离散数学二部分习题选解

鸽巢原理应用举例

- **第7版教材本科版3.2节 T6, 全版本 6.2节 T11**
- **设(x_i,y_i,z_i) $(i=1,2,3,\ldots9)$共9个具有整数坐标值的点，那么这9个点中至少有两个点的连线中点坐标为整数。**

- 解答：一个整数坐标有奇数和偶数两种可能，两个坐标就有4种可能的奇偶搭配组合，3个坐标有8种奇偶搭配组合。9个点里面，至少有2个点的奇偶搭配组合结构是相同的。这样的两个点连线中点一定是整数坐标。

鸽巢原理应用举例

- 第7版教材全版本 6.2节 T13

a. 从前8个整数中选5个整数一定存在一对整数之和等于9

b. 如果不是选5个，而是选4个，a的结论如何？

- 解a. 将前8个数分成两组1,2,3,4 和8,7,6,5。 当选5个数时，必然不可能来自于同一组。要么是1-4组合，要么是2-3组合。无论是那种组合，都一定会有一对和为9=1+8=2+7=3+6=4+5.
- b. 但如果只选4个数的话，就有可能来自于同一组，这样就可能没有任何一对之和为9.

- 教材本科版3.2节 T7 T8：从{1,2,3,4,5,6}中至少要选出几个数才能保证有一对之和为7？
- 类似于上一题的思维方法。答案：至少选4个数。

鸽巢原理应用举例

- 教材练习: 25个人的课堂里，有1年级的也有2年级的，还有3年级的学生。证明:
- a. 至少有9个人是同年级的。
- b. 至少有3个一年级的，或至少19个2年级的，或者至少5个三年级的。
- 证明：a. 显然如果每个年级最多8个人的话，顶多是24个人。

- 教材练习：一个摔跤手是75小时内的冠军，该选手1小时至少比赛一场；但总共不超过125场；那么存在着连续的若干小时，使得该选手恰好进行了24场比赛；

- 解答：类似于教材中的例题。用a_i表示到第i小时及以前内参加的比赛数。由于每个小时都必须比赛，所以序列$a_1,a_2,\ldots a_{75}$是严格递增序列。再考察序列$a_1+24,a_2+24,\ldots a_{75}+24$， 也是严格递增的。
- 两个序列一起一个150项。但序列每个值都在1到149之间，所以必然有两个相同。那么只能是某个a_i与某个a_j+24相同。于是$a_i-a_j=24$

第3章 组合计数基础

- （鸽巢原理应用）任何n+1个不超过2n的正整数，至少有两个互素的。
- 解：Partition the set of numbers from 1 to 2n into the n pigeonholes {1, 2}, {3, 4}, . . . , {2n – 1, 2n}.

  If we have n+1 numbers from this set (the pigeons), then two of them must be in the same hole.

  - This means that among our collection are two consecutive numbers. Clearly consecutive numbers are relatively prime
  - (since every common divisor must divide their difference, 1).

- 解：如果两个数互素，那么他们的最大公因子就是1.
- 将1到2n之间的2n个数分成n组数，每组为相邻的两个正整数，如下：{1, 2}, {3, 4}, . . . , {2n − 1, 2n}.
- 从其中取n+1个数，由鸽巢原理，那么比然有两个在同一组中。
- 由于同一组的两个数是连续的相邻的两个数。
- 两个相邻的正整数的最大公因子一定是1. 所以它们一定是互素的。

第3章 组合计数基础

- 排列组合应用
- 教材中习题：S是n个元素的集合。存在多少个有序对(A,B)使得A和B是S的子集，且$A\subseteq B$？
- 解：任取一个S的子集A，$|A|=k$, 那么如果$A\subseteq B$， 那么就有$B-A \subseteq S-A$。 $|S-A|=n-k$. 于是在A一定的情况下就有2^{n-k}个不同的B与A形成有序对，使得B是S的子集，且$A\subseteq B$.
- 而基数为k的S的子集个数为C(n,k). 所以一个有C(n,k) 2^{n-k}个不同的序对(A,B)使得A和B是S的子集，且$A\subseteq B$， 且$|A|=k$。

A作为S的子集，基数可以是0,1,2,...n中任何一个。于是总的可能满足条件的序对总数为： $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, 2^{n-k}$. 由二项式展开定理可知答案为$3^n$.

