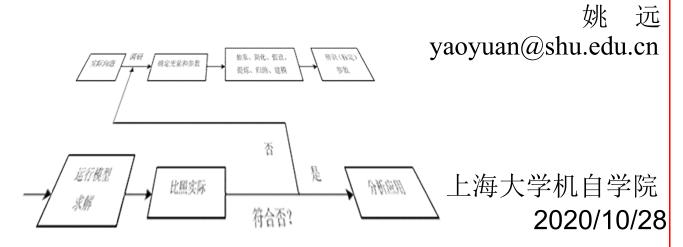
估计与预测



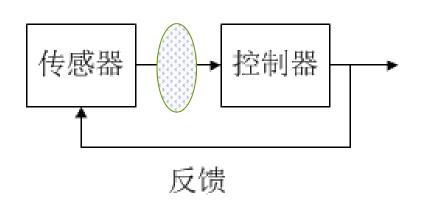


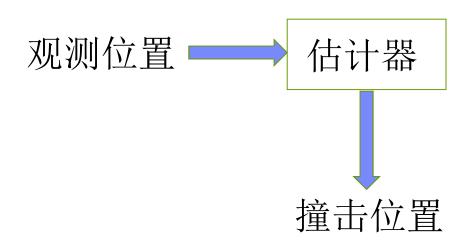
大纲



- ■估计器
- ■卡尔曼滤波
- ■校正的理论基础
- ■预测与校正
- ■粒子滤波







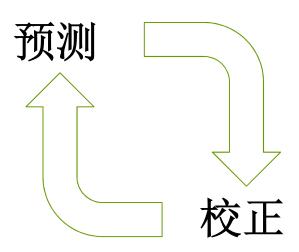


- ■噪声 ■运动
- ■非直接测量



■预测:根据过去的信息预测真实值

■校正:根据预测的信息校正观测值



实现估计器的两个步骤



■从经验中预测的实例

贝叶斯规则

条件概率 p(A | B)达当B发生的条件下A发生的概率

■组合概率

$$P(A \wedge B) = p(A \cap B) = p(A)p(B \mid A)$$

$$P(A \wedge B) = p(A \cap B) = p(B)p(A \mid B)$$

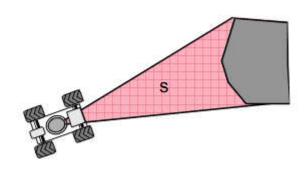
■贝叶斯规则

$$p(A)p(B \mid A) = p(B)p(A \mid B)$$

$$\Rightarrow p(B \mid A) = \frac{p(A \mid B)p(B)}{p(A)}$$

100s 01Lc

■从经验中预测的实例



无人驾驶问题

如何从从观察s中推测是否遇到障碍obstacle?

p(obstacle | s)





■从经验中预测的实例

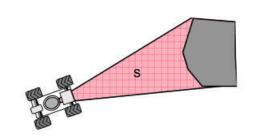
以下哪一种更难?

p(obstacle | s)

从观察到某种特征, 判断其属于障碍的概率

 $p(s \mid obstacle)$

如果确定观察对象是障碍, 观察到某种特征的概率



如何从从观察s中推测是否遇到障碍obstacle?

p(obstacle | s)

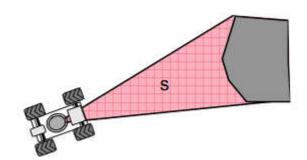




■从经验中预测的实例

应用贝叶斯规则估计

$$p(obstacle \mid s) = \frac{p(s \mid obstacle)p(obstacle)}{p(s)}$$



p(s)?



■从经验中预测的实例

应用贝叶斯规则估计

$$p(obstacle \mid s) = \frac{p(s \mid obstacle)p(obstacle)}{p(s)}$$
$$p(!obstacle \mid s) = \frac{p(s \mid !obstacle)p(!obstacle)}{p(s)}$$



■从经验中预测的实例

应用贝叶斯规则估计

$$p(obstacle \mid s) + p(!obstacle \mid s) = 1 \Rightarrow$$

 $p(s) = p(s \mid obstacle) p(obstacle) + p(s \mid !obstacle) p(!obstacle)$

$$p(obstacle | s) = \frac{p(s | obstacle)p(obstacle)}{p(s | obstacle)p(obstacle) + p(s | !obstacle)p(!obstacle)}$$

