Método de Euler en sistemas de ecuaciones diferenciales

Métodos numéricos II

María del Mar Ruiz Martín
Antonio R. Moya Martín-Castaño
Francisco Luque Sánchez
Doble Grado de Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada - UGR
18001 Granada, Spain

May 30, 2016

1 Introducción

En este trabajo explicaremos el método de Euler para resolución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Este método es una extensión a sistemas de ecuaciones del método de Euler para ecuaciones diferenciales. Aunque no es muy utilizado en la práctica, ya que por sus características no aporta soluciones lo suficientemente buenas, sí que se suele explicar como introducción a los métodos de resolución numérica de ecuaciones diferenciales, dada su simplicidad. Además, es el más básico de lo que se conocen como *métodos explícitos de resolución numérica de EDs*, y el más básico de los métodos de *Runge-Kutta*. Por tanto, suele ser una buena estrategia introducir este método previo a la explicación de los métodos nombrados, ya que los mismos son una generalización de éste.

El trabajo irá estructurado de la siguiente forma. Primero, daremos una descripción general del concepto de sistema de ecuaciones diferenciales, ya que será el objeto sobre el que trabajaremos. Concretamente, nos centraremos en sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Tras esto, veremos cómo podemos transformar una ecuación diferencial de orden superior en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, con el fin de tratar una ecuación diferencial de orden superior con el método de Euler. Posteriormente, explicaremos el método de Euler y su aplicación a los sistemas de ecuaciones diferenciales. Completaremos este apartado con la resolución de dos ejemplos con este método. Por un lado, resolveremos un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden aplicando el método directamente, y por otro, tomaremos una ecuación de orden superior, la convertiremos en un sistema de ecuaciones, y resolveremos dicho sistema con el método nuevamente.

2 Descripción general de un sistema de ecuaciones diferenciales

Para comenzar, veamos lo que es una ecuación diferencial. Una ecuación diferencial es una igualdad en la que interviene una variable independiente (t), una variable dependiente ($x(t)$) y las sucesivas derivadas de la variable dependiente respecto de la independiente. En forma general, podemos escribir dicha ecuación de la siguiente forma:

$$F(t, x, x', ..., x^{n)}) = 0$$

Se define el orden de dicha ecuación diferencial como el mayor orden de derivación de la variable dependiente que aparece en dicha ecuación.

Una solución de esta ecuación es un conjunto de funciones que satisfacen las condiciones de dicha ecuación.

Asociado a esta ecuación diferencial, se define un problema de valores iniciales (PVI) como dicha ecuación diferencial junto con los n valores siguientes. Fijado t_0:

$$x(t_0) = y_0, x'(t_0) = y_1, ..., x_{n-1}(t_0) = y_{n-1}$$

Se dice que un PVI está bien planteado si existe solución, es única y depende de forma continua de los datos del problema.

Pasamos ahora a definir el concepto de sistema de ecuaciones diferenciales. Un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto de ecuaciones diferenciales en las que se ven implicadas una variable independiente, un conjunto de variables dependientes de la misma, y las sucesivas derivadas de dichas variables dependientes respecto de la independiente. En forma general, podemos escribir un sistema de ecuaciones diferenciales como sigue:

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_1', ..., x_1^{n_1)}, ..., x_m, x_m', ..., x_m^{n_m)}) = 0 \\ F_2(t, x_1, x_1', ..., x_1^{n_1)}, ..., x_m, x_m', ..., x_m^{n_m)}) = 0 \\ \vdots \\ F_r(t, x_1, x_1', ..., x_1^{n_1)}, ..., x_m, x_m', ..., x_m^{n_m)}) = 0 \end{cases}$$

Al igual que para las ecuaciones diferenciales, la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales está compuesto por un conjunto de ecuaciones que satisfacen las condiciones impuestas por las ecuaciones del sistema.

De nuevo, podemos definir un PVI asociado al sistema de ecuaciones anterior. Dicho PVI viene definido por el sistema de ecuaciones diferenciales más el siguiente conjunto de valores:

$$x_1(t_0) = y_{10}, ..., x_1^{n_1-1)}(t_0) = y_{1n_1-1}, ..., x_m(t_0) = y_{m0}, ..., x_1^{n_m-1)}(t_0) = y_{mn_m-1}$$

Se dice que un sistema de ecuaciones diferenciales está bien planteado si cumple las propiedades definidas previamente:

- $\exists$ solución

- Es única
- Depende de forma continua de las propiedades del problema

Durante el trabajo, dado que el método de Euler se aplica a ecuaciones y sistemas de primer orden, trabajaremos con este tipo de sistemas. Podemos escribir este tipo de sistemas de la siguiente manera:

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, ..., x_m) = \frac{dx_1}{dt} \\ F_2(t, x_1, ..., x_m) = \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ F_m(t, x_1, ..., x_m) = \frac{dx_m}{dt} \end{cases}$$

Y asociado a este sistema de ecuaciones, el PVI definido por el sistema anterior y el conjunto de valores:

$$x_1(t_0) = y_1, x_2(t_0) = y_2, ..., x_m(t_0) = y_m$$

3 Ecuaciones diferenciales de orden superior y reescritura como sistemas

En la sección anterior definimos el concepto de ecuación diferencial de orden superior y el de sistema de ecuaciones diferenciales. Veamos ahora cómo reescribir una ecuación diferencial de orden n en un sistema de ecuaciones diferenciales en el que se tienen n ecuaciones diferenciales de primer orden. Este paso es necesario para poder aplicar posteriormente el método de Euler, ya que este método sólo puede ser aplicado a ecuaciones diferenciales de primer orden. Veamos entonces esta forma de reescribir las ecuaciones diferenciales de orden superior. Sea la ecuación diferencial de orden n: $F(t, x, x', ..., x^{n)}) = 0$. Podemos escribir el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, cuya solución es equivalente a la de la ecuación anterior. Tomamos los siguientes cambios de variable:

$$y_0 = x, y_1 = x', y_2 = x'', \ldots, y_{n-1} = x^{n-1)}$$

Entonces, la solución de y_0 para el siguiente sistema de ecuaciones siguiente es la solución de la ecuación diferencial inicial:

$$\begin{cases} y_0' = x' = y_1 \\ y_1' = x'' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2}' = x^{n-1)} = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = x^{n)} = F(t, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \end{cases}$$

Una vez convertida la ecuación en el sistema anterior, estamos en condiciones de aplicar el método de Euler para resolverlo.

4 Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales

Recordemos primero el método de Euler para un problema de valores iniciales (PVI) bien planteado. Si tomamos puntos en el intervalo [a,b] y un N natural, de forma que $h = (a+b)/N$. Para cada i=0,...,N, los puntos serían

$$t_i = a + ih;$$

y dado el PVI:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Podemos tratar de aproximar la solución mediante el método de Euler. Mediante el desarrollo de Taylor centrado en t_i evaluando en el punto t_{i+1}:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + y''(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)^2/2$$

para algún ξ_i entre (t_i, ti_{i+1}).
Si observamos, lo escrito anteriormente es equivalente a:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + y''(\xi_i)h^2/2,$$

y lo que es lo mismo:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + O(h^2).$$

De este modo el método de Euler construye un $w_i \approx y(t_i)$ para cada $i = 1, ..., N$

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \end{cases}$$

Para el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n' = F_n(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \end{cases}$$

tenemos que para cada $j = 1, ..., n$, podemos hacer una aproximación de $w_{i,j} \approx x_j(t_i)$ de forma que:

$$\begin{cases} w_{0,j} = x_{j,0} \\ w_{i+1,j} = w_{i,j} + hF_j(t_i, w_{i,j}) \end{cases}$$

De este modo, escribiendo el sistema con la siguiente notación matricial:

$$X'(t) = F(t, X(t))$$

donde X(t) es de la forma:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

y F(t,X(t)):

$$F(t,X(t)) = \begin{bmatrix} F_1(t, x_1(t), ..., x_n(t)) \\ \vdots \\ F_n(t, x_n(t), ..., x_n(t)) \end{bmatrix}$$

podemos expresar una aproximación $W_i \approx X(t_i)$ de a siguiente manera:

$$\begin{cases} W_0 = X(t_0) \\ W_{i+1} = W_i + hF(t_i, W_i) \end{cases}$$

donde W_i es de la forma:

$$W_i = \begin{bmatrix} w_1(t_i) \\ \vdots \\ w_n(t_i) \end{bmatrix}$$

5 Estudio del error y análisis de la convergencia del método

Antes de comenzar con el estudio del error, comenzaremos definiendo los tipos de errores que se pueden encontrar cuando se utilizan métodos numéricos para resolución de ecuaciones diferenciales:

Error local Se define como el error que se produce en un sólo paso del algoritmo, si se supone que el valor obtenido en la aproximación anterior es exacto.

Error global Se define como el error total cometido con la aproximación tras las n iteraciones del método. Como veremos más adelante, no es la suma de los errores locales cometidos en todas las iteraciones, sino que se ve incrementado.

Error de truncatura Es el error que se produce por la precisión finita de las máquinas que se utilizan para computar los cálculos.

Estudiemos ahora los errores definidos en el método de Euler aplicado a sistemas de ecuaciones diferenciales.

