Mecánica Celeste

Trabajo de programación sobre la órbita de los planetas en el sistema solar.

Francisco Luque Sánchez

December 4, 2017

Contents

1 Introducción

En esta práctica desarrollaremos un programa en Python que nos permitirá conocer información sobre el estado de un planeta, visto como una partícula en órbita en el Sistema Solar. Podremos calcular la posición del mismo dependiendo del día del periodo orbital en el que nos encontremos, así como su distancia al sol, la velocidad que tiene, el módulo de la misma, su energía, su anomalía real y excéntrica, y su momento angular.

Además, se nos permitirá representar en unos ejes cartesianos, en los que se toma como punto de referencia el Sol, la órbita de los planetas, así como su posición dentro de la órbita en un día especificado por el usuario.

A lo largo de este informe vamos a explicar la fundamentación matemática que justifica las funciones programadas en Python. El código implementado se adjunta para su revisión en caso necesario.

Vamos ahora a ver la fundamentación matemática de las funciones implementadas.

2 Cálculos realizados

Vamos a ver los cálculos realizados, que luego se han implementado en funciones en Python para el programa.

2.1 Posición de planeta

Lo primero que se ha calculado es la posición del planeta. Para calcular dicha posición, se ha utilizado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x(t) = a(\cos u(t) - \varepsilon, \sqrt{1-\varepsilon^2}\sin u(t)) \\ u(t) - \varepsilon \sin u(t) = \frac{2\pi}{p}(t - t_0) \end{cases} \tag{1}$$

Lo primero que tenemos que calcular es la anomalía excéntrica. Hemos supuesto $t_0 = 0$, ya que no tenemos información sobre un posible punto de tiempo de referencia. Para poder calcular su valor, dado que no podemos obtener una expresión analítica de la misma, vamos a utilizar el método de Newton-Raphson para dar una aproximación numérica. Como ya vimos en las clases de teoría, definiendo $\xi = \frac{2\pi}{p}$, y utilizando la expresión

$$u_{n+1} = \frac{(-u_n \cos u_n + \sin u_n)\varepsilon - \xi}{1 - \varepsilon \cos u_n}$$

Tenemos una expresión iterativa basada en el método de Newton-Raphson que nos permite aproximar el valor de la excentricidad en un tiempo t.

Una vez calculado el valor de la anomalía excéntrica, simplemente sustituimos el valor en la ecuación de la posición, y obtenemos el valor deseado.

2.2 Distancia al Sol

Para calcular la distancia al Sol, simplemente tendremos que calcular el módulo de la posición calculada anteriormente.

2.3 Velocidad del planeta

Para calcular la velocidad, utilizaremos la derivada de la posición, expresada de la misma manera que en apartado anterior. Tenemos que dicha derivada es:

$$\dot{x}(t) = a\dot{u}(t)(-\sin u(t), \sqrt{1-\varepsilon^2}\cos u(t))$$

Y calculamos en clase que el valor de $\dot{u}(t)$ es:

$$\dot{u}(t) = \frac{|c|}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon\cos u(t))}$$

Usando además la relación que nos liga el módulo del momento angular con la longitud del semieje mayor de la elipse que define la órbita del planeta, que es:

$$a = \frac{|c|^2}{\mu(1-\varepsilon^2)} \Rightarrow |c| = \sqrt{a\mu(1-\varepsilon^2)}$$

Obtenemos que:

$$\dot{u}(t) = \frac{\sqrt{a\mu}\sqrt{(1-\varepsilon^2)}}{a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}(1-\varepsilon\cos u(t))} = \frac{\sqrt{a\mu}}{a^2(1-\varepsilon\cos u(t))}$$

Ahora, con la tercera ley de Kepler podemos expresar μ en función de otras constantes dependientes del planeta:

$$p = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}a^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sqrt{\mu} = \frac{2\pi}{p}a^{3/2}$$

Que sustituyendo en la ecuación, nos da el siguiente resultado:

$$\dot{u}(t) = \frac{\sqrt{a\mu}}{a^2(1-\varepsilon\cos u(t))} = \frac{2\pi a^2}{a^2 p(1-\varepsilon\cos u(t))} = \frac{2\pi}{p(1-\varepsilon\cos u(t))}$$

Ahora sustituimos este valor en la expresión de $\dot{x}(t)$ para obtener una expresión de la velocidad dependiente del tiempo:

$$\dot{x}(t) = \frac{2\pi a}{p(1-\varepsilon\cos u(t))}(-\sin u(t), \sqrt{1-\varepsilon^2}\cos u(t))$$

De nuevo, el cálculo de la anomalía excéntrica se hace con el método de Newton-Raphson anteriormente explicado.