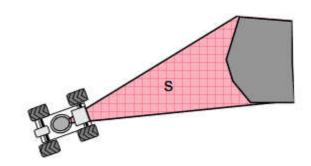


■从经验中预测的实例



$$p(s \mid obstacle) = 0.8$$

$$p(s | !obstacle) = 0.05$$



$$p(obstacle|s) = ?$$

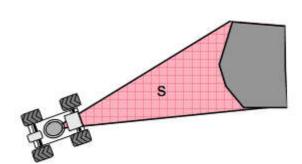


■从经验中预测的实例

假如
$$p(obstacle) = 0.2$$

$$p(s \mid obstacle) = 0.8$$

$$p(s | !obstacle) = 0.05$$



$$p(obstacle | s) = \frac{p(s | obstacle)p(obstacle)}{p(s | obstacle)p(obstacle)}$$

$$p(s | obstacle)p(obstacle) + p(s | !obstacle)p(!obstacle)$$

$$=\frac{0.8*0.2}{0.8*0.2+0.05*0.8}=0.8$$



- ■贝叶斯估计从已知的状态中推测位置未知状态
- ■在**Kalman滤波**中,每一步通过演变当前的数据分布推测下一步的数据分布。
- ■在**粒子滤波**中,使用一组包含不同分布的粒子,通过其权值组合推测 下一步的数据分布

Kalman滤波器和粒子滤波器都可看作贝叶斯滤波的特殊实例

大纲



- ■估计器
- ▶卡尔曼滤波简介
- ■校正的理论基础
- ■预测与校正
- ■粒子滤波

■卡尔曼滤波是从一组有限的,包含噪声的,对物体位置的观察序列(可能有偏差)预测出物体的位置的坐标及速度。在很多工程应用(如雷达、计算机视觉)中都可以找到它的身影。同时,卡尔曼滤波也是控制理论以及控制系统工程中的一个重要课题。



- ■Rudolph E. Kalman 1960 发表滤波器算法
- ■Stanley Schmidt 实现算法





Rudolph E. Kalman

- ■用于阿波罗登月导航
- ■用于弹道导弹潜艇的导航
- ■用于战斧巡航导弹的导航
- ■用于......



- ■卡尔曼滤波
- 从一组有限的, 包含噪声的,

对物体位置的观察序列(可能有偏差) 预测出物体的位置的坐标及速度。



- ■用于很多工程应用
- -雷达
- -机器人
- -航空导航
- 是控制理论以及控制系统工程中的一个重要课题。

ogs at a

- ■卡尔曼滤波
- 从一组有限的, 包含噪声的,

对物体位置的观察序列(可能有偏差) 预测出物体的位置的坐标及速度。

- ■用于很多工程应用
- -雷达
- -机器人
- -航空导航
- -是控制理论以及控制系统工程中的一个重要课题。



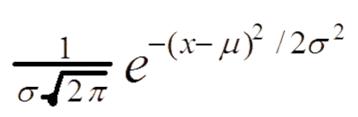
基本思想

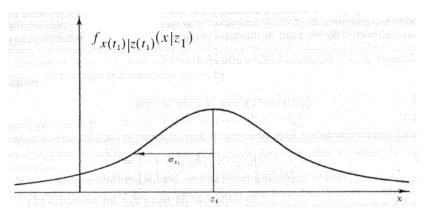
- ■给定一组合理的假设,可以 从观测到的历史数据中推断出 系统模型的描述。
- ■方法: 通过最大化(假设模型)后验概率



卡尔曼滤波本质上是一种数据融合技术

- 三个假设
 - ■线性模型
 - ■白噪声
 - ■正态分布的噪声





在三个假设基础上,合并旧信息和新的信息。



卡尔曼滤波本质上是一种数据融合技术

- ■合并不同传感器数据
- ■合并不同时间数据
- ■仅需要上一个时刻的信息

包含校正和预测两个环节,可通过扩展 用于非线性系统

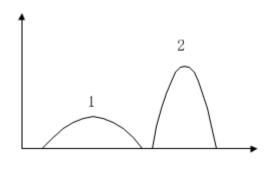
大纲



- ■估计器
- ■卡尔曼滤波
- •校正的理论基础
- ■预测与校正
- ■粒子滤波



■假设有两个带有噪声的位置观测数据



$$p_i(x) = \frac{1}{\sigma_i \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma_i^2}\right) (i = 1,2)$$

■描述观测数据 $p_{12}(x) = p_1(x)p_2(x)$

$$p_{12}(x) \propto \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) = \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-\overline{x}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$



