# 第3章 二维随机变量及其分布

在客观世界中有许多随机试验的结果不能只用一个随机变量来描述。例如，对于钢的成分就需要同时指出它的含碳量、含磷量、含硫量等，每一个指标都是一个随机变量；对一只股票的投资价值而言，需要考虑股票的市盈率、市净率、资本报酬率、净值周转率等指标，这些指标也都是随机变量。通常这些随机变量并非孤立地存在着，他们之间可能存在着统计相依关系，因此有必要把他们看成一个整体来研究，这就引出了多维随机变量的概念，本章主要介绍二维随机变量及其分布。

## 3.1 二维随机变量及其分布函数

### 3.1.1 二维随机变量的概念

定义3.1 设Ω为随机试验Ε的样本空间，若对Ω中的每一个基本事件ω，都有唯一的是数组（X（ω），Y（ω））与之对应，则称（X（ω），Y（ω））为定义在Ω上的二维随机变量或二维随机向量，记作（X，Y）。

二维随机变量（X，Y）的性质不仅与X及Y的性质有关，而且还依赖于这两个随机变量的相互关系。

二位随机变量的概念可以推广到n维随机变量。

定义3.2 设随机试验Ε的样本空间为Ω，对于Ω中的每一个基本事件ω，都有唯一的n为实数组（（ω），（ω），⋯，（ω））与之对应，则称（（ω），（ω），⋯，（ω））为定义在样本空间Ω上的n为随机变量或n为随机向量。记作（，，⋯，）。

### 3.1.2 二位随机变量分布函数

定义3.3 设（X，Y）是二维随机变量，对于任意实数x，y，称二元函数

F（x，y）= P（X≤x，Y≤y） （3.1.1）

为（X，Y）的联合分布函数，简称分布函数。

二维随机变量(X,Y)分布函数的概率意义是：对任意实数x,y,F(x,y)是事件{X≤x}和{Y≤y}同时发生的概率。几何意义是：如果把(X,Y)看成平面上随机点的坐标，则F(x,y)是(X,Y)落入区域{(t,s)|t≤x,s≤y}(图3.1.1)内的概率。

F(x,y)具有以下性质：

1. F是x或y的不减函数，即对任意固定的y，当<时，F(,y)≤F(,y)；对任意固定的x，当<时，F(x,)≤F(x,;
2. F==0,==0;

F==0,==1;

1. F分别是x和y的右连续函数，即有

F= F, F= F.

1. 对任意,(<)即,(<),有

Ρ= F(,)− F(,) − F(,)+ F(,).

若二元实数函数F(),满足上述性质(1)~(4)(实际上，由(4)可以推出(1),因此只满足(2)~(4)即可),则必存在随机变量,使F是的联合分布函数.在这里值得注意的是与一维随机变量不同,刻画一个联合分布函数需要有性质(4),即从性质(1)~(3)推不出(4).

例3.1 设F=容易验证F满足上述(1)~(3)性质，但不满足(4).因为

F−F− F+ F=1−1−1+0<0.

### 3.1.3 二维随机变量的边缘分布函数

设二维随机变量的分布函数为F,其分量的分布函数,称为关于和的边缘分布函数.由的联合分布函数可以求得和的边缘分布函数.

=Ρ=Ρ

=

=

= F,

同理可得= F.

例3.2 设二维随机变量的联合分布函数为

F=.

求关于和的边缘分布函数,.

解 有边缘分布函数的定义有

==

= ,

== =

## 3.2 二维离散型随机变量及其概率分布

### 3.2.1 联合分布

设二维随机变量可能取值是有限对或可列无限多对,对称是二维离散型随机变量.与一维离散型随机变量一样,的分布也可由它的取值及其对应取值的概率来确定.

设二维离散型随机变量的所有可能取值为,且事件的概率为,称

Ρ=

为二维离散型随机变量的联合分布律,简称的分布律.

通常用如下的表格表示的联合分布律.

显然满足以下两条性质

≥0, =1.

例3.3 一只口袋中有两只白球,2只黑球,取到白球记作“0”,取到黑球记作“1”,且每次各个球从带中被取到的可能性相同,如果从袋中不放回的、地每次取一只球,去两次,以,分别记第一次、第二次取到球的情况.求:

1. 的联合分布律;
2. .

解 (1)可能取指为,,,.

由乘法公式可算出取各个可能值得概率为

Ρ=ΡΡ=×=.同理

Ρ=×=,

Ρ=×=,

Ρ=×=.

于是,的联合分布律即为

1. 事件=⋃⋃且,与互不相容,因此

=Ρ+Ρ

=++=

或

1−=1−=1−=.

