Lehramt Mathe Vorlesung 5 Semester 1

Paul Wolf

November 26, 2019

Contents

1 Vorab

Wann immer x,y Elemente einses Körpers sind und $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{O}}$ ist, gilt: $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k y^{n-k}} = \frac{n(n+1)}{2}$

2 1.2.23 Folgerung

Ist A eine n-elementige Menge, so hat ihre Potenzmenge 2^n Elemente kurz: $\mid 2^A \mid = 2^{|A|}$

Beweis

$\mid A \mid =$ Anzahl der Elemente von A.
Mit $\alpha_k^n := \mid \{M \subset A : \mid M \mid = k\} \mid$ gilt nach 1.2.21
$\mid 2^A \mid = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k^n = \sum\limits_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n = 2^{|A|}$

Bemerkung

Es gilt für x,y Elemente eins Körpers

i

$(x+y)^2 = \sum\limits_{k=0}^{2} \binom{2}{k} y^k x^{2-k}$
$= y^0 x^2 + 2(xy) + y^2 x^0$
$= x^2 + 2xy + y^2$

ii

$(x+y)^3 = \sum\limits_{k=0}^{3} \binom{3}{k} y^k x^{3-k}$
$= x^3 + 3x^2 y + 3xy^2 + y^3$
3. Binomische Formel ? Folgt aus 1.2.12. Besser 1.2.12 ist Verallgemeinerung der 3. Binomischen Formel.

Sind $n, m \in \mathbb{Z}$, so setzt man $n < m \overset{def}{\iff} m - n \in N$

3 1.2.24 Definition

Es sei K ein Körper. Eine Reaktion auf K heißt Ordnung (auf K) und K heißt dann geordneter Körper, falls gilt:

i

Für $x, y \in K$ gilt genau eine der folgendn drei Bezeichnungen (trichotomie)
$x < y$
$x = y$
$y < x$

ii

$$x < z \text{ (transitivität)} = \begin{cases} x < y \\ y < z \end{cases}$$

iii

$$x+z<y+z \text{ (Monotoni bzgl. +)} = \begin{cases} x<y \\ z\in K \end{cases}$$

iv

$$xz<yz \text{ (Monotoni bzgl. *)} = \begin{cases} x<y \\ 0<z \end{cases}$$

4 1.2.25 Bezeichnungen

Es sei K ein geordneter Körper. Man setzt für $x, y \in K$
$y > x \overset{def}{\iff} x < y$
$x \leq y \overset{def}{\iff} x < y$ oder $x = y$
$y \geq x \overset{def}{\iff} x \leq y(\iff y > x$ oder $x = y)$
$K^+ := \{x \in K : x > 0\}$
$K_0^+ := \{x \in K : x \geq 0\}$
$K^* := \{K \setminus \{0\}(\text{?definiert})\}$

Bemerkung

Unsere Hauptbeispiele für geordnete Körper werden $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ die, endliche Körper (wie unser Körper $\mathbb{F}_{\not{2}}$) lassen sich nicht ordnen, genauso wenig wie der Körper C der komplexen Zahlen. Es sei wieder
$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{4} : p, q \in \mathbb{Z}, q = 0\}$ betrachtet.
Wegen $\frac{p}{q} = \frac{-p}{-q}$ können wir anerkennen, dass $q \in \mathbb{N}$ gilt.
Wir erhalten $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$
Bedeutet $c_{\mathbb{Z}}$ die Ordnung auf $\mathbb{Z}$, d.h. $n <_{\mathbb{Z}} m \iff m - n \in \mathbb{N}$, so sei für
$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2} \in \mathbb{Q}, q_j \in \mathbb{N}, j = 1, 2$ gesetzt
$\frac{p_1}{q_1} <_{\mathbb{Q}} \frac{p_2}{q_2} \iff p_1q_2 <_{\mathbb{Z}} p_2q_1(\iff p_21_1) - p_1q_2 \in \mathbb{N}$

5 1.2.26 Satz

$<_{\mathbb{Q}}$ ist eine Ordnung auf $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}$ ist damit ein geordneter Körper.

