

## 2. Pravac, linija

### 2.1. Homogene koordinate

Točka iz  $n$ -prostora može biti preslikana u homogenu točku u  $(n+1)$   $h$ -prostoru. Obrnuto, homogena točka iz  $(n+1)$   $h$ -prostora može biti projicirana u točku  $n$ -prostora. Promotrimo za primjer 2-prostor i njemu odgovarajući homogeni 3 $h$ -prostor.

Preslikavanje:

$$V(x\ y) \rightarrow V'(x'\ y'\ h),$$

pri tome je točka  $V$  u 2-prostoru a  $V'$  u 3 $h$ -prostoru i vrijedi:

$$\begin{aligned}x' &= hx, \\ y' &= hy.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Projekcija:

$$V'(x'\ y'\ h) \rightarrow V(x\ y),$$

- pri tome vrijedi:

$$\begin{aligned}x &= x'/h, \\ y &= y'/h.\end{aligned}\tag{2.2}$$

Komponenta  $h$  zove se faktor proporcionalnosti ili homogena koordinata. Vrijednost homogene koordinate  $h$  je proizvoljna, najčešće se koristi slučaj  $h = 1$ . Ako je  $h = 0$  tada se radi o točki koja je u beskonačnosti u  $n$ -prostoru. Ako su pravci paralelni u  $n$ -prostoru tada su paralelni i u homogenom  $(n+1)$   $h$ -prostoru. Sačuvanost paralelnosti pravaca u homogenom prostoru važno je svojstvo.

Nešto o nazivu homogeni prostor. Jednadžba pravca u 2-prostoru glasi

$$ax+by+c=0,\tag{2.3}$$

ako se u 1.3 uvede izmjena 1.2 slijedi

$$\frac{a\ x'}{h} + \frac{b\ y'}{h} + c = 0,$$

što daje

$$ax'+by'+ch=0.\tag{2.4}$$

Izraz 2.4 je jednadžba pravca u homogenom prostoru. Po svom obliku to je homogena jednadžba i zbog toga je i naziv homogeni prostor.

## 2.2. Jednadžba pravca

Pravac je određen s dvije točke, na primjer točke  $V_1$  i  $V_2$ . Koristi se homogeni prostor, tj.

$$V_1=(x_1 \ y_1 \ h_1), \ V_2=(x_2 \ y_2 \ h_2).$$

Vektorski oblik jednadžbe pravca određen je vektorskim produktom

$$P=V_1 \times V_2 = \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & h_1 \\ x_2 & y_2 & h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 h_2 - y_2 h_1 \\ -x_1 h_2 + x_2 h_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Analitički oblik jednadžbe pravca, uz  $h_1=h_2=1$  je

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

odnosno

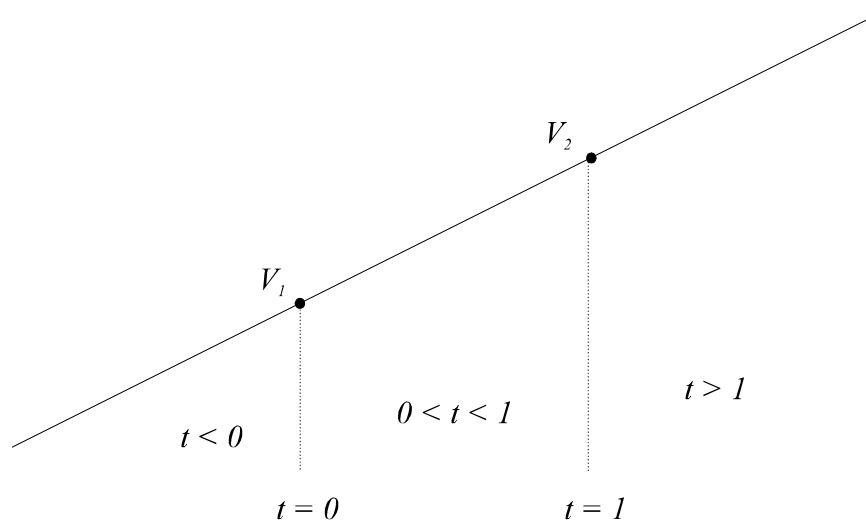
$$(y_1 - y_2)x + (-x_1 + x_2)y + x_1 y_2 - x_2 y_1 = ax + by + c = 0 \quad (2.6)$$

Parametarski oblik jednadžbe pravca je

$$P=(V_2-V_1)t+V_1, \text{ ili po koordinatama } \begin{aligned} x &= (x_2 - x_1)t + x_1, \\ y &= (y_2 - y_1)t + y_1, \\ h &= (h_2 - h_1)t + h_1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pri tome je točki  $V_1$  pridružena vrijednost parametra  $t = 0$  a točki  $V_2$ , vrijednost parametra  $t = 1$ .

Na slici 1.1. pokazano je pridjeljivanje vrijednosti parametra  $t$  dijelovima pravca, koji su od interesa.



Slika 2.1. Vrijednost parametra  $t$  i dijelovi pravca.

