Lehramt Mathe Übung 4 Semester 1

Paul Wolf

November 26, 2019

1 Vorab

Schreibweisen mit ... wenn möglich vermeiden. Statt $a_1, \ldots, a_n$ besser $\sum_{i=1}^{n} a_i$

2 A1

Es sei (K,+,*) ein Körper. Für $x, y \in K$ und $n, m \in \mathbb{N}$ zeige:

2.1 a) $x^n * x^m = x^{n+m}$

Beweis:

IA: Sei $n \in \mathbb{N}$**und**$m = 1$

$x^{n+1} :=^{Asso} \Pi_{i=1}^{n+1} x = (\Pi_{i=1^n} x)x = x^n x^1$

IV:

Es gelte $x^n x^m = x^{n+m} \forall n \in \mathbb{N}$

IS: ($m \curvearrowright m+1$**)**

(keine Klammern nötrig, da Kommutativgesetz) $x^{n+(n+1)} = x^{(n+m)+1} = x^{n+m}x^1 = x^n x^m x^1 =^{I.A.}= x^n x^m + 1$

2.2 b) $x^n * y^n = (x * y)^n$

Beweis:

IA: $n = 1$

$x^1 * y^1 = (x * y)^1$(stimmt)

IV: Es gelte $x^n * y^n = (x * y)^n$ **für** $n \in \mathbb{N}$

IS:

$(x * y)^{n+1} = (x * y)^n (x * y)^1 = x^n y^n xy = (x^n x)(y^n y) = x^n + 1y^n + 1$

2.3 c)$(x^m)^n = x^{m*n}$

Beweis: Sei $m \in \mathbb{N}$

IA: $n = 1$**:**$(x^n)^1 = x^n * 1$ **(stimmt)**

IV: $(x^m)^n = x^{m*n}$ **für ein** $n \in \mathbb{N}$

IS:

$(x^m)^{n+1} = (x^m)^n * (x^m)^1 \overset{\text{IV}}{=}^{m*n} x^m = x^{mn+m} = x^{m(n+1)}$

2.4 d)

Beweis:

$x^n x^{-n} = x^n (x^{-1})^n = (x * x^{-1})^n = (1)^n = 1$

3 A2:

Zeige zuerst: ($\mathbb{F}_2$,+) ist abelsche Gruppe.

3.1 i

0 ist neutrales Element bzgl. "+". (Auf Tabelle schauen oder: $0 + 1 = 1$,$0 + 0 = 0$)

3.2 ii (Assoziativ)

Seien $a, b, c \in \mathbb{F}_2$ Falls $a = 0$: $(a + b) + c = a + (b + c)$ Falls $b = 0$ auch. Falls $c = 0$ auch. Falls $a = b = c = 1$: $(a+b)+c = (1+1)+1 = 0+1 = 1 = 1+0 = 1+(1+1) = a+(b+c)$

3.3 iii

Jedes Element von $\mathbb{F}_2$ hat ein Inverses, nämlich sich selbst. Für $a \in \mathbb{F}_2 : a + a = 0 \Rightarrow -a = a$

3.4 iv

Kommutativität entweder nachrechnen, oder ablesen anhand er Spiegelsymmetrie der Tabelle bzgl. der Diagonalen.

+	0	1
0	0	1
1	1	0

Zeige die weiteren Axiome bzgl. "*"

3.5 v

($\mathbb{F}_{\not{2}}, *$) Kommutativ analog zu iv):

*	0	1
0	0	0
1	0	1

3.6 vi

1 ist neutrales Element bzgl. "*". (Ablesen oder nachrechnen $(1 * 0 = 0, 1 * 1 = 1)$)

3.7 vii (Assoziativ)

Seien $a, b, c \in \mathbb{F}_2$ Falls $b = 0$: $(a * b) * c = 0 * c = a * 0 = a(b * c)$ Falls $b = 1$: $(a * b) * c = a * c = a * (b * c)$

3.8 viii (Inverse bzgl. "*")