2.4 Módulo de la velocidad

Para obtener el módulo de la velocidad, calculamos la norma del vector anterior.

2.5 Anomalía real

Además del sistema de ecuaciones anterior, la posición de un planeta se puede expresar también con el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon(\cos\theta(t)-\omega)}(\cos\theta(t), \sin\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) = \frac{|c|}{a^2(1-\varepsilon^2)^2}(1+\varepsilon\cos(\theta(t)-\omega)) \end{cases} \tag{2}$$

La función $\theta(t)$ se conoce como la anomalía real del planeta, y marca el ángulo que forma, en radianes, el planeta con el semieje mayor positivo de la elipse. Queremos averiguar dicho valor para un tiempo t, pero no podemos obtener una expresión analítica de dicha función, por lo que para resolverlo utilizaremos el método de Runge-Kutta-4. Este método numérico sirve para estimar valores de una función en un determinado punto t, conocida una expresión de la derivada de la función a estimar (en nuestro caso una expresión de $\dot{\theta}(t)$, que tenemos escrita en el sistema anterior), y una pareja $(t_0, \theta(t_0))$. Interpretando el significado de la fúnción θ, y suponiendo que $\omega = 0$, que indica el giro del semieje mayor de la elipse respecto del eje OX^+, tenemos que $\theta(t_0) = 0$, que será el punto de referencia que tomaremos para utilizar el método seleccionado.

No haremos una explicación más profunda del funcionamiento de dicho método, ya que se sale de los contenidos de la asignatura. Se puede ver una explicación del método en https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods

2.6 Energía del planeta

Pasamos ahora al cálculo de la energía del planeta. Por un lado, tenemos que la energía de un cuerpo sometido a un campo de fuerzas centrales en un determinado instante de tiempo t es la siguiente:

$$E_t(t) = E_c(t) + E_p(t) = \frac{m|\dot{x}(t)|^2}{2} - \frac{m\mu}{|x(t)|}$$

Donde nos aparecen involucrados el módulo de la velocidad del planeta, anteriormente calculado, la distancia al Sol del mismo, cálculo que también hemos realizado, y la constante μ, para la que vimos antes la expresión:

$$\sqrt{\mu} = \frac{2\pi}{p}a^{3/2} \Rightarrow \mu = \frac{4\pi^2}{p^2}a^3$$

Por lo que podemos calcular de forma sencilla el valor de la energía en un determinado instante de tiempo t. Además, se dedujo, con la ley de conservación de la energía, que la energía en todo momento es constante. Podemos calcular entonces una expresión de la energía en función de las constantes del planeta, que nos permita calcularla sin tener que recurrir a la evaluación de la distancia al Sol y el módulo de la velocidad en un instante de tiempo determinado. No mostramos todos los cálculos intermedios dado que es un proceso tedioso, pero la expresión de la energía la podemos calcular de la siguiente manera. Tenemos por un lado que la distancia del planeta al Sol es, tomando como posición el primer sistema que mostramos en la práctica:

$$|x(t)| = a(1 - \varepsilon \cos u(t))$$

Por otro, el cuadrado del módulo de la velocidad se puede expresar como:

$$|\dot{x}(t)|^2 = a^2|\dot{u}(t)|^2(1 - \varepsilon^2 cos^2 u(t))$$

Sustituyendo dichos valores en la expresión que pusimos al principio, obtenemos:

$$E_t(t) = \frac{ma^2|\dot{u}(t)|^2(1 - \varepsilon^2 cos^2 u(t))}{2} - \frac{m\mu}{a(1 - \varepsilon \cos u(t))}$$

El valor del módulo de $|\dot{u}(t)|^2$ sabemos que es:

$$|\dot{u}(t)|^2 = \frac{|c|^2}{a^4(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon \cos u(t))^2}$$

