

Lección 13

Introducción a los sistemas no lineales de ecuaciones diferenciales

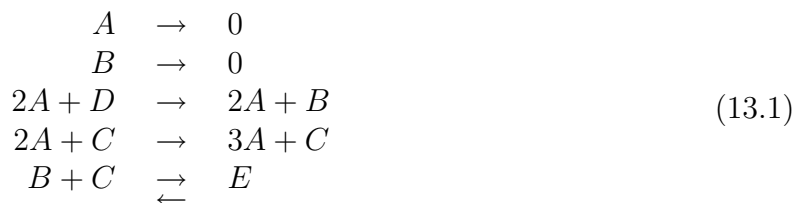
13.1. Sistemas de ecuaciones diferenciales en Ingeniería Química

En la introducción de la Lección 8 vimos que el análisis de las reacciones químicas conduce, por lo general, a sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales. La resolución de éstos en forma cerrada es prácticamente imposible y nuestra única ayuda son las técnicas cualitativas y los métodos numéricos.

El análisis cualitativo de los sistemas de ecuaciones diferenciales, lineales o no lineales, es mucho más complicado que el de las ecuaciones. En esta lección consideraremos solamente sistemas autónomos de dos ecuaciones con dos incógnitas con el objetivo de introducirnos en las técnicas cualitativas para obtener información sobre sus soluciones. Un análisis cualitativo profundo está fuera del alcance de este curso.

En cualquier caso, es siempre interesante tener un modelo que nos sirva de guía. El modelo escogido es el de las reacciones de tipo *Activador-Inhibidor*. Siguiendo un modelo de

Gierer-Meinhardt consideramos el siguiente conjunto de reacciones



donde A , B , C , D y E son sustancias químicas. Después de ciertas suposiciones se llega al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales que modelizan la evolución de las concentraciones de las sustancias A y B :

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= k_1 a^2 b^{-1} - k_2 a \\
 \frac{db}{dt} &= k_3 a^2 - k_4 b
 \end{aligned} \tag{13.2}$$

donde a y b son las concentraciones de A y B , respectivamente, y k_1 , k_2 , k_3 y k_4 son constantes relacionadas con las velocidades de las reacciones.

Este es un sistema de dos ecuaciones diferenciales **no** lineales con dos incógnitas. Como ya se ha dicho, la búsqueda de soluciones explícitas de estos sistemas es, casi siempre, imposible y necesitamos métodos cualitativos y numéricos.

13.2. Interpretación geométrica de las soluciones

Para interpretar correctamente las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales necesitamos las gráficas de las soluciones. En esta sección veremos algunas formas de hacerlo. En el camino, exploraremos algunas propiedades geométricas de los sistemas y sus soluciones.

Haremos el estudio guiados por la ecuación de Gierer-Meinhardt que hemos introducidos en la sección anterior:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= k_1 x^2 y^{-1} - k_2 x \\
 \frac{dy}{dt} &= k_3 x^2 - k_4 y
 \end{aligned} \tag{13.3}$$

donde hemos cambiado el nombre a las variables por simplicidad notacional. Vamos a suponer, de momento, que todos los parámetros son iguales a 1: $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$. De esta forma el sistema queda

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= x^2 y^{-1} - x \\
 \frac{dy}{dt} &= x^2 - y
 \end{aligned} \tag{13.4}$$

En cualquier caso se trata de un sistema de dimensión 2 de primer orden y no lineal porque aparecen términos como x^2 o y^{-1} .

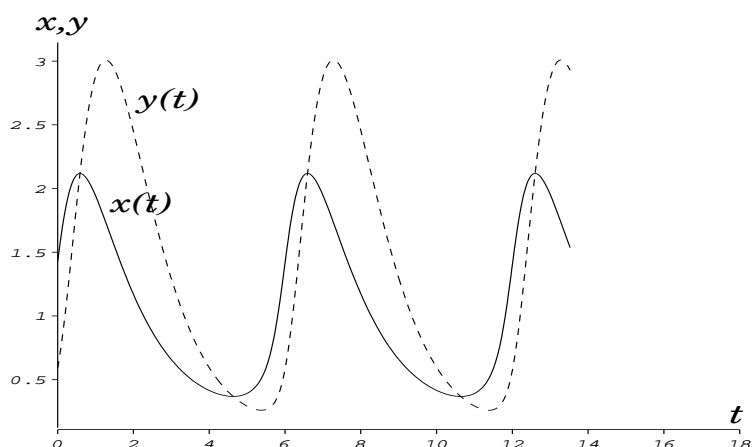


Figura 13.1:

Gráfica de las componentes de las soluciones de las ecuaciones de Gierer-Meinhardt para $k_i = 1$.

13.2.1. Dibujo de las componentes de una solución

Consideremos el sistema (13.4) con la condición inicial $x(0) = 1,5$ y $y(0) = 0,7$. Una forma de representar la gráfica de las soluciones es, sencillamente, dibujar todas las componentes de las soluciones. Esto es lo que hemos hecho en la Figura 13.1. Las gráficas de estas componentes parecen indicar que las concentraciones de las sustancias A y B varían periódicamente.

Debe hacerse notar que las gráficas que se muestran en esta sección, y en las siguientes, han sido construídas a partir de soluciones del sistema (13.4) obtenidas numéricamente. No es pensable que tales soluciones puedan obtenerse explícitamente mediante métodos analíticos.

13.2.2. Curvas paramétricas

Una forma alternativa de estudiar las soluciones del sistema

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y) \\ y' &= g(t, x, y) \end{aligned} \quad ,$$

es el siguiente: si $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son las dos componenets de una solución, estudiamos la función vectorial $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ para cada valor de la variable independiente t . Si pensamos en $(x(t), y(t))$ como las coordenadas en el instante t de un punto (o partícula) en movimiento, la gráfica de la función

$$\begin{aligned} I \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightsquigarrow \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

donde I es un intervalo de la recta real, es una curva en el plano xy llamada trayectoria de la partícula o curva parametrizada.

Quizá el ejemplo más simple es el siguiente:

$$\begin{array}{ccc} [0, 2\pi) & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \rightsquigarrow & (\cos t, \sin t) \end{array}$$

Así $x = \cos t$, $y = \sin t$. A estas ecuaciones se le llama ecuaciones paramétricas de la curva.

¿Cuál es la trayectoria de la partícula que en el instante t se encuentra en la posición $(\cos t, \sin t)$? Es decir, ¿qué curva describe tal punto en movimiento?. Desde luego en el instante $t = 0$ la partícula se encuentra en la posición $(x, y) = (\cos 0, \sin 0) = (1, 0)$, en el instante $t = \pi/2$ la posición de la partícula es $(x, y) = (\cos \pi/2, \sin \pi/2) = (0, 1)$, etc. Hay una forma rápida de saber la curva parametrizada correspondiente a esta función vectorial. Basta observar que

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Por lo tanto, los puntos (x, y) que describen la trayectoria están todos en la circunferencia unidad. Además t puede ser visto como el ángulo que forma la recta que une el punto (x, y) con el origen de coordenadas; y como t varía entre 0 y 2π , para cualquier punto de la circunferencia unidad hay un t tal que $(x, y) = (\cos t, \sin t)$. En otras palabras la curva parametrizada correspondiente a las ecuaciones paramétricas $(x, y) = (\cos t, \sin t)$ es la circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio 1. (Figura 13.2)

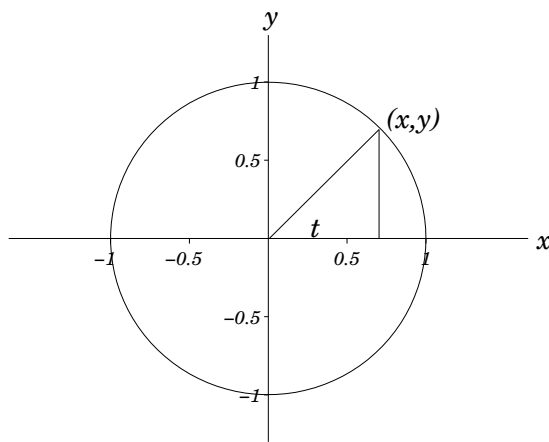


Figura 13.2:

Gráfica de la circunferencia unidad a partir de sus ecuaciones paramétricas $x = \cos(t)$, $y = \sin(t)$.