例3.4 在例3.3中如果将不放回抽样改为有放回抽样,试求的联合分布律.

解 在有放回抽样的情形下,的取值仍为,.

但取值的概率变为

Ρ =×=,

Ρ=×=,

Ρ=×=,

Ρ=×=.

于是的联合分布律为

例3.5 设事件A,B满足P=,P= P=,令

试求的联合分布律.

解 由P=,P==,得P=.

由P==,得P=.于是

Ρ= P=1−P=1− P− P+ P=,

Ρ= P= P− P=,

Ρ= P= P− P=,

Ρ= P=

故的联合分布律为

### 3.2.2 边缘分布

设二维离散型随机变量的联合分布律为Ρ=,则随机变量的分布律为

Ρ=Ρ

=P+ P+⋯+ P+⋯

=++⋯= ,

记为,称为关于的边缘分布律.同理关于的边缘分布律记作,即

=P= .

例3.6 试求例3.3中关于和的边缘分布律.

解 由例3.3中的联合分布律可知

Ρ=Ρ+Ρ= + =,

Ρ=Ρ+Ρ= + =,

于是的边缘分布律为

同理的边缘分布律为

的联合分布律与边缘分布律如下表所示

在上表中,中间部分是的联合分布律,而边缘部分是与的概率分布,它们由联合分布律经同一行或同一列相加而得,这种表称为列联表.与的概率分布处于表的边缘部分,因此称为边缘分布律.

例3.7 试求例3.4中与的边缘分布律.

解 由的联合分布律可直接求得律和的边缘分布律如下：

比较例3.6和例3.7的结果,和的边缘分布律是相同的,但他们的联合分布律却完全不同.因此联合分布律不能由边缘分布律唯一确定,也就是说二维随机变量的性质不一定能由它的两个分量的个别性质来确定,有时还必须考虑它们之间的联系,这也说明了研究多维随机变量的必然性.

### 3.2.3 条件分布

设二维离散型随机变量的联合分布律为,关于和的边缘分布律为和.设>0,则在事件发生条件下事件发生的概率为

Ρ== ,

容易验证上述条件概率满足Ρ≥0和=1.因此,上式给出了在条件下随机变量的分布律.称该分布在条件下的条件分布律,即

类似的,对于固定的i,若Ρ>0,则称

Ρ= ,

为在条件下随机变量的条件分布律.

例3.8 求在例3.3中，在条件下的条件分布律.

解 由条件分布律的概念

Ρ ===，

Ρ ===,

故在条件下,的条件分布律为

由的联合分布律可得关于和的边缘分布律及条件分布律,由概率的乘法公式

Ρ

=ΡΡ=ΡΡ ,

可知,由的边缘分布律和给定的条件下的条件分布律(或由的边缘分布律和给定的条件下的条件分布律)也可唯一确定的联合分布律.

## 3.3 二维连续型随机变量及其分布

### 3.3.1 联合分布

与一维连续型随机变量类似,设二维随机变量的联合分布函数为F,如果存在非负可积函数,对于任意

F=, (3.3.1)

则称是二维连续型随机变量,为的联合概率密度或联合密度函数.

联合概率密度具有如下性质:

1. =1.

这两条性质是实函数成为某随即变量联合概率密度的充要条件.

1. 设D为平面上的区域,则事件的概率为

P= (3.3.2)

1. F为连续函数且在的连续点处有=.

例3.9 设二维连续型随机变量的联合概率密度为

=

求: (1)常熟c;

(2) P.

解 (1)由性质=1得

=1,

即 c=1,

从而c=.

(2)由P及的联合概率密度可得(图3.3.1)

P=

==

=.

下面给出两种常见的二维连续型随机变量

1. 二维均匀分布

设G为平面上的一个有界区域,其面积为S.如果随机变量的联合概率密度为

= (3.3.3)

则称服从G上的二维均匀分布,记作~U.

1. 二维正态分布

如果二位随机变量的联合概率密度为

=

, (3.3.4)

其中,,>0,−1<ρ<1,则称服从二维正态分布,记作~N.

### 3.3.2 边缘密度

设二维连续型随机变量的联合概率密度为,则

= ,

= ,

(3.3.5)

和

(3.3.6)

关于和的边缘概率密度.

由联合概率密度可以求边缘概率密度,但要注意积分区域的确定.

例3.10 设二维随机变量服从区域G上的均匀分布,其中

G=

求：(1)的联合概率密度;

(2)边缘概率密度和.

解 (1)如图3.3.2所示,区域G的面积S=×1×2=1,所以的联合概率密度为

=

(2)先求 x≤0或x≥1时, =0,而当0<x<1时,有

==2x.

