Metódos para Resolver Ecuaciones Diferencial Ordinarias de Primer Orden

February 17, 2020

- **Ecuación Diferencial de Variables Separables**
  De la forma $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)}$.
  Resolución

$$[\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)] * (\frac{dx}{h(y)}) \tag{1}$$

$$h(y)dy = g(x)dx \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(x)dx \tag{3}$$

$$\boxed{H(y) = G(x) + c} \quad \text{ó} \quad \boxed{H(y) - G(x) = c}$$

- **Ecuación Diferencial Exacta**
  De la forma $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$, donde $\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$
  Resolución
  -Usando M(x,y)

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}[F(x,y)] = N(x,y) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = M_y + g'(y) = N(x,y) \tag{1.2}$$

$$g'(y) = N(x,y) - M_y \tag{1.3}$$

$$\int g'(y)dy = \int (N(x,y) - M_y)dy \tag{1.4}$$

$$g(y) = \int (N(x,y) - M_y)dy \tag{1.3}$$

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int (N(x,y) - M_y)dy \tag{2}$$

$$\boxed{\int M(x,y)dx + \int (N(x,y) - M_y)dy = c} \tag{3}$$

-Usando N(x,y)

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x) \tag{1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}[F(x,y)] = M(x,y) \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = N_x + h'(x) = M(x,y) \tag{1.2}$$

$$h'(x) = M(x,y) - N_x \tag{1.3}$$

$$\int h'(x)dx = \int (M(x,y) - N_x)dx \tag{1.4}$$

$$h(x) = \int (M(x,y) - N_x)dx \tag{1.3}$$

$$F(x,y) = \int N(x,y)dy + \int (M(x,y) - N_x)dx \tag{2}$$

$$\boxed{\int N(x,y)dy + \int (M(x,y) - N_x)dx = c} \tag{3}$$

- **Ecuación Diferencial No Exacta**
  De la forma $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$, donde $\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial y}} \neq \boldsymbol{\frac{\partial N}{\partial x}}$.
  Resolución
  Se tiene que encontrar una función $\mu(x)$ ó $\mu(y)$ para multiplicar toda la ecuación con este "factor integrante" y poder tener una ecuación exacta la cual se puede resolver.

  -Caso $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

$$[M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0](\mu(x))$$

$$\boxed{M(x,y)\mu(x)dx + N(x,y)\mu(x)dy = 0}$$

  -Caso $\mu(y)$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

$$[M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0](\mu(y))$$

$$\boxed{M(x,y)\mu(y)dx + N(x,y)\mu(y)dy = 0}$$

- **Ecuación Diferencial Lineal**
  De la forma $\boldsymbol{a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)}$.
  Esta ecuación se puede escribir en su "forma estándar" al dividir toda la ecuación entre $a_1(x)$. Dejando asi la siguiente ecuación: $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)}$.
  Resolución:

  i.)Obtner el factor integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.
  ii.)Multiplicar el factor integrante en ambos lados, en el lado izquierdo quedará una derivada del producto del factor integrante y la variable dependiente.

$$[\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)](\mu(x))$$
$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + P(x)\mu(x)y = f(x)\mu(x)$$
$$\frac{d}{dx}[\mu(x) * y] = f(x)\mu(x)$$

iii.)Integrar a ambos lados y luego despejar para la variable dependiente. Obteniendo así, la solución.

$$\int \frac{d}{dx}[\mu(x) * y] = \int f(x)\mu(x)dx$$
$$\mu(x)y = \int f(x)\mu(x)dx$$
$$\boxed{y = \frac{1}{\mu(x)}\int f(x)\mu(x)dx}$$
$$\boxed{y = \frac{1}{e^{\int P(x)}}\int f(x)e^{\int P(x)}dx}$$

- **Ecuación Diferencial de Coeficientes Homogéneos**
  De la forma $\boldsymbol{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$ si las funciones $\boldsymbol{M(x,y)}$ y $\boldsymbol{N(x,y)}$ son funciones homogéneas. ($f(tx,ty) = t^{\alpha}f(x,y)$, función Homogénea de grado α).
  Resolución

  Se utiliza la sustitución (aunque tambie se puede aplicar $v = \frac{x}{y}$):

$$u = \frac{y}{x} \qquad\qquad y = ux$$
$$dy = udx + xdu$$
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \qquad M(x,ux)dx + N(x,ux)(udx + xdu) = 0$$

$$x^{\alpha}M(1,u)dx + x^{\alpha}N(1,u)(udx + xdu) = 0$$
$$x^{\alpha}M(1,u)dx + ux^{\alpha}N(1,u)dx + ux^{\alpha+1}N(1,u)du = 0$$
$$x^{\alpha}[M(1,u) + uN(1,u)]dx = -x^{\alpha+1}N(1,u)du$$
$$[x^{\alpha}[M(1,u) + uN(1,u)]dx = -x^{\alpha+1}N(1,u)du](-\frac{1}{(x^{\alpha-1})(M(1,u) + N(1,u))})$$
$$-\frac{1}{x}dx = \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}du$$
$$\int -\frac{1}{x}dx = \int \frac{N(1,u)}{M(1,u) + uN(1,u)}du$$

  Deshacer la sustitución y despejar para la variable dependiente de ser posible.

- **Ecuación Diferencial de Bernoulli**
  De la forma $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n}$, donde $n \neq 0, n \neq 1$.
  Resolución

Utilizar la sustitución:

$$u = y^{1-n} \qquad\qquad y = u^{\frac{1}{1-n}}$$

$$du = (1-n)y^{-n} \qquad\qquad dy = (\frac{1}{1-n})(u^{\frac{1}{1-n}-1})du$$

Luego quedará una ecuación diferencial de las anteriormente vistas para resolver con su resolución acorde.

- **Ecuación Diferencial con Coeficientes Lineales**
  De la forma $\boldsymbol{(ax + by + c)dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)dy = 0}$ ó tambien $\boldsymbol{\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}}$.
  Resolución

  Resolver el sistema de ecuaciones:
  $\begin{cases} ax + by + c \\ \alpha x + \beta y + \gamma \end{cases}$
  Con la solución (h, k). Con la solución se procede a realizar la sustitución:

$$x = u + h \qquad\qquad y = v + k$$

$$dx = du \qquad\qquad dy = dv$$

  La sustitución anterior dejará la ecuación en una forma $\boldsymbol{(au + bv)du + (\alpha u + \beta v)dv = 0}$ ó tambien $\boldsymbol{\frac{dv}{du} = \frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}}$ la cual se puede resolver utilizando métodos anteriormente vistos (principalmente homogéneas, exactas y/o no exactas).