Cours de mathématiques
CPGE MPSI

Florian Maillard
e-mail : florian.maillard@mailoo.org

31 juillet 2020

Introduction

Ce cours était mon cours de MPSI au lycée Pierre d'Ailly (Compiègne), il est basé sur mes manuscrits du cours de mathématiques dispensé par le professeur Sophie Rainero, que je salue et remercie au passage. Il se compose en trois parties : d'abord le cours, ensuite les exercices et enfin les fiches complémentaires qui en réalité étaient mes polycopiés. De temps à autre, j'ai ajouté des éléments, comme des graphiques ou des tableaux, sur ce qui ne me paraissait pas clair pour aider le lecteur dans sa compréhension des mathématiques. J'espère qu'il pourra être lu et compris par tout bachelier scientifique ayant une certaine fibre et une certaine saveur pour cette discipline. Ce manuscrit que vous tenez entre vos mains ou que vous visualisez sur votre écran a été rédigé avec LaTeX 2$_\varepsilon$ et $\mathcal{AMS}$-LaTeX.

Bonne lecture !

Première partie

Cours

Chapitre 0

Éléments de logique et quantificateurs

Sommaire

Tableaux

Nous présentons dans ce très court chapitre les notions de base de logiques, les tables de vérités et l'utilisation des quantificateurs. On définit aussi ce qu'est une assertion et un théorème.

0.1 Assertion et théorème

Nous allons préciser à un premier niveau quelques notions mathématiques qui sont relativement intuitives mais nécessitent quand même des définitions rigoureuses. L'idée étant de préciser schématiquement comment se présente une théorie mathématique ainsi que la notion essentielle de démonstration. La première notion est celle d'assertion.

Une assertion est un énoncé mathématiques P aussi rigoureux que possible qui ne prend qu'une valeur de vérité qui est soit vraie (V) soit fausse (F). On consigne ces valeurs dans une table de vérité. En mathématique, on appelle *tautologie* une assertion qui est toujours vraie.

Par exemple, l'assertion $1 + 1 = 2$ est une tautologie. Par contre l'assertion $1 + 1 = 3$ est une assertion dont la valeur de vérité est F. $3 = 2\times$ n'est pas une assertion. $3 = 1 + x$ est une assertion dont la valeur de vérité dépend de la valeur de x.

Un théorème est une assertion vraie déduite grâce à d'autres assertions, en général les théorèmes sont des résultats importants à retenir. Un lemme est un résultat préliminaire qui permet de démontrer un théorème. Un corollaire est une conséquence directe d'un théorème.

Pour écrire un énoncé mathématique on utilise le langage courant mais aussi quelques symboles et très souvent on manipule des lettres dans l'alphabet grec. On présente cet alphabet et ces symboles dans l'annexe **??**.

0.2 Négation et connecteurs logiques

À partir d'une assertion P, on construit une assertion appelée (non P), qui peut être noté $\neg P$ dont la table de vérité est donnée par la table 1.

P	$\neg P$
V	F
F	V

TABLEAU 1 – Table de vérité de P

À partir de deux assertions P et Q, on peut en fabriquer de nouvelles à l'aide des connecteurs logiques suivants :

— la conjonction notée "et" ou $\wedge$;
— la disjonction notée "ou" ou $\vee$;
— l'implication notée $\Longrightarrow$;
— l'équivalence notée $\Longleftrightarrow$.

Les tables de vérités de ces connecteurs logiques sont données dans la table 2.

P	Q	P et Q	P ou Q	$P \Longrightarrow Q$	$P \Longleftrightarrow Q$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

TABLEAU 2 – Table de vérité des connecteurs logiques

Dans l'assertion $P \Longrightarrow Q$ l'assertion P est l'hypothèse et l'assertion Q est la conclusion. On a l'équivalence logique

$$(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg P \text{ ou } Q). \tag{1}$$

L'assertion $Q \Longrightarrow P$ est l'assertion réciproque de $P \Longrightarrow Q$. Attention, il ne faut pas confondre les deux.

0.3 Assertions logiquement équivalentes

Deux assertions sont dites logiquement équivalentes lorsqu'elles ont la même table de vérité. On écrit par exemple les équivalences suivantes :

$$\neg(\neg P) \iff P; \tag{2}$$
$$\neg(P \text{ et } Q) \iff \neg P \text{ ou } \neg Q; \tag{3}$$
$$\neg(P \text{ ou } Q) \iff \neg P \text{ et } \neg Q; \tag{4}$$
$$\neg(P \implies Q) \iff P \text{ et } \neg Q. \tag{5}$$

Le raisonnement par contraposée repose sur l'équivalence logique

$$(P \implies Q) \iff (\neg Q \implies \neg P). \tag{6}$$

Le raisonnement par l'absurde est le suivant : pour montrer que $P \implies Q$, on suppose que P est vraie et que Q est fausse puis on montre que cela aboutit à une contradiction. Cela repose sur l'équivalence logique

$$(P \implies Q) \iff \neg(P \text{ et } \neg Q). \tag{7}$$

0.4 Quantificateurs et leurs négations

L'expression mathématique "$\forall x \in E$" se lit "quelque soit l'élément x de E" ou encore "pour tout élément x de E". L'expression mathématique "$\exists x \in E$" se lit "il existe un élément x de E", au moins un. "$\forall x \in E\ P(x)$" signifie que pour tout élément pris dans E, la propriété P est vraie. "$\exists x \in E\ P(x)$" signifie qu'il existe au moins un élément de E pour lequel P est vérifiée.

Les négations des quantificateurs sont les suivantes :

$$\neg(\forall x \in E \quad P(x)) \iff \exists x \in E \quad \neg P(x); \tag{8}$$
$$\neg(\exists x \in E \quad P(x)) \iff \forall x \in E \quad \neg P(x). \tag{9}$$

La variable x est dite muette.

Chapitre 1

Fonctions usuelles

Sommaire

Figures

Tableaux

Vous connaissez depuis la classe de Terminale les fonctions trigonométriques, l'exponentielle et le logarithme népérien. Notre premier objectif sera de démontrer rigoureusement leurs propriétés. Nous introduirons aussi les fonctions hyperboliques ainsi que les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques et hyperboliques. Pour comprendre quelques démonstrations, vous aurez besoin des notions de base de l'analyse : limites, continuité, dérivabilité et convexité. Quelques théorèmes sont donnés dans l'annexe **??**.

1.1 Logarithmes & exponentielles

1.1.1 Logarithme népérien

Définition 1.1. On appelle fonction logarithme népérien l'unique primitive de la fonction continue $f\colon \left\{\begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \frac{1}{t} \end{array}\right.$ qui s'annule en 1. On a donc pour tout x strictement positif

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{1.1}$$

Ainsi, par définition, on a :
— $\ln 1 = 0$;
— ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$;
— la dérivée du logarithme népérien est telle que pour tout $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Le logarithme népérien est indéfiniment dérivable et strictement croissant.

Théorème 1.1. *Pour tout* $x, y \in\,]0\,;+\infty[$*, on a*

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y. \tag{1.2}$$

Démonstration. Soit $y \in\,]0\,;+\infty[$ fixé. On définit la fonction

$$f_y\colon \left\{\begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(xy) \end{array}\right., \tag{1.3}$$

alors f_y est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par produit et composition de fonctions qui le sont. En dérivant la fonction f_y, on a pour tout $x \in\,]0\,;+\infty[$

$$f_y'(x) = y\frac{1}{xy} = \frac{1}{x} = \ln' x. \tag{1.4}$$

Il existe donc une constante réelle c telle que

$$f_y(x) = \ln(xy) = \ln x + c. \tag{1.5}$$

Or $f_y(1) = \ln(y) = c$. □

Proposition 1.1. Soient $x, y \in]0\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{Z}$, alors les égalités suivantes sont vraies :

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x; \tag{1.6}$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y; \tag{1.7}$$

$$\ln x^n = n \ln x. \tag{1.8}$$

Démonstration. — $0 = \ln 1 = \ln\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) = \ln\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x$.
- $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x + \ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln x - \ln y$.
- On montre la proposition par récurrence sur n :
  - On a $\ln(x^0) = 0 = 0 \cdot \ln(x)$.
  - Ensuite, supposons la propriété vraie au rang n, montrons qu'elle est vraie au rang $n+1$:

    $$\ln x^{n+1} = \ln x + \ln x^n = \ln x + n \cdot \ln x = (n+1)\ln x. \tag{1.9}$$

    Par théorème de récurrence, la proposition est vraie pour tous les entiers naturels.
  - Montrons le pour les entiers négatifs. Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, alors

    $$\ln x^n = -\ln x^{-n} = -(-n \ln x) = n \ln x. \tag{1.10}$$

□

Théorème 1.2. *La fonction logarithme népérien vérifie les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty; \tag{1.11}$$

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty; \tag{1.12}$$

$$\lim_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1. \tag{1.13}$$

Démonstration. — L'application logarithme népérien est strictement croissante. Pour tout naturel n, on a $\ln 2^n = n \ln 2$. De plus $\ln 2 > 0$ donc $\lim_{n\to\infty} \ln 2^n = +\infty$. La fonction logarithme népérien n'est pas majorée et comme elle est croissante, on en déduit que $\lim_{x\to\infty} \ln x = +\infty$.
- Puisque $\ln x = -\ln\left(\frac{1}{x}\right)$, alors lorsque $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to +\infty$. Donc $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \to +\infty$ et ainsi $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.
- Ce rapport est le taux d'accroissement de la fonction logarithme népérien en 1. La limite est donc la dérivée de ln en 1. C'est à dire $\left.\frac{1}{x}\right)_{x=1} = 1$.

□

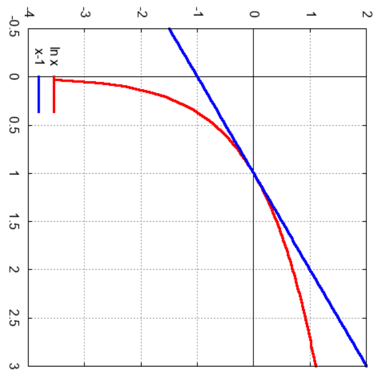

FIGURE 1.1 – Tracé du logarithme népérien

Théorème 1.3. *L'ensemble E des fonctions dérivables de $\mathbb{R}^{]0\,;+\infty[}$ telles que :*

$$\forall x, y \in \,]0\,;+\infty[\quad f(xy) = f(x) + f(y) \tag{1.14}$$

est la droite vectorielle engendrée par le logarithme népérien, c'est-à-dire que :

$$E = \left\{ f_\alpha \colon \left\{ \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha \ln x \end{array} \right. \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.15}$$

Démonstration. Soit une fonction $f \in \mathbb{R}^{]0\,;+\infty[}$ dérivable sur $]0\,;+\infty[$ vérifiant l'équation (1.14). Comme f est dérivable, on peut dériver l'équation (1.14) par rapport à x et on obtient pour tout y strictement positif

$$y f'(xy) = f'(x). \tag{1.16}$$

Pour $x = 1$, on a

$$y f'(y) = f'(1), \tag{1.17}$$

c'est-à-dire $f'(y) = f'(1) \ln' y$. Donc en intégrant cette équation à partir de 1, on a

$$f(y) = f'(1) \ln y + f(1). \tag{1.18}$$

En appliquant l'équation (1.14) en $x = y = 1$, on a $f(1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$.

On a montré que si une fonction f de $\mathbb{R}^{]0\,;+\infty[}$ dérivable vérifie l'équation (1.14), alors elle est proportionnelle au logarithme népérien. La réciproque est due au théorème 1.1. □

1.1.2 Logarithmes de base a

Définition 1.2. Soit un réel a de $]0\,;+\infty[\setminus\{1\}$. On définit la fonction logarithme de base a, notée $\log_a$ par $\log_a \colon \left\{ \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{array} \right.$.

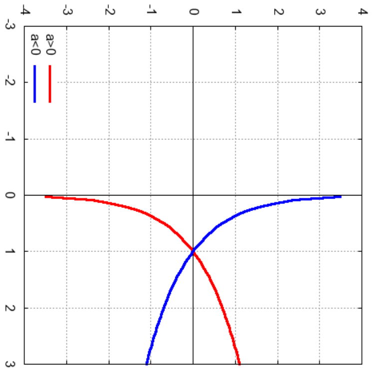

FIGURE 1.2 – Tracé des logarithmes de bases quelconque

Proposition 1.2. — $\log_a(1) = 0$;
— pour tout $a \in]0\,;+\infty[\setminus\{1\}$, la fonction $\log_a$ est dérivable, donc continue, sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel x strictement positif

$$\log_a'(x) = \frac{1}{x\ln a}. \tag{1.19}$$

Démonstration. Ce sont des conséquences immédiates de la définition et des propriétés du logarithme népérien. □

Proposition 1.3. Soient x et y deux réels strictement positifs, a et b deux bases de logarithme [1], alors :

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y; \tag{1.20}$$
$$\log_b x = \log_b a \log_a x; \tag{1.21}$$
$$\log_{1/a} x = -\log_a x. \tag{1.22}$$

Démonstration. — $\log_a xy = \frac{\ln xy}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln a} + \frac{\ln y}{\ln a} = \log_a x + \log_a y$;
— $\log_b x = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{\ln x}{\ln a} \times \frac{\ln a}{\ln b} = \log_a x \log_b a$;
— soit en prenant $b = \frac{1}{a} \in]0\,;+\infty[- \{1\}$ alors $\log_{\frac{1}{a}} x = \log_a x \log_{\frac{1}{a}}(a) = \log_a x \frac{\ln a}{-\ln a} = -\log_a x$.

□

Le logarithme décimal en base 10 et le logarithme binaire en base 2.

1.1.3 Exponentielle

Définition 1.3. L'application logarithme népérien est continue sur $]0\,;+\infty[$ et strictement croissante, telle que $\lim_{0^+} \ln = -\infty$ et $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$. Alors le logarithme népérien induit une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. L'application réciproque

1. Une base de logarithme est un réel strictement positif différent de 1

du logarithme népérien est la fonction exponentielle notée exp telle que

$$\exp\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0\,;+\infty[\\ x & \longmapsto & \exp(x) \end{array} \right. . \tag{1.23}$$

Proposition 1.4. Les fonctions logarithme népérien et exponentielle vérifient

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times]0\,;+\infty[\quad y = \exp(x) \iff x = \ln y. \tag{1.24}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la définition. □

Proposition 1.5. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp'(x) = \exp(x). \tag{1.25}$$

Démonstration. La fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout réel y, $\exp(y) > 0$. Alors d'après les théorèmes généraux [2], on a

$$\exp'(y) = \frac{1}{\ln'(\exp(y))} = \exp(y). \tag{1.26}$$

□

Proposition 1.6.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y). \tag{1.27}$$

On dira plus tard que c'est un morphisme de groupes du groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe multiplicatif $(\mathbb{R}^*, \times)$ [3].

Démonstration. Soient deux réels x et y. Comme

$$\ln(\exp(x+y)) = x + y = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = \ln(\exp(x)\exp(y)), \tag{1.28}$$

en appliquant l'exponentielle [4] on obtient le résultat. □

Proposition 1.7. Soient x et y deux réels et un entier relatif n, alors

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}; \tag{1.29}$$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}; \tag{1.30}$$

$$\exp(nx) = \exp(x)^n. \tag{1.31}$$

Démonstration.
— $\ln(\exp(-x)) = -x = -\ln(\exp(x)) = \ln\left(\frac{1}{\exp(x)}\right)$ et on peut composer par exp [5] pour obtenir le résultat ;
— $\exp(x-y) = \exp(x)\exp(-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
— $\ln(\exp(nx)) = nx = n\ln(\exp(x)) = \ln(\exp(x)^n)$ puis en composant par exp, on a le résultat.

□

2. cf. annexe **??**
3. cf. chapitre **??**
4. L'exponentielle est une fonction bijective
5. Idem

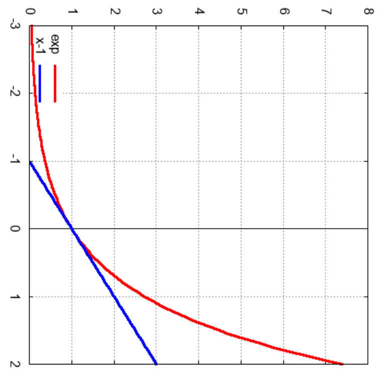

FIGURE 1.3 – Tracé de l'exponentielle

Proposition 1.8. La fonction exponentielle admet les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\infty} \exp(x) = +\infty; \tag{1.32}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0; \tag{1.33}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1. \tag{1.34}$$

Démonstration. Les deux premières propositions sont des conséquences de la définition et la dernière est la limite du taux d'accroissement en zéro, soit la dérivée en 0 de l'exponentielle. $\square$

Théorème 1.4. *L'ensemble E des fonctions de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivables qui vérifient l'équation*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \tag{1.35}$$

est

$$E = \{0\} \cup \left\{ g_\alpha \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(\alpha x) \end{array} \right. \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\}. \tag{1.36}$$

Démonstration. Soit une fonction $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ dérivable qui vérifie l'équation (1.35), alors en dérivant cette équation on obtient :

$$f'(x+y) = f'(x)f(y) = f(x)f'(y). \tag{1.37}$$

Deux cas sont possibles :

- la fonction nulle est solution,
- si la fonction n'est pas nulle, il existe une réel x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$. Alors

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad f(x_0) = f(x_0 - y)f(y). \tag{1.38}$$

Soit $y \in \mathbb{R}$, alors $f(y) \neq 0$. La fonction f ne s'annulant donc jamais, on peut reprendre l'équation 1.37 et écrire que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(0)}{f(0)}. \tag{1.39}$$

D'après l'équation 1.35, on a

$$f(0) = f(0)^2. \tag{1.40}$$

Comme f ne s'annule pas, nécessairement $f(0) = 1$. La fonction f est donc toujours positive. D'après l'équation (1.39), il existe un réel c tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \ln |f(x)| = \ln f(x) = f'(0)x + c. \tag{1.41}$$

Alors

$$f(x) = \exp(f'(0)x + c), \tag{1.42}$$

et comme $f(0) = 1$, on a $c = 0$.

La réciproque est due à la proposition 1.6. Si une fonction est dans E alors elle vérifie l'équation 1.35. □

1.1.4 Exponentielles de base a

Définition 1.4. Soit une base a de logarithme dans $]0\,;+\infty[\setminus\{1\}$. Comme l'application logarithme népérien, l'application $\log_a$ induit une bijection de $]0\,;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$ et admet une bijection réciproque appelée exponentielle de base a, notée $\exp_a$.

Proposition 1.9.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in\,]0\,;+\infty[\ \ \forall a \in\,]0\,;+\infty[\setminus\{1\} \quad y = \exp_a(x) \iff x = \log_a(y). \tag{1.43}$$

Démonstration. C'est une conséquence directe de la définition. □

Proposition 1.10.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall a \in\,]0\,;+\infty[\setminus\{1\} \quad \exp_a(x) = \exp(a \ln x). \tag{1.44}$$

Démonstration. On sait que :

$$\log_a(\exp_a(x)) = x = \frac{\ln(\exp(x \ln a))}{\ln a} = \log_a(\exp(x \ln a)), \tag{1.45}$$

et en appliquant $\exp_a$, qui est bijective, on obtient le résultat. □

Proposition 1.11. Soient a une base de logarithme, x et y deux réels et n un entier relatif. Alors les propriétés suivantes sont vraies : la fonction $\exp_a$ est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp_a'(x) = \ln a \exp_a(x). \tag{1.46}$$

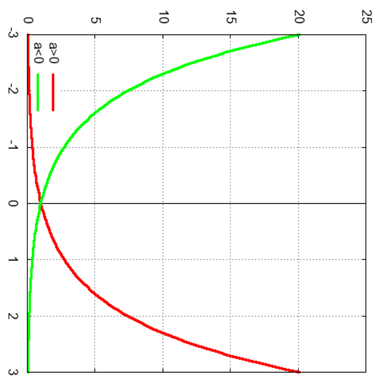

FIGURE 1.4 – Tracé des exponentielles de base quelconque

De plus :

$$\exp_a(x+y) = \exp_a(x)\exp_a(y); \tag{1.47}$$

$$\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}; \tag{1.48}$$

$$\exp_a(x-y) = \frac{\exp_a(x)}{\exp_a(y)}; \tag{1.49}$$

$$\exp_a(nx) = \exp_a(x)^n; \tag{1.50}$$

$$\exp_{\frac{1}{a}}(x) = \exp(-x\ln a) = \exp_a(-x). \tag{1.51}$$

Démonstration. Ce sont des conséquences immédiates des propriétés de l'exponentielle. □

En appliquant la formule précédente en $x = 1$, et on a : $\exp_a(n) = \exp_a(1)^n = a^n$. Alors on pose

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a^x = \exp_a(x) = \exp(x\ln a) \tag{1.52}$$

En particulier pour l'exponentielle : $\mathrm{e}^x = \exp(x)$. On pose aussi que pour tout réel x, $1^x = 1$. Donc $\forall a > 0\ \forall x > 0 \quad a^x = \exp(x\ln a)$.

1.2 Puissances

1.2.1 Les fonctions puissances

Définition 1.5. Soit un réel α. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction

$$f_\alpha\colon \left\{ \begin{array}{ccc}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln x} \end{array} \right. . \tag{1.53}$$

Proposition 1.12. Soient deux réels α et x, alors les formules suivantes sont vraies :

$$1^\alpha = 1; \tag{1.54}$$
$$x^0 = 1; \tag{1.55}$$
$$\ln x^\alpha = \alpha \ln x. \tag{1.56}$$

Démonstration. Ce sont des conséquences immédiates de la définition. □

Proposition 1.13. Soient deux réels α et β, puis deux réels strictement positifs x et y. Les formules suivantes sont vraies

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta; \tag{1.57}$$
$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha; \tag{1.58}$$
$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}. \tag{1.59}$$

Démonstration. Soient deux réels α et β, puis deux réels strictement positifs x et y. Alors

$$x^{\alpha+\beta} = \mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\ln x} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}\,\mathrm{e}^{\beta \ln x} = x^\alpha x^\beta; \tag{1.60}$$
$$(xy)^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(xy)} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x + \alpha \ln y} = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}\,\mathrm{e}^{\alpha \ln y} = x^\alpha x^\beta; \tag{1.61}$$
$$(x^\alpha)^\beta = (\mathrm{e}^{\alpha \ln x})^\beta = \mathrm{e}^{\beta \ln(\mathrm{e}^{\alpha \ln x})} = \mathrm{e}^{\beta\alpha \ln x} = x^{\alpha\beta}. \tag{1.62}$$

□

Les fonctions puissances admettent les limites suivantes :

$$\begin{cases} \alpha = 0 & f_0 = \tilde{1}; \\ \alpha > 0 & \lim\limits_{+\infty} f_\alpha = +\infty \quad \lim\limits_{0^+} f_\alpha = 0; \\ \alpha < 0 & \lim\limits_{+\infty} f_\alpha = 0 \quad \lim\limits_{0^+} f_\alpha = +\infty. \end{cases} \tag{1.63}$$

Proposition 1.14. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction f_α est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ telle que

$$\forall x \in \,]0\,;+\infty[\quad f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{1.64}$$

Démonstration. La fonction f_α est dérivable par composition de fonctions qui le sont et pour tout $x > 0$ on a

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha}{x}\,\mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}. \tag{1.65}$$

□

Lorsque $\alpha \geq 0$, les fonctions f_α peuvent se prolonger en zéro pour obtenir une fonction continue. Deux cas se présentent :

— Si $\alpha > 0$ on pose $\tilde{f}_\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{R}+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f_\alpha(x) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{cases}$;

— Si $\alpha = 0$ on pose $\tilde{f}_0\colon \begin{cases} \mathbb{R}+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 \end{cases}$.

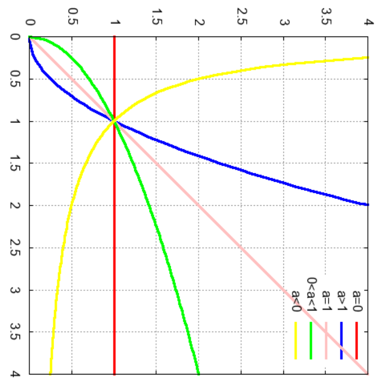

FIGURE 1.5 – Tracé de quelques fonctions puissance

Le prolongement en zéro des fonction puissances s'effectue de cette manière :

— Si $\alpha = 0$ $\quad \tilde{f}_0$ est dérivable et sa dérivée est nulle ;

— Si $\alpha > 1$ $\quad x^{\alpha-1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, le prolongement par continuité $\tilde{f}_\alpha$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'_\alpha(0) = 0$ La courbe admet une tangente horizontale ;

— Si $\alpha = 1$ $\quad x^{\alpha-1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$, le prolongement $\tilde{f}_1$ est dérivable en 0 et $\tilde{f}'_1(0) = 1$;

— Si $0 < \alpha < 1$ $\quad x^{\alpha-1} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, le prolongement $\tilde{f}_\alpha$ n'est pas dérivable en zéro et la courbe admet une tangente verticale.

Si $\alpha \neq 0$, les fonctions $f_{\frac{1}{\alpha}}$ et f_α sont réciproques l'une de l'autre.

1.2.2 Dérivation des fonctions de la forme exponentielle

Proposition 1.15. Soient I un intervalle réel, u et v des fonctions dérivables de $\mathbb{R}^I$, alors la fonction u^v est dérivable.

Démonstration. Soit un réel x de I et soit $f(x) = \mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$. la fonction f est dérivable comme produit et composée de fonctions qui le sont, et

$$f'(x) = \left[v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right]\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)} \tag{1.66}$$

$$= \left[v'(x)u(x)\ln u(x) + v(x)u'(x)\right]u(x)^{v(x)-1}. \tag{1.67}$$

□

1.3 Croissances comparées

Théorème 1.5.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0^+. \tag{1.68}$$

Ce qui traduit la « lenteur » de croissance du logarithme népérien par rapport à l'identité. On écrira par la suite $\ln x = o_{+\infty}(x)$*.*

Démonstration. Soient deux réels x et t supérieurs à 1, alors

$$\sqrt{t} \leq t \tag{1.69}$$

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{1.70}$$

$$0 \leq \ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{x} - 2 \tag{1.71}$$

$$0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{x}. \tag{1.72}$$

En passant à la limite, et d'après le théorème des gendarmes on obtient la limite en zéro. □

Proposition 1.16. Soient α et β deux réels strictement positifs, alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0^+ \qquad \lim_{x \to 0^+} x^\beta \left|\ln x\right|^\alpha = 0^+. \tag{1.73}$$

Ce qui veut dire que les puissances « l'emportent » toujours devant les logarithmes.

Démonstration. Soit un réel $x \geq 1$ alors

$$\frac{\ln x^\alpha}{x^\beta} = \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{\ln x^{\frac{\beta}{\alpha}}}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha. \tag{1.74}$$

On a

$$x^{\frac{\beta}{\alpha}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty, \tag{1.75}$$

donc par composition de limites

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x^{\frac{\beta}{\alpha}}}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}} = 0^+. \tag{1.76}$$

Ainsi

$$\frac{\ln x^\alpha}{x^\beta} = \mathrm{e}^{\alpha \ln\left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{\ln x^{\frac{\beta}{\alpha}}}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{1.77}$$

La deuxième limite peut s'obtenir en faisant apparaître $\frac{1}{x}$: soit un réel x tel que $0 < x < 1$, alors

$$x^\beta \left|\ln x\right|^\alpha = \frac{\left|-\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right|^\alpha}{\left(\frac{1}{x}\right)^\beta} = \frac{\ln\left(\frac{1}{x}\right)^\alpha}{\left(\frac{1}{x}\right)^\beta}. \tag{1.78}$$

Soit en appliquant la première limite — puisque $\frac{1}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ — on obtient le résultat. □

Proposition 1.17. Soient α et β deux réels strictement positifs, alors

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\alpha x} \left|x\right|^\beta = 0^+ \tag{1.79}$$

Ce qui traduit la prépondérance des fonctions exponentielles face aux fonctions puissances.

Démonstration. Soit un réel x strictement positif. On pose $y = \mathrm{e}^x$ alors

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = \frac{y^\alpha}{\ln(y)^\beta} \tag{1.80}$$

puisque $\mathrm{e}^x \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ la proposition 1.16 nous permet d'écrire que par composition de limites, la première limite est vraie

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty. \tag{1.81}$$

Soit un réel x strictement négatif, alors

$$\mathrm{e}^{\alpha x} |x|^\beta = \frac{(-x)^\beta}{\mathrm{e}^{\alpha(-x)}}. \tag{1.82}$$

D'après la première limite

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\mathrm{e}^{\alpha(-x)}}{(-x)^\beta} = +\infty. \tag{1.83}$$

D'où

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{(-x)^\beta}{\mathrm{e}^{\alpha(-x)}} = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\alpha x} |x|^\beta = 0^+. \tag{1.84}$$

□

1.4 Trigonométrie circulaire

On présente un tableau récapitulatif, la table 1.1, des différentes fonctions trigonométriques de base et leurs propriétés. On a tracé les mêmes fonctions sur le cercle trigonométrique de la figure 1.6.