为

=

再求,当y≤−1或y≥1时,=0,当−1<y<0时,

==1+y,

==1−y,

所以的边缘概率密度为

例3.11 设~N,求和的边缘概率密度.

解

=

令t=,则有

=

=

即

~N

同理

=

即N

由例3.11可知二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布,并且不依赖于参数ρ,也即对相同的不同(二维正态分布不同),但对应的边缘分布却都一样,这一事实说明具有相同边缘分布的多维随机变量的联合分布可以不同.因此,只由和的边缘分布,一般来说不能确定的联合分布.

### 3.3.3 条件分布

设为二维连续型随机变量,其联合概率密度为,利用在的分布函数P,给出条件概率密度.由于在连续场合,P(),在条件下考虑的条件概率,于是

P

,

把上式的分子分母分别除以,则当

P

因此,在 =条件下,的概率密度为,记作.称为在 =条件下的条件概率密度.

同理在的条件下关于的条件概率密度=,可以验证条件概率密度满足随机变量的概率密度的两条基本性质.

例3.12 设和的联合概率密度为

=

求P.

解 当时. P=0.

当时,=

因此,当时,  
 P=

## 3.4 随机变量的独立性

设,为随机变量,如果对任意的,事件互相独立,

即P= P,则称与

定义3.4 设F

F=, (3.4.1)

则称随机变量与

当是离散型随机变量时,与

P= P

即

.

当是连续型随机变量时,与

= (3.4.3)

在的一切公共连续点上成立.

在3.3节曾经指出,由边缘分布一般不能确定联合分布,但从上述讨论可以看出,相互独立随机变量的边缘分布可唯一确定其联合分布.

例3.13 试判断3.3和例3.4中随机变量与

解 对于例3.3,我们已经知道

由上表可见

=,

与

对于例3.4,的联合分布律及边缘分布律如下：

显然,对所有.都有,所以与.事实上,由随机变量相互独立的直观意义可以看出在有放回抽样中,与取值的概率是互不影响的,与相互独立也就是理所应当的.因此,在实际中判断与是否独立.更多地是依赖于的取值与的取值的概率是否有影响.

例3.14 甲、乙两人相约在某地见面,他们 到达的时间是相互独立的,并且都均匀分布在下午2点至下午3点这段时间,试求先到者至少要等候10分钟的概率.

解 设甲、乙到达时间分别是下午2点分和下午2点分,则与均服从的均匀分布,所以与的概率密度分别为

= =

又因为与相互独立,则的联合密度为

==

所求事件的概率可表示为Ρ=.如图3.4.1所示,由对称性可知,

Ρ=2Ρ

=2

=

=.

注3.1 本例也可由概率集合定义求得Ρ==.

例3.15 设~N,证明与相互独立的充要条件是

证明 当,有二维正态分布的定义及与的边缘分布易推得

故与相互独立.

反之,若与相互独立,取=,,则应有

=,

也即

=−,

从而=1,故ρ=0.

随机变量的独立性可推广到n维随机变量的情况.设n维随机变量的分布函数和边缘分布函数分别是F,若对任意的实数,有

F=⋯,

则称相互独立.

若是离散型随机变量,则相互独立的充分必要条件是

P=PP⋯ P.

若是连续型随机变量,则相互独立的充要条件是

=⋯

在,的一切公共连续点上成立,其中

是的联合概率密度,是

的边缘概率密度.

进一步,若对任意的有

F=

其中依次为随机变量,和的分布函数,则称和

相互独立.

下面给出一个在数理统计中很有用的定力,证明略.

定理3.1 设和相互独立,则和相互独立,又若是连续函数,则h与g也相互独立.

## 3.5 二维随机变量函数的分布

已知二维随机变量的联合分布,函数Z=g的分布,是本节要讨论的问题.

### 3.5.1 离散型随机变量函数的分布

设二维离散型随机变量的分布律为P=.设Z=g是的函数,则Z也是离散型的,Z的可能取值为

= g,其分布律为

如果有多个g的值相等,应合并为一项,相应的概率相加.

例3.16 设的联合分布律为

试求: (1)的分布律;

(2)=max的分布律.

解 由的联合分布律可列出下表

从而得到的分布律为

的分布律为

例3.17 设相互独立且分别服从参数为,的泊松分布,证明:服从参数为+的泊松分布.

证明 由已知的可能取值为0,1,2,⋯且

P

+⋯+P

=+

+⋯+

=++⋯+

=

=,

因此,服从参数为+的泊松分布.

我们把独立同分布的随机变量之和仍服从同一分布的性质称为该分布具有可加性,例3.17的结果表明泊松分布具有可加性.

