Lehramt Mathe Vorlesung 6 Semester 1

Paul Wolf

November 28, 2019

Contents

1 Später

$x^2 = 2$ hat keine Lösung in $\mathbb{Q}$. Das Äquivalent zu $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$ hat keine kleinste obere Schranke in $\mathbb{Q}$

2 1.2.34 Definition

Es sei K ein geordneter Körper (Standardbeispiel: $\mathbb{Q}$, später: $\mathbb{R}$). Weiter sei $M \subset K$

2.1 i

$x \in K$ heißt obere (untere) Schranke für M_1 falls $m \leq x(x \leq m)$ für alle $m \in M$

Mitlaufendes Beispiel:

$M := \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$
Ist $x^2 \leq 2 \Rightarrow | x | \leq \frac{3}{2}$ () z.B. da $\frac{3}{2}^2 = \frac{9}{4} > 2 \Rightarrow x^2 \leq 2 \Rightarrow | x | \leq \frac{3}{2}$
Damit ist $x = \frac{2}{3}$ oberste Schrnake und $x = -\frac{3}{2}$ untere Schranke von M

2.2 ii

M heißt nach oben (unten) beschränkt, falls M eine obere (untere) Schranke besitzt.

Mitlaufendes Beispiel:

M ist beschränkt, da M eine obere und untere Schranke hat!

iii

M heißt beschränkt, falls M nach oben und unten beschränkt ist

2.3 iv

Eine obere (untere) Schranke x von M heißt Supremum (Infinum) von M, falls $y \geq x(y \leq x)$ für alle oberen (unteren) Schranken von M.

Mitlaufendes Beispiel:

$x \in K$ ist Supermum von $M \subset K$ falls x die kleinste obere Schranke von M ist .
$x \in K$ ist Infinium von $M \subset K$ falls x die größte untere Schranke von M ist.

2.4 v

Ein Spupermum (Infinum) von M heißt Maximum (Minimum) von M, falls zusätzlich $x \in M$ gilt.

Beispiel

$M := \{M \in \mathbb{Q} : -2 < m \leq 3\}$
Dann ist -2 untere Schranke, 3 obere Schranke von M. -2 ist auch größte untere Schranke von M, also Infinum von M, also kein Minimum (da $-2 \notin M$), 3 ist kleiste obere Schranke von M, $3 \in M$, also sogar Maximum von M.
2=inf M(Minuimum existiert nicht)
3=sup M =max M

3 1.2.35 Bemerkung/Definition

3.1 i

M ist beschränkt genau dann, wenn ein $y \in K$mit $\mid m \mid \leq y, m \in M$.

3.2 ii

Supermum und Infinum müssen NICHT existieren, auch wenn die vorliegende Menge beschränkt ist.
Ist y doch $x \in K$ Supermum (Infinum) von $M \subset k$ so ist x aufgrund der Trichotomie schon eindeutig und wir schreiben: $supM := x$
$(infM := x)$

3.3 iii

Auch wenn für $M \subset k$ $supM(infM)$ existieren, so braucht M kein kein Maximum (Minimum) besitzen. Ist y doch $supM(infM)$ existent und gehört zu M, so setzen wir $maxM := supM(supM := infM)$

4 1.2.36 Satz (Satz von Archimedes für $\mathbb{Q}$)

Sind $x, y \in \mathbb{Q}, x, y > 0$, dann existiert auch ein $m \in \mathbb{N}$ mit
$nx = x, \ldots, x = \frac{n}{1}x > y$x klein, y groß

Beweis

$x = \frac{p_1}{q_1}$,$y = \frac{p_2}{q_1}$, $p, q \in \mathbb{N}$
Setze $n := p_2 q_2$ Dann gilt $nx := \frac{n}{1}x = \frac{np_1}{q_1} = \frac{p_2 q_1 P_1}{q_1} = \frac{p_1 q_2}{1} * \frac{q_1 p_2}{q_1 q_2} \geq \frac{p_2}{q_2} = y$

Folgendes Korollar kann man natürlich auch direkt beweisen:

5 1.2.37 Folgerung

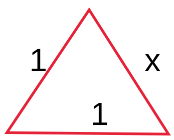
Fassen wir $\mathbb{N}$(wie üblich) als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ auf, so ist $\mathbb{N}$ nach unten durch 1 und nicht nach oben beschränkt.
Weiter existiert zu jedem $x \in \mathbb{Q}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $m > x$.