Nom	définie sur	parité	T	propriétés
sinus	$\mathbb{R}$	impaire	2π	$\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$
cosinus	$\mathbb{R}$	paire	2π	$\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = -\cos x$
tangente	$D_1 = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\}$	impaire	π	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
cotangente	$D_2 = \mathbb{R} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\}$	paire	π	$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Tableau 1.1 – Fonctions trigonométriques de base

Soit un réel x et un réel $y \in D_2$, alors

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1; \tag{1.85}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \tag{1.86}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right); \tag{1.87}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cot y = -\cot\left(\frac{\pi}{2} + y\right). \tag{1.88}$$

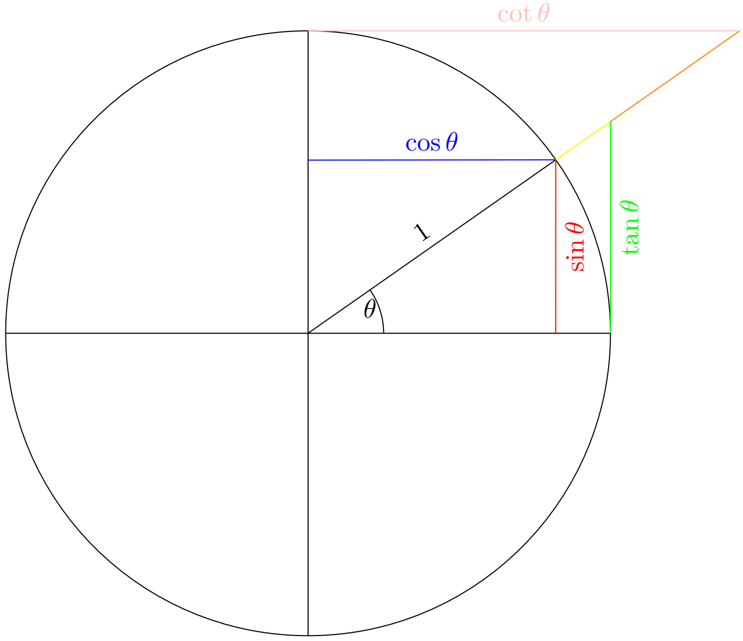

FIGURE 1.6 – Cercle trigonométrique

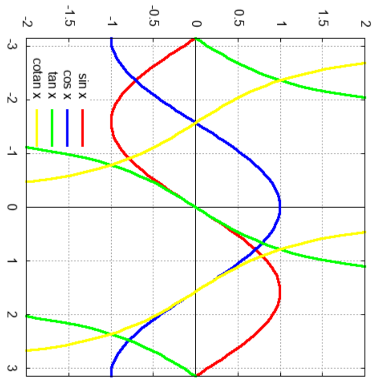

FIGURE 1.7 – Tracé de quelques fonctions trigonométriques. En rouge sinus, en bleu cosinus, en vert tangente et en rose cotangente

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot x$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

TABLEAU 1.2 – Valeurs particulières des fonctions trigonométriques

Dérivées Les fonctions sinus, cosinus, tangente et cotangente sont dérivables sur leurs ensembles de définition, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sin' x = \cos x \;\; \cos' x = -\sin x; \tag{1.89}$$

$$\forall x \in D_1 \quad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x; \tag{1.90}$$

$$\forall x \in D_2 \quad \cot' x = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x. \tag{1.91}$$

Proposition 1.18. Les fonctions trigonométriques vérifient les égalités suivantes :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \cos x = \cos y \iff \exists k \in \mathbb{Z}\ x = \pm y + 2k\pi; \tag{1.92}$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \sin x = \sin y \iff \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z} & x = y + 2k\pi \\ \exists k \in \mathbb{Z} & x = \pi - y + 2k\pi \end{cases}; \tag{1.93}$$

$$\forall x, y \in D_1 \quad \tan x = \tan y \iff \exists k \in \mathbb{Z}\ x = y + k\pi; \tag{1.94}$$

$$\forall x, y \in D_2 \quad \cot x = \cot y \iff \exists k \in \mathbb{Z}\ x = y + k\pi. \tag{1.95}$$

1.5 Fonctions circulaires réciproque

1.5.1 Fonction arcsinus

Définition 1.6. La fonction $\sin\colon \begin{cases} \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{cases}$ est une bijection[6] et cette bijection admet une réciproque appelée arcsinus notée arcsin.

Proposition 1.19.

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right] \forall y \in [-1\,;1] \quad y = \sin x \iff x = \arcsin y; \tag{1.96}$$

et

$$\sin(\arcsin y)) = y, \tag{1.97}$$

$$\arcsin(\sin x) = x. \tag{1.98}$$

6. parce qu'elle est continue, strictement croissante telle que $\sin -\frac{\pi}{2} = -1$ et $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

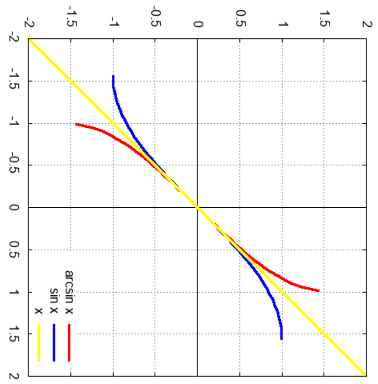

FIGURE 1.8 – Tracé de arcsinus

Démonstration. C'est une conséquence de la définition de arcsin. □

Remarque : La formule $\arcsin(\sin x) = x$ n'est valable que dans $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ et la deuxième dans $[-1\,;1]$.

Proposition 1.20. La fonction arcsin est impaire et strictement croissante.

Démonstration. La fonction arcsin est croissante par construction car sa réciproque est strictement croissante. Ensuite, l'intervalle $[-1\,;1]$ est centré en 0 et puisque sinus est impaire on a

$$\forall y \in [-1\,;1] \quad \sin(\arcsin -y) = -y = -\sin(\arcsin y) = \sin(-\arcsin y). \tag{1.99}$$

En appliquant la fonction arcsin [7] à chaque membre, on trouve que la fonction arcsin est impaire. □

Proposition 1.21. La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1\,;1[$ et

$$\forall y \in \,]-1\,;1[\quad \arcsin' y = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{1.100}$$

Démonstration. La fonction sinus est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ telle que $\sin' = \cos$. Si $y = \pm 1$ alors $\cos(\arcsin y) = 0$ et donc arcsinus n'est pas dérivable. De plus la courbe représentative admet des tangentes verticales en -1 et 1. Si $y \in \,]-1\,;1[$, alors $\cos(\arcsin y) \neq 0$, arcsinus et donc dérivable en y et

$$\arcsin' y = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{1.101}$$

□

7. qui est bijective

1.5.2 Fonction arccosinus

Définition 1.7. La fonction cos: $\left\{\begin{array}{ccc} [0\,;\pi] & \longrightarrow & [-1\,;1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}\right.$ est une bijection [8] et cette bijection admet une réciproque appelée arccosinus notée arccos.

Proposition 1.22.

$$\forall x \in [0\,;\pi]\,\forall y \in [-1\,;1] \quad y = \cos x \iff x = \arccos y; \tag{1.102}$$

et

$$\cos(\arccos y) = y, \tag{1.103}$$

$$\arccos(\cos x) = x. \tag{1.104}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la définition de la fonction arccos. □

Remarque : La première formule n'est valable que dans l'intervalle $[0\,;\pi]$ et la deuxième dans l'intervalle $[-1\,;1]$.

Proposition 1.23. La fonction arccos est strictement décroissante.

Démonstration. La fonction arccos est décroissante par construction. □

Proposition 1.24. La fonction arcsinus est dérivable sur $]-1\,;1[$ et

$$\forall y \in\,]-1\,;1[\quad \arccos' y = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{1.105}$$

Démonstration. La fonction cosinus est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\pi]$ telle que $\cos' = -\sin$. Si $y = \pm 1$ alors $-\sin(\arccos(y)) = 0$ et donc arccosinus n'est pas dérivable. De plus la courbe représentative admet des tangentes verticales en -1 et 1. Si $y \in\,]-1\,;1[$, alors $-\sin(\arccos y) \neq 0$, arccosinus et donc dérivable en y et

$$\arccos' y = \frac{1}{-\sin(\arccos y)} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\arccos y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}. \tag{1.106}$$

□

Proposition 1.25. Soit un réel x de $[-1\,;1]$, alors on a

$$\cos(\arcsin x) = \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}; \tag{1.107}$$

$$\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}; \tag{1.108}$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \tag{1.109}$$

Démonstration. — puisque $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ alors

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1-x^2} \geq 0 \tag{1.110}$$

On fait le même raisonnement avec $\arccos x$.

8. parce qu'elle est continue, strictement décroissante telle que $\cos 0 = 1$ et $\cos \pi = -1$.

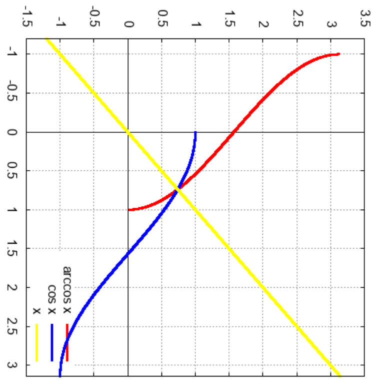

FIGURE 1.9 – Tracé de arccosinus

— On sait aussi que

$$\cos(\arccos x) = x = \sin(\arcsin x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right), \tag{1.111}$$

et puisque cos est bijective sur $[0\,;\pi]$, on a égalité.

— De la même manière

$$\cos(\arccos -x) = -x = -\cos(\arccos x) = \cos(\pi - \arccos x), \tag{1.112}$$

et comme cosinus est bijectif dans $[0\,;\pi]$, on en déduit l'égalité.

□

1.5.3 Fonction arctangente

Définition 1.8. La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ est une bijection [9], sa réciproque est la fonction arctangente notée arctan.

Proposition 1.26. Soit un réel x quelconque et un réel y non nul. Alors

$$\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{1.113}$$

$$\sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{1.114}$$

$$\arctan y + \arctan\frac{1}{y} = \text{signe}(y)\frac{\pi}{2}. \tag{1.115}$$

Démonstration. Soit un réel x quelconque et un réel y non nul, alors

— puisque $-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos(\arctan x) > 0$ donc

$$\cos(\arctan x) = \sqrt{\cos^2(\arctan x)} = \sqrt{\frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}; \tag{1.116}$$

9. Idem

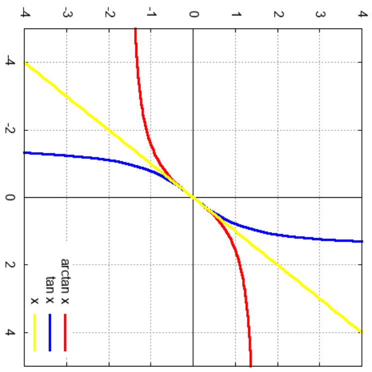

Figure 1.10 – Tracé de arctangente

— de la même manière on a

$$\cos(\arctan x) = \sin(\arctan x)\tan(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}; \qquad (1.117)$$

— soit la fonction $f\colon \begin{cases}]0\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \arctan y + \arctan \frac{1}{y} \end{cases}$ dérivable et pour tout réel y positif, on a

$$f'(y) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{y^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{y^2}} = 0. \qquad (1.118)$$

La fonction f est donc constante et en $y = 1$ on a $f(1) = \frac{\pi}{2} = f(y)$. Si y est strictement négatif, alors comme arctan est impaire, on a $f(y) = -\frac{\pi}{2}$.

□

Théorème 1.6. *Soient des réels x et y tels que $x^2 + y^2 = 1$, alors il existe un unique réel θ dans $]-\pi\,;\pi]$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$.*

Existence. On sait que $x^2 = 1 - y^2$ avec $x^2 \in [0\,;1]$ donc $x \in [-1\,;1]$. On peut donc définir un $\theta_0 = \arccos x \in [0\,;\pi]$ tel que $x = \cos\theta_0$. Ainsi $y^2 = 1 - x^2 = \sin^2\theta_0$. Puisque $\theta_0 \in [0\,;\pi]$ on a $\sin\theta_0 > 0$ alors $|y| = \sin\theta_0$. Si $y \geq 0$ et comme $\theta_0 \in [0\,;\pi]$, alors $\theta = \theta_0$ est le bon réel.

Mais si $y < 0$, alors on prend l'opposé $\theta = -\theta_0 \in]-\pi\,;0]$.

On a bien montré l'existence d'un réel $\theta \in]-\pi\,;\pi]$ tel que $x = \cos\theta$ et $y = \sin\theta$. □

Unicité. Supposons qu'il existe deux réel θ et θ' tels que

$$\begin{cases} x = \cos\theta = \cos\theta' \\ y = \sin\theta = \sin\theta' \end{cases}, \qquad (1.119)$$

alors $x = \cos|\theta| = \cos|\theta'|$ puisque la fonction cosinus est paire. Les réels $|\theta|$ et $|\theta'|$ sont dans $[0\,;\pi]$. La restriction de cosinus à $[0\,;\pi]$ est bijective, on en déduit que $|\theta| = |\theta'|$. Deux cas se présentent :
— Soit $\theta' = \theta$;
— Soit $\theta' = -\theta$ et alors $\sin\theta = \sin\theta' = -\sin\theta$ donc $\sin\theta = 0$ ainsi, $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Comme $\theta' = -\theta \in]-\pi\,;\pi]$ on a forcément $\theta = 0 = \theta'$.

□

1.6 Trigonométrie hyperbolique

1.6.1 Fonctions sinus et cosinus hyperbolique

Définition 1.9. On définit les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, appelées respectivement sinus et cosinus hyperbolique, notée sh et ch, par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh} x = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}, \tag{1.120}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{ch} x = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}. \tag{1.121}$$

Proposition 1.27. La fonction sinus hyperbolique est impaire et cosinus hyperbolique est paire. Les fonctions sinus hyperbolique et cosinus hyperbolique sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$ et $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.

Démonstration. $\mathbb{R}$ est centré en 0 et — grâce aux calculs — $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sh et ch sont dérivables et les calculs donnent bien la formule. □

Proposition 1.28. Soit un réel x, alors

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{x}, \tag{1.122}$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = \mathrm{e}^{-x}, \tag{1.123}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1. \tag{1.124}$$

Démonstration. Ces formules sont des conséquences de la définition. □

Les fonctions sh et ch permettent de paramétrer l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ par $\begin{cases} x(t) = a\epsilon \operatorname{ch} t \\ y(t) = b\epsilon \operatorname{sh} t \end{cases}$ $\epsilon \in [-1\,;1]$, d'où le nom de ces fonctions.

1.6.2 Fonctions tangente et cotangente hyperbolique

Définition 1.10. On définit la tangente hyperbolique, noté th, et la cotangente hyperbolique, notée coth, comme

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}, \tag{1.125}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \operatorname{coth}(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}. \tag{1.126}$$

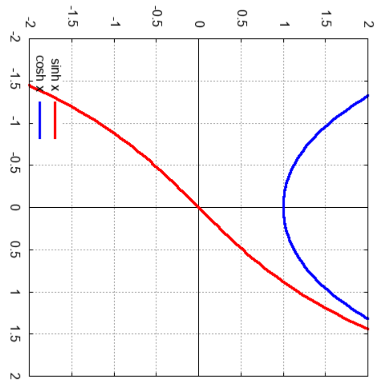

FIGURE 1.11 – Tracé de fonctions hyperbolique sh et ch

Proposition 1.29. Les fonctions tangente et cotangente hyperbolique sont impaires. Elles sont dérivables sur leurs ensembles de définition respectifs et on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \tag{1.127}$$

et

$$\forall y \in \left]0\,;+\infty\right[\quad \coth' x = 1 - \coth^2 x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \tag{1.128}$$

Démonstration. $\mathbb{R}$ est centré en zéro et on vérifie que

$$\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x, \tag{1.129}$$

$$\coth(-x) = -\coth x. \tag{1.130}$$

Ensuite puisque sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et puisque ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on a pour tout réel x

$$\operatorname{th}' x = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}, \tag{1.131}$$

qui nous donne la formule. De la même manière sinh ne s'annule qu'en $x = 0$ donc pour x non nul, on a la formule

$$\coth' x = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x}, \tag{1.132}$$

qui nous donne aussi la formule. □

La fonction tangente hyperbolique est strictement croissante et la cotangente décroît sur $\left]-\infty\,;0\right[$ et sur $\left]0\,;+\infty\right[$.

1.6.3 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

En théorie la seule formule exigible est $\operatorname{ch}^2 - \operatorname{sh}^2 = 1$ mais les autres existent, elles peuvent se retrouver à partir du formulaire de trigonométrie circulaire en remplaçant cos par ch et sin par $\mathrm{i}\,\mathrm{sh}$.

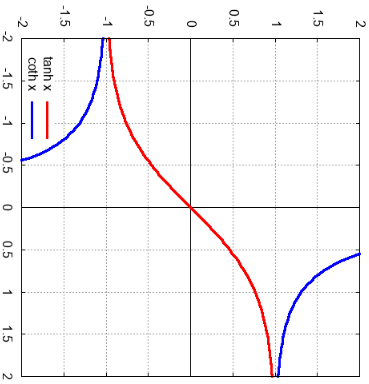

FIGURE 1.12 – Tracé de fonctions hyperbolique th et coth

1.7 Fonctions hyperboliques réciproques

1.7.1 Fonction argument sinus hyperbolique

Définition 1.11. La fonction sinus hyperbolique est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même et admet une réciproque appelée argument sinus hyperbolique notée argsinh.

Proposition 1.30.

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad y = \operatorname{sh} x \iff x = \operatorname{argsinh} y. \tag{1.133}$$

Proposition 1.31. La fonction argsinh est impaire et strictement croissante.

Démonstration. Soit un réel x, alors

$$x = \operatorname{sh}(\operatorname{argsinh} x) = -\operatorname{sh}(-\operatorname{argsinh} x), \tag{1.134}$$

donc

$$-x = \operatorname{sh}(\operatorname{argsinh} -x) = \operatorname{sh}(-\operatorname{argsinh} x). \tag{1.135}$$

Comme la fonction sinus hyperbolique est bijective, on a bien l'égalité

$$\operatorname{argsinh}(-x) = -\operatorname{argsinh} x, \tag{1.136}$$

et comme $\mathbb{R}$ est centré en zéro, alors argsinh est impaire. □

Proposition 1.32. La fonction argument sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a

$$\operatorname{argsinh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \tag{1.137}$$

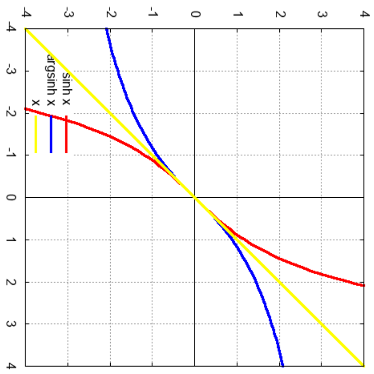

Figure 1.13 – Tracé de fonctions hyperbolique sh et argsinh

Démonstration. La fonction sinus hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \operatorname{sh}'(\operatorname{argsinh} y) = \operatorname{ch}(\operatorname{argsinh} y) > 0, \tag{1.138}$$

donc la fonction argument sinus hyperbolique est dérivable en y et

$$\operatorname{argsinh}' y = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{argsinh} y)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2(\operatorname{argsinh} y)}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}. \tag{1.139}$$

□

Proposition 1.33 (Expression logarithmique)**.** La fonction argument sinus hyperbolique peut s'exprimer ainsi

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}). \tag{1.140}$$

Démonstration. Soient deux réels x et y tels que $y = \operatorname{argsinh} x$ alors $x = \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y}}{2}$. C'est-à-dire

$$\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^{-y} - 2x = 0, \tag{1.141}$$

soit

$$\mathrm{e}^{2y} - 1 - 2x\,\mathrm{e}^y = 0. \tag{1.142}$$

Les solutions réelles de l'équation $Y^2 - 2xY - 1 = 0$ sont $x - \sqrt{x^2+1} < 0$ et $x + \sqrt{x^2+1}$ et donc $\mathrm{e}^y = x + \sqrt{x^2+1}$ soit pour finir l'expression logarithmique

$$\operatorname{argsinh} x = y = \ln(x + \sqrt{x^2+1}). \tag{1.143}$$

□

1.7.2 Fonction argument cosinus hyperbolique

Définition 1.12. La fonction cosinus hyperbolique induit une bijection de $[0\,;+\infty[$ sur $[1\,;+\infty[$ qui admet une réciproque appelée argument cosinus hyperbolique et notée argcosh.

Proposition 1.34.

$$\forall x \in [0\,;+\infty[\ \ \forall y \in [1\,;+\infty[\quad y = \operatorname{ch} x \iff x = \operatorname{argcosh} y; \tag{1.144}$$

et on a

$$\forall y \in [1\,;+\infty[\quad \operatorname{ch}(\operatorname{argcosh} y) = y, \tag{1.145}$$
$$\forall x \in [0\,;+\infty[\quad \operatorname{argcosh}(\operatorname{ch} x) = x. \tag{1.146}$$

Proposition 1.35. La fonction argument cosinus hyperbolique est strictement croissante et est dérivable sur son domaine de définition telle que

$$\forall x \geq 1 \quad \operatorname{argcosh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}. \tag{1.147}$$

Démonstration. Puisque la fonction cosinus hyperbolique est dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et que $\operatorname{sh}(\operatorname{argcosh} y) \neq 0$ On tire que argcosh n'est pas dérivable en un : $\operatorname{ch}'(\operatorname{argcosh} 1) = 0$ la courbe admet une tangente verticale. Si $y > 1$, alors argcosh est dérivable en y et

$$\operatorname{argcosh}'(y) = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{argcosh} y)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{argcosh} y) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}. \tag{1.148}$$

□

Proposition 1.36 (Expression logarithmique)**.** La fonction argument cosinus hyperbolique peut s'exprimer telle que

$$\forall x > 1 \quad \operatorname{argcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right). \tag{1.149}$$

Démonstration.

$$\forall x \in [0\,;+\infty[\ \ \forall y\, [1\,;+\infty[\quad x = \operatorname{argcosh} y \iff y = \operatorname{sh} x. \tag{1.150}$$

Soit donc en remplaçant ch par son expression

$$\mathrm{e}^{2x} + 1 - 2y\,\mathrm{e}^{x} = 0. \tag{1.151}$$

Ainsi e^x est solution de $X^2 - 2yX + 1 = 0$ soit $\mathrm{e}^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$. En choisissant la solution supérieure à un on obtient $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$. □

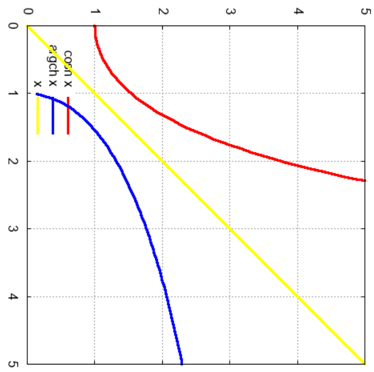

FIGURE 1.14 – Tracé de fonctions hyperbolique ch et argcosh

1.7.3 Fonction argument tangente hyperbolique

Définition 1.13. La fonction tangente hyperbolique induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$. Elle admet donc une réciproque appelée argument tangente hyperbolique notée argtanh.

Proposition 1.37. Pour tous réel x et y de $]-1\,;1[$, on a

$$y = \operatorname{th} x \iff x = \operatorname{argtanh} x, \tag{1.152}$$
$$\operatorname{argtanh}(\operatorname{th} x) = x, \tag{1.153}$$
$$\operatorname{th}(\operatorname{argtanh} y) = y. \tag{1.154}$$

Proposition 1.38. La fonction argument tangente hyperbolique est impaire et strictement croissante.

Proposition 1.39. La fonction argument tangente hyperbolique est dérivable sur son ensemble de définition telle que

$$\forall x \in\,]-1\,;1[\quad \operatorname{argtanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}. \tag{1.155}$$

Démonstration. Puisque tangente hyperbolique est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que

$$\operatorname{th}'(\operatorname{argtanh} y) = 1 - \operatorname{th}^2(\operatorname{argtanh} y) = 1 - y^2 > 0, \tag{1.156}$$

alors la fonction argtanh est dérivable et la formule est donnée. □

Proposition 1.40 (Expression logarithmique)**.** La fonction argument tangente hyperbolique peut s'écrire telle que

$$\forall y \in\,]-1\,;1[\quad \operatorname{argtanh} y = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right). \tag{1.157}$$

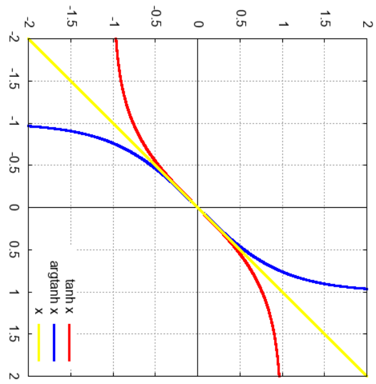

FIGURE 1.15 – Tracé de fonctions hyperbolique th et argtanh

Démonstration.

$$\forall(x,y) \in \mathbb{R} \times \left]-1\,;1\right[\quad y = \operatorname{th} x = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^{2x} + 1}, \tag{1.158}$$

de la même manière on arrive à une équation du deuxième degré :

$$\mathrm{e}^{2x} = \frac{1+y}{1-y}, \tag{1.159}$$

et puisque $-1 < y < 1$, on peut passer au logarithme et on obtient la formule. □

Chapitre 2

Nombres complexes

Sommaire

Figures

Les nombres complexes sont présentés dans ce chapitre. L'ensemble des nombres complexes forme une extension de l'ensemble des nombres réels. Les complexes permettent notamment de définir des solutions à toutes les équations polynomiales à coefficients réels.

La première section se focalise sur leur définition et leurs propriétés. On s'intéresse ensuite à la trigonométrie en utilisant les complexes. Les équations du second degré sont ensuite résolues grâce aux complexes. L'exponentielle complexe est ensuite présentée puis l'application des complexes en géométrie plane est exposée.

2.1 Corps des nombres complexes

La construction de ce corps est hors-programme. On le définit tel quel.

Définition 2.1. L'ensemble des complexes est défini par

$$\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}\, y \mid (x, y) \in \mathbb{R}\}, \tag{2.1}$$

tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.

Remarque L'unité imaginaire i est souvent notée j en physique (pour ne pas confondre avec l'intensité). L'ensemble des complexes est muni de deux lois :
- l'addition, notée $+$;
- la multiplication, notée $\times$ ou $\cdot$.

Proposition 2.1. Tous les réels sont complexes, c'est-à-dire :

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Les lois de $\mathbb{R}$ coïncident avec les lois sur $\mathbb{C}$.

Proposition 2.2. $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif. C'est-à-dire que :
- la loi $+$ est associative,

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \quad x + (y + z) = (x + y) + z; \tag{2.3}$$

- la loi $+$ est commutative,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2 \quad x + y = y + x; \tag{2.4}$$

- $\mathbb{C}$ admet un neutre pour $+$: c'est 0 ;
- tout élément de $\mathbb{C}$ est inversible par $+$ et l'opposé de tout complexe x et $-x$.

Proposition 2.3. $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un anneau commutatif. C'est-à-dire que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif et que
- $\times$ est associative ;
- $\times$ admet un élément neutre noté 1 ;
- $\times$ est distributive sur $+$:

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \quad a \times (b + c) = a \times b + a \times c. \tag{2.5}$$

Proposition 2.4. Pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple de réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + \mathrm{i}\, y$. C'est-à-dire que l'application

$$\varphi \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x, y) & \longmapsto & x + \mathrm{i}\, y \end{array} \right. \tag{2.6}$$

est bijective.

Unicité. S'il existe deux couples de réels $(x, y), (x', y')$ tels que

$$x' + \mathrm{i}\, y' = x + \mathrm{i}\, y, \tag{2.7}$$

alors

$$\underbrace{(x - x')^2}_{\geq 0} = \underbrace{-(y' - y)^2}_{\leq 0}. \tag{2.8}$$

Finalement

$$(x - x')^2 = (y' - y)^2 = 0. \tag{2.9}$$

□

Existence. Par définition de l'ensemble des complexes, pour un complexe z donné, il existe toujours un couple de réels qui lui est associé. □

On appelle le réel x la partie réelle du complexe z, $x = \Re(z)$ et on appelle le réel y la partie imaginaire du complexe z, $y = \Im(z)$.

Proposition 2.5. Soient des complexes z et z' puis un réel λ, alors

$$\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z'), \tag{2.10}$$
$$\Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z'), \tag{2.11}$$
$$\Re(\lambda z) = \lambda \Re(z), \tag{2.12}$$
$$\Im(\lambda z) = \lambda \Im(z). \tag{2.13}$$

Un complexe n'a pas de signe. On note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

2.1.1 Conjugaison de complexe

Définition 2.2. Soit $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}$, on définit son conjugué de z noté $\overline{z}$ par $\overline{z} = x - \mathrm{i}\, y$.

Proposition 2.6. Soient des complexes z et z', alors

$$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}; \tag{2.14}$$
$$\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}; \tag{2.15}$$
$$\overline{\overline{z}} = z. \tag{2.16}$$

Proposition 2.7. pour tout complexe z on a

$$\Re(z) = \frac{z + \overline{z}}{2}; \tag{2.17}$$
$$\Im(z) = \frac{z - \overline{z}}{2\,\mathrm{i}}; \tag{2.18}$$
$$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}; \tag{2.19}$$
$$z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}. \tag{2.20}$$

2.1.2 Module d'un complexe

Proposition 2.8. Soit un complexe z, alors $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ et $z\overline{z} = 0 \iff z = 0$.

Démonstration. Soit un complexe z, notons x sa partie réelle et y sa partie imaginaire, alors

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 \geq 0, \tag{2.21}$$

et

$$z\overline{z} = 0 \iff x^2 + y^2 = 0 \iff x = y = 0 \iff z = 0. \tag{2.22}$$

□

Définition 2.3. Pour tout complexe z, on définit le module de z par $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Proposition 2.9. Soient z et z' deux complexes, alors

$$|z| = |\overline{z}|\,; \tag{2.23}$$

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|\,; \tag{2.24}$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|\,. \tag{2.25}$$

Avec égalité s'il existe un réel λ tel que $z' = \lambda z$.

Démonstration.

$$(|z|+|z'|)^2 - |z + z'|^2 = (\sqrt{z\overline{z}}+\sqrt{z'\overline{z'}})^2 - (z+z')(\overline{z + z'}) = 2\sqrt{z\overline{z}z'\overline{z'}} - z\overline{z'} - z'\overline{z} \tag{2.26}$$

On pose $u = z\overline{z'}$ et on a

$$(|z| + |z'|)^2 - |z + z'|^2 = 2\,|u| - 2\Re(u) \geq 0. \tag{2.27}$$

On a montré que $(|z| + |z'|)^2 \geq |z + z'|^2$ et comme ce sont des nombres positifs, en appliquant la racine carré [1], on obtient l'inégalité triangulaire.

