

# 確率統計の問題集

2016 年 4 月 12 日

## 1 計算問題

### 1. 次の問いに答えよ

- (a) お金が入っている箱がたくさん並んでいます。各々の箱の額は不明で、その平均金額を知るために、標本として 1 箱だけ無作為に抽出して調べたところ、箱の中には 500 円が入っていました。すべての箱の中の平均金額を区間推定してみてください。ただし、箱の中の金額は分散  $30^2$  の正規分布に従うとします。[1, p.122]

- (b) お金が入っている中の見えない箱がたくさん並んでいます。各々の箱の額は不明で、平均金額を知るために、標本として 9 箱を無作為に抽出し調べてみました。その結果は次の通りです。

530, 515, 470, 545, 440, 530, 455, 560, 455

この標本から、箱の中の平均金額を信頼度 95% で推定してください。ただし、箱の中の金額は分散  $30^2$  の正規分布に従うとします。[1, p.127]

- (c) A 県の 20 歳男子の 200 人を無作為に抽出したところ、身長は平均は 168.0 でした。A 県の身長は母分散  $6.5^2$  の正規分布に従うと仮定できます。この県の 20 歳男子全体の平均身長  $\mu$  を信頼度 95% で推定してください。[1, p.131]

- (d) 上の例題で、信頼度を 95% ではなく、99% にした時の信頼区間を求めてください。[1, p.131]

- (e) お金が入っている中の見えない箱がたくさん並んでいます。各々の箱の額は不明で、平均金額を知るために、標本として 9 箱、無作為に抽出し調べた結果は次の通りでした。

530, 515, 470, 545, 440, 530, 455, 560, 455

この標本から、箱の中の平均金額を信頼度 95% で推定してください。ただし、箱の中の金額は正規分布に従うとします。[1, p.132]

- (f) A 県の 20 歳男子 10 人を抽出し身長を調べたところ、その標本の平均身長は 168.0、不偏分散は  $6.5^2$  でした。この県の 20 歳男子の平均身長  $\mu$  を信頼度 95% で推定してください。なお、自由度 9 の両側 5 % 点は 2.26 として計算してください。[1, p.135]

- (g) 中の見えないたくさんの箱の中にはお金が入っています．箱の中の金額  $X$  の平均値を知るために，大きさ 100 の標本を取り出し調べたところ，次のように標本平均  $\bar{X}$  と不偏分散  $s^2$  が求められました．これらの値から，箱の中の金額の平均値  $\mu$  を信頼度 95% で推定してください．

$$\bar{X} = 500, \quad s^2 = 50^2$$

[1, p.142]

- (h) A 県の 20 歳男子 200 人を抽出し調べたところ，その標本の平均身長は 168.0，不偏分散は  $6.5^2$  でした．この県の 20 歳男子の平均身長  $\mu$  を信頼度 95% で推定してください． [1, p.142]
- (i) 日本全体のペットの飼育率を調べるために大きさ 500 の標本を抽出して標本比率を調べたところ，0.62 でした．これをもとに日本全体のペットの飼育率  $R$  を信頼度 95% で推定してください． [1, p.145]
- (j) K 工場から出荷されるカップラーメン 10 個について，その内容量を調べたところ，次のような結果が得られました．この標本から，製造されるカップラーメン全体の内容量の分散  $\sigma^2$  を信頼度 95% で推定してください．

184.2, 176.4, 168.0, 170.0, 159.1, 177.7, 176.0, 165.3, 164.6, 174.4

[1, p.147]

- (k) ある都市の住民の体重の分散  $\sigma^2$  を推定するために大きさ 10 の標本を抽出して調べたところ，不偏分散  $s^2$  が 35.4 でした．この都市の住民の体重の分散  $\sigma^2$  を信頼度 95% で推定してください． [1, p.149]

2. 次のデータは正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  からの無作為標本値である． [3, p.164]

12.7	6.6	5.6	14.3	11.4	10.8
13.8	11.2	10.0	12.8	7.1	14.0

- (a) 分散が  $\sigma^2 = 7$  として与えられているとき， $\mu$  の 95% 信頼区間を求めよ．
- (b) 分散  $\sigma^2$  が未知のとき， $\mu$  の 95% 信頼区間を求めよ．
- (c) 分散  $\sigma^2$  の 95% 信頼区間を求めよ．
3. ある町の有権者 300 人に候補者 A を支持するかどうか意見を聞いたところ，180 人が支持すると答えた．この調査結果から，候補者 A の支持率  $p$  の 95% 信頼区間を求めよ． [3, p.165]
4.  $n$  を自然数とする．原点  $O$  から出発して数直線上を  $n$  回移動する点  $A$  を考える．点  $A$  は，1 回ごとに，確率  $p$  で正の向きに 3 だけ移動し，確率  $1 - p$  で負の向きに 1 だけ移動する．ここで， $0 < p < 1$  である． $n$  回移動した後の点  $A$  の座標を  $X$  とし， $n$  回の移動のうち正の向きの移動の回数を  $Y$  とする．
- (a)  $p = \frac{1}{3}$ ,  $n = 2$  の時，確率変数  $X$  のとり得る値は，小さい順に ア，イ，ウ であり，これら

の値をとる確率は、それぞれ  $\square{\text{エ}}$ ,  $\square{\text{オ}}$ ,  $\square{\text{カ}}$  である.