Y conocemos la siguiente expresión para μ:

$$\mu = \frac{|c|^2}{a(1 - \varepsilon^2)}$$

Al sustituir ambos valores en la expresión anterior y simplificar, se obtiene que:

$$E_t(t) = \frac{m|c|^2(1 + \varepsilon \cos u(t)}{2a^2(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon \cos u(t))} - \frac{m|c|^2}{a^2(1 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon \cos u(t))}$$

Convirtiendo las dos fracciones a común denominador, llegamos a la siguiente expresión:

$$E_t(t) = -\frac{m|c|^2}{2a^2(1 - \varepsilon^2)}$$

Que claramente es independiente del tiempo. El único valor que tendríamos que calcular es el módulo del momento angular, que veremos en la siguiente sección que es también constante. De esta forma, tenemos una expresión constante para la energía, que en la implementación compararemos con la energía en un instante de tiempo, para comprobar la corrección de los cálculos.

Dado que no tenemos datos sobre la masa de los planetas, la implementación de la energía que daremos será por unidad de masa. Para obtener el dato de la energía real de un planeta, habría que multiplicar el valor que obtengamos por la masa del mismo.

2.7 Momento angular del planeta

De nuevo el cálculo del momento angular puede ser realizado de dos formas distintas. Tenemos, por un lado, una expresión dependiente del tiempo, y por otro, por la ley de conservación del momento sabemos que podemos encontrar una expresión constante para el mismo, dependiente de las constantes propias del planeta. Comenzamos viendo la expresión dependiente del tiempo. En clase calculamos una expresión del mismo, que es la siguiente:

$$c(t) = r(t)^2\dot{\theta}(t)(0,0,1)$$

Dado que estamos trabajando suponiendo que todos los planetas están en el plano XY, y el momento angular es perpendicular al plano en el que se mueve el planeta, las dos primeras componentes del momento angular son nulas. Es por esto que en lugar de trabajar con el momento angular como un vector, trabajaremos con el módulo del momento escalar, que coincide con el valor de su tercera componente. Por tanto, la expresión que daremos del mismo es

$$|c(t)| = r(t)^2\dot{\theta}(t)$$

Donde $r(t)$ es la distancia al Sol del planeta, y $\dot{\theta}(t)$ la podemos obtener de 2. Vamos ahora a ver la expresión constante del módulo del producto escalar. Teniendo en cuenta que el planeta se mueve en una elipse, llegamos a la relación:

$$a = \frac{|c|^2}{\mu(1-\varepsilon^2)} \Rightarrow |c| = \sqrt{a\mu(1-\varepsilon^2)}$$

Mostraremos ambos valores en el programa, para comprobar empíricamente que el módulo del momento angular calculado con la expresión dependiente del tiempo coincide con el valor constante, independientemente del momento de tiempo en el que hagamos el cálculo.

2.8 Anomalía real en función de la anomalía excéntrica

Vamos ahora a mostrar otra forma de calcular la anomalía real para un planeta en un instante de tiempo t. Ya hemos visto que podemos aproximar el valor de la anomalía real utilizando el método de Runge-Kutta, dado que tenemos una expresión de $\dot{\theta}(t)$ y sabemos que $\theta(0) = 0$. Otra forma que tenemos de realizar este cálculo es, sabiendo que tanto la anomalía excéntrica como la real son funciones biyectivas de $[0, p)$ en $[0, 2\pi)$, donde p es el periodo de rotación del planeta, tratar de expresar θ en función de u. Como tenemos ambas funciones son biyectivas en los intervalos que hemos dicho, podemos establecer una biyección entre ambos valores. Para ello, utilizaremos como paso intermedio la expresión de la posición de un planeta en un instante de tiempo t. Pasamos a ver dicha expresión. Tomando la primera componente de la posición expresada en el sistema 2, tenemos que:

$$x(t) = \frac{a(1-\varepsilon^2)\cos\theta(t)}{1+\varepsilon\cos\theta(t)} \Rightarrow \cos\theta(t) = \frac{x(t)(1+\varepsilon\cos\theta(t))}{a(1-\varepsilon^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta(t) = \frac{x(t)+\varepsilon x(t)\cos\theta(t)}{a(1-\varepsilon^2)} \Rightarrow \cos\theta(t) - \frac{\varepsilon x(t)\cos\theta(t)}{a(1-\varepsilon^2)} = \frac{x(t)}{a(1-\varepsilon^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta(t)\left(\frac{a(1-\varepsilon^2)-\varepsilon x(t)}{a(1-\varepsilon^2)}\right) = \frac{x(t)}{a(1-\varepsilon^2)} \Rightarrow \cos\theta(t) = \frac{x(t)}{a(1-\varepsilon^2)-\varepsilon x(t)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\theta(t) = \frac{\frac{x(t)}{a}}{1-\varepsilon^2-\varepsilon\frac{x(t)}{a}}$$

