# [相似理论]

!!!考研加油

怠惰的鱼骨头

DATE PAGE

## A的相似对角化 ($A\sim\Lambda$)

**充要条件**
1. A有n个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow A\sim\Lambda$
2. $n_i = n - r(\lambda_i E - A)$ $\Leftrightarrow A\sim\Lambda$

**充分条件**
1. A是实对称矩阵 $\Rightarrow A\sim\Lambda$
2. A有n个互异特征值 $\Rightarrow A\sim\Lambda$
3. $A^2=A$ $\Rightarrow A\sim\Lambda$
4. $A^2=E$ $\Rightarrow A\sim\Lambda$
5. $r(A)=1$ 且 $tr(A)\neq 0$ $\Rightarrow A\sim\Lambda$

**必要条件** —— $A\sim\Lambda \Rightarrow r(A) =$ 非零特征值的个数(重根按重数算)

**否定条件**
1. $A\neq 0$, 且 $A^k=0$ (k为大于1的整数) $\Rightarrow$ A不可相似对角化
2. A的特征值全为k 但 $A\neq kE$ $\Rightarrow$ A不可相似对角化

## A相似于B ($A\sim B$) 性质
1. $|A|=|B|$
2. $r(A)=r(B)$
3. $tr(A)=tr(B)$
4. $\lambda_A=\lambda_B$ (或 $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$)

注: 若1,2,3,4中至少有一个不成立,则A不相似于B
但即使1,2,3,4全成立,也不能得出A相似于B

## A相似于B ($A\sim B$) 重要结论
1. $A\sim B \Rightarrow A^T\sim B^T,\ A^{-1}\sim B^{-1},\ A^*\sim B^*$
2. $A\sim B \Rightarrow A^m\sim B^m,\ f(A)\sim f(B)$
3. $A\sim B,\ B\sim\Lambda \Rightarrow A\sim\Lambda$
4. $A\sim\Lambda,\ B\sim\Lambda \Rightarrow A\sim B$
5. $A\sim C,\ B\sim D \Rightarrow \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D\end{bmatrix}$

PREFER LIFESTYLE

# [矩阵的秩]

怠惰的鱼骨头



矩阵的秩：

① $0 \le r(A_{m\times n}) \le \min\{m,n\}$

② $r(kA) = r(A) \quad (k \ne 0)$

③ $r(A) = r(PA) = r(AQ) = r(PAQ)$．即初等变换不改变矩阵的秩

④ $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$

⑤ $r(A+B) \le r([A, B]) \le r(A) + r(B)$

⑥ $r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right) = r(A) + r(B)$

⑦ $r(A) + r(B) \le r\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}\right) \le r(A) + r(B) + r(C)$

⑧ $r(AB) \ge r(A) + r(B) - n$． 当 $AB = 0$ 时 $r(A) + r(B) \le n$

⑨ $r(A) = r(A^T) = r(AA^T) = r(A^TA)$

⑩ $r(A^*) = \begin{cases} n, & r(A) = n \\ 1, & r(A) = n-1 \\ 0, & r(A) < n-1 \end{cases}$

⑪ 若 $A^2 = A$，则 $r(A) + r(A-E) = n$

⑫ 若 $A^2 = E$，则 $r(A+E) + r(A-E) = n$

⑬ $Ax = 0$ 的基础解系所含向量的个数 $s = n - r(A)$

⑭ 若 $A \sim \Lambda$，则 $n_i = n - r(\lambda_i E - A)$，其中 $\lambda_i$ 是 $n_i$ 重特征根

⑮ 若 $A \sim \Lambda$，则 $r(A)$ 等于非零特征值的个数，重根按重数算

# [A的逆]

怠惰的鱼骨头

$A^{-1}$ 定义：对于方阵 $A, B$，若 $AB=E$，则 $A, B$ 为互逆矩阵，且 $A^{-1}=B$，$B^{-1}=A$，$AB=BA$.

性质：
1. $(A^{-1})^{-1}=A$
2. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ （穿脱原则）
3. $k\neq 0$，$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$
4. $(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$
5. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

$A\cdot A^{*}=|A|E$

求 $A^{-1}$：
- 具体型：
  - $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$
  - $[A\,\vdots\,E]\xrightarrow{\text{初等行变换}}[E\,\vdots\,A^{-1}]$
- 抽象型：
  - 创造 $AB=E$，则 $A^{-1}=B$
  - 创造 $A=BC$，若 $B, C$ 均可逆，则 $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$

分块矩阵的逆：已知 $A=\begin{bmatrix} B & O \\ D & C \end{bmatrix}$，其中 $B$ 是 $r$ 阶可逆矩阵，$C$ 是 $s$ 阶可逆矩阵，则 $A$ 可逆，且：