Für $a \in \mathbb{F}_2 \setminus \{0\}$ folgt $a = 1$ und damit hat a eine Inverse, nämlich sich slebst: $a * a = 1 * 1 = 1 \Rightarrow a^{-1} = a.(1^{-1} = 1)$

3.9 ix (Distributiv)

Seien $a, b, c \in \mathbb{F}_2$ Dann: Falls $a = 0$: $a * (b + c) = 0 = 0 + 0 = a * b + a * c$
Falls $a = 1$: $a * (b + c) = b + c = a * b + a * c$

4 A3

Zu zeigen: $S_n := \{\Pi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : \Pi Bijektion\}$ hat $n!$ Elemnte.

4.1 =

Beweis Induktion über $n \in \mathbb{N}$

IA $n = 1$

S_1 hat nur 1 Element, nämlich $\Pi : \{1\} \to \{1\}, \Pi(1) = 1$ (stimmt)$(1 = 1!)$

IV

$\mid S_n \mid = n!$(Nutze $\mid M \mid$ für Menge für die Anzahl Elemente von M)

IS $n \Rightarrow n+1$

Sei $T_k := \{\varphi \in S_{n+1} : \varphi(n+1) = k\}$ für $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ Dann $\mid S_{n+1} \mid = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \mid T_k \mid$(alle Möglichkeiten für $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ werden summiert) Bestimme also $\mid T_k \mid$: Für $\varphi \in T_k$ gibt es genau eine Bijektion $\psi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n+1 \setminus \{k\}\}$mit $\varphi(i) = \psi(i) \forall i \in \{1, \ldots, n\}$, nämlich $\psi := \varphi_{\{1,\ldots,n\}}$

2 Sachen zu prüfen:

1

Diese Bijektion ist eindeutig, da $\psi(i) = \varphi(i). \forall i \in \{1, \ldots, n\}$alle Funktionswerte vorgibt.

2

Das ist eine Bijektion, denn:

a)

ψ surjektiv,da $\forall j \in \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{k\}$:
$\psi^{-1}(j) = \varphi^{-1}(j) \in \{1, \ldots, n+1\}$udn $\varphi^{-1}(j) \neq n+1$, da
$j \neq k$(da $\varphi \in T_k$). Also: $\psi^{-1}(j) \in \{1, \ldots, n\}$ und damit
$\psi^{-1}(\{j\}) \neq \forall j \in \{1, \ldots, n+1\} \setminus \{k\}$

b)

ψ injektiv, da für $x_1, x_2 \in \{1, \ldots, n\}$:$\psi(x_1) = \psi(x_2) \Rightarrow \varphi(x_1) = \psi(x_1) = \psi(x_2) = \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Nun gilt also

$\mid T_k \mid = \mid \{\psi : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n+1 \setminus \{k\} : \psi bijektion\}\} \mid = \mid S_n \mid =^{I.V.} n! \Rightarrow \mid S_{n+1} \mid = \sum\limits_{k=1}^{n+1} \mid T_k \mid = \sum\limits_{k=1}^{n+1} n! = (n+1) * n! = (n+1)!$

5 A4

Zu zeigen: $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (1+n)^2$

Beweis:

IA $n = 1$

$\sum\limits_{k=1}^{1} k^3 = 1^3 = 1 = \frac{1}{4} 1^2 (1+1)^2$(stimmt)

IV

$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}n^2(1+n)^2$ für ein $n \in \mathbb{N}$

$n \to n+1$**: Es gilt**

$\sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 =^{IV} \frac{1}{4}n^2(1+n)^2 + (n+1)^3$
$= \frac{1}{4}n^2(1+2n+n^2) + 1 + 3n + 3n^2 + n^3$
$= \frac{1}{4}(n^2 + 2n^3 + n^4) + 1 + 3n + 3n^2 + n^3$
$= \frac{1}{4}(4 + 12n + 13n^2 + 6n^3 + n^4)$
$= \frac{1}{4}(n^2 + 2n + 1)(n^2 + 4n + 4)$
$= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2)^2$
$= \frac{1}{4}(n+1)^2(1+(n+1))^2$