(b)  $n$  回移動したとき,  $X$  と  $Y$  の間に  $X = \square{\text{キ}} + \square{\text{ク}}Y$  の関係が成り立つ. 確率変数  $Y$  の平均 (期待値) は  $\square{\text{ケ}}$ , 分散は  $\square{\text{コ}}$  なので,  $X$  の平均は  $\square{\text{サ}}$ , 分散は  $\square{\text{シ}}$  である.

(c)  $p = \frac{1}{3}$  のとき, 1200 回移動した後の点 A の座標  $X$  が 120 以上になる確率の近似値を求めよう. (b) により,  $Y$  の平均は  $\square{\text{ス}}$ , 標準偏差は  $\square{\text{セ}}$  であり, 求める確率は次のようになる.

$$P(X \geq 120) = P\left(\frac{Y - \square{\text{ス}}}{\square{\text{セ}}} \geq \square{\text{ソ}}\right)$$

いま, 標準正規分布に従う確率変数を  $Z$  とすると,  $n = 1200$  は十分に大きいので, 求める確率の近似値は正規分布表から次のように求められる.

$$P(Z \geq \square{\text{ソ}}) = \square{\text{タ}}$$

## 2 数式の問題

1.  $\Gamma$  関数の定義は以下で与えられます.

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt, \quad x > 0$$

以下のことを示してください.

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

$$\Gamma(1) = 1.$$

$$\Gamma(2) = 1.$$

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} t^{2x-1} e^{-t^2} dt.$$

2.  $B$  関数の定義は以下で与えられます.

$$B(x, y) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2x-1} \theta \sin^{2y-1} \theta d\theta, \quad x > 0, y > 0$$

以下のことを示してください.

$$\begin{aligned} B(x, y) &= \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \\ B(1, 1) &= 1. \\ B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \pi. \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi}. \\ \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \end{aligned}$$

3. 正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  の確率密度関数は,  $k$  を定数として以下のように表せます.

$$f(x) = ke^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

確率変数  $X$  は  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うとします. 以下のことを示してください.

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}. \\ E(X) &= \mu. \\ V(X) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

4. 自由度  $n$  の  $\chi^2$  分布  $\chi_n^2$  の確率密度関数は,  $k$  を定数として以下のように表せます.

$$f(x) = kx^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}, \quad x > 0$$

確率変数  $X$  は  $\chi_n$  に従うとします. 以下のことを示してください.

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}}. \\ E(X) &= n. \\ V(X) &= 2n. \end{aligned}$$

5. 自由度  $n$  の  $T$  分布  $T_n$  の確率密度関数は,  $k$  を定数として以下のように表せます.

$$f(x) = k\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

確率変数  $X$  は  $T_n$  に従うとします. 以下のことを示してください.

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)}. \\ E(X) &= 0. \end{aligned}$$

6. 自由度  $m, n$  のエフ分布  $F_n^m$  の確率密度関数は,  $k$  を定数として以下のように表せます.

$$f(x) = kx^{\frac{m}{2}-1} \left( \frac{m}{n}x + 1 \right)^{-\frac{m+n}{2}}, \quad x > 0.$$

以下の空欄を埋めてください.

$$k = \square$$

7. ベータ分布  $B_E(\alpha, \beta)$  の確率密度関数は,  $k$  を定数として以下のように表せます.

$$f(x) = kx^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1.$$

以下の空欄を埋めてください.

$$k = \square$$

8. 確率分布について, 次の関係を示してください.

(a)  $X$  が  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うとき,  $aX + b$  は  $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$  に従う. ただし  $a, b$  は定数.

(b)  $X$  が  $N(0, 1)$  に従うとき,  $X^2$  は  $\chi_1^2$  に従う.

9.  $n$  は任意の正整数,  $k$  は  $1 \leq k \leq n$  なる整数であり,  $p$  は  $0 < p < 1$  なる実数であるとする.

(a) 等式:

$$\sum_{r=k}^n \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^p x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx$$

が成り立つことを証明せよ. [3, p.47]

(b) 確率変数  $X$  がベータ分布  $B_E(k, n-k+1)$  に従うとき,

$$Y = \left( \frac{n+1}{k} - 1 \right) \left( \frac{1}{1-X} - 1 \right)$$

は自由度  $(2k, 2(n-k+1))$  のエフ分布に従うことを示せ. [3, p.106]

(c)  $X$  が二項分布  $B_N(n, p)$  に従うとき, 等式:

$$P(X \geq k) = P\left(Y \leq \left( \frac{n+1}{k} - 1 \right) \left( \frac{1}{1-p} - 1 \right)\right)$$

が成り立つことを示せ. ただし,  $Y$  は自由度  $(2k, 2(n-k+1))$  のエフ分布に従う確率変数である. [3, p.106]

(d) 次の不等式を  $p$  について解いてください.

$$Y \leq \left( \frac{n+1}{k} - 1 \right) \left( \frac{1}{1-p} - 1 \right)$$

## 出典

- [1] 涌井貞美, 意味がわかる統計解析
- [2] 平成 28 年度大学入試センター試験 数学Ⅱ・数学B
- [3] 稲垣宣生, 数理統計学