日期:　　/

1 针对于 $|A+B| \neq |A|+|B|$

有列向量组形式成立

【评注】 做完这 6 个小题，思考小结一下数字型行列式如何计算？直接展开，做 0 后再展开；把每行都加到第一行；把第一行 -1 倍加其他各行；逐行相加；…
用过哪些公式：◹；◸；拉普拉斯；范德蒙；…

282 【答案】 108

【分析】 因为

$$A+2B=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]+[2\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4]=[\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3,3\boldsymbol{\gamma}_4]$$

故有

$$\begin{aligned}|A+2B|&=|\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3,3\boldsymbol{\gamma}_4|=27|\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|\\&=27(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+2|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|)\\&=27(|\boldsymbol{A}|+2|\boldsymbol{B}|)=108\end{aligned}$$

【评注】 矩阵行列式在考研中多次出现，当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵时，有 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$，但 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$，而 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}|$ 两者不要混淆.

又若三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$，则 $k\boldsymbol{A}=[k\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta},k\boldsymbol{\gamma}]$，那么 $|k\boldsymbol{A}|=k^3|\boldsymbol{A}|$，而 $|k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=k|\boldsymbol{A}|$ 两者也不要混淆.

283 【答案】 $(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{3}$

3、当 $r(A)=1$ 时 $A^m=l^{m-1}A$

【评注】 由本题可引申到：

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A\Lambda}=[\lambda_j a_{ij}]$，$\boldsymbol{\Lambda A}=[\lambda_i a_{ij}]$.

285 【答案】 $\begin{bmatrix}8&0&0\\24&0&0\\-16&0&0\end{bmatrix}$

【分析】 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}[2,0,0]=\begin{bmatrix}2&0&0\\6&0&0\\-4&0&0\end{bmatrix}$.

又因 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[2,0,0]\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}=2$，所以

$$\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{A}$$

【评注】 矩阵的运算要正确熟练．注意，若 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$，则

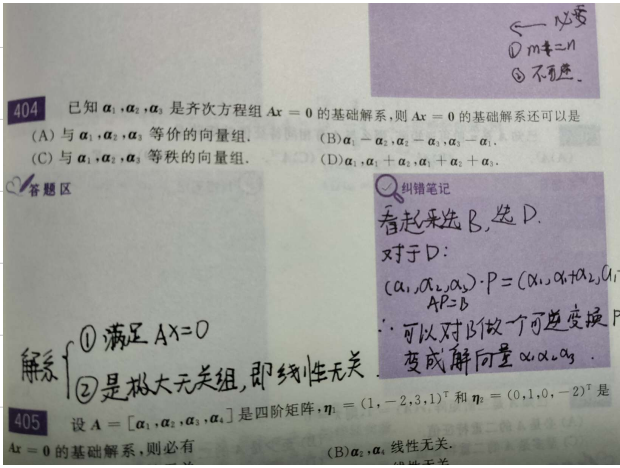
$$\begin{cases}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}[b_1,b_2,b_3]=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[b_1,b_2,b_3]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{cases}$$

前者 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 是秩为 1 的三阶矩阵，而 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数.

当秩 $r(\boldsymbol{A})=1$ 时，$\boldsymbol{A}^2=l\boldsymbol{A}$，其中 $l=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\sum a_{ii}$，进而 $\boldsymbol{A}^m=l^{m-1}\boldsymbol{A}$.

日期:　　　/

4.解系的两个要求



← 必要
① m ~~等~~ = n
② 不可逆.

404 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系，则 $Ax=0$ 的基础解系还可以是

(A) 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等价的向量组.　(B) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$.

(C) 与 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 等秩的向量组.　(D) $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$.

答题区

解系 $\begin{cases} ① 满足 Ax=0 \\ ② 是极大无关组，即线性无关. \end{cases}$

纠错笔记

看起来选B，选D.

