

Metodos para Resolver Ecuaciones Diferencial Ordinarias de Primer Orden

February 23, 2020

- **Ecuación Diferencial de Variables Separables**

De la forma $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$.

Resolución

$$\left[\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)\right] * \left(\frac{dx}{h(y)}\right) \quad (1)$$

$$h(y)dy = g(x)dx \quad (2)$$

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx \quad (3)$$

$$\boxed{H(y) = G(x) + c}$$

ó

$$\boxed{H(y) - G(x) = c}$$

- **Ecuación Diferencial Exacta**

De la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, donde $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

Resolución

-Usando M(x,y)

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}[F(x, y)] = N(x, y) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = M_y + g'(y) = N(x, y) \quad (1.2)$$

$$g'(y) = N(x, y) - M_y \quad (1.3)$$

$$\int g'(y)dy = \int (N(x, y) - M_y)dy \quad (1.4)$$

$$g(y) = \int (N(x, y) - M_y)dy \quad (1.3)$$

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + \int (N(x, y) - M_y)dy \quad (2)$$

$$\boxed{\int M(x, y)dx + \int (N(x, y) - M_y)dy = c} \quad (3)$$

-Usando $N(x,y)$

$$F(x, y) = \int N(x, y) dy + h(x) \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}[F(x, y)] = M(x, y) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = N_x + h'(x) = M(x, y) \quad (1.2)$$

$$h'(x) = M(x, y) - N_x \quad (1.3)$$

$$\int h'(x) dx = \int (M(x, y) - N_x) dx \quad (1.4)$$

$$h(x) = \int (M(x, y) - N_x) dx \quad (1.3)$$

$$F(x, y) = \int N(x, y) dy + \int (M(x, y) - N_x) dx \quad (2)$$

$$\boxed{\int N(x, y) dy + \int (M(x, y) - N_x) dx = c} \quad (3)$$

• **Ecuación Diferencial No Exacta**

De la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, donde $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$.

Resolución

Se tiene que encontrar una función $\mu(x)$ ó $\mu(y)$ para multiplicar toda la ecuación con este "factor integrante" y poder tener una ecuación exacta la cual se puede resolver.

-Caso $\mu(x)$

$$\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

$$[M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0](\mu(x))$$

$$\boxed{M(x, y)\mu(x)dx + N(x, y)\mu(x)dy = 0}$$

-Caso $\mu(y)$

$$\mu(y) = e^{\int \frac{N_x - M_y}{M} dy}$$

$$[M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0](\mu(y))$$

$$\boxed{M(x, y)\mu(y)dx + N(x, y)\mu(y)dy = 0}$$

• **Ecuación Diferencial Lineal**

De la forma $a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$.

Esta ecuación se puede escribir en su "forma estándar" al dividir toda la ecuación entre $a_1(x)$. Dejando así la siguiente ecuación: $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)$.

Resolución:

i.) Obtner el factor integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$.

ii.) Multiplicar el factor integrante en ambos lados, en el lado izquierdo quedará una derivada del producto del factor integrante y la variable dependiente.

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \right] (\mu(x)) \\
& \mu(x) \frac{dy}{dx} + P(x)\mu(x)y = f(x)\mu(x) \\
& \frac{d}{dx} [\mu(x) * y] = f(x)\mu(x)
\end{aligned}$$

iii.) Integrar a ambos lados y luego despejar para la variable dependiente. Obteniendo así, la solución.

$$\begin{aligned}
\int \frac{d}{dx} [\mu(x) * y] &= \int f(x)\mu(x)dx \\
\mu(x)y &= \int f(x)\mu(x)dx \\
\boxed{y} &= \frac{1}{\mu(x)} \int f(x)\mu(x)dx \\
\boxed{y} &= \frac{1}{e^{\int P(x)}} \int f(x)e^{\int P(x)}dx
\end{aligned}$$

- **Ecuación Diferencial de Coeficientes Homogéneos**

De la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ si las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son funciones homogéneas. ($f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$, función Homogénea de grado α).

Resolución

Se utiliza la sustitución (aunque también se puede aplicar $v = \frac{x}{y}$):

$$\begin{aligned}
u &= \frac{y}{x} & y &= ux \\
& & dy &= udx + xdu \\
M(x, y)dx + N(x, y)dy &= 0 & M(x, ux)dx + N(x, ux)(udx + xdu) &= 0 \\
x^\alpha M(1, u)dx + x^\alpha N(1, u)(udx + xdu) &= 0 \\
x^\alpha M(1, u)dx + ux^\alpha N(1, u)dx + ux^{\alpha+1}N(1, u)du &= 0 \\
x^\alpha [M(1, u) + uN(1, u)]dx &= -x^{\alpha+1}N(1, u)du \\
[x^\alpha [M(1, u) + uN(1, u)]dx &= -x^{\alpha+1}N(1, u)du] \left(-\frac{1}{(x^{\alpha-1})(M(1, u) + N(1, u))} \right) \\
-\frac{1}{x}dx &= \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)}du \\
\int -\frac{1}{x}dx &= \int \frac{N(1, u)}{M(1, u) + uN(1, u)}du
\end{aligned}$$

Desahacer la sustitución y despejar para la variable dependiente de ser posible.

- **Ecuación Diferencial de Bernoulli**

De la forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$, donde $n \neq 0, n \neq 1$.

Resolución

Utilizar la sustitución:

$$\begin{array}{ll} u = y^{1-n} & y = u^{\frac{1}{1-n}} \\ du = (1-n)y^{-n} & dy = \left(\frac{1}{1-n}\right)(u^{\frac{1}{1-n}-1})du \end{array}$$

Luego quedará una ecuación diferencial de las anteriormente vistas para resolver con su resolución acorde.

• **Ecuación Diferencial con Coeficientes Lineales**

De la forma $(ax + by + c)dx + (\alpha x + \beta y + \gamma)dy = 0$ ó tambien $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}$.

Resolución

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + by + c \\ \alpha x + \beta y + \gamma \end{cases}$$

Con la solución (h, k) . Con la solución se procede a realizar la sustitución:

$$\begin{array}{ll} x = u + h & y = v + k \\ dx = du & dy = dv \end{array}$$

La sustitución anterior dejará la ecuación en una forma $(au + bv)du + (\alpha u + \beta v)dv = 0$ ó tambien $\frac{dv}{du} = \frac{au+bv}{\alpha u+\beta v}$ la cual se puede resolver utilizando métodos anteriormente vistos (principalmente homogéneas, exactas y/o no exactas).