Beweis

Wir zeigen exemplarisch (Satz iii) aus 1.2.24 . Es sei $x = \frac{p_1}{q_1}, y, \frac{p_2}{q_2}, z = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$mit $\frac{p_1}{q_1} <_{\mathbb{Q}} \frac{p_2}{q_2}$z.z $\frac{p_1}{q_1} + \frac{r}{s} <_{\mathbb{Q}} \frac{p_2}{q_2} + \frac{r}{s}$. Ohne Einschränkung sind $q_1, q_2, s \in \mathbb{N}$ Nach Vorraussetzung ist $p_1q_2 <_{\mathbb{Z}} p_2q_1$ Dann gilt auch (in $\mathbb{Z}$!) $p_1q_2ss + rq_1q_2s <_{\mathbb{Z}} p_2q_1ss + rq_1q_2s$ Ausklammern: $(p_1s + rq_1)q_2s <_{\mathbb{Z}} (p_2 + rq_2)q, s$also (nach Def $<_{\mathbb{Q}}$)
$\frac{p_1}{q_1} + \frac{r}{s} = \frac{p_1s+rq_1}{q_1s} <_{\mathbb{Q}} \frac{p_2s+rq_2}{q_2s} = \frac{p_2}{q_2} + \frac{r}{s}$

6 1.2.27 Bemerkung

O Wir haben ja via $c : \mathbb{Z} \longmapsto \mathbb{Q}, n \longmapsto \frac{n}{1}$ $\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $\mathbb{Q}$ betrachtet. Es gilt $c()$ Weiter gilt für $n, m \in \mathbb{Z}$ Wir schreiben also $<$anstelle von$<_{\mathbb{Q}}$bzw.$<_{\mathbb{Q}}$

7 1.2.28 Satz

Es sei k ein geordneter Körper und es seien $x, y \in K$. Dann gilt

i $x > 0 \iff -x < 0$

ii $x, y < 0 \iff x, y > 0$

iii $x' > 0 \iff x \neq 0$

iv $1 > 0$

v Aus $0 < x < y$ **folgt** $-y < -x < 0$ **mit** $x^{-1} > y^{-1} > 0$

Beweis: Übung

8 1.2.29 Satz (Bernoullische Ungleichung)

Es sei x ein Element eines geordneten Körpers mit $x \geq -1$ Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}_{\mathbb{O}}$, dass $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Beweis (vollständige Induktion)

1

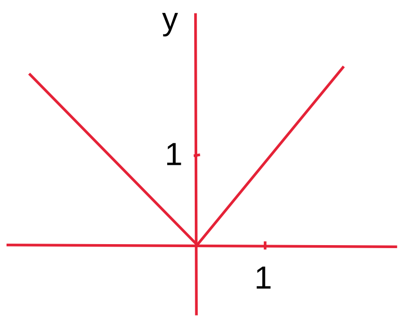
$n = 0 : (1 + x)^0 = 1 = 1 + 0x$

2

$n \longmapsto n + 1$:
Wir dürfen $(1 + x)^n \geq 1 + nx$(für $x \geq -1$)
verwenden und müssen $(1 + x)^n + 1 \geq 1 + (n + 1)x$(für $x \geq -1$) zeigen.
Es gilt für $x \geq -1(1 + x)^n + 1 = (1 + x)(1 + x)^n \geq (1 + x)(1 + nx)$ (monotonie von * Induktionsannahme)

$= 1 + nx + x + nx^2$
$= 1 + (n + 1)x + nx^2$
$\geq 1 + (n + 1)x$. (Monotonie von $+$)

9 1.2.30 Definition



Es sei K eine geordneter Körper. Ist $x \in K$, so heißt

$$| X |= := \{ \begin{matrix} x : x > 0 \\ -x : x < 0 \end{matrix}$$

$| * |: K \rightarrow K$,$x \rightarrow | x |$, heißt Betragsfunktion.

10 1.2.31 Bemerkung

Sind x,y Elemente eines geordneten Körpers K, so gilt:

i

$| x |=| -x |\geq 0$, $x, -x \leq | x |$, $| xy |=| x || y |$

ii

Ist $y > 0$so ist $| x |< y \iff -y < x < y$

11 1.2.32 Satz (Dreiecksgleichung)

Sind x,y Elemente eines georneten Körpers, so gilt $| x + y |\leq| x | + | y |$

Beweis

Fall1: $x + y \geq 0$

$\Rightarrow | x + y |= x + y \leq | x | +y \leq | x | + | y |$

Fall2: $x + y < 0$

$\Rightarrow | x + y |= -(x + y) = (-x) + (-y) \leq | -x | +(-y) \leq | -x | + | -y |=| x | + | y |$