

## Tema 6

# Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

### 6.1 Introducción

Introduciremos en este tema los sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, en particular los de primer orden. Por simplicidad nos referiremos a sistemas de dos ecuaciones, si bien las definiciones generales (para cualquier número de ecuaciones) son esencialmente análogas.

### 6.2 Conceptos Básicos

A diferencia de las ecuaciones diferenciales estudiadas en los temas anteriores, consideremos ahora la situación en la que disponemos de una variable independiente  $t$  y dos o más variables dependientes:  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $\dots$ . En el caso de simplemente dos variables dependientes, y denotando  $x' = \frac{dx}{dt}$ ,  $y' = \frac{dy}{dt}$ , un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden será un sistema de la forma:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= f(x, y, t) \\ y'(t) &= g(x, y, t) \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

En este sistema (6.1) aparecen despejadas las derivadas primeras, cada una de ellas en una ecuación, denominaremos a esta situación como forma normal de escribir el sistema (a semejanza de la forma normal para simplemente una ecuación).

Para el caso general, con ecuaciones de orden superior al primero, tendremos que un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias es toda pareja de ecuaciones de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(m)}(t), y(t), y'(t), \dots, y^{(n)}(t)) &= 0 \\ \Phi_2(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(p)}(t), y(t), y'(t), \dots, y^{(r)}(t)) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Nos referiremos en estas notas a sistemas de dos únicas ecuaciones diferenciales, si bien casi todo lo explicado es generalizable fácilmente al caso de  $n$  ecuaciones.

Una solución de dicho sistema es toda pareja de funciones  $(x(t), y(t))$  que sustituidas en el sistema lo convierten en dos identidades. Si nos restringimos a sistemas de primer orden tendremos en general:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(t, x(t), x'(t), y(t), y'(t)) &= 0 \\ \Phi_2(t, x(t), x'(t), y(t), y'(t)) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Es importante precisar que restringirnos a ecuaciones de primer orden no significa pérdida de generalidad, pues todo sistema de ecuaciones de orden superior al primero es equivalente a un sistema de primer orden si se introducen variables auxiliares. Este hecho puede comprobarse en el Ejemplo 3.

**Ejemplo 1:** El sistema:

$$\left. \begin{aligned} x' &= 2x^3y + e^ty \\ y' &= t^3x \end{aligned} \right\}$$

es un sistema de ecuaciones de primer orden escrito en forma normal.

**Ejemplo 2:** El sistema

$$\left. \begin{aligned} xy' + x'^2y &= t^3 \\ y' + x' \cos t &= x^3 \end{aligned} \right\}$$

no está escrito en forma normal.

**Ejemplo 3:** El sistema de ecuaciones de segundo orden:

$$\left. \begin{aligned} x'' &= 2x + 3y \\ y'' &= 6x^2 + y' + 3t^2x' \end{aligned} \right\}$$

es equivalente al sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\left. \begin{aligned} x' &= z \\ y' &= p \\ z' &= 2x + 3y \\ p' &= 6x^2 + p + 3t^2z \end{aligned} \right\}$$

donde  $z$  y  $p$  son dos nuevas variables dependientes:  $z = x'$ ,  $p = y'$ .

La solución general de un sistema de dos ecuaciones depende de dos constantes arbitrarias, es decir, serán dos funciones de la forma:  $x = x(t, C_1, C_2)$  e  $y = y(t, C_1, C_2)$ .

Un problema de valor inicial o problema de Cauchy será ahora un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= f(x, y, t) \\ y'(t) &= g(x, y, t) \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} x(t_0) &= x_0 \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Y el teorema de Picard se generaliza fácilmente bajo las condiciones habituales de “buen comportamiento” para las funciones  $g$  y  $h$  en un entorno del punto  $(t_0, x_0, y_0)$ , garantizándose la existencia y unicidad de la solución del problema:

**Teorema de Picard:** Dado el problema de valor inicial (6.2), si las funciones  $f(x, y, t)$  y  $g(x, y, t)$  son de clase  $C^1$  en un entorno del punto  $(x_0, y_0, t_0)$ , entonces el P.V.I tiene solución y además es única en dicho entorno.<sup>1</sup>

**Sistemas acoplados y no acoplados.** Un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden está desacoplado si es de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, t) \\ \frac{dy}{dt} &= g(y, t) \end{aligned} \right\}$$

Evidentemente un sistema desacoplado es más bien un conjunto de dos ecuaciones “independientes” y su resolución se reduce a la de ambas ecuaciones por separado.