■描述观测数据 $p_{12}(x) = p_1(x)p_2(x)$

$$p_{12}(x) \propto \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) = \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-\overline{x}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

$$\bar{x}_{12} = ?$$

正态分布,均值出现的位置概率最大

$$\sigma_{12}^2 = ?$$

$$\frac{dp_{12}}{dx}\bigg|_{\overline{x}_{12}} = -\left[\frac{\overline{x}_{12} - \overline{x}_{1}}{\sigma_{1}^{2}} + \frac{\overline{x}_{12} - \overline{x}_{2}}{\sigma_{2}^{2}}\right] \cdot p_{12}(\overline{x}_{12}) = 0$$



■描述观测数据 $p_{12}(x) = p_1(x)p_2(x)$

$$p_{12}(x) \propto \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) = \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-\overline{x}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

$$\overline{x}_{12} = ? \qquad \overline{x}_{12} = \left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \overline{x}_1 + \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right) \overline{x}_2$$

$$\sigma_{12}^2 = ?$$
 $\sigma_{12}^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$



■描述观测数据 $p_{12}(x) = p_1(x)p_2(x)$

$$p_{12}(x) \propto \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) = \exp\left(-\frac{(x-\overline{x}_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x-\overline{x}_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)$$

■假设在时间t观测为 (x_i,σ_i) ,我们的预测为 $(\hat{x}_i,\hat{\sigma}_i^2)$

$$p_{i} p_{i+1} \bar{x}_{12} = \left(\frac{\sigma_{2}^{2}}{\sigma_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}}\right) x_{1} + \left(\frac{\sigma_{1}^{2}}{\sigma_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}}\right) x_{2}$$

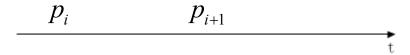
$$\sigma_{12}^{2} = \frac{\sigma_{1}^{2} \sigma_{2}^{2}}{\sigma_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}} t$$

$$\hat{x}_{1} = x_{1} \hat{x}_{2} = \left(\frac{\sigma_{2}^{2}}{\hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}}\right) \hat{x}_{1} + \left(\frac{\hat{\sigma}_{1}^{2}}{\hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}}\right) x_{2} = \hat{x}_{1} + \frac{\hat{\sigma}_{1}^{2}}{\hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}} (x_{2} - \hat{x}_{1})$$

$$\hat{\sigma}_{1}^{2} = \sigma_{1}^{2} \hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2} = \left(1 - \frac{\hat{\sigma}_{1}^{2}}{\hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}}\right) \hat{\sigma}_{1}^{2}$$



■假设在时间t观测为 (x_i,σ_i) ,我们的估计为 $(\hat{x}_i,\hat{\sigma}_i^2)$



■在第一步

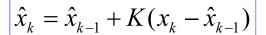
$$\hat{x}_1 = x_1$$

$$\hat{\sigma}_1^2 = \sigma_1^2$$

■在第二步

$$\hat{x}_{2} = \left(\frac{\sigma_{2}^{2}}{\hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}}\right) \hat{x}_{1} + \left(\frac{\hat{\sigma}_{1}^{2}}{\hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}}\right) x_{2} = \hat{x}_{1} + \left(\frac{\hat{\sigma}_{1}^{2}}{\hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}}\right) (x_{2} - \hat{x}_{1})$$

$$\hat{\sigma}_{2}^{2} = \frac{\hat{\sigma}_{1}^{2} \sigma_{2}^{2}}{\hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}} = \left(1 - \frac{\hat{\sigma}_{1}^{2}}{\hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}}\right) \hat{\sigma}_{1}^{2}$$



$$\hat{\sigma}_k^2 = (1 - K)\hat{\sigma}_{k-1}^2$$

增益K

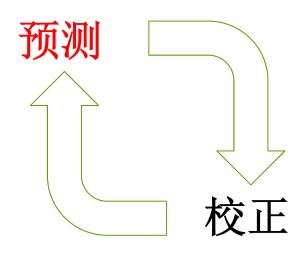
更新

大纲



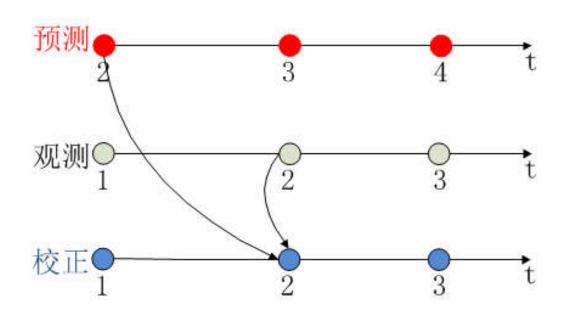
- ■估计器
- ■卡尔曼滤波简介
- ■校正理论基础
- ■预测与校正
- ■粒子滤波





实现估计器的两个步骤

顺序?





