中值定理

有界与最值定理

即 $m \le f(x) \le M$，（$f(x)$在$[a,b]$上连续）
其中m、M分别为$f(x)$在$[a,b]$上
的最小值与最大值.

介值定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续
当 $m \le \mu \le M$ 时，
存在 $\xi \in [a,b]$，
使得 $f(\xi) = \mu$

平均值定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续
当$a < x_1 < x_2 < \cdots x_n < b$时
在$[x_1, x_n]$至少存在一点ξ
使$f(\xi) = \dfrac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}$.

零点定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续
当$f(a) \cdot f(b) < 0$时，
存在$\xi \in (a,b)$，
使得$f(\xi) = 0$.

费马定理

设$f(x)$在x_0点处满足$\begin{cases} ① 可导 \\ ② 取极值 \end{cases}$
则 $f'(x_0) = 0$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a-b)^3 = \cancel{(a-b)}$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

罗尔定理

设$f(x)$满足$\begin{cases} ① [a,b]上连续 \\ ② (a,b)内可导 \\ ③ f(a)=f(b) \end{cases}$
则存在$\xi \in (a,b)$，使得$f'(\xi)=0$

拉格朗日中值定理

设$f(x)$满足$\begin{cases} ① [a,b]上连续 \\ ② (a,b)内可导 \end{cases}$
则存在$\xi \in (a,b)$，
使得$f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)$
或者写成 $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

柯西中值定理

设$f(x)$，$g(x)$满足$\begin{cases} ① [a,b]上连续 \\ ② (a,b)内可导 \\ ③ g'(x) \ne 0 \end{cases}$
则存在$\xi \in (a,b)$，
使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

积分中值定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，
则存在$\xi \in [a,b]$，
使得$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$.