# Metódos para Resolver Ecuaciones Diferencial Ordinarias de Primer Orden

February 12, 2020

- **Ecuación Diferencial de Variables Separables**
  De la forma $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)}$.
  Resolución

$$[\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)] * (\frac{dx}{h(y)}) \quad (1)$$
$$h(y)dy = g(x)dx \quad (2)$$
$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx \quad (3)$$
$$\boxed{H(y) = G(x) + c} \quad \text{ó} \quad \boxed{H(y) - G(x) = c}$$

- **Ecuación Diferencial Exacta**
  De la forma $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y) = 0}$, donde $\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$
  Resolución
  -Usando M(x,y)

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \quad (1)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}[F(x,y)] = M_y \quad (1.1)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = N_y + g'(y) = N_y \quad (1.2)$$
$$g'(y) = N_y - M_y \quad (1.3)$$
$$\int g'(y)dy = \int N_y - M_y dy \quad (1.4)$$
$$g(y) = \int N_y - M_y dy \quad (1.3)$$
$$F(x,y) = \int N(x,y)dx + \int N_y - M_y dy \quad (2)$$
$$\boxed{\int N(x,y)dx + \int N_y - M_y dy = c} \quad (3)$$

-Usando N(x,y)

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x) \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}[F(x,y)] = M_x \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = N_x + h'(x) = M_x \tag{1.2}$$

$$h'(x) = M_x - N_x \tag{1.3}$$

$$\int h'(x)dx = \int M_x - N_x dx \tag{1.4}$$

$$h(x) = \int M_x - N_x dx \tag{1.3}$$

$$F(x,y) = \int N(x,y)dx + \int M_x - N_x dx \tag{2}$$

$$\boxed{\int N(x,y)dy + \int M_x - N_x dx = c} \tag{3}$$

- **Ecuación Diferencial No Exacta**
  De la forma $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$, donde $\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}}$.
  Resolución
  Se tiene que encontrar una función $\mu(x)$ ó $\mu(y)$ para multiplicar toda la ecuación con este "factor integrante" y poder tener una ecuación exacta la cual se puede resolver.

  -Caso $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

$$[M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0](\mu(x))$$

$$\boxed{M(x,y)\mu(x)dx + N(x,y)\mu(x)dy = 0}$$

  -Caso $\mu(y)$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

$$[M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0](\mu(y))$$

$$\boxed{M(x,y)\mu(y)dx + N(x,y)\mu(y)dy = 0}$$

- **Ecuación Diferencial Lineal**
  De la forma $\boldsymbol{a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)}$.
  Esta ecuación se puede escribir en su "forma estándar" al dividir toda la ecuación entre $a_1(x)$. Dejando asi la siguiente ecuación: $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)}$.
  Resolución:

  i.)Obtner el factor integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.
  ii.)Multiplicar el factor integrante en ambos lados, en el lado izquierdo quedará una derivada del producto del factor integrante y la variable dependiente.

$$
\begin{aligned}
[\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)](\mu(x)) \\
\mu(x)\frac{dy}{dx} + P(x)\mu(x)y = f(x)\mu(x) \\
\frac{d}{dx}[\mu(x) * y] = f(x)\mu(x)
\end{aligned}
$$

iii.)Integrar a ambos lados y luego despejar para la variable dependiente. Obteniendo así, la solución.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{d}{dx}[\mu(x) * y] &= \int f(x)\mu(x)dx \\
\mu(x)y &= \int f(x)\mu(x)dx \\
&\boxed{y = \frac{1}{\mu(x)}\int f(x)\mu(x)dx} \\
&\boxed{y = \frac{1}{e^{\int P(x)}}\int f(x)e^{\int P(x)}dx}
\end{aligned}
$$

- **Ecuación Diferencial Homogénea**
  De la forma $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$ si las funciones $\boldsymbol{M(x,y)}$ y $\boldsymbol{N(x,y)}$ son funciones homogéneas. ( $f(tx,ty) = t^{\alpha}f(x,y)$, función Homogénea de grado $\alpha$ ).
  Resolución

  Se utiliza la sustitución (aunque tambie se puede aplicar $v = \frac{x}{y}$):

$$
\begin{aligned}
u = \frac{y}{x} \qquad\qquad & y = ux \\
& dy = udx + xdu \\
M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad\qquad & M(x,ux)dx + N(x,ux)(udx + xdu) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x^{\alpha}M(1,u)dx + x^{\alpha}N(1,u)(udx + xdu) = 0 \\
x^{\alpha}M(1,u)dx + ux^{\alpha}N(1,u)dx + ux^{\alpha+1}N(1,u)du = 0 \\
x^{\alpha}[M(1,u) + uN(1,u)]dx &= -x^{\alpha+1}N(1,u)du \\
[x^{\alpha}[M(1,u) + uN(1,u)]dx &= -x^{\alpha+1}N(1,u)du](-\frac{1}{(x^{\alpha-1})(M(1,u) + N(1,u))}) \\
-\frac{1}{x}dx &= \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}du \\
\int -\frac{1}{x}dx &= \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}du
\end{aligned}
$$

  Deshacer la sustitución y despejar para la variable dependiente de ser posible.

- **Ecuación Diferencial de Bernoulli**
  De la forma $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n}$, donde $n \neq 0, n \neq 1$.
  Resolución

Utilizar la sustitución:

$$u = y^{1-n} \qquad\qquad y = u^{\frac{1}{1-n}}$$

$$du = (1-n)y^{-n} \qquad\qquad dy = (\frac{1}{1-n})(u^{\frac{1}{1-n}-1})du$$

Luego quedará una ecuación diferencial de las anteriormente vistas para resolver con su resolución acorde.