---

**Ejemplo :** Consideremos el sistema desacoplado:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2\frac{t}{x} \\ \frac{dy}{dt} &= y \end{aligned} \right\}$$

La primera ecuación nos proporciona  $\frac{1}{2}x^2(t) = t^2 + C_1 \Rightarrow x(t) = \pm\sqrt{2t^2 + 2C_1}$ , mientras que la segunda tiene como solución general  $y(t) = C_2 e^t$ .

---

Un sistema acoplado, evidentemente, es aquél en el cual las variables dependientes se ven envueltas en ambas ecuaciones. A veces los sistemas acoplados son casi triviales de resolver, si una de las ecuaciones depende sólo de la variable dependiente adecuada, como podemos ver en el siguiente ejemplo:

---

**Ejemplo 1:**

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2xy \\ \frac{dy}{dt} &= y \end{aligned} \right\}$$

Se trata de un sistema acoplado, pero es evidente que la segunda ecuación es una ecuación desacoplada y podemos resolverla fácilmente:

$$y(t) = C_1 e^t$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x'(t) = 2xC_1 e^t \Rightarrow \frac{dx}{x} = 2C_1 e^t dt \Rightarrow \ln|x| = 2C_1 e^t + C_2$$

---

<sup>1</sup>De manera análoga a lo que se expuso en el Tema 1 de la asignatura para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, conviene aclarar que ésta una versión simplificada del Teorema. Obviaremos por tanto versiones mas “finas” del teorema, que requirieren no la diferenciabilidad de las funciones si no tan sólo que se satisfaga la condición de Lipschitz.

**Ejemplo 2:** Resolveremos ahora el mismo sistema pero considerando además dos condiciones iniciales:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2xy \\ \frac{dy}{dt} &= y \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned} \right\}$$

Sustituyendo la condición para la variable  $y$  encontramos directamente que  $C_1 = 1$ , es decir:  $y(t) = e^t$ . De manera análoga:  $C_2 = -2$  y así la solución particular del P.V.I. es:

$$x = e^{2(e^t-1)}, \quad y = e^t$$

que vemos representada en la figura:

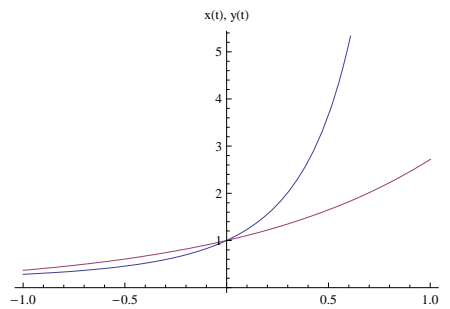


Figura 6.1: Gráficas de las soluciones del P.V.I. (por simplicidad utilizamos el mismo plano para representar ambas soluciones,  $x(t)$  e  $y(t)$ ).

### 6.3 Interpretación geométrica de las soluciones de un S.E.D.O.

Dado un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y, t) \end{aligned} \right\}$$

sea  $(x(t), y(t))$  una solución particular del mismo. Podemos entonces representar independientemente las funciones  $x(t)$  e  $y(t)$  frente a la variable de la que dependen, es decir  $t$ . Pero también es posible identificar la solución particular como las ecuaciones paramétricas de una curva  $\sigma : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ . En tal caso, al plano  $\mathbb{R}^2$  en el que representamos dicha curva se le denomina “plano de fase” del sistema y a la curva “órbita solución”.

**Ejemplo:** El sistema

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2 \cos t \\ \frac{dy}{dt} &= -\sin t \end{aligned} \right\}$$

con la condición inicial  $(x(0), y(0)) = (0, 1)$  tiene como solución particular a:  $x(t) = 2 \sin t$ ,  $y(t) = \cos t$ , que son las ecuaciones paramétricas de una elipse en el plano centrada en el origen

del mismo y con semiejes 2 y 1 respectivamente. Es fácil eliminar el parámetro  $t$  entre ambas ecuaciones y obtener así la ecuación implícita de dicha órbita:  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . (Ver Figura 6.2).

