，在 $x=-\frac{b}{2a}$ 处取最大值$\frac{4ac-b^2}{4a}$；

（3）当$a>0$时，在区间$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$内单调递减，在$\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$内单调递增；

当$a<0$时，在区间$\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)$内单调递增，在$\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)$内单调递减

3.一元二次方程$\left(ax^2+bx+c=0, a\neq 0\right)$

方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根$\Leftrightarrow$ 函数 $y=ax^2+bx+c$ 的零点

（1）判别式$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta>0$时，则方程有两个不相等的实数根；

$\Delta=0$时，则方程有两个相等的实数根；

$\Delta<0$时，则方程无实数根.

（2）一元二次方程的根

①因式分解 $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

【例】将 $x^2-5x-14$ 因式分解

【例】将 $x^2+4x-32$ 因式分解

②求根公式 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

【例】将 $3x^2+2x-7$ 因式分解

【例】求 $\int\dfrac{2x+3}{x^2-2x-3}\mathrm{d}x$

【知识点 2】一元 n 次多项式

1.定义

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0(a_n\neq 0)$

【例】求 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 极值点的个数

2.乘法公式

（1）$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

（2）$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

（3）$(a+b)^n=C_n^0a^nb^0+C_n^1a^{n-1}b^1+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^{n-1}a^1b^{n-1}+C_n^na^0b^n$

（4）$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

（5）$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

（6）$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$

【例】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^2-x\ln(1+x)}$

【例】求 x^n-1

3.多项式的除法及因式分解

$f(x)=g(x)\varphi(x)+h(x)$

【例】计算 $\int\dfrac{x^3-x^2+2x-3}{x+1}\mathrm{d}x$

【例】求 $x^3+2x^2-13x+10=0$ 的根

【知识点 3】圆、椭圆、双曲线、抛物线的方程

1．圆的标准方程：当圆心为 $C(x_0,y_0)$，半径为 r，标准方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

【例】求定积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$

2.椭圆的标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(焦点在x轴\right)$ 或 $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1\left(焦点在y轴\right)$.

3.双曲线标准方程：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 或 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$.

4.抛物线标准方程：右开口 $y^2=2px$，上开口 $x^2=2py$

左开口 $y^2=-2px$，下开口 $x^2=-2py$

【知识点 4】数列

（一）数列

1.定义：按照一定次序排列起来的一列数.

2.数列的通项：$a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots\qquad\{a_n\}$

3.数列的增减：从第二项起，每一项大于前一项的数列，叫做递增数列，

$a_n > a_{n-1}, n = 2,3,4,\cdots$;

从第二项起，每一项小于前一项的数列，叫做递减数列， $a_n < a_{n-1}, n = 2,3,4,\cdots$.

4. 数列$\{a_n\}$的前n项S_n和与通项a_n的关系

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i，\quad S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$$

$$a_n = \begin{cases} S_1, & n = 1 \\ S_n - S_{n-1}, & n \geq 2 \end{cases}$$

（二）等差数列

1.定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与前一项的差等于同一个数，那么这个数列就叫等差数列.这个常数称为公差d.

2. 等差数列的通项公式

$$a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_m + (n-m)d$$

3. $d > 0$，数列单调递增；$d < 0$，数列单调递减；$d = 0$，常数列.

4. 等差数列的前n项和S_n

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

$$S_n = na_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$$

（三）等比数列

1.定义：如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比都等于同一个常数，那么这个

数列为等比数列.这个常数称为公比q $(q \neq 0)$.

2. 通项公式

$a_n = a_1 q^{n-1}$

$a_n = a_m q^{n-m}$

3. 等比数列的前n项和S_n

$$S_n = \begin{cases} na_1, & q = 1 \\ \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q} & q \neq 1 \end{cases}$$

【例】求$-1 < x < 1$时，求$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

【知识点 5】常见不等式

1. $a + b \geq 2\sqrt{ab}, a > 0, b > 0$，当$a = b$时等号成立

2. $ab \leq (\dfrac{a+b}{2})^2$，当$a = b$时等号成立

3. $-|a| \leq a \leq |a|$

4. $||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$

5. $a - 1 < [a] \leq a$，$[a]$叫对a取整，即不超过a的最大的整数

例 $y = [3.2] = 3$，$y = [-3.2] = -4$

【例】已知$x_{n+1} = \sqrt{x_n(3 - x_n)}$，证明$\{x_n\}$有界.