Hay un concepto asociado a las curvas paramétricas que es importante: la dirección de la curva. O si se quiere la dirección del movimiento de la partícula. En nuestro ejemplo de la circunferencia unidad, y teniendo en cuenta que conocemos explícitamente las ecuaciones

paramétricas es fácil conocer la dirección del movimiento, basta dar valores a t . Así para $t = \pi/2$ la partícula se encontraría en $(x, y) = (0, 1)$ y para $t = \pi$ se encontraría en $(x, y) = (-1, 0)$. Por lo tanto podemos concluir que la partícula se mueve en sentido opuesto al de las agujas de un reloj. Ahora bien, ¿qué sucede si no conocemos explícitamente las ecuaciones paramétricas, pero tenemos otros medios de saber la gráfica de la curva? (Veremos que este es nuestro caso cuando tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales). ¿Hay algún concepto matemático que nos sirva para determinar la dirección del movimiento de la partícula? La respuesta es el vector derivada tal y como veremos enseguida.

Volviendo ahora a las ecuaciones de Gierer-Meinhardt (13.4), mediante un procedimiento que veremos más adelante hemos obtenido que la curva parametrizada correspondiente a la solución del sistema $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ que pasa por el punto $(1.5, 0.7)$ es la que se muestra en la Figura 13.3. (Hay que decir, en cualquier caso, que, de nuevo, es necesario utilizar métodos numéricos para conseguir esta gráfica).

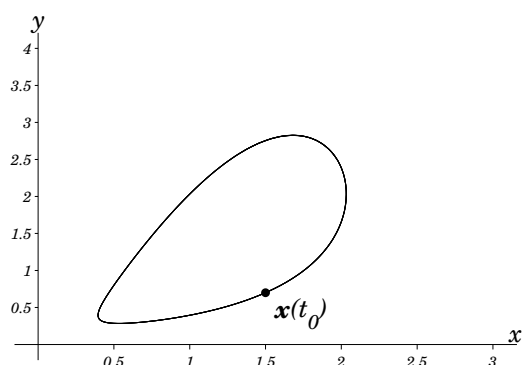


Figura 13.3: Plano fase para las ecuaciones de Gierer-Meinhardt.

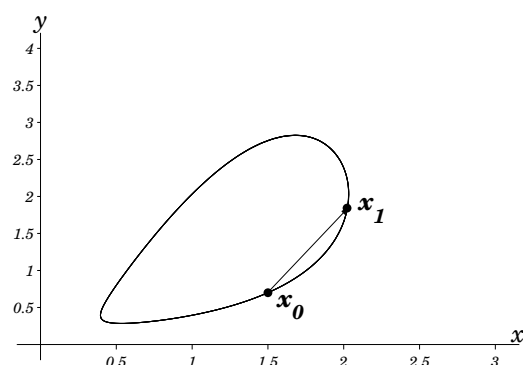


Figura 13.4: Vector secante.

La gráfica de la Figura 13.3 muestra cómo están relacionados entre sí los valores de x e y a medida que t crece. En nuestro ejemplo se trata de la relación entre las concentraciones de las dos sustancias A y B . En particular, observamos que la curva es cerrada de modo que, a medida que t crece, la trayectoria del punto (x, y) recorre una y otra vez la misma curva. Esto refuerza nuestra idea de que las soluciones del sistema son periódicas.

Hay que decir también que en ocasiones lo que se necesita no es la solución explícita del sistema en cada instante t ; es decir, las componentes de la solución, sino la relación que hay entre las variables dependientes del sistema. Es el caso del siguiente problema de cinética química:

Problema 13.1 .- Se quiere clorar benceno líquido (C_6H_6) haciendo burbujear cloro gaseoso (Cl_2) a través del benceno contenido en una caldera de reacción. Supongamos que el reactor contiene un agitador tan eficaz que todo el cloro que entra en el reactor reacciona, y solamente

escapa de la vasija el cloruro de hidrógeno (HCl) liberado. Se quiere estimar la cantidad de cloro que hay que añadir para producir el máximo rendimiento de monoclorobenceno (C_6H_5Cl).

En este problema no se pide la evolución del monoclorobenceno (C_6H_5Cl) a lo largo del tiempo sino la cantidad de cloro que hay que añadir para producir el máximo rendimiento de monoclorobenceno. Nos piden estudiar la relación entre dos variables dependientes.

En cualquier caso, el estudio de la relación entre las variables dependientes del sistema es interesante en general, porque, como veremos, puede aportar conocimiento sobre las soluciones del sistema sin conocer la solución explícita.

Volviendo ahora a la Figura 13.1 hemos dibujado las componentes de la solución correspondientes al plano de fase de la Figura 13.3. Es decir, las soluciones $x(t)$ e $y(t)$ dibujadas en las dos figuras son las mismas: en la Figura 13.1 explícitamente y en la Figura 13.3 paramétricamente. Debe observarse que la gran diferencia entre ambas gráficas es que en la Figura 13.1 tenemos la evolución de las soluciones a lo largo del tiempo: sabemos el valor de x e y en cada instante. En la Figura 13.3, sin embargo, toda referencia al tiempo ha desaparecido. Es posible construir la gráfica de la Figura 13.3 a partir de la gráfica de la Figura 13.1 pero al revés sólo lo podemos hacer aproximadamente. Algo parecido a lo que sucedía con la línea de fase. Podíamos saber aproximadamente cómo eran las gráficas de las soluciones pero no con total precisión. Pero ¿cómo reconstruir, aunque sea aproximadamente, las curvas $x = x(t)$ e $y = y(t)$ a partir de la curva paramétrica $(x(t), y(t))$? Consideremos el ejemplo de la circunferencia parametrizada.

Supongamos que sabemos que la gráfica de una curva paramétrica es la circunferencia de la Figura 13.2, pero no tenemos ninguna referencia respecto de los posibles valores de t . Para poder reconstruir las funciones componentes $x = x(t)$, $y = y(t)$ lo primero que necesitamos es la dirección de la curva; es decir, el sentido en el que t crece, y un punto inicial. Supongamos que es el del sentido de las agujas del reloj (el opuesto, por lo tanto, al que teníamos con las ecuaciones $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$) y que el punto inicial es $(1, 0)$. Para obtener la gráfica de la curva $x = x(t)$ procedemos de manera similar pero reflejando los puntos a partir de la bisectriz trazada, tal y como se muestra en la Figura 13.5

Una vez determinado la dirección de la curva, dibujamos a su derecha unos ejes coordinados en t y x, y . Y dibujamos la bisectriz del primer y tercer cuadrantes. Para obtener algunos puntos de la gráfica de las funciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ tenemos que hacer una suposición sobre la velocidad el movimiento de la partícula en la curva paramétrica a fin de establecer una escala en el eje de abscisas. Una vez hecho esto, podemos obtener unos cuantos puntos de la gráfica de $y = y(t)$, empezando por el correspondiente a $(1, 0)$ en la curva paramétrica. Para ello procedemos de la siguiente forma. Al punto $t = 0$ le corresponde la imagen del punto $(1, 0)$, en este caso $y(0) = 0$. Supondremos que al cabo de t_1 minutos la partícula se encuentra el punto (x_1, y_1) , entonces $y(t_1) = y_1$. Dibujamos el punto (t_1, y_1) sin más que unir

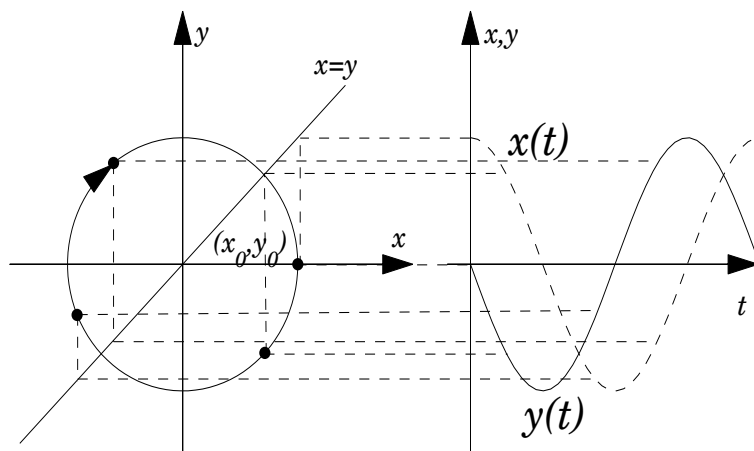


Figura 13.5:

Gráfica de la circunferencia y de las curvas componentes.

el punto (x_1, y_1) con el punto (t_1, y_1) mediante una línea horizontal. Al cabo de t_2 minutos la partícula se encuentra en (x_2, y_2) . Así obtenemos el punto (t_2, y_2) , y así sucesivamente.