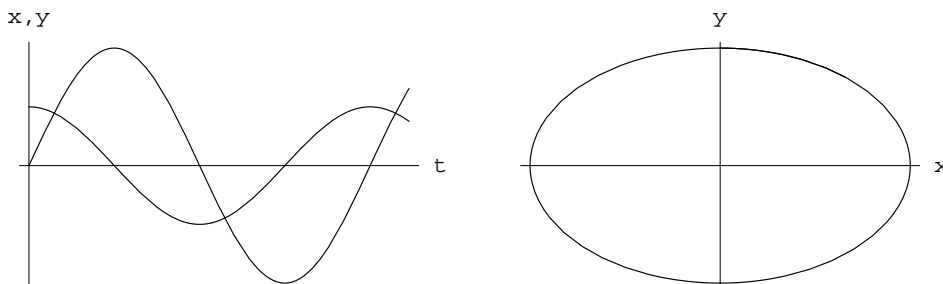


Figura 6.2: Gráficas de las soluciones (izquierda) y de la órbita (derecha).

Un sistema de condiciones iniciales  $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$  se traduce en fijar un punto por el que pasa la órbita.

Es importante hacer notar que la órbita de la solución no da cuenta más que de parte de la información contenida en las soluciones. De hecho diferentes sistemas de ecuaciones pueden dar lugar a idénticas órbitas aunque las soluciones sean distintas. También hay que resaltar que las soluciones proporcionan unas ecuaciones paramétricas concretas de la órbita, de manera que (interpretando la variable  $t$  como “tiempo”) queda determinado el “modo de recorrer” la órbita según la parametrización.

## 6.4 Sistemas Lineales

Restringiéndonos, como en la sección anterior, a sistemas de dos ecuaciones diferenciales ordinarias, y además escritos en forma normal, diremos que el sistema (6.1) es lineal si las funciones  $f(x, y, t)$  y  $g(x, y, t)$  son lineales en las variables dependientes, será no lineal en caso contrario. De manera general por tanto un sistema lineal es de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t)x + b(t)y + f(t) \\ \frac{dy}{dt} &= c(t)x + d(t)y + g(t) \end{aligned} \right\}$$

Si los coeficientes  $a(t), b(t), c(t)$  y  $d(t)$  son constantes, tendremos un “sistema lineal con coeficientes constantes”, en caso contrario será un sistema lineal con coeficientes variables.

**Sistemas Homogéneos de Ecuaciones Lineales:** se trata de aquellos sistemas con términos independientes nulos, es decir, para el caso de dos ecuaciones, serán sistemas de la forma:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a(t)x + b(t)y \\ \frac{dy}{dt} &= c(t)x + d(t)y \end{aligned} \right\}$$

**Propiedades de las soluciones de un sistema lineal:** El conjunto de las soluciones de un sistema lineal homogéneo tiene estructura de espacio vectorial real<sup>2</sup>, esto significa que si  $(x_1(t), y_1(t))$  y  $(x_2(t), y_2(t))$  son soluciones de un sistema lineal homogéneo, entonces  $(x_1(t) + x_2(t), y_1(t) + y_2(t))$  también lo son, al igual que  $(\lambda x_1(t), \lambda y_1(t))$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ . De lo anterior se deduce que si conocemos dos soluciones independientes de un sistema lineal homogéneo, entonces conocemos todas las soluciones del sistema, pues cualquier solución será una combinación lineal de las anteriores.

De manera análoga a lo que ocurría con las ecuaciones lineales estudiadas en temas anteriores, la solución general de un sistema lineal (no homogéneo) siempre puede escribirse como la solución general del sistema homogéneo asociado más una solución particular del sistema completo, es decir la solución general será de la forma:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x_{\text{H.A.}}(t, C_1, C_2) + x_{\text{P}} \\ y(t) &= y_{\text{H.A.}}(t, C_1, C_2) + y_{\text{P}} \end{aligned} \right\}$$

Como vemos, para resolver un sistema lineal basta con resolver en primer lugar el sistema lineal homogéneo asociado y determinar posteriormente una solución particular del sistema completo. Desgraciadamente, la resolución del sistema homogéneo no siempre es fácil. Veremos a continuación cómo para los sistemas con coeficientes constantes sí que podemos siempre obtener las soluciones de una forma sencilla.