Ahora, tomando la primera componente de la posición en el sistema 1, tenemos que

$$\frac{x(t)}{a} = \cos u(t) - \varepsilon$$

Que sustituyendo en la igualdad anterior nos deja

$$\cos\theta(t) = \frac{\cos u(t) - \varepsilon}{1-\varepsilon^2-\varepsilon(\cos u(t) - \varepsilon)} = \frac{\cos u(t) - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos u(t)}$$

Finalmente, aplicando la función arco coseno, tenemos que

$$\theta(t) = \arccos\left(\frac{\cos u(t) - \varepsilon}{1-\varepsilon\cos u(t)}\right)$$

Por tanto, hemos conseguido expresar la anomalía real en función de la anomalía excéntrica, por lo que podemos calcular un valor en función del otro. En el programa, lo que tendremos será una función que nos acepte un tiempo t, respecto de ese tiempo se calcula el valor de la anomalía excéntrica, y con ese valor de anomalía excéntrica se calcula el valor de la anomalía real usando la relación anterior.

2.9 Anomalía excéntrica con funciones de Bessel

El último apartado de la práctica consiste en calcular el valor de la anomalía excéntrica utilizando para ello funciones de Bessel. Vimos en clase la siguiente expresión:

$$u(t) = \frac{2\pi(t-t_0)}{p} + \sum \frac{2}{n} J_n(n\varepsilon)\sin\frac{2\pi n(t-t_0)}{p}$$

Donde J_n es la función de Bessel de orden n. Suponiendo como hemos hecho en el resto de la práctica que $t_0 = 0$, daremos esta implementación en el programa, de forma que para un determinado t se imprima el valor de la anomalía excéntrica calculado por el método de Newton-Raphson y a partir de las funciones de Bessel, y comprobaremos que llegamos a resultados similares.

3 Aspectos de implementación y ejecución de la práctica

Vamos ahora a comentar ciertos aspectos de la implementación que se ha realizado. Todo el código se ha implementado en Python 3. Dicho código se encuentra adjunto en el archivo comprimido de la práctica, y también está disponible en https://github.com/pacron/celeste.

Para crear un entorno interactivo y sencillo de utilizar para el usuario se ha utilizado la herramienta Jupyter (http://jupyter.org/). Esta herramienta permite crear entornos interactivos de Python, de forma que es sencillo compartir el código desarrollado para que otros usuarios lo ejecuten, sin necesidad de que instalen Python en su ordenador.

Además, para simplificar aún más la forma de compartir la información a otros usuarios y que puedan ejecutar el código desarrollado, se ha creado un entorno virtual para ejecutarlo, haciendo uso de la plataforma *mybinder*. Concretamente, copiando el enlace https://mybinder.org/v2/gh/pacron/celeste/master?filepath=celeste.ipynb en un navegador se accede al entorno interactivo. Lo único que hay que hacer es esperar a que el sistema cargue los archivos y se redigirá a una ventana en la que se puede interactuar con el código. La ventana en cuestión es la siguiente:

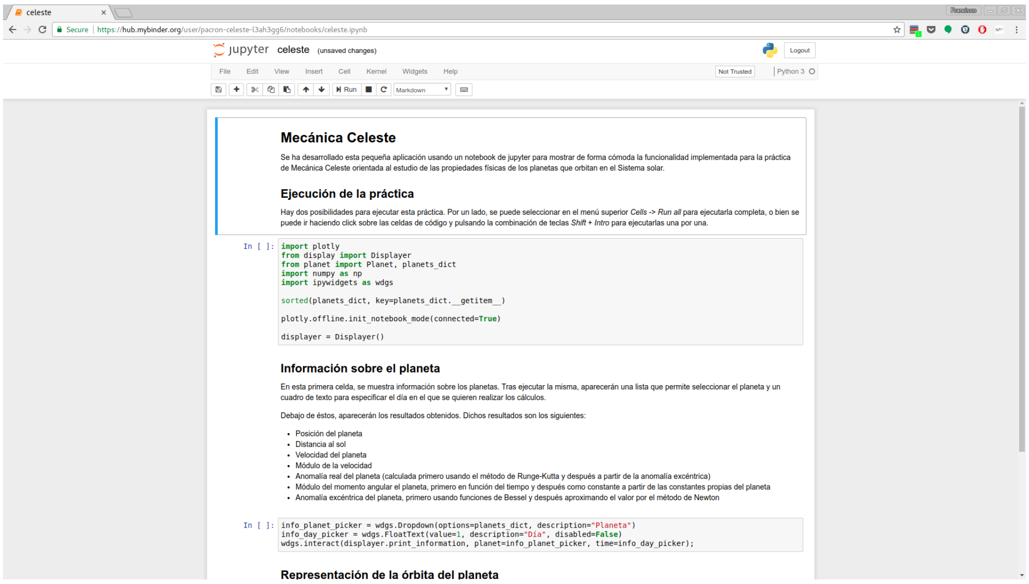

Figure 1: Ventana de ejecución de Jupyter

Ahora, haciendo click en *Cell* → *Run all* tal y como se muestra en la siguiente imagen, se ejecutan todas las celdas de código y se muestran los resultados de la práctica obtenidos:

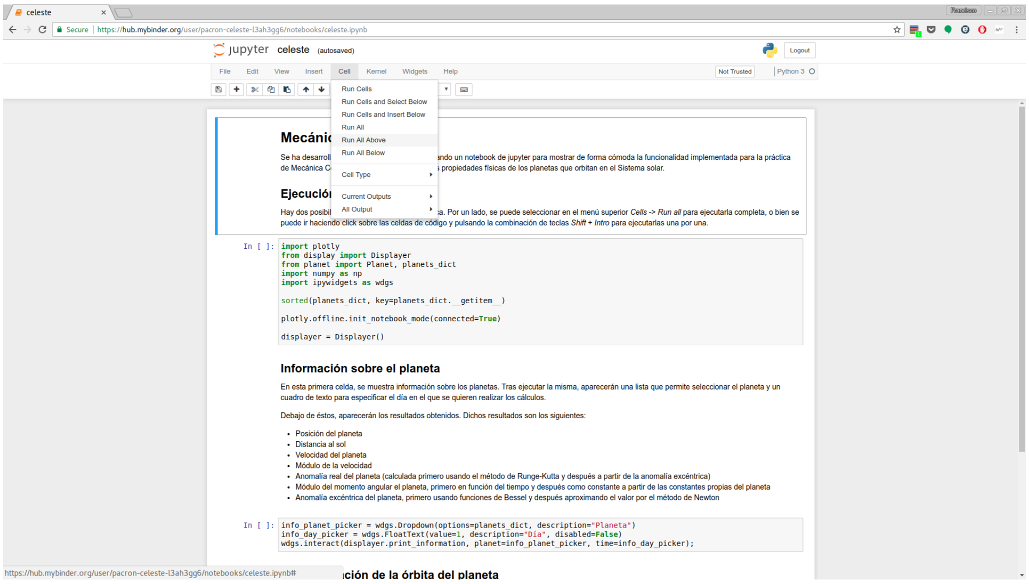

Figure 2: Ejecución de todas las celdas de código

Una vez realizada la ejecución, debajo de las dos celdas de código apareceran dos objetos con los que se puede interactuar. Por un lado, un desplegable que nos permite seleccionar el planeta sobre el que queremos obtener información, y por otro, un cuadro de texto para seleccionar el día del periodo orbital en el que se quiere obtener dicha información.