Podemos observar que una y otra vez, aparecen dos objetos fundamentales: el punto donde comienza la trayectoria y su dirección. Para un problema de condiciones iniciales

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y), & x(t_0) &= x_0 \\ y' &= g(t, x, y), & y(t_0) &= y_0 \end{aligned} ,$$

el punto inicial de la trayectoria es la condición inicial (x_0, y_0) . Para descubrir la dirección de la curva en la Figura 13.3 a medida que t crece a partir de un determinado punto $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$, que puede ser el punto de la condición inicial, podemos elegir un $h > 0$ y calcular $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_0 + h)$ y mirar al vector $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0$ (ver Figura 13.4). Se trata del vector que une \mathbf{x}_0 y \mathbf{x}_1 y que llamaremos **vector secante**.

Dividiendo $\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0)$ por h y haciendo h tender a 0 tenemos que, por una parte el vector secante tiende al vector tangente (Figura 13.6), y por otra parte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (\mathbf{x}(t_0 + h) - \mathbf{x}(t_0)) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{x(t_0 + h) - x(t_0)}{h}}{\frac{y(t_0 + h) - y(t_0)}{h}} \right) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix} = \mathbf{x}'(t_0).$$

Así pues, la derivada de la curva paramétrica en un punto t_0 , $\mathbf{x}'(t_0)$, es el vector tangente a la curva en el punto $\mathbf{x}(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$. Debe observarse que no es necesario conocer la solución del sistema para calcular el vector tangente. En efecto, si el sistema que nos dan es

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y) \\ y' &= g(t, x, y) \end{aligned}$$

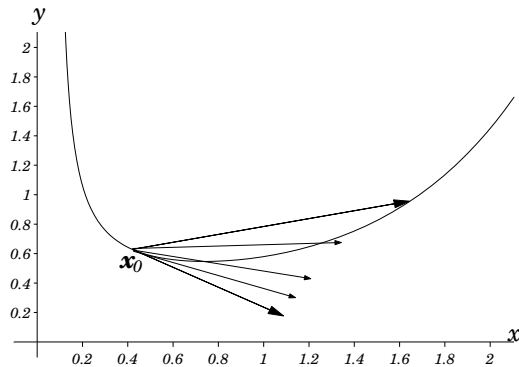


Figura 13.6: Las diferencias de los vectores dividido por h tiende al vector tangente.

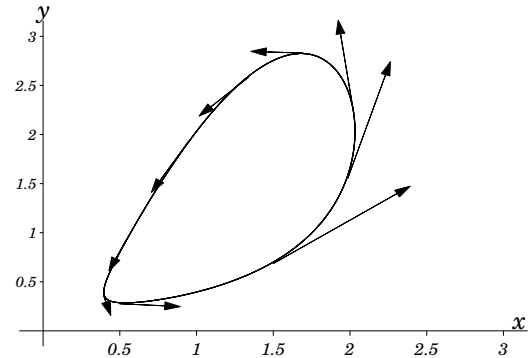


Figura 13.7: Vectores tangentes en varios puntos de la curva.

entonces $\mathbf{x}'(t_0) = (f(t_0, x_0, y_0), g(t_0, x_0, y_0))$. Es decir, la dirección de la curva paramétrica correspondiente a cada solución del sistema viene dada por las ecuaciones del propio sistema. En nuestro ejemplo de las ecuaciones de Gierer-Meinhardt tendríamos que

$$(x'(0), y'(0)) = (x(0)^2/y(0) - x(0), x(0)^2 - y(0)) = (1,5^2/0,7 - 1,5, 1,5^2 - 0,7) = (1,7143, 1,55)$$

En la Figura 13.7 se han dibujado algunos vectores tangentes, \mathbf{x}' , a la curva parametrizada correspondiente al problema de condiciones iniciales relativo a las ecuaciones de Gierer-Meinhardt

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= k_1 x^2 y^{-1} - k_2 x, & x(0) &= 1,5 \\ \frac{dy}{dt} &= k_3 x^2 - k_4 y, & y(0) &= 0,7 \end{aligned}$$

Realmente, los vectores tangentes no son en todos los casos exactamente de la longitud representada; sino de la mitad de la longitud real. Ello es debido a que la longitud del vector tangente es la del vector $\mathbf{x}' = (x', y') = (x^2 y^{-1} - x, x^2 - y)$, que puede variar mucho de unos puntos a otros. Por ello se suele tomar los vectores tangentes escalados.

El estudio que hemos hecho para curvas en el plano sirve también para curvas en espacios de cualquier dimensión. En particular, si $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$ es una curva parametrizada en \mathbb{R} , entonces $\mathbf{x}'(t)$ es el vector tangente a la curva en el punto $\mathbf{x}(t)$. Por supuesto, en dimensión superiores a 3 no tenemos la posibilidad de visualizar gráficamente la curva. E incluso para dimensión 3 la visualización de estas gráficas puede ser muy complicada.

13.2.3. El espacio de fase

En el capítulo 3 estudiamos la línea de fase para analizar el comportamiento geométrico de las soluciones de las ecuaciones autónomas de primer orden. Para sistemas de dos dimensiones

lo análogo es el **plano de fase** y para sistemas de más dimensiones el **espacio de fase**. O si se quiere la línea y plano de fase son el espacio de fase de sistemas de dimensión 1 y 2, respectivamente. Las ideas fundamentales detrás del concepto de espacio de fase ya han sido exploradas en la sección anterior. Ahora las extenderemos un poco considerando los campos vectoriales asociados a un sistema de ecuaciones diferenciales.

Para sistemas generales de dimensión 2

$$\begin{aligned}x'_1 &= f(t, x_1, x_2) \\ x'_2 &= g(t, x_1, x_2),\end{aligned}$$

si $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$ es la solución, podemos mirar a la curva paramétrica $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$ en el plano. En este caso el plano x_1x_2 es el **plano de fase** y la curva solución se conoce con el nombre de **curva solución** o **gráfica en el plano de fase**. Por añadidura, el plano de fase con algunas curvas solución se conoce con el nombre de *retrato de fase* del sistema.

Para un sistema general de dimensión n : $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ el **espacio de fase**, tal y como hemos dicho, es la generalización a n dimensiones del plano de fase. Se trata, por lo tanto, del espacio donde está definido el vector \mathbf{x} , es decir, \mathbb{R}^n .

Los espacios de fase son especialmente útiles para sistemas autónomos aunque, en ocasiones, también lo son para sistemas no autónomos. Recordemos que un sistema es autónomo si las funciones f y g no dependen explícitamente de la variable independiente t :

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y).\end{aligned}\tag{13.5}$$

Si suponemos que las funciones f y g están definidas en un rectángulo del plano xy y $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema (13.5), entonces en cada punto de la curva solución $t \rightarrow (x(t), y(t))$ el vector $(x'(t), y'(t))$ es tangente a la curva. Pero

$$(x'(t), y'(t)) = (f(x(t), y(t)), g(x(t), y(t)))$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales nos da, en cada punto (x, y) del plano, el vector tangente a la curva solución que pasa por ese punto. En otras palabras, podemos asignar a cada punto (x, y) del plano el vector $(f(x, y), g(x, y))$. Esto lo podemos visualizar pegando en cada punto (x, y) del plano un vector cuyas componentes son $(f(x, y), g(x, y))$. Obtenemos de esta forma el **campo vectorial** del sistema (13.5).

En la práctica es imposible dibujar el campo vectorial; sólo podemos dibujarlo para algunos puntos del plano (quizá muchos con ayuda de un ordenador). Es decir, para visualizar de forma aproximada el campo vectorial de un sistema, seleccionaríamos unos cuantos puntos y pegaríamos a cada uno de ellos el correspondiente vector.

Hagamos un ejemplo, a mano, con el sistema de Gierer-Meinhardt:

$$\begin{aligned}x' &= x^2/y - x \\ y' &= x^2 - y\end{aligned}$$

Tomemos unos cuantos puntos (x, y) y calculemos en cada uno de estos puntos $(f(x, y), g(x, y)) = (x^2/y - x, x^2 - y)$. Ponemos el resultado en una tabla (Tabla 13.1) y dibujamos los correspondientes vectores tangentes (Figura 13.8). Así en el punto $(1, 0.5)$ pegaríamos un vector de componentes $(1, 0.5)$, en el punto $(1.5, 1)$ pegaríamos un vector de componentes $(0.75, 1.25)$, y así sucesivamente.

(x, y)	$(x^2y^{-1} - x, x^2 - y)$
$(1.5, 2.1)$	$(-0.4524, 0.0978)$
$(1.9, 0.9)$	$(2.1829, 3.03)$
$(0.5, 0.2)$	$(0.8414, 0.0680)$
$(1, 2)$	$(-0.0746, -0.3340)$
$(0.4, 0.5)$	$(-0.3751, 1.5771)$
$(2, 2.5)$	$(-0.5042, -1.0339)$

Tabla 13.1: Algunos puntos de la curva solución con sus vectores tangentes para las ecuaciones de Gierer-Meinhardt.