Cas d'égalité : Notons ici que $\frac{z'}{z} = x + \mathrm{i}\,y$ avec x et y deux réels. On va montrer que l'égalité est vraie si et seulement si $y = 0$ et $x \geq 0$.

$$|z + z'| = |z| + |z'| \iff \left|1 + \frac{z'}{z}\right|^2 = \left(1 + \left|\frac{z'}{z}\right|\right)^2 \tag{2.28}$$

$$\iff x = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.29}$$

$$\iff y = 0 \text{ et } x \geq 0. \tag{2.30}$$

□

Proposition 2.10. Tout complexe z non nul admet un unique inverse, c'est $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$.

Démonstration. D'une part

$$z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z\overline{z}}{|z|^2} = 1, \tag{2.31}$$

et d'autre part si $z \cdot z' = z' \cdot z = 1$ alors $z' \cdot z \cdot \frac{\overline{z}}{|z|^2} = z'$. Comme $z \cdot z' = 1$, on a $\frac{\overline{z}}{|z|^2} \cdot z \cdot z' = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ donc $z' = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$. □

1. qui est une fonction croissante

En pratique, on multiplie par le complexe conjugué : $\frac{1}{x+\mathrm{i}\,y} = \frac{x-\mathrm{i}\,y}{x^2+y^2}$.

Proposition 2.11. $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un anneau commutatif intègre. $(\mathbb{C}^*, +, \times)$ est aussi un corps commutatif.

Proposition 2.12. Soient un complexe z non nul et un complexe z' quelconque, alors on a

$$\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\overline{z}}; \tag{2.32}$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}; \tag{2.33}$$

$$\overline{\frac{z'}{z}} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}; \tag{2.34}$$

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}. \tag{2.35}$$

Définition 2.4. Soient un complexe a et un réel positif r, on définit le disque ouvert de centre a et de rayon r, noté $D_o(a, r)$, par :

$$D_o(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}, \tag{2.36}$$

et on définit le disque fermé, noté $D_f(a, r)$, par :

$$D_f(a, r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}. \tag{2.37}$$

2.1.3 Plan complexe

Soit $\mathcal{P}$ le plan euclidien muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. Si M est un point du plan $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans le repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, on appelle l'affixe de M, le complexe $z = x + \mathrm{i}\,y$. pour tous complexe z, il existe un point du plan $\mathcal{P}$ d'affixe z, c'est $M(z)$. L'application $\varphi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ z & \longmapsto & M(z) \end{array}\right.$ est une bijection. Cette bijection permet "d'identifier" $\mathbb{C}$ et le plan $\mathcal{P}$. Dans ce cadre :

— $M(\overline{z})$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe $(O, \overrightarrow{u})$;
— $M(-z)$ est le symétrique de $M(z)$ par rapport au point O ;
— le module de z, $|z|$ est la distance de O à $M(z)$;
— $|z - z'|$ est la distance entre $M(z)$ et $M(z')$;
— l'inégalité triangulaire dit que la distance de $M(z)$ à $M(z')$ est inférieure ou égale à la somme de la distance entre O et $M(z)$ et de la distance entre O et $M(z')$;
— $D_o(a, r)$ est l'ensemble des points $M(z)$ dont la distance au point $A(a)$ est strictement inférieure à r.

Si $\overrightarrow{a}$ est un vecteur on définit son affixe comme l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM}$.

2.2 Groupe des complexes de module 1

2.2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 2.5. Le groupe des complexes de module 1, noté $\mathbb{U}$, est :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}. \tag{2.38}$$

Géométriquement parlant, $\mathbb{U}$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

Proposition 2.13. Soit un complexe z, alors

$$z \in \mathbb{U} \iff z \cdot \overline{z} = 1 \iff \overline{z} = \frac{1}{z}. \tag{2.39}$$

Proposition 2.14. $(\mathbb{U}, \times)$ est un groupe commutatif (ou abélien), c'est-à-dire que :

1. $\forall (z, z') \in \mathbb{U}^2 \quad zz' \in \mathbb{U}$;
2. la loi $\times$ est associative et commutative ;
3. $\mathbb{U}$ admet 1 comme élément neutre pour $\times$;
4. tout élément de $\mathbb{U}$ admet un inverse dans $\mathbb{U}$.

Démonstration.
1. Soit deux complexes z et z' de $\mathbb{U}$, alors $|zz'| = |z|\,|z'| = 1$ donc $zz' \in \mathbb{U}$;
2. puisque la loi $\times$ est associative et commutative dans $\mathbb{C}$, elle l'est dans $\mathbb{U}$;
3. le module de 1 est égal à 1 donc $1 \in \mathbb{U}$;
4. soit un complexe z de $\mathbb{U}$, comme son module vaut 1, il est non nul et il admet un inverse et $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} = 1$ donc l'inverse est dans $\mathbb{U}$.

$\square$

Proposition 2.15. Soit un complexe z de $\mathbb{U}$, alors il existe un réel θ — unique modulo 2π — tel que $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

Existence. Soit un complexe z de $\mathbb{U}$, notons x et y respectivement sa partie réelle et sa partie imaginaire. Alors $x^2 + y^2 = |z|^2 = 1$, donc d'après le théorème 1.6 il existe un unique $\theta_0 \in \left]-\pi\,;\pi\right]$ tel que $x = \cos\theta_0$ et $y = \sin\theta_0$. $\square$

Unicité. Montrons l'unicité modulo 2π : Soit deux réels θ et θ' vérifiant $x = \cos\theta = \cos\theta'$ et $y = \sin\theta = \sin\theta'$. Il existe deux entiers relatifs k et l tels que $\theta + 2k\pi \in \left]-\pi\,;\pi\right]$ et $\theta' + 2kl\pi \in \left]-\pi\,;\pi\right]$. Donc on a $\theta_0 = \theta + 2k\pi = \theta' + 2l\pi$, soit encore $\theta - \theta' = (l-k)2\pi$, c'est à dire $\theta \equiv \theta'[2\pi]$. $\square$

Définition 2.6 (Exponentielle complexe)**.** Pour tout réel θ, on note

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta. \tag{2.40}$$

Proposition 2.16. L'application $\psi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \end{array}\right.$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{U}, \times)$.

Démonstration. pour tout réel θ, on a bien

$$\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1, \tag{2.41}$$

donc $\psi(\theta) \in \mathbb{U}$. Ensuite,

$$\begin{aligned}
\psi(\theta + \theta') &= \cos(\theta + \theta') + \mathrm{i}\sin(\theta + \theta') && (2.42)\\
&= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathrm{i}(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') && (2.43)\\
&= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathrm{i}\sin\theta') && (2.44)\\
&= \psi(\theta)\psi(\theta') && (2.45)
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition 2.17. Soient deux réels θ et θ' et un entier relatif n, alors :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\theta')} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'}}; \tag{2.46}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})^n; \tag{2.47}$$

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,-\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,-\theta}}{2\,\mathrm{i}}. \tag{2.48}$$

Soient un entier naturel n non nul et $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. La somme vaut :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) =& \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,-k\theta}) && (2.49)\\
=& \frac{1}{2}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-(n+1)\theta)}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,-\theta}}\right] && (2.50)\\
=& \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\frac{\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-(n+1)\frac{\theta}{2}\right)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\frac{\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\theta}{2}\right)} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}}}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-(n+1)\frac{\theta}{2}\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\theta}{2}\right)}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-(n+1)\frac{\theta}{2}\right)}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\theta}{2}\right)}}\right)\right] && (2.51)\\
=& \frac{1}{2}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\frac{\theta}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-n\frac{\theta}{2}\right)}\right] && (2.52)\\
=& \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right). && (2.53)
\end{aligned}$$

Car

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b} = 2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{(a+b)}{2}}. \tag{2.54}$$

Proposition 2.18. L'application ψ est 2π-périodique et surjective. C'est-à-dire que pour tout complexe z de $\mathbb{U}$, il existe un réel θ tel que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. On a

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \psi(-\theta) = \overline{\psi(\theta)}; \tag{2.55}$$

$$\forall (\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} \iff \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}. \tag{2.56}$$

Démonstration. — ψ est 2π-périodique car cos et sin le sont ;
— ψ est surjective d'après la proposition 2.15.

□

Proposition 2.19. L'application ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \psi'(\theta) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}. \tag{2.57}$$

Démonstration. Admettons qu'une fonction $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ telle que $f = x + \mathrm{i}\,y$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est dérivable si et seulement si x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et auquel cas $f' = x' + \mathrm{i}\,y'$. Ici, $\psi = \cos + \mathrm{i}\sin$, sin et cos sont dérivables alors $\psi' = -\sin + \mathrm{i}\cos = \mathrm{i}(\cos + \mathrm{i}\sin) = \mathrm{i}\,\psi$. □

2.2.2 Trigonométrie

2.2.2.1 Polynômes de Chebychev

Définition 2.7. On définit les polynômes de Chebychev en suivant ce raisonnement :

$$\begin{aligned}
\cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta =& (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n && (2.58)\\
=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{i}^k \sin^k\theta \cos^{n-k}\theta && (2.59)\\
=& \sum_{2p\leq n} \binom{n}{2p} (-1)^p \sin^{2p}\theta\cos^{n-2p}\theta && (2.60)\\
& + \mathrm{i}\sin\theta \sum_{2p+1\leq n} \binom{n}{2p+1} (-1)^p \sin^{2p}\theta \cos^{n-2p-1}\theta. && (2.61)
\end{aligned}$$

En remplaçant par $\sin^2\theta$ par $1-\cos^2\theta$, on obtient

$$\cos n\theta = P_n(\cos\theta) \quad \sin n\theta = \sin\theta \cdot Q_n(\cos\theta). \tag{2.62}$$

P_n et Q_n sont respectivement les polynômes de Chebychev de 1$^{\text{re}}$ et de 2$^{\text{e}}$ espèce.

2.2.2.2 Arc moitié

Pour tout réel θ non congru à π modulo–2π on pose $t = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ alors

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{1-t^2}{1+t^2}; && (2.63)\\
\sin\theta &= \frac{2t}{1+t^2}; && (2.64)\\
\tan\theta &= \frac{2t}{1-t^2}; && (2.65)\\
\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} &= \frac{(1+\mathrm{i}\,\theta)^2}{1+t^2}. && (2.66)
\end{aligned}$$

La bijection φ: $\begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U}\setminus\{-1\} \\ t & \longmapsto & \frac{(1+\mathrm{i}\,\theta)^2}{1+t^2} \end{cases}$ fournit un paramétrage du cercle trigonométrique privé du point $(-1,0)$.

2.2.2.3 Linéarisation

Pour tout réel θ on a :

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta &= \frac{1+\cos 2\theta}{2}; && (2.67)\\
\sin^2\theta &= \frac{1-\cos 2\theta}{2}. && (2.68)
\end{aligned}$$

Si l'exposant $p \geq 3$, on utilise les formules d'Euler

$$\cos^p \theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{2} \right)^p, \tag{2.69}$$

$$\sin^p \theta = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}}{2\,\mathrm{i}} \right)^p, \tag{2.70}$$

puis on développe avec la formule du binôme de Newton et on regroupe judicieusement les termes obtenus.

2.2.2.4 Transformations de sommes en produits

La transformation de produit en somme s'effectue en suivant le raisonnement suivant :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{b-a}{2}} \right) \tag{2.71}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}\, 2\cos\left(\frac{a-b}{2} \right). \tag{2.72}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,a} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,b} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a-b}{2}} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{b-a}{2}} \right) \tag{2.73}$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{a+b}{2}}\, 2\,\mathrm{i}\sin\left(\frac{a-b}{2} \right). \tag{2.74}$$

On identifie la partie réelle et la partie imaginaire pour écrire que

$$\cos a + \cos b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2} \right) \cos\left(\frac{a-b}{2} \right); \tag{2.75}$$

$$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2} \right) \cos\left(\frac{a-b}{2} \right); \tag{2.76}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2} \right) \sin\left(\frac{a-b}{2} \right); \tag{2.77}$$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2} \right) \sin\left(\frac{a-b}{2} \right). \tag{2.78}$$

On peut retrouver les formules de transformation de sommes en produits, puis de produits en sommes.

2.2.3 Argument d'un complexe

Soit z un complexe non nul. Le complexe $\frac{z}{|z|}$ est de module 1, donc il existe un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$

Définition 2.8. Si z est un complexe non nul, on appelle argument de z tout réel θ tel que $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$. Le réel θ est défini modulo-2π, on note $\arg(z) \equiv \theta \pmod{2\pi}$. L'unique réel $\theta \in \,]-\pi\,;\pi]$, qui est un argument de z, est l'argument principal de z, noté $\mathrm{Arg}(z)$.

L'écriture $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ est appelée forme trigonométrique du complexe non nul z.

Remarque : Si on ne sait pas que le complexe est non nul, on ne parle ni d'argument ni de forme trigonométrique.

Proposition 2.20. Soit un complexe z non nul, alors

$$\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2\ \forall(\rho,\rho') \in \mathbb{R}+^2 \quad z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \rho'\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta'} \iff \begin{cases}\rho = \rho' = |z| \\ \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}\end{cases}. \tag{2.79}$$

Démonstration. La preuve de cette proposition découle directement de la définition. □

Proposition 2.21. Soient deux complexes non nuls z et z' et un entier relatif n, alors

$$\arg(z) \equiv 0 \pmod{\pi} \iff z \in \mathbb{R}^*; \tag{2.80}$$

$$\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff z \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}^*; \tag{2.81}$$

$$\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}; \tag{2.82}$$

$$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}; \tag{2.83}$$

$$\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \pmod{2\pi}; \tag{2.84}$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi}; \tag{2.85}$$

$$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) \pmod{2\pi}. \tag{2.86}$$

Démonstration. La preuve s'articule en cinq parties :

1. $\arg(z) \equiv 0 \pmod{\pi} \iff z = \pm|z|$;
2. $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \iff z = \pm\,\mathrm{i}\,|z|$;
3. si $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, alors $\overline{z} = \overline{|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}} = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\theta)}$ donc $\arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$;
4. si on met z et z' sous forme trigonométrique, on retrouve les formules 4, 5 et 6 par le calcul ;
5. puisque $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi}$, on a bien la dernière formule.

□

Interprétation géométrique : Dans le plan complexe muni d'un repère $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $\arg(z)$ représente une mesure de l'angle $\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}}(z)$. Plus généralement, si a, b et c sont trois complexes distincts affixes respectives des points A, B et C alors $\arg\left(\frac{b-a}{c-a}\right)$ représente une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$. Donc A, B et C sont alignés si et seulement si le complexe $\frac{b-a}{c-a}$ est un réel non nul.

2.2.4 Racines n^{es} de l'unité

Définition 2.9. Soit un entier naturel non nul n, on appelle racine n^{es} de l'unité tout complexe z tel que $z^n = 1$. L'ensemble de ces complexes est noté $\mathbb{U}_n$

Proposition 2.22. Soit un entier naturel n non nul, alors

$$\mathbb{U}_n = \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi k}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0\,;n-1]\!]\right\}. \tag{2.87}$$

Cet ensemble est de cardinal n.

Démonstration. Soit un complexe z de $\mathbb{U}_n$ noté $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, alors comme $z^n = 1$ on a $\rho = 1$ et $n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ c'est à dire que $z \in \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

— Soient deux entiers relatifs k et l de $[\![0\,;n-1]\!]$ alors $\left|\frac{2\pi}{n}k - \frac{2\pi}{n}l\right| \leq 2\pi$ donc $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi k}{n}} \neq \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2\pi l}{n}}$. Il y a donc n racines distinctes.

— Soit un entier relatif k, il existe un entier $l \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $k \equiv l \pmod{n}$: Puisque si on définit k tel que $p = \mathrm{E}\left(\frac{k}{n}\right)$ alors

$$np \leq k < np + n \tag{2.88}$$
$$0 \leq k - np \leq n - 1 < n. \tag{2.89}$$

Alors on a démontré que $\mathbb{U}_n \subset \left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$, on déduit l'autre inclusion en vérifiant que tous les éléments de $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\}$ élevés à la puissance n font 1. □

Interprétation géométrique : Les points d'affixes $z \in \mathbb{U}_n$ forment les sommets d'un polygone régulier à n cotés centré en O dont l'un des sommet est 1. La représentation géométrique de l'ensemble $\mathbb{U}_5$ est donnée par le figure 2.1.

Théorème 2.1. *Soit n un entier naturel non nul alors*

$$\forall z \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\} \quad \sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0. \tag{2.90}$$

Démonstration. C'est la somme des termes d'une suite géométrique de raison $z \neq 1$ donc

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^{n-1+1}}{1-z} = 0. \tag{2.91}$$

□

Application à la résolution de $z^n = a$ pour $a \in \mathbb{C}$: On étudie ce problème en étude de cas :

— si $a = 0$, la seule solution est zéro ;

— si $a \neq 0$, on cherche des solutions dans $\mathbb{C}^*$ et on peut écrire les formes trigonométriques : $z = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \quad a = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$, alors

$$\rho = \sqrt[n]{A} \quad \theta \equiv \frac{\alpha}{n} \pmod{\frac{2\pi}{n}}; \tag{2.92}$$

soit $z_0 = \sqrt[n]{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{n}}$, c'est une solution de l'équation ; une solution z de l'équation est telle que $\frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$

Proposition 2.23. Pour un complexe a non nul, l'ensemble des solutions de l'équation $z^n = a$ est

$$S_{z^n=a} = \left\{ \sqrt[n]{A}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{(\alpha+2\pi k)}{n}} \;\middle|\; k[\![0\,;n-1]\!] \right\}. \tag{2.93}$$

Si on connaît une solution z_0 de l'équation, alors

$$S_{z^n=a} = \left\{ z_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}} \;\middle|\; k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}. \tag{2.94}$$

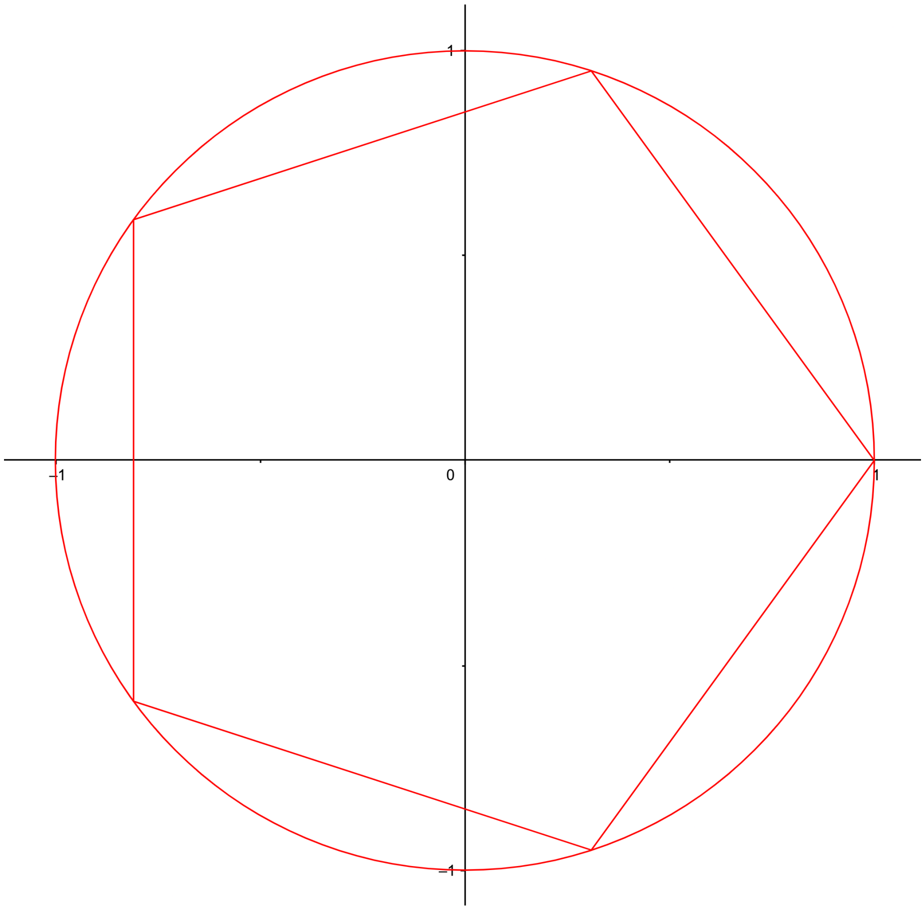

FIGURE 2.1 – Représentation dans le plan complexe de U_5

Cas particulier Si $n = 2$, on trouve deux racines complexes conjuguées. Par exemple les racines de $Z = 3 + 4\,\mathrm{i}$ sont telles que

$$z^2 = 3 + 4\,\mathrm{i} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \tag{2.95}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 4 \\ y^2 = 1 \\ xy = 2 \end{cases} \tag{2.96}$$

$$\iff z \in \{2 + \mathrm{i}, -2 - \mathrm{i}\}. \tag{2.97}$$

2.3 Résolution d'équations du second degré

2.3.1 Résolution

Soient a, b, c trois complexes avec a non nul. On s'intéresse à l'équation

$$az^2 + bz + c = 0, \tag{2.98}$$

avec $z \in \mathbb{C}$ l'inconnue. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'Eq. (2.98). Ces solutions sont les racines complexes du trinôme $aX^2 + bX + c$.

Mise sous forme canonique du trinôme : le trinôme peut se factoriser en cherchant les racines

$$az^2 + bz + c = a\left(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \tag{2.99}$$

$$= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right). \tag{2.100}$$

Comme a est non nul, les solution de l'Eq. (2.98) sont des solutions de l'équation

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0. \tag{2.101}$$

Définition 2.10. On définit le discriminant de l'Eq. (2.98) comme étant le complexe $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Soit le discriminant est nul et auquel cas l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}; \tag{2.102}$$

2. soit le discriminant est non nul et dans ce cas on pose que le complexe δ est une de ses racines carrées et l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{-b + \delta}{2a}, \frac{-b - \delta}{2a}\right\}. \tag{2.103}$$

Cas particulier : si a, b et c sont réels alors le discriminant Δ de l'Eq. (2.98) est réel et admet deux racines (si $\Delta \neq 0$) et donc :

— soit le discriminant est positif et alors

$$\Delta > 0 \quad \delta = \sqrt{\Delta} \quad \mathcal{S} = \left\{ \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \right\}; \tag{2.104}$$

— soit le discriminant est négatif et alors

$$\Delta < 0 \quad \delta = \mathrm{i}\sqrt{\Delta} \quad \mathcal{S} = \left\{ \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}, \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a} \right\}. \tag{2.105}$$

Si le nombre 2 apparaît naturellement en facteur dans b, on pose $b' = \frac{b}{2}$ et on définit le discriminant réduit : $\Delta' = b'^2 - ac$ et les solutions sont sous la forme $\frac{-b' \pm \delta'}{a}$.

Théorème 2.2 (Théorème fondamental de l'algèbre (1799 – Gauss))**.** *Toute équation polynomiale de degré n admet n solutions dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. La preuve n'est pas au programme de MPSI. □

2.3.2 Relation entre les coefficients et les racines

Proposition 2.24. Soient s et p deux complexes. Alors deux complexes quelconques x et y sont solutions de $\begin{cases} x+y=s \\ xy=p \end{cases}$ si et seulement si x et y sont solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.

Démonstration. Soient s et p deux complexes. On considère l'équation

$$z^2 - sz + p = 0. \tag{2.106}$$

Soient α et β les solutions de cette équation, alors $\begin{cases} \alpha+\beta = s \\ \alpha\beta = p \end{cases}$. Plus généralement si α et β sont les deux racines de l'Eq. (2.98) alors $\begin{cases} \alpha+\beta = -\frac{b}{a} \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} \end{cases}$. □

2.4 Exponentielle complexe

Définition 2.11. Soit z un nombre complexe. On définit l'exponentielle complexe de z (notée $\exp(z)$ ou e^z) par $\exp(z) = \mathrm{e}^{\Re(z)}(\cos\Im(z) + \mathrm{i}\sin\Im(z))$.

Proposition 2.25. L'application : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^z \end{array} \right.$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{C}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ [2].

Démonstration. Si on note avec quatre réels x, x', y, y' les complexes $z = x + \mathrm{i}\,y$ et $z' = x' + \mathrm{i}\,y'$ alors

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{z+z'} &= \mathrm{e}^{(x+x')+\mathrm{i}(y+y')} && (2.107) \\ &= \mathrm{e}^{x+x'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+y')} && (2.108) \\ &= \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{e}^{x'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,y'} && (2.109) \\ &= \mathrm{e}^{z}\,\mathrm{e}^{z'}. && (2.110) \end{aligned}$$

□

2. cf. chapitre ??

Proposition 2.26. Soient z et z' deux complexes alors

$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z'} \iff z \equiv z' \pmod{2\pi\,\mathrm{i}}. \tag{2.111}$$

Démonstration. Cette formule est due au caractère 2π-périodique des fonctions sinus et cosinus. ☐

Proposition 2.27. Soit un intervalle I réel et $\varphi \in \mathbb{C}^I$ une application dérivable. Alors $f = \mathrm{e}^{\varphi}$ est dérivable telle que $f' = \varphi'\,\mathrm{e}^{\varphi}$. En particulier si a est complexe, l'application $f_a\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{ax} \end{cases}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_a' = af_a$.

Démonstration. Soient φ_1 et φ_2, respectivement la partie réelle de φ et la partie imaginaire de φ. Alors

$$\begin{aligned} \forall x \in I \quad f(x) = e^{\varphi(x)} &= \cos\varphi_2(x)\,\mathrm{e}^{\varphi_1(x)} + \mathrm{i}\sin\varphi_2(x)\,\mathrm{e}^{\varphi_1(x)} && (2.112)\\ &= \Re[f(x)] + \Im[f(x)]. && (2.113) \end{aligned}$$

Comme φ est dérivable, $\varphi_1 = \Re[f]$ et $\varphi_2 = \Im[f]$ le sont, ainsi f est dérivable. ☐

Remarque : L'application $f\colon \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{z} \end{cases}$ n'est pas dérivable.

2.5 Nombres complexes et géométrie plane

2.5.1 Écriture complexe de quelques transformations usuelles du plan

À toute transformation F du plan $\mathcal{P}$, on peut associer un application $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ telle que pour tous points $M(z)$ et $M'(z')$ on ait

$$M' = f(M) \iff z' = f(z). \tag{2.114}$$

On dit que F est représentée par l'application f. Soient deux complexes z_0 et b deux complexes correspondant respectivement à un point M_0 et un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan $\mathcal{P}$.

— La rotation de centre M_0 d'angle θ est représentée par

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}(z - z_0) + z_0 \end{cases} ; \tag{2.115}$$

— la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est représentée par

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z + b \end{cases} ; \tag{2.116}$$

— la symétrie de centre M_0 est représentée par

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 2z_0 - z \end{cases} ; \tag{2.117}$$

— l'homothétie de rapport $k \neq 0$ et de centre M_0 est représentée par

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & k(z - z_0) + z_0 \end{cases} . \tag{2.118}$$

2.5.2 Similitudes directes

Soient $\omega \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}^*$. La rotation $\mathcal{R}$ de centre ω et d'angle θ est représentée par $r\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}(z-\omega)+\omega \end{array}\right.$ et l'homothétie $\mathcal{H}$ de rapport $k \in \mathbb{R}^*$ est représentée par $h\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & k(z-\omega)+\omega \end{array}\right.$.

Définition 2.12. On appelle similitude directe de centre $\Omega(\omega)$, d'angle θ et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$, la transformation Ψ du plan dans le plan représentée par l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$: $\psi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}(z-\omega)+\omega \end{array}\right.$.

Soient a et b deux complexes tels que $a \neq 0$. On considère l'application bijective $\varphi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b \end{array}\right.$ qui représente $\Phi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M(z) & \longmapsto & M(az+b) \end{array}\right.$.

- Si $a = 1$; alors Φ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(b)$.
- Si $a \neq 1$, alors on montre que Φ admet un unique point fixe $\Omega(\omega)$ $\quad \omega = \frac{b}{1-a}$ et $\varphi(z) = a(z-\omega)+\omega$. Φ est la similitude de centre $\Omega(\omega)$, de rapport $k = |a|$ et d'angle $\theta \equiv \arg(a) \pmod{2\pi}$

2.5.3 Application inversion

Soit l'application $f\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ z & \longmapsto & \frac{1}{z} \end{array}\right.$ la transformation du plan associée $F\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P}\setminus\{O\} & \longrightarrow & \mathcal{P}\setminus\{O\} \\ M(z) & \longmapsto & M\left(\frac{1}{z}\right) \end{array}\right.$ est une inversion. Si M appartient au cercle trigonométrique, $F(M)$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des réels et il est sur le cercle.

2.5.4 Barycentre

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(A_1, \dots A_n) \in \mathcal{P}^n$ d'affixes respectives $z_1 \dots z_n$ et $\lambda_1 \dots \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \neq 0$. Soit G le barycentre de ces points,n l'affixe de G est $z_G = \frac{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k}{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k}$

2.5.5 Orthogonalité

Soient $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ deux vecteurs d'affixes respectives $z = x+\mathrm{i}\,y$ et $z' = x'+\mathrm{i}\,y'$. On sait que $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul. Soit $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ si et seulement si $\Re(z\overline{z'}) = 0$.

2.5.6 Alignement

Soient deux réels k et λ.

1. Quel est l'ensemble des points $E_k = \left\{M(z) \in \mathcal{P} \;\middle|\; \left|\frac{z-a}{z-b}\right| = k\right\}$?
2. Quel est l'ensemble des points $E_\lambda = \left\{M(z) \in \mathcal{P} \;\middle|\; \arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right) \equiv \lambda \pmod{2\pi}\right\}$?

Si le réel $k < 0$ alors $E_k = \emptyset$, s'il est nul alors $E_0 = \{A(a)\}$, s'il vaut 1 alors E_1 est la médiatrice de $[AB]$.

Si le réel k est strictement positif non égal à 1 alors $\frac{MA}{MB} = k$ et donc $(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB}) = 0$. Soit I le barycentre de $(A, 1)(B, k)$ et J le barycentre de $(A, 1)(B, -k)$ alors $(1 + k)(1 - k)\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0$ comme $k \neq \pm 1$ on a que M est sur le cercle de diamètre $[IJ]$.