对于D:

$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\cdot P=(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1$

$AP=B$

∴可以对B做一个可逆变换P

变成解向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

405 设 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$ 是四阶矩阵，$\eta_1=(1,-2,3,1)^T$ 和 $\eta_2=(0,1,0,-2)^T$ 是 $Ax=0$ 的基础解系，则必有

(B) α_2,α_4 线性无关.

1、行列式化简，初等行、列变换都可以，因为行列式等于其转置；
2、矩阵化简，初等行、列都可以，因为初等变换不改变矩阵的秩；
3、解线性方程组只能行变换，因为矩阵初等行变换对应的是方程组同解变换；
4、线性方程研究解的情况，只研究秩，行列变换都可；但涉及到求解，只能行变换，保险起见，只行变换。（先看到这）

收起

5.求列向量组极大无关组，线性表出关系，仅行变换。
6.求向量组的秩，行列都可以。
7.求特征值，行列都可以。
8.求特征向量，仅行变换。
9.求逆矩阵，对（A，E）仅行变换。

日期: /

① $AB=AC$ 且 $A\neq 0$ $\nRightarrow B=C$

② 对角矩阵 $\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_1&0&0\\0&b_2&0\\0&0&b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1b_1&0&0\\0&a_2b_2&0\\0&0&a_3b_3\end{bmatrix}$ $\Lambda_1\cdot\Lambda_2=\Lambda_2\Lambda_1$ 可交换 $\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a_1^n&&\\&a_2^n&\\&&a_3^n\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}a_1&&\\&a_2&\\&&a_3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{a_1}&&\\&\frac{1}{a_2}&\\&&\frac{1}{a_3}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}&&a_1\\&a_2&\\a_3&&\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}&&\frac{1}{a_3}\\&\frac{1}{a_2}&\\\frac{1}{a_1}&&\end{bmatrix}$ $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}(b_1\ b_2\ b_3)=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\end{bmatrix}$

③ 矩阵A且 $r=1$ $[\ ][\ ]$ $[\ ]$ 为数，$[\ ][\ ]$ 为数 b，b 是A的迹，也就是如 $r(A)=1$，一定有 $A=\alpha\beta^T$

$\Rightarrow A^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=LA$，$L=\beta^T\alpha=\Sigma a_{ii}$ 迹，$A^n=L^{n-1}A$

④ $\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}0&0&ac\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ 3阶 则0，$\begin{bmatrix}0&a&b&c\\0&0&d&e\\0&0&0&f\\0&0&0&0\end{bmatrix}^3=\begin{bmatrix}0&0&0&adf\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$ 4阶 则0

⑤ $B=P^{-1}AP$，$B^n=P^{-1}A^nP$，A-n阶 $r(A^*)\begin{cases}n & r(A)=n\\1 & r(A)=n-1\\0 & r(A)<n-1\end{cases}$

⑥ $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$　$(AB)^T=B^TA^T$

$(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$　$(A^2)^T=(A^T)^2$

$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$　$(kA)^T=kA^T$

$(A+B)^{-1}$ 没公式　$(A+B)^T=A^T+B^T$

⑦ 正交矩阵：$A\cdot A^T=A^T\cdot A=E$

(1) $A^T=A^{-1}$

(2) $|A|^2=1$

(3) A, B 均是正交矩阵，AB也是

(4) 列行向量长度为1，两两正交。

(5) A, B均为正交矩阵，$|A|+|B|=0\Rightarrow|A+B|=0$

⑦ 行最简 阶梯：

(1) 如有零行，则在下面

(2) 非零行主元所在列下面元素都是0

行最简：

(3) 非零行主元都是1

(4) 主元所在列其它元素都是0

⑧ 初等矩阵的可逆，且仍是同类型：(1) 互换 → 不变；(2) 倍加 → 取相反数；(3) 倍乘 → 取倒数。新位置（不是原位置）

⑨ 分块矩阵：$\begin{bmatrix}A&C\\0&B\end{bmatrix}^n$ (Am Bn) $=\begin{bmatrix}A^n&0\\0&B^n\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0&A\\B&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}A^T&C^T\\B^T&D^T\end{bmatrix}$