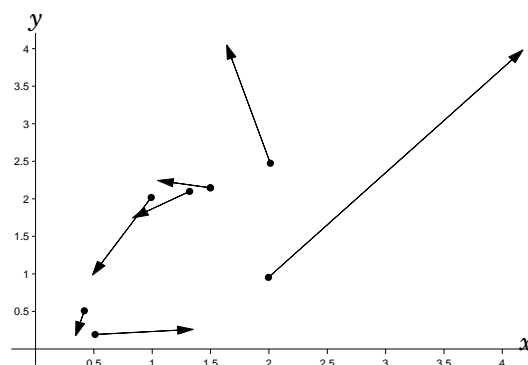


Figura 13.8:
Algunos vectores del campo vectorial del sistema de Gierer-Meinhardt

Como se puede observar en la Figura 13.8, los vectores pueden ser de muy distintas longitudes, de modo que al dibujar muchos de ellos se pueden solapar produciendo una gráfica muy confusa. Habitualmente, y con la ayuda de un ordenador (porque hacer los cálculos necesarios a mano sería costosísimo), se dibuja una gran cantidad de vectores proporcionales a su longitud real (es decir, usando una escala). Para el ejemplo que estamos considerando obtendríamos una gráfica como la de la Figura 13.9 donde se han dibujado los vectores tangentes en, aproximadamente, 400 puntos y con una longitud que es proporcional a la verdadera.

Es muy importante observar que el campo vectorial de un sistema de ecuaciones diferenciales se obtiene **directamente** de las ecuaciones del sistema. No necesitamos conocer la solución del sistema para obtenerlo. Sin embargo la gráfica de la solución en el plano fase se puede intuir a partir del campo vectorial. En efecto, si $(x(t), y(t))$ es la solución del sistema autónomo (13.5) y consideramos la curva solución en el plano fase parametrizada $t \rightarrow (x(t), y(t))$, entonces en cada punto (x, y) del plano la curva es tangente a uno de los vectores del campo vectorial asociado al sistema. Un estudio detallado de este campo vectorial puede permitir que nos hagamos una idea de la forma de la curva solución del sistema.

La Figura 13.10 muestra esta situación para las ecuaciones de Gierer-Meinhardt con la condición inicial $\mathbf{x}(0) = (1.5, 0.7)$. Por consiguiente, la curva comienza en el punto $(1.5, 0.7)$ y como los vectores del campo vectorial señalan hacia la derecha, la curva va hacia la derecha, es decir, en sentido contrario al movimiento de las agujas de un reloj. Teniendo en cuenta

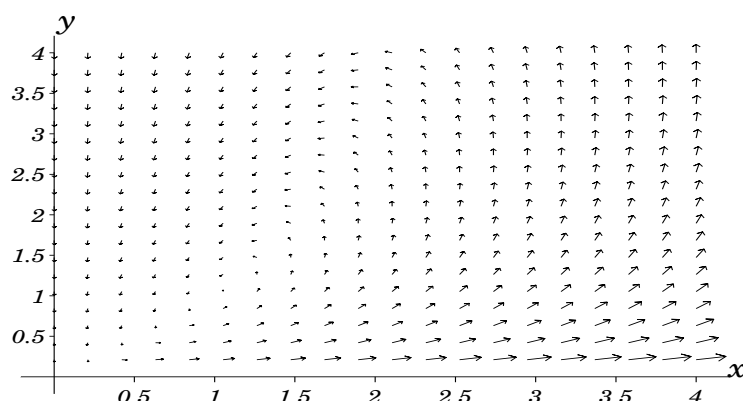


Figura 13.9:
Campo vectorial del sistema de Gierer-Meinhardt

que las ecuaciones de Gierer-Meinhardt modelizan la evolución de la concentración de dos sustancias químicas A y B ; y que $x(t)$ e $y(t)$ son las concentraciones de dichas sustancias después de t minutos, lo que indica esta curva es que al principio la concentración de ambas sustancias crece (recuérdese que estas sustancias reaccionan con otras según las reacciones químicas expuestas en (13.1)). Llega un momento, un instante de tiempo, en el que la curva empieza a girar hacia la izquierda. En ese instante el valor de $x(t)$ comienza a decrecer pero el de $y(t)$ continúa creciendo. Es decir, la concentración de A disminuye pero la de B sigue aumentando. En un instante posterior la curva vuelve a girar a la izquierda y tanto $x(t)$ como $y(t)$ decrecen. Posteriormente (por un espacio de tiempo muy pequeño, en realidad) $x(t)$ comienza a aumentar, pero $y(t)$ sigue disminuyendo. Es decir, la concentración de B empieza a decrecer y la de A a aumentar. Hasta que la curva vuelve a girar a la izquierda, que es el instante en el que, de nuevo, la concentración de ambas sustancias vuelve a crecer, llegando a alcanzar la concentración inicial. Y se sigue así indefinidamente. Esta situación confirma la sospecha de que los valores de $x(t)$ e $y(t)$ evolucionan periódicamente, tal y como se dijo cuando estudiamos las gráficas de las soluciones de forma independiente.

13.2.4. La gráfica completa

La forma de conseguir una imagen completa de las soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo de dimensión 2, es considerar todas las gráficas al mismo tiempo. Por una parte tenemos las gráficas de las soluciones: $x = x(t)$ e $y = y(t)$; y por otra parte, la gráfica de la solución en el plano de fase. Podemos mirar cada una de estas gráficas como las proyecciones sobre los planos coordenados de la gráfica de la curva solución completa del sistema: la curva paramétrica en \mathbb{R}^3 $t \rightarrow (t, x(t), y(t))$.

Para el ejemplo del sistema de Gierer-Meinhardt que venimos considerando obtendríamos

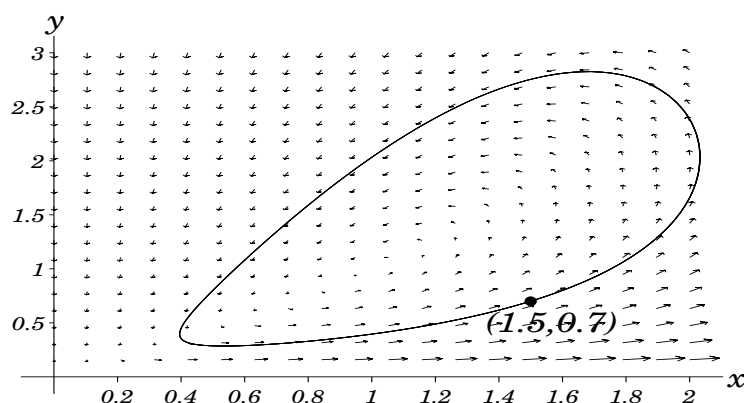


Figura 13.10:

El plano de fase para las ecuaciones de Gierer-Meinhardt y la curva solución que pasa por el punto $(1.5, 0.7)$.

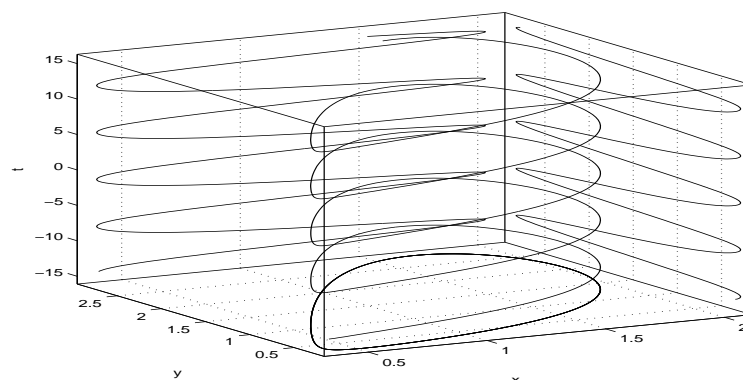


Figura 13.11:

La gráfica compuesta de las ecuaciones de Gierer-Meinhardt y sus proyecciones sobre los planos coordinados.

una gráfica como la que se muestra en la Figura 13.11

Sin embargo, el dibujo de estas figuras tridimensionales requiere considerable habilidad; y su interpretación una mayor habilidad de visualización. Por eso, en general, evitaremos las gráficas que requieren el uso de las tres variables al mismo tiempo.