Si $z \in \{a, b\}$ alors $E_\lambda = \emptyset$ et sinon E_λ est la droite qui forme l'angle λ avec la droite $(A(a)B(b))$.

Chapitre 3

Théorie des ensembles et des applications

Sommaire

Figures

La théorie des ensembles comprend l'étude des ensembles, l'étude de leurs parties et l'étude de leurs interactions grâce aux applications. On s'intéresse particulièrement aux injections, aux surjections et aux bijections. La troisième section présente les relations binaires comme la relation d'ordre ou la relation d'équivalence. La quatrième et dernière section se focalise sur les familles d'éléments comme par exemple des suites.

Ce chapitre est primordial dans le programme de MPSI, il décrit le langage nécessaire pour travailler de manière sérieuse en mathématiques.

3.1 Vocabulaire relatif aux ensembles

Nous prenons comme notion primitive les notions d'ensemble, d'élément et d'appartenance. On ne cherchera pas à les définir, « $x \in E$ » sera lu « l'élément x appartient à l'ensemble E ».

3.1.1 Égalité de deux ensembles

Définition 3.1. On dira que deux ensembles E et F sont égaux si ils ont les mêmes éléments. On notera $E = F$,

$$E = F \iff \forall x \quad (x \in E \iff x \in F)\,. \tag{3.1}$$

3.1.2 Inclusion

Définition 3.2. Soient E et F deux ensembles. On dira que E est inclus dans F ou que E est un sous-ensemble de F si et seulement si tous les éléments de E sont des éléments de F. On notera $E \subset F$

Proposition 3.1.

$$E = F \iff E \subset F \text{ et } F \subset E. \tag{3.2}$$

Pour dire que E est strictement inclus dans F c'est à dire $E \subset F$ et $F \not\subset E$, on notera $E \subsetneq F$

$$E \subsetneq F \iff [\forall x \quad (x \in E \iff x \in F)] \text{ et } [\exists x \in F \quad x \notin E]\,. \tag{3.3}$$

3.1.3 Ensemble des parties d'un ensemble

Proposition 3.2 (Admise)**.** Soit un ensemble E. Il existe un ensemble dont les éléments sont les parties de E. On l'appelle ensemble des partie de E et il est noté $\mathfrak{P}(E)$ et

$$A \in \mathfrak{P}(E) \iff A \subset E. \tag{3.4}$$

Il n'y a que deux autres façons de définir un ensemble :

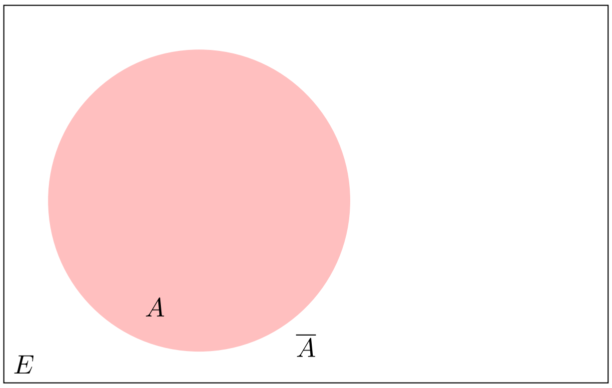

FIGURE 3.1 – Représentation du complémentaire

— en extension, c'est-à-dire qu'on énumère les éléments de l'ensemble, par exemple $S = \{1; 2; 3\}$

— en compréhension, c'est-à-dire qu'on définit l'ensemble E comme sous-ensemble d'un ensemble plus grand. Le sous ensemble des éléments de F qui vérifie une certaine propriété, par exemple l'ensemble des entiers pairs de $\mathbb{Z}$, $E_1 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \quad n = 2k\}$.

3.1.4 Opérations sur les parties d'un ensemble

Soient E un ensemble, A et B des parties de E. On définit les opérations sur les ensembles A et B suivantes :

3.1.4.1 Complémentaire de A dans E

C'est l'ensemble de E qui ne sont pas des éléments de A, noté $\complement_E A$ ou $\overline{A}$ [1] ou $E \setminus A$.

$$\forall x \in E \quad x \in \complement_E A \iff x \notin A. \tag{3.5}$$

Le diagramme de Venn correspondant est donné par la figure 3.1.

Proposition 3.3. Soient A et B deux parties de E

$$\complement_E(\complement_E A) = A; \tag{3.6}$$
$$A \subset B \iff \complement_E B \subset \complement_E A. \tag{3.7}$$

3.1.4.2 Intersection des parties A et B

C'est l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans A et dans B, on le note $A \cap B$,

$$\forall x \in E \quad x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B. \tag{3.8}$$

Le diagramme de Venn correspondant est donné par la figure 3.2.

1. ne pas confondre avec l'adhérence, cf programme de MP

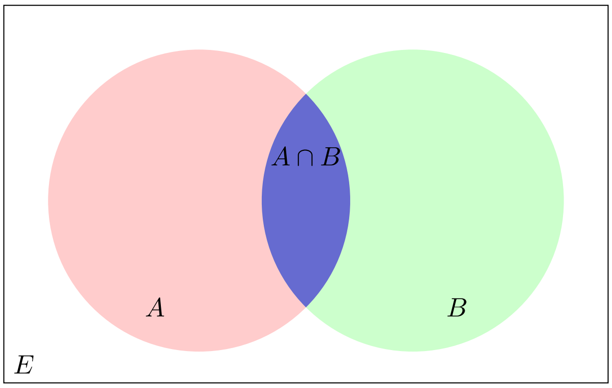

Figure 3.2 – Représentation de l'intersection

3.1.4.3 Réunion des parties A et B

C'est l'ensemble des éléments qui appartiennent au moins à l'une des parties A et B, on le note $A \cup B$.

$$\forall x \in E \quad x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B \tag{3.9}$$

Le diagramme de Venn correspondant est donné par la figure 3.3.

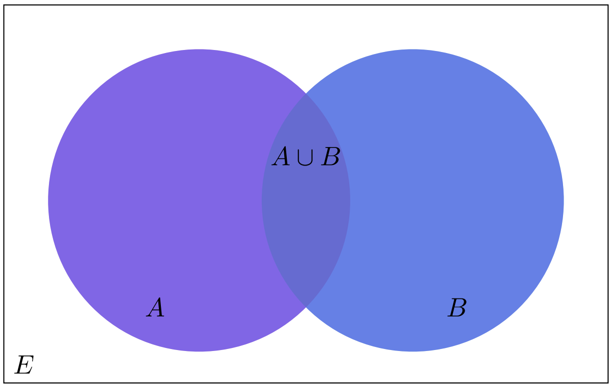

Figure 3.3 – Représentation de la réunion

3.1.4.4 Différence de A et B

C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à A mais pas à B, noté $A \setminus B$.

$$\forall x \in E \quad x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ et } x \notin B; \tag{3.10}$$
$$A \setminus B = A \cap \complement_E B. \tag{3.11}$$

Le diagramme de Venn correspondant est donné par la figure 3.4.

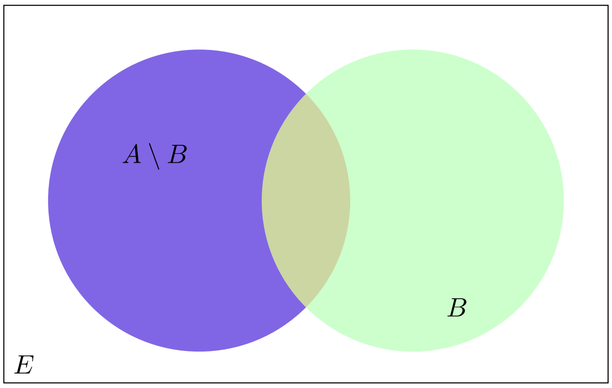

FIGURE 3.4 – Représentation de la différence $A \setminus B$

3.1.4.5 Différence symétrique de A et B

C'est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à exactement une des parties A et B, on le note $A\Delta B$ et

$$\forall x \in E \quad x \in A\Delta B \iff x \in A \cup B \text{ et } x \notin A \cap B. \tag{3.12}$$

Le diagramme de Venn correspondant est donné par la figure 3.5.

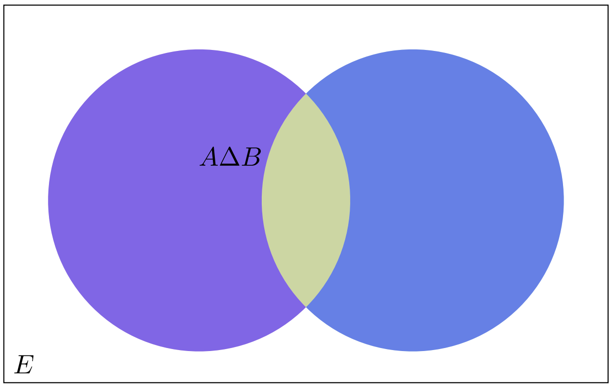

FIGURE 3.5 – Représentation de la différence symétrique $A\Delta B$

Proposition 3.4. Soient A et B des parties de E, on a

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}); \tag{3.13}$$

$$A\Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A) = (A \cup B) \cap \overline{A \cap B} = (A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B}) \tag{3.14}$$

3.1.4.6 Propriétés

Proposition 3.5. Soient A, B et C trois parties de E, on a les axiomes suivants respectivement : La commutativité

$$A \cap B = B \cap A, \tag{3.15}$$

$$A \cup B = B \cup A; \tag{3.16}$$

l'associativité

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \tag{3.17}$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C; \tag{3.18}$$

la distributivité

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (B \cap C), \tag{3.19}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C); \tag{3.20}$$

la stabilité

$$A \subset B \implies (A \cap C) \subset (B \cap C), \tag{3.21}$$
$$A \subset B \implies (A \cup C) \subset (B \cup C); \tag{3.22}$$

les lois de De Morgan

$$\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B, \tag{3.23}$$
$$\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B; \tag{3.24}$$

les lois de Boole

$$A \cap (A \cup B) = A, \tag{3.25}$$
$$A \cup (A \cap B) = A. \tag{3.26}$$

3.1.5 Ensemble vide

Si E est un ensemble, $\complement_E E$ est la seule partie de E sans élément. On l'appelle la partie vide de E. Si F est un autre ensemble, on a $\complement_E E = \complement_F F$. On parlera de l'ensemble vide de E au lieu de dire la partie vide de E, on le note $\emptyset$. Quelque soit l'ensemble E, $\complement_E E = \emptyset$.

3.1.6 Produit cartésien de deux ensembles

Définition 3.3. Pour deux éléments x et y de E, on appelle couple (x, y) la partie $\{\{x\}, \{x; y\}\}$. C'est un artifice pour se donner les éléments dans un certain ordre.

Proposition 3.6. Soient quatre éléments de E, x ,y, x' et y' alors

$$(x, y) = (x', y') \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} . \tag{3.27}$$

Démonstration. Supposons que $x = x'$ et $y = y'$, alors

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\} = (x', y'). \tag{3.28}$$

Si on suppose maintenant que $(x, y) = (x', y')$ alors

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}. \tag{3.29}$$

Par l'absurde, si $x \neq x'$ on a $\{x\} = \{x', y'\}$ et $\{x, y\} = \{x'\}$ donc $x' = y' = x$ et $y = x' = x$ donc on aboutit à la contradiction $x = x'$. Nécessairement $x' = x$ et donc $y = y'$. □

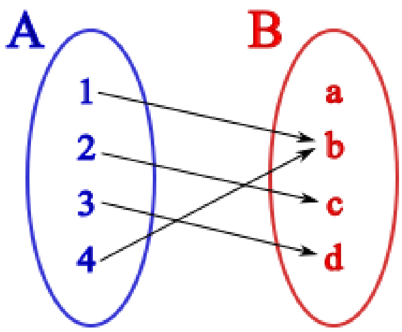

FIGURE 3.6 – Représentation de la notion d'application

Définition 3.4. Soient E et F deux ensembles, on appelle produit cartésien de E et F, qu'on note $E \times F$ l'ensemble $E \times F = \{(x, y), x \in E \; y \in F\}$.

Si $E = F$ alors on note $E \times E = E^2$. Si on dispose de n ensemble E_k, on définit par récurrence le produit $\prod_{k=1}^{n} E_k$ et les n-uplets (x_k).

3.2 Application

3.2.1 Notion d'application

Définition 3.5. On appelle application tout triplet (E, F, Γ) où E et F sont des ensembles, Γ une partie de $E \times F$ telle que

$$\forall x \in E \; \exists! y \in F \quad (x, y) \in \Gamma. \tag{3.30}$$

Une représentation graphique de la notion d'application est donné sur la figure **??**.

Soit une application $f = (E, F, \Gamma)$, alors E est l'ensemble de départ, F celui d'arrivée et Γ est le graphe de f. Pour un élément $x \in E$, soit y l'unique élément de F tel que $(x, y) \in \Gamma$ alors y est l'image de x par l'application f $(y = f(x))$ et x est l'antécédent de y par f. On note $f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$ et on dit que f est une application de E dans F. On note F^E l'ensemble des applications de E dans F.

Définition 3.6. Soient $f = (E, F, \Gamma)$ et $g = (E', F', \Gamma')$ deux applications, on dit que $f = g$ si $E = E'$, $F = F'$ et $\Gamma = \Gamma'$.

Dans le cas où on sait déjà que $E = E'$ et $F = F'$, on a

$$f = g \iff \forall x \in E \quad f(x) = g(x). \tag{3.31}$$

3.2.2 Restriction et prolongement

3.2.2.1 Restriction au départ

Soit $f = (E, F, \Gamma)$ et A une partie de E, posons $\Gamma_A = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \subset A \times F$. pour tous élément x de A, il existe un unique élément y de F tel que $(x, y) \in \Gamma_A$. (A, F, Γ_A) est donc une application. On l'appelle restriction de f au départ à la partie A, notée $f_{|A}$, telle que

$$f_{|A}\colon \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. . \tag{3.32}$$

On dira aussi que l'application f est un prolongement au départ de $f_{|A}$. Notons que $f_{|E} = f$.

3.2.2.2 Restriction à l'arrivée

Soit une application $f = (E, F, \Gamma)$ et B une partie de F telle que $f(E) \subset B$. Alors $\Gamma \in E \times B$ et (E, B, Γ) est une application. On l'appelle restriction de f à l'arrivée à la partie B, notée $f^{|B}$, telle que

$$f^{|B}\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \right. . \tag{3.33}$$

On dit que l'application f est un prolongement de l'application $f^{|B}$. Remarquons que 1° $f^{|F} = f$, 2° l'application $f^{|f(E)}$ est surjective et 3° pour définir la restriction à l'arrivée à B, il faut vérifier l'hypothèse $f(E) \subset B$ (sinon ça n'a aucun sens).

3.2.2.3 Prolongement au départ

Soit une application $f = (A, F, \Gamma)$ et E un ensemble tel que $A \subset E$. Alors l'application $g = (E, F, \Gamma')$ est un prolongement de f au départ à la partie E si et seulement si $\Gamma \subset \Gamma'$, soit encore si et seulement si pour tous élément x de A $f(x) = g(x)$.

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \quad \Gamma' = \{(x, g(x)) \mid x \in A\}\,. \tag{3.34}$$

3.2.2.4 Prolongement à l'arrivée

Soit $f = (E, B, \Gamma)$ une application et F tel que $B \subset F$. Alors $g = (E, F, \Gamma')$ est un prolongement à l'arrivée à F si et seulement si $\Gamma = \Gamma'$, c'est-à-dire $\forall x \in E \quad f(x) = g(x)$.

3.2.3 Compositions d'applications

Définition 3.7. Soient E, F et G des ensembles, $f = (E, F, \Gamma_f)$ et $g = (F, G, \Gamma_g)$ deux applications et $\Gamma = \{(x, g(f(x))) \mid x \in E\} \subset E \times G$.

Pour tous élément x de E, il existe un unique élément z de G tel que $(x, z) \in \Gamma$. Donc (E, G, Γ) est une application qu'on note $g \circ f$ qu'on appelle la composée de f par g,

$$\forall x \in E \quad g \circ f(x) = g(f(x)). \tag{3.35}$$

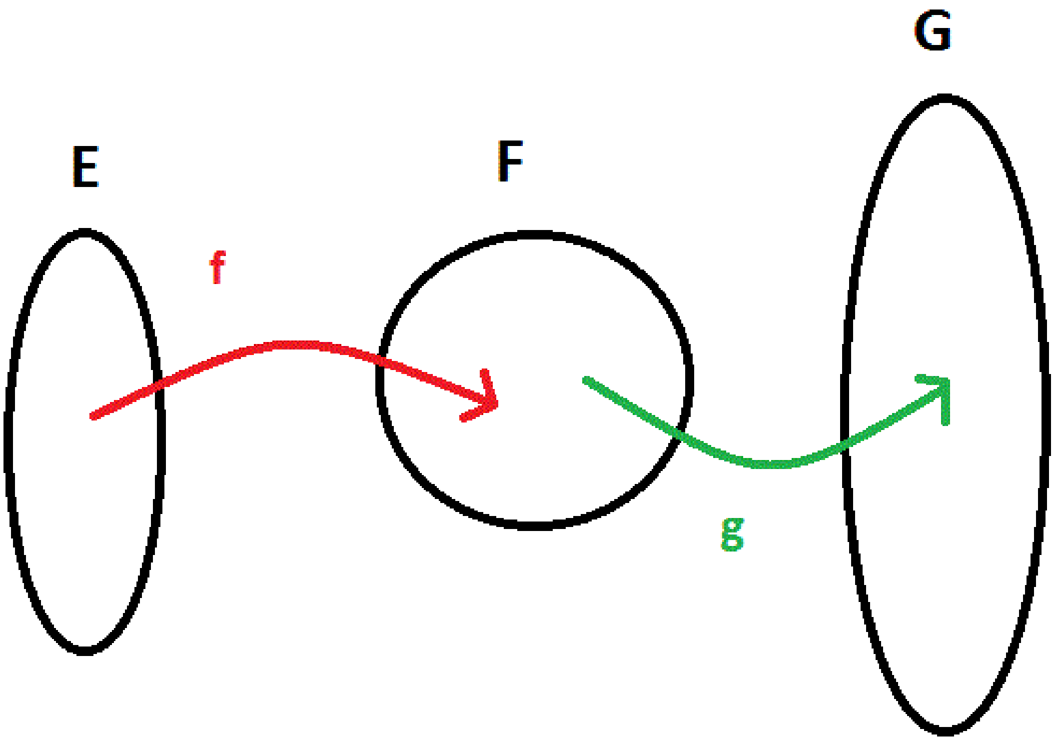

FIGURE 3.7 – Représentation graphique de la composition

Remarque : Soit B une partie de F telle que $f(E) \subset B$ et $g = (B, G, \Gamma_g)$. On a encore le droit de parler de $g \circ f$, mais il s'agit en fait de l'application $g \circ f^{|B}$ avec $f^{|B} = (E, B, \Gamma_f)$. Une représentation graphique de la composition est donnée par la figure **??**.

Proposition 3.7. Soient E, F, G et H des ensembles et trois applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$. Alors :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f; \tag{3.36}$$

$$\mathrm{Id}_f \circ f = f; \tag{3.37}$$

$$f \circ \mathrm{Id}_E = f. \tag{3.38}$$

Démonstration. 1. Les ensembles de départ et d'arrivée sont les mêmes et

$$\forall x \in E \quad h \circ (g \circ f)(x) = h(g(f(x))) \tag{3.39}$$

$$= (h \circ g)(f(x)) \tag{3.40}$$

$$= ((h \circ g) \circ f)(x), \tag{3.41}$$

donc $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

2. Les ensembles de départ et d'arrivée sont les mêmes et

$$\forall x \in E \quad \mathrm{Id}_F \circ f(x) = \mathrm{Id}_F(f(x)) = f(x) = f(\mathrm{Id}_E(x)) = f \circ \mathrm{Id}_E(x), \tag{3.42}$$

donc $\mathrm{Id}_f \circ f = f$ et $f \circ \mathrm{Id}_E = f$.

$\square$

Remarque : l'application $g \circ f$ peut avoir un sens sans que $f \circ g$ en ait un et même si on peut définir les deux composées, en général elles ne sont pas égales.

3.2.4 Images directes et images réciproques

3.2.4.1 Image directe

Soient E et F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Définition 3.8. Si A est une partie de E, on appelle image directe de A par l'application f et on note $f(A)$ la partie de F telle que

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} = \{y \in F \mid \exists x \in A \quad y = f(x)\}. \tag{3.43}$$

Proposition 3.8. Soient E et F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient aussi A et B des parties de E alors

$$A \subset B \implies f(A) \subset f(B); \tag{3.44}$$
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B); \tag{3.45}$$
$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B). \tag{3.46}$$

Démonstration.

1. Supposons que $A \subset B$. Soit $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$ et $A \subset B$ alors $x \in B$ or $y = f(x)$ donc $y \in f(B)$.
2. Montrons l'égalité par deux inclusions : Puisque

$$A \subset A \cup B, \tag{3.47}$$
$$B \subset A \cup B; \tag{3.48}$$

alors

$$f(A) \subset f(A \cup B), \tag{3.49}$$
$$f(B) \subset f(A \cup B). \tag{3.50}$$

Donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
Soit $y \in f(A \cup B)$. Il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$, et donc $x \in A$ ou $x \in B$. Donc $f(x) \in f(A)$ ou $f(x) \in f(B)$ et ainsi $f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Alors $y \in f(A) \cup f(B)$ et finalement $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$. La double inclusion montre l'égalité.

3. On a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$ donc $f(A \cap B) \subset f(A)$ et $f(A \cap B) \subset f(B)$ donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. En général, il n'y a pas égalité.

$\square$

Exemple : Soit $f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \{0,1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \pi \end{array} \right.$ On pose $A = \{0\}, B = \{1\}, f(A) = f(B) = \{\pi\}$ alors $f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset$ et $f(A) \cap f(B) = \{\pi\}$. Finalement $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

3.2.4.2 Image réciproque

Définition 3.9. Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit B une partie de F. On définit l'image réciproque de la partie B par l'application f comme étant la partie de E :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}. \tag{3.51}$$

Ce n'est pas à confondre avec une application réciproque (qui n'aurai aucun sens ici).

Proposition 3.9. Soient E, F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application et A, B deux parties de F. Alors

$$A \subset B \implies f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B); \tag{3.52}$$
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B); \tag{3.53}$$
$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B); \tag{3.54}$$
$$f^{-1}(\complement_F A) = \complement_E f^{-1}(A). \tag{3.55}$$

Démonstration.

1. Supposons que $A \subset B$ et soit $x \in f^{-1}(A)$ alors $f(x) \in A$. Comme $A \subset B$ cela entraîne que $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$.
2. On peut montrer l'égalité par deux inclusions : on sait que

$$A \subset A \cup B, \tag{3.56}$$
$$B \subset A \cup B. \tag{3.57}$$

Donc

$$f^{-1}(A) \subset f^{-1}(A \cup B); \tag{3.58}$$
$$f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B). \tag{3.59}$$

Ainsi

$$f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cup B). \tag{3.60}$$

On montre maintenant la deuxième inclusion. Soit $x \in f^{-1}(A \cup B)$, $f(x) \in A \cup B$ donc $f(x) \in A$ ou $f(x) \in B$ donc $x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B)$ donc $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Donc au final $f^{-1}(A \cup B) \subset f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. L'égalité résulte des deux inclusions.

3. On sait que

$$A \cap B \subset A; \tag{3.61}$$
$$A \cap B \subset B. \tag{3.62}$$

Donc

$$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A); \tag{3.63}$$
$$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(B). \tag{3.64}$$

Finalement

$$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \tag{3.65}$$

Soit $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ donc $x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B)$. Alors $f(x) \in A$ et $f(x) \in B$, donc $f(x) \in A \cap B$. Alors $x \in f^{-1}(A \cap B)$. Finalement $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B)$. L'égalité résulte des deux inclusions.

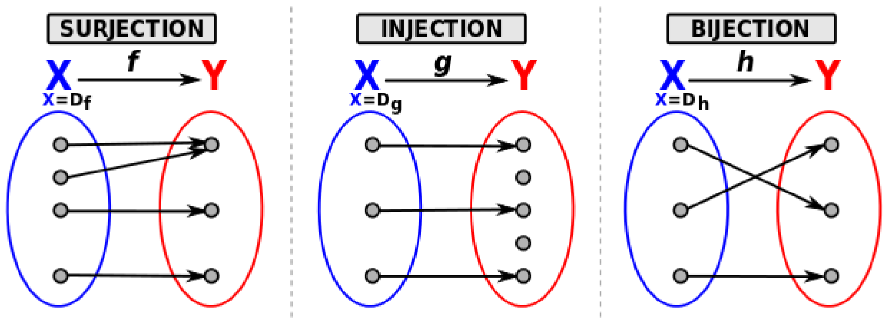

FIGURE 3.8 – Représentation graphique des notions de surjection, injection et bijection

4. On pose $C = \complement_F A$. D'une part $A \cap C = \emptyset$ et donc
$$f^{-1}(A \cap C) = \emptyset = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(C). \tag{3.66}$$
D'autre part $A \cup C = F$ et donc
$$f^{-1}(A \cup C) = E = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(C). \tag{3.67}$$
Ces deux égalités signifient que $f^{-1}(\complement_F A) = \complement_E f^{-1}(A)$.

□

Proposition 3.10. Soient E, F des ensembles, $f : E \longrightarrow F$ une application, A une partie de E et B une partie de F, alors
$$A \subset f^{-1}(f(A)) \tag{3.68}$$
$$f(f^{-1}(B)) \subset B. \tag{3.69}$$
En général ce ne sont pas des égalités.

Démonstration. 1. Soit $x \in A$, alors $f(x) \in f(A) = C$ donc $x \in f^{-1}(C) = f^{-1}(f(A))$.
2. Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Il existe alors $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$ donc $f(x) \in B$ et donc $y \in B$.

□

3.3 Injection, surjection, bijection

3.3.1 Équation

Définition 3.10. On appelle équation, toute égalité du type
$$\Phi(a) = b, \tag{3.70}$$
où :
- Φ est une application d'un ensemble A vers un ensemble B.
- b est un élément de l'ensemble B.

— a est un élément de l'ensemble A, appelé *inconnue* de l'équation. On appelle solution de l'équation tout élément a de l'ensemble A tel que $\Phi(a) = b$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation

$$\mathcal{S} = \{a \in A \mid \Phi(a) = b\}\,. \tag{3.71}$$

Remarque & Exemples : L'équation ci-dessus admet au moins une solution si et seulement si $b \in \Phi(A)$. Les équations polynomiales de degré n, les équations différentielles, les équations matricielles sont des exemples.

3.3.2 Injection et surjection

3.3.2.1 Injection

Soient E et F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Définition 3.11. On dit que f est injective ou que c'est une injection si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :

— tout élément de F admet au plus un antécédent par f dans E ;

— pour tout y de F, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution dans E ;

— $\forall (x, x') \in E^2 \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$;

— $\forall (x, x') \in E^2 \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$.

Ainsi f est non injective s'écrit

$$\exists (x, x') \in E^2 \quad x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x'). \tag{3.72}$$

La figure **??** donne une représentation graphique de la notion d'injection.

Théorème 3.1. *La composée de deux applications injectives est injective.*

Démonstration. Soient E, F et G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications injectives. Montrons que $g \circ f$ est injective.

Soient x et x' deux éléments de E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Comme g est injective alors $f(x) = f(x')$. Comme f est injective alors $x = x'$. Finalement $g \circ f$ est injective. □

3.3.2.2 Surjection

Définition 3.12. On dit que f est une surjection, ou qu'elle est surjective si elle vérifie l'une des propriétés suivantes :

— tout élément de F admet au moins un antécédent par f dans E ;

— pour tout y de F, l'équation $f(x) = y$ admet au moins une solution dans E ;

— $\forall y \in F \; \exists x \in E \quad y = f(x)$;

Ainsi f est non surjective s'écrit

$$\exists y \in F \; \forall x \in E \quad y \neq f(x). \tag{3.73}$$

La figure **??** donne une représentation graphique de la notion de surjection.

Proposition 3.11. Une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Théorème 3.2. *La composée de deux applications surjectives est surjective.*

Démonstration. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux surjections, montrons que $g \circ f : E \longrightarrow G$ est surjective.

Soit $z \in G$, puisque g est surjective alors il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Puisque $y \in F$ et que f est surjective alors il existe x tel que $y = f(x)$. Finalement, on a montré qu'il existe $x \in E$ tel que $z = g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x)$. □

3.3.3 Bijection

Soient E et F deux ensemble et $f : E \longrightarrow F$ une application.

Définition 3.13. On dit que f est bijective lorsqu'elle vérifie une des propriétés suivantes équivalentes

— Tout élément de F admet un et un seul antécédent par f dans E ;
— pour tout $y \in F$ l'équation $y = f(x)$ admet exactement une solution dans E ;
— $\forall y \in F\ \exists! x \in E \quad f(x) = y$;
— f est injective et surjective.

La figure **??** donne une représentation graphique de la notion de bijection.

Soit $f = (E, F, \Gamma)$ une bijection, on pose

$$\Gamma^{-1} = \{(y, x) \in F \times E \mid (x, y) \in \Gamma\} \tag{3.74}$$

pour tout $(y, x) \in F \times E$, on a les équivalences suivantes

$$(y, x) \in \Gamma^{-1} \iff (x, y) \in \Gamma \iff y = f(x). \tag{3.75}$$

Pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$ — définition de la bijection — c'est-à-dire un unique $x \in E$ tel que $(y, x) \in \Gamma^{-1}$. L'application (F, E, Γ^{-1}) est l'application réciproque de f et on la note f^{-1}.

Proposition 3.12. Soit une bijection $f : E \longrightarrow F$. Alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est une bijection et

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E; \tag{3.76}$$

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F\,. \tag{3.77}$$

Démonstration. Soit $(x, y) \in E \times F$ tels que $x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$. pour tous élément x de E, il existe un unique y dans F tel que $x = f^{-1}(y)$. Donc f^{-1} est une bijection. □

Théorème 3.3 (Caractérisation des bijections)**.** *Soient E et F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application f est une bijection si et seulement s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Auquel cas g est unique et $g = f^{-1}$.*

Démonstration. Supposons l'existence d'une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{Id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{Id}_F$. Montrons que f est injective et surjective.

— Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$ alors $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ donc $x = x'$. f est donc injective.

— Soit $y \in F$ alors $y = \mathrm{Id}_F(y) = f(g(y))$ si on pose $x = g(y) \in E$ alors $y = f(x)$. On a montré qu'il existe $x \in E$ tel que y=f(x), donc f est surjective.

On en conclus que f est bijective. □

Proposition 3.13. Soient E, F, G trois ensembles et deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ alors si $g \circ f$ est injective (respectivement surjective) alors f est injective (respectivement surjective).

Démonstration. — Soient x et x' dans E tels que $f(x) = f(x')$ alors $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ et puisque $g \circ f$ est injective donc $x = x'$ donc f est injective.

— Soit y un élément de F, $f \circ g$ est surjective donc il existe $x \in F$ tel que $y = f \circ g(x) = f(g(x))$ donc f est surjective.

□

Proposition 3.14. La composée de deux applications bijectives est bijective.

Démonstration. La composée de deux applications surjectives est surjective et la composée de deux applications injectives est injective donc la composée de deux applications bijectives est bijective. □

Définition 3.14.
1. On appelle permutation de E toute bijection de E dans E ;
2. on appelle involution de E toute application $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. Une involution de E est une permutation de E telle que $f = f^{-1}$.

Remarques :
1. Si f est une involution alors les courbes représentatives de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la première bissectrice ;
2. soit f une application bijective de E dans F et B une partie de F. On dispose de $A_1 = f^{-1}(B)$ l'image réciproque de B par rapport à f, $A_2 = f^{-1}(B)$ l'image directe de B par f^{-1}. On a aussi $A_1 = A_2$.

3.4 Relations

3.4.1 Relations binaires

Définition 3.15. On appelle correspondance entre éléments d'un ensemble E et éléments d'un ensemble F tout triplet (E, F, G) où G est une partie de $E \times F$. E est appelé ensemble de départ, F ensemble d'arrivée et G le graphe de la correspondance. Dans le cas où $E = F$, on parle de relation binaire sur l'ensemble E.

Notation : Si $\mathfrak{R} = (E, E, G)$ est une relation binaire sur E, au lieu de noter $(x, y) \in G$. On écrira $x\mathfrak{R}y$ et on dira que les éléments de x et y, pris dans cette ordre, vérifient la relation $\mathfrak{R}$.

Définition 3.16. On peut définir des qualités éventuelles d'une relation binaire. Soit E un ensemble et $\mathfrak{R}$ une relation binaire sur E, on définit :

1. $\mathfrak{R}$ est réflexive si $\forall x \in E \quad x\mathfrak{R}x$;
2. $\mathfrak{R}$ est symétrique si $\forall (x, y) \in E^2 \quad x\mathfrak{R}y \implies y\mathfrak{R}x$;
3. $\mathfrak{R}$ est antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2 \quad x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}x \implies y = x$;
4. $\mathfrak{R}$ est transitive si $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad x\mathfrak{R}y$ et $y\mathfrak{R}z \implies x\mathfrak{R}z$.

3.4.2 Relations d'ordre

3.4.2.1 Définition et exemples

Définition 3.17. On appelle relation d'ordre sur E toute relation binaire sur E qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Un ensemble muni d'une relation d'ordre est appelé un ensemble ordonné. On note souvent $\prec$ les relations d'ordre, on réserve la notation $\leq$ à l'ordre usuel, sur les ensembles de nombres.

Exemples : les relations d'ordres usuelles sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{N}$; La relation d'ordre strict sur $\mathbb{R}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive. La relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. La relation d'inclusion sur l'ensemble $\mathfrak{P}(E)$ est une relation d'ordre.

3.4.2.2 Éléments comparables - Ordre total

Définition 3.18. Soit $(E, \prec)$ un ensemble ordonné. Deux éléments x et y de E sont dits comparables par la relation d'ordre $\prec$ si et seulement si l'une au moins des relations $x \prec y$ ou $y \prec x$ est vérifiée.

Définition 3.19. On dit que $(E, \prec)$ est un ensemble totalement ordonné ou encore que l'ordre $\prec$ est total si et seulement si pour tous les éléments x et y pris dans E, x et y sont comparables par $\prec$. Sinon on dit que $(E, \prec)$ est partiellement ordonné ou encore que l'ordre $\prec$ est partiel.

3.4.2.3 Éléments remarquables d'un ensemble ordonné

Soit $(E, \prec)$ un ensemble ordonné et A une partie de E.

Définition 3.20 (Partie majorée, minorée, bornée)**.**

1. Un élément M de E est appelé un majorant de la partie A dans E si et seulement si $\forall a \in A \quad a \prec M$, on dit que la partie A est majorée dans E si et seulement si elle admet un majorant dans E ;
2. un élément m de E est appelé un minorant de la partie A dans E si et seulement si $\forall a \in A \quad m \prec a$, on dit que la partie A est minorée dans E si et seulement si elle admet un minorant dans E ;
3. une partie A de E est dite bornée dans E lorsqu'elle est à la fois majorée dans E et minorée dans E.

Il est important de préciser dans quel ensemble la partie est majorée et minorée.

Définition 3.21 (plus petit et plus grand élément)**.**

1. On appelle un plus petit élément de la partie A tout élément de A qui minore A dans E, si A admet un plus petit élément celui-ci est unique et on l'appelle *le* plus petit élément de A ;

2. on appelle un plus grand élément de la partie A tout élément de A qui majore A dans E, si A admet un plus grand élément celui-ci est unique et on l'appelle *le* plus grand élément de A.

Unicité. 1. Si a et b sont les plus petits éléments de A alors comme a est un minorant $a \prec b$ et puisque b est un minorant $b \prec a$ et comme $\prec$ est antisymétrique on a forcément $a = b$.

2. On démontre l'unicité du plus grand élément de la même manière.

□

Exemples :

1. Dans $(\mathfrak{P}(E), \subset)$ $\emptyset$ est le plus petit élément et E est le plus grand.
2. Dans $(\mathbb{N}, |)$, 1 est le plus petit élément et 0 est le plus grand.

Définition 3.22 (Borne supérieure et borne inférieure)**.** 1. La borne supérieure de la partie A dans E est le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de la partie A dans E ;

2. la borne inférieure de la partie A dans E est le plus grand élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants de la partie A dans E.

3.4.3 Relation d'équivalence

Définition 3.23. On appelle relation d'équivalence sur E toute relation binaire qui est réflexive, symétrique et transitive

On note généralement $\sim$ les relations d'équivalences. Si $x \sim y$, on dit que x est équivalent à y, ou encore, compte tenu de la symétrie, que x et y sont équivalents. Par exemple, on peut citer l'égalité, la congruence, la similitude de matrice ou l'équivalence de matrices.

3.5 Familles

3.5.1 Notion de famille

Définition 3.24. Soient E et I des ensembles quelconques. On appelle famille d'éléments de E indexée par I toute application $\mathcal{U} : I \longrightarrow E$, on notera $\mathcal{U} = (u_i)_{i \in I}$.

On dit que I est l'ensemble des indices de la famille $\mathcal{U}$. On notera E^I l'ensemble des familles de E indexées par I. Par exemple, si l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$ alors $E^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites à valeur dans E. Si I est un ensemble fini, on identifie les familles indexées par I à des listes de longueur Cardinal(I).

3.5.2 Familles de parties d'un ensemble

Soit E un ensemble.

Définition 3.25. Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E, on définit

1. L'intersection de la famille $(A_i)_{i \in I}$ $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I \quad x \in A_i\}$;

2. La réunion de la famille $(A_i)_{i\in I}$ $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I \quad x \in A_i\}$.

Ainsi, l'intersection est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à chacun des A_i et la réunion est l'ensemble des éléments de E qui appartiennent à au moins un des A_i.

Remarques :

1. Si $I = \{1, 2\}$, on retrouve la définition de l'intersection et de la réunion de deux parties de A.
2. Si $I \neq \emptyset$, il existe $i_0 \in I$ tel que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \subset A_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.
3. Si $I = \emptyset$ alors $\bigcap\limits_{i\in I} A_i = E \quad \bigcup\limits_{i\in I} A_i = \emptyset$.

3.5.2.1 Formulaire

Lois de Morgan

$$E \setminus \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} E \setminus A_i; \tag{3.78}$$

$$E \setminus \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} E \setminus A_i. \tag{3.79}$$

Images directes Soit une application $f \in F^E$ une application si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, on dispose de $(f(A_i))_{i\in I}$ familles de parties de F et on a

$$f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i); \tag{3.80}$$

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f(A_i). \tag{3.81}$$

Images réciproques Si on dispose d'une famille de parties de F $(B_i)_{i\in I}$ alors on peut utiliser la famille $(f^{-1}(B_i))_{i\in I}$ de parties de E et on a

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i); \tag{3.82}$$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i). \tag{3.83}$$

3.5.3 Opérations sur des familles de complexes indexées par un ensemble fini

On suppose que $I = (i_k)_{k\in[\![1;n]\!]}$. On note

$$\sum_{i\in I} u_i = u_{i_1} + u_{i_2} + u_{i_3} + \cdots + u_{i_n}; \tag{3.84}$$

$$\prod_{i\in I} u_i = u_{i_1} \times u_{i_2} \times u_{i_3} \times \cdots \times u_{i_n}. \tag{3.85}$$

Si $I = \emptyset$ alors $\sum_{i\in I} u_i = 0$ et $\prod_{i\in I} u_i = 1$ par convention.

Chapitre 4

Équations différentielles linéaires

Sommaire

Ce chapitre présente les équations différentielles linéaires du premier et du deuxième ordre. Les équations différentielles apparaissent dans toutes les branches de la physique. Elles sont en général la description d'un phénomène variant dans l'espace ou dans le temps. Les équations différentielles que nous étudieront là ne sont qu'une petite partie de celle qui existent et qui sont pour la plupart non linéaires, comme par exemple les équations de Navier-Stokes.

On considère des fonctions à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$. Soit un entier naturel non nul n, I un intervalle réel et $a_0, \dots a_n$ et b des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ au moins continues. On considère l'équation différentielle

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} = b(x). \tag{4.1}$$

On peut alors définir ce qu'on appelle des *solutions* de cette équation différentielle.

Définition 4.1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$. On dira que f est une solution de l'équation différentielle (**??**) si et seulement si :

1. f est au moins n fois dérivable,
2. $\forall x \in I \sum_{i=0}^{n} a_i(x) y^{(i)} = b(x)$.

En pratique on traitera dans ce cours du cas où $n = 1$ de façon complète et du cas $n = 2$ dans le cas où a_0, a_1 et a_2 sont des constantes. On recherchera des solutions qui vérifient des conditions initiales de la forme

$$\forall i \in [\![0\,;n-1]\!] \quad y^{(i)}(t_0) = y_i, \tag{4.2}$$

où $t_0 \in I$ et les y_i sont des scalaires fixes dans $\mathbb{K}$.

4.1 Équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

4.1.1 Solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants

Soit un scalaire $a \in \mathbb{K}$. On s'intéresse à l'équation

$$y' + ay = 0. \tag{4.3}$$

Théorème 4.1. *Soit une application $f \in \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$. f est solution de l'Eq.* (**??**) *si et seulement s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tous réel t, $f(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{-at}$.*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que , $f \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \lambda\, \mathrm{e}^{-at} \end{array} \right.$. f est dérivable et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f'(t) + af(t) = -a\lambda\, \mathrm{e}^{-at} + a\lambda\, \mathrm{e}^{-at} = 0, \tag{4.4}$$

donc la fonction f est solution de l'Eq. (**??**) sur $\mathbb{R}$. Soit maintenant une fonction f solution de l'Eq. (**??**) sur $\mathbb{R}$. Posons la fonction $g \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & f(t)\, \mathrm{e}^{at} \end{array} \right.$ g est dérivable par produit de fonctions qui le sont et

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'(t) = f'(t)\, \mathrm{e}^{at} + af(t)\, \mathrm{e}^{at} = \mathrm{e}^{at}(f'(t) + af(t)) = 0, \tag{4.5}$$

la fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}$. Il existe donc un réel λ tel que $\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = \lambda$. Par conséquent $f(t) = g(t)\, \mathrm{e}^{-at} = \lambda\, \mathrm{e}^{-at}$ □

4.1.2 Solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients non constants

Soient maintenant I un intervalle réel, a une fonction de I vers $\mathbb{K}$ au moins continue sur I. On considère l'équation

$$y' + a(t)y = 0. \tag{4.6}$$

Pour le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on suppose qu'il existe une solution $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de l'Eq. (**??**) *qui ne s'annule pas sur* I telle que

$$\forall t \in I \quad \frac{f'(t)}{f(t)} = -a(t). \tag{4.7}$$

La fonction a est continue sur I, donc elle admet une primitive A sur I. Par intégration il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \in I$:

$$\ln|f(t)| = -A(t) + K \iff |f(t)| = \mathrm{e}^K \mathrm{e}^{-A(t)}. \tag{4.8}$$

La fonction f est continue, car dérivable, et ne s'annule pas sur l'intervalle I donc elle est de signe constant sur I. Dans les deux cas on pose $\lambda = \pm \mathrm{e}^K$ et on a $f(t) = \lambda e^{-A(t)}$. Revenons maintenant au cas général où $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Théorème 4.2. *Soit A une primitive de la fonction a continue sur I. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$, f est solution de l'équation $\mathcal{H}$ si est seulement s'il existe un scalaire λ tel que $\forall t \in I \quad f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}$*

Démonstration. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f\colon \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} \end{cases}$. A est dérivable sur I (puisque c'est une primitive de a) et l'exponentielle l'est aussi donc f est dérivable par composition.

$$\forall t \in I \quad f'(t) + a(t)f(t) = \lambda(-A'(t)\mathrm{e}^{-A(t)}) + \lambda a(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = 0, \tag{4.9}$$

f est donc solution de l'Eq. (**??**).

Soit maintenant une fonction f solution de l'Eq. (**??**) sur I. On définit alors la fonction $g\colon \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & f(t)\mathrm{e}^{A(t)} \end{cases}$. La fonction f est dérivable puisque c'est une solution de l'équation différentielle (**??**). La fonction A est aussi dérivable, l'exponentielle est dérivable donc g est dérivable par composition et produit. Alors

$$\forall t \in I \quad g'(t) = f'(t)\mathrm{e}^{A(t)} + f(t)A'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = \mathrm{e}^{A(t)}(f'(t) + a(t)f(t)) = 0. \tag{4.10}$$

Il existe donc un scalaire λ tel que $\forall t \in I \quad g(t) = \lambda$. D'où

$$\forall t \in I \quad f(t) = g(t)\mathrm{e}^{-A(t)} = \lambda \mathrm{e}^{-A(t)}. \tag{4.11}$$

□

Remarques :

1. si on prend comme fonction a une fonction constante, une primitive de a est A une fonction linéaire et on retrouve le résultat du premier théorème ;

2. on constate à posteriori que les solutions de l'Eq. (**??**) distinctes de l'application nulle ne s'annulent pas sur I ;
3. une combinaison linéaire de solutions de l'Eq. (**??**) est une solution de l'Eq. (**??**), si on note $S_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de l'Eq. (**??**), alors puisque $S_{\mathcal{H}}$ est soit non vide ou soit stable par combinaison linéaire alors c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (c'est même une droite vectorielle).

4.2 Équation différentielle linéaire du premier ordre avec second membre

On considère l'équation différentielle

$$y' + a(t)y = b(t) \tag{4.12}$$

avec a et b des fonctions au moins continues sur l'intervalle réel I à valeurs dans $\mathbb{K}$. On considère aussi l'équation homogène à l'Eq. (**??**), c'est l'Eq. (**??**).

4.2.1 Solution générale et solution particulière

Théorème 4.3. *Supposons connaître une solution f_0 de l'Eq. (**??**), qu'on appellera solution particulière, alors une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est solution de l'Eq. (**??**) si et seulement si la fonction $f - f_0$ est solution de l'Eq. (**??**).*

$$\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = f_0 + \mathcal{S}_{\mathcal{H}} \tag{4.13}$$

Démonstration. Soit $f : I \to \mathbb{K}$ solution de l'Eq. (**??**). Soit $g = f - f_0$, alors f et f_0 sont solutions de l'Eq. (**??**), donc elles sont dérivables et donc g est dérivable.

$$\forall t \in I \quad g'(t) + a(t)g(t) = (f'(t) + a(t)f(t)) - (f_0'(t) + a(t)f_0(t)) = b(t) - b(t) = 0 \tag{4.14}$$

g est donc solution de l'Eq. (**??**).

Supposons ensuite que $g = f - f_0$ est solution de l'Eq. (**??**), alors $f = f_0 + g$ est dérivable et

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad f'(t) + a(t)f(t) &= (g'(t) + f_0'(t)) + a(t)(g(t) + f_0(t)) &(4.15)\\ &= \underbrace{g'(t) + a(t)g(t)}_{b(t)} + \underbrace{f_0'(t) + a(t)f_0(t)}_{0} &(4.16) \end{aligned}$$

donc f est solution de l'Eq. (**??**). □

Remarque : Toute la difficulté est bien sûr de trouver une solution particulière de l'Eq. (**??**) dont l'existence n'est pas assurée par le théorème **??**.

4.2.2 Recherche de solutions particulière

4.2.2.1 Lorsque l'Eq. (??) est à coefficient constants

On suppose que le second membre b est de la forme « exponentielle-polynôme », c'est-à-dire $\forall t \in I \quad b(t) = P(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ où P est une fonction polynomiale, $P(t) = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i t^i$ et $m \in \mathbb{K}$. Dans ce cas on cherche une solution particulière sous la forme $t \longmapsto Q(t)\,\mathrm{e}^{mt}$ où Q est un polynôme de même degré que P.

Remarques :

— c'est une méthode assez lourde quand le degré est élevé ;
— on peut l'appliquer avec un second membre polynomial ou avec un second membre $t \longmapsto e^{mt}$;
— on peut aussi l'appliquer avec un second membre en sinus ou en cosinus, cosinus hyperbolique ou sinus hyperbolique car ces fonctions s'écrivent comme somme d'exponentielle.

4.2.2.2 Lorsque l'Eq. (??) est à coefficients non constants

Il n'y a pas de méthode générale. Si on ne voit pas de solution « évidente » on utilise la méthode de la variation de la constante.

4.2.3 Principe de superposition

Proposition 4.1. Soient trois applications a, b_1 et b_2 de I vers $\mathbb{K}$ au moins continues. Si f_1 et f_2 sont des solutions respectives des équations

$$y' + a(t)y = b_1(t) \tag{4.17}$$
$$y' + a(t)y = b_2(t) \tag{4.18}$$

Alors la fonction $f = f_1 + f_2$ est une solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + a(t) = b_1(t) + b_2(t) \tag{4.19}$$

Démonstration. Soient f_1 et f_2 des solutions respectives des équations précédentes, alors elles sont dérivables sur I et donc f est dérivable sur I

$$f' + a \cdot f = (f_1' + f_2') + a(f_1 + f_2) = (f_1' + af_1) + (f_2' + af_2) = b_1 + b_2 \tag{4.20}$$

Donc f est solution de $\mathcal{E}$. □

4.2.4 Variation de la constante

Soit l'équation

$$y' + a(t)y = b(t) \tag{4.21}$$

avec a et b des fonctions au moins continues sur l'intervalle réel I. Soit A une primitive de la fonction *continue* a sur I. On a vu que l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$S_{\mathcal{H}} = \{I \to \mathbb{K} : t \longmapsto \lambda\, e^{-A(t)}; \lambda \in \mathbb{R}\}. \tag{4.22}$$

On cherche des fonctions solutions de $\mathcal{E}$ de la forme $t \longmapsto \lambda(t)\, e^{-A(t)}$ avec λ une fonction. D'où le nom de variation de la constante. Procédons par un raisonnement d'analyse/synthèse.

Analyse. Supposons qu'il existe une solution f de $\mathcal{E}$ sur I, on définit alors la fonction

$$g\colon \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & f(t)\, e^{A(t)} \end{array} \right. . \tag{4.23}$$

La fonction f est dérivable puisque c'est une solution de $\mathcal{E}$ et comme A est dérivable aussi on déduit que g est dérivable sur I, et pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = f'(t)\, e^{A(t)} + f(t)A(t)\, e^{A(t)} = b(t)\, e^{A(t)}, \tag{4.24}$$

puisque f est solution de $\mathcal{E}$. Les fonctions b et A sont continues donc $t \longmapsto b(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}$ est continue par théorème généraux, elle admet donc des primitives sur l'intervalle I. Soit C l'une de ses primitives alors, pour tout $t \in I$,

$$g(t) = C(t) + \mu \iff f(t) = C(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} + \mu\,\mathrm{e}^{-A(t)}. \tag{4.25}$$

Alors on a montré que si f est solution alors f est de cette forme. □

Synthèse. Soit C une primitive de la fonction continue $t \longmapsto b(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)}$, soit un scalaire $\mu \in \mathbb{K}$. On définit $f\colon \left\{\begin{array}{lll} I & \longrightarrow & K \\ t & \longmapsto & C(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} + \mu\,\mathrm{e}^{-A(t)} \end{array}\right.$, alors f est dérivable puisque A, C et l'exponentielle le sont et, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned} f'(t) + a(t)f(t) &= C'(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} - a(t)C(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} - \mu a(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} \\ &\quad + a(t)C(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} + \mu a(t)\,\mathrm{e}^{-A(t)} \qquad (4.26)\\ &= b(t)\,\mathrm{e}^{A(t)}\,\mathrm{e}^{-A(t)} = b(t). \qquad (4.27) \end{aligned}$$

Ceci démontre l'existence d'une solution pour l'équation avec second membre et fournit une méthode pour la trouver. □

Théorème 4.4. *Soient I un intervalle réel, a et b deux fonctions au moins dérivables sur I. Soit t_0 un réel de I et y un scalaire de $\mathbb{K}$. Il existe alors une unique fonction $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ solution de l'Eq.* (**??**) *qui satisfait la condition initiale $y(t_0) = y_0$*

Démonstration. Soit f_0 une solution particulière — dont on connaît l'existence grâce à la variation de la constante. Soit A une primitive de a. D'après les théorèmes **??** et **??**, on sait qu'une application $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ est solution de l'Eq. (**??**) si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall t \in I \quad f(t) = f_0(t) + \mu\,\mathrm{e}^{-A(t)} \tag{4.28}$$

Donc

$$\begin{aligned} f \text{ satisfait les conditions initiales} &\iff f(t_0) = y_0 \qquad (4.29)\\ &\iff f_0(t_0) + \mu\,\mathrm{e}^{-A(t_0)} = y_0 \qquad (4.30)\\ &\iff \mu = \mathrm{e}^{A(t_0)}(y_0 - f_0(t_0)) \qquad (4.31) \end{aligned}$$

Il existe donc une et une seule valeur de μ telle que f soit solution de $\mathcal{E}$ et satisfait les conditions initiales. □

4.2.5 Problème de raccordement des solutions

Soient à présent a, b et c trois applications au moins continues de I vers $\mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle suivante

$$a(t)y' + b(t)y = c(t). \tag{4.32}$$

On distingue deux cas :

— si a ne s'annule pas sur I, alors l'Eq. (**??**) est équivalent à

$$y' + \frac{b}{a}(t)y = \frac{c}{a}(t), \tag{4.33}$$

et on sait alors résoudre ce genre d'équations comme on vient de le faire auparavant ;

— si a s'annule, c'est en général en un nombre fini de points. On commence par résoudre l'équation sur les sous-intervalles de I où a ne s'annule pas, ensuite on envisage l'existence de solutions globales sur I qui devront être dérivables — donc continues — en tout point.

4.3 Équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients constants

Soient a,b et c trois scalaires avec $a \neq 0$. Considérons l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4.34}$$

Remarque : L'ensemble des solutions de cette équation noté $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

4.3.1 Résolution dans $\mathbb{C}$

Maintenant a, b et c sont des complexes avec $a \neq 0$. On considère l'équation différentielle (**??**) et on cherche des solutions de la forme $g : t \longmapsto \mathrm{e}^{rt}$ avec $r \in \mathbb{C}$. Alors

$$g \text{ est solution de } (\mathbf{??}) \iff ag'' + bg' + cg = 0 \tag{4.35}$$

$$\iff ar^2 + br + c = 0 \tag{4.36}$$

On appelle cette dernière équation *l'équation caractéristique* de l'Eq. (**??**), et on note Δ son discriminant. Soient $r \in \mathbb{C}$ une racine de cette équation, un complexe λ et une fonction $f : t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{rt}$. La fonction f est donc une solution de l'Eq. (**??**).

Théorème 4.5. *Les solutions à valeurs complexes de l'Eq* (**??**) *sont de la forme :*

— *Si le discriminant de l'équation caractéristique est nul :*

$$t \longmapsto (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{rt}, \tag{4.37}$$

avec r la racine double et λ μ des complexes ;

— *Si le discriminant de l'équation caractéristique est non nul :*

$$t \longmapsto \lambda\,\mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\,\mathrm{e}^{r_2 t}, \tag{4.38}$$

avec r_1 r_2 les racines et λ μ des complexes.

Analyse. Soit f une solution de l'Eq.(**??**). On définit

$$g \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t)\,\mathrm{e}^{-rt} \end{array} \right. . \tag{4.39}$$

Comme f est solution de l'Eq.(**??**), elle est dérivable deux fois. Donc pour tout réel t $f(t) = g(t)\,\mathrm{e}^{rt}$, et en injectant cette forme dans l'équation différentielle, on obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad ag''(t) + (2ar + b)g'(t) = 0 \tag{4.40}$$

C'est une équation du premier ordre en g' que l'on sait résoudre. On distingue deux cas :

— $2ar + b = 0 \iff r = -\frac{b}{2a}$ $\Delta = 0$ On obtient une racine double donc $g'' = 0$ soit g est une fonction affine et donc

$$\exists(\mu, \lambda) \in \mathbb{C}^2\ \forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = (\lambda t + \mu)\,\mathrm{e}^{rt}; \tag{4.41}$$

— Le discriminant est non nul et on note δ la racine carrée complexe de Δ, ainsi $2ar + b = \delta$ donc

$$g'' + \frac{a}{\delta}g' = 0. \tag{4.42}$$

D'après le théorème **??**, il existe un complexe λ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g'(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{a}}. \tag{4.43}$$

Ainsi il existe un autre complexe, la constante d'intégration, μ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g(t) = -\lambda\frac{a}{\delta}\,\mathrm{e}^{-\frac{\delta}{a}t} + \mu. \tag{4.44}$$

En revenant à la fonction f, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \lambda'\,\mathrm{e}^{r_2 t} + \mu\,\mathrm{e}^{r_1 t}, \tag{4.45}$$

où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique.

Dans chacun des deux cas, on est arrivé à trouver la solution f de l'équation différentielle. □

Synthèse. Ici aussi, on distingue deux cas

— Cas où le discriminant est nul. L'équation caractéristique admet alors une racine double $r = -\frac{b}{2a}$. On considère alors la fonction $f_1\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & t\,\mathrm{e}^{rt} \end{array}\right.$.
Montrons que f_1 est solution de l'Eq. (**??**). La fonction f_1 est deux fois dérivable et on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad af_1''(t) + bf_1'(t) + cf_1(t) = \mathrm{e}^{rt}\left((ar^2 + br + c)t + 2ar + b\right), \tag{4.46}$$

r est une racine double donc $ar^2+br+c = 2ar+b = 0$ donc f_1 est solution de l'Eq. (**??**). Soit la fonction $f_2\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{rt} \end{array}\right.$. Elle est solution de l'Eq.(**??**) puisque r est une racine de l'équation caractéristique.

— Cas où le discriminant n'est pas nul. L'équation caractéristique admet alors deux solutions distinctes r_1 et r_2. Si on pose les fonctions associées f_1 et f_2, elles sont solutions de l'Eq. (**??**). Puisque l'ensemble des solutions de l'Eq. (**??**) est un espace vectoriel alors toute combinaison linéaire de f_1 et f_2 est une solution de l'Eq. (**??**).

□

4.3.2 Résolution sur $\mathbb{R}$

Dans ce paragraphe, on considère que les scalaires a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique.