En la primera celda aparece la información sobre los parámetros calculados para el planeta en cuestión el día seleccionado, tal y como se muestra en la figura siguiente. Para el ejemplo que se muestra se ha tomado la Tierra en el día 100 del periodo:

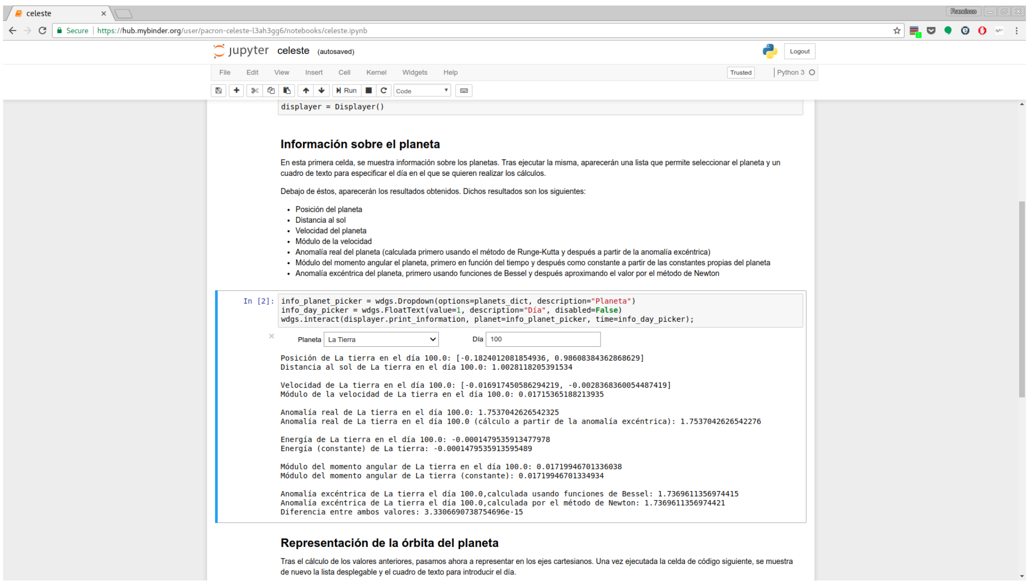

Figure 3: Información calculada para la Tierra en el día 100 del periodo orbital

En la segunda celda, se muestra también para el planeta seleccionado, un gráfico con la órbita del mismo. Se muestran tres objetos en la gráfica. En el origen de coordenadas aparece el Sol, ya que es el punto que se toma como referencia. En azul, se muestra la órbita elíptica alrededor del Sol, y con un punto rojizo de mayor tamaño la posición que ocupa el planeta en el día especificado. De nuevo, en el ejemplo que se muestra a continuación aparece la Tierra en el día 100 del periodo orbital:

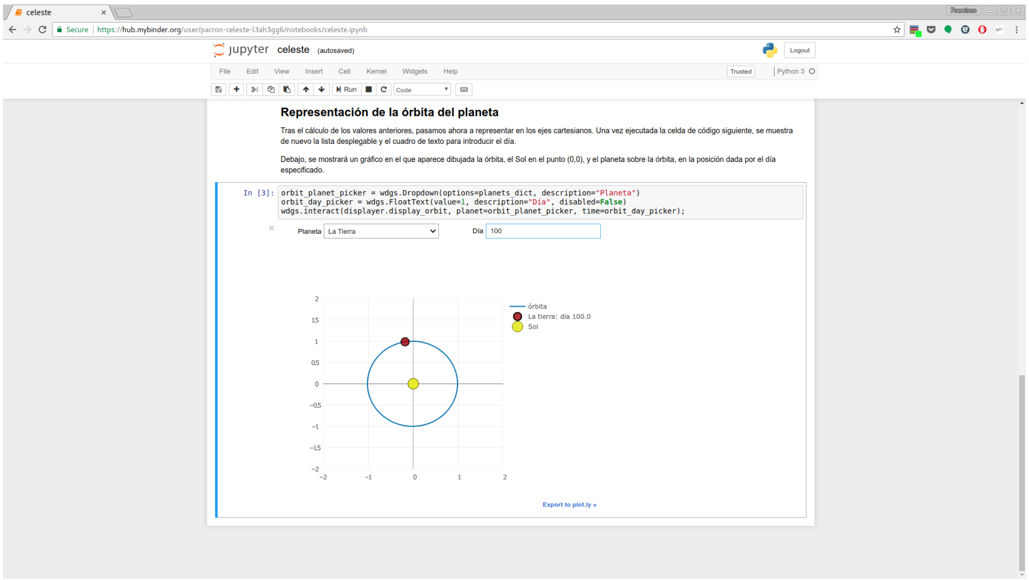

Figure 4: Órbita de la Tierra alrededor del Sol (posición en el día 100)