6 1.2.38 Bemerkung

In jedem Körper K kann man die Gleichung $nx = y$ für jedes $y \in K$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösen.
Daraus folgt aus $n * 1 > 0$, also $x = (n-1)^{-1}y$.
Leider sieht dies bei Gleichungen $x^n = y$ ganz anders aus:
z.B. $x^2 = y$:
Ist $x \in K$ Lösung $\overset{x^2 \geq 0}{\Rightarrow} y > 0$
In keinem geordneten Körper k hat die Gleichung $x^2 = y$ eine Lösung für negatives $y \in k$. ($\rightarrow$ Körper $\mathbb{Q}$ der komplexen Zahlen).
Aber es kommt schlimmer:

7 1.2.39 Satz

Es gibt keine rationale Zahl $z \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.
$x^2 = 1^2 + 1^2 = 2$
$x \notin \mathbb{Q} \rightarrow R$



Beweis

1. wir zeigen zunächst : ist $p \in \mathbb{Z}, p^2$gerade $\Rightarrow$ p gerade Ansonsten:
P ungerade, aber p^2gerade, also $p = r + 1$ für ein $r \in \mathbb{Z}$,
$p^2 = 4r^2 + 4r + 1$, also auch ungerade

2. Wir nehmen an, dass $x \in \mathbb{Q}$existiert mit $x^2 = 2.x > 0$.
Betrachte $\{R \in \mathbb{N} : x = \frac{s}{r}$ für ein $s \in \mathbb{N}\}$ Dann hat die Menge ein minimales Element q.
Das heißt:Es gibt $p \in \mathbb{N}$ mit (*)
$x = \frac{p}{q}$ und q ist kleinstmöglich.
Es folgt $x^4 = \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p$ gerade
$\Rightarrow p = 2p_O$mit einem $p_O \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow 2q^2 = p^2 = 4p_O^2 \Rightarrow q^2 = 2p^2$,
also $4 = 2q_O$ mit einem $q_O \in \mathbb{N}$.
$\Rightarrow x = \frac{p}{q} = \frac{2p_O}{2q_O} = \frac{p_O}{q_O}$ und $q_O < q$, $q_O, p_O \in \mathbb{N}$
Das ist ein Wiederspruch in (*), also war die Annahme $x^2 = 2$ falsch , damit gibt es also kein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$.
Zusammenhang von 1.2.39 war Existenz von Supermum bzw. Ininum.

8 1.2.40 Satz

Es sei k ein geordneter Körper $n \in \mathbb{N}$,$c \in K$,$c > 0$ Weiter sei
$M := \{x \in k : x^n \leq c, x \geq 0\}$

8.1 i

Damit ist M beschränkt und nicht leer

8.2 ii

Existiert $s = suoM$, so gilt $s^n = c$
und s ist die eindeutige positive Lösung der Gleichung $x^n = c$

Beweis

8.3 i

$= \in M \Rightarrow M = \varnothing$
o ist untere Schranke, da Minimum. 1+c ist obere Schranke, da für $x \in M$gilt $x^n \leq c \overset{\text{Bernoulli}}{\leq} (1+c)^n \Rightarrow x \leq 1 + c$

8.4 ii

Ist $0 \leq b \leq a$ dann gilt $a^n - b^n \leq n(a-b)n^{n-1}$
$a^n - b^n \overset{1.2.12}{=} (a-b) = \sum_{\nu=0}^{n-1} a^\nu b^7 n - 1 - \nu \leq (a-b)n * a^{n-1}$

8.4.1 a)

Angenommen $s^n > c$. Dann $\delta > c$mit $(s-\delta)^n \leq c$,
Setze in (*), $a = s$,$b = s - \delta$,$\delta = \frac{s^n - c}{ns^{n-1}}$
Zu $x \in M$, so ist $x^n \leq c \leq (s-\delta)^n$
$\Rightarrow x \leq s - \delta$, Wiederspruch zu $s = supM$.

8.4.2 b

Ähnlich: s^nkann nicht kleiner als c sein:
a) und b) $\Rightarrow s^n = c$

9 1.2.41 Definition

Ein geordneter Körper k heißt vollständig geordneter Körper, falls jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge ein Supermum besitzt.

10 1.2.42 Bemerkung

Ist K wie in 1.2.41, $c \geq 0$, dann existiert genau ein $x > 0$mit $x^n = c$
$\sqrt[n]{c} = x$,$\sqrt{c} = \sqrt[2]{c}$

11 1.2.43 Satz

Es exisitert ein vollständig geordneter Körper $\mathbb{R}$, der eine Erweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

12 1.2.43 Bemerkung

Die Elemente von $\mathbb{R}$ heißen reelle. Es gibt

12.1 i

Für alle $x \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$mit $n > x$

12.2 ii

Sind $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$, so existiert $q \in \mathbb{Q}$ mit $x < q < y$
1.2.43 und 1.2.44 sind schwer!