练习题:

1. 求$y = x^3 - 4x^2 - 19x - 4$的零点，并画出函数草图

【答案】$x = -2$，$x = -1$以及$x = 7$

2.求多项式 $2x^3-3x^2+7x+5$ 除 $x+2$ 的商与余数

【答案】 $2x^3-3x^2+7x+5=(x+2)(2x^2-7x+21)-37$

3.写出以（1,-2）为圆心，1 为半径的右半圆方程

【答案】 $y=1+\sqrt{-y^2-4y-3}$

4.将 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}$ 分母有理化

【答案】 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}}=\dfrac{x^{\frac{2}{3}}+a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}}{x-a}$

5.求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$

【答案】 $\dfrac{3}{2}$

§2．函数的定义与性质

【知识点 1】函数的定义

设 D 是一个非空的实数集，如果有一个对应规则 f，对每一个 $x\in D$，都能对应唯一的一个实数 y，则这个对应规则 f 称为定义在 D 上的一个函数，记以 $y=f(x)$，称 x 为函数的自变量，y 为函数的因变量或函数值，D 称为函数的定义域，并把实数集 $Z=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数的值域.

判断是否为同一个函数，只需要找两个条件：第一，看定义域是否相同；第二，看对应法则是否相同.如果满足以上两点，则一定是同一个函数.

【例】 圆的方程 $x^2+y^2=1$ 是函数吗?

【例】 $f(x)=\ln x^2$ 与 $g(x)=2\ln x$ 是同一个函数吗?

【例】 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求 $f(x^2)$ 与 $f(\sin x)$ 的定义域

【知识点 2】函数的有界性

设函数 $y=f(x)$ 在 X 内有定义,若存在正数 M ,使 $x\in X$ 都有 $\left|f\left(x\right)\right|\le M$ 则称 $f\left(x\right)$ 在 X 上是有界的.

【补充】若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$ 时的无穷大量

【注】无穷大量一定是无界量，无界量不一定是无穷大量

【例】函数 $y=x\sin x$ 在定义域是否有界，$\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin x$ 是否是无穷大量

【知识点 3】函数的奇偶性

设区间 X 关于原点对称，若对 $x\in X$ ，都有 $f\left(-x\right)=-f\left(x\right)$，则称 $f\left(x\right)$ 在 X 上是奇函数；若对 $x\in X$ ，都有 $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$，则称 $f\left(x\right)$ 在 X 上是偶函数。

【例】讨论函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ 的奇偶性

【注 1】偶函数图像关于 y 轴对称，奇函数图像关于原点对称；

【注 2】奇函数的导函数是偶函数，偶函数的导函数是奇函数。

奇函数的原函数是偶函数，偶函数的原函数不一定是奇函数。

【注 3】奇函数+奇函数=奇函数；偶函数+偶函数=偶函数；

奇函数+偶函数=非奇非偶函数。

奇函数×奇函数=偶函数；偶函数×偶函数=偶函数；

奇函数×偶函数=奇函数。

【例】判断下列函数的奇偶性

（1） $y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$　　（2） $y=3x^2-x^3$　　（3） $y=\sin x-\cos x+1$

（4） $y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$　　（5） $y=x(x-1)(x+1)$

【例】求定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\left|x\right|\right)\mathrm{d}x$

【知识点 4】函数的周期性

设 $f(x)$ 在 X 上有定义，如果存在常数 $T \neq 0$，使得任意 $x \in X$， $x+T \in X$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期.

由此可见，周期函数有无穷多个周期，一般我们把其中最小正周期称为周期.

【注】周期函数的导函数仍然是周期函数；周期函数的原函数未必是周期函数。

【例】函数 $y=\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2})$ 的最小正周期是（　）.

A π　　B 2π　　C -4π　　D 4π

【知识点 5】函数的单调性

设 $f(x)$ 在 X 上有定义，若对任意 $x_1 \in X$， $x_2 \in X$， $x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 X 上是单调增加的; 若对任意 $x_1 \in X$， $x_2 \in X$， $x_1 < x_2$ 都有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 X 上是单调不减.