### 1.3. Ispitivanje odnosa točke i pravca

Skalarni produkt točke  $V(x \ y \ 1)$  i pravca  $P(a \ b \ c)^T$  određuje odnos točke i pravca, pri tome vrijedi dogovor:

$$V \cdot P = (x \ y \ 1) \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a \cdot x + b \cdot y + c = 0 \quad \begin{array}{l} > 0 \text{ točka } V \text{ je iznad pravca } P \\ \text{točka } V \text{ je na pravcu } P \\ < 0 \text{ točka } V \text{ je ispod pravca } P \end{array}$$

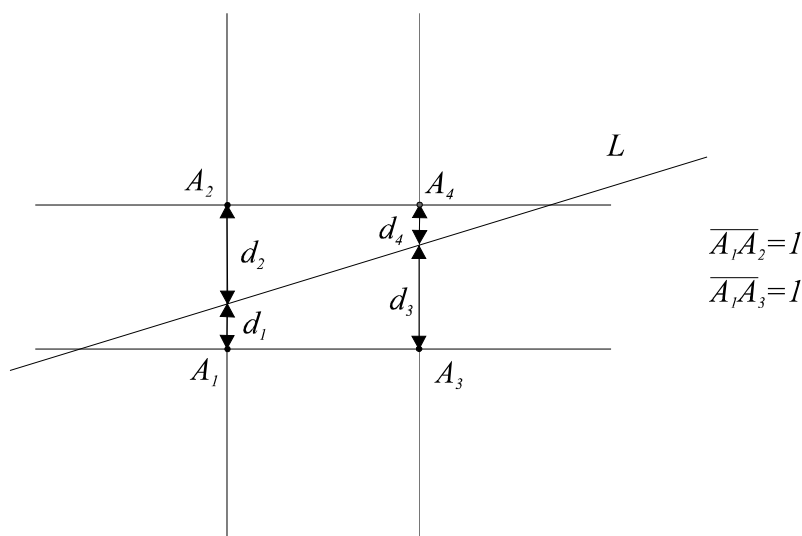
### 2.4. Iscrtavanje linije na zaslonu

Promatra se zaslon sličan TV ekranu (raster-scan). Između dvije točke zaslona potrebno je iscrtati ravnu liniju. U tu svrhu neophodan je postupak za izbor elemenata slike (pixel) koje treba osvijetliti. Ocjena valjanosti ovakvog postupka temelji se promatranjem:

- ravnosti linije,
- ispravnosti završetka linije,
- konstantnosti gustoće točaka u liniji i njena neovisnost o smjeru i duljini linije,
- brzine iscrtavanja.

#### 2.4.1. Bresenham-ov postupak

Za iscrtavanje linije na zaslonu sličnom TV ekranu najčešće se koristi Bresenham-ov postupak. Kriterij izbora točaka rastera sastoji se u računanju udaljenosti okolnih točaka rastera, od linije (slika 1.2.).



Slika 1.2. Bresenham-ov postupak.

Za liniju  $L$  treba osvijetliti točke  $A_1$  i  $A_4$  jer je  $d_1 < d_2$  i  $d_4 < d_3$ .

## 2.5. Radni zadatak

1. Učitati koordinate točkica  $V_1(x_1 \ y_1)$  i  $V_2(x_2 \ y_2)$ .
2. Koristeći Bresenham-ov postupak iscrtati liniju određenu točkama  $V_1$  i  $V_2$ .
3. Usporedba s *LINE* naredbom.  
Iscrtati liniju određenu koordinatama točkica  $(x_1 \ y_1+20)$  i  $(x_2 \ y_2+20)$  putem *LINE* naredbe.

## 2.6. Rješenje radnog zadatka

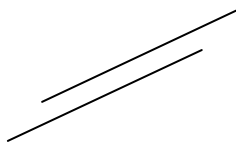
### 2.6.1. Postupak:

1. Učitati  $x$   $y$  koordinate početne i završne točke linije  $(x_1 \ y_1), (x_2 \ y_2)$ .
2. Izračunati  $x_0, y_0$  intervale linije  $x_0=x_2-x_1, y_0=y_2-y_1$ .
3. Izračunati udaljenost  $D = y_0/x_0 - 0,5$ .
4. Postaviti koordinate tekuće točke  $x=x_1, y=y_1$ .
5. Za  $i = 0, i < x_0$  ponavljati korake 6-8. Ići na korak 9.
6. Osvijetliti tekuću točku  $x, y$ .
7. Za  $D > 0$  računati  $y=y+1, D=D-1$ .
8. Pribrojiti  $x=x+1, D=D+y_0/x_0$ .
9. Usporedba s *LINE* naredbom.  
Iscrtati liniju određenu koordinatama  $(x_1 \ y_1+20)$  i  $(x_2 \ y_2+20)$ .
10. Kraj.

### 1.6.2. Rezultati

Molim  $x, y$  koordinate početne točke ?    10    10

Molim  $x, y$  koordinate završne točke ?    200    100



Usporedba s *LINE* naredbom.

Opisani postupak radi ispravno za linije pod kutem  $0-45^\circ$ . Načiniti potrebne modifikacije koje će osigurati ispravno iscrtavanje linije pod bilo kojim kutem.

## 2.7. Za vježbu

Koje izmjene je potrebno načiniti u algoritmu da sve varijable postanu cjelobrojne?