5.1 Error local

Como ya hemos dicho antes, se define el error local como el que se produce en un paso del algoritmo, suponiendo que el valor del que partimos (t_i, X_i) es un valor real del sistema de ecuaciones. Entonces, tenemos que el error local cometido en la iteración $i+1$ lo podemos expresar como $E_{i+1} = ||X(t_{i+1}) - [X(t_i) + h * F(t_i, X_i)]||$. Veamos cómo

Teorema 1. *Error local del método de Euler.*

El error local para el método de Euler es $O(h^2)$, donde h es el tamaño del paso que hemos elegido para aplicar el método ($h = (b-a)/N$).

Demostración
Veamos la demostración de dicho resultado. Tomamos el PVI asociado al sistema de ecuaciones diferenciales:

$$X' = F(t, X),\ X(t_0) = X_0$$

Supongamos que tenemos la el valor exacto para un determinado t_i, es decir, tenemos (t_i, X_i) exacto. Entonces, el error local para la siguiente iteración es $||E_{i+1}|| = ||X(t_{i+1}) - [X(t_i) + h * F(t_i, X_i)]||$. Tomando cada una de las componentes por separado, y expresando $x_j(t_{i+1}), j = 1, ..., n$ usando su polinomio de Taylor centrado en t_i tenemos:

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + h * x'_j(t_i) + \frac{h^2}{2} * x''_j(t_i) + \frac{h^3}{3!} * x'''_j(t_i) + ... =$$

$$= x_j(t_i) + h * x'_j(t_i) + \frac{h^2}{2} * x''_j(\xi_j)$$

Donde $h = t_{i+1} - t_i$. Con el método de Euler, la aproximación que obtenemos para $x_j(t_i) = \omega_{i+1,j}$ es:

$$\omega_{i+1,j} = x_j(t_i) + h * f_j(t_i, x_1, ..., x_n) = x_j(t_i) + h * x'_j(t_i)$$

Restando ambas expresiones, tenemos que para cada x_j, el error cometido en un paso del método es:

$$e_{i+1,j} = |x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| = \frac{h^2}{2} * x''_j(\xi_{i+1,j}),\ \xi_{i+1,j} \in [t_i, t_{i+1}]$$

Tenemos entonces que el vector de los errores lo podemos expresar como sigue:

$$E_{i+1} = \begin{bmatrix} e_{i+1,1} \\ \vdots \\ e_{i+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} * x''_1(\xi_{i+1,1}) \\ \vdots \\ \frac{h^2}{2} * x''_n(\xi_{i+1,n}) \end{bmatrix}$$

Tomando ahora la norma euclídea del vector de los errores, tenemos que el error es $O(h^2)$

$\square$

Una vez visto el error local que se comete con el método de Euler, pasamos a estudiar el error global que se comete.

5.2 Error global

Como ya dijimos en la introducción de este apartado, se define el error global como el error total cometido tras las n iteraciones que se realizan del método. Aunque cabría esperar que el error cometido con el método fuese la suma de los errores que se cometen en cada una de las iteraciones, esto no es cierto. Esto se debe a que, en cada pasa, el error previo cometido se ve levemente incrementado. Pasamos a estudiar entonces dicho error. Necesitaremos de dos lemas previos, que usaremos luego en la demostración:

Lema 2. *Para toda $x \geq -1$ y para cualquier m positiva, tenemos que $0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$*

Demostración
Aplicamos el teorema de Taylor a e^x. Obtenemos:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^{\xi}$$

donde $0 < \xi < x$. Por tanto:

$$0 \leq 1 + x \leq 1 + x + \frac{1}{2}x^2 e^{\xi} = e^x$$

y como $1 + x \geq 0$:

$$0 \leq (1 + x)^m \leq (e^x)^m = e^{mx}$$

□

Lema 3. *Si s y t son números reales positivos, $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ es una sucesión que satisface $a_0 \geq -t/s$ y*

$$a_{i+1} \leq (1 + s)a_i + t, \; \forall i = 0, 1, ..., k$$

entonces se tiene que

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

Demostración
Para un entero fijo i, la primera desigualdad del lema implica que:

$$a_{i+1} \leq (1 + s) * a_i + t \leq (a + s)[(1 + s)a_{i-1} + t] + t \leq ...$$

$$... \leq (1 + s)^{i+1}a_0 + [1 + (1 + s) + ... + (1 + s)^i]t$$

Por otro lado, tenemos que $1 + (1 + s) + (1 + s)^2 + ... + (1 + s)^i$ es una serie geométrica de razón $(1 + s)$, y que por tanto su suma vale:

$$\frac{1 - (1 + s)^{i+1}}{1 - (1 + s)} = \frac{1}{s}[(1 + s)^{i+1} - 1]$$

Por lo tanto

$$a_{i+1} \leq (1 + s)^{i+1}a_0 + \frac{(1 + s)^{i+1} - 1}{s}t = (1 + s)^{i+1} * \left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

y finalmente, usando el lema anterior con $x = 1 + s$, tenemos que

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

□

Pasamos ya a ver y demostrar el teorema que nos da el orden de precisión del método de Euler.