例3.18 甲乙两商场从同一仓库提货,分两城出售统一品牌商品,两家的月销量分别服从泊松分布P和P,求该仓库每月应准备多少件商品,才能以不

低于90%的概率保证供货需求.

解 设分别表示甲乙两商场的月销售量,即,,由已知相互独立,因此.若仓库月库存量为,则应满足

P≥0.9

即≥0.9.查表可知≥15,即该仓库每月至少应准备15件商品.

### 3.5.2 连续型随机变量函数的分布

设二维连续型随机变量的联合概率密度为是随机变量的函数.求Z得概率密度的一般方法是:

1. 确定Z的值域R
2. 对任意的z∈R,求出Z的分布函数

= P= P

= P,

其中区域=

1. 求导得

=

例3.19 在射击训练中,以靶心为原点,实际击中的弹着点坐标是二位随机变量且服从正态分布N,求弹着点到靶心距离Z=

解 由于N,所以的联合概率密度为

,

对任意的z≥0,有

= P= P=，

利用极坐标求上述二重积分,得

=.

当z<0时,=0.从而Z的概率分布为

==

该分布称为瑞利分布.

在理论上对任何形式的,都可计算随机变量Z=的概率密度,

但是具体操作上会遇到计算上的麻烦,因此仅就下面几个简单的函数来讨论.

1. Z=的分布

设的联合概率密度为,则Z=的分布函数为

= P=,

=,

令=−,作变换得

==

从而Z的概率密度为

=.

由的对称性,Z的概率密度也可表示为=

设关于的边缘概率密度分别为相互独立

时,则Z=的概率密度为

=.

或

=

上述两个公式称为卷积公式.

例3.20 设独立同分布的两个随机变量服从正态分布N,求Z=

的概率密度.

解 由~ N, N知的概率密度分别为

,

,

由卷积公式

=

=

=

=

即Z~N

一般地,若~N,~N且相互独立,则Z=服从正态分布N.推而广之,有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例3.21 设随机变量相互独立,其概率密度分别为

求Z=的概率密度.

解 如图3.5.2所示,由公式=及,

可得

当0<z<1时,==

当z≥1时,==

故Z的概率密度为

1. M=max及N=min的分布

设是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为和,

先求M=max的分布函数.由于事件

有

=P

又因为相互独立,于是M=max的分布函数为

=PP,

类似地,可得N=min的分布函数为

=P

=1−P

=1−

上述结果可推广到n个独立的随机变量的情况.设n个相互对立的随机变量,它们的分布函数分别为

max的分布函数分别为

=,

=1−,

特别地,当独立同分布于F时,有

1−.

例3.22 对某种电子装置的输入测量了5次,得到的观察值,

设它们是相互独立的随机变量,且都服从同一分布

F

试求P.

解 令M=,由于独立同分布,于是

,那么

P

=1−

## 习题3

1. 设二位随机变量的联合分布函数为

F

求P

1. 某产品100件,其中一等、二等和三等品各80、10和10件,现从中随机取一件,记

求.

3.掷一枚均匀硬币两次,设表示第一次掷出正面的次数,表示这两次掷出正面的次数,试求:的联合分布律和边缘分布律,并判断是否独立?

4.已知服从参数P=0.6的0-1分布,在和下,关于的条件分布律如下表.

求：(1)的联合分布律;

(2)在时关于的条件分布律.

5.已知随机变量的概率分布为

且P的联合分布律及P

6.一个火箭发动机性能的两个指标是推力和混合比,设的联合概率密度为

求：(1)常数A;

(2)P

(3)的边缘概率密度.

7.设二位随机变量服从区域D=内的均匀分布,是判断是否为独立同分布？

8.设二位随机变量的联合概率密度为

1. 求常数A;(2)求的边缘概率密度;(3)判断是否独立？

9.设随机变量相互独立,其联合分布律如下表

求常数a和b.

10.设分别表示某电子仪器两个部件的寿命(单位:千小时),已知的联合分布函数为

1. 求
2. 判断
3. 求两个部件的寿命都超过100小时的概率.

11.设随机变量

求: (1)的联合分布;

1. 方程

12.设二维随机变量

求.

13.设二位随机变量的联合分布律为

求：(1)Z=的分布律;(2)M=max(3)N=min

14.设随机变量相互独立,其中

的概率密度为ϕ的概率密度.

15.设随机变量相互独立,其概率密度分别为

求Z=的概率密度.

16.设二维随机变量的联合概率密度为

求Z=的概率密度.

17.设随机变量独立同分布,其概率密度为

求Z=的概率密度.

18.设服从上的均匀分布,服从上的均匀分布,且相互独立,

求Z=min