Matlab Practice 03
Convolution and Differential Equation

Sangkeun Lee

Convolution

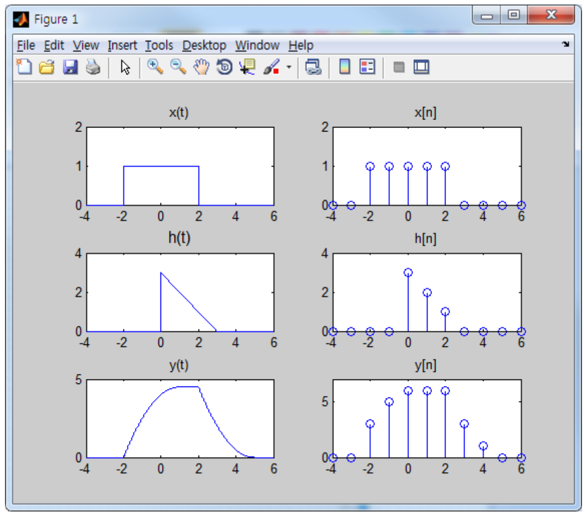
- **Matlab Practice 3-1**

다음과 같은 연속 신호 x(t)와 h(t)를 convolution 하여 y(t)를 구하고, 그려라

$$x(t) = u(t+2) - u(t-2), \quad h(t) = (-t+3)[u(t) - u(t-3)]$$

또한 이러한 연속 신호를 시간 간격 1로 샘플링한 이산신호 x[n]=u[n+2]-u[n-3]과 h[n]=(-n+3)(u[n]-u[n-3])h[n]을 convolution 하여 y[n]을 구하고, 이를 그려라.

result



차분방정식에 의한 이산 LTI시스템의 표현

- **입출력 관계가 상수 계수의 차분 방정식으로 표현**

$$y[n]+a_1y[n-1]+\cdots+a_py[n-p]=b_0x[n]+\cdots+b_qx[n-q]$$

차분 방정식의 풀이 - 반복 대입법

반복 대입에 의한 차분 방정식의 풀이

- 미분 방정식에는 없는 손쉽고 간단한 풀이 방법
- 반복해서 직전 단계 결과를 대입해 순차적으로 차분 방정식 해를 구함
- 일반적으로 닫힌 꼴의 해를 제공 않음
  → 그러나 컴퓨터에 의한 수치적 계산에 매우 적합함

반복 대입법에 의한 차분 방정식 풀이

- 1단계 : 차분 방정식의 좌변에 $y[n]$만 남기고 우변으로 넘겨 정리한다.
- 2단계 : 시작 시점 $n=i$에서 주어진 초기 조건 $y[i-1]$, ⋯, $y[i-k]$와 이미 알고 있는 입력 값들을 대입하여 $y[i]$를 계산한다.
- 3단계 : 차분 방정식에서 n을 1 증가시켜 직전에 구한 $y[i]$와 이미 알고 있는 과거 출력 및 입력 값들을 대입하여 $y[i+1]$을 계산한다.
- 4단계 : 3단계의 과정을 반복한다.

차분 방정식의 고전적 해법

차분 방정식의 고전적 해법

- 1단계 : 차분 방정식으로부터 특성 방정식과 특성근 $\{\gamma_i\}$를 구한다.
- 2단계 : 특성근을 이용하여 동차해의 형태를 $y_h[n] = \sum_{i=1}^{p} c_i(\gamma_i)^n$으로 둔다.
- 3단계 : 입력과 같은 형태로 특이해 $y_p[n]$을 설정하고, 이를 차분 방정식에 대입하여 완전히 결정한다.
- 4단계 : $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$이라 두고, 입력이 인가된 후의 초기 조건을 대입하여 동차해의 계수를 구함으로써 차분 방정식의 유일해를 확정한다.

※ 차분 방정식의 풀이는 z변환을 이용하는 것이 편리함

차분 방정식의 고전적 해법

- **차분 방정식의 해 = 동차해 + 특이해**

$$\boxed{y[n] = y_h[n] + y_p[n]}$$

- **동차해**
  - 동차 차분 방정식(입력항=0)의 해
  - 시스템 모드들만의 선형결합으로 주어지는 응답 = 고유 응답
  - 시스템의 고유한 특성과 관련됨

차분 방정식의 고전적 해법

- **동차해의 구득**
  - 동차 차분 방정식 : $y[n] + a_1 y[n-1] + \cdots + a_p y[n-p] = 0$
  - 동차해 $y_h[n]$: $c\gamma^n$꼴의 항(시스템 모드)들로 구성

    → c는 초기(경계) 조건으로 결정

- **특성방정식**
  - 동차 차분 방정식에 $y_h[n] = c\gamma^n$을 대입

$$\gamma^p + a_1\gamma^{p-1} + \cdots + a_{p-1}\gamma + a_p = (\gamma-\gamma_1)(\gamma-\gamma_2)\cdots(\gamma-\gamma_p) = 0$$

