Problema grafo bipartito

Nico Fiorini

1 Problema 5.2, grafo bipartito

Risolvere il seguente problema:
Un grafo non orientato G(V,E) si dice bipartito se è possibile partizionare i suoi vertici in due sottoinsiemi V_1 e V_2 tali che non esistono archi tra vertici nello stesso sottoinsieme: formalmente, se (u,v) $\in$ e, allora u $\in v_1$ e $u \in v_2$ o viceversa.

1. Dimostrare che un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari, dove la lunghezza è il numero di archi nel ciclo.
2. Descrivere un algoritmo per verificare se un grafo connesso è bipartito. l'algoritmo deve esibire la partizione V_1 e V_2 nel caso di risposta affermativa, e un ciclo di lunghezza dispari nel caso di risposta negativa.
3. Discutere il tempo di esecuzione dell'algoritmo proposto.

Soluzione 1.

1.1 Lemma 1

Sia G=(V,E) un grafo non orientato, un grafo è bipartito se tutte le sue componenti connesse sono bipartite.

Teorema 1

Un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari.
Dimostrazione
Procedo dimostrando un'implicazione per volta.
1° implicazione $\Rightarrow$
Si vuole dimostrare che se un grafo è bipartito $\Rightarrow$ non contiene cicli di lunghezza dispari.
Supponiamo per assurdo che esiste un ciclo di lunghezza dispari:
$\exists\, C = (w_1, w_2, ...w_n, w_1)$ tale che n = 2k+1 dove $k \in \mathbb{Z}$ e $w_i \in V \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$
Senza perdita di generalità sia:

$$w_1 \in V_1$$
$$w_2 \in V_2$$

Sia $w_i \in v_1 \ \ \forall i = 2k+1 \rightarrow w_n \in V_1$
È assurdo in quanto $(w_n, w_1) \in E \quad$ e $w_n, w_1 \in V_1$
2° implicazione $\Leftarrow$
Sia $g = (v, e)$ un grafo senza cicli di lunghezza dispari
Sia $w \in g$, posso partizionare il grafo in due sottoinsiemi:

$$V_1 = \{\ v \in V\ |d(v, w)\ \text{ è pari }\}$$
$$V_2 = \{\ v \in V\ |d(v, w)\ \text{ è dispari }\}$$
$$V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad V_1 \cup V_2 = V$$

Voglio dimostrare che questa partizione è di un grafo bipartito.
Supponiamo per assurdo che questa partizione non lo sia, quindi deve esistere un arco che collega 2 vertici dello stesso insieme, formalmente :

$$\exists (a, b) \in E \ \text{ tale che } a, b \in V_1 \text{ oppure } a, b \in V_2$$

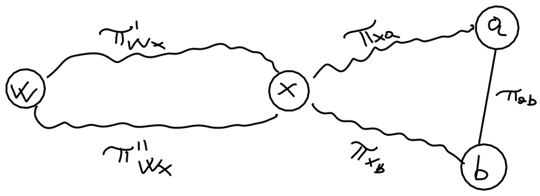
Senza perdita di generalità, sia $a = w \Rightarrow d(a, w) = 0$ quindi $a \in V_1$ ed anche $b \in V_1 \rightarrow d(w, b) = d(a, b) = 2k$. È assurdo poichè:

$$1 = d(a, b) = 2k$$

Quindi si conclude che $a \neq b \neq w$.

Sia ora π_{wa} e π_{wb} i due cammini minimi che vanno rispettivamente da w ad a, e da w a b. I due cammini hanno almeno un vertice in comune, in quanto w è comune a tutti e due i cammini, tuttavia può avere anche altri vertici in comune.

Sia x l'ultimo vertice in comune nei due cammini, una rappresentazione grafica è riportata nell'immagine seguente:



La lunghezza dei due cammini π_{wa} e π_{wb} sono tutti e due pari o tutti e due dispari, poichè a e b appartengono allo stesso insieme, e siccome sono cammini minimi, la lunghezza dei cammini corrisponde alla distanza tra gli estremi dei cammini. Grazie a questa proprietà possiamo dire che la lunghezza di $\pi'_{w,x}$ e $\pi''_{w,x}$ sono uguali, quindi π_{xa} e π_{xb} continuano ad essere tutte e due pari o tutte e due dispari.

Calcoliamo la lunghezza del seguente ciclo:

$$C = (\pi_{ax}, \pi_{xb}, \pi_{b,a})$$
$$l(C) = l(\pi_{ax}) + l(\pi_{xb}) + l(\pi_{b,a})) = d(a, x) + d(x, b) + d(b, a)$$

Sappiamo che $l(\pi_{ax}), l(\pi_{xb})$ sono tutte e due pari o tutte e due dispari, di conseguenza $d(a, x) + d(x, b) = 2k$ inoltre $d(b, a) = 1$ siccome sono vertici connessi da un arco per ipotesi, quindi:

$$l(C) = 2k + 1$$

È assurdo poichè in partenza abbiamo supposto che non esistono cicli di lunghezza dispari, quindi il partizionamento è di un grafo bipartito poichè non possono esserci archi che uniscono due vertici dello stesso insieme. ■

Ricapitolando, suppondendo che non esistono cicli di lunghezza dispari, abbiamo partizionato il grafo in due sottoinsiemi, e supponendo che il partizionamento abbia due vertici dello stesso insieme collegati da un arco, arriviamo all'assurdo di avere un ciclo di lunghezza dispari, quindi il partizionamento creato è di un grafo bipartito.

Soluzione 2.

Basandoci sul teorema precedente, è possibile realizzare un algoritmo che dato un grafo in input, è in grado di riconoscere se è bipartito provando a trovare un ciclo di lunghezza dispari nel grafo.

Possiamo ricavare l'algoritmo basandoci su una visita BFS, in quanto l'albero della visita BFS gode di alcune proprietà utili per il nostro problema.

Lemma 2

Siano dati un grafo non orientato e connesso $G = (V, E)$, un vertice s in G, ed un albero T prodotto dall'algoritmo visitaBFS(s). Per ogni vertice v, risulta $l(v) = d_{sv}$

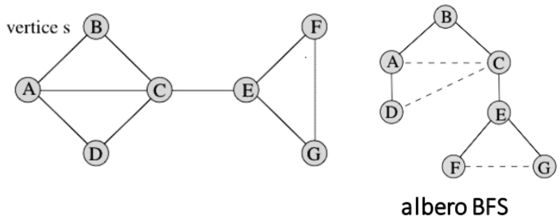
Questa lemma è particolarmente utile per sfruttare il partizionamento usato nella dimostrazione del teorema 1, in quanto possiamo marcare i vertici con livello di profondità pari dell'alberto BFS nell'insieme V_1, e marchiamo nell'insieme V_2 i vertici con profondità dispari nell'albero BFS.

Proprietà 1

Ogni arco di un grafo non orientato G su cui si effettua la visita in ampiezza può essere classificato in tre gruppi rispetto all'albero BFS prodotto:

1. archi dell'albero BFS.

2. archi tra vertici allo stesso livello dell'albero BFS.
3. archi tra livelli adiacenti dell'albero BFS.



L'arco di tipo 2, è un arco che unisce due vertici della stessa profondità dell'albero BFS, quindi unisce due vertici dello stesso insieme, quindi basta controllare con una variante dell'algortimo visitaBFS, che non ci siano archi di tipo 2, se c'è un arco di tipo 2, sicuramente c'è un ciclo negativo, altrimenti se si arriva a visitare tutto il grafo senza incontrare archi di tipo 2, allora l'algoritmo non ha archi che uniscono due vertici dello stesso insieme.