13.3. Análisis Cualitativo

Puesto que los sistemas de ecuaciones diferenciales raramente se pueden resolver explícitamente, los métodos cualitativos y numéricos adquieren una gran importancia. En esta sección estudiaremos los teoremas de existencia y unicidad y los puntos y soluciones de equilibrio. El estudio y clasificación de estos puntos es un asunto muy importante que se basa en el estudio analítico de los sistemas lineales de coeficientes constantes. Desafortunadamente, por limitaciones de tiempo, no podemos realizar el análisis cualitativo de estos sistemas que nos conduciría al estudio de las soluciones de cualquier sistema en las proximidades de los puntos de equilibrio (linealización). Por lo tanto, esta sección debe entenderse como una mera introducción a los elementos básicos que forman parte del análisis cualitativo. La última sección de este capítulo se dedicará al método de Euler para sistemas.

13.3.1. Existencia y unicidad

Los teoremas de existencia y unicidad para sistemas de primer orden son extensiones de los ya estudiados para ecuaciones. Consideremos el sistema de dimensión n :

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad (13.6)$$

Los valores de la función vectorial $\mathbf{x}(t)$ son vectores de \mathbb{R}^n . Supondremos que la función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ está definida para t en un intervalo $I = (a, b)$ de la recta real y para \mathbf{x} en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$. Sea

$$R = I \times U = \{(t, \mathbf{x}) | a < t < b \text{ y } \mathbf{x} \in U\}.$$

Con esta notación podemos enunciar el teorema de existencia y unicidad. En realidad se trata, como en el caso de las ecuaciones diferenciales, de dos teoremas independientes pero que reunimos en uno solo:

Teorema 13.1 *Si la función $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ está definida y es continua en R , y las primeras derivadas parciales son también continuas en R , entonces dado cualquier punto $(t_0, \mathbf{x}_0) \in R$, el problema de condiciones iniciales*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

tiene una única solución definida en un intervalo que contiene a t_0 . Además, la solución está definida, por lo menos, hasta que la curva $t \rightarrow (t, \mathbf{x}(t))$ deje la región R .

Como se ve, el teorema es una extensión a varias dimensiones de lo que ya teníamos para una sola dimensión. La gran diferencia es que en esta ocasión las funciones son vectoriales y no

escalares. La visualización de su significado geométrico es más difícil debido a la dimensión. Podemos, sin embargo decir que, intuitivamente, la parte del teorema relativa a la unicidad asegura que dos soluciones diferentes del sistema no pueden nunca cortarse porque si no por el punto de corte pasarían dos soluciones diferentes. No obstante, ahora y al contrario con lo que pasa en dimensión 2, una curva no divide al espacio en dos partes. De modo que en un espacio de dimensión 3 o más, dos curvas pueden no cortarse pero sí cruzarse en puntos muy próximos. Podría darse el caso incluso, que una de ellas podría entrelazarse con la otra.

13.3.2. Unicidad en el espacio de fase

Para sistemas autónomos y al considerar las soluciones en el espacio de fase tenemos una interesante implicación del teorema de unicidad. Consideremos el sistema autónomo $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ donde la función vectorial $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ es continua con derivadas parciales continuas, de forma que se puede aplicar el teorema de unicidad. Supongamos, además, que tenemos dos soluciones del sistema, $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$. Entonces $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ y $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t))$. Supongamos que estas dos soluciones se cortan en algún punto del espacio de fase. Esto significa que existen instantes de tiempo (quizá diferentes para \mathbf{x} y \mathbf{y}) t_1, t_2 tales que

$$\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{y}(t_2) = \mathbf{x}_1.$$

Consideremos la función

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t - t_1 + t_2).$$

Tenemos que

$$\mathbf{z}'(t) = \mathbf{y}'(t - t_1 + t_2) = \mathbf{f}(\mathbf{y}(t - t_1 + t_2)) = \mathbf{f}(\mathbf{z}(t)),$$

de modo que $\mathbf{z}(t)$ es también solución de la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Además

$$\mathbf{z}(t_1) = \mathbf{y}(t_2) = \mathbf{x}(t_1).$$

Por lo tanto $\mathbf{z}(t)$ y $\mathbf{x}(t)$ son dos soluciones del problema de condiciones iniciales

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1.$$

El teorema de unicidad nos asegura que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t)$ para todo t . Por lo tanto

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) = \mathbf{y}(t - t_1 + t_2)$$

para todo t . Esto significa que las curvas solución (es decir, las curvas parametrizadas en el espacio de fase $t \rightarrow \mathbf{x}(t)$, $t \rightarrow \mathbf{y}(t)$) coinciden como conjuntos de puntos. Esto es, la partícula recorre la misma trayectoria pero quizá en instantes diferentes. Así que tenemos la siguiente consecuencia del teorema de unicidad

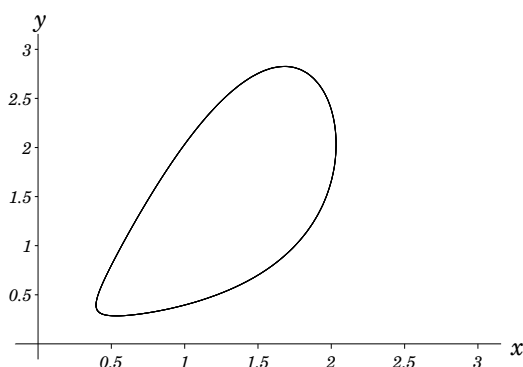


Figura 13.12:
Una solución en el espacio de fase para
las ecuaciones de Gierer-Meinhardt.

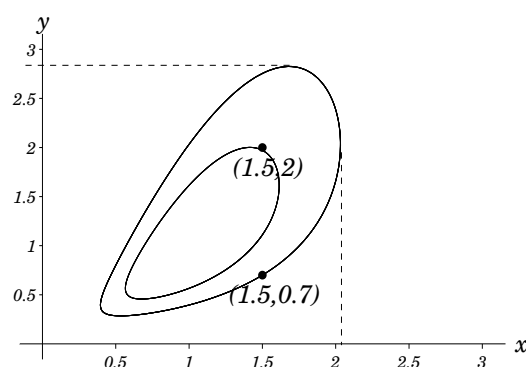


Figura 13.13: La solución del sistema
de Gierer-Meinhardt para la condición
inicial $x(0) = 1.5$, $y(0) = 0.7$.

Dos curvas solución en el espacio de fase para un sistema autónomo no pueden coincidir en ningún punto salvo que ambas curvas coincidan.

Este hecho es especialmente importante en dimensión 2. En este caso, las curvas solución están en el plano de fase y las curvas dividen al plano en dos trozos (Figura 13.12). De este modo, cada solución proporciona bastante información sobre las demás (algo similar a lo que sucedía para sistemas de una sola ecuación).

Ejemplo 13.2 La gráfica de la solución del sistema de Gierer-Meinhardt para unas concentraciones iniciales de los compuestos A y B de 1.5 moles/cm³ y 0.7 moles/cm³, respectivamente, está dada en la Figura 13.12. Si se comienza las reacciones con unas concentraciones iniciales de 1.5 y 2 moles/cm³, respectivamente, para cada sustancia, ¿puede alguna de las sustancias, en algún momento, llegar a alcanzar una concentración de 3 moles/cm³?

El punto $(x(0), y(0)) = (1.5, 2)$ está en el interior de la curva cerrada que describe la solución del sistema de Gierer-Meinhardt que pasa por el punto $(1.5, 0.7)$. En consecuencia, las soluciones que pasan por los puntos $(1.5, 0.7)$ y $(1.5, 2)$ son distintas. Entonces, por el teorema de unicidad, la curva solución que pasan por $(1.5, 2)$ debe estar siempre en el interior de la curva solución que pasa por $(1.5, 0.7)$ (Figura 13.13). Como las rectas $y = 3$ y $x = 3$ están en el exterior de esta curva, nunca puede suceder que la curva solución del problema con condición inicial $(x_0, y_0) = (1.5, 2)$ pase por ningún punto cuya primera o segunda coordenada sea igual a 3 . En otras palabras, si $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ es la solución del problema de condiciones

iniciales

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= k_1 x^2 y^{-1} - k_2 x, & x(0) &= 1,5 \\ \frac{dy}{dt} &= k_3 x^2 - k_4 y, & y(0) &= 0,7\end{aligned}$$

entonces $x(t) < 3$ y $y(t) < 3$ para todo t .