设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导, 如果恒有 $f'(x)>0$ (<0) 则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调增加（单调减少）；如果恒有 $f'(x) \geq 0$ (≤ 0)，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调不减（单调不增）.

【注】函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内 $f'(x) \geqslant 0$，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调递增，反之不然.

【例】证明: $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x \geqslant 1+\frac{x^2}{2}(-1<x<1)$

【练习题】

1.判断 $f(x)=\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ 的奇偶性

【答案】偶函数

2.判断 $f(x)=x\left(\dfrac{1}{2^{x}-1}+\dfrac{1}{2}\right)$ 的奇偶性

【答案】偶函数

3.设 $f(x)$ 的定义域是 R，存在常数 $c\neq 0$，使 $f(x+c)=-f(x)$，证明 $f(x)$ 是周期函数

【解析】 $f(x+2c)=-f(x+c)=f(x)$

4.函数 $f(x)=x\cos x$

（A）在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界.　　（B）在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界.

（C） $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$.　　（D） $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 为常数.

【答案】(A)

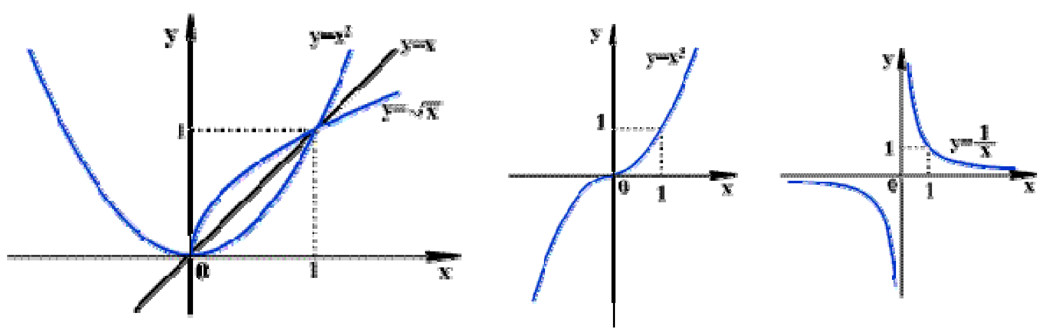
5.设函数 $f(x)=x\cdot\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是（　　）

（A）偶函数　　（B）无界函数　　（C）周期函数　　（D）单调函数

【答案】(B)

§3．基本初等函数

【知识点 1】幂函数 $y=x^{a}$ （a 为常数）



1.当 a 为正整数时

【1】定义域：$(-\infty,+\infty)$；

值域：a 为奇数时 $(-\infty,+\infty)$； a 为偶数时 $[0,+\infty)$

【2】有界性：无界；a 为偶数时有下界

【3】奇偶性：a 为奇数时，奇函数；a 为偶数时，偶函数

【4】周期性：非周期函数

【5】单调性：a 为奇数时，单调递增；

a 为偶数时，$(-\infty,0)$ 单调递减，$(0,+\infty)$ 单调递增

2.当 a 为负整数时

【1】定义域：$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；

值域：a 为奇数时 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$； a 为偶数时 $(0,+\infty)$