### 6.4.1 Método de Eliminación

El Método de eliminación consiste en convertir un sistema de dos ecuaciones lineales con coeficientes constantes en una única ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden. Si partimos del sistema:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + f(t) \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + g(t) \end{aligned} \right\}$$

y denominamos  $D = \frac{d}{dt}$  al operador derivada con respecto a  $t$ , tendremos:

$$\left. \begin{aligned} (D - a)x - by &= f(t) \\ -cx + (D - d)y &= g(t) \end{aligned} \right\}$$

Si decidimos eliminar la variable  $x$  del sistema procederemos de la siguiente forma: multiplicando la primera ecuación por  $-c$  y la segunda por  $(D - a)$  y restando los resultados, reducimos el sistema a una ecuación de la forma:

$$(D^2 + pD + q)y = h(t)$$

---

<sup>2</sup>La dimensión de dicho espacio vectorial es igual al número de ecuaciones.

Ecuación lineal con coeficientes constantes de segundo orden que resolveremos con las técnicas aprendidas en el tema anterior. Evidentemente, el razonamiento presentado no es el único que lleva a la eliminación de una de las variables, otra opción posible es despejar directamente  $x$  en la segunda ecuación, o  $y$  en la primera, y sustituir en la otra ecuación.

---

**Ejemplo 1:** Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales con coeficientes constantes homogéneo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x - y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x + y \end{aligned} \right\}$$

El sistema puede ser re-escrito, en términos del operador  $D = \frac{d}{dt}$  en la forma:

$$\left. \begin{aligned} (D-4)x + y &= 0 \\ -2x + (D-1)y &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} (D-1)(D-4)x + (D-1)y &= 0 \\ -2x + (D-1)y &= 0 \end{aligned} \right\}$$

y así, restando ambas ecuaciones, tendremos:

$$(D-1)(D-4)x + 2x = 0 \Rightarrow (D^2 - 5D + 6)x = 0$$

que puede ser resuelta fácilmente y tendremos:

$$x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}$$

Teniendo en cuenta ahora la primera ecuación:  $y(t) = 4x(t) - \frac{dx(t)}{dt}$ , resultará:

$$y(t) = C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{2t}$$

---

**Ejemplo 2:** Resolver el siguiente sistema no homogéneo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -2x - 4y + e^t \end{aligned} \right\}$$

Procederemos ahora despejando directamente la variable  $y$  en la primera ecuación:

$$y = x' + x \Rightarrow y' = x'' + x'$$

donde hemos utilizado la notación  $x' = \frac{dx}{dt}$ , etc., por simplicidad. Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$x'' + 5x' + 6x = e^t$$

cuya solución es:

$$x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{12} e^t$$

El cálculo de  $y$  es ahora directo usando que  $y = x' + x$ :

$$y = -2C_1 e^{-3t} - C_2 e^{-2t} + \frac{1}{6} e^t$$


---

En el caso particular de sistemas homogéneos, es posible un procedimiento todavía más directo para obtener la solución, pues la ecuación característica de la ecuación de segundo orden asociada puede encontrarse en una forma muy sencilla:

Dado el sistema lineal homogéneo con coeficientes constantes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \right\}$$

el proceso de eliminación mostrado nos lleva a una ecuación lineal de segundo orden con operador asociado  $(D^2 + pD + q)$ , tanto si se elimina la variable  $x$  como si se hace con la  $y$ . Es fácil demostrar entonces que la ecuación característica  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  de dicho problema se obtiene directamente de la expresión<sup>3</sup>:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Apliquemos este hecho a un ejemplo concreto:

---

**Ejemplo 3:** Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned} \right\} \quad \begin{aligned} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 1 \end{aligned}$$

La ecuación característica será:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$$

Por tanto tenemos dos raíces imaginarias:  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$ . De esta manera, la solución será, por ejemplo para  $x(t)$ :

$$x(t) = K_1 \cos t + K_2 \sin t$$

mientras que la variable  $y(t)$  la obtenemos fácilmente a partir de la primera ecuación:  $y(t) = x'(t)$ :

$$y(t) = K_2 \cos t - K_1 \sin t$$

Sustituyendo las condiciones iniciales en ambas expresiones generales tendremos la solución particular buscada:

$$\left. \begin{aligned} x(t) &= \cos t + \sin t \\ y(t) &= \cos t - \sin t \end{aligned} \right\}$$