Teorema 4. *Error global del método de Euler*

El error global del método de Euler para sistemas de ecuaciones es $O(h)$, donde h es el tamaño de paso que hemos elegido al aplicar el método ($h = \frac{b-a}{n}$)

Demostración
Para probar este resultado, supondremos que nos encontramos ante un problema bien planteado, y que cada función $f_j(t, x_1, ..., x_n)$ es Lipschitziana en la variable x_j, con constante de Lipschitz L_j, y que para cada x_j existe una constante M_j tal que $|x_j''(t)| \leq$

$M_j, \forall t \in [a, b]$.

Tomamos entonces una de las funciones f_j (el razonamiento es análogo para las demás). Como ya vimos para el error local, podemos escribir $x_j(t_{i+1})$ como:

$$x_j(t_{i+1}) = x_j(t_i) + h * f_j(t_i, x_i, ..., x_n) + \frac{h^2}{2} * x_j''(\xi_j)$$

Y podemos escribir también la aproximación para la variable x_j en el paso $i+1$, $\omega_{i+1,j}$ como:

$$\omega_{i+1,j} = \omega_{i,j} + h * f_j(t_i, \omega_{i,1}, ..., \omega_{i,n})$$

La diferencia entre ambas cantidades sería el error total acumulado en las primeras $i+1$ iteraciones del método. Podemos expresar esa diferencia como sigue:

$$x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j} = x_j(t_i) - \omega_{i,j} + h * [f_j(t_i, x_i, ..., x_n) - f_j(t_i, \omega_{i,1}, ..., \omega_{i,n})] + \frac{h^2}{2} * x_j''(\xi_j)$$

Se cumple entonces que:

$$|x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| \leq |x_j(t_i) - \omega_{i,j}| + h|[f_j(t_i, x_i, ..., x_n) - f_j(t_i, \omega_{i,1}, ..., \omega_{i,n})]| + \frac{h^2}{2} * |x_j''(\xi_j)|$$

Además, por ser Lipschitziana en la variable x_j, con constante de Lipschitz L_j, y por ser $|x_j''(t)| \leq M_j$, tenemos:

$$|x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| \leq (1 + hL_j) * |x_j(t_i) - \omega_{i,j}| + \frac{h^2 * M_j}{2}$$

Usando ahora el lema anterior, tomando $a_{i,j} = |x_j(t_i) - \omega_{i,j}|$ para cada $j = 0, 1, ..., N$, y $s = hL_j, t = \frac{h^2 M_j}{2}$ tenemos:

$$|x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| \leq e^{(i+1)hL_j} \left(|x_j(t_0) - \omega_{0,j}| + \frac{h^2 M_j}{2hL_j} \right) - \frac{h^2 M_j}{2hL_j}$$

Ahora, puesto que $|x_j(t_0) - \omega_{0,j}| = 0$ y que $(i+1)h = t_{i+1} - t_0 = t_{i+1} - a$ se concluye que:

$$|x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| \leq \frac{hM_j}{2L_j}(e^{(t_{i+1}-a)L_j} - 1)$$

Y dado que tomamos j arbitrario, tenemos este resultado para todas las funciones f_j. Finalmente, tomando la norma euclídea de todos los errores globales, podemos concluir que el método es de orden $O(h)$.

□

6 Ejemplos y ejercicios resueltos

6.1 Método de Euler para sistemas de ecuaciones

6.2 Método de Euler para ecuaciones de orden superior

En primer lugar vamos a realizar el paso de una ecuación diferencial de orden superior a un sistema, sobre el cual posteriormente podremos aplicar el método de Euler para sistemas. Para ejemplificar el proceso vamos a usar el siguiente problema de valores iniciales:

$$x''' = 2x'' - 2x'$$

$$x(0) = 1, x'(0) = 1, x''(0) = 0$$

Realizamos el cambio de variable indicado en la sección *Ecuaciones diferenciales de orden superior y reescritura como sistemas*:

$$\begin{cases} y_0' = x' = y_1 \\ y_1' = x'' = y_2 \\ y_2' = x''' = 2y_2 - 2y_1 \end{cases}$$

A continuación pasaremos a resolver el sistema con el método de Euler. Para ello consideraremos el intervalo [0,1] y una longitud de paso h = 0.1.