卡尔曼滤波的预测中所考虑的运动

■动态运动
 x + vdt 可能包含更多的参数。
 ■可控运动
 从外部引入系统的控制指令

 随机运动

未知的运动,高斯分布的随机运动



建立预测方程

■动态运动←

x + vdt 可能包含更多的参数。

■可控运动←

从外部引入系统的控制指令

■随机运动 ← — —

运动方程M=F(x),系统 变量如何按照已知规律 变化

引入控制变量u

引入影响系统的随机因素

未知的运动,高斯分布的随机运动



建立预测方程

$$\mathbf{x}_{k} = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k}$$

$$\downarrow \qquad \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{\triangle t^{2}}{2} \\ \triangle t \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad u = a$$

$$\sim N(0, Q)$$

$$x_{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_{x} \\ v_{y} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 1 & 0 & dt \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



建立观测方程

$$\mathbf{z}_{k} = \mathbf{H}_{k}^{\mathsf{T}} \mathbf{x}_{k} + \mathbf{v}_{k}$$

$$\sim N(0, R_{k})$$

$$\mathbf{v_k} \sim N(0, R_k)$$

$$z_k = \begin{bmatrix} z_x \\ z_y \end{bmatrix}_k \qquad \mathbf{H_k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \qquad x_k = \begin{bmatrix} y \\ v_x \end{bmatrix}$$

$$x_k = \begin{bmatrix} x \\ y \\ v_x \\ v_y \end{bmatrix}$$

预测与校正

■ 预测

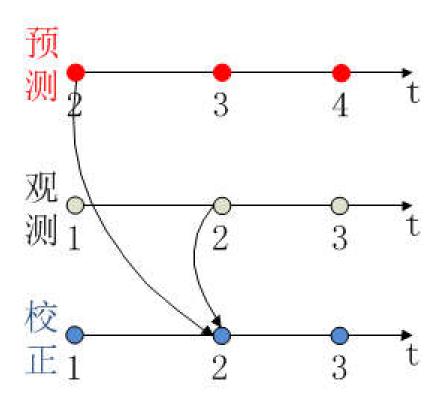
$$\mathbf{x}_{k}^{-} = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k}$$

■ 更新方差

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

$$(\mathbf{P}^- = \Sigma^-)$$





预测与校正

预测→更新方差

$$\mathbf{x}_{k}^{-} = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{w}_{k}$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{F} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

观测→校正

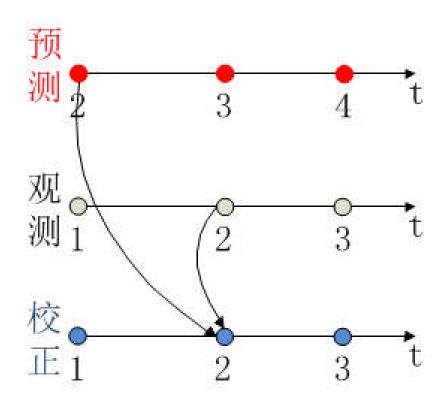
$$\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-$$

$$\mathbf{P}_{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k} \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k}^{-} \qquad \text{ $ \overline{\nabla} \mathbf{E} $ }$$

更新

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K} \Big(\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^- \Big)$$







需要被预测的值

■增益:
$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T \left(\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1}$$

$$\hat{\sigma}_{2}^{2} = \frac{\hat{\sigma}_{1}^{2} \sigma_{2}^{2}}{\hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}} = \left(1 - \frac{\hat{\sigma}_{1}^{2}}{\hat{\sigma}_{1}^{2} + \sigma_{2}^{2}}\right) \hat{\sigma}_{1}^{2}$$

增益K

$$\mathbf{P}_{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k} \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k}^{-}$$

■整体流程

- 预测

$$\hat{\mathbf{x}}_{k}^{-} = \mathbf{F}\hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1}$$
$$\mathbf{P}_{k}^{-} = \mathbf{F}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{F}^{T} + \mathbf{Q}_{k-1}$$

- 校正(观测值)

$$\mathbf{K}_{k} = \mathbf{P}_{k}^{-} \mathbf{H}^{T} (\mathbf{H} \mathbf{P}_{k}^{-} \mathbf{H}^{T} + \mathbf{R})^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k} = \hat{\mathbf{x}}_{k}^{-} + \mathbf{K}_{k} (\mathbf{z}_{k} - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_{k}^{-})$$