13.3.3. Puntos y soluciones de equilibrio

La existencia de puntos y soluciones de equilibrio no es exclusivo de los sistemas de dimensión 1; es decir, de las ecuaciones diferenciales. También en los sistemas de ecuaciones podemos encontrar tales objetos. Recordemos que para una ecuación de la forma $x' = x(4-x)$ los puntos de equilibrio son $x = 0$ y $x = 4$ y que las funciones constantes $x(t) = 0$ y $x(t) = 4$ son soluciones de la ecuación que llamamos soluciones de equilibrio. Estos puntos y soluciones se encuentran sin más que hacer cero la parte de la derecha de la ecuación diferencial y resolver, respecto a x , las soluciones de la ecuación algebraica resultante. En otras palabras, para la ecuación general $x' = f(t, x)$ buscamos las soluciones constantes x para las que $f(t, x) = 0$.

Para los sistemas la situación es muy parecida. Consideremos el sistema de Gierer-Meinhardt

$$\begin{aligned}x' &= \frac{x^2}{y} - x \\ y' &= x^2 - y\end{aligned}\tag{13.7}$$

de modo que si $\mathbf{x} = (x, y)$ entonces $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (x^2/y - x, x^2 - y)$. Los puntos de equilibrio de este sistema son las soluciones constantes (x, y) del sistema de ecuaciones algebraicas $\mathbf{f}(\mathbf{x}, y) = (0, 0)$. Es decir,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{y} - x &= 0 \\ x^2 - y &= 0\end{aligned}\tag{13.8}$$

Resolver un sistema de ecuaciones algebraicas no lineal puede tener sus complicaciones. Un procedimiento más o menos general podría ser el siguiente. En primer lugar observamos que este sistema no está definido para $y = 0$. A continuación buscamos todas las posibles soluciones (no necesariamente constantes) de la primera ecuación

$$\frac{x^2}{y} - x = 0 \Leftrightarrow x^2 - xy = 0 \Leftrightarrow x(x - y) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ y } x = y$$

Las curvas (en este caso rectas) $x = 0$ y $x = y$ se llaman **nullclinas** respecto a x .

De forma similar se obtienen las **nullclinas** respecto a y :

$$x^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = x^2.$$

En general, dado un sistema de ecuaciones diferenciales de dimensión n

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

un vector \mathbf{x}_0 es un **punto de equilibrio** si es una solución constante del sistema de ecuaciones algebraicas (no lineal, en general) $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = 0$; es decir, si $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0) = 0$. Y si $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ es un punto de equilibrio, entonces la función vectorial $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ (o si se quiere escribir en función de sus componentes $x_1(t) = x_1^0, x_2(t) = x_2^0, \dots, x_n(t) = x_n^0$) es una solución del sistema y se dice que es una **solución de equilibrio**.

Las nullclinas respecto a x y respecto a y para el sistema (13.7) están dibujadas en la Figura 13.14 (junto a otros datos que analizamos enseguida). Los puntos de intersección de estas líneas son aquellos en los que ambas ecuaciones se hacen simultáneamente cero. Es decir, son los puntos de equilibrio de las soluciones del sistema (13.8). Pero como en $y = 0$ la primera ecuación no está definida, el único punto de equilibrio del sistema (13.7) es $(1, 1)$. A esta conclusión también se llega analíticamente: En la primera ecuación hay dos posibles valores para x : $x = 0$ y $x = y$. Si $x = 0$ entonces, como debe ser $y = x^2$, tenemos que $y = 0$. Esto es imposible porque en $y = 0$ no está definida la primera ecuación. Si $x = y$ entonces, como $y = x^2$, tenemos que $y = y^2$. Es decir, $y(y - 1) = 0$, lo que implica que $y = 0$ o $y = 1$. Como $y = 0$ no es posible, el único valor admisible es $y = 1$. Como $x = y$ concluimos que $x = 1$. Así pues, los únicos valores que solucionan el sistema (13.8) son $x = 1, y = 1$.

Observamos ahora las funciones constantes $x(t) = 1, y(t) = 1$ son soluciones del sistema (13.7). En efecto $x'(t) = 0$ y $x(t)^2/y(t) - x(t) = 1/1 - 1 = 0$. También $y'(t) = 0$ y $x(t)^2 - y(t) = 1^2 - 1 = 0$. A estas soluciones constantes asociadas a los puntos de equilibrio se les llama **soluciones de equilibrio** del sistema (13.7).

Debe observarse también el importante papel de la nullclinas. Por definición, las nullclinas respecto a x son los puntos (x, y) del plano en los que $x' = 0$. Esto quiere decir que en el resto de los puntos del plano o bien $x' > 0$ o bien $x' < 0$. De esta forma sabemos con exactitud en qué puntos del plano crece la solución $x = x(t)$ y en qué puntos decrece. Así, en la Figura 13.14 se han dibujado las nullclinas en el primer cuadrante ($x > 0, y > 0$). Como $x' = x(x - y)/y$ tenemos que $x' > 0$ si $x - y > 0$ o equivalentemente si $x > y$. Es decir, para los puntos que están por debajo de la diagonal.

Lo mismo sucede con las nullclinas respecto a y . Como $y' = x^2 - y$ tenemos que $y' > 0$ si y sólo si $y < x^2$. Esto significa que $y' > 0$ para los puntos que están “por debajo” de la parábola $y = x^2$, e $y' < 0$ para los que están por encima.

Toda esta información permite hacernos una idea de cómo es la gráfica de las soluciones en el plano de fase (Figura 13.14). Esta idea es sólo aproximada; no sabemos, por ejemplo, si la trayectoria es o no cerrada. De hecho, sabemos que es cerrada porque ya hemos estudiado su campo vectorial y las trayectorias realizadas por ordenador en secciones anteriores (en la Figura 13.15 se presentan las nullclinas y varias soluciones). Pero ligeras modificaciones de

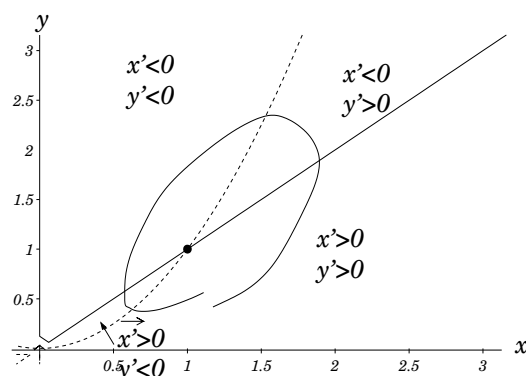


Figura 13.14:

Nullclinas, puntos de equilibrio y una solución “a mano” para las ecuaciones de Gierer-Meinhardt.

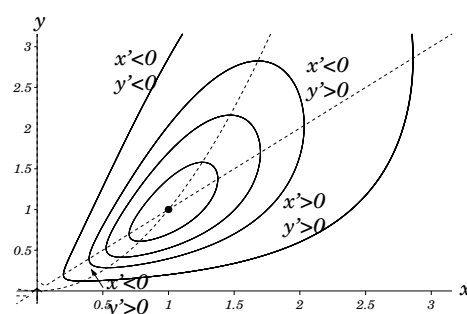


Figura 13.15:

Nullclinas, puntos de equilibrio y algunas soluciones por ordenador para las ecuaciones de Gierer-Meinhardt.

los coeficientes del sistema producen gráficas que pueden parecer sorprendentes. Así para los sistemas

$$\begin{aligned} x' &= x^2/y - x & y' &= 2x^2/y - 2x \\ y' &= 2x^2 - 2y & x' &= x^2 - y \end{aligned}$$

obtenemos las mismas nullclinas y los mismos puntos de equilibrio que para el sistema (13.7), pero las gráficas de las funciones son completamente diferentes (Figuras 13.16 y 13.17). En el primer caso son cerradas y el punto de equilibrio actúa como si fuera el centro alrededor del cual giran las demás soluciones del sistema. En el segundo caso el punto de equilibrio actúa como una especie de sumidero al que van cayendo todas las soluciones. Y en el tercer caso como si fuera una fuente del que brotan las soluciones. Las flechas de las figuras se han puesto para indicar la dirección de la trayectoria, que viene determinada por los signos de las derivadas; y que en consecuencia es el mismo en los tres casos, en cada región significativa. Todo ello parece indicar, como así es, que los puntos de equilibrio son de naturaleza diferente para cada caso. En efecto, la clasificación de los puntos de equilibrio para sistemas siguen los mismos criterios que para las ecuaciones: se clasifican de acuerdo con el comportamiento de las soluciones del sistema con condiciones iniciales próximas a dicho punto de equilibrio. Sin embargo los tipos de puntos de equilibrio en el caso de sistemas son más variados. El estudio de los mismos es una cuestión muy importante e interesante en el estudio de los sistemas no lineales. Desafortunadamente requiere bastante más tiempo del que disponemos en esta signatura. Nos conformaremos con saber que existen, que son importantes y cómo calcularlos.

Para concluir esta sección consideraremos otro ejemplo.