【2】有界性：无界；a 为偶数时有下界

【3】奇偶性：a 为奇数时，奇函数；a 为偶数时，偶函数

【4】周期性：非周期函数

【5】单调性：a 为奇数时，$(-\infty,0)$ 单调递减，$(0,+\infty)$ 单调递减

a 为偶数时，$(-\infty,0)$ 单调递增，$(0,+\infty)$ 单调递减

3.当 a 为正有理数 $\frac{1}{n}$ 时

【1】定义域：n 为奇数时，$(-\infty,+\infty)$； n 为偶数时 $[0,+\infty)$

值域：a 为奇数时 $(-\infty,+\infty)$； a 为偶数时 $[0,+\infty)$

【2】有界性：无界；a 为偶数时有下界

【3】奇偶性：n 为奇数时，奇函数；n 为偶数时，非奇非偶函数

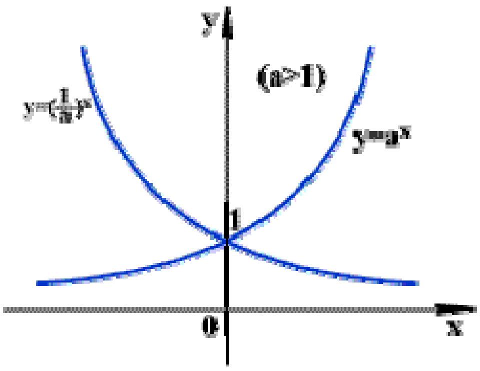
【4】周期性：非周期函数

【5】单调性：a 为奇数时，单调递增；a 为偶数时， $[0,+\infty)$ 单调递增

【例】求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+x^2}{x^2}$

【例】求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+x^2}{x^2}$

【知识点 2】指数函数$y=a^x$（a为常数且$a>0,\quad a\neq 1$）



【1】定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域：$(0,+\infty)$

【2】有界性：有下界，整体无界

【3】奇偶性：非奇非偶函数

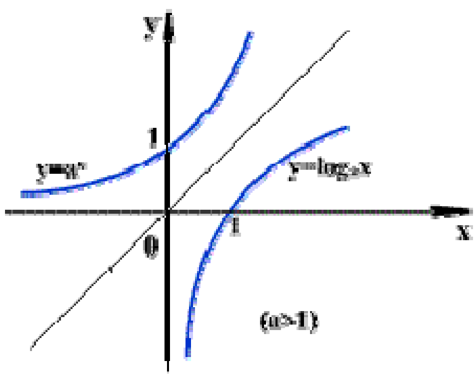
【4】周期性：非周期函数

【5】单调性：$a>1$时，单调递增；$a<1$时，单调递减.

【例】求极限$\lim\limits_{x\to +\infty}\mathrm{e}^x$

【例】求极限$\lim\limits_{x\to -\infty}\mathrm{e}^x$

【知识点 3】对数函数$y=\log_a x$（a为常数且$a>0,\quad a\neq 1$）



【1】定义域：$(0,+\infty)$；值域： $(-\infty,+\infty)$

【2】有界性：无界

【3】奇偶性：非奇非偶函数

【4】周期性：非周期函数

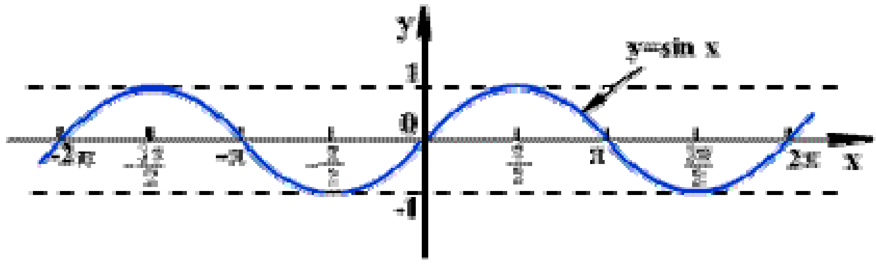
【5】单调性：$a>1$时，单调递增；$a<1$时，单调递减.

【例】试比较$x\to+\infty$时，$\mathrm{e}^x, x^n\,(n>0), \ln x$的大小关系

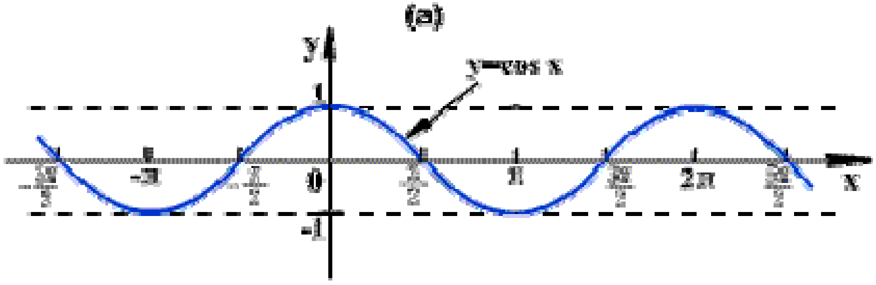
【知识点 4】三角函数

1.正弦函数 $y=\sin x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[-1,1]$，

余弦函数 $y=\cos x$，$x\in(-\infty,+\infty)$，$y\in[-1,1]$，



(a)



(b)