Théorème 4.6. *Les solutions à valeurs complexes de l'Eq. (**??**) sont de la forme suivante*

- *si le discriminant est nul,* $t \longmapsto (\lambda t + \mu)\, \mathrm{e}^{rt}$, *avec* r *la racine double et* λ μ *des réels ;*
- *si le discriminant est positif,* $t \longmapsto \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t}$, *avec* r_1 r_2 *les racines et* λ μ *des réels ;*
- *si le discriminant est négatif,* $t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t)$ *avec* A *et* B *des réels et* $\alpha = -\frac{b}{2a}$ $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

On dit alors que $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ *est de dimension 2, c'est-à-dire que c'est un plan vectoriel.*

Démonstration. On cherche des solutions de la première sous-section qui sont à valeurs réelles :

- Cas 1, si le discriminant est nul alors si f est à valeurs réelles alors $f(0) = \mu \in \mathbb{R}$ et $f(1) = (\lambda + \mu)\, \mathrm{e}^r \iff \lambda = f(1)\, \mathrm{e}^{-r} - f(0) \in \mathbb{R}$. Réciproquement si λ et μ sont des réels alors f est à valeurs réelles ;
- Cas 2, si le discriminant est positif alors si f est à valeurs réelles alors on a $f(0) = \lambda + \mu$ et $f(1) = \lambda\, \mathrm{e}^{r_1} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2}$ donc $\mu = \frac{f(1) - f(0)\, \mathrm{e}^{r_1}}{\mathrm{e}^{r_2} - \mathrm{e}^{r_1}}$ et $\lambda = f(0) - \mu$ et comme $r_2 \neq r_1$ et que exp est injective alors $\mathrm{e}^{r_1} \neq \mathrm{e}^{r_2}$ ainsi $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, réciproquement si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ alors f est à valeur réelles ;
- Cas 3, si le discriminant est négatif alors l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\,\omega$ et $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\,\omega$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$, il existe un doublet de complexe (λ, μ) tel que pour tous réel t on ait $f(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t} = \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t} + \mu\, \mathrm{e}^{\alpha t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t}$. Alors

$$
\begin{aligned}
f(t) &= (\lambda_1 + \mathrm{i}\,\lambda_2)\, \mathrm{e}^{\alpha t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t} + (\mu_1 + \mathrm{i}\,\mu_2)\, \mathrm{e}^{\alpha t}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t} &\quad (4.47)\\
&= \lambda_1\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\omega t) + \mathrm{i}\,\lambda_1\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\omega t) + \mathrm{i}\,\lambda_2\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\omega t) - \lambda_2\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\omega t) \\
&\quad + \mu_1\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\omega t) - \mathrm{i}\,\mu_1\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\omega t) + \mathrm{i}\,\mu_2\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\omega t) + \mu_2\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\omega t) &\quad (4.48)\\
&= \mathrm{e}^{\alpha t} \left[\cos(\omega t)(\lambda_1 + \mu_1) + \sin(\omega t)(\mu_2 - \lambda_2)\right] + \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\omega t)(\lambda_2 + \mu_2) \\
&\quad + \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\omega t)(\lambda_1 - \mu_1). &\quad (4.49)
\end{aligned}
$$

Si f est à valeurs réelles alors $\Im(f) = \tilde{0}$, ce qui implique que pour tous réel t on ait

$$\mathrm{e}^{\alpha t} \left[\cos(\omega t)(\lambda_2 + \mu_2) + \sin(\omega t)(\lambda_1 - \mu_1)\right] = 0, \tag{4.50}$$

puisque pour tous les réels t $\mathrm{e}^{\alpha t} \neq 0$ on a

$$\cos(\omega t)(\lambda_2 + \mu_2) + \sin(\omega t)(\lambda_1 - \mu_1) = 0, \tag{4.51}$$

et en posant $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2\omega}$, on obtient un système d'équation qui nous donne $\mu = \overline{\lambda}$.

Réciproquement si $\mu = \overline{\lambda}$ alors pour tout réel t, on a

$$f(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{\alpha t}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\omega t} + \overline{\lambda}\, \mathrm{e}^{\alpha t}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\omega t}, \tag{4.52}$$

alors

$$f(t) = (\lambda + \overline{\lambda})\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\omega t + \mathrm{i}(\lambda - \overline{\lambda})\,\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\omega t. \tag{4.53}$$

On pose $A = 2\Re(\lambda)$ et $B = 2\Im(\lambda)$, ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(A\cos\omega t - B\sin\omega t). \tag{4.54}$$

Si $(A, B) = (0, 0)$ alors $f(t) = 0$. Sinon, on a $A^2 + B^2 > 0$ et

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = 1, \tag{4.55}$$

donc il existe un réel φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ avec $C = \sqrt{A^2+B^2}$. On a donc pour tous réel t

$$f(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(C\cos\varphi\cos\omega t - C\sin\varphi\sin\omega t) = C\,\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\omega t + \varphi) \tag{4.56}$$

Dans les deux cas, les solutions obtenues sont à valeurs réelles.
Dans chacun de ses trois cas, on a trouvé une solution à cette équation différentielle. □

4.4 Équation différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants avec second membre

Soient $(a, b, c) \in \mathbb{K}^*$, $d : I \longmapsto \mathbb{K}$ une fonction au moins continue. On considère l'équation différentielle

$$ay'' + by' + cy = d(t) \tag{4.57}$$

On note $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des solutions de l'Eq. (**??**). On introduit l'équation homogène associée

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{4.58}$$

et de la même manière on note $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ l'ensemble des solutions de l'Eq. (**??**).

4.4.1 Solution générale et solution particulière

Théorème 4.7. *Supposons connaître une solution f_0 de l'équation $\mathcal{E}$ — dite solution particulière — alors une application $f : I \longmapsto \mathbb{K}$ est une solution de $\mathcal{E}$ si et seulement si la fonction $f - f_0$ est une solution de l'Eq. (**??**). On a donc $\mathcal{S}_{\mathcal{E}} = \mathcal{S}_{\mathcal{H}} + f_0$. On dit que la solution générale de $\mathcal{E}$ est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'Eq. (**??**).*

Démonstration. Supposons que f est une solution de $\mathcal{E}$ et posons $g = f - f_0$ puisque f et f_0 sont des solutions de $\mathcal{E}$, elles sont dérivables deux fois et par conséquent g est aussi dérivable deux fois, et on a

$$\begin{aligned}
\forall t \in I \quad ag''(t) + bg'(t) + cg(t) &= af''(t) + bf'(t) + cf(t) && (4.59)\\
&\quad - (af_0''(t) + bf_0'(t) + cf_0(t)) && (4.60)\\
&= d(t) - d(t) = 0 && (4.61)
\end{aligned}$$

La fonction g est donc solution de l'Eq. (**??**).

Soit une application $f : I \longmapsto \mathbb{K}$. Supposons que $g = f - f_0$ soit solution de l'Eq. (**??**). Puisque g est solution de l'Eq. (**??**) elle est deux fois dérivable et puisque f est solution de l'Eq.(**??**) alors elle est deux fois dérivable. Ainsi donc $f = g + f_0$ est deux fois dérivable et on a pour tout $t \in I$:

$$\begin{aligned} af''(t) + bf'(t) + cf(t) &= (ag''(t) + bg'(t) + cg(t)) \\ &\quad + (af_0''(t) + bf_0'(t) + cf_0(t)) \qquad (4.62) \\ &= 0 + d(t) \qquad (4.63) \end{aligned}$$

donc f est solution de l'Eq. (**??**). □

4.4.2 Principe de superposition

Proposition 4.2. Soient f_1 et f_2 des solutions particulières respectives des équations

$$ay'' + by' + cy = d_1(t) \qquad (4.64)$$

$$ay'' + by' + cy = d_2(t), \qquad (4.65)$$

où d_1 et d_2 sont des fonctions au moins continues de I vers $\mathbb{K}$. Alors $f = f_1 + f_2$ est une solution de l'équation

$$ay'' + by' + cy = d_1(t) + d_2(t) \qquad (4.66)$$

Démonstration. Soient f_1 et f_2 des solutions respectives de l'Eq. (**??**) et de l'Eq. (**??**), alors f_1 et f_2 sont dérivables sur I donc $f_1 + f_2$ aussi :

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad af''(t) + bf'(t) + cf(t) &= af_1''(t) + bf_1'(t) + cf_1(t) \\ &\quad + af_2''(t) + bf_2'(t) + cf_2(t) \qquad (4.67) \\ &= d_1(t) + d_2(t) \qquad (4.68) \end{aligned}$$

Car f_1 et f_2 sont solutions de l'Eq. (**??**) et de l'Eq. (**??**) respectivement. La fonction f est donc une solution de l'Eq.(**??**). □

Application : si le second membre est de la forme $d_1(t)+\cdots+d_n(t)$ on cherche indépendamment des solutions particulières f_i des équations différentielles correspondantes avec le second membre d_i et ensuite on somme toutes les solutions pour trouver la solution particulière de l'équation de départ.

4.4.3 Recherche d'une solution particulière dans le cas où le second membre est une « exponentielle-polynôme »

Dans ce cours on s'intéresse uniquement à des seconds membre de cette forme.

Définition 4.2. On appelle exponentielle-polynôme toute fonction d de la forme

$$d(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{m_k t} P_k(t), \qquad (4.69)$$

où $n \in \mathbb{N}^*$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{K}$ et $P_1, \ldots, P_n$ sont des fonctions polynomiales.

On considère l'équation différentielle suivante avec $(a, b, c) \in \mathbb{K}^* \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$

$$ay'' + by' + cy = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{kt} P_k(t) \tag{4.70}$$

On cherche une solution particulière de l'Eq. (**??**). Grâce au principe de superposition, il suffit de trouver une solution particulière pour chacune des équation $\mathcal{E}_k$:

$$ay'' + by' + cy = \mathrm{e}^{kt} P_k(t) \tag{4.71}$$

On admet l'indice k dans une partie de la suite pour alléger la notation.

Théorème 4.8. *Pour tout entier $k \in [\![1\,; n]\!]$ il existe une solution particulière f_k de l'Eq. (**??**) de la forme suivante*

— *si m_k n'est pas racine de l'équation caractéristique alors*

$$\forall t \in I \quad f_k(t) = e^{m_k t} Q_k(t) \tag{4.72}$$

où $\deg(Q_k) = \deg(P_k)$ *;*

— *si m_k est une racine simple de l'équation caractéristique alors*

$$\forall t \in I \quad f_k(t) = e^{m_k t} Q_k(t) \tag{4.73}$$

où $\deg(Q_k) = \deg(P_k) + 1$ *;*

— *si m_k est une racine double de l'équation caractéristique alors*

$$\forall t \in I \quad f_k(t) = e^{m_k t} Q_k(t) \tag{4.74}$$

où $\deg(Q_k) = \deg(P_k) + 2$.

*La fonction $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$ est alors une solution particulière de l'Eq. (**??**). Dans le deuxième cas, on pourra supposer le terme constant de Q_k nul et dans le troisième cas, on pourra supposer que le terme de degré 0 et 1 de Q_k sont nuls.*

Analyse. Soit f une solution de l'Eq. (**??**). On définit $g\colon \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{-mt} f(t) \end{array} \right.$ alors puisque f est solution, elle est deux fois dérivable et donc g est dérivable deux fois. Alors

$$\forall t \in I \quad f(t) = g(t)\,\mathrm{e}^{mt}, \tag{4.75}$$

$$\forall t \in I \quad f'(t) = (mg(t) + g'(t))\,\mathrm{e}^{mt}, \tag{4.76}$$

$$\forall t \in I \quad f''(t) = (m^2 g(t) + 2mg'(t) + g''(t))\,\mathrm{e}^{mt}. \tag{4.77}$$

La fonction f est solution de l'Eq. (**??**) donc

$$\forall t \in I \quad af''(t) + bf'(t) + cf(t) = \mathrm{e}^{mt} P(t), \tag{4.78}$$

$$\begin{aligned} \forall t \in I \quad & \mathrm{e}^{mt}(am^2 g(t) + 2amg'(t) + ag''(t)) \\ & + \mathrm{e}^{mt}(bmg(t) + bg'(t)) + c\,\mathrm{e}^{mt} g(t) = \mathrm{e}^{mt} P(t), \end{aligned} \tag{4.79}$$

$$\forall t \in I \ \ \mathrm{e}^{mt} \neq 0 \quad ag''(t) + (2am + b)g'(t) + (am^2 + bm + c)g(t) = P(t). \tag{4.80}$$

On a montré que g est solution d'une équation différentielle linéaire du 2^{nd} ordre à coefficients constants dont le 2^{nd} membre est un polynôme. On distingue trois cas :

1. si $am^2 + bm + c \neq 0$ alors il existe une solution particulière de l'Eq. (**??**) sous la forme $g = Q$ où Q est un polynôme de même degré que P. Il en existe une seule de cette forme.
2. si $am^2+bm+c = 0$ et $2am+b \neq 0$ alors il existe une solution particulière de l'Eq. (**??**) sous la forme $g = Q$ où Q est un polynôme de degré $deg(P)+1$.
3. si $am^2+bm+c = 0$ et $2am+b = 0$ alors il existe une solution particulière de l'Eq. (**??**) sous la forme $g = Q$ où Q est un polynôme de degré $deg(P)+2$.

On propose de démontrer ces trois cas un par un.

Si $am^2+bm+c \neq 0$ on pose $P(t) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j$ et on cherche g sous la forme $g(t) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j t^j$. La fonction g est deux fois dérivable et

$$\forall t \in I \qquad g'(t) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j j t^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j+1} t^j; \tag{4.81}$$

$$\forall t \in I \qquad g''(t) = \sum_{k=0}^{n-2} \beta_{k+2}(k+2)(k+1)t^k. \tag{4.82}$$

Ainsi g est solution de l'Eq. (**??**) si et seulement si

$$\begin{aligned}\forall t \in I \quad a\sum_{j=0}^{n-2} \beta_{j+2}(j+2)(j+1)t^j + (2am+b)\sum_{j=0}^{n-1} \beta_{j-1}(j+1)t^j \\ +(am^2+bm+c)\sum_{j=0}^{n} \beta_j t^j = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j,\end{aligned} \tag{4.83}$$

c'est-à-dire en changeant les variables si et seulement si

$$\begin{aligned}\forall t \in I \quad \sum_{j=0}^{n-2} a\beta_{j+2}(j+2)(j+1)t^j + \sum_{j=0}^{n-2}(2am+b)\beta_{j+1}(j+1)t^j \\ +(2am+b)\beta_n n t^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2}(am^2+bm+c)\beta_j t^j + (am^2+bm+c)\beta_{n-1}t^{n-1} \\ +(am^2+bm+c)\beta_n t^n = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j t^j.\end{aligned} \tag{4.84}$$

Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coefficients, donc si et seulement si pour tout naturel j de $[\![0\,;n-2]\!]$

$$\begin{cases} \alpha_j = a\beta_{j+2}(j+2)(j+1) + (2am+b)\beta_{j+1}(j+1) + (am^2+bm+c)\beta_j \\ \alpha_{n-1} = (2am+b)\beta_n n + (am^2+bm+c)\beta_{n-1} \\ \alpha_n = (am^2+bm+c)\beta_n \end{cases}. \tag{4.85}$$

Comme $am^2+bm+c \neq 0$, on peut calculer β_n en fonction de α_n. Ensuite on peut exprimer β_{n-1} en fonction de β_n et α_{n-1} et donc tous les coefficients de proche en proche. Ce système se résout de proche en proche et admet une unique solution.

Si $am^2+bm+c=0$ et $2am+b\neq 0$, g est solution de $ay''+(2am+b)y'=P$ et donc g' est solution de $0z''+az'+(2am+b)z=P$ avec $2am+b\neq 0$. D'après le premier cas, la dernière équation admet une solution polynomiale de degré $\deg(P)$, et si on prend une primitive de cette solution, on obtient une fonction polynomiale g de degré $\deg(P)+1$ qui est solution de l'équation initiale. On peut choisir la constante d'intégration comme on veut, mais d'habitude on prend la constante nulle.

Si $am^2+bm+c=0$ et $2am+b=0$ alors $ay''=P$ et puisque $a\neq 0$, on peut trouver une solution en intégrant deux fois $\dfrac{P}{a}$ et on obtient une solution polynomiale de degré $\deg(P)+2$ et les constantes d'intégration peuvent être choisies de façon arbitraire. □

Synthèse. Soit g_k une solution polynomiale de (F_k), on définit alors l'application

$$f_k\colon \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ t & \longmapsto & g_k(t)e^{m_k t} \end{array}\right. . \tag{4.86}$$

Comme g_k est solution alors elle est deux fois dérivable et donc f_k est deux fois dérivable. D'après le même calcul que dans l'analyse on a

$$\forall t\in I \ af_k''(t)+bf_k'(t)+cf_k(t)=\mathrm{e}^{m_k t}\,P_k(t) \tag{4.87}$$

La somme $f=\sum_{k=1}^{n} f_k$ est une solution particulière de l'Eq. (**??**) d'après le principe de superposition. □

Cette méthode permet également de trouver des solutions particulières pour les seconds membres de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{m_k t}\left(P_k(t)\cos(\alpha_k t)+Q_k(t)\sin(\alpha_k t)\right), \tag{4.88}$$

grâce au passage aux exponentielles complexes.

Théorème 4.9. *Soient $(t_0,y_0,y_0')\in I\times\mathbb{K}^2$, $(a,b,c)\in\mathbb{K}^*\times\mathbb{K}^2$ et $d : I\longmapsto\mathbb{K}$ une fonction exponentielle polynôme. Alors l'équation différentielle $ay''+by'+cy=d(t)$ admet une unique solution qui satisfait les conditions initiales* $\left\{\begin{array}{l} y(t_0)=y_0 \\ y'(t_0)=y_0' \end{array}\right.$.

Démonstration. On considère $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ pour simplifier les notations. Soit f_0 une solution particulière de l'Eq. (**??**) [1] et on divise le problème en deux cas.

Le discriminant de l'équation caractéristique est non nul et soient r_1 et r_2 les racines de l'équation caractéristique. Alors une fonction f est solution de l'équation différentielle si et seulement s'il existe des complexes μ et λ tels que

1. on peut le faire car le théorème précédent montre qu'il en existe

$\forall t \in I\ f(t) = \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t} + f_0(t)$. Alors la suite d'équivalence est vraie :

$$f \text{ satisfait les CI} \iff \begin{cases} f(t_0) = y_0 \\ f'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{4.89}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t_0} + \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t_0} + f_0(t_0) = y_0 \\ \lambda r_1\, \mathrm{e}^{r_1 t_0} + \mu r_2\, \mathrm{e}^{r_2 t_0} + f_0'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{4.90}$$

$$\iff \begin{cases} \mu\, \mathrm{e}^{r_2 t_0} = y_0 - f_0(t_0) - \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t_0} \\ \lambda r_1\, \mathrm{e}^{r_1 t_0} + r_2(y_0 - f_0(t_0) - \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t_0}) + f_0'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{4.91}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = \mathrm{e}^{-r_2 t_0}(y_0 - f_0(t_0) - \lambda\, \mathrm{e}^{r_1 t_0}) \\ \lambda(r_1 - r_2) = \mathrm{e}^{-r_1 t_0}(y_0' - f_0'(t_0) + r_2 f_0(t_0) - r_2 y_0) \end{cases}. \tag{4.92}$$

Puisque $r_2 \neq r_1$ il existe un unique couple de complexe (λ, μ) tel que f satisfait les conditions initiales.

Dans le cas du discriminant nul, on pose r sa racine double. Si la fonction f est solution de l'équation différentielle alors il existe un couple de complexes (λ, μ) tel que $\forall t \in I\ f(t) = (\lambda t + \mu)\, \mathrm{e}^{rt} + f_0(t)$. Alors la suite d'équivalence est vraie :

$$f \text{ satisfait les CI} \iff \begin{cases} f(t_0) = y_0 \\ f'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{4.93}$$

$$\iff \begin{cases} (\lambda t_0 + \mu)\, \mathrm{e}^{r t_0} + f_0(t_0) = y_0 \\ (\lambda + r(\lambda t_0 + \mu)\, \mathrm{e}^{r t_0} + f_0'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{4.94}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = \mathrm{e}^{-r t_0}(y_0 - f_0(t_0)) - \lambda t_0 \\ (\lambda + \lambda r t_0)\, \mathrm{e}^{r t_0} + r(y_0 - f_0(t_0)) - \lambda t_0 r\, \mathrm{e}^{r t_0} + f'(t_0) = y_0' \end{cases} \tag{4.95}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda\, \mathrm{e}^{r t_0} = y_0' - f_0'(t_0) - r(y_0 - f_0(t_0)) \\ \mu = \mathrm{e}^{-r t_0}(y_0 - f_0(t_0)) - \lambda t_0 \end{cases}. \tag{4.96}$$

□

Chapitre 5

Géométrie élémentaire du plan

Sommaire

5.1 Modes de repérage dans le plan

Soit $\mathcal{P}$ le plan géométrique euclidien. On suppose que $\mathcal{P}$ est muni d'un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

5.1.1 Coordonnées cartésiennes

Définition 5.1. Soit M un point du plan $\mathcal{P}$. Il existe un unique couple de réels (x, y) tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. On appelle ce couple les coordonnées cartésiennes de M dans le repère $\mathcal{R}$. Ainsi, la donnée d'un repère cartésien permet de définir une bijection entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{P}$, ce qui permettra d'identifier ces deux ensembles.

5.1.2 Coordonnées polaires

On suppose ici que $\mathcal{R}$ est un repère orthonormal direct. Pour tout réel θ, on définit le vecteur $\overrightarrow{u}_\theta$ par $\overrightarrow{u}_\theta = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}$. C'est l'unique vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) \equiv \theta \pmod{2\pi}$.

Définition 5.2. Soit M un point du plan $\mathcal{P}$. On dit que (ρ, θ) est un *système de coordonnées polaires*[1] de M dans $\mathcal{R}$ si $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}_\theta$.

Si le point M est l'origine du repère O alors (ρ, θ) est un s.c.p. de M si et seulement si $\rho = 0$ et l'angle θ est quelconque. Si M n'est pas l'origine du repère alors (ρ, θ) est un s.c.p. de M si et seulement si $\rho = OM$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) \equiv \theta \pmod{2\pi}$ ou si $\rho = -OM$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) + \pi \equiv \theta \pmod{2\pi}$. Pour un même point, il existe une infinité de s.c.p. possibles. Par contre un s.c.p. définit un unique point.

Définition 5.3. Pour tout réel θ on définit le repère polaire d'angle θ : $(O, \overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{v}_\theta)$ avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{u}_\theta &= \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v}_\theta &= -\sin\theta\,\overrightarrow{i} + \cos\theta\,\overrightarrow{j} \end{cases}. \tag{5.1}$$

On a aussi pour tout réel θ, $\overrightarrow{v}_\theta = \overrightarrow{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$. Le repère $\mathcal{R}$ est orthonormal direct $\|\overrightarrow{u}_\theta\| = \|\overrightarrow{v}_\theta\| = 1$ et l'affixe de $\overrightarrow{u}_\theta$ est $\mathrm{e}^{i\theta}$ et celle de $\overrightarrow{v}_\theta$ est $i\,\mathrm{e}^{i\theta}$.

5.1.3 Changements de repères

5.1.3.1 Changement de repère cartésien

Soit une deuxième repère cartésiens $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tels que dans le repère $\mathcal{R}$, $\Omega(x_1, y_1)$ $\overrightarrow{u}(a, b)$ $\overrightarrow{v}(c, d)$. Soit M un point de $\mathcal{P}$ de coordonnées (x, y) dans le repère $\mathcal{R}$ et (X, Y) dans le repère $\mathcal{R}'$. On a ainsi d'une part

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}, \tag{5.2}$$

et d'autre part

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} = x_\Omega\,\overrightarrow{i} + y_\Omega\,\overrightarrow{j} + X\overrightarrow{u} + Y\overrightarrow{v}. \tag{5.3}$$

1. abrégé en s.c.p.

Comme
$$\begin{cases} \overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j} \end{cases} ; \tag{5.4}$$
alors
$$\overrightarrow{OM} = (x_\Omega + aX + cY)\overrightarrow{i} + (y_\Omega + bX + dY)\overrightarrow{j}. \tag{5.5}$$
Par unicité des coordonnées on a
$$\begin{cases} x = x_\Omega + aX + cY \\ y = y_\Omega + bX + dY \end{cases} . \tag{5.6}$$

5.1.3.2 Formules de changement de bases orthonormales directes (BOND)

On considére que $\mathcal{R}$ est un repère orthonormal direct (ROND). Soit $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ une base orthonormale directe de $\mathcal{R}$. Pour tout réel θ on définit
$$\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{i} + \sin\theta\,\overrightarrow{j}; \tag{5.7}$$
$$\overrightarrow{v_\theta} = \cos\theta\,\overrightarrow{j} - \sin\theta\,\overrightarrow{i}. \tag{5.8}$$
Il existe un réel φ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_\varphi}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_\varphi}$.

Démonstration. Soit φ le réel tel que $\varphi \equiv (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) \pmod{2\pi}$. Alors, $\overrightarrow{u}$ est l'unique vecteur unitaire tel que $\varphi \equiv (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) \pmod{2\pi}$, donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_\varphi}$. De plus le vecteur $\overrightarrow{v}$ est unitaire et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u}) + (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \varphi + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est l'unique vecteur unitaire tel que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v}) = \varphi + \frac{\pi}{2}$ donc $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_\varphi}$. □

Soit un point M du plan $\mathcal{P}$, on note (x, y) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ et (X, Y) dans $\mathcal{R}'$. Alors
$$\begin{cases} x = \cos\varphi X - \sin\varphi Y \\ y = \sin\varphi X + \cos\varphi Y \end{cases} . \tag{5.9}$$
En inversant ce système d'équations, on obtient
$$\begin{cases} X = \cos\varphi x + \sin\varphi y \\ Y = -\sin\varphi x + \cos\varphi y \end{cases} . \tag{5.10}$$

5.1.3.3 Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires

On considére que $\mathcal{R}$ est un repère orthonormal direct. On considère un point M de coordonnées cartésiennes (x, y) et dont un s.c.p. est (ρ, θ) alors
$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} = \rho\cos\theta\,\overrightarrow{i} + \rho\sin\theta\,\overrightarrow{j}. \tag{5.11}$$
On en déduit alors par unicité des coordonnées cartésiennes que $x = \rho\cos\theta$ et $y = \rho\sin\theta$. Donc si on sait que ρ est strictement positif alors $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

5.1.4 Équations cartésiennes et polaires

Soit X une partie du plan $\mathcal{P}$ munie du repère $\mathcal{R}$.

Définition 5.4. 1. Soit $F : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ une application, on dit que $F(x, y) = 0$ est une équation cartésienne de X dans $\mathcal{R}$ si et seulement si pour tout point M du plan on a

$$M \in X \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad F(x, y) = 0. \tag{5.12}$$

2. Soit $G : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ une autre application, on dit que $G(r, \theta) = 0$ est une équation polaire de X dans $\mathcal{R}$ si et seulement si pour tout point M du plan on a

$$M \in X \iff \exists (\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 \quad G(\rho, \theta) = 0. \tag{5.13}$$

3. Soit I un intervalle réel et $f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$. On dit que f est un paramétrage de la partie X du plan dans le repère $\mathcal{R}$ si et seulement si $X = \{M(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$.

5.1.4.1 Applications

Équation d'un cercle Soit $\Omega \in \mathcal{P} \setminus \{O\}$ et (R, φ) un s.c.p. de Ω avec $R > 0$. L'ensemble $\mathcal{C}$ est le cercle de centre Ω passant par O. Il s'agit de donner une équation polaire de ce cercle.

Analyse. Soit M un point du cercle et soit (ρ, θ) un s.c.p. de M.

Dans un premier temps, on commence par supposer que $\rho > 0$. Le triangle $O\Omega M$ est isocèle en Ω. Soit H le projeté orthogonal de Ω sur (OM) alors H est le milieu de $[OM]$ et

$$\cos(\theta - \varphi) = \frac{OH}{OM} = \frac{\rho/2}{R}, \tag{5.14}$$

donc

$$\rho = 2R\cos(\theta - \varphi). \tag{5.15}$$

Dans un deuxième temps, on suppose que ρ est nul, alors $M = O$. Tout couple $(0, \theta)$ est un s.c.p. de M et en particulier $(0, \varphi + \frac{\pi}{2})$ et donc $2R\cos(\varphi + \frac{\pi}{2} - \varphi) = 0 = \rho$.

Dans un troisième et dernier temps, on suppose que $\rho < 0$, alors $(-\rho, \theta + \pi)$ est un autre s.c.p. de M. Donc

$$-\rho = 2R\cos(\theta + \pi - \varphi), \tag{5.16}$$

soit en simplifiant

$$\rho = 2R\cos(\theta - \varphi). \tag{5.17}$$

On a donc montré que pour tous point M du cercle, il existe un s.c.p. (ρ, θ) de M tel que $\rho = 2R\cos(\theta - \varphi)$. $\square$

Synthèse. Soit un point M du plan admettant un s.c.p. (ρ, θ) tel que $\rho = 2R\cos(\theta - \varphi)$. Si on se place dans le repère $\mathcal{R}'(O, \overrightarrow{u_\varphi}, \overrightarrow{v_\varphi})$ alors $\Omega = (R, 0)$

dans $\mathcal{R}'$. Un s.c.p. de M dans $\mathcal{R}'$ peut aussi être $(\rho, \theta - \varphi)$. Alors, dans $\mathcal{R}'$, on a $M = (\rho\cos(\theta - \varphi), \rho\sin(\theta - \varphi))$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\Omega M^2 &= (\rho\cos(\theta-\varphi) - R)^2 + (\rho\sin(\theta-\varphi))^2 && (5.18)\\
&= \rho^2\cos^2(\theta-\varphi) + R^2 - 2R\cos(\theta-\varphi)\rho + \rho^2\sin^2(\theta-\varphi) && (5.19)\\
&= \rho^2 + R^2 - \rho^2 && (5.20)\\
&= R^2. && (5.21)
\end{aligned}$$

On a montré que si M admettait un s.c.p. vérifiant l'équation, alors il est sur le cercle. □

Équation d'une droite Soit $H \in \mathcal{P} \setminus \{O\}$ dont un s.c.p. est (R, φ) avec $R > 0$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par H et orthogonale à (OH). Il s'agit de donner une équation polaire de $\mathcal{D}$.

Analyse. Soit M un point de $\mathcal{D}$ et (ρ, θ) un s.c.p. de M. puisque $O \notin \mathcal{D}$ alors $\rho \neq 0$. Commençons en supposant que $\rho > 0$ alors

$$\cos(\theta - \varphi) = \frac{OH}{OM} = \frac{R}{\rho}, \tag{5.22}$$

et donc $R = \rho\cos(\theta - \varphi)$.

Si $\rho < 0$ alors $(-\rho, \theta + \pi)$ est un autre s.c.p. de M et on a encore $\rho\cos(\theta - \varphi) = R$. On a donc montré que tout point de $\mathcal{D}$ admet un s.c.p. (ρ, θ) tel que $\rho\cos(\theta - \varphi) = R$. □

Synthèse. Soit M un point qui admet un s.c.p. (ρ, θ) vérifiant l'équation

$$\rho\cos(\theta - \varphi) = R. \tag{5.23}$$

On se place dans le repère $(O, \overrightarrow{u_\varphi}, \overrightarrow{v_\varphi})$. Alors H est de coordonnées (R, O) et M est de coordonnées $(\rho\cos(\theta - \varphi), \rho\sin(\theta - \varphi))$ [2]. Du coup le vecteur $\overrightarrow{HM}$ est de coordonnées $(0, \rho\sin(\theta - \varphi))$ et on a $\overrightarrow{u_\varphi}$ de coordonnée $(1, 0)$.