⑩ $AB=C$，C的行向量可由B的行向量线表（A可逆）；C的列向量由A的列向量线表（B可逆）

⑪ 如果给出的是行向量，也是竖着排。n+1个n维向量一定线性相关 $r\leq n<n+1$。（方程 未知数）二维向量相关是共线，三维向量相关是共面。

⑫ ~~行列式~~ 子集合相关 ⇒ 整体必相关　低维无关 ⇒ 延伸组高维必无关

整体无关 ⇒ 子集合无关

⑬ 施密特正交化时，$\beta_2=\alpha_2-\frac{[\alpha_2,\beta_1]}{[\beta_1,\beta_1]}\beta_1$ 如果产生分数，将另一个没有分数的向量创造出来，这样加减方便；在单位化时，如果向量代带分数，直接计算向量的，不用管分数。

日期:　　　/

① 求解线性方程组 $Ax=0$

(1) 化成行最简或者类似行最简(单位矩阵)

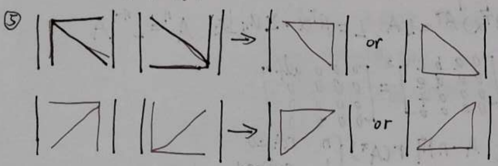
(2) 根据 $n-r$ 找出自由变量数量

① 对~~初等~~增广矩阵作初等行变换，如果 x_1, x_2 有系数时不好消元，则从后往前消元.

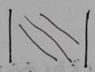
② 次对角线的上下三角形的行列式为 $(-1)^{\frac{1}{2}n(n-1)} a_{1n}a_{2n}\cdots a_{n1}$

③ 拉普拉斯 $\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ * & B \end{vmatrix} = |A|\cdot|B|$，$\begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} * & A \\ B & O \end{vmatrix} = (-1)^{mn}|A|\cdot|B|$ → n阶

④ 范德蒙 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} = (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2)$

⑤ 

主/副型变上下三角



三条对角线

☆① 逐行相加，消第一列的第一个元为0

☆② 每一行加到第一行，得三角

⑤ 数学归纳法：

一、(1) 验证 $n=1$ 时成立

(2) 假设 $n=k$ 时成立

(3) 在(2)下，证明 $n=k+1$ 成立

二、(1) 验证 $n=1$, $n=2$ 成立

(2) 设 $n<k$ 时成立

(3) 证明 $n=k$ 成立(在(2)下)

(kA)*=k(n-1)(A)*

$(kA)^* = k^{n-1}A^*$

如果n阶命题只与n-1阶有关，那么用一，如果不仅与n阶，还与n-2阶，则用二.

$|(k\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)| = k|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3|$

⑥ $|kA| = k^n|A|$，$|AB| = |A|\cdot|B|$ (A B均n阶)，$|A^*| = |A|^{n-1}$ (不管 $|A|$ 是否为0，若为0也成立，且 $|A^*|=0$)　如A可逆 $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.　$|A| = \prod\lambda_i$　如A与B相似 $[(P^{-1}AP) = B \Rightarrow |P^{-1}AP| = |B|]$ 则 $|A| = |B|$　~~特~~ $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3\cdots = a_{11}+a_{22}+a_{33}\cdots$　巧用E：$A = A\cdot E = A(B\cdot B^{-1})$

⑦ $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性无关 → $(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ 可逆 ⇒ A B 以 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 相似 ⇒ $|A| = |B|$

⑧ A的特征值是 1 2 3，A+E特征值是 2, 3, 4　$|\lambda E - A| = 0$ 求特征值的快捷步骤：(1) 消出0. ② 有含λ的公因式 $\begin{vmatrix} \lambda+a & 2 \\ 1 & \lambda+a-1 \end{vmatrix}$ 把 $\lambda+\alpha$ 看成x 计算完再代λ.

