# Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales

María del Mar Ruiz Martín
Antonio R. Moya Martín-Castaño
Francisco Luque Sánchez

Universidad de Granada

June 2, 2016

# Introducción

Explicaremos el método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por consiguiente, también servirá para resolver ecuaciones de orden superior.

Poco utilizado en la práctica, no aporta soluciones lo suficientemente buenas.

Interesante por su gran simplicidad.

# Partes del trabajo:

- Definiciones previas
- Descripción general de un sistema de ecuaciones diferenciales
- Ecuaciones diferenciales de orden superior y reescritura como sistemas.
- Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales
- Estudio del error y análisis de la convergencia del método.
- Ejemplos

# Definiciones previas

- Consistencia: Un método se dice consistente si el error local que produce tiende a 0 cuando $h$ (tamaño de paso) tienda a 0.

$$\lim_{h \to 0} max|\tau_i(h)| \to 0$$

- Estabilidad: Un método se dice que es estable si una perturbación en los datos de entrada no se va maximizando cuando se utiliza el método para obtener la solución del problema.

$$|\omega' - \omega| \leq K|X_0' - X_0|$$

.

- La consistencia y la estabilidad de un método implican su convergencia.

# Concepto de ecuación diferencial:

Igualdad en la que interviene una variable independiente (t), una variable dependiente (x(t)) y las sucesivas derivadas de la variable dependiente respecto de la independiente:

$$F(t, x, x', ..., x^{n)}) = 0$$

*Orden* de la ecuación diferencial: mayor orden de derivación de la variable independiente que aparece en dicha ecuación.

*Solución* Conjunto de ecuaciones que cumplan dichas condiciones.

# Problema de valores iniciales

*PVI* asociado a una ecuación diferencial: dicha ecuación junto con el conjunto de $n$ valores (fijado $t_0$):

$$x(t_0) = y_0, x'(t_0) = y_1, ..., x^{n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

*Problema bien planteado*: existe solución, es única y depende continuamente de los datos del problema.

# Sistema de ecuaciones diferenciales

Es un conjunto de ecuaciones diferenciales en las que aparecen una variable independiente, un conjunto de variables dependientes de dicha variable independiente y las sucesivas derivadas de dichas variables dependientes respecto de la independiente.

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{n_1)}, \ldots, x_m, x_m', \ldots, x_m^{n_m)}) = 0 \\ F_2(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{n_1)}, \ldots, x_m, x_m', \ldots, x_m^{n_m)}) = 0 \\ \vdots \\ F_r(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{n_1)}, \ldots, x_m, x_m', \ldots, x_m^{n_m)}) = 0 \end{cases}$$

PVI análogo.

# Sistemas de primer orden

Las derivadas que aparecen son a lo sumo de orden 1.

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, ..., x_m) = \frac{dx_1}{dt} \\ F_2(t, x_1, ..., x_m) = \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ F_m(t, x_1, ..., x_m) = \frac{dx_m}{dt} \end{cases}$$

Y para el PVI asociado a dicho sistema:

$$x_1(t_0) = y_1, x_2(t_0) = y_2, ..., x_m(t_0) = y_m$$

# Sistemas de primer orden

El sistema anterior lo podemos notar en forma vectorial de la siguiente manera:

$$X'[t] = F(t, X[t]), \quad X[t] = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad F[t, X[t]] = \begin{bmatrix} f_1(t, X[t]) \\ \vdots \\ f_n(t, X[t]) \end{bmatrix}$$

Está bien planteado si satisface las condiciones anteriormente dichas. Ahora, indicar que tenemos una caracterización de problema bien planteado a partir de la condición de Lipschitz.