【1】定义域：$(-\infty,+\infty)$；值域： $[-1,1]$

【2】有界性：有界

【3】奇偶性：$y=\sin x$，奇函数；$y=\cos x$，偶函数

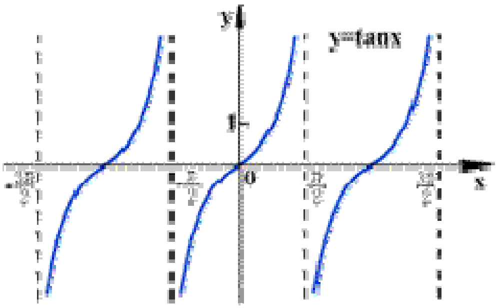
【4】周期性：$T=2\pi$

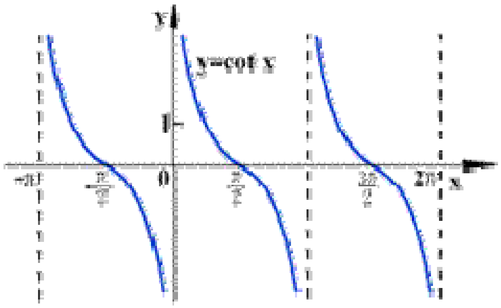
【5】单调性：$y=\sin x$：$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$时，单调递增；$y=\cos x$：$0<x<\pi$时，单调递

减.

2.正切函数 $y=\tan x$，$x \neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$，$k \in Z$，$y \in (-\infty,+\infty)$，

余切函数 $y=\cot x$，$x \neq k\pi$，$k \in Z$，$y \in (-\infty,+\infty)$；





【1】定义域：$y=\tan x$：$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；$y=\cot x$：$(0,\pi)$

值域：$(-\infty,+\infty)$

【2】有界性：无界

【3】奇偶性：奇函数

【4】周期性：$T=\pi$

【5】单调性：$y=\tan x$：$-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$时，单调递增；

$y=\cot x$：$0<x<\pi$时，单调递减.

【知识点 5】反三角函数

1.反正弦函数 $y=\arcsin x$，$x \in [-1,1]$，$y \in [-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$，

反余弦函数 $y=\arccos x$，$x \in [-1,1]$，$y \in [0,\pi]$，

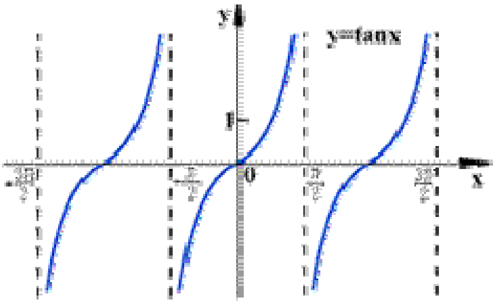


图 1-20(a)

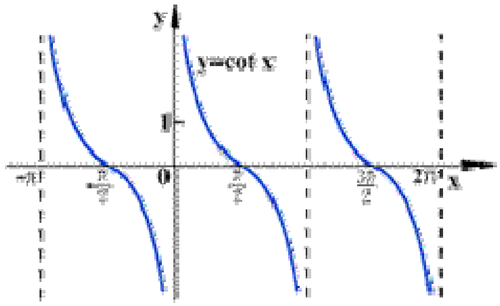
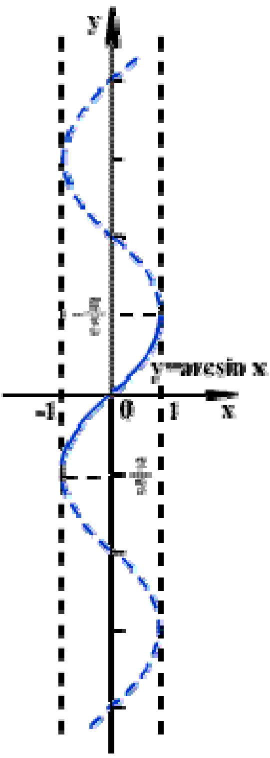
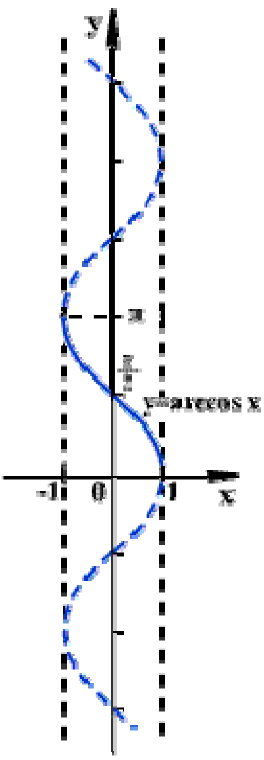