3.5节练习T18(第7版本科版，原书T35，答案 19635)
用EVERGREEN中的字母可以构造多少个含有7个字符的串

- 解题思路：从这个已有串里面去掉两个字符，然后再计算每一种情况的排列数。
- 当然取决于去掉哪两个字符，分多种情况讨论计算。比如说去掉2个E, 或者去掉两个R，或者去掉一个E一个R等等。

- 第7版 计数基础的补充练习中的第33题：
- 有多少个恰好包含两个01的n位长的二进制串，n>=4?

解答方法一、这道题的答案比较简单就是C(n+1, 5). 为什么？分析如下：

在长度为n的二进制串中，要做到恰好有两个01在其中，那么这样的串有如下的几种可能，分成几段1串和0串

(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)

01(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)

(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)01

01(1…1)(0…0)01

有多少个恰好包含两个01的n位长的二进制串，n>=4?

无论哪种情况，我们都可以在上面的1与0分界的位置虚拟地加入几条分界线，例如下所示：

(1...1) |(0...0)0|1(1...1) |(0...0)0|1(1...1) |(0...0)

在长度为n的串一共有n+1个分割位。只要从这n+1个分割位种任意选择出5条分割线，就将01串分成了几段，满足题目要求。在这些分割线之间必然全都是1或者0。 而且第1条分割线左边要么是都是1要么没有（也即n位的二进制串第1位就是0），而最后一条分割线的右边都是0 或者没有字符。也即在最后的两条分割线以内，必然是 “左|” +0段+1段+0段+1段 + “右|”， 其中每个0段至少一个0， 或者若干个0，而一个1段至少一个1或者若干个1. “左|”的左边全为1或者没有字符， “右|”之右边全为0或者没有字符。

所以总共有方案数C(n+1, 5). 也就是有这么多个可能的2进制串。

也可以考虑下面的另一思路：

学生提供的第2种解法

- 01串的个人解法：考虑01或者10分割线
- 1分类：分为0101型，01010型，10101型，101010型
- **0101型**（第1位为0，最后一位为1）：将长为n的串分为非空的4组，分别填入0段，1段,0段,1段. 相当于在n-1个位置里选择放入3条01分割线，于是有C(n-1,3)种
- 01010型（第1位与最后一位都为0）：相当于在n-1个位置里选择放入4条01分割线， 有C(n-1,4)
- 10101型（第1位与最后一位都为1）：相当于在n-1个位置里选择放入4条01分割线， 有C(n-1,4)
- 101010型第1位为1，最后一位都为0）：相当于在n-1个位置里选择放入5条01分割线， 有C(n-1,5)
- 所以总数为：C(n-1,3) + C(n-1,4) + C(n-1,4) + C(n-1,5) == C(n+1,5）

有多少个恰好包含两个01的n位长的二进制串，n>=4?

- 解答3:
- 分析观察，形成n位1…10…01…10…01…10…0序列，将n位长刚好包含两对01的二进制串分解为上面的6个段，每个段分别为（按次序）x_1个1，x_2个0，x_3个1，x_4个0，x_5个1，x_6个0，其中$x_1>=0$，$x_6>=0$，其他>0。
- 于是考察$x_1,x_2-1, x_3-1, x_4-1, x_5-1, x_6$ 这6个数恰好就都是非负整数，$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 = n$, 所以$x_1+x_2-1+x_3-1+x_4-1+x_5-1+x_6=n-4$，
- 相当于不定方程$y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6 = n-4$ 的解的数目，其中每个yi为非负整数。
- 该不定方程的解的数目为C(n-4 + 6 -1, n-4) = C(n+1, n-4)=C(n+1, 5).
- 恰好包含一个01的就分成4个段，类似地解决就可。
- 类似地可以求出恰好k个01的串的个数。

有多少个恰好包含两个01的n位长的二进制串，n>=4?

