確率統計の問題集

2016 年 4 月 12 日

1 計算問題

1. 次の問いに答えよ
   (a) お金が入っている箱がたくさん並んでいます．各々の箱の額は不明で，その平均金額を知るために，標本として 1 箱だけ無作為に抽出して調べたところ，箱の中には 500 円が入っていました．すべての箱の中の平均金額を区間推定してみてください．ただし，箱の中の金額は分散 30^2 の正規分布に従うとします．[1, p.122]
   (b) お金が入っている中の見えない箱がたくさん並んでいます．各々の箱の額は不明で，平均金額を知るために，標本として 9 箱を無作為に抽出し調べてみました．その結果は次の通りです．

       530, 515, 470, 545, 440, 530, 455, 560, 455

       この標本から，箱の中の平均金額を信頼度 95% で推定してください．ただし，箱の中の金額は分散 30^2 の正規分布に従うとします．[1, p.127]
   (c) A 県の 20 歳男子の 200 人を無作為に抽出したところ，身長の平均は 168.0 でした．A 研の身長は母分散 6.5^2 の正規分布に従うと仮定できます．この県の 20 歳男子全体の平均身長 μ を信頼度 95% で推定してください．[1, p.131]
   (d) 上の例題で，信頼度を 95% ではなく，99% にした時の信頼区間を求めてください．[1, p.131]
   (e) お金が入っている中の見えない箱がたくさん並んでいます．各々の箱の額は不明で，平均金額を知るために，標本として 9 箱，無作為に抽出し調べた結果は次の通りでした．

       530, 515, 470, 545, 440, 530, 455, 560, 455

       この標本から，箱の中の平均金額を信頼度 95% で推定してください．ただし，箱の中の金額は正規分布に従うとします．[1, p.132]
   (f) A 県の 20 歳男子 10 人を抽出し身長を調べたところ，その標本の平均身長は 168.0，不偏分散は 6.5^2 でした．この県の 20 歳男子の平均身長 μ を信頼度 95% で推定してください．なお，自由度 9 の両側 5 %点は 2.26 として計算してください．[1, p.135]

(g) 中の見えないたくさんの箱の中にはお金が入っています．箱の中の金額 X の平均値を知るために，大きさ 100 の標本を取り出し調べたところ，次のように標本平均 $\overline{X}$ と不偏分散 s^2 が求められました．これらの値から，箱の中の金額の平均値 μ を信頼度 95% で推定してください．

$$\overline{X} = 500, \quad s^2 = 50^2$$

[1, p.142]

(h) A 県の 20 歳男子 200 人を抽出し調べたところ，その標本の平均身長は 168.0，不偏分散は 6.5^2 でした．この県の 20 歳男子の平均身長 μ を信頼度 95% で推定してください．[1, p.142]

(i) 日本全体のペットの飼育率を調べるために大きさ 500 の標本を抽出して標本比率を調べたところ，0.62 でした．これをもとに日本全体のペットの飼育率 R を信頼度 95% で推定してください．[1, p.145]

(j) K 工場から出荷されるカップラーメン 10 個について，その内容量を調べたところ，次のような結果が得られました．この標本から，製造されるカップラーメン全体の内容量の分散 σ^2 を信頼度 95% で推定してください．

184.2, 176.4, 168.0, 170.0, 159.1, 177.7, 176.0, 165.3, 164.6, 174.4

[1, p.147]

(k) ある都市の住民の体重の分散 σ^2 を推定するために大きさ 10 の標本を抽出して調べたところ，不偏分散 s^2 が 35.4 でした．この都市の住民の体重の分散 σ^2 を信頼度 95% で推定してください．[1, p.149]

2. 次のデータは正規分布 $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ からの無作為標本値である．[3, p.164]

12.7	6.6	5.6	14.3	11.4	10.8
13.8	11.2	10.0	12.8	7.1	14.0

(a) 分散が $\sigma^2 = 7$ として与えられているとき，μ の 95% 信頼区間を求めよ．

(b) 分散 σ^2 が未知のとき，μ の 95% 信頼区間を求めよ．

(c) 分散 σ^2 の 95% 信頼区間を求めよ．

3. ある町の有権者 300 人に候補者 A を支持するかどうか意見を聞いたところ，180 人が支持すると答えた．この調査結果から，候補者 A の支持率 p の 95% 信頼区間を求めよ．[3, p.165]

4. n を自然数とする．原点 O から出発して数直線上を n 回移動する点 A を考える．点 A は，1 回ごとに，確率 p で正の向きに 3 だけ移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 だけ移動する．ここで，$0 < p < 1$ である．n 回移動した後の点 A の座標を X とし，n 回の移動のうち正の向きの移動の回数を Y とする．[2]

(a) $p = \dfrac{1}{3}, n = 2$ の時，確率変数 X のとり得る値は，小さい順に $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$, $\boxed{\text{ウ}}$ であり，これら

の値をとる確率は，それぞれ$\boxed{エ}$, $\boxed{オ}$, $\boxed{カ}$である．

（b）n 回移動したとき，X と Y の間に $X = \boxed{キ}n + \boxed{ク}Y$ の関係が成り立つ．確率変数 Y の平均（期待値）は$\boxed{ケ}$，分散は$\boxed{コ}$なので，X の平均は$\boxed{サ}$，分散は$\boxed{シ}$である．