# Problema bien planteado

Diremos que la función vectorial $F(t, X(t))$ satisface la condición de Lipschitz, con constante de Lipschitz $L$, si se cumple que $\forall t_1, t_2 \in [a, b]$ se cumple:

$$||F(t_1, X(t_1)) - F(t_2, X(t_2))|| \leq L||X(t_1) - X(t_2)||$$

Tenemos entonces que el problema anterior es un problema bien planteado si $F(t, X(t))$ es continua en su conjunto de definición y Lipschitziana.

# Reescritura de ecuaciones de orden superior

Sea la ecuación diferencial de orden $n$: $F(t, x, x', ..., x^{n)}) = 0$.
Cambios de variable:

$$y_0 = x, y_1 = x', y_2 = x'', \ldots, y_{n-1} = x^{n-1)}$$

Solución de $y_0$ del sistema $\rightarrow$ solución de la ecuación diferencial.

Sistema en el que hemos transformado la ecuación de orden $n$ sería el siguiente:

$$\begin{cases} y_0' = x' = y_1 \\ y_1' = x'' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2}' = x^{n-1)} = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = x^{n)} = F(t, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

# Método de Euler para ecuaciones diferenciales

Dado un PVI bien planteado:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

Dado [a,b], tomamos $N \in \mathbb{N}$, y $h = (b - a)/N$

Para cada $i = 0, ..., N$, tomamos los puntos: $t_i = a + ih$.

# Método de Euler para ecuaciones diferenciales

Aplicando Taylor (centrado en $t_i$):

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + y''(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)^2/2$$

para algún $\xi_i$ en $(t_i, ti_{i+1})$.

Equivalentemente:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + y''(\xi_i)h^2/2$$

Es decir:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + O(h^2)$$

# Método de Euler para ecuaciones diferenciales

De este modo, el método aproxima cada $y_i$:

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \end{cases}$$

# Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales

Dicho esto, podemos observar, mediante una deducción análoga, cuál es el punto de partida del método de Euler para sistemas. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n' = F_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

para cada $j = 1, \dots, n$, podemos hacer una aproximación de $w_{i,j} \approx x_j(t_i)$ de forma que:

$$\begin{cases} w_{0,j} = x_{j,0} \\ w_{i+1,j} = w_{i,j} + hF_j(t_i, w_{i,j}) \end{cases}$$

# Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales

Y así, dado el siguiente sistema:

$$X'(t) = F(t, X(t))$$

donde X(t) es de la forma:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

y F(t,X(t)):

$$F(t, X(t)) = \begin{bmatrix} F_1(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)) \\ \vdots \\ F_n(t, x_n(t), \ldots, x_n(t)) \end{bmatrix}$$

# Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales

podemos expresar una aproximación $W_i \approx X(t_i)$ de a siguiente manera:

$$\begin{cases} W_0 = X(t_0) \\ W_{i+1} = W_i + hF(t_i, W_i) \end{cases}$$

donde $W_i$ es de la forma:

$$W_i = \begin{bmatrix} w_1(t_i) \\ \vdots \\ w_n(t_i) \end{bmatrix}$$

# Tipos de errores en los métodos de resolución numérica

- Error local
- Error global
- Error de truncatura

# Error local

**Teorema**

El error local para el método de Euler es $O(h^2)$, donde $h$ es el tamaño del paso que hemos elegido para aplicar el método.

Para la demostración, supongamos que tenemos un valor exacto para un determinado $t_i$, entonces el error local para la siguiente iteración es $||E_{i+1}|| = ||X(t_{i+1}) - [X(t_i) + h * F(t_i, X_i)]||$
Si tomamos cada componente por separado y, además, realizamos el desarrollo de Taylor de $x_j(t_{i+1})$ con $j = 1, ..., n$, llegaríamos a que para cada $x_j$, el error cometido en un paso del método es:

$$e_{i+1,j} = |x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| = \frac{h^2}{2} * x_j''(\xi_{i+1,j}),\ \xi_{i+1,j} \in [t_i, t_{i+1}]$$

