Problema grafo bipartito

nico fiorini

1 Problema 5.2, grafo bipartito

Risolvere il seguente problema:
Un grafo non orientato G(V,E) si dice bipartito se è possibile partizionare i suoi vertici in due sottoinsiemi V_1 e V_2 tali che non esistono archi tra vertici nello stesso sottoinsieme: formalmente, se (u,v) $\in$ e, allora u $\in v_1$ e $u \in v_2$ o viceversa.

1. Dimostrare che un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari, dove la lunghezza è il numero di archi nel ciclo.

2. Descrivere un algoritmo per verificare se un grafo connesso è bipartito. l'algoritmo deve esibire la partizione V_1 V_2 nel caso di risposta affermativa, e un ciclo di lunghezza dispari nel caso di risposta negativa.

3. Discutere il tempo di esecuzione dell'algoritmo proposto.

2 Soluzione 1.

2.1 Teorema

Un grafo è bipartito se e solo se non contiene cicli di lunghezza dispari.
Dimostrazione
Procedo dimostrando un'implicazione per volta.
1° implicazione ⇒
Si vuole dimostrare che se un grafo è bipartito ⇒ non contiene cicli di lunghezza dispari.
Supponiamo per assurdo che esiste un ciclo di lunghezza dispari:
$\exists\ C = (w_1, w_2, ...w_n, w_1)$ tale che n = 2k+1 dove $k \in \mathbb{Z}$ e $w_i \in V \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$
senza perdita di generalità sia:

$$w_1 \in V_1$$
$$w_2 \in V_2$$

Sia $w_i \in v_1\ \ \forall i = 2k+1 \rightarrow w_n \in V_1$
È assurdo in quanto $(w_n, w_1) \in E \quad$ e $w_n, w_1 \in V_1$
2° implicazione ⇐
Sia $g = (v, e)$ un grafo senza cicli di lunghezza dispari
Sia $w \in g$, posso partizionare il grafo in due sottoinsiemi:

$$V_1 = \{\ v \in V\ |d(v, w)\ \text{ è pari }\}$$
$$V_2 = \{\ v \in V\ |d(v, w)\ \text{ è dispari }\}$$
$$V_1 \cap V_2 = \emptyset \quad V_1 \cup V_2 = V$$

Voglio dimostrare che questa partizione è di un grafo bipartito.
Supponiamo per assurdo che questa partizione non lo sia, quindi deve esistere un arco che collega 2 vertici dello stesso insieme, formalmente :

$$\exists (a, b) \in E\ \text{ tale che } a, b \in V_1 \text{ oppure } a, b \in V_2$$

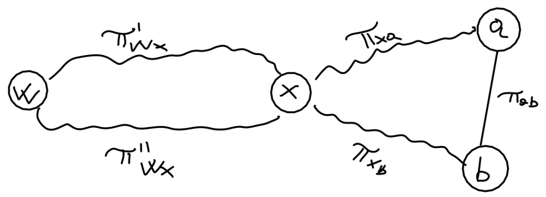
Senza perdita di generalità, sia $a = w \Rightarrow d(a, w) = 0$ quindi $a \in V_1$ ed anche $b \in V_1 \rightarrow d(w, b) = d(a, b) = 2k$.
è assurdo poichè:

$$1 = d(a, b) = 2k$$

Quindi si conclude che $a \neq b \neq w$.

Sia ora π_{wa} e π_{wb} i due cammini minimi che vanno rispettivamente da w ad a, e da w a b. I due cammini hanno almeno un vertice in comune, in quanto w è comune a tutti e due i cammini, tuttavia può avere anche altri vertici in comune.

Sia x l'ultimo vertice in comune nei due cammini, una rappresentazione grafica è riportata nell'immagine seguente:



La lunghezza dei due cammini π_{wa} e π_{wb} sono tutti e due pari o tutti e due dispari, poichè a e b appartengono allo stesso insieme, e siccome sono cammini minimi, la lunghezza dei cammini corrisponde alla distanza tra gli estremi dei cammini. grazie a questa proprietà possiamo dire che la lunghezza di $\pi'_{w,x}$ e $\pi''_{w,x}$ sono uguali, quindi π_{xa} e π_{xb} continuano ad essere tutte e due pari o tutte e due dispari.

Calcoliamo la lunghezza del seguente ciclo:

$$C = (\pi_{ax}, \pi_{xb}, \pi_{b,a})$$
$$l(C) = l(\pi_{ax}) + l(\pi_{xb}) + l(\pi_{b,a})) = d(a, x) + d(x, b) + d(b, a)$$

Sappiamo che $l(\pi_{ax}), l(\pi_{xb})$ sono tutte e due pari o tutte e due dispari, di conseguenza $d(a, x) + d(x, b) = 2k$ inoltre $d(b, a) = 1$ siccome sono vertici connessi da un arco per ipotesi, quindi:

$$l(C) = 2k + 1$$

È assurdo poichè in partenza abbiamo supposto che non esistono cicli di lunghezza dispari, quindi il partizionamento è di un grafo bipartito poichè non possono esserci archi che uniscono due vertici dello stesso insieme. ■

Ricapitolando, suppondendo che non esistono cicli di lunghezza dispari, abbiamo partizionato il grafo in due sottoinsiemi, e supponendo che il partizionamento abbia due vertici dello stesso insieme collegati da un arco, arriviamo all'assurdo di avere un ciclo di lunghezza dispari, quindi il partizionamento creato è di un grafo bipartito.

3 Soluzione 2.