On voit donc que ces deux vecteurs sont orthogonaux et donc que M est sur la droite $\mathcal{D}$. □

5.2 Produit scalaire

5.2.1 Définition géométrique

Définition 5.5. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On définit le réel $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ appelé produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

— si $\overrightarrow{u}$ est nul ou si $\overrightarrow{v}$ est nul par $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$;

— si $\overrightarrow{u}$ est non nul et si $\overrightarrow{v}$ est non nul par $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Proposition 5.1. Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, ils sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

2. parce que $(\rho, \theta - \varphi)$ est un s.c.p. de M

Démonstration. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si l'un des deux est nul ou s'il forment un angle droit. C'est à dire si et seulement si l'un des deux est nul ou si le cosinus de leur angle est nul donc si et seulement si leur produit scalaire est nul d'après la définition. □

Supposons maintenant que $\overrightarrow{u}$ soit non nul, alors on définit un vecteur unitaire $\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$. Soit le vecteur $\overrightarrow{b}$ unitaire et unique tel que $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{\pi}{2}$. Le couple $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ forme donc une base orthonormale directe. Dans cette base, le vecteur $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $(\|\overrightarrow{u}\|, 0)$ et si $\overrightarrow{v}$ est non nul alors il existe un s.c.p. dans le repère $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$, c'est $(\|\overrightarrow{v}\|, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$. Les coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{v}$ dans le repère $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ sont $(\|\overrightarrow{v}\| \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \|\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$. Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = X_{\overrightarrow{u}} X_{\overrightarrow{v}}$ (si $\overrightarrow{v}$ est nul alors l'expression est encore vraie). On note $\mathcal{D}$ la droite passant par O dirigée par $\overrightarrow{u}$. Soient M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$, N tel que $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{v}$ et H le projeté orthogonal de N sur $\mathcal{D}$. Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = \overline{OM}\ \overline{OH}$.

5.2.2 Propriétés algébriques

Proposition 5.2. Le produit scalaire est une forme bilinéaire et symétrique, c'est à dire que pour trois vecteur $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ quelconques du plan et un réel λ on a :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}; \tag{5.24}$$

$$\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) \qquad \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}; \tag{5.25}$$

$$(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \lambda \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}) \qquad (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v}; \tag{5.26}$$

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2. \tag{5.27}$$

Démonstration. Si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul alors leur produit scalaire est nul, donc il commute. Sinon puisque la fonction cosinus est paire et puisque $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ alors la proposition est vraie.

Si $\overrightarrow{u}$ est nul alors l'égalité est vraie et sinon on se place dans la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ définie précédemment et on a

$$\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) = X_{\overrightarrow{u}} X_{\lambda \overrightarrow{v}} = \lambda X_{\overrightarrow{u}} X_{\overrightarrow{v}} = \lambda \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}, \tag{5.28}$$

et on démontre de la même manière la distributivité à droite. La linéarité à gauche découle de la symétrie et de la linéarité à droite du produit scalaire.

Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ est nul alors l'égalité est vraie, sinon puisque $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0$ alors on a l'égalité. □

Proposition 5.3. Soient $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une BON, deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de coordonnées cartésiennes (x, y) et (x', y') dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx + yy'$

Démonstration. On peut décomposer le produit scalaire sur la base orthonormale du plan $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = (x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j}) \cdot (x' \overrightarrow{i} + y' \overrightarrow{j}) \tag{5.29}$$

$$= xx' \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} + xy' \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + yx' \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + yy' \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} \tag{5.30}$$

$$= xx' + yy'. \tag{5.31}$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$ sont unitaires et orthogonaux. □

Proposition 5.4. Soient $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une BON, deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ des vecteurs d'affixes respectives z et z' dans la BON. Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \Re(\overline{z}z')$.

Démonstration. On note $z = x + \mathrm{i}\, y$ et $z' = x' + \mathrm{i}\, y'$ avec (x, y) les coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{u}$ et (x', y') les coordonnées cartésiennes de $\overrightarrow{v}$. Alors

$$\overline{z}z' = (x - \mathrm{i}\, y)(x' + \mathrm{i}\, y') = xx' + yy' + \mathrm{i}(xy' - x'y). \tag{5.32}$$

Alors $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' = \Re(\overline{z}z')$. □

Proposition 5.5 (Théorème d'Al-Kashi)**.** Dans un triangle ABC quelconque, on a

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AC \cos(\widehat{BAC}). \tag{5.33}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
BC^2 = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BC} &= (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 && (5.34)\\
&= BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} && (5.35)\\
&= BA^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} && (5.36)\\
&= BA^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(\widehat{BAC}). && (5.37)
\end{aligned}$$

□

5.2.3 Lignes de niveaux du produit scalaire

Soient A un point du plan fixe et $\overrightarrow{u}$ un vecteur fixe, on considère

$$\psi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} \end{array} \right. . \tag{5.38}$$

Il s'agit de déterminer les ensembles

$$\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad X_\lambda = \{M \in \mathcal{P} \mid \psi(M) = \lambda\} = \left\{M \in \mathcal{P} \;\middle|\; \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \lambda\right\}. \tag{5.39}$$

Cas 1 si $\overrightarrow{u}$ est nul alors pour tous point M du plan on a $\psi(M) = 0$. Ainsi si $\lambda = 0$ alors $X_0 = \mathcal{P}$ et sinon alors $X_\lambda = \emptyset$;

Cas 2 si $\overrightarrow{u}$ est non nul alors on commence par chercher les éventuels éléments M de X_λ tels que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{u}$, c'est à dire si et seulement s'il existe un réel α tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{u}$. On a donc la suite d'équivalence :

$$\begin{aligned}
M \in X_\lambda &\iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \lambda && (5.40)\\
&\iff \alpha \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 = \lambda && (5.41)\\
&\iff \alpha = \frac{\lambda}{\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2}. && (5.42)
\end{aligned}$$

Soit donc le point H_λ défini par $\overrightarrow{AH_\lambda} = \frac{\lambda}{\|\overrightarrow{u}\|^2}\overrightarrow{u}$ ($H_\lambda \in X_\lambda$). Alors pour un point M quelconque, on a

$$M \in X_\lambda \iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \lambda \tag{5.43}$$
$$\iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AH_\lambda} \tag{5.44}$$
$$\iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{H_\lambda M} = 0. \tag{5.45}$$

Ce qui est équivalent à $\overrightarrow{H_\lambda M}$ et $\overrightarrow{u}$ orthogonaux. On en déduit que X_λ est la droite passant par H_λ orthogonale à $\overrightarrow{u}$.

Conséquences :

1. Si $\lambda = 0$ alors X_0 est la droite passant par A et orthogonale à $\overrightarrow{u}$. Si $\mathcal{D}$ est une droite, si on connaît un point $A(a, b)$ de $\mathcal{D}$ et un vecteur normal $\overrightarrow{n}(\alpha, \beta)$, on peut facilement déduire une équation cartésienne de $\mathcal{D}$. Soit un point $M(x, y)$ du plan, alors :

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \tag{5.46}$$
$$\iff \alpha(x-a) + \beta(y-b) = 0 \tag{5.47}$$
$$\iff \alpha x + \beta y = a\alpha + b\beta; \tag{5.48}$$

2. Soient $A = O$, $\mathcal{D}$ une droite quelconque du plan, H le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$, $\overrightarrow{u}$ un vecteur normal unitaire de $\mathcal{D}$. Il existe un réel φ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_\varphi}$ et on note $\rho = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OH}$ alors pour tous point $M(x, y)$ on a

$$M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \tag{5.49}$$
$$\iff \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \tag{5.50}$$
$$\iff \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \tag{5.51}$$
$$\iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{OM} = \rho \tag{5.52}$$
$$\iff x\cos\varphi + y\sin\varphi = \rho. \tag{5.53}$$

C'est l'équation normale de la droite $\mathcal{D}$.

5.3 Déterminant

5.3.1 Définition géométrique

Définition 5.6. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. On définit le réel $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$ appelé déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par :

- si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul alors $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = 0$;
- sinon $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Proposition 5.6. Deux vecteurs du plan sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul. Deux vecteurs forment une base (in)directe si leur déterminant est positif (négatif).

Démonstration. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. Alors $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si l'un des deux est nul ou $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv 0 \pmod{\pi}$.

C'est-à-dire si et seulement si l'un des deux est nul ou $\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$, c'est à dire si et seulement si leur déterminant est nul.

Supposons que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ soit non congru à 0 modulo π alors on considère θ la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $\theta \in]-\pi\,;\pi]$. Si le déterminant est positif, alors $\sin\theta$ est positif donc dans $]-\pi\,;\pi]$, θ est positif. C'est donc un base directe. Avec un raisonnement équivalent on montre que si le déterminant est négatif alors la base est indirecte. □

Si $\overrightarrow{u}$ est non nul alors on introduit la base $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ (vue à la section **??**). On avait vu que dans cette base, les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ étaient $\overrightarrow{u}(\|\overrightarrow{u}\|, 0)$ et $\overrightarrow{v}(\|\overrightarrow{v}\|\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}), \|\overrightarrow{v}\|\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$. Donc $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}; \overrightarrow{v}) = X_{\overrightarrow{u}}Y_{\overrightarrow{v}}$. De façon géométrique le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ représente l'aire du parallélogramme basé sur ces deux vecteurs.

5.3.2 Propriétés algébriques

Proposition 5.7. Pour $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ trois vecteurs et λ un réel on a :

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}) = 0; \tag{5.54}$$

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\mathrm{Det}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}); \tag{5.55}$$

$$\mathrm{Det}(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \lambda\,\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \quad \mathrm{Det}(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \mathrm{Det}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}); \tag{5.56}$$

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v}) = \lambda\,\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \quad \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \tag{5.57}$$

Démonstration.

1. On a déjà vu que si les vecteurs sont colinéaires alors le déterminant est nul.
2. Si l'un des deux vecteur est nul alors puisque leur déterminant est nul, la formule est vraie. Sinon puisque la fonction sinus est impaire, alors le résultat est vrai aussi.
3. Si l'un des deux vecteur est nul alors puisque leur déterminant est nul, la formule est vraie. Sinon on se place dans la base (a, b) définie dans la section **??** et dans ce cas $\mathrm{Det}(\lambda\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = X_{\overrightarrow{u}}Y_{\lambda\overrightarrow{v}} = \lambda X_{\overrightarrow{u}}Y_{\overrightarrow{v}} = \lambda\,\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et aussi pour l'additivité : $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v}) = X_{\overrightarrow{u}}Y_{\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}} = X_{\overrightarrow{u}}Y_{\overrightarrow{v}} + X_{\overrightarrow{u}}Y_{\overrightarrow{w}} = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}) + \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$
4. La dernière formule se déduit des deux précédentes propriétés.

□

Proposition 5.8. Soient $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une BOND, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées cartésiennes respectives (x, y) et (x', y') dans $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Alors

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xy' - yx' = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}. \tag{5.58}$$

Démonstration. Puisque le déterminant est bilinéaire, on peut écrire que

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = xx'\,\mathrm{Det}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{i}) + xy'\,\mathrm{Det}(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) + x'y\,\mathrm{Det}(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{i}) + yy'\,\mathrm{Det}(\overrightarrow{j}, \overrightarrow{j}). \tag{5.59}$$

Puisque $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une BOND, on a le résultat. □

Proposition 5.9. Soient $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une BOND, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs d'affixe respectives z et z', alors

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \Im(\overline{z}z'). \tag{5.60}$$

Démonstration. Voir la preuve de la proposition correspondante au produit scalaire. □

Proposition 5.10. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

$$(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 + \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \|\overrightarrow{v}\|^2 . \tag{5.61}$$

Démonstration. Si l'un des deux vecteur est nul la formule est vérifiée par $0+0 = 0$. Sinon le résultat découle de l'égalité $\sin^2 + \cos^2 = 1$. □

5.3.3 Lignes de niveaux du déterminant

Soient A un point fixe du plan, $\overrightarrow{u}$ un vecteur fixe, λ un réel fixe. On cherche à déterminer

$$Y_\lambda = \left\{ M \in \mathcal{P} \;\middle|\; \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = \lambda \right\}. \tag{5.62}$$

Cas 1 Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ est nul alors si λ est nul $Y_0 = \mathcal{P}$ et si λ n'est pas nul alors $Y_\lambda = \emptyset$.

Cas 2 Si le vecteur $\overrightarrow{u}$ est non nul, alors on considère le vecteur $\overrightarrow{v}$ tel que $\|\overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. On commence par chercher un point M de Y_λ qui vérifie $\overrightarrow{AM}$ colinéaire à $\overrightarrow{v}$:

$$\begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{v} \\ M \in Y_\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{v} \\ \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = \lambda \end{cases} \tag{5.63}$$

$$\iff \begin{cases} \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{v} \\ \lambda = \alpha \|\overrightarrow{u}\|^2 \end{cases} \tag{5.64}$$

$$\iff \overrightarrow{AM} = \frac{\lambda}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{v}. \tag{5.65}$$

Soit donc H_λ le point tel que $\overrightarrow{AH_\lambda} = \frac{\lambda}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{v}$. Pour tout point M du plan, on a

$$\begin{aligned} M \in Y_\lambda &\iff \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = \lambda && (5.66) \\ &\iff \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AH_\lambda}) && (5.67) \\ &\iff \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{H_\lambda M}) = 0 && (5.68) \end{aligned}$$

Donc Y_λ est la droite passant par H_λ et dirigée par $\overrightarrow{u}$.

Remarques :

1. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est défini par la propriété suivante : pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$, on a $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$.

Démonstration. Si le vecteur $\overrightarrow{w}$ est nul alors comme le produit scalaire est nul et le déterminant aussi, c'est bon. Sinon alors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w} &= \|\overrightarrow{v}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) && (5.69)\\ &= \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos((\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})+(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})) && (5.70)\\ &= \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\cos\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}-\frac{\pi}{2}\right) && (5.71)\\ &= \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{w}\|\sin(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}) && (5.72)\\ &= \mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}). && (5.73)\end{aligned}$$

□

Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est l'unique vecteur à vérifier cette propriété : Supposons qu'un deuxième vecteur $\overrightarrow{v}'$ vérifie la propriété, alors pour tout vecteur $\overrightarrow{w}$ on a $\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}'\cdot\overrightarrow{w}$ alors $(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}')\cdot\overrightarrow{w}=0$ et en particulier si $\overrightarrow{w}=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}'$ alors $\|\overrightarrow{v}-\overrightarrow{v}'\|^2=0$ alors $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{v}'$.

2. La méthode précédente permet d'obtenir une équation pour les droites $\mathcal{D}$ dont on connaît :
   — un point A de $\mathcal{D}$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}$
   $$\forall M\in\mathcal{P}\quad M\in\mathcal{D}\iff \mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})=0, \tag{5.74}$$
   — deux points A et B de $\mathcal{D}$
   $$\forall M\in\mathcal{P}\quad M\in\mathcal{D}\iff \mathrm{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM})=0. \tag{5.75}$$

5.4 Droites

5.4.1 Équations de droites

On se place dans un repère orthonormal $(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$.

Proposition 5.11. Trois points $A(a_1,b_1)$ $B(a_2,b_2)$ et $C(a_3,b_3)$ du plan sont alignés si et seulement si

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=\begin{vmatrix}a2-a1 & a3-a2\\ b2-b1 & b3-b1\end{vmatrix}=0. \tag{5.76}$$

Proposition 5.12. On considère une droite $\mathcal{D}$ passant par $A(a_1,b_1)$ et dirigé par $\overrightarrow{u}(a,b)$. L'équation paramétrique de $\mathcal{D}$ est

$$\forall\lambda\in\mathbb{R}\begin{cases}x=a_1+\lambda a\\ y=b_1+\lambda b\end{cases}. \tag{5.77}$$

L'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donnée par la condition sur le déterminant. Si un point M du plan est sur la droite alors $\mathrm{Det}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{AM})=0$ qui est équivalent à l'équation $a(y-b_1)-b(x-a_1)=0$.

Si la droite $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne

$$ax+by+c=0\quad((a,b)\neq(0,0)), \tag{5.78}$$

alors un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{u}(-b,a)$.

Proposition 5.13. On considère une droite $\mathcal{D}$ passant par $A(a_1, b_1)$ et $B(a_2, b_2)$ avec $A \neq B$. L'équation paramétrique de (AB) est

$$\forall\lambda \in \mathbb{R} \begin{cases} x = a_1 + \lambda(a_2 - a_1) \\ y = b_1 + \lambda(b_2 - b_1) \end{cases} . \tag{5.79}$$

L'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est donnée par la condition sur le déterminant. Si un point M du plan est sur la droite (AB) alors $\operatorname{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0$ qui est équivalent à l'équation $(a_2 - a_1)(y - b_1) - (b_2 - b_1)(x - a_1) = 0$.

Proposition 5.14. Soient un point $A(a_1, b_1)$ et un vecteur $\overrightarrow{v}(v_1, v_2)$. On considère la droite $\mathcal{D}$ passant par A et dont $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal. Alors pour tous point $M(x, y)$ du plan, M est sur la droite si et seulement si $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{v} = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $v_1(x - a_1) + v_2(y - b_1) = 0$.

Si $\mathcal{D}$ admet pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$, alors un vecteur normal de $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{n}(a, b)$.

Proposition 5.15. Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_\varphi}$ un vecteur normal unitaire de $\mathcal{D}$. Soit H le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{D}$.

$$M(x, y) \in \mathcal{D} \iff x\cos\phi + u\sin\phi = p. \tag{5.80}$$

5.4.2 Distance d'un point à une droite

Soient $\mathcal{D}$ une droite et A un point. On cherche à déterminer la plus courte distance de A a un point de la droite et à montrer qu'elle est atteinte en un seul point. Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$. Pour tout point M du plan, on peut appliquer le théorème de Pythagore sur le triangle rectangle AHM : $AM^2 = AH^2 + HM^2 \geq AH^2$. Donc $AM \geq AH$ et on a $AM = AH \iff H = M$. Ainsi $d(A, \mathcal{D}) = AH$ et elle n'est atteinte qu'en un seul point : le projeté orthogonal de A sur la droite $\mathcal{D}$.

Expressions de $d(A, \mathcal{D})$: On montre ici plusieurs cas de figure selon la situation :

1. Soit un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ normal à $\mathcal{D}$ et M un point de $\mathcal{D}$ quelconque. Alors
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AH}, \tag{5.81}$$
puisque $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires, on peut écrire que :
$$\forall M \in \mathcal{D} \quad d(A, \mathcal{D}) = |\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AH}| \tag{5.82}$$

2. Soit un vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}_\varphi(\cos\varphi, \sin\varphi)$ et si $\mathcal{D}$ admet pour équation normale
$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = p, \tag{5.83}$$
avec $A(a_1, b_1)$, alors pour tout point $M(x, y)$ de la droite $\mathcal{D}$ on a
$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AM} = \cos\varphi(x - a_1) + \sin\varphi(y - b_1) \tag{5.84}$$
$$= p - a_1\cos\varphi - b_1\sin\varphi. \tag{5.85}$$
Ainsi
$$d(A, \mathcal{D}) = |p - a_1\cos\varphi - b_1\cos\varphi|. \tag{5.86}$$

3. Si $\mathcal{D}$ a pour équation polaire $\rho\cos(\theta-\varphi)=p$ alors $x\cos\varphi+y\sin\varphi=p$ est une équation normale de $\mathcal{D}$. Soit (ρ_A,θ_A) un s.c.p. de A, alors $a_1=\rho_A\cos\theta_A$ $b_1=\rho_A\sin\theta_A$, donc
$$d(A,\mathcal{D})=|p-\rho_A\cos(\theta_A-\varphi)|. \tag{5.87}$$

4. Si $\mathcal{D}$ admet pour équation cartésienne $ax+by+c=0$ avec $(a,b)\neq(0,0)$, soient $A(x_0,y_0)$ et $\overrightarrow{u}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ un vecteur normal unitaire de $\mathcal{D}$. Alors pour tout point $M(x,y)$ de la droite $\mathcal{D}$ on a
$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{a(x-x_0)+b(y-y_0)}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-c-ax_0-by_0}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{5.88}$$
Donc
$$d(A,\mathcal{D})=\frac{c+ax_0+by_0}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{5.89}$$

5.4.3 Positions relatives de droites

On dit que deux droites du plan sont parallèles si elles admettent des vecteurs directeurs colinéaires et on dit qu'elles sont orthogonales si elles admettent des vecteurs directeurs orthogonaux.

Proposition 5.16. Soient deux droites du plan $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites d'équations cartésiennes respectives :
$$a_1x+b_1y+c_1=0 \quad (a_1,b_1)\neq(0,0) \tag{5.90}$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0 \quad (a_2,b_2)\neq(0,0). \tag{5.91}$$

1. $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles si seulement si (a_1,b_1) et (a_2,b_2) sont proportionnels. Ce qui équivaut encore à $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=0$. Elle sont alors disjointes ou confondues.
2. Sinon elles se coupent en un unique point.

Démonstration. 1. $\overrightarrow{m}_1(a_1,b_1)$ et $\overrightarrow{m}_2(a_2,b_2)$ sont des vecteurs normaux de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont parallèles équivaut à $\overrightarrow{m}_1(a_1,b_1)$ et $\overrightarrow{m}_2(a_2,b_2)$ sont colinéaires. S'il existe $I\in\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont toutes les deux égales à la droite passant par I de vecteur directeur $(-b_1a_1)$, car $(-b_1a_1)$ et $(-b_2a_2)$ sont alors colinéaires.

2. Sinon $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$ et la détermination de $\mathcal{D}_1\cap\mathcal{D}_2$ se ramène à la résolution du système linéaire
$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1 &=0\\ a_2x+b_2y+c_2 &=0\end{cases} \tag{5.92}$$
dont le déterminant est non nul, la solution est donc unique.

□

Proposition 5.17. Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droites d'équations cartésiennes respectives $a_1x+b_1y+c_1=0$ et $a_2x+b_2y+c_2=0$ avec $(a_1,b_1)\neq(0,0)$ et $(a_2,b_2)\neq(0,0)$. Alors elles sont orthogonales si et seulement si $a_1a_2+b_1b_2=0$

Démonstration. Ces deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs $\begin{pmatrix} -b_1 \\ a_1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -b_2 \\ a_2 \end{pmatrix}$ sont orthogonaux soit si et seulement si leur produit scalaire est nul, ie. $b_1 b_2 + a_1 a_2 = 0$ □

Angles de droites : Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux droite, $\overrightarrow{u}_1$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$. On appelle mesure de l'angle orienté de ces deux droites tout réel θ tel que $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}) = \theta$.

5.5 Cercles

5.5.1 Caractérisation de l'appartenance à un cercle

On se place dans un ROND $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soient $A(a,b)$ et $R \in]0\,;+\infty[$. Le cercle de centre A et de rayon R, noté $\mathcal{C}(A,R)$, est l'ensemble des points $M(x,y)$ tel que $AM = R$. Si un point $M(x,y)$ est sur le cercle $\mathcal{C}(A,R)$, c'est équivalent à

$$AM^2 = R^2 \iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \tag{5.93}$$

$$\iff x^2 + y^2 - 2ax - 2by = R^2 - a^2 - b^2. \tag{5.94}$$

Réciproquement, Soit X la partie du plan d'équation cartésienne $x^2+y^2-2ax-2by = c$ où a, b et c sont des réels, alors $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c + a^2 + b^2$. Trois cas de figures se présentent :

— si $c + a^2 + b^2 < 0$ alors $X = \emptyset$;
— si $c + a^2 + b^2 = 0$ alors $x = a$, $y = b$ et donc $X = \{A\}$;
— si $c + a^2 + b^2 > 0$ alors soit $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c}$ et $A = (a,b)$ et donc $X = \mathcal{C}(A,R)$.

Proposition 5.18. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω, M A et B trois points de $\mathcal{C}$ tels que $M \neq A$ et $M \neq B$. alors

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \tag{5.95}$$

Démonstration. L'égalité suivante est vraie selon la relation de Chasles

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B}). \tag{5.96}$$

Le triangle ΩAM est isocèle en Ω donc

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M}) \equiv \pi - 2(\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MA}) \pmod{2\pi}. \tag{5.97}$$

De la même manière, le triangle ΩMB est isocèle en Ω donc

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \pi - 2(\overrightarrow{MB}; \overrightarrow{M\Omega}) \pmod{2\pi}. \tag{5.98}$$

Soit alors finalement

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \pmod{2\pi}. \tag{5.99}$$

□

Théorème 5.1. *Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan.*

$$A,B,C \text{ et } D \text{ sont alignés ou cocycliques} \iff (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}. \tag{5.100}$$

Démonstration. En effet, si A, B, C et D sont alignés alors $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 0 \pmod{\pi}$ et $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv 0 \pmod{\pi}$ donc l'égalité est vraie. S'ils sont cocycliques, il existe un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω tel que A, B, C et D soient sur le cercle, alors d'après la proposition **??**, on a

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{2\pi}, \tag{5.101}$$

et

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv 2(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{2\pi}, \tag{5.102}$$

donc

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}. \tag{5.103}$$

Supposons maintenant que

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}, \tag{5.104}$$

et supposons que A, B et C soient alignés, alors

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv 0 \pmod{\pi}. \tag{5.105}$$

D'après l'hypothèse

$$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv 0 \pmod{\pi}. \tag{5.106}$$

Ainsi A, B et D sont alignés donc les quatre points sont alignés. De la même manière, on montre que si A, B et D sont alignés alors les quatre points sont alignés. Si maintenant A, B et C ne sont plus alignés alors A, B et D ne le sont pas non plus. Il existe un cercle $\mathcal{C}$ passant par A, B et C et un autre cercle $\mathcal{C}'$ passant par A, B et D. Soit une droite $\mathcal{D}$ passant par A et ne passant pas par B, non tangente à $\mathcal{C}$ ni à $\mathcal{C}'$. Cette droite $\mathcal{D}$ coupe donc $\mathcal{C}$ en un point E (différent de A et de B) et $\mathcal{C}'$ en un point F (différent de A et de B). En utilisant la première implication (qu'on a démontré puisque A, B, C, et E sont sur $\mathcal{C}$) on obtient :

$$(\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \pmod{\pi} \tag{5.107}$$

et puisque A, B, D et F sont sur $\mathcal{C}'$:

$$(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) \equiv (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \pmod{\pi}. \tag{5.108}$$

D'après l'hypothèse on a

$$(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}) \pmod{\pi}. \tag{5.109}$$

Les points E, A et F sont sur $\mathcal{D}$ donc $\overrightarrow{EA}$ et $\overrightarrow{FA}$ sont colinéaires, ainsi $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont aussi colinéaires. Si $E \neq F$ alors la droite (EF) est la droite $\mathcal{D}$, et donc $B \in \mathcal{D}$ qui est une contradiction avec la définition de $\mathcal{D}$. Donc $E = F$ et ainsi les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont confondus. Les points A, B, C et D sont donc cocycliques. □

Définition 5.7. Si A, B, C et D sont quatre points distincts d'affixes respectives a, b, c et d on définit le complexe noté $B(a,b,c,d)$ appelé le birapport des points A, B, C et D par

$$B(a,b,c,d) = \frac{a-c}{a-d} \times \frac{b-d}{b-c}. \tag{5.110}$$

Théorème 5.2. *Si A, B, C et D sont quatre points distincts, ils sont cocycliques ou alignés si et seulement si leur birapport est réel.*

5.5.2 Problème d'intersection

5.5.2.1 Intersection d'un cercle et d'une droite

Proposition 5.19. Soient $\mathcal{D}$ une droite, A un point ($d(A,\mathcal{D}) = d$), $R \in]0\,;+\infty[$. Alors

— si $d \geq R$ alors $\mathcal{C}(A,R) \cap \mathcal{D} = \emptyset$, ils sont disjoints ;
— si $d = R$ alors $\mathcal{C}(A,R) \cap \mathcal{D}$ est un singleton, ils sont tangents ;
— si $d \leq R$ alors l'ensemble $\mathcal{C}(A,R) \cap \mathcal{D}$ est constitué de deux points, ils sont sécants.

Démonstration. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur unitaire de $\mathcal{D}$. Soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u}$. Alors $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormal direct et dans ce repère, l'équation cartésienne du cercle est $x^2 + y^2 = R^2$ et celle de la droite est $y = \pm d = \epsilon d$, avec $\epsilon \in \{-1; 1\}$. Alors

$$M \in \mathcal{C}(A,R) \cap \mathcal{D} \iff \begin{cases} y &= \epsilon d \\ x^2 &= R^2 - d^2 \end{cases}. \tag{5.111}$$

Trois cas de figures peuvent se produire :

— si $d \geq R$ alors l'intersection est vide ;
— si $d = R$ alors $x = 0 y = \epsilon d$ alors l'intersection est un singleton ;
— si $d \leq R$ alors le système admet deux solutions et l'intersection est constituée de deux points $(\sqrt{R^2 - d^2}, \epsilon d)$ et $(-\sqrt{R^2 - d^2}, \epsilon d)$.

□

5.5.2.2 Intersection de deux cercles

Proposition 5.20. Soient A et B deux points distincts du plan, R et R' deux réels strictement positifs. On considère les cercles $\mathcal{C}(A,R)$ et $\mathcal{C}(B,R')$ et on note $d = AB$

— si $|R - R'| < d < R + R'$ alors l'intersection est constitué de deux points, les cercles sont dits sécants ;
— si $d \in \{|R - R'|\,; R + R'\}$ alors l'intersection est un singleton, les cercles sont dits tangents ;
— sinon il n'y a pas d'intersection.