- 解法4： 满足题目要求的01串必然是型这个样子的：(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)01(1…1)(0…0)
- 分析这个形式的串，可以去分步完成的方法：
- 1： 确定第一个01的在串中的位置，再在其右边选择第 2 个01的位置
- 第一个01的位置的选择，在其左边可能出现0到n-4个字符(记为长度为r的10串，如1…10…0）；对每一个确定的r, 这长度为r 的串有r+1种可能满足题目要求；在这第一个01的右边，还剩n-r – 2个字符；
- 2: 第2个01必然出现在剩下的n-r – 2个字符位置中；那么在第一个01和第2个01之间，出现的串也必然是10串，形如1…10…0， 假设长度为s, 那么s 就可能是0到n-r-4. 而这长度为s的10串有s+1 中可能的取值；
- 3： 最后一个部分是第2个01后面的部分的子串（10串）， 长度必然是n-4-r-s. 共有n-4-r-s + 1种可能的取值。
- 利用加法原理结合乘法原理可以得到总共有可能的是
- $\sum_{r=0}^{n-4}(r+1) * \{\sum_{s=0}^{n-r-4} s * (n-4-r-s+1)\}$

第4章 高级计数技术—生成函数应用

- 例题：假设三角形ABC的边长均为正整数，且AB+BC+AC=2n+1，其中n为一个给定的正整数。问这样的三角形有多少个？
- 解：分别设三边长为a,b,c。则a+b+c = 2n+1. 由于边长不能为0，任何两边的和一定大于第3边。只要每一边小于周长一半，那么任何两边的和就一定会大于第3边。所以从已知的，任何一边都必然小于周长2n+1的一半。于是a,b,c都必然是1到n之间的正整数，同时满足a+b+c = 2n+1。
- 生成函数$G(x) = (x^1+x^2+x^3+\ldots+x^n)^3 = x^3(1-x^n)^3/(1-x)^3$
- *这个函数的项x^{2n+1}的系数就是满足条件的三角形的个数？*
- *上面这个生成函数可以套用公式展开，求得x^{2n+1}的系数*
- *注意思考：这个数字里面包含有重复的吗？比如说边长3,4,5组合与5,4,3组合是全等的三角形。不应该算成2个，而应是一个。如果这里有重复的，如何消除重复，得到正确的答案？*

三角形个数问题续

上面生成函数算出来的数字里面有重复计算的内容。分下面三种情况

- (1) 如果三角形的三边的边长都不一样，则在上面的计算种重复了6次。这一类的数字需要除以6才对；
- (2)如果是等边三角形，则没有重复，只计算了一次。这种情况就不需要除以6了。 当然，只有在2n+1能被3整除时，才会存在一个等边三角形的可能。
- (3) 等腰三角形（不包含等边）时，在上面的生成函数计数时，一共计算了3次。需要除以3. 当2n+1不能被3整除时，等腰三角形里面没有等边的情况。

所以需要计算能有多少个可能的等腰三角形。

- $n+1 <= $其中两个腰边的和$<= 2n$; 由此推算出有多少个等腰三角形。
- 假设两腰长为x, 第3边长为y, 那么$2x+y = 2n+1$, 2x 必须超过周长一半， 否则不能成为三角形，所以$2x>n+1/2$, $y\geq 1$. 于是 , $x> n/2 + 1/4$, $x\leq n$, 于是一共有 $n - (n/2)$的底函数值。
- 当n为偶数时， 共有**$n/2 + 1$** 个等腰三角形， 当n为奇数时，x从$(n+1)/2$开始到n, 一共**有** **$(n+1)/2$** 个等腰三角形。
- 上面的等腰三角形个数包括了可能存在的等边三角形；