# Error local

Tenemos entonces que el vector de los errores lo podemos expresar como sigue:

$$E_{i+1} = \begin{bmatrix} e_{i+1,1} \\ \vdots \\ e_{i+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} * x_1''(\xi_{i+1,1}) \\ \vdots \\ \frac{h^2}{2} * x_n''(\xi_{i+1,n}) \end{bmatrix}$$

Tomando ahora la norma euclídea del vector de los errores, tenemos que el error es $O(h^2)$

# Error global

## Lema 1

Para toda $x \geq -1$ y para cualquier $m$ positiva, tenemos que $0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$

## Lema 2

Si $s$ y $t$ son números reales positivos, $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ es una sucesión que satisface $a_0 \geq -t/s$ y

$$a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t, \; \forall i = 0, 1, \ldots, k$$

entonces se tiene que

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

# Error global

**Teorema**

El error global del método de Euler para sistemas de ecuaciones es $O(h)$, donde $h$ es el tamaño de paso que hemos elegido al aplicar el método.

El esquema general de esta demostración sería el siguiente. Suponiendo que cada función, $f_j(t, x_1, ..., x_n)$ es Lipschitziana en la variable $x_j$, con constante de Lipschitz $L_j$, y que para cada $x_j$ existe una constante $M_j$ tal que $|x_j''(t)| \leq M_j, \forall t \in [a, b]$.

# Error global

Teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor para $x_j(t_{i+1})$ y la aproximación $w_{i+1,j}$:

$$x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j} = x_j(t_i) - \omega_{i,j} + h * [f_j(t_i, x_i, ..., x_n)$$

$$-f_j(t_i, \omega_{i,1}, ..., \omega_{i,n})] + \frac{h^2}{2} * x_j''(\xi_j)$$

Se cumple entonces que:

$$|x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| \leq |x_j(t_i) - \omega_{i,j}| + h|[f_j(t_i, x_i, ..., x_n)$$

$$-f_j(t_i, \omega_{i,1}, ..., \omega_{i,n})]| + \frac{h^2}{2} * |x_j''(\xi_j)|$$

# Error global

Y de aquí, teniendo en cuenta que $f_j$ es Lipschitziana:

$$|x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| \leq (1 + hL_j) * |x_j(t_i) - \omega_{i,j}| + \frac{h^2 * M_j}{2}$$

Y aplicando el lema anterior y operando:

$$|x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| \leq \frac{hM_j}{2L_j}(e^{(t_{i+1}-a)L_j} - 1)$$

Y dado que tomamos $j$ arbitrario, tenemos este resultado para todas las funciones $f_j$. Finalmente, tomando la norma euclídea de todos los errores globales, podemos concluir que el método es de orden $O(h)$.

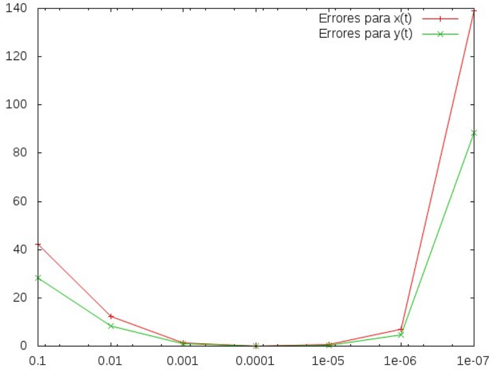
# Error de truncatura

Errores derivados de la precisión con la que trabaja la máquina en la que calculamos.

Este error provoca que se aumente el error total para valores de $h$ demasiado pequeños.

# Ejemplo del error de truncatura

Se ha cambiado la precisión de la máquina para que trabaje con 6 decimales significativos.



