Método de Euler para sistemas de ecuciones diferenciales

María del Mar Ruiz Martín
Antonio R. Moya Martín-Castaño
Francisco Luque Sánchez

Universidad de Granada

May 31, 2016

Introducción

Explicaremos el método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por consiguiente, también servirá para resolver ecuaciones de orden superior. Este método no dejará de ser una extensión del método de Euler para ecuaciones diferenciales.
Cabe nombrar que en la práctica no será muy utilizado, pues no aporta soluciones lo suficientemente buenas, es interesante su conocimiento por su gran simplicidad.

Partes del trabajo:

- Descripción general de un sistema de ecuaciones diferenciales
- Ecuaciones diferenciales de orden superior y reescritura como sistemas.
- Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales
- Estudio del error y análisis de la convergencia del método.

Concepto de ecuación diferencial:

Es una igualdad en la que interviene una variable independiente ($\mathtt{t}$), una variable dependiente ($\mathtt{x(t)}$) y las sucesivas derivadas de la variable dependiente respecto de la independiente. de forma general, escribimos:

$$F(t, x, x', ..., x^{n)}) = 0$$

También, nombrar que se definía *orden* de la ecuación diferencial, como el mayor orden de derivación de la variable independiente que aparece en dicha ecuación.
La *solución* vendrá dada por un conjunto de ecuaciones que cumplan dichas condiciones.

Problema de valores iniciales

Se define un problema de valores iniciales (PVI), asociado a una ecuación diferencial a dicha ecuación, y el conjunto de n valores (fijado t_0):

$$x(t_0) = y_0, x'(t_0) = y_1, ..., x^{n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

Se dice que está *bien planteado* si existe solución, es única y depende continuamente de los datos del problema.

Sistema de ecuaciones diferenciales

Es un conjunto de ecuaciones diferenciales en las que aparecen una variable independiente, un conjunto de variables dependientes de dicha variable independiente y las sucesivas derivadas de dichas variables dependientes respecto de la independiente.

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{n_1)}, \ldots, x_m, x_m', \ldots, x_m^{n_m)}) = 0 \\ F_2(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{n_1)}, \ldots, x_m, x_m', \ldots, x_m^{n_m)}) = 0 \\ \vdots \\ F_r(t, x_1, x_1', \ldots, x_1^{n_1)}, \ldots, x_m, x_m', \ldots, x_m^{n_m)}) = 0 \end{cases}$$

Y de manera análoga a como hemos dicho anteriormente, podemos definir un PVI para este sistema.

Sistemas de primer orden

Dado que trabajaremos con sistemas de primer orden, a partir de ahora notaremos los sistemas del siguiente modo:

$$\begin{cases} F_1(t, x_1, ..., x_m) = \frac{dx_1}{dt} \\ F_2(t, x_1, ..., x_m) = \frac{dx_2}{dt} \\ \vdots \\ F_m(t, x_1, ..., x_m) = \frac{dx_m}{dt} \end{cases}$$

Y para el PVI asociado a dicho sistema:

$$x_1(t_0) = y_1, x_2(t_0) = y_2, ..., x_m(t_0) = y_m$$

Reescritura de ecuaciones de orden superior

Anteriormente hemos definido que es una ecuación diferencial de orden n. Ahora, veremos como reescribir una ecuación diferencial de orden n (con n>1), como un sistema:
Sea la ecuación diferencial de orden n: $F(t, x, x', ..., x^{n)}) = 0$.
Podemos establecer los siguientes cambios de variable:

$$y_0 = x, y_1 = x', y_2 = x'', \ldots, y_{n-1} = x^{n-1)}$$

Y con estas, la solución de y_0 en el sistema que queremos escribir, será la solución de nuestra ecuación diferencial.

Así, el sistema en el que hemos transformado la ecuación de orden n sería el siguiente:

$$\begin{cases} y_0' = x' = y_1 \\ y_1' = x'' = y_2 \\ \vdots \\ y_{n-2}' = x^{n-1)} = y_{n-1} \\ y_{n-1}' = x^{n)} = F(t, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) \end{cases}$$

Método de Euler para ecuaciones diferenciales

Antes de comentar el método de Euler para sistemas, recordemos en qué consistía el método de Euler para ecuaciones diferenciales. Dado un PVI bien planteado:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

si tomamos puntos en un intervalo [a,b], y tomamos un N natural, de forma que $h = (b-a)/n$ Para cada $i = 0, \ldots, N$, tomamos los puntos: $t_i = a + ih$. Aplicando Taylor (centrado en t_i):

Método de Euler para ecuaciones diferenciales

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + y'(t_i)(t_{i+1} - t_i) + y''(\xi_i)(t_{i+1} - t_i)^2/2$$

para algún ξ_i entre (t_i, ti_{i+1}).
Equivalentemente:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + y''(\xi_i)h^2/2,$$

Es decir:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + f(t_i, y(t_i))h + O(h^2).$$