- **如存在等边**：那么将生成函数计算出来的数字 – 3（等腰三角形个数 – 1 等边）- 1就是不等腰也不等边的个数的6倍。 将其除以6 就是不等腰不等边的三角形的个数；
- 然后加上等腰个数，可能的等边个数。

- **如不存在等边：**
- 那么将生成函数计算出来的数字 – 3（等腰三角形个数 ）就是不等腰也不等边的个数的6倍。 将其除以6 就是不等腰不等边的三角形的个数；
- 然后加上等腰个数。

第一类斯特林数S(n, j): 将n个人拍成j个圈，每个圈非空的排列数

- 那么：$\sum_{j=1}^{n} S(n,j) = n!$
- 证明思路：先给出一个递推关系
- 当n>1时，先固定其中一个人，这个人自己一个人成为一个非空圈，剩下的n-1个人构成j-1个圈的排列个数为S(n-1, j-1);
- 当这个固定的人一个人不成为圈的时候，相当于剩余的n-1个人构成j个非空圈，然后把这个固定的人分别加入到每个圈中，形成的所有排列数。这个数字是(n-1)S(n-1, j);
- 于是S(n, j) = (n-1)S(n-1, j) + S(n-1, j-1).
- 再对n用数学归纳法以及利用上面这个递推式就可以证明。

错位排列部分第9题目：有多少种方式排列数字0,1,2,...,8,9使得偶数不在其初始位置上

- 解决方法如下：
- Let a permutation have property P_i **if it fixes element *i*.**
- 这道题的0，1, 2, . . . , 9.部分错位排列数是:
- 可以用A_i表示i固定的排列的集合。 那么这个D就是$N - |A_0 \cup$
- $A_2 \cup A_4 \cdots A_6 \cup A_8|$.
- $D = N(P'_0 P'_2 \ldots P'_8) = N - |A_0 \cup A_2 \cup A_4 \cdots A_6 \cup A_8|$.
- 这样用容斥原理就可以算出来了
- **在看看下面这个公式，有些数字可以从下面这个公式里得到启发。**

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right].$$

- $|A_0 \cup A_2 \cup A_4 \cdots A_6 \cup A_8|$ 的求解只要用到容斥原理就可以得到。
- $|A_0 \cup A_2 \cup A_4 \cdots A_6 \cup A_8| = N(P_0)+N(P_2)+ N(P_4)+ N(P_6)+ N(P_8)$

错位排列部分第9题目：有多少种方式排列数字0,1,2,…,8,9使得偶数不在其初始位置上

- - (这5个集合的任2个的交的基数的和) + (这5个集合的任3个的交的基数的和) - (这5个集合的任4个的交的基数的和) + (这5个集合的的交基数)

- $N(P_0)+N(P_2)+N(P_4)+N(P_6)+N(P_8) = C(5,1)*P(9,9)$
- (这5个集合的任2个的交的基数的和) = $C(5,2)*P(8,8)$
- (这5个集合的任3个的交的基数的和) = $C(5,3)*P(7,7)$
- (这5个集合的任4个的交的基数的和)= $C(5,4)*P(6,6)$
- (这5个集合的的交基数) = $C(5,5)*P(5,5)$
- 这5个集合的任2个的交集相当于10个元固定两个不动的排列;
- 这5个集合的任3个的交相当于10个元固定3个不动的排列;

生成函数求解应用

- 举例：　求不定方程 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=21$ 的非负整数解的数目。其中 $0<=x_1<=10$.
- 解：　构造生成函数$f(x)=(1+x+x^2+\ldots+x^{10})(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots)^4$
- $=（1-x^{11}）/(1-x)^5$
- $=1/(1-x)^5-x^{11}/(1-x)^5$
- 套用一下展开公式$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}C(n+k-1,k)x^k$
- 也就能得出这个生成函数f(x)的展开式。
- 这个生成函数展开成幂级数后，x^{21}的系数就是问题的解。
- $\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}C(n+k-1,k)x^k$
- 于是x^{21}的系数是：　$C(5+21-1,21)-C(5+10-1,10)$