⑨ 克拉默法则 $x_1 = \frac{D_1}{D}$　$x_2 = \frac{D_2}{D}$　$Ax=0$ 有非零解 $x\neq 0$，$|A|=0$.

⑩ $A-m\times n$, $B-n\times s$，如 $AB=0$：(1) B的列向量是 $Ax=0$ 的解

(2) $r(A)+r(B)\leq n$.　$r(A\cdot A^T) = r(A)$　$r\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = r(A)+r(B)$

↓

⑪ $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$：(1) 如A可逆，$r(AB) = r(B)$，$r(BA) = r(B)$

(2) 如A列满秩，$r(AB) = r(B)$

日期: /

① 求解线性方程组 $Ax=0$

(1) 化成行最简或者类似行最简(单位矩阵)

(2) 根据 $n-r$ 找出自由变量数量

(3) 基础解系 $n-r$ 个且按照自由变量所在的那 n 个维度。设为 $(1,0,0\cdots)(0,1,0,0\cdots)$，其余位置上的系数为自由变量所在列的相反数

$Ax=B$，非齐次=齐通+特解(自由变量所在纬度为0)

② n阶方阵有n个不同的特征值不等于这个方阵A满秩，如有一个特征值为0，那么就有一个无效方程，在此情况下，$r(A)\ge n-1$，不同特征值的特征向量线性无关.

③ 求两个方程组的公共解则上下重叠两个方程组，联立解之

④ 求两组基础解系的公共解，证明它们线性相关.

⑤ 同一个特征值的不同特征向量仍是该特征值λ的特征向量，不同特征值的对应特征向量的线性组合不是矩阵的特征向量

⑥ 求解特征向量的技巧：

(1) 当 $|\lambda E-A|\equiv 0$ 了，找出某阶不等于0的子式，那么可以划去 $n-r$ 行复杂的，保留 r 行

(2) 当化成行阶梯后如果化成行最简会带分数，那么找一个非零行，给出公因子的 x_2, x_3 代入上一条解出 x_1 的值.

⑦ $r=1$ 的矩阵的特征值有一个是迹，其余都是0。n阶矩阵 $r=1$，即 $|\lambda E-A|=\lambda^n-\sum a_{ii}\lambda^{n-1}$

⑧ ~~求~~求A的特征值一定是带着λ进行变换，不能单独拎出来；对A进行变化后再用⑦的结论就不是A的特征值了 $AP\alpha=\lambda PB\alpha$，$\lambda P^{-1}A\alpha= B(P^{-1}\alpha)$

⑨ 若 $P^{-1}A\cdot P=B$，(1) $A\alpha=\lambda\alpha$，则 $B(P^{-1}\alpha)=\lambda(P^{-1}\alpha)$；(2) $B\alpha=\lambda\alpha$，$A(P\alpha)=\lambda(P\alpha)$

⑩ 实对称矩阵必与对角矩阵相似，实对称矩阵特征值不同，特征向量相互正交.实对称矩阵可用正交矩阵相似对角化，$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$

⑪ $\begin{array}{c} \begin{bmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{c} ① \\ \\ ③ \end{array}$ 从秩的角度，①和③是等价的

⑫ $A\sim B$，则 $A+kE\sim B+kE$，$A^n\sim B^n$

⑬ 不同特征值对应的特征向量线性无关，但是值相同的特征值对应的特征向量线性无关，两个特征值同为6，对应的特征向量也可线性无关.

⑭ 配方法求 $x=cY$，如果缺少 x_n^2，也仍然保留 $y_n=x_n$，如果写作0，那么矩阵C就不是可逆的了，在最后的标准型中才写上 $0x_n$，即系数为0.