Démonstration. Soit le vecteur unitaire $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB}$ et le vecteur $\overrightarrow{v}$ unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u}$ de telle manière à ce que le repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ constitue un repère orthonormal direct. Dans ce repère, A est l'origine et $B(d,0)$, l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$ est $x^2 + y^2 = R^2$ et celle de $\mathcal{C}'$ est $(x-d)^2 + y^2 = R'^2$. Soit un point

$M(x, y)$ du plan, alors

$$M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \iff \begin{cases} x^2 + y^2 & = R^2 \\ (x-d)^2 + y^2 & = R'^2 \end{cases} \tag{5.112}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 & = R^2 \\ -2dx & = R'^2 - R^2 - d^2 \end{cases} \tag{5.113}$$

$$\iff \begin{cases} x & = \frac{R^2+d^2-R'^2}{2d} \\ y^2 & = R^2 - \frac{(R^2+d^2-R'^2)^2}{(2d)^2} \end{cases} \tag{5.114}$$

$$\iff \begin{cases} x & = \frac{R^2+d^2-R'^2}{2d} \\ y^2 & = \frac{(R'^2-(R-d)^2)((R+d)^2-R'^2)}{4d^2} \end{cases} \tag{5.115}$$

$$\tag{5.116}$$

Il y a une solution unique si et seulement si $R'^2 = (R-d)^2$ ou $(R+d)^2 = R'^2$ c'est à dire si et seulement si $R' = R - d$ ou $R' = d - R$ ou $R + d = R'$ ou $R + d = -R'$ soit si et seulement si $d = R - R'$ ou $d = R' + R$ ou $d = R' - R$. Soit finalement si et seulement si $d = R + R'$ ou $d = |R - R'|$.

Il y a deux solutions si et seulement si $\begin{cases} R'^2 > (R-d)^2 \\ (R+d)^2 > R'^2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} R'^2 < (R-d)^2 \\ (R+d)^2 < R'^2 \end{cases}$. Le deuxième système d'équation implique que $(R+d)^2 < (R-d)^2$ et donc $4dR < 0$ ce qui est impossible ($d > 0$ et $R > 0$). Le premier système est équivalent à $\begin{cases} (R' - R + d)(R' + R - d) > 0 \\ (R + d - R)(R' + R + d) > 0 \end{cases}$ et la première ligne est équivalente à $\begin{cases} R' - R + d > 0 \text{ ou } R' + R - d > 0 \\ R' - R + d < 0 \text{ ou } R' + R - d < 0 \end{cases}$. Puisque la deuxième ligne est impossible, on a bien l'équivalence totale jusqu'à $\begin{cases} d < & R + R' \\ d > & |R - R'| \end{cases}$. □

Si les points A et B sont confondus alors pour tout point $M(x, y)$ on a :

$$M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}' \iff \begin{cases} x^2 + y^2 & = R^2 \\ x^2 + y^2 & = R'^2 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 & = R^2 \\ R & = R' \end{cases}. \tag{5.117}$$

Ainsi si $R = R'$ alors $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C} = \mathcal{C}$, les deux cercles sont confondus. Sinon $\mathcal{C}' \cap \mathcal{C} = \emptyset$ et les deux cercles sont disjoints.

5.5.3 Quelques lignes de niveaux

5.5.3.1 Décrire les lignes de niveau de l'application φ_1

Plus précisément, on se donne deux points A et B distincts et un réel λ. Cette fonction est définie par $\varphi_1 : \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} \end{cases}$. On veut décrire l'ensemble $X_\lambda^1 = \left\{ M \in \mathcal{P} \;\middle|\; \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \lambda \right\}$. On introduit le milieu I de $[AB]$. pour tous point M du plan $\mathcal{P}$,

$$M \in X_\lambda^1 \iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \lambda \tag{5.118}$$

$$\iff MI^2 + \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = \lambda \tag{5.119}$$

Puisque $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{IB}$, on a

$$M \in X^1_\lambda \iff MI^2 = \lambda + IA^2 = \lambda + \frac{IA^2}{4}. \tag{5.120}$$

Trois cas de figure se présente :

— si $\lambda \geq -\frac{AB^2}{4}$ alors X^1_λ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\lambda + \frac{AB^2}{4}}$;

— si $\lambda = -\frac{AB^2}{4}$ alors $X^1_\lambda = \{I\}$;

— si $\lambda \leq -\frac{AB^2}{4}$ alors $X^1_\lambda = \emptyset$.

En particulier, X^1_0 est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{\frac{AB^2}{4}} = \frac{AB}{2}$ (ou encore le cercle de diamètre $[AB]$).

5.5.3.2 Décrire les lignes de niveaux de l'application φ_2

Plus précisément, on se donne deux points A et B distincts et un réel λ. Cette fonction est définie par $\varphi_2\colon \begin{cases} \mathcal{P} \setminus \{B\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \frac{MA}{MB} \end{cases}$. On veut décrire l'ensemble

$$X^2_\lambda = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \{B\} \;\middle|\; \frac{MA}{MB} = \lambda \right\}. \tag{5.121}$$

Pour tout point M du plan privé de B, on a

$$M \in X^2_\lambda \iff MA = \lambda MB. \tag{5.122}$$

— Si $\lambda \leq 0$ alors $X^2_\lambda = \emptyset$;

— si $\lambda = 0$ alors $X^2_\lambda = \{A\}$;

— si $\lambda = 1$ alors X^2_λ est la médiatrice de $[AB]$;

— si $\lambda > 0$ et $\lambda \neq 1$ alors si $M \in X^2_\lambda$ on a $MA^2 - \lambda^2 MB^2 = 0$ soit alors $(\overrightarrow{MA} - \lambda\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB}) = 0$. On définit alors $I = \mathrm{bar}(A, 1; B, -\lambda)$ et $J = \mathrm{bar}(A, 1; B, \lambda)$ (défini puisque $\lambda \neq 1$ et $\lambda \neq -1$) Si $M \in X^2_\lambda$, alors

$$(1-\lambda)\overrightarrow{MI} \cdot (1+\lambda)\overrightarrow{MJ} = 0 \iff \overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{MJ} = 0. \tag{5.123}$$

X^2_λ est le cercle de diamètre $[IJ]$.

5.5.3.3 Décrire les lignes de niveaux de l'application φ_3

Plus précisément, on se donne deux points A et B distincts et un réel α. Cette fonction est définie par $\varphi_3\colon \begin{cases} \mathcal{P} \setminus \{A; B\} & \longrightarrow & [0\,; 2\pi] \\ M & \longmapsto & (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \end{cases}$. On veut décrire l'ensemble

$$X^3_\alpha = \left\{ M \in \mathcal{P} \setminus \{A; B\} \;\middle|\; (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \right\}. \tag{5.124}$$

Deux cas se présentent à nous, selon que α est congru ou non à 0.

Premièrement si $\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$. Ainsi si $M \in X^3_\alpha$ alors A, M et B sont alignés. Donc $X^3_\alpha \subset (AB)$. Le premier sous-cas se présente lorsque $\alpha \equiv 0 \pmod{2\pi}$, alors X^3_α est la droite (AB) privée du segment $[AB]$. Le deuxième sous-cas se présente lorsque $\alpha \equiv \pi \pmod{2\pi}$, alors X^3_α est le segment $[AB]$ privé des points A et B. Alors dans tous les sous-cas, l'ensemble X^3_α est la droite (AB) privée des points A et B.

Secondement si $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, on va obtenir un arc de cercle d'extrémités A et B. Soit I le milieu de $[AB]$, soit $\mathcal{D}$ la médiatrice de $[AB]$. Soit Ω le point de $\mathcal{D}$ tel que

$$\overline{\Omega I} = \frac{AB}{2} \operatorname{cotan} \alpha = IB \operatorname{cotan} \alpha, \tag{5.125}$$

qui est possible puisque $\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, donc on peut définir sa cotangente. Ainsi $(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv \alpha \pmod{2\pi}$. Soit le vecteur unitaire $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{\Omega I}}{\Omega I}$ et le vecteur unitaire $\overrightarrow{v}$ tel que $(\Omega, \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v})$ forme un repère orthonormal direct. Dans ce repère, B a pour affixe $\Omega B \operatorname{e}^{\operatorname{i}\alpha}$ et A a pour affixe $\Omega A \operatorname{e}^{-\operatorname{i}\alpha}$.

On définit le réel $r = \Omega A = \Omega B$ dont on cherche la valeur et $\sin \alpha = \frac{IB}{\Omega B}$. Alors pour tout point M du plan,

$$\begin{aligned}
M \in X_\alpha^3 &\iff (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \alpha \pmod{2\pi} && (5.126)\\
&\iff \operatorname{Arg}\left(\frac{z_B - z_M}{z_A - z_M}\right) \equiv \operatorname{Arg}(\operatorname{e}^{\operatorname{i}\alpha}) \pmod{2\pi} && (5.127)\\
&\iff \operatorname{Arg}\left(\frac{z_B - z_M}{z_A - z_M}\frac{1}{\operatorname{e}^{\operatorname{i}\alpha}}\right) \equiv 0 \pmod{2\pi} && (5.128)\\
&\iff \frac{z_B - z_M}{z_A - z_M} \operatorname{e}^{-\operatorname{i}\alpha} \in \left]0\,;+\infty\right[&& (5.129)\\
&\iff (z_B - z_M)(\overline{z_A} - \overline{z_M}) \operatorname{e}^{-\operatorname{i}\alpha} \in \left]0\,;+\infty\right[. && (5.130)
\end{aligned}$$

Soit z l'affixe de M, alors

$$\begin{aligned}
(z_B - z_M)(\overline{z_A} - \overline{z_M}) \operatorname{e}^{-\operatorname{i}\alpha} &= (r \operatorname{e}^{\operatorname{i}\alpha} - z)(r \operatorname{e}^{\operatorname{i}\alpha} - \overline{z}) \operatorname{e}^{-\operatorname{i}\alpha} && (5.131)\\
&= r^2 \operatorname{e}^{\operatorname{i}\alpha} - rz - r\overline{z} + |z|^2 \operatorname{e}^{-\operatorname{i}\alpha} && (5.132)\\
&= (r^2 \cos\alpha - 2r\Re z + |z|^2 \cos\alpha) && (5.133)\\
&\quad + \operatorname{i}(r^2 \sin\alpha - |z|^2 \sin\alpha). && (5.134)
\end{aligned}$$

Donc on a la suite d'équivalences suivante

$$\begin{aligned}
M \in X_\alpha^3 &\iff \begin{cases} r^2 \cos\alpha - 2r\Re(z) + |z|^2 \cos\alpha \geq 0 \\ r^2 \sin\alpha - |z|^2 \sin\alpha = 0 \end{cases} && (5.135)\\
&\iff \begin{cases} |z|^2 = r^2 & (\alpha \not\equiv 0 \pmod{\pi}) \\ 2r^2 \cos\alpha - 2r\Re(z) > 0 \end{cases} && (5.136)\\
&\iff \begin{cases} |z| = r & (|z| > 0) \\ r\cos\alpha > \Re(z) > 0 & (r \neq 0) \end{cases} && (5.137)\\
&\iff \begin{cases} |z| = r \\ \Re(z_A) > \Re(z) \end{cases}. && (5.138)
\end{aligned}$$

Alors X_α^3 est l'arc de cercle d'extrémité A et B qui comprend les points dont l'abcisse est strictement inférieure à celle de A. Si on remplace α par $\alpha + \pi$ on obtient l'autre arc de cercle. Donc dans tous les cas, X_α^3 est le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et de B.

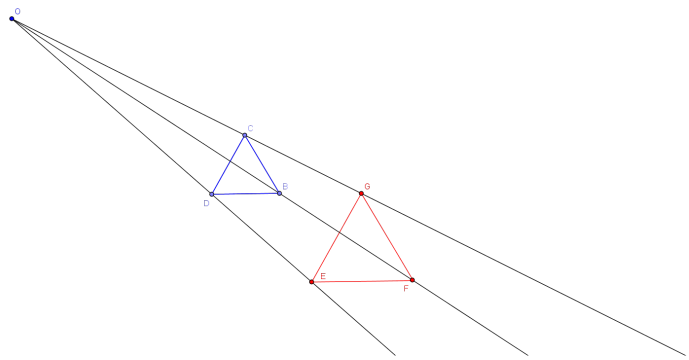

FIGURE 5.1 – Représentation graphique d'une homothétie de centre O

5.6 Transformation remarquables du plan

À toute transformation f du plan, on peut associer une application $\tilde{f} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tous points M et M' d'affixe z et z', $M' = f(M) \iff z' = \tilde{f}(z)$. On dit que f est représentée dans le plan complexe par $\tilde{f}$.

5.6.1 Homothéties et translations

Définition 5.8. Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur d'affixe b, Ω un point d'affixe ω et λ un réel non nul. La translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est définie comme l'application $T\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M'/\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u} \end{array}\right.$ et elle est représentée par $T'\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+b \end{array}\right.$.
L'homothétie de centre Ω de rapport λ est $H\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M'/\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda\overrightarrow{\Omega M} \end{array}\right.$, représentée par $H'\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \lambda(z-\omega)+\omega \end{array}\right.$.

Proposition 5.21. Soient t une translation et h une homothétie de rapport λ, alors

— pour tous point A et B, si $A' = t(A)$ et si $B' = t(B)$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$. On dit que t conserve les distances, t est une isométrie ;
— soient A et B des points, si $A' = h(A)$ et si $B' = h(B)$ alors $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$;
— soit $\mathcal{D}$ une droite, alors $t(\mathcal{D})$ et $h(\mathcal{D})$ sont des droites parallèles à $\mathcal{D}$.

Démonstration. On ne démontre que le troisième point. $\mathcal{D}$ est la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et t est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ alors

$$t(\mathcal{D}) = \left\{M \in \mathcal{P} \;\middle|\; \exists N \in \mathcal{D} \quad \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{u}\right\}. \tag{5.139}$$

Or $N \in \mathcal{D} \iff \exists\alpha \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{v}$, donc

$$\begin{aligned} t(\mathcal{D}) &= \left\{M \in \mathcal{P} \;\middle|\; \exists\alpha \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} - \alpha\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\right\} & (5.140)\\ &= \left\{M \in \mathcal{P} \;\middle|\; \exists\alpha \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\right\}. & (5.141) \end{aligned}$$

Comme $\overrightarrow{At(A)} = \vec{u}$, on peut écrire que

$$t(\mathcal{D}) = \left\{ M \in \mathcal{P} \,\middle|\, \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{t(A)M} = \alpha \vec{v} \right\}. \tag{5.142}$$

L'ensemble $t(\mathcal{D})$ est donc la droite passant par $t(A)$ de vecteur directeur $\vec{v}$, donc elle est parallèle à $\mathcal{D}$.

L'application h est une homothétie de centre Ω et de rapport λ, alors

$$h(\mathcal{D}) = \left\{ M \in \mathcal{P} \,\middle|\, \exists N \in \mathcal{D} \quad \overrightarrow{\Omega M} = \lambda \overrightarrow{\Omega N} \right\} \tag{5.143}$$

$$= \left\{ M \in \mathcal{P} \,\middle|\, \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{\Omega M} = \lambda \overrightarrow{\Omega A} + \lambda \alpha \vec{v} \right\}. \tag{5.144}$$

Comme $\overrightarrow{\Omega h(A)} = \lambda \overrightarrow{\Omega A}$ on peut écrire que

$$h(\mathcal{D}) = \left\{ M \in \mathcal{P} \,\middle|\, \exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{h(A)M} = \lambda \alpha \vec{v} \right\}. \tag{5.145}$$

L'ensemble $h(\mathcal{D})$ est la droite passant par $h(A)$ de vecteur directeur $\vec{v}$ ($\lambda \neq 0$) donc elle est parallèle à $\mathcal{D}$. □

Théorème 5.3 (Théorème de Thalès)**.** *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites sécantes en un point Ω, A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$, A' et B' deux points distincts de $\mathcal{D}'$. Alors*

$$(AA') \parallel (BB') \iff \frac{\overline{\Omega B}}{\overline{\Omega A}} = \frac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega A'}} = \frac{\overline{BB'}}{\overline{AA'}} \tag{5.146}$$

Démonstration. Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\frac{\overline{\Omega B}}{\overline{\Omega A}}$, $h(A) = B$. L'image par h de la droite (AA') est une droite passant par B et parallèle à (AA').

Si (AA') et (BB') sont parallèles, alors la droite (BB') est l'image par h de la droite (AA'). $A' \in \mathcal{D}'$ et $A' \in (AA')$ donc $h(A') \in h(\mathcal{D}') = \mathcal{D}'$ et $h(A') \in h(AA') = (BB')$ ainsi $h(A')$ est le point d'intersection de $\mathcal{D}'$ et de (BB') : $h(A') = B'$. D'où $\frac{\overline{\Omega B}}{\overline{\Omega A}} = \frac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega A'}}$.

Si $\frac{\overline{\Omega B}}{\overline{\Omega A}} = \frac{\overline{\Omega B'}}{\overline{\Omega A'}}$ alors $h(A') = B'$ d'où $h(AA') = (BB')$. Or $h(AA')$ est une droite parallèle à (AA'), donc (AA') est parallèle à (BB'). □

5.6.2 Rotations

Définition 5.9. Soient Ω un point d'affixe ω et $\alpha \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω d'angle α est l'application définie comme

$$R \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ M & \longmapsto & M' \left\| \overrightarrow{\Omega M} \right\| = \left\| \overrightarrow{\Omega M'} \right\| \ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \alpha \pmod{2\pi} \end{array} \right. . \tag{5.147}$$

Elle est représentée dans le plan complexe par $R' \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}(z - \omega) + \omega \end{array} \right.$.

Proposition 5.22. Soient des points A et B, r une rotation telle que $A' = r(A)$, $B' = r(B)$ et $A'B' = AB$. C'est une isométrie.

5.6.3 Similitudes

Une similitude directe est une transformation représenté par une application de la forme $z \longmapsto az+b$ avec a un complexe non nul et b un complexe quelconque. Si $a = 1$ alors c'est une translation de vecteur d'affixe b, sinon il existe un unique point fixe appelé centre noté Ω. Si on note $h = h_{\Omega,|a|}$ $r = r_{\Omega,\operatorname{Arg} a}$ alors $s = r \circ h = h \circ r$.

En particulier, si $|a| = 1$ c'est une rotation, si $a \in \mathbb{R}$, c'est une homothétie de rapport a.

Proposition 5.23. Une similitude directe conserve les angles et les rapports de distances.

Démonstration. Soient une similitude $s : z \longmapsto az + b$ avec $a \neq 0$, les points A_1, A_2, A_3, A_4 tels que $A_1 \neq A_3$ et $A_2 \neq A_4$, on note avec des primes leurs images par s. Alors

$$(\overrightarrow{A_1A_3}; \overrightarrow{A_2A_4}) \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}\right) \pmod{2\pi}, \tag{5.148}$$

et aussi

$$(\overrightarrow{A'_1A'_3}; \overrightarrow{A'_2A'_4}) \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{z'_4 - z'_2}{z'_3 - z'_1}\right) \pmod{2\pi} \tag{5.149}$$

$$\iff (\overrightarrow{A'_1A'_3}; \overrightarrow{A'_2A'_4}) \equiv \operatorname{Arg}\left(\frac{a(z_4 - z_2)}{a(z_3 - z_1)}\right) \pmod{2\pi} \tag{5.150}$$

$$\iff (\overrightarrow{A'_1A'_3}; \overrightarrow{A'_2A'_4}) \equiv (\overrightarrow{A_1A_3}; \overrightarrow{A_2A_4}) \pmod{2\pi}. \tag{5.151}$$

On a aussi

$$\frac{A'_2A'_4}{A'_1A'_3} = \frac{|z'_4 - z'_2|}{|z'_3 - z'_1|} = \frac{|z_4 - z_2|}{|z_3 - z_1|} = \frac{A_2A_4}{A_1A_3}. \tag{5.152}$$

□

Proposition 5.24. Soient $[AB]$ et $[A'B']$ deux segments de longueur non nulle. Il existe une unique similitude directe s telle que $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.

Chapitre 6

Courbes planes paramétrées

Sommaire

Figures

Tableaux

6.1 Préliminaire

6.1.1 Notations et interprétations cinématiques

On fixe pour tout le chapitre un repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ du plan. On identifie le plan à $\mathbb{R}^2$, un point M à ses coordonnées dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, un vecteur $\overrightarrow{u}$ à ses coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$.

Définition 6.1. On appelle arc paramétré la donnée de
— un intervalle réel I ;
— une application $f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$.

On supposera que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$, c'est-à dire-que f est dérivable et sa dérivée est continue. Cela signifie que x et y sont aussi $\mathcal{C}^1$.

6.1.1.1 Notation

Pour tout réel t de I, on considère $f(t) = (x(t), y(t))$ comme un vecteur (le vecteur de coordonnées $(x(t), y(t))$). On notera $M(t)$ le point de coordonnées $(x(t), y(t))$, c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)$. On notera $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = (x'(t), y'(t))$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t) = (x''(t), y''(t))$ lorsque les dérivées et les dérivées secondes existent.

6.1.1.2 Interprétation cinématique

Si $M(t)$ représente la position d'un point mobile au temps, $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t)$ est le vecteur vitesse au temps t, et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t)$ est le vecteur accélération au temps t. On notera $\Gamma = f(I) = \{f(t) \mid t \in I\}$ sa trajectoire. On dit que Γ est la courbe paramétrée par (I, f).

6.1.2 Arcs en coordonnées polaires

Le point $M(t)$ peut être donné par un système de coordonnées polaire $(\rho(t), \theta(t))$. Là encore on suppose que les applications ρ et θ sont au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I. Pour tout réel t de I on a $\overrightarrow{OM}(t) = f(t) = \rho(t)\overrightarrow{u_\theta}(t)$, soit en coordonnées cartésiennes $M(t)(\rho(t)\cos\theta(t); \rho(t)\sin\theta(t))$.

Proposition 6.1. Les applications $\overrightarrow{u}\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & \overrightarrow{u_\theta} \end{array} \right.$ et $\overrightarrow{v}\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \longmapsto & \overrightarrow{v_\theta} \end{array} \right.$ sont dérivables et

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = \overrightarrow{v_\theta} \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = -\overrightarrow{u_\theta}. \tag{6.1}$$

Démonstration. Pour tout réel θ, on peut identifier $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{v_\theta}$ à leur coordonnées, soit

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{u_\theta} = (\cos\theta, \sin\theta)\ \overrightarrow{v_\theta} = (-\sin\theta, \cos\theta). \tag{6.2}$$

Puisque les applications sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et que pour tout réel θ, on a $\sin'\theta = \cos\theta$ et $\cos'\theta = -\sin\theta$. $\square$

6.1.2.1 Calcul du vecteur vitesse

Supposons que f et θ soit de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\begin{aligned}
\forall t \in I \quad \overrightarrow{OM}(t) &= \rho(t)\overrightarrow{u_\theta} = \rho(t)\cos\theta(t)\overrightarrow{i} + \rho(t)\sin\theta(t)\overrightarrow{j} && (6.3)\\
\forall t \in I \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}(t) &= (\rho'(t)\cos\theta(t) - \rho(t)\theta'(t)\sin\theta(t))\overrightarrow{i} && (6.4)\\
&+ (\rho'(t)\sin\theta(t) - \rho(t)\theta'(t)\cos\theta(t))\overrightarrow{j} && (6.5)\\
&= \rho'(t)(\cos\theta(t)\overrightarrow{i} + \sin\theta(t)\overrightarrow{j}) && (6.6)\\
&+ \rho(t)\theta'(t)(-\sin\theta(t)\overrightarrow{i} + \cos\theta(t)\overrightarrow{j}) && (6.7)\\
&= \rho'(t)\overrightarrow{u_\theta} + \rho(t)\theta'(t)\overrightarrow{v_\theta}. && (6.8)
\end{aligned}$$

Tout se passe comme si on dérivait un produit, mais il s'agit ici d'un produit d'une fonction à valeurs réelles par une fonction à valeurs vectorielles, il n'existe pas de théorèmes généraux. Finalement on a :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \rho'\overrightarrow{u_\theta} + \rho\theta'\overrightarrow{v_\theta}. \tag{6.9}$$

6.1.2.2 Calcul de l'accélération

On suppose que ρ et θ sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I. Soit un réel t de I, alors de la même manière que pour le calcul du vecteur vitesse on arrive à

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = (\rho'' - \rho\theta'^2)\overrightarrow{u_\theta} + (2\rho'\theta' + \rho\theta'')\overrightarrow{v_\theta}. \tag{6.10}$$

6.1.3 Calculs utiles

Soient $\overrightarrow{f}: \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array}\right.$ et $\overrightarrow{g}: \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (X(t), Y(t)) \end{array}\right.$ deux applications de classe $\mathcal{C}^1$.

6.1.3.1 Dérivée du produit scalaire

Soit φ: $\left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \overrightarrow{f}(t)\cdot\overrightarrow{g}(t) \end{array}\right.$, alors φ vaut

$$\forall t \in I \quad \varphi(t) = x(t)X(t) + y(t)Y(t). \tag{6.11}$$

Comme φ est la somme de deux fonctions dérivables, elle est dérivable. On calcule

$$\begin{aligned}
\forall t \in I \quad \varphi'(t) &= x'(t)X(t) + x(t)X'(t) + y'(t)Y(t) + y(t)Y'(t) && (6.12)\\
&= \overrightarrow{f'}(t)\overrightarrow{g}(t) + \overrightarrow{f}(t) + \overrightarrow{g'}(t). && (6.13)
\end{aligned}$$

On a bien vérifié

$$(\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{g})' = \overrightarrow{f'}\cdot\overrightarrow{g} + \overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{g'}. \tag{6.14}$$

6.1.3.2 Dérivée de la norme

Soit $\psi_f\colon \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{f}} \end{cases}$. Par composition d'applications dérivables, ψ_f est dérivable en tout instant t où $\overrightarrow{f}(t) \neq \overrightarrow{0}$. En un tel instant t, on a

$$\psi_f'(t) = \frac{2\overrightarrow{f'}(t)\cdot\overrightarrow{f}(t)}{2\sqrt{\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{f}}} = \frac{\overrightarrow{f}(t)\cdot\overrightarrow{f'}(t)}{\left\|\overrightarrow{f}\right\|(t)}. \tag{6.15}$$

On a bien vérifié que

$$\|f\|' = \frac{\overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{f'}}{\left\|\overrightarrow{f}\right\|}. \tag{6.16}$$

6.1.3.3 Dérivée du déterminant

Soit $\Phi\colon \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathrm{Det}(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g}(t)) \end{cases}$. Soit un réel t de I, alors

$$\Phi(t) = x(t)Y(t) - y(t)X(t). \tag{6.17}$$

On voit là que Φ est dérivable sur I, puisque c'est une composée de sommes et produits d'applications qui le sont, et

$$\Phi'(t) = x'(t)Y(t) + x(t)Y'(t) - y'(t)X(t) - y(t)X'(t) \tag{6.18}$$

$$= \mathrm{Det}(\overrightarrow{f'}(t), \overrightarrow{g}(t)) + \mathrm{Det}(\overrightarrow{f}(t), \overrightarrow{g'}(t)). \tag{6.19}$$

On a bien vérifié

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})' = \mathrm{Det}(\overrightarrow{f'}, \overrightarrow{g}) + \mathrm{Det}(\overrightarrow{f}, \overrightarrow{g'}). \tag{6.20}$$

6.2 Arcs paramétrés

On se fixe dans cette partie un arc paramétré (I, f) avec f de classe au moins $\mathcal{C}^1$. On note $\Gamma = f(I)$ et $M(t)$ le point de coordonnées $f(t) = (x(t), y(t))$.

6.2.1 Étude locale

Soit $t_0 \in I$ et $M_0 = f(t_0)$.

Définition 6.2. On dit que l'arc (I, f) est régulier en t_0 (ou encore M_0 est un point régulier) si $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) \neq 0$, alors la courbe Γ admet une tangente au point M_0 dirigée par le vecteur $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$.

Définition 6.3. On dit que l'arc (I, f) est birégulier en $_0$ si les vecteurs $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)$ et $\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t_0)$ ne sont pas colinéaires. La courbe Γ au voisinage de M_0 est du même coté de la tangente en M_0 que le vecteur $\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t_0)$. On dit qu'elle « tourne sa concavité » vers le vecteur accélération.

Proposition 6.2. Le point M_0 est birégulier si et seulement si

$$\operatorname{Det}\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0), \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}(t_0)\right) \neq 0, \tag{6.21}$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$x'(t_0)y''(t_0) - x''(t_0)y'(t_0) \neq 0. \tag{6.22}$$

On peut généraliser la dernière proposition en écrivant que : si on suppose que p et q sont deux entiers les plus petits possibles tels que $p < q$ et $\dfrac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^q\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^q}(t_0)$ ne sont pas colinéaires. $p = \min\left\{k \geq 1 \,\middle|\, \dfrac{\mathrm{d}^k\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^k}(t_0) \neq 0\right\}$ et $q = \min\left\{k \geq p+1 \,\middle|\, \dfrac{\mathrm{d}^k\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^k}(t_0) \text{ n'est pas colinéaire à } \dfrac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t_0)\right\}$. Alors :

— si p est impair et q est pair alors c'est un point birégulier,
— si p et q sont impairs alors c'est un point d'inflexion,
— si p est impair et q est pair alors c'est un point de rebroussement de première espèce,
— si q et p sont pairs alors c'est un point de rebroussement de deuxième espèce.

En pratique, en un point régulier, $x'(t_0)$ ou $y'(t_0)$ est non nul.
— si $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la tangente en M_0 est verticale ;
— si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) = 0$, la tangente en M_0 est horizontale ;
— si $x'(t_0) \neq 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la tangente en M_0 est de pente $\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$.

On est amené à étudier les dérivées de x et de y afin de déterminer les points singuliers éventuels et leur allure, les tangentes horizontales et verticales.

6.2.2 Étude aux bornes

Soit maintenant une borne α de l'intervalle I ($\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$).

6.2.2.1 Limite finie

Si $\lim\limits_{t\to\alpha} x(t) = x_0$ et $\lim\limits_{t\to\alpha} y(t) = y_0$ avec $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, la courbe se rapproche du point M_0 quand t tend vers α, mais sans l'atteindre *a priori*. On étudie l'existence d'une éventuelle tangente à Γ en considérant le rapport $\frac{y(t)-y_0}{x(t)-x_0}$.

— Si $\lim\limits_{t\to\alpha} \frac{y(t)-y_0}{x(t)-x_0} = p \in \mathbb{R}$ alors la courbe admet une tangente de pente p ;
— sinon la limite est infinie et alors la courbe admet une tangente verticale.

6.2.2.2 Branche