# Método de Euler para sistemas de ecuaciones primer orden

## Ejercicio 1

Dado el siguiente PVI, determinar el valor de x(1) e y(1):

$$\begin{cases} x' = 2*x + 3*y \\ y' = 2*x + y \\ x(0) = 4 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Veamos el cálculo de una primera aproximación $X_1$

$$X_1 = X_0 + f(t_0, X_0)h = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2*4+3*1 \\ 2*4+1 \end{bmatrix} 0.1 = \begin{bmatrix} 5.1 \\ 1.9 \end{bmatrix}$$

# Método de Euler para sistemas de ecuaciones de primer orden

Observemos ahora:

| **h** | $w_1(1)$ | **Err en** $w_1(1)$ | $w_2(1)$ | **Err en** $w_2(1)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 121.80076 | 42.36156 | 80.67749 | 28.15092 |
| 0.01 | 151.88087 | 12.28145 | 100.64386 | 8.18455 |
| 0.001 | 162.86047 | 1.30185 | 107.96082 | 0.86759 |
| 0.0001 | 164.09679 | 0.06553 | 108.78482 | 0.04360 |
| 0.00001 | 164.15577 | 0.00655 | 108.82405 | 0.00436 |

Table: Errores obtenidos con el método de Euler

# Método de Euler para sistemas de ecuaciones de primer orden

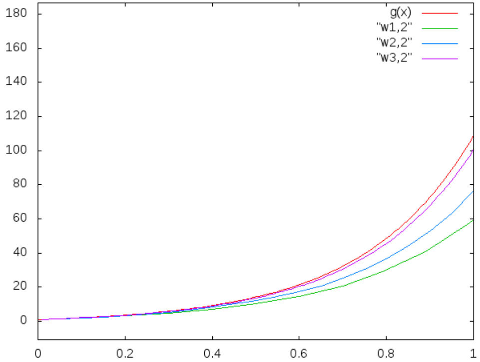



Figure: Aproximación para marcas de paso de 0.1, 0.05 y 0.01 respectivamente

# Método de Euler para ecuaciones de orden superior

## Ejercicio 2

Dado el siguiente PVI, determinar el valor de $x(\pi/4)$

$$x''' = 2x'' - 2x'$$

$$x(0) = 1, x'(0) = 1, x''(0) = 0$$

$$\begin{cases} y_0' = x' = y_1 \\ y_1' = x'' = y_2 \\ y_2' = x''' = 2y_2 - 2y_1 \end{cases}$$

# Método de Euler para ecuaciones de orden superior

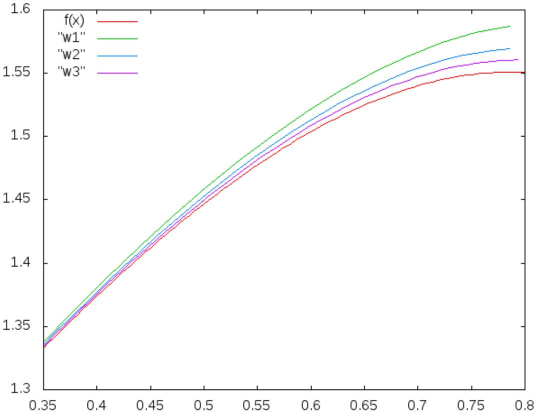



Figure: Aproximación para 25 (w1), 50 (w2) y 100 (w3) nodos

# Método de Euler para ecuaciones de orden superior

| **h** | **w($\pi/4$)** | **Error** |
|---|---|---|
| $\pi/120$ | 1.58135142743804З | 0.030468230520017 |
| $\pi/240$ | 1.566883575533628 | 0.016000378615602 |
| $\pi/360$ | 1.561353411976403 | 0.010470215058378 |
| $\pi/480$ | 1.558765635465628 | 0.007882438547603 |
| $\pi/600$ | 1.557203467884946 | 0.006320270969205 |
| $\pi/720$ | 1.556204299202344 | 0.005321102284318 4 |
| $\pi/840$ | 1.555409383683734 | 0.004526186765708 7 |

Table: Errores obtenidos con el método de Euler

# Fin.