（c）$p = \dfrac{1}{4}$ のとき，1200 回移動した後の点 A の座標 X が 120 以上になる確率の近似値を求めよう．(b) により，Y の平均は$\boxed{ス}$，標準偏差は$\boxed{セ}$であり，求める確率は次のようになる．

$$P\left(X \geq 120\right) = P\left(\frac{Y - \boxed{ス}}{\boxed{セ}} \geq \boxed{ソ}\right)$$

いま，標準正規分布に従う確率変数を Z とすると，$n = 1200$ は十分に大きいので，求める確率の近似値は正規分布表から次のように求められる．

$$P\left(Z \geq \boxed{ソ}\right) = \boxed{タ}$$

（d）p の値がわからないとする．2400 回移動した後の点 A の座標が $X = 1440$ のとき，p に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよう．n 回移動したときに Y がとる値を y とし，$r = \dfrac{y}{n}$ とおくと，n が十分に大きいならば，確率変数 $R = \dfrac{Y}{n}$ は近似的に平均 p，分散 $\dfrac{p\left(1-p\right)}{n}$ の正規分布に従う．$n = 2400$ は十分に大きいので，このことを利用し，分散を $\dfrac{r\left(1-r\right)}{n}$ で置き換えることにより，求める信頼区間は

$$\boxed{チ} \leq p \leq \boxed{ツ}$$

となる．

2　数式の問題

1. Γ 関数の定義は以下で与えられます．

$$\Gamma\left(x\right) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt, \qquad x > 0$$

以下のことを示してください．

$$\begin{aligned}\Gamma\left(x+1\right) &= x\Gamma\left(x\right).\\ \Gamma\left(1\right) &= 1.\\ \Gamma\left(2\right) &= 1.\\ \Gamma\left(x\right) &= 2\int_0^\infty t^{2x-1}e^{-t^2}dt.\end{aligned}$$

2. B 関数の定義は以下で与えられます．

$$B\left(x,y\right)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2x-1}\theta\sin^{2y-1}\theta\,d\theta,\qquad x>0,\ y>0$$

以下のことを示してください．

$$\begin{aligned}B\left(x,y\right)&=\frac{\Gamma\left(x\right)\Gamma\left(y\right)}{\Gamma\left(x+y\right)}.\\B\left(1,1\right)&=1.\\B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)&=\pi.\\\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)&=\sqrt{\pi}.\\\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)&=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

3. 正規分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ の確率密度関数は，k を定数として以下のように表せます．

$$f\left(x\right)=ke^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

確率変数 X は $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ に従うとします．以下のことを示してください．

$$\begin{aligned}k&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}.\\E\left(X\right)&=\mu.\\V\left(X\right)&=\sigma^2.\end{aligned}$$

4. 自由度 n の χ^2 分布 χ_n^2 の確率密度関数は，k を定数として以下のように表せます．

$$f\left(x\right)=kx^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\qquad x>0$$

確率変数 X は χ_n に従うとします．以下のことを示してください．

$$\begin{aligned}k&=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)2^{\frac{n}{2}}}.\\E\left(X\right)&=n.\\V\left(X\right)&=2n.\end{aligned}$$

5. 自由度 n の T 分布 T_n の確率密度関数は，k を定数として以下のように表せます．

$$f\left(x\right)=k\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

確率変数 X は T_n に従うとします．以下のことを示してください．

$$k = \frac{1}{\sqrt{n} B\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)}.$$
$$E(X) = 0.$$

6. 自由度 m, n のエフ分布 F_n^m の確率密度関数は，k を定数として以下のように表せます．

$$f(x) = kx^{\frac{m}{2}-1} \left(\frac{m}{n} x + 1\right)^{-\frac{m+n}{2}}, \qquad x > 0.$$

以下の空欄を埋めてください．

$$k = \square$$

7. ベータ分布 $B_E(\alpha, \beta)$ の確率密度関数は，k を定数として以下のように表せます．

$$f(x) = kx^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, \qquad 0 < x < 1.$$

以下の空欄を埋めてください．

$$k = \square$$

8. 確率分布について，次の関係を示してください．
   (a) X が $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ に従うとき，$aX + b$ は $N\left(a\mu + b, a^2\sigma^2\right)$ に従う．ただし a, b は定数．
   (b) X が $N(0, 1)$ に従うとき，X^2 は χ_1 に従う．
9. n は任意の正整数，k は $1 \leq k \leq n$ なる整数であり，p は $0 < p < 1$ なる実数であるとする．
   (a) 等式：
   $$\sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} = \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^p x^{k-1} (1-x)^{n-k} dx$$
   が成り立つことを証明せよ．[3, p.47]
   (b) 確率変数 X がベータ分布 $B_E(k, n-k+1)$ に従うとき，
   $$Y = \left(\frac{n+1}{k} - 1\right)\left(\frac{1}{1-X} - 1\right)$$
   は自由度 $(2k, 2(n-k+1))$ のエフ分布に従うことを示せ．[3, p.106]
   (c) X が二項分布 $B_N(n, p)$ に従うとき，等式：
   $$P(X \geq k) = P\left(Y \leq \left(\frac{n+1}{k} - 1\right)\left(\frac{1}{1-p} - 1\right)\right)$$
   が成り立つことを示せ．ただし，Y は自由度 $(2k, 2(n-k+1))$ のエフ分布に従う確率変数である．[3, p.106]
   (d) 次の不等式を p について解いてください．
   $$Y \leq \left(\frac{n+1}{k} - 1\right)\left(\frac{1}{1-p} - 1\right)$$

出典

[1] 涌井貞美, 意味がわかる統計解析

[2] 平成 28 年度大学入試センター試験 数学II・数学B

[3] 稲垣宣生, 数理統計学