Lösung Übung DSL Ü4 Semester 1

Paul Wolf

November 29, 2019

Contents

(sorry für das Deutsch, habe es nur abgeschrieben...)
Im Folgenden werden teilweise Worte, wie "und", "oder" durch ihre logischen Operanten $\wedge$, $\vee$ ersetzt.

1 A1

E seien $A, B, C, D \subseteq U$ Mengen. Zeigen Sie:

1.1 1

$(A \cap B)x(C \cap D) = (AxC) \cap (BxD)$
Recall: $AxB = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$

$(AxB)x(C \cap D) = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B \wedge y \in C \cap D\}$
$= \{(x, y) \mid x \in A \wedge x \in B \wedge y \in C \wedge y \in D\}$
$= \{(x, y) \mid (x, y) \in AxC \wedge (x, y) \in BxD\}$
$= (AxC) \cap (BxD)$

1.2 2

$(A \cup B)x(C \cup D) = \{(x, y) \mid x \in A \vee x \in B, y \in C \vee y \in D\}$
$= \{(x, y) \mid x \in A, y \in C$ oder
$x \in A, y \in D$ oder
$x \in B, y \in C$ oder
$x \in B, y \in D\}$
$= \{(x, y) \mid (x, y \in AxC) \in AxD$
$(x, y) \in BxC$
$(x, y) \in BxD\}$
$= (AxC) \cup (AxD) \cup (BxC) \cup (BxD)$

1.3 3

$(\overline{AxB}) = (\overline{A}xB) \cup (Ax\overline{B}) \cup (\overline{A}x\overline{B})$
1: $\overline{A}^u$(u ist das Universum)
2: $\overline{B}^u$
Recall: $\overline{A} = \{x \mid x \notin A, x \in U\}$
$\overline{A} = U \setminus A$

1.3.1 i

Sei $(x, y) \in \overline{AxB}$
$\Rightarrow x \in \overline{A}, y \in B$oder
$x \in \overline{A}, y \in \overline{B}$ oder
$x \in A, y \in \overline{B}$
$\Rightarrow (x, y) \in \overline{A}xB$ oder
$(x, y) \in \overline{A}x\overline{B}$ oder
$(x, y) \in Ax\overline{B} \Rightarrow (x, y) \in (\overline{A}xB) \cup (Ax\overline{B}) \cup (\overline{A}x\overline{B})$

1.3.2 ii

Sei $(x, y) \in (\overline{A}xB) \cup (Ax\overline{B}) \cup (\overline{A}x\overline{B})$
$\Rightarrow genauumgekehrt(i)$

1.4 4

$(AxB) \setminus (CxD) = (Ax(B \setminus B)) \cup ((A \setminus C)xB)$
$(AxB) \setminus (CxD) = (AxB) \cap (CxD)$
$= (AxB) \cap ((\overline{C}xD) \cup (Cx\overline{D}) \cup (\overline{C}x\overline{D}))$

$= (AxB) \cap (\overline{C}xD) \cup (AxB) \cap (Cx\overline{D}) \cup (AxB) \cap (\overline{C}x\overline{D})$
$= (A \cap \overline{C})x(B \cap D) \cup (A \cap C)x(B \cap \overline{D}) \cup (A \cap \overline{C})x(B \cap \overline{D})$
$Ax(B \cap \overline{D}) \cup ((A \cap \overline{C})xB)$
$= (Ax(B \setminus D)) \cup ((A \setminus C)xB)$

Anmerkung

$(AxB) \cup (CxD) \neq (A \cup C)x(B \cup D)$
$(AxB) \cup (CxD) \subseteq (A \cup C)x(B \cup D)$
Wenn (A1a) die Vereinigung nicht stimmt...

2 A2

1. Familie, Freunde
$(2,3)$ sei $R \subseteq X = X$ eine Relation.
Dann

i

R ist reflexiv $iff \overline{R} \subseteq XxX$ ist irreflexiv

ii

R ist irreflexiv $iff \overline{R} \subseteq XxX$ ist reflexiv

Beweis sei $R \subseteq XxX$ eine Reflexion
dann $\forall x \in X : (x,x) \in R$
durch Definition von $\overline{R} : (x,y) \in R \Rightarrow (x,y) \notin \overline{R}$
das gilt auch für (x,y) und so $\forall x \in X : (x,x) \notin R$
Deshalb ist $\overline{R}$ irreflexiv.

III^{log} (genauso ähnlich):
$\forall x \in X : (x,x) \notin R \Rightarrow \neg(x,y) \notin \overline{R}$
durch doppelte negation: $(x,y) \in \overline{R}$
Der umgekehrte Teil folgt von dem Fakt, dass $\overline{(\overline{R})} = R$ durch relativ Komplement vom relativen Komplement.

$(2,3)$ sei $R \subseteq X = X$ eine Relation. Dann ist R symmetrisch $\iff$ $\overline{R} \subseteq XxX$ auch symmetrisch:

2.1 Beweis

Sei $R \subseteq XxX$ ist symmetrisch.
Durch symmetrie von Relationen ist symmetrisch
$(x, y) \in R \iff (x, y) \in R$
Annahme, dass $\overline{R} \subseteq XxX$ ist antisymmetrisch, dann
$\exists (x, y) \in \overline{R} : (y, x) \in \overline{R}$
Aber durch Def. von $\overline{R}(y, x) \in R$
$Ristsymmetrisch(x, y) \in R \Rightarrow\Leftarrow$ zu $(x, y) \in \overline{R}$
So ist $\overline{R}$ symmetrisch. Ähnlich folgt die umgekehrte Richtung.

2.2 Anmerkung

$(x, y) \in R \iff (y \in X) \in R$
Beweis: Sei R symmetrisch
$(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
$(y, x) \in R \Rightarrow (x, y) \in R$
$(x, y) \in R \iff (y, x) \in R$ (bidirektional)

3 A3

Die Kugel (a,c) und (b,c) müssen im Komplement der geschnittenen Menge liegen d.h. in $(R \cup R^-)$. Der Fall $(a, c) \in R$ und $(b, c) \in R^-$ würde wegen der Transitivität $(a, b) \in R$ ergeben, was der Vorraussetzung wiederspricht, analog kann $(a, c) \in \overline{R}$ und $(b, c) \in R^-$ nicht sein, da auch R^- transitiv ist und dies $(a, b) \in R^-$ ergeben würde.
Die Behautung wird nur erfüllt, wenn beide Tupel entweder in R, oder $\overline{R}$ liegen.

4 A4

$M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$R, S \subseteq MxM$
$R = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1)\}$
$S = \{(1, 1), (1, 3), (3, 3), (4, 5)\}$
$RoS = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$
Extra: $SoR = \{(1, 1), (3, 1)\}$

Definition

$RoS = \{(x, z) \mid \exists y \in Y, (x, y) \in R \wedge (y, z) \in S\}$
$R \cap S = \{(x, y) \mid (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S\}$
$R \cup S = \{(x, y) \mid (x, y) \in R \vee (x, y) \in S\}$