南京审计大学

①证明矩阵正定：(1)先是对称矩阵 (2)证明正定：

(2)的方法有：a. $a_{ii}>0$；b. 顺序主子式 >0；c. 特征值全大于0.

② $x^TB^TBx=(Bx)^T(Bx)\geq 0 \Rightarrow$ 这是一个平方和累加的内积，要认识

③ $(A+B)^T=A^T+B^T$，$(A+B)^{-1}\neq(A^{-1}+B^{-1})$

④ 证明矩阵不相似：a. $|A|\neq|B|$；b. $r(A)\neq r(B)$；c. $\lambda_A\neq\lambda_B$；d. $\sum a_{ii}\neq\sum b_{ii}$

⑤ 证明矩阵是否合同，看正负惯性指数是否一致、

⑥ 合同不一定相似，相似一定合同

⑦ 遇到特征值特征向量写 $A\alpha=\lambda\alpha$ 出来

⑧ 解出的特征值代入到最原始的矩阵中，不然会出错

⑨ 配方法中如只有混合项利用平方差公式再配方，$f=x_1x_2$ 令 $x_1=y_1+y_2$，$x_2=y_1-y_2$

$f=y_1^2-y_2^2$.

⑩ 拉普拉斯分块矩阵必须要有一个块是零矩阵

⑪ 初等变换会影响行列式，所以求行列式别初等变换

⑫ ~~0是负惯性~~

⑬ α_1 是 $Ax=0$ 的一个基础解系 $\Rightarrow n-r=1$

因为基础解系是所有解的集合，所以一个基础解析就证明只有n-r=1

⑭ $Ax=b$，做 $(A|b)$ 初等变换，最后非齐通=齐通+非齐特，并且这的非齐特是按照李永乐对应那一列中对应位置，再移动。(最后的行最简形式 2009，22)

⑮ 低维向量无关，增加坐标，高维必无关.

⑯ 0既不是正惯性指数，也不是负

⑰ $r(AB)\leq r(A,B)\leq r(A)+r(B)$，越乘越小，越拼越大，越加最大.

⑱ $P^{-1}AP=B \Rightarrow P^{-1}A^{-1}P=P^{-1}B^{-1}P$，P不变.

日期: /

$=-10(2-1)(3-1)(4-1)(\cdots$

$=-120.$

280 【答案】 $1-a^4$

【分析】 直接按第 1 列展开

$$D=1\cdot\begin{vmatrix}1&a&0\\0&1&a\\0&0&1\end{vmatrix}+a\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}a&0&0\\1&a&0\\0&1&a\end{vmatrix}=1-a^4$$

281 【答案】 84

【分析】 除去主对角线,第二、三、四列元素一样是爪型行列式. 把第一行的 -1 倍分别加到其他各行,有

$$D=\begin{vmatrix}5&2&3&4\\-3&3&0&0\\-2&0&2&0\\-1&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}14&2&3&4\\0&3&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=84$$

【评注】 做完这 6 个小题,思考小结一下数字型行列式如何计算?直接展开,做 0 后再展开;把每行都加到第一行;把第一行 -1 倍加其他各行;逐行相加;…用过哪些公式:◸;◿ ;拉普拉斯;范德蒙;…

282 【答案】 108

【分析】 因为

$$A+2B=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4]+[2\boldsymbol{\beta},2\boldsymbol{\gamma}_2,2\boldsymbol{\gamma}_3,2\boldsymbol{\gamma}_4]=[\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3,3\boldsymbol{\gamma}_4]$$

故有
$$\begin{aligned}|A+2B|&=|\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},3\boldsymbol{\gamma}_2,3\boldsymbol{\gamma}_3,3\boldsymbol{\gamma}_4|=27|\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|\\&=27(|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|+2|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}_2,\boldsymbol{\gamma}_3,\boldsymbol{\gamma}_4|)\\&=27(|A|+2|B|)=108\end{aligned}$$

【评注】 矩阵行列式在考研中多次出现,当 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶矩阵时,有 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$,但 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|\neq|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$,而 $|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}|=|\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}|+|\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\delta}|$ 两者不要混淆.