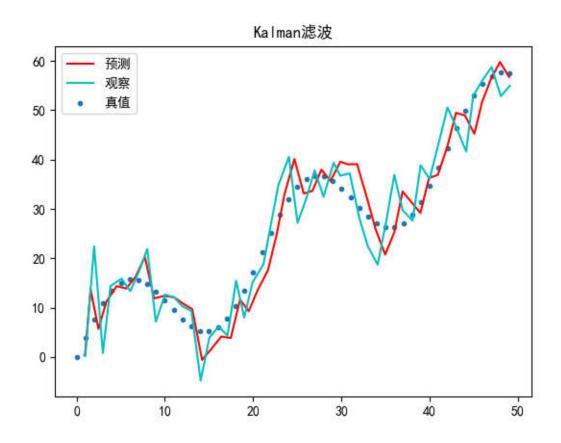
$$\mathbf{P}_{k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k} \mathbf{H}) \mathbf{P}_{k}^{-}$$



实例演示



1D位置预测



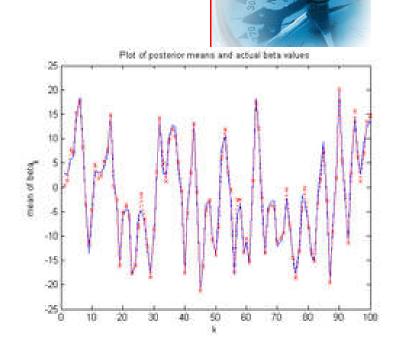
大纲



- ■估计器
- ■卡尔曼滤波
- ■校正的理论基础
- ■预测过程
- ■粒子滤波

粒子滤波简介

■粒子滤波(PF: Particle Filter)的思想基于蒙特卡洛方法(Monte Carlo methods),它是利用粒子集来表示概率,可以用在任何形式的<u>状态空间模型</u>上。其核心思想是通过从后验概率中抽取的随机状态粒子来表达其分布,是一种顺序重要性采样法(Sequential Importance Sampling)。



- ■粒子滤波有很多名字
 Importance Sampling, the Metropolis Algorithm, Monte Carlo Methods,
 CONDENSATION algorithm
- ■源于Bayes估计的顺序采样(SIS)方法(Hammersley 1950-1960)
- ■基于SIS的Bootstrap方法(Gordon 1993)

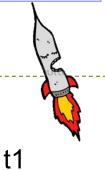
粒子滤波简介





$$\hat{x}_{k} = \hat{x}_{k-1} + K(x_{k} - \hat{x}_{k-1})$$

$$\hat{\sigma}_k^2 = (1 - K)\hat{\sigma}_{k-1}^2$$



粒子滤波简介 t1

粒子滤波简介

■粒子滤波解决

- 1. 我们想知道A
- 2. 我们能够测量A的一些相关的信息
- 3. 我们知道这些相关信息和A之间的关系

粒子滤波简介

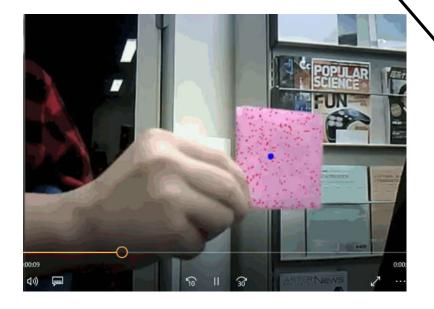


■一种依赖多种不同假设的信息融合技术

$$P(x_t \mid y_{1:t}) = \frac{1}{c_t} P(y_t \mid x_t) \int_Z P(x_t \mid x_{t-1} = z) P(x_{t-1} = z \mid y_{1:t-1}) dz$$

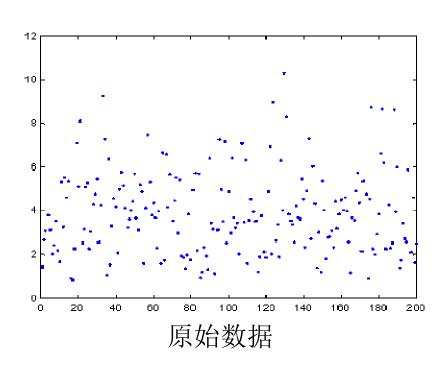
运动模型

使用的分布(粒子)