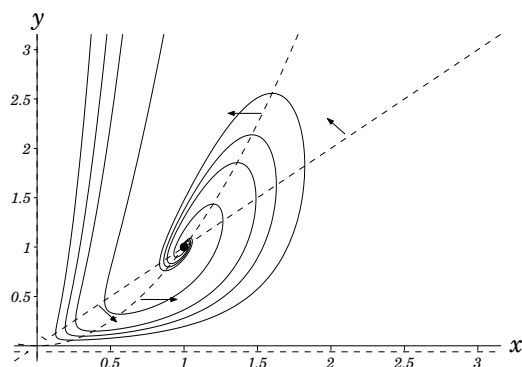


Figura 13.16:
Nullclinas y soluciones del sistema

$$\begin{aligned}x' &= x^2/y - x \\y' &= 2x^2 - 2y\end{aligned}$$

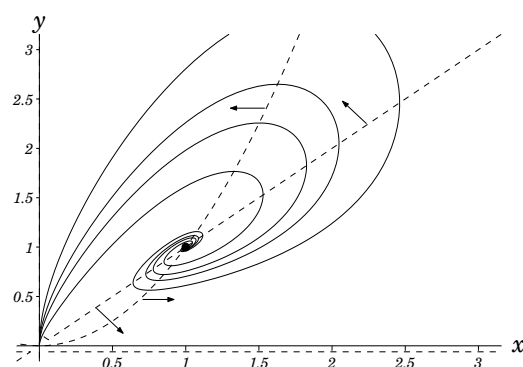


Figura 13.17:
Nullclinas y soluciones del sistema

$$\begin{aligned}x' &= 2x^2/y - 2x \\y' &= x^2 - y\end{aligned}$$

Ejemplo 13.3

$$\begin{aligned}x' &= (1 - x - y)x \\y' &= (4 - 2x - 7y)y\end{aligned} \tag{13.9}$$

La nullclinas respecto a x son $x = 0$ y $x + y = 1$. Y las nullclinas respecto a y son $y = 0$ y $2x + 7y = 4$. Resolviendo todos los sistemas posibles:

$$\begin{array}{llll}x = 0 & x = 0 & x + y = 1 & x + y = 1 \\y = 0 & 2x + 7y = 4 & y = 0 & 2x + 7y = 4\end{array}$$

obtenemos los puntos puntos de equilibrio: $(0, 0)$, $(0, 4/7)$, $(1, 0)$ y $(3/5, 2/5)$.

En la Figura 13.18 se presentan las nullclinas y los puntos de equilibrio del sistema (13.9), así como las gráficas, hechas a mano, de las soluciones en el plano de fase que pasan por los puntos $(0.2, 0.2)$, $(0.2, 0.7)$ y $(1.5, 1)$. ¿Por qué se piensa que las gráficas son como se muestra?. Pensemos en la solución que pasa por el punto $(1.5, 1)$. En esta región las derivadas de x y de y son negativas. Por lo tanto la curva debe ir hacia abajo y hacia atrás. Además lo debe hacer con una pendiente tanto más pronunciada cuanto más lejos esté de las rectas $2x + 7y = 4$ y $x + y = 1$ que es donde $y' = 0$ y $x' = 0$, respectivamente. Por eso debe caer sobre la recta $2x + 7y = 4$ con bastante rapidez. A medida que se acerca a esta recta el valor de y' debe hacerse cada vez menor; hasta que toca la recta $2x + 7y = 4$. En ese punto la curva debe ser horizontal porque $y' = 0$. A partir de ese punto $y' > 0$; así que la curva comienza a subir, pero sigue yendo hacia atrás porque $x' < 0$. Por lo tanto esta curva nunca llegará a tocar la recta $x + y = 1$ y seguirá yendo hacia atrás siempre. No parece lógico que la curva suba hasta volver a pasar la recta $2x + 7y = 4$ porque si no estaría subiendo y bajando

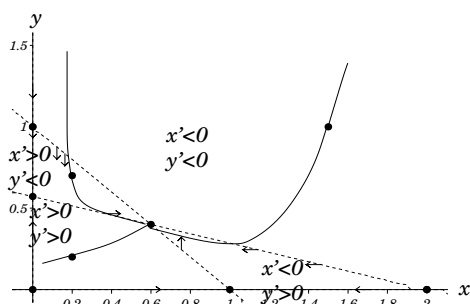


Figura 13.18:
Campo vectorial, nullclinas y soluciones
“a mano” del sistema

$$\begin{aligned}x' &= (1 - x - y)x \\ y' &= (4 - 2x - 7y)y\end{aligned}$$

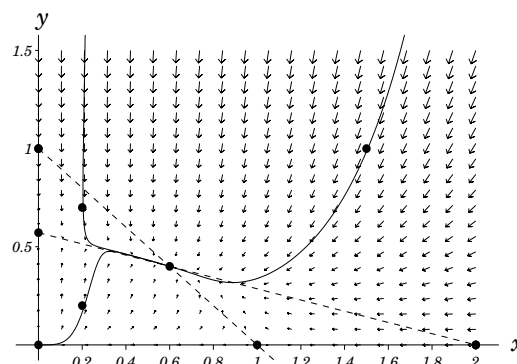


Figura 13.19:
Campo vectorial, nullclinas y soluciones
por ordenador del sistema

$$\begin{aligned}x' &= (1 - x - y)x \\ y' &= (4 - 2x - 7y)y\end{aligned}$$

sin sentido. Lo que parece ser más plausible es que la curva se aproxime indefinidamente al punto de equilibrio $(3/5, 2/5)$. Esto, lo que significa es que las soluciones $x = x(t)$ e $y = y(t)$ son asintóticas a las soluciones de equilibrio $x(t) = 3/5$ e $y(t) = 2/5$, respectivamente.

Un análisis similar se puede hacer para las gráficas de la solución que pasa por el punto $(0.2, 0.7)$. En este punto $x' > 0$ e $y' < 0$. Así pues, la dirección de la trayectoria es hacia la derecha y hacia abajo. En la región contigua también $x' > 0$ por lo que la curva siempre irá hacia la derecha. Pero si atravesara la recta $2x + 7y = 4$ entonces $y' > 0$ y la curva debería subir, para inmediatamente después volver a bajar y así sucesivamente. Parece más plausible que la curva no abandone la región original y se dirija asintóticamente a la recta $2x + 7y = 4$ hacia el punto de equilibrio $(3/5, 2/5)$. Tenemos una situación similar a la del caso anterior. Es interesante analizar la “procedencia” de esta curva. A la izquierda del punto inicial $(0.2, 0.7)$, como la dirección es hacia abajo y a la derecha, debe venir de más arriba y más a la izquierda. Esta curva, procede de la región contigua superior, donde $x' < 0$ e $y' < 0$. Al atravesar la recta $x + y = 1$, $x' = 0$, por lo que el vector tangente a la trayectoria en ese punto debe ser perpendicular al eje x ; es decir vertical.

El análisis de la trayectoria que sigue la solución que pasa por $(0.2, 0.2)$ es similar.

En la Figura 13.19 se muestran los puntos de equilibrio junto al campo vectorial y las soluciones que pasan por los puntos $(0.2, 0.2)$, $(0.2, 0.7)$ y $(1.5, 1)$ en el plano de fase obtenidas con ordenador. Nuestra suposición sobre las curvas solución que pasan por $(0.2, 0.7)$ y $(1.5, 1)$ era bastante acertada. La diferencia que se aprecia entre la gráfica hecha a mano y con el ordenador para la curva que pasa por $(0.2, 0.2)$ es achacable a que no hemos hecho un análisis

muy detallado del vector tangente a la curva en $(0.2, 0.2)$. Si lo hubiéramos hecho, habríamos observado que el vector tangente es $(0.12, 0.44)$. Es decir, la componente vertical es casi 4 veces la horizontal. Esto indica que la trayectoria es bastante vertical y consecuentemente no se dirige directamente al punto de equilibrio sino hacia la recta $2x + 7y = 4$. Como no es plausible que la atraviese por los motivos ya explicados, debe dirigirse desde allí, asintóticamente a esta recta, hacia el punto de equilibrio. Esto es lo que muestra la Figura 13.19.

Observaciones 13.4 Para terminar dos observaciones importantes.

La primera ya se ha dicho varias veces, pero nunca se dirá las suficientes. Todo el análisis cualitativo realizado en esta sección debe entenderse que se ha hecho de forma intuitiva.