又若三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}]$,则 $k\boldsymbol{A}=[k\boldsymbol{\alpha},k\boldsymbol{\beta},k\boldsymbol{\gamma}]$,那么 $|k\boldsymbol{A}|=k^3|\boldsymbol{A}|$,而 $|k\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\gamma}|=k|\boldsymbol{A}|$ 两者也不要混淆.

283 【答案】 $(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{3}$

【分析】 由 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$, $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$, $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$, $|\boldsymbol{A}^{-1}|=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}$ 有

$$\begin{aligned}|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}|&=(-1)^n|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}|=(-1)^n|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|\cdot|\boldsymbol{B}^{-1}|\\&=(-1)^n|\boldsymbol{A}|\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{B}|}=(-1)^{n+1}\cdot\frac{2}{3}\end{aligned}$$

284 【答案】 $\begin{bmatrix}\cdots\\-4&0&-18\\14&24&0\end{bmatrix}$

【分析】
$$\boldsymbol{A\Lambda}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&-3\\4&10&-6\\7&16&-9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Lambda A}=\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\8&10&12\\-7&-8&-9\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A\Lambda}-\boldsymbol{\Lambda A}=\begin{bmatrix}0&2&-6\\-4&0&-18\\14&24&0\end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&-1\end{bmatrix}$

【评注】 由本题可引申到:

设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是 n 阶矩阵, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{A\Lambda}=[\lambda_j a_{ij}]$, $\boldsymbol{\Lambda A}=[\lambda_i a_{ij}]$.

285 【答案】 $\begin{bmatrix}8&0&0\\24&0&0\\-16&0&0\end{bmatrix}$

【分析】 因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}[2,0,0]=\begin{bmatrix}2&0&0\\6&0&0\\-4&0&0\end{bmatrix}$.

又因 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[2,0,0]\begin{bmatrix}1\\3\\-2\end{bmatrix}=2$,所以

$$\boldsymbol{A}^3=(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=4\boldsymbol{A}$$

【评注】 矩阵的运算要正确熟练. 注意,若 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3)^{\mathrm{T}}$,则

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}[b_1,b_2,b_3]=\begin{bmatrix}a_1b_1&a_1b_2&a_1b_3\\a_2b_1&a_2b_2&a_2b_3\\a_3b_1&a_3b_2&a_3b_3\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=[b_1,b_2,b_3]\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\end{cases}$$

前者 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 是秩为 1 的三阶矩阵,而 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是一个数.

当秩 $r(\boldsymbol{A})=1$ 时, $\boldsymbol{A}^2=l\boldsymbol{A}$,其中 $l=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}=\sum a_{ii}$,进而 $\boldsymbol{A}^n=l^{n-1}\boldsymbol{A}$.

① ②

①线性相关一定有特征值为0，反过来也成立.

②俩矩阵相似用迹跟行列式做比求秩快.

③ x 一般是 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$，$f(x)=x^TAX$

④ α,β 相互正交且为单位向量：$\alpha^T\beta=0 \Leftrightarrow \beta^T\alpha=0$，$\alpha^T\alpha=1 \Leftrightarrow \beta^T\beta=1$

⑤增广矩阵想要无穷多解，一定有行式为0.

⑥ $r(A^TA)=r(A)$.

⑦ A是n阶矩阵，$Ax=b$ 有两个解 $\Rightarrow r(A)=r(\bar{A})<n$，对应无穷多解的情况，而不能说明 $n-r=\cancel{1}\ 2$，这是求相应特征值对应的基础解系.

⑧ $\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$，齐通：$k(-1,1,-2)$，非齐特 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，因为这是一个不标准的单位矩阵，$x_2$ 做自由变量，那么对应特解第二个维被占用，1往后移.