图 1-20(b)





【1】定义域：$[-1,1]$

值域： $y=\arcsin x: y\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]; y=\arccos x: y\in[0,\pi]$

【2】有界性：有界

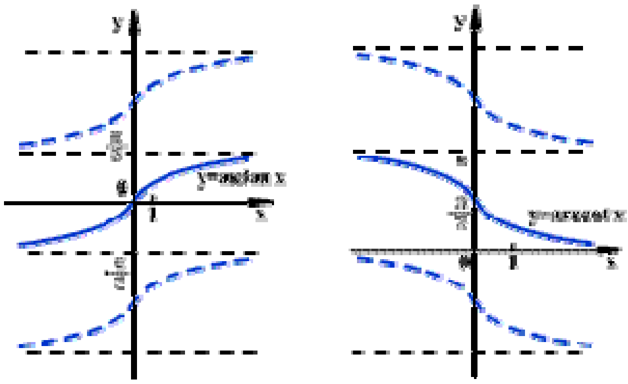
【3】奇偶性： $y=\arcsin x$： 奇函数； $y=\arccos x$： 非奇非偶函数.

【4】周期性：非周期函数

【5】单调性： $y=\arcsin x$： 单调递增； $y=\arccos x$： 单调递减.

2.反正切函数 $y=\arctan x$ ， $x\in(-\infty,+\infty)$ ， $y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ ，

反余切函数 $y = \text{arc}\cot x$，$x \in (-\infty, +\infty)$，$y \in (0, \pi)$.



【1】定义域：$(-\infty, +\infty)$

值域：$y = \arctan x : y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]; y = \text{arccot}\, x : y \in [0, \pi]$

【2】有界性：有界

【3】奇偶性：$y = \arctan x$：奇函数；$y = \text{arccot}\, x$：非奇非偶函数.

【4】周期性：非周期函数

【5】单调性：$y = \arctan x$：单调递增；$y = \text{arccot}\, x$：单调递减.

【例】试证明以下两式

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1)$$

$$\arctan x + \text{arc}\cot x = \frac{\pi}{2}$$

【注】常见不等关系

（1）$x > 0$ 时，$x > \sin x$；$x < 0$ 时 $x < \sin x$

（2）$0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x < x < \tan x$

（3）$x > 0$ 时，$x > \ln(1+x)$

（4）$x \in R$ 时，$e^x - 1 \geqslant x$

【练习题】

1.求下列函数的定义域

（1） $y=\frac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$；（2） $y=\sin\sqrt{x}$；（3） $y=\tan(x+1)$

（4） $y=\arcsin(x-3)$；（5） $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$；（6） $y=\ln(x+1)$

【答案】（1） $[-1,0)\cup(0,1]$；（2） $[0,+\infty)$；（3） $\left\{x\middle|\ x\in\mathbf{R}\text{且 } x\neq\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi-1,k\in\mathbf{Z}\right\}$

（4）[2,4]；（5） $(-\infty,0)\cup(0,3]$；（6） $(-1,+\infty)$

2．设 $f(x)$ 的定义域为$[0,1]$，求 $f(\mathrm{e}^x),f(\ln x),f(\arctan x),f(\cos x)$ 的定义域

【答案】 $(-\infty,0]$； $[1,\mathbf{e}]$； $[0,\tan 1]$； $\left[2n\pi-\frac{\pi}{2},2n\pi+\frac{\pi}{2}\right],n\in\mathbf{Z}$

3.下列函数哪些是周期函数，对于周期函数，指出其周期

(1) $y=\cos(x-2)$　　(2) $y=\cos 4x$

(3) $y=1+\sin\pi x$　　(4) $y=x\cos x$

(5) $y=\sin^2 x.$

【答案】（1） $l=2\pi$；（2） $l=\frac{\pi}{2}$；（3） $l=2$；（4）不是周期函数；（5） $l=\pi$

§4．指数、对数以及三角函数的运算

【知识点 1】指数运算

（1） $a^m a^n=a^{m+n}$， $\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$

（2） $(a^m)^n=a^{m\cdot n}$

（3） $(ab)^m=a^m\cdot b^m$

（4） $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}=\left(\sqrt[n]{a}\right)^m,a>0$

（5） $a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}},a>0$

【例】(2012-03) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-\mathrm{e}^{2-2\cos x}}{x^4}$.