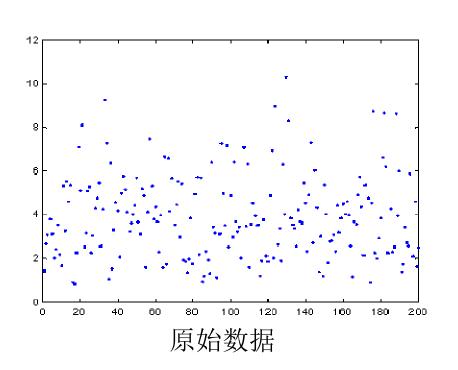


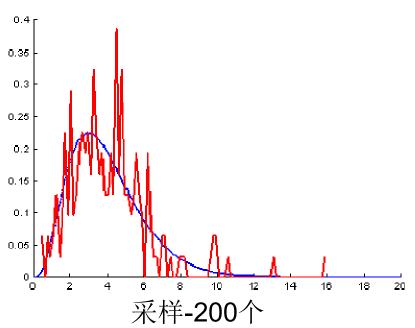
观测模型(=权值)



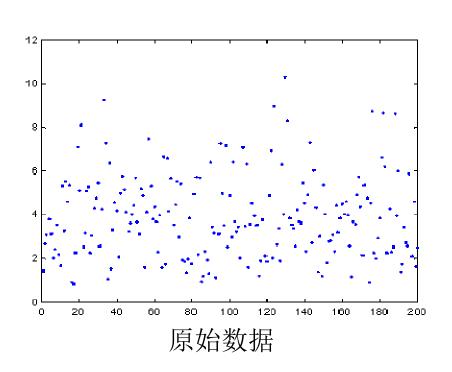


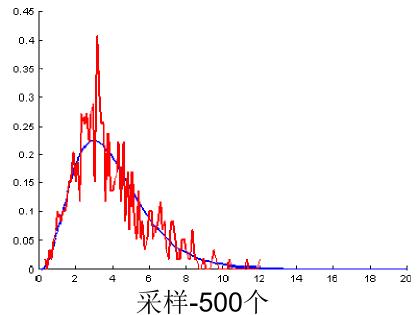


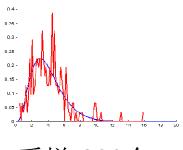






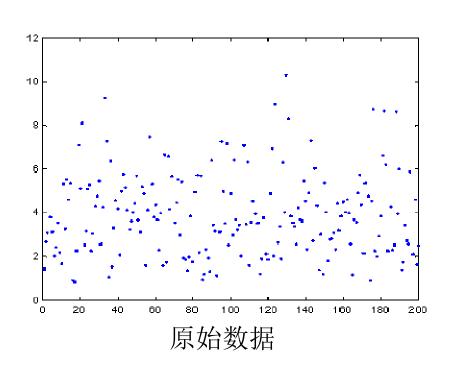


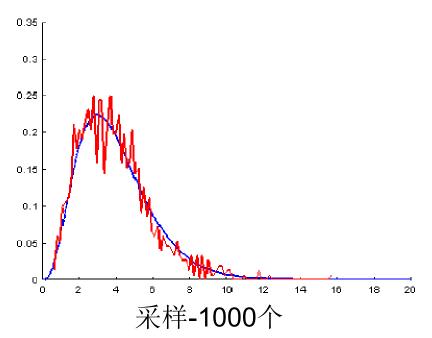


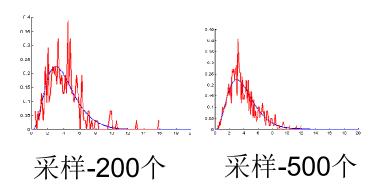


采样-200个

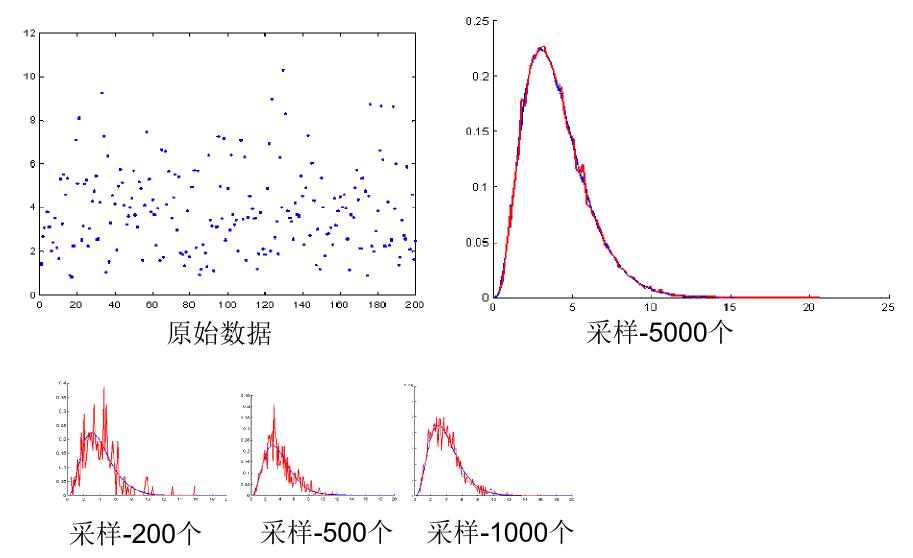




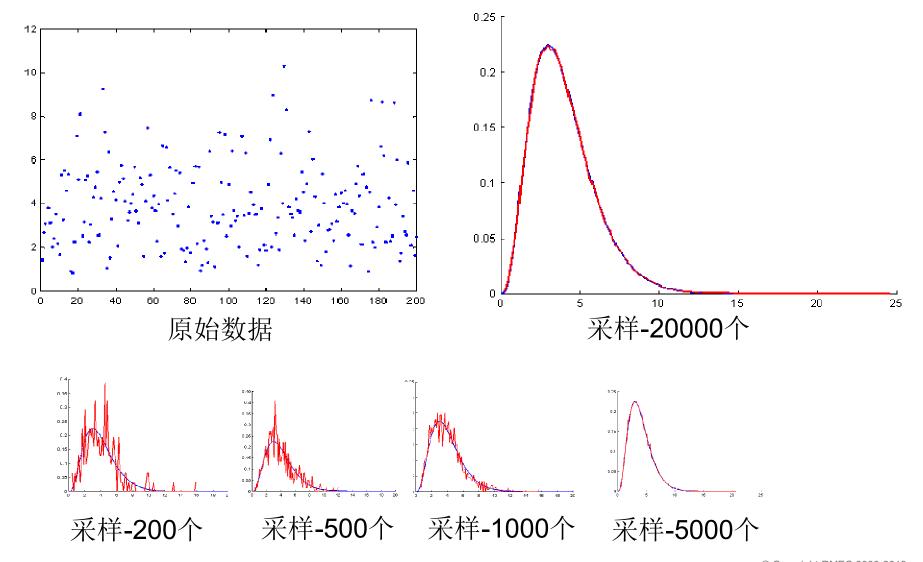






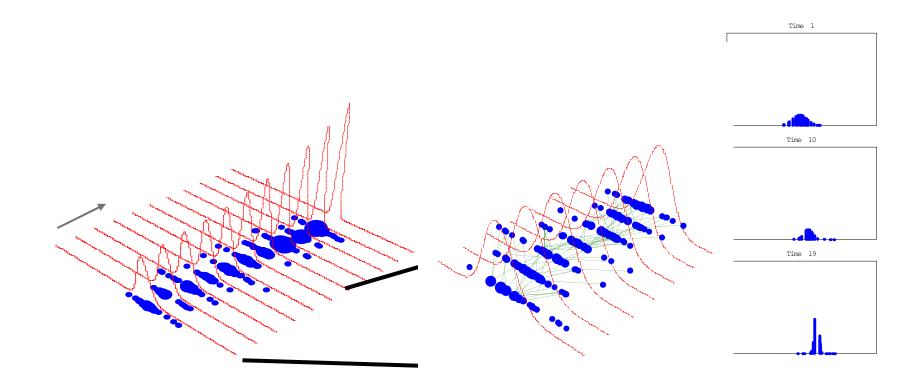






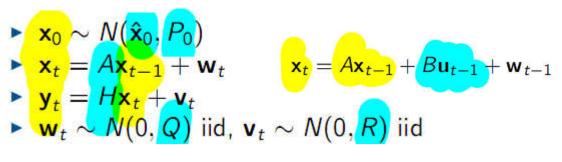


■顺序重要性采样

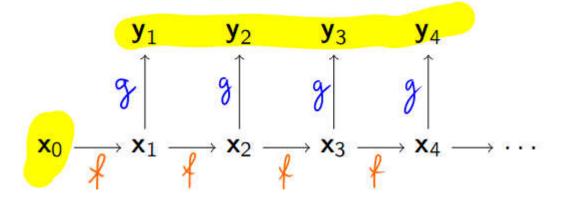




Kalman Filter



线性模型



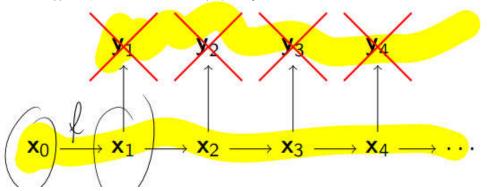


Particle Filter 的策略

■根据初始概率分布,采样N个样本(粒子),设计权值