⑨ A不可以和 Λ 相似对角化，但A可以相似于B.

⑩两矩阵相似用迹跟行列式方便

⑪单特征值一定有且仅有一个特征值，如果k重特征值没有k个特征向量与之对应那么不能相似对角化.

⑫矩阵相似特征值一定相等，但特征向量不一定相等.

⑬伴随矩阵的特征值为：$\frac{|A|}{\lambda_i}$. $Ax=B$，A可逆 $x=A^{-1}B$

⑭求~~特征值~~矩阵的三种方法：①A可逆，$(A\ B)\to(E\ X)$；② $Ax=B$，A不可逆，切分为 $\beta_1\ \beta_2 \dots \beta_i$，$Ax=\beta_1$，$Ax=\beta_2$，$Ax=\beta_3$ $(A\ B)\to$(行最简 *)；③特征值和特征向量，$A\alpha_1=k_1\alpha_1$，$A\alpha_2=k_2\alpha_2$，$A\alpha_3=k_3\alpha_3$，$A(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3)$，$A=(\lambda_1\alpha_1,\lambda_2\alpha_2,\lambda_3\alpha_3)\cdot(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}$ $A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)\begin{bmatrix} k_1 & & \\ & k_2 & \\ & & k_3 \end{bmatrix}(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3)^{-1}$.（后两种A可不可逆）

⑮基础解系的维数是由系数矩阵列数确定的（几个未知数几个维）

⑯ A有3个不同的特征值，已知两个特征值及对应的特征向量，假设 λ_3 对应的为 (x_1,x_2,x_3)，可以用两两相互正交得0，用 $AX=0$ 解出来 α_3

⑰配方法配出来 $f=(x_1+4x_2-x_3)^2-18x_2^2$，则 $\begin{cases} y_1=x_1+4x_2-x_3 \\ y_2=3\sqrt{2}x_2 \\ y_3=x_3 \end{cases}$，即 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{3\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$(x=Cy)$，注意配出来虽然没有单位化，但是写出来要化。$f=x^TAX=y_1^2-y_2^2$

$f=x_1^2-2x_2^2+x_3^2+8x_1x_2-2x_1x_3-8x_2x_3=[x_1^2+2x_1(4x_2-x_3)+(4x_2-x_3)^2]-2x_2^2+x_3^2-8x_2x_3-(4x_2-x_3)^2=(x_1+4x_2-x_3)^2-18x_2^2$

y是平方里面的数，外面系数不归y管，配出来的是标准型

日期:　　　/

南京审计大学

①多数向量被少数向量线性表出，多数向量线性同关.

②基础解系 $\Rightarrow n-r$：①解$_{Ax=B}$；②极大$_{n-r}$；③无关

③ $m\times n$ 矩阵，m是未知数个数，n是方程数.

④由 $A\alpha=\lambda\alpha$，则矩阵A变为原来的两倍，特征值也变为两倍.

⑤配方法得出 $f(x)=(x_1+ax_2-x_3)^2-(ax_2-2x_3)^2+(3-a^2)x_3^2$，则 $y_1=x_1+ax_2-x_3$，$y_2=ax_2-2x_3$，$y_3=x_3$，即坐标变换是换的平方里面的，不带外面的，外面的影响正负惯性

⑥相似一定合同，合同不一定相似(前者是保证了特征值一样可以推出来正负惯性指数一样，后者只保证了正负惯性指数，不能保证特征值一样)

⑦ $A\sim\Lambda$(即俩矩阵特征值一模一样) $\Rightarrow A+E\sim\Lambda+E$ $(\lambda+1)$，矩阵A+E即A的特征值都减1. $(A+E)^6\sim(\Lambda+E)^6$(对特征值同样处理)

⑧规范型只讨论正负惯性，忽略前面的系数.

⑨低维无关可推出高维无关.

