Lösung Einführung in die Mathematik Übung 5 Semester 1

Paul Wolf

December 3, 2019

Contents

1 A1

K geordneter Körper und $x, y \in K$

1.1 i

Zu zeigen:
$(x < 0 \wedge y < 0)$ oder
$x^{'} > 0 \wedge y > 0$, so folgt $0 < x^{'} * y$

Beweis

(*) $a, b \in K$,$a < b$, $c > 0 \Rightarrow ac < bc$
Mnotonie bzgl. "*".

Fall 1

$x > 0 \land y > 0 \overset{(*)}{\Rightarrow} xy > 0y = 0$; $[a = 0, b = x, c = y]$

Fall 2

$x < 0 \land y < 0$
$\Rightarrow xy = (-x)(-y) > 0(-y) = 0$ (Fall 1 mit $-x > 0 \land -y > 0$)

1.2 ii

Zu zeigen:
$0 < x^2 \iff x \neq 0$

Beweis "$\Rightarrow$" Kontraposition

Sei $x = 0$, dann: $x^2 = xx = 0 * 0 = 0 \not> 0$

Anmerkung

"$A \Rightarrow B$" $\iff (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Beweis "$\Leftarrow$"

Sei $x \neq 0$ Dann gibt es 2 Fälle: (Trichotomie):
(1) $x > 0$
(2) $x < 0$
Im Fall 1: $x^2 = xx \overset{(i)}{>} 0$
Im Fall 2: $x^2 = (-x)(-y) \overset{(i)}{>} 0$

1.3 iii

Zu zeigen: $0 < 1$:
Nach Definition eines Körpers ist $1 \neq 0$, deshalb:
$1 = 1 * 1 = 1^2 \overset{(ii\Rightarrow)}{>} 0$

1.4 iv

Zu zeigen: $0 < x < y$, so folgt $0 < y^{-1} < x^{-1}$

Beweis

Sei $0 < x < y$, $x \neq 0 \land y \neq 0$ (Tansitivität $\Rightarrow 0 < y$)
$\Rightarrow \exists x^{-1} \land y^{-1} \in K$: $x * x^{-1} = y * y^{-1}$ Damit:
(**) $y^{-1} = y^{-1} * (y * y^{-1}) \overset{asso}{=} (y^{-1} * y^{-1}) * y \overset{(i)}{>} 0$

Weiter gilt:
$y^{-1} = y^{-1} * (x * x^{-1}) \overset{kommu}{=} x(y^{-1} * x^{-1}) < y(y^{-1} * x^{-1}) \overset{asso,kommu}{=} (y * y^{-1})x^{-1} = x^{-1}$
Damit ist die Aussage gezeigt.

2 A2

2.1 i

Zu zeigen: $\forall n, m \in \mathbb{N}$: $\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{m+k-1}{m} = \binom{m+n}{m+1}$

Beweis

IA $n = 1$

$\sum\limits_{k=1}^{1} \binom{m+k-1}{m} = \binom{m}{m} = 1 = \binom{m+1}{m+1}$ (stimmt)

IV $n \curvearrowright n + 1$

Es gelte (*) für ein $n \in \mathbb{N}$

IS

$\sum\limits_{k=1}^{n+1} \binom{m+k-1}{m} = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{m+k-1}{m} + \binom{m+n}{m} \overset{IV}{=} \binom{m+n}{m+1} + \binom{m+n}{m} = \binom{m+(n+1)}{m+1}$

Anmerkung

Aus Vorlesung bekannt: für $n \in \mathbb{N}, k \in \{1, \ldots, n\}$:
$nchoosek + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

2.2 ii

$m = 1$:
$\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{k}{1} \overset{(i),n=1}{=} \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = \sum\limits_{k=1}^{n} k^1$ $m = 2$:
$\sum\limits_{k=1}^{n} \binom{k}{2} \overset{(i)}{=} \binom{n+2}{32} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = (\sum\limits_{k=1}^{n} k^2)$

2.3 iii

Zu zeigen:
$\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ $(k(k+1) = 2 * \binom{k+1}{2})$

Beweis

(ii) für $m = 2$:
$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 2 * \sum_{k=1}^{n} \overset{(i),m=2}{=} \frac{n(n+1)(n+1)}{6}$
Oder Ergebnis raten und mit Induktion beweisen.

3 A3

$M := \underset{k \in \mathbb{N}}{U} \{x \in \mathbb{Q} : \frac{1}{2k} \leq x < \frac{1}{2k-1}\}$

Zu zeigen: $supM = 1 \notin M$ Beweis

- $1 \notin M$, da für $x \in M$ gilt: $\exists k \in \mathbb{N}$: $x < \frac{1}{2k-1} < 1$.

- $supM = 1$, da 1 obere Schranke für M ist. (siehe eine Zeile drüber)

und zwar die kleinst, da (Beweisstruktur. Nehme an, es gäbe eine kleinere und zeige.dass das dies dann keine obere Schranke mehr ist).
für $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < \frac{1}{2}\}$ und $\varepsilon \in \mathbb{Q}$:

$1 - \varepsilon \in \{x \in \mathbb{Q} : \frac{1}{2} < x < 1\}$

$\subseteq M$, da $\uparrow$ die Menge für $k = 1$ aus der Vereinigung ist, über die M definiert ist. Also ist $1 - \varepsilon$ keine obere Schranke mehr.
Zusammenfassung sup/max:
$supM = 1$ und $maxM$ existiert nicht, da $supM \neq M$

Anmerkung1

$a, b \in \mathbb{R}$:
$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Anmerkung2

Für $\varepsilon_2 > \frac{1}{2}$ ist das erst Recht keine obere Schranke mehr, da
$1 - \varepsilon_2 \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \leq 1 - \varepsilon$

Zu zeigen: $infM = 0 \notin M$ Beweis

$0 \notin M$, da $\frac{1}{2k} \nleq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ und für $x \in M$: $0 < \frac{1}{2k} \leq x$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
(Für alle $x \in M$ folgt $0 < x \Rightarrow 0 \notin M$.)

$infM = 0$

Da 0 untere Schranke für M ist und zwar die größte, denn füt $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ mit $\varepsilon > 0$:
$\exists k_O \in \mathbb{N}$: $\frac{1}{2k_O} \leq \varepsilon = 0 + \varepsilon$
$\Rightarrow \exists x \in M$: $x < \frac{1}{2(k_O+1)-1} = \frac{1}{2k_O+1} \leq \frac{1}{2k_O} \leq 0 + \varepsilon$, also ist $0 + \varepsilon$ keine untere Schranke für M.

Zusammenfassung

$infM = 0$ und $minM$ existiert nicht, da $infM \notin M$