차분 방정식의 고전적 해법

- **특성방정식의 근이 서로 다른 경우**

$$y_h[n] = c_1\gamma_1^n + c_2\gamma_2^n + \cdots + c_p\gamma_p^n$$

- **특성방정식의 m-중근인 경우**

$$y_h[n] = c_1\gamma_1^n + c_2 n\gamma_1^n + \cdots + c_m n^{m-1}\gamma_1^n + c_{m+1}\gamma_{m+1}^n + \cdots + c_p\gamma_p^n$$
$$= (c_1 + c_2 n + \cdots + c_m n^{m-1})\gamma_1^n + c_{m+1}\gamma_{m+1}^n + \cdots + c_p\gamma_p^n$$

L4.04 차분방정식에 의한 이산 LTI 시스템의 표현

차분 방정식의 고전적 해법

- **특이해**
  - 시스템 외부 입력의 형태에 의해 결정되는 응답 = 강제 응답
  - 시스템 고유 특성과는 무관하고 입력의 닮은 꼴
  - 고전적인 차분 방정식의 해법에서 얻어지는 특이해

[표 3-4] 입력 형태에 따른 차분 방정식의 특이해

입력 형태	특이해	
$au[n]$	$cu[n]$	
$\cos(\Omega_0 n+\theta)$	$c_1\cos(\Omega_0 n+\theta)+c_2\sin(\Omega_0 n+\theta)$ $=c\cos(\Omega_0 n+\phi)$	
n^m	$c_m n^m + c_{m-1}n^{m-1} + \cdots + c_1 n + c_0$	
r^n	$r\neq$특성근	cr^n
	$r=$특성근	cnr^n
	$r=m$ 중 특성근	$cn^m r^n$
$(a_m n^m + a_{m-1}n^{m-1}+\cdots+a_1 n+a_0)r^n$	$(c_m n^m + c_{m-1}n^{m-1} + \cdots + c_1 n + c_0)r^n$	

차분 방정식의 고전적 해법

- **완전해**
  - $n \le 0$에서의 초기(경계) 조건을 사용하여 동차해의 계수를 결정
  - 입력에 의한 응답 성분 포함
    → 입력 인가 이후의 초기 조건이 필요

Solution of Differential Equations

- Matlab Practice 3-2

다음과 같은 차분 방정식으로 표현되는 이산 LTI 시스템이 있다.

$$y[n]-1.6y[n-1]+0.64y[n-2]=0.04x[n-2]$$

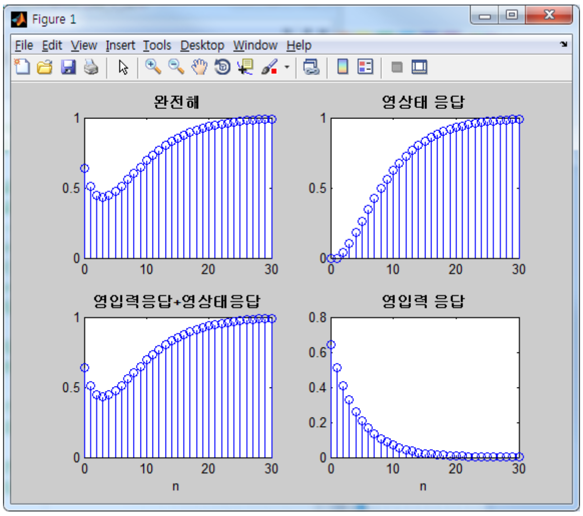
이 시스템에 단위 계단 입력을 인가할 때 나오는 출력을 다음과 같은 형태로 구하고, 결과를 도시하라. 단 초기 조건은 y[-2]=1, y[-1]=0.8 이다.

(a) 영입력 응답 + 영상태 응답 (b) 고유 응답 + 강제 응답

```
function y=difference_eq_1(ni,nf,a,b,y0,x)
                                          % 반복 대입법에 의한 차분 방정식 풀이 함수

n=ni:nf;                                     % 차분 방정식의 해 계산 범위 설정
yy=[y0 zeros(1,length(n))];                  % 해 배열 데이터 초기화
N=length(a); M=length(b)-1;                  % 차분 방정식의 계수 차수 검색
for k=N+1:N+length(n)
  yy(k)=a*yy(k-1:-1:k-N)'+b*x(k:-1:k-M)';       % y[n] 계산
end
y=yy(N+1:N+length(n));                       % y[n] 재배열(초기값 y0 제외한 결과)
```


Result for (a)



Result for (b)

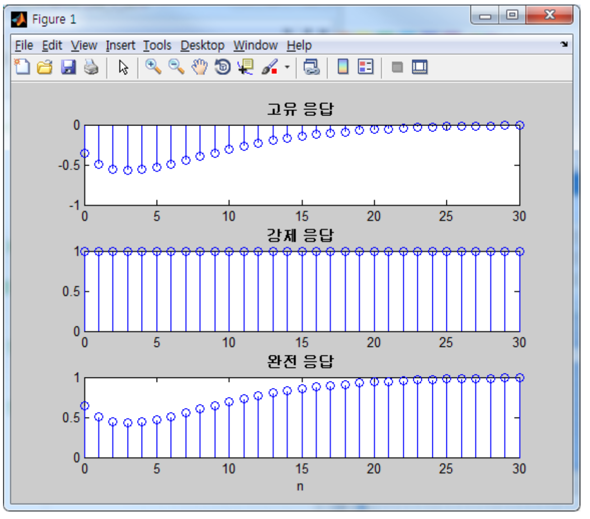


Figure 1
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
고유 응답
강제 응답
완전 응답
n