第1章　　误差理论

1-1 下列各数都是经过四舍五入得到的近似数，试指出它们是具有几位有效数字的近似数，并确定和的误差限。



解：分别具有的有效数字的位数为：5, 2, 4

由已知条件可得：



则：



1-2 已测得某场地长*L*的值，宽*d*的值，已知：，，试求面积的绝对误差限和相对误差限。

解：由已知可得：，，则：



另解：

1-3 若都是经四舍五入后得到的近似值，问：有几位有效数字？

解：由已知得：

，

并且有：，

从而有：，

因此的规格化指数*m*均为1。另一方面：





由于，从而

所以都具有3位有效数字。

1-4 4.3 4.27 4.270 4.2697

1-5 求*x*，使3.141和3.142作为*x*的近似值都具有4位有效数字。

解：由已知可得：



即准确值*x*所在的区间为：

且

因此准确值为：

第2章　　方程求根

2-1 用二分法求方程在区间[1,1.5]内的根，要求精确到小数点后第二位。

解：精确到小数点后第二位，即：





2-2 给定函数，设对一切存在且0*<*，证明对于范围内任意选定的参数，迭代公式

由任意初值产生的迭代序列恒收敛于的根。







由于，为单调增函数，故方程的根是唯一的（假定方程有根）。迭代函数，。

令，则，由递推有  
，即

2-6 用牛顿法求在附近的实根要求满足精度

第4章　　插值方法

4-3 已知函数表如下，试不用开方的办法而用抛物线插值计算的值，并估计误差。

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *x* | 100 | 121 | 144 |
| *y* | 10 | 11 | 12 |

解：



易知在区间[100, 144]上且为单调减函数，所以：





因此

4-8 设为互异节点，证明：

证明：(1)考查，它在个互异节点 的函数值为，以这组节点数据进行Lagrange插值得到的插值代数多项式，其余项为：



由于，所以，从而，因此，即：



另证：考查函数，显然它是一个*n*次代数多项式，并且当时，，即这个*n*次多项式方程有个互异的根。

另一方面，由代数知识可知，对于一个*n*次代数多项式方程，至多有*n*个互异的根，因此必有：

(2)利用二项展开式及第(1)题的结论



4-10 证明若Lagrange插值多项式的首项系数记为，则：



其中

证明：由于为一次代数多项式，因此它也可写为：



其中：



则：

另一方面，每个Lagrange插值基函数：



而Lagrange插值多项式为个插值基函数的线性组合，组合的系数为，因此：

注意：，为什么！

2-11 已知连续函数函数值表如下，求方程在[1, 2]内的近似根。

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 1 | 0 | 1 | 2 |
| *f* (*x*) | 2 | 1 | 1 | 2 |

解：由已知条件可计算出如下差商表：

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | 0阶差商 | 1阶差商 | 2阶差商 | 3阶差商 |
| 1 | 2 |  |  |  |
| 0 | 1 | 1 |  |  |
| 1 | 1 | 2 | 1/2 |  |
| 2 | 2 | 1 | 1/2 | 1/3 |

则：



由得到三个近似根：，根据要求，在[1, 2]内的近似根为。注：本题也可用反函数插值的方法来做，但要求原函数是单调函数！

第5章　数值积分

5-1 确定下列求积公式的代数精度







解：

(1)

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边 ≠ 右边

所以上述求积公式的代数精度为3次。

(2)

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边 ≠ 右边

所以上述求积公式的代数精度为1次。

(3-1)

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边 ≠ 右边

所以上述求积公式的代数精度 为1次。

(3)

令，左边，右边，左边  右边

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边  右边

令，左边，

右边 左边 ≠ 右边

所以上述求积公式的代数精度为5次。

5-3 求积公式称为中矩形求积公式，试推出它的截断误差表达式，并确定它的代数精度。

解：令，左，右， 左  右

令，左，

右， 左  右

令，左，

右 左 ≠ 右

所以：中矩形求积公式的代数精度为1次。

将在中点处进行泰勒公式展开：





将上式两边在区间[*a*, *b*]上进行积分：

 因此中矩形公式的截断误差为：

5-9 分别用梯形公式，Simpson公式及Cotes公式计算的近似值，并给出其误差。

解：由已知可得：





 又：



可见：在[1, 2]区间均是单调减函数，所以：





5-11 若用复化梯形公式计算积分，问积分区间要等分为多少份才能保证计算结果有4位有效数字？

解：由于在[0, 1]区间：，所以：







所以：，即积分结果的规格化指数

由已知条件可得精度要求为：

又：



对于复化梯形公式：





由，在[0,1]上单调增，在[0,1]单调减。



解得

故积分区间应分为58份才能保证4位有效数字。

第6章　常微分方程数值解法

6-1 用Euler法解初值问题



取步长h=0.1

解：由Euler法可得如下递推式，且初值为。由该递推式递推得答案如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *0* | *0.1* | *0.2* | *0.3* | *0.4* | *0.5* | *0.6* | *0.7* | *0.8* | *0.9* | *1.0* |
|  | *1* | *1.0000* | *1.0100* | *1.0290* | *1.0561* | *1.0905* | *1.1314* | *1.1783* | *1.2305* | *1.2874* | *1.3487* |

6-2 用Euler法解初值问题



证明其截断误差



这里是Euler方法的近似解，而为原初值问题的精确解。

解：由Euler法可得如下递推式。逐步递推得：



又由，得截断误差

6-3 用改进的Euler法解初值问题，取步长h=0.2。



解：由改进的Euler法可得如下递推式

且初值为。由该递推式递推得答案如下表：

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *0* | *0.2* | *0.4* | *0.6* | *0.8* | *1.0* |
|  | *1* | *1.2400* | *1.5768* | *2.0317* | *2.6307* | *3.4054* |