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$$

---

分块矩阵的逆

▲ 主对角线分块矩阵 $A=\begin{bmatrix} A_1 & & \\ & A_2 & \\ & & \ddots \\ & & & A_s \end{bmatrix}$，若 $A_i\,(i=1,2,\cdots,s)$ 均可逆，

则 $A$ 可逆，

且 $A^{-1}=\begin{bmatrix} A_1^{-1} & & \\ & A_2^{-1} & \\ & & \ddots \\ & & & A_s^{-1} \end{bmatrix}$

■ 副对角线分块矩阵 $A=\begin{bmatrix} & & A_1 \\ & A_2 & \\ A_s & & \end{bmatrix}$，若 $A_i\,(i=1,2,\cdots,s)$ 均可逆

则 $A$ 可逆，且 $A^{-1}=\begin{bmatrix} & & A_s^{-1} \\ & A_2^{-1} & \\ A_1^{-1} & & \end{bmatrix}$

● 其他情况：已知 $A=\begin{bmatrix} B & O \\ D & C \end{bmatrix}$，其中 $B$ 是 $r$ 阶可逆矩阵，$C$ 是 $s$ 阶可逆矩阵.

则 $A$ 可逆，且 $A^{-1}=\begin{bmatrix} B^{-1} & O \\ -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \end{bmatrix}$

口诀：左乘同行，右乘同列，再添负号

类似地：$A_1=\begin{bmatrix} O & B \\ C & D \end{bmatrix}$

则 $A_1^{-1}=\begin{bmatrix} -C^{-1}DB^{-1} & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}$

# [A的伴随]

忘情的鱼骨头

DATE PAGE

$A^*$的定义 
$$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

重要公式

1、$AA^*=A^*A=|A|E$
2、$|A^*|=|A|^{n-1}$
3、$(A^T)^*=(A^*)^T$
4、$(kA)^*=k^{n-1}A^*$，$(-A)^*=(-1)^{n-1}A^*$

5、$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$
6、$A^*=|A|A^{-1}$
7、$(A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A=(A^{-1})^*$

8、$(A^*)^*=|A|^{n-2}A$
9、$|(A^*)^*|=|A|^{(n-1)^2}$
10、$(AB)^*=B^*A^*$ （穿脱原则）

易记好用公式

设A为3阶矩阵，当A可逆时，记其特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$

则$A^{-1}$的特征值为$\lambda_1^{-1},\lambda_2^{-1},\lambda_3^{-1}$

且由$A^*=|A|A^{-1}=\lambda_1\lambda_2\lambda_3A^{-1}$，可知：

$A^*$的特征值为：$\lambda_1^*=\lambda_1\lambda_2\lambda_3\cdot\lambda_1^{-1}=\lambda_2\lambda_3$，类似的：$\lambda_2^*=\lambda_1\lambda_3$，$\lambda_3^*=\lambda_1\lambda_2$

由$A^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$，知
$$\begin{aligned} A_{11}+A_{22}+A_{33} &= tr(A^*) \\ &= \lambda_1^*+\lambda_2^*+\lambda_3^* \\ &= \lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2 \end{aligned}$$

代数余子式求和题型汇总

1. 具体矩阵求形如 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$____，$A_{11}+A_{12}+A_{13}=$____

只需将对应某行(某列)换成上述 $A_{ij}$ 的系数即可。

例如：$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 试计算 $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$.

解：$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=1\cdot A_{41}+1\cdot A_{42}+1\cdot A_{43}+1\cdot A_{44}$

$$=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-9$$

2. 抽象矩阵求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$____（数一，2021年）

：设 $A=[a_{ij}]$ 为3阶矩阵，$A_{ij}$ 为元素 $a_{ij}$ 的代数余子式，若 $A$ 的每行元素之和均为2，且 $|A|=3$，求 $A_{11}+A_{21}+A_{31}=$ ?

1, 1, 1

解：A的每行元素之和为2 ⇒ $A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$　$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$

又∵ $A^*x=\frac{|A|}{\lambda}x$　即 $A^*\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$

即 ~~$A^*$~~

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\frac{3}{2}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

∴ $A_{11}+A_{21}+A_{31}=\frac{3}{2}$

3. 求 $A_{11}+A_{22}+A_{33}=$____

① $A_{11}+A_{22}+A_{33}=tr(A^*)$；所以只要求出 $A^*$ 的特征值相加即可

② 常见题型是已知A的特征值，需利用公式 $\lambda^*=\frac{|A|}{\lambda}$ 来求 $A^*$ 的特征值

[接上页 代数余子式求和]

怠惰的鱼骨头

4. 求$|A|$的所有元素的代数余子式之和

例：
$$|A|=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&\frac{1}{3}\\\frac{1}{4}&0&0&0\end{vmatrix}$$