⑩ $r(A^TA)=r(A\cdot A^T)=r(A)\le r_{min}(m,n)$

⑪ $|A+B|$，$(A+B)^{-1}$不可拆分。$(A+B)^T$可拆分，可以巧妙变形单位矩阵(按题中所隐含的信息)

⑫ $(kA)^*=k^{n-1}A^*$，$|kA|=k^n|A|$，B：1，2，-1；B^{-1}：1，$\frac{1}{2}$，-1；$2E+B^{-1}$：3，$\frac{5}{2}$，1

⑬基础解向量的维数即未知数的个数(列数)

⑭正交矩阵即 $AA^T=A^TA=E$，它的转置是它的逆.

⑮对称矩阵加加减减仍是对称矩阵

⑯ $AX=B$，A可逆，$X=A^{-1}B$，$(A,B)\to(E\ X)$；当A不可逆，可B列分块，$Ax=\beta_1$，$Ax=\beta_2$，$Ax=\beta_3$，逐一求解再拼凑(线性方程组解法)

⑰ A，B为3阶矩阵，$BA=0\Rightarrow r(A)+r(B)\le 3$

⑱不同特征值对应的特征向量相互正交且线性无关.

①配方法的目的就是为了消掉一次项，如果不能满足(引入新的同类)，就改变系数，

平方项可不消

$f=x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3=[x_1^2-2x_1(\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3)+\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2]+x_2^2+x_3^2-x_2x_3-\frac{1}{4}(x_2+x_3)^2$

$=(x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3)^2+\frac{3}{4}(x_2-x_3)^2$，化到~~标准~~规范型(前无系数，∴要将系数放到平方里)，则

$$\begin{cases} z_1 = x_1-\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3 \\ z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2-\frac{\sqrt{3}}{2}x_3 \\ z_3 = x_3 \end{cases}，再反解 \begin{cases} x_1 = z_1+\frac{1}{\sqrt{3}}z_2+z_3 \\ x_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}z_2+z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

②相似跟合同都能推出秩相等.

③接①，配方法是将二次型中非平方的项通过完全平方公式凑在平方里，在规范型下，把平方前的系数也代进去，再通过这几个方程组反解出(就是在求逆矩阵)用y来表示x，即$x=P_1y$.如果两矩阵合同，就有一样的规范型，即$z=P_2y$，这两个x z之间的关系就可表为$z=P_2y \Rightarrow y=P_2^{-1}z$，$x=P_1y=P_1\cdot P_2^{-1}z$ (2020，22) 标准型不一致规范型也一致.要保证可逆线性变换P_1,P_2可逆，∴反解原方程的时候要灵活.原方程=可逆*规范型

④证明一个抽象矩阵是否能对角化，看他相似矩阵是否能对角化.

⑤低维无关 ⇒ 高维无关，高维相关 ⇒ 低维相关.

⑥ $A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$ 即行列式

⑦ $F=PS=\rho ghS$

⑧把(i,j) a_{ij}所在第i行，j列划去后，留下的$n-1$阶行列式叫a_{ij}的余子式，记作M_{ij}

记$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，A_{ij}叫做代数余子式

⑨由特征值求特征向量作行变换，列不行，先补好单位阵，再添1变号.

⑩矩阵合同，两矩阵正负惯性一致(符号相同)

⑪ $A^*=\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$，A是3阶矩阵，$|-|A^*|=(-1)^{3}|A|^{n-1}$.($|A^*|=|A|^{n-1}$)

⑫ $r(A^TA)=r(A)=r(AA^T)=r(A^T)$

⑬求满足基础解系中的解中，k可为任意实数；特征向量中的k为不为0的常数.

⑭ $\begin{vmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{vmatrix}$，$A_n$ $B_m \Rightarrow (-1)^{n\times m}|A|\cdot|B|$，$\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$. $A\cdot A^*=|A|E$

日期:　　　/

1.矩阵的迹等于特征值之和也等于主对角线之和