【知识点 2】对数运算

(1) $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$

(2) $\log_a(\dfrac{M}{N})=\log_a M-\log_a N$

(3) $\log_a M^b=b\log_a M$

【例】$y=x^{\sin x}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

【知识点 3】三角函数相关公式

1.三角函数的定义

(1) $\text{正弦}:\sin\alpha=\dfrac{\text{对边}}{\text{斜边}}$；$\text{余弦}:\cos\alpha=\dfrac{\text{邻边}}{\text{斜边}}$

(2) $\text{正切}:\tan\alpha=\dfrac{\text{对边}}{\text{邻边}}$；$\text{余切}:\cot\alpha=\dfrac{\text{邻边}}{\text{对边}}$

(3) $\text{正割}:\sec\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{\text{斜边}}{\text{邻边}}$；$\text{余割}:\csc\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}=\dfrac{\text{斜边}}{\text{对边}}$

2.同角三角函数的基本关系式

倒数关系：$\sin\alpha\cdot\csc\alpha=1$，$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1$，$\tan\alpha\cdot\cot\alpha=1$

商数关系：$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，$\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$，$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$

3.特殊角度的三角函数值

(1) $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2},\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2},\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(2) $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$

(3) $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\tan\frac{\pi}{4}=1$

4.三角函数的诱导公式:

(1) $\begin{array}{l}\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha\\ \tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha\\ \cot(2k\pi+\alpha)=\cot\alpha\end{array}$ (2) $\begin{array}{l}\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha\\ \tan(2\pi-\alpha)=-\tan\alpha\\ \cot(2\pi-\alpha)=-\cot\alpha\end{array}$ (3) $\begin{array}{l}\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(-\alpha)=\cos\alpha\\ \tan(-\alpha)=-\tan\alpha\\ \cot(-\alpha)=-\cot\alpha\end{array}$

(4) $\begin{array}{l}\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha\\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha\\ \tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha\\ \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha\end{array}$ (5) $\begin{array}{l}\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha\\ \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha\end{array}$

(6) $\begin{array}{l}\sin(\pi/2+\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\pi/2+\alpha)=-\sin\alpha\\ \tan(\pi/2+\alpha)=-\cot\alpha\\ \cot(\pi/2+\alpha)=-\tan\alpha\end{array}$ (7) $\begin{array}{l}\sin(\pi/2-\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(\pi/2-\alpha)=\sin\alpha\\ \tan(\pi/2-\alpha)=\cot\alpha\\ \cot(\pi/2-\alpha)=\tan\alpha\end{array}$

【例】证明$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$

5.辅助角公式

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\varphi\right)$，其中 $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$， $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，

$\tan\varphi=\frac{a}{b}$

【例】求$\int\frac{1}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$

6.倍角公式

(1) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

(2) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

(3) $\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

(4) $\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$

（5）$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

（6）$\tan\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

【例】求$\int\sin^2 x\mathrm{d}x$

7.万能公式

$$\sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}，\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}，\tan x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

【例】求$\int\dfrac{1}{2\sin x-\cos x+5}\mathrm{d}x$

7.求导公式

（1）$(\sin x)'=\cos x,(\cos x)'=-\sin x$

（2）$(\tan x)'=\sec^2 x,(\cot x)'=-\csc^2 x$

（3）$(\sec x)'=\sec x\tan x,(\csc x)'=-\csc x\cot x$

【例】求$\int\tan^2 x\mathrm{d}x$

8.和差化积公式与积化和差公式

（1）$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（2）$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（3）$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（4）$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

（5）$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)+\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]$

（6）$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha+\beta\right)+\cos\left(\alpha-\beta\right)\right]$

（7）$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left[\sin\left(\alpha+\beta\right)-\sin\left(\alpha-\beta\right)\right]$

（8）$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha-\beta\right)-\cos\left(\alpha+\beta\right)\right]$

9.和角公式和差角公式

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$

【练习题】

1.已知$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=2$，求$\sin\theta+\cos\theta$

【答案】$\pm\sqrt{2}$

2.求证$\dfrac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x}$