$$(\mathbf{x}_0^{(1)}), \ldots, \mathbf{x}_0^{(N)} \sim \pi(\mathbf{x}_0)$$

- ■在其后每一步,根据具体问题的观测更新粒子权值
- ■在每一步使用所有粒子近似表达Xi的分布



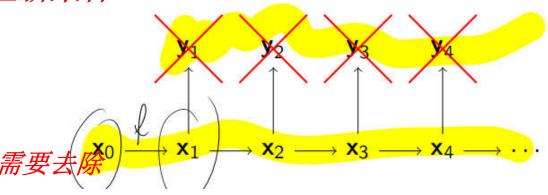


粒子重采样

■根据初始概率分布,采样N个样本(粒子)

$$(\mathbf{x}_0^{(1)}), \ldots, \mathbf{x}_0^{(N)} \sim \pi(\mathbf{x}_0)$$

- ■在其后每一步,根据具体问题更新粒子(根据观测)
- ■根据更新粒子, 重新采样



粒子存在退化的情况,需要去除0 权值过低的粒子



粒子滤波器的表达

$$Bel(\overline{x}) \approx \{x^i, w^i\} \ i \in [1..m]$$

- ▶ m 表示粒子的数量
- $> x^i$ 表示每个粒子要预测的状态
- $> w^i$ 表示每个粒子相应的权值,且 $\Sigma w^i = 1$

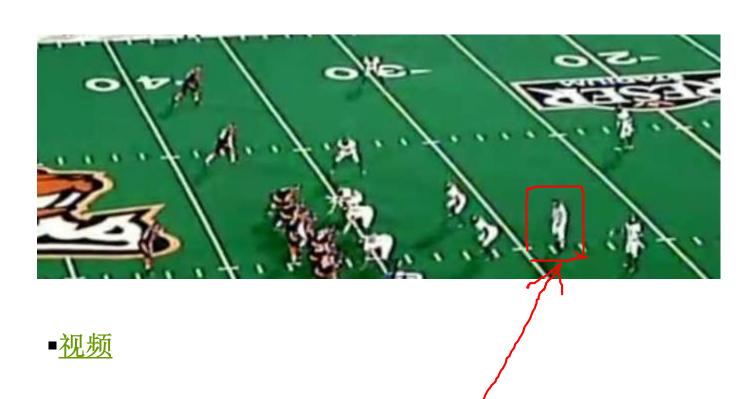


```
function X_{k+1} = runFilter(X_k, z_k, u_k)
X_{k+1} = \emptyset
for i = 1: m
 generate random x from X_k based on sample weights;
 generate random x' \sim p(x' | u_k, x);
 w = p(z_k \mid x');
 Insert (x', w) \in X_{k+1};