生成函数求解应用

- 上面的$1/(1-x)^n$的幂级数展开式，套用已经有的展开公式，就是广义二项式定理就可以知道展开式。
- 展开公式：$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$ 可以用高等数学的相关知识得到。
- 也可以换个思维，用现在组合计数与生成函数的知识自己推导出来。下面就是这个推导，供大家参考，放开一下自己的思维。

生成函数$g(x)=1/(1-x)^n$的幂级数展开式

- 证明：生成函数$g(x)=1/(1-x)^n=(1+x+x^2+\ldots+x^k+\ldots)^n$对应于这样的一个序列$\{a_k\}$的$a_k$：就是从n个元素中有重复地选取k个的有重复k-组合数；这个组合数在学习有重复组合数时，已经知道就是C(n+k-1, k). 于是这个生成函数g(x)的幂级数展开式中的项x^k的系数a_k就是这个组合数C(n+k-1, k)。

所以$\frac{1}{(1-x)^n}=\sum_{k=0}^{\infty} C(n+k-1,k)x^k$

成立！

Show with the help of Fermat's little theorem that if n is a positive integer, then 42 divides $n^7 - n$. （提示：可以分别证明2,3,7能整除$n^7 - n$.）

- 证明：2，3，7是两两互素的整数，如果分别能整除$n^7 - n$，
- 那么$42|(n^7 - n)$；
- 显然，无论n为奇数还是偶数，$n^7 - n$都必然是偶数，所以$2|(n^7 - n)$;
- 如果$3|n$, 则显然有$3|(n^7 - n)$；如果n不是3的倍数，分析$n^6 - 1$是否是3的倍数。 相当于分析是否存在一个整数k使得$n^6=3k+1$. 由于n不少3的倍数，有n与3互素；于是$n^3 \equiv 1 \pmod{3}$, 也即存在一个整数t, 使得$n^2=3t+1$, $n^6=(3t+1)^6$, 显然用3除余1.
- 类似地，如果$7|n$则已，否则n与7互素，由费尔马小定理，直接就能得出$n^6 \equiv 1 \pmod{7}$, 于是$n^6 - 1$是7的倍数。

4.3 节 T*36 Show that if *a* and *b* are both positive integers, then $(2^a - 1) \bmod (2^b - 1) = 2^{a \bmod b} - 1$

证明：

- 当a=b时显然；
- 如果a<b, 那么$(2^a - 1) < (2^b - 1)$, 结论显然成立。
- 如果a>b, 假设 r = a mod b, 于是a=kb + r, k 位正整数。
- $(2^a - 1) = 2^{kb+r} - 1 = 2^r((2^{kb} - 1) + (2^r - 1) = 2^r((2^{kb} - 1) + (2^{a \bmod b} - 1)$
- 而$2^{kb} - 1 = （2^b - 1）(1+2^{1b}+2^{2b}+\ldots+2^{(k-1)b})$ 是$2^b - 1$的倍数。
- 所以 $(2^a - 1) \bmod (2^b - 1) = 2^{a \bmod b} - 1$.

4.4节T41: Show that if p is an odd prime, then every divisor of the Mersenne number $2^p - 1$ is of the form $2kp + 1$, where k is a nonnegative integer

解：（提示：利用费尔马小定理与4.3节T37题

- 解：假设q是2^p-1的一个素因子，则q必为奇数；2|（q-1）；
- 另外$q|(2^{q-1}-1)$ (费尔马小定理)； 所以 $q|\gcd(2^{q-1}-1, 2^p-1)$; 根据上一节T37的结论，有$\gcd(2^{q-1}-1, 2^p-1) = 2^{\gcd(q-1, p)} - 1$, 于是 $q|(2^{\gcd(q-1, p)}-1)$, 足以说明gcd(q-1, p)<> 1. P是素数，所以p|(q-1). 而q-1为偶数，所以2p|(q-1), 于是q可以表示成2kp+1的形式；
- 2^p-1 的每个素数因子都可以表示成2kp+1的形式， 那么其任意的一个因子都可以表示成这个形式。 证毕！