Método de Euler para ecuaciones diferenciales

De este modo, el método aproxima cada y_i:

$$\begin{cases} w_0 = y_0 \\ w_{i+1} = w_i + hf(t_i, w_i) \end{cases}$$

Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales

Dicho esto, podemos observar, mediante una deducción análoga, cuál es el punto de partida del método de Euler para sistemas. Dado el sistema:

$$\begin{cases} x_1' = F_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n' = F_n(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases}$$

para cada $j = 1, \dots, n$, podemos hacer una aproximación de $w_{i,j} \approx x_j(t_i)$ de forma que:

$$\begin{cases} w_{0,j} = x_{j,0} \\ w_{i+1,j} = w_{i,j} + hF_j(t_i, w_{i,j}) \end{cases}$$

Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales

Y así, dado el siguiente sistema:

$$X'(t) = F(t, X(t))$$

donde X(t) es de la forma:

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

y F(t,X(t)):

$$F(t, X(t)) = \begin{bmatrix} F_1(t, x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ F_n(t, x_n(t), \dots, x_n(t)) \end{bmatrix}$$

Método de Euler para sistemas de ecuaciones diferenciales

podemos expresar una aproximación $W_i \approx X(t_i)$ de a siguiente manera:

$$\begin{cases} W_0 = X(t_0) \\ W_{i+1} = W_i + hF(t_i, W_i) \end{cases}$$

donde W_i es de la forma:

$$W_i = \begin{bmatrix} w_1(t_i) \\ \vdots \\ w_n(t_i) \end{bmatrix}$$

Error local

Teorema

El error local para el método de Euler es $O(h^2)$, donde h es el tamaño del paso que hemos elegido para aplicar el método.

Para la demostración, supongamos que tenemos un valor exacto para un determinado t_i, entonces el error local para la siguiente iteración es $||E_{i+1}|| = ||X(t_{i+1}) - [X(t_i) + h * F(t_i, X_i)]||$
Si tomamos cada componente por separado y, además, realizamos el desarrollo de Taylor de $x_j(t_{i+1})$ con $j = 1, ..., n$, llegaríamos a que para cada x_j, el error cometido en un paso del método es:

$$e_{i+1,j} = |x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| = \frac{h^2}{2} * x_j''(\xi_{i+1,j}),\ \xi_{i+1,j} \in [t_i, t_{i+1}]$$

Error local

Tenemos entonces que el vector de los errores lo podemos expresar como sigue:

$$E_{i+1} = \begin{bmatrix} e_{i+1,1} \\ \vdots \\ e_{i+1,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{2} * x_1''(\xi_{i+1,1}) \\ \vdots \\ \frac{h^2}{2} * x_n''(\xi_{i+1,n}) \end{bmatrix}$$

Tomando ahora la norma euclídea del vector de los errores, tenemos que el error es $O(h^2)$

Error global

Lema 1

Para toda $x \geq -1$ y para cualquier m positiva, tenemos que $0 \leq (1+x)^m \leq e^{mx}$

Lema 2

Si s y t son números reales positivos, $\{a_i\}_{i=0}^{k}$ es una sucesión que satisface $a_0 \geq -t/s$ y

$$a_{i+1} \leq (1+s)a_i + t, \; \forall i = 0, 1, \ldots, k$$

entonces se tiene que

$$a_{i+1} \leq e^{(i+1)s}\left(a_0 + \frac{t}{s}\right) - \frac{t}{s}$$

Error global

Teorema

El error global del método de Euler para sistemas de ecuaciones es $O(h)$, donde h es el tamaño de paso que hemos elegido al aplicar el método.

El esquema general de esta demostración sería el siguiente. Suponiendo que cada función, $f_j(t, x_1, ..., x_n)$ es Lipschitziana en la variable x_j, con constante de Lipschitz L_j, y que para cada x_j existe una constante M_j tal que $|x_j''(t)| \leq M_j, \forall t \in [a, b]$.

Error global

Teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor para $x_j(t_{i+1})$ y la aproximación $w_{i+1,j}$:

$$x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j} = x_j(t_i) - \omega_{i,j} + h * [f_j(t_i, x_i, ..., x_n)$$
$$- f_j(t_i, \omega_{i,1}, ..., \omega_{i,n})] + \frac{h^2}{2} * x_j''(\xi_j)$$

Se cumple entonces que:

$$|x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| \leq |x_j(t_i) - \omega_{i,j}| + h|[f_j(t_i, x_i, ..., x_n)$$
$$- f_j(t_i, \omega_{i,1}, ..., \omega_{i,n})]| + \frac{h^2}{2} * |x_j''(\xi_j)|$$

Error global

Y de aquí, teniendo en cuenta que f_j es Lipschitziana:

$$|x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| \leq (1 + hL_j) * |x_j(t_i) - \omega_{i,j}| + \frac{h^2 * M_j}{2}$$

Y aplicando el lema anterior y operando:

$$|x_j(t_{i+1}) - \omega_{i+1,j}| \leq \frac{hM_j}{2L_j}(e^{(t_{i+1}-a)L_j} - 1)$$

Y dado que tomamos j arbitrario, tenemos este resultado para todas las funciones f_j. Finalmente, tomando la norma euclídea de todos los errores globales, podemos concluir que el método es de orden $O(h)$.

Fin.