end
Normalize weight factors \forall w_i \in X_{k+1};
return X_{k+1};
```

 $■u_k$ 表示预测目标的运动, z_k 为观测状态



■典型实例 - 基于视频的目标跟踪





- ■典型实例 基于视频的目标跟踪
 - ■第一步: 提取目标特征, 初始化粒子滤波器。







■第二步:搜索,均匀撒点或者高斯分布撒点





- ■典型实例 基于视频的目标跟踪
 - ■第三步:评估,将不同点取回的数据特征与原始特征相比较,将结果加权平均。

是否相似?

■第四步:根据相似度进行重采样





- ■典型实例 基于视频的目标跟踪
 - ■无论目标是否被遮挡, 重采样算法保证目标出现时可以重新跟踪



总结



■粒子滤波

需要记住的

- ■一种顺序重要性采样方法
- ■使用观测更新权值
- ■根据权值进行重采样
- ■同时考虑使用运动模型来预测粒子
- ■可用于人工智能、信号处理、金融风险分析和计算物理等不同领域。

作业-4



- ■1)在给出的Kalman Filter 代码实例的基础上(或自行寻找 Kalman的实现代码),设计目标物体的运动轨迹,测试Kalman Filter的跟踪效果;
- ■2)根据实验结果整理报告,说明Kalman Filter的原理,以及最基本的Kalman Filter有何局限性,给出可能的改进方法和相关文献。

课堂报告

000

- ■1) 选定一个作业/与课题相关问题
- ■2) 思路与方案
- ■3)预期实验设计与实施过程
- ■4) 预期实验结果与说明

■课堂报告:在第8周课堂上报告(准备ppt)。