解：使用公式 $A^*=|A|A^{-1}$，而 $|A|=-\frac{1}{24}$，$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&0&4\\1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{bmatrix}$

$\therefore A^*=-\frac{1}{24}\begin{bmatrix}0&0&0&4\\1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\end{bmatrix}$

故 $\sum A_{ij}=-\frac{1}{24}(1+2+3+4)=-\frac{5}{12}$

再推广：$|A|=\begin{vmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&2&&0\\0&0&0&&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&&n-1\\n&0&0&\cdots&0\end{vmatrix}$ 求 $A_{k1}+A_{k2}+\cdots+A_{kn}$

解：依然沿用上题思想，$\because A^*=|A|A^{-1}$

而 $|A|=(-1)^{n+1}n!$，$A^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&\frac{1}{n}\\1&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{2}&&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$

$\therefore A^*=|A|A^{-1}=(-1)^{n+1}n!\begin{bmatrix}0&0&\cdots&\frac{1}{n}\\1&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{2}&&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$

当$k=1$时，$A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}=1\times(-1)^{n+1}n!$

当$k=2$时，$A_{21}+A_{22}+\cdots+A_{2n}=\frac{1}{2}\times(-1)^{n+1}n!$

$\therefore A_{k1}+A_{k2}+\cdots+A_{kn}=\frac{1}{k}\times(-1)^{n+1}n!$

# [特征值与特征向量]



DATE　　PAGE

## 特征值与特征向量

定义: $A\cdot\xi=\lambda\xi$, $\xi\neq0$

($\lambda$为特征值; $\xi$为特征向量)

### 关于特征值的几项关系

1. $\begin{cases}\lambda_0\text{是}A\text{的特征值}\Leftrightarrow|\lambda_0E-A|=0\\ \lambda_0\text{不是}A\text{的特征值}\Leftrightarrow|\lambda_0E-A|\neq0\end{cases}$

2. 若$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是A的n个特征值, 则$\begin{cases}|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\\ tr(A)=\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n\end{cases}$

### 重要结论

3、若$f(x)$为多项式, 且矩阵A满足$f(A)=0$, 则A的任一特征值$\lambda$都满足$f(\lambda)=0$

4、虽然$A^T$的特征值与A相同, 但特征向量不再是$\xi$, 需另单独计算才能得出。

5、一个极其重要的表格.

| 矩阵 | $A$ | $kA$ | $A^k$ | $f(A)$ | $A^{-1}$ | $A^*$ | $P^{-1}AP$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 特征值 | $\lambda$ | $k\lambda$ | $\lambda^k$ | $f(\lambda)$ | $\frac{1}{\lambda}$ | $\frac{\|A\|}{\lambda}$ | $\lambda$ |
| 对应特征向量 | $\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $\xi$ | $P^{-1}\xi$ |

$AA^*=|A|E$

[特征向量与矩阵方程]

息,情的鱼骨头

DATE PAGE

## 关于特征向量的几项关系

$\xi(\neq 0)$ 是 $A$ 的属于 $\lambda_0$ 的特征向量 $\Leftrightarrow$ $\xi$ 是 $(\lambda_0 E-A)x=0$ 的非零解

若 $r(A)=1$，则 $\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$，$\lambda_n=tr(A)$，

且 $\xi_1,\cdots,\xi_{n-1}$ 是 $n-1$ 重特征值 $\lambda=0$ 的线性无关的特征向量

## 重要结论

$A^k\xi_1=\lambda^k\xi_1$

1. $k$ 重特征值 $\lambda$ 至多只有 $k$ 个线性无关的特征向量.
2. 若 $\xi_1,\xi_2$ 是 $A$ 的属于不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2$ 的特征向量，则 $\xi_1,\xi_2$ 线性无关
3. 若 $\xi_1,\xi_2$ 是 $\lambda$ 的特征向量，则 $k_1\xi_1+k_2\xi_2$ ($k_1,k_2$ 不同时为零) 仍是 $\lambda$ 的特征向量
4. $\xi_1,\xi_2$ 是 $A$ 的属于不同特征值 $\lambda_1,\lambda_2$ 的特征向量，则当 $k_1\neq 0,k_2\neq 0$ 时，$k_1\xi_1+k_2\xi_2$ 不是 $A$ 的特征向量 (常考 $k_1=k_2=1$ 的情形)

## 关于矩阵方程

1. 若 $AP=PB$，$P$ 可逆 $\Rightarrow P^{-1}AP=B \Rightarrow A\sim B \Rightarrow \lambda_A=\lambda_B$
2. 若 $A$ 的每行元素之和均为 $k$，则：$A\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$

可以推出：$k$ 是特征值，$\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}$ 是 $A$ 的属于 $k$ 的特征向量