Un análisis riguroso de los puntos de equilibrio y el comportamiento de las soluciones en las proximidades de los mismos sólo puede hacerse después de entender la naturaleza de los puntos de equilibrio de los sistemas de dimensión 2 lineales y de coeficientes constantes. Y una vez hecho esto, utilizando una técnica estándar de linealización de los sistemas no lineales en la proximidades de los puntos de equilibrio.

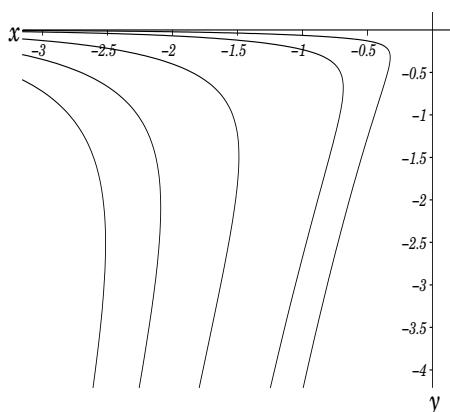


Figura 13.20:

Gráficas de algunas soluciones de las ecuaciones de Gierer-Meinhardt en el tercer cuadrante.

La segunda es que todo el análisis que hemos realizado es, en cierta forma local. En efecto, no hemos estudiado la forma de las soluciones en todo el plano sino cerca -aunque no siempre muy cerca- de los puntos de equilibrio. Por ejemplo, para los sistema de Gierer-Meinhardt sólo hemos estudiado soluciones en el primer cuadrante. Teniendo en cuenta que estas ecuaciones modelizan la evolución de las concentraciones de unas sustancias químicas en cierto tipo de reacciones, las concentraciones

siempre serán positivas; y por lo tanto las soluciones que interesan son las del primer cuadrante. Sin embargo, como sistema de ecuaciones también puede haber soluciones en otros lugares del plano tal y como se muestra en la Figura 13.20

13.4. Método de Euler para sistemas

Los métodos numéricos para ecuaciones se pueden aplicar a sistemas sin más que utilizar notación vectorial. Veremos aquí cómo se hace con el método de Euler pero para los demás

métodos de paso fijo se haría de la misma forma.

Recordemos que dado el problema de condición inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

el método de Euler consistía en aplicar un algoritmo para calcular de manera aproximada el valor de la solución en un intervalo pequeño con comienzo en t_0 mediante un tamaño de paso. El algoritmo consistía en lo siguiente: dado el intervalo $[a, b]$ con $a = t_0$ y el tamaño de paso h calculamos el número de pasos $N = \frac{b-a}{h}$. Entonces, recursivamente, se calcula para $k = 1, \dots, N$

$$x_k = x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1})h.$$

El valor de x_N se toma como valor de la solución del problema en el instante $t = b$.

Para sistemas el procedimiento es el mismo. Supongamos que queremos saber el valor en un instante $t = t_f$ de las funciones componentes de la solución del problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (13.10)$$

Para la i -ésima componente, $x_i(t)$, del vector solución tenemos que

$$\frac{dx_i}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_i(t+h) - x_i(t)}{h},$$

de modo que podemos aproximar (recordemos que la i -ésima componente de $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ es $x'_i = f_i(t, \mathbf{x})$, siendo f_i la i -ésima componente de la función vectorial \mathbf{f})

$$x_i(t+h) \approx x_i(t) + h \frac{dx_i}{dt} = x_i(t) + hf_i(t, \mathbf{x}(t)),$$

Juntando todas las componentes tenemos

$$\mathbf{x}(t+h) \approx \mathbf{x}(t) + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)).$$

El método de Euler consiste en implementar algorítmicamente esta aproximación. Así, dado el intervalo $[t_0, t_f]$ y el tamaño de paso, h , calculamos $N = \frac{t_f - t_0}{h}$ y ponemos $t_k = t_{k-1} + h$. El método de Euler consiste en tomar

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{f}(t_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1})h$$

como valor del vector solución \mathbf{x} en $t = t_k$. De esta forma el método de Euler para sistemas es exactamente igual que para ecuaciones pero sustituyendo las variables y funciones escalares por las vectoriales:

k	t_k	(x_k, y_k)	$f(t_k, x_k, y_k)$
0	0	(1.5, 0.7)	(1.7143, 1.5500)
1	0.2	(1.8429, 1.01)	(1.5196, 2.3861)
2	0.4	(2.1468, 1.4872)	(0.9521, 3.1215)
3	0.6	(2.3372, 2.1115)	(0.2498, 3.3510)
4	0.8	(2.3872, 2.7817)	(-0.3386, 2.9168)
5	1	(2.3194, 3.3651)	

Tabla 13.2: Método de Euler para el problema $\begin{cases} x' = \frac{x^2}{y} - x & x(0) = 1,5 \\ y' = x^2 - y & y(0) = 0,7 \end{cases}$ con $h = 0,2$

Método de Euler para el problema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$

Dado el intervalo de integración (a, b) y el número de pasos N , calcúlese el tamaño de paso $h = \frac{b-a}{N}$. Entonces, sucesivamente para $k = 1, \dots, N$:

- 1.- Calcúlese $\mathbf{f}(t_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1})$. (Nótese que para $k = 1$, $(t_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1}) = (t_0, \mathbf{x}_0)$ son valores conocidos).
- 2.- Calcúlese $t_k = t_{k-1} + h = t_0 + kh$.
- 3.- Calcúlese $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{f}(t_{k-1}, \mathbf{x}_{k-1})h$

Un ejemplo puede ser ilustrativo.

Ejemplo 13.5 .- Dado el problema de condiciones iniciales

$$\begin{cases} x' = \frac{x^2}{y} - x & x(0) = 1,5 \\ y' = x^2 - y & y(0) = 0,7 \end{cases}$$

calcular con un tamaño de paso de 0.2 el valor de la solución en $t = 1$.

En este ejemplo $h = 0,2$, $N = (1-0)/0,2 = 5$, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{x^2}{y} - x \\ x^2 - y \end{pmatrix}$ y $\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,7 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= \mathbf{x}_0 + \mathbf{f}(t_0, \mathbf{x}_0)h = \\ &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5^2/0,7 - 1,5 \\ 1,5^2 - 0,7 \end{pmatrix} 0,2 = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,7143 \\ 1,5500 \end{pmatrix} 0,2 = \begin{pmatrix} 1,8429 \\ 1,0100 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

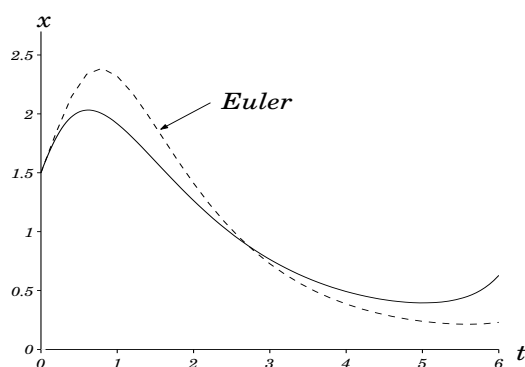


Figura 13.21: Gráficas de las componentes x de las soluciones verdaderas y calculada por el método de Euler

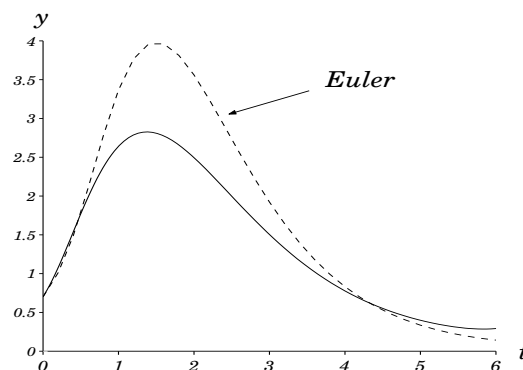


Figura 13.22: Gráficas de las componentes y de las soluciones verdaderas y calculadas por el método de Euler

Entonces (recordemos $t_1 = t_0 + h$):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_2 &= \mathbf{x}_1 + \mathbf{f}(t_1, \mathbf{x}_1)h = \\
 &= \begin{pmatrix} 1,8429 \\ 1,0100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,8429^2/1,01 - 1,8429 \\ 1,8429^2 - 1,01 \end{pmatrix} 0,2 = \\
 &= \begin{pmatrix} 1,8429 \\ 1,0100 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,5196 \\ 2,3861 \end{pmatrix} 0,2 = \begin{pmatrix} 2,1468 \\ 1,4872 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Y así sucesivamente. Los resultados de aplicar el algoritmo se presentan en la Tabla 13.2. Las gráficas de las soluciones que se obtendrían si aplicáramos el método de Euler con tamaño de paso 0,2 en el intervalo $[0, 6]$ se exponen en las Figuras 13.21 y 13.22.