---

<sup>3</sup>La demostración más habitual (y elegante) de este hecho se puede hacer expresando matricialmente el sistema y diagonalizando la matriz de coeficientes asociada. De una manera más directa, y basándonos en el razonamiento antes expuesto para la eliminación de la variable, tenemos que la ecuación característica será:  $bc + (\lambda - a)(\lambda - d) = 0$ , y así:

$$bc + (\lambda - a)(\lambda - d) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0$$



La órbita solución es en este caso una circunferencia de radio  $\sqrt{2}$ , como puede observarse fácilmente si elevamos al cuadrado  $x(t)$  e  $y(t)$  y sumamos ambas expresiones. Por otro lado, la resolución general del sistema visto como sistema autónomo (que estudiaremos en la sección siguiente), conduce a la ecuación diferencial de las órbitas:  $x dx + y dy = 0$  que da como solución evidente una familia de circunferencias concéntricas.

---

## 6.5 Sistemas autónomos

Un sistema de ecuaciones diferenciales es “autónomo” si no depende explícitamente de la variable independiente, su forma general (para el caso de dos ecuaciones de primer orden) será por tanto:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y) \end{aligned} \right\}$$

Para los sistemas autónomos es siempre posible aplicar una estrategia de resolución consistente en obtener en primer lugar la ecuación implícita de las órbitas solución, de la siguiente forma: Las ecuaciones pueden escribirse en forma diferencial:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{f(x,y)} &= dt \\ \frac{dy}{g(x,y)} &= dt \end{aligned} \right\}$$

de manera que se puede eliminar la variable independiente, igualando los primeros miembros y obtenemos la ecuación diferencial ordinaria:

$$\frac{dx}{f(x, y)} = \frac{dy}{g(x, y)}$$

cuyas curvas solución son evidentemente las órbitas del sistema de ecuaciones. Si en la solución general es posible despejar una de las incógnitas, entonces su substitución en el sistema original nos proporciona una ecuación ordinaria y, en definitiva, las soluciones del sistema.

---

**Ejemplo 1:** Consideremos el sistema autónomo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{2}{y} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{x} \end{aligned} \right\}$$

La ecuación diferencial que describe a las órbitas será:

$$\frac{dx}{2/y} = dt = \frac{dy}{1/x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2 dy}{y} \Rightarrow \ln |x| = 2 \ln |y| + C \Rightarrow x = Ky^2$$

sustituyendo en la segunda ecuación del sistema:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{Ky^2} \Rightarrow y^2 dy = \frac{1}{K} dt \Rightarrow \frac{1}{3} y^3 = \frac{1}{K} t + K' \Rightarrow y = \left( \frac{3}{K} t + 3K' \right)^{\frac{1}{3}}$$

y en consecuencia:  $x = K \left( \frac{3}{K}t + 3K' \right)^{\frac{2}{3}}$ ,  $y = \left( \frac{3}{K}t + 3K' \right)^{\frac{1}{3}}$  es la solución general del sistema (dependiente de las constantes arbitrarias  $K$  y  $K'$ ).

---

**Ejemplo 2:** Consideremos el sistema autónomo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x \end{aligned} \right\}$$

con las condiciones iniciales:  $x(0) = 1$ ,  $y(0) = \sqrt{2}$ . La ecuación diferencial que describe a las órbitas será:

$$\frac{dx}{y} = dt = \frac{dy}{2x} \Rightarrow \frac{dx}{y} = \frac{dy}{2x} \Rightarrow 2x dx = y dy \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}y^2 + C \Rightarrow y = \pm \sqrt{2x^2 - K}$$

Ahora bien, de las condiciones iniciales se deduce que para  $t = 0$ ,  $x$  e  $y$  han de tomar los valores 1 y  $\sqrt{2}$  respectivamente, por tanto una única órbita es la relevante, la que pasa por el punto  $(1, \sqrt{2})$  y, por tanto, nos quedaremos con la solución particular:  $y = \sqrt{2}x$  (correspondiente a  $K = 0$ ). Sustituyendo en la primera ecuación del sistema:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{2}x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \sqrt{2}dt \Rightarrow x = C e^{\sqrt{2}t}$$

Utilizando de nuevo las condiciones iniciales concluimos con la solución particular buscada:  $x = e^{\sqrt{2}t}$ ,  $y = \sqrt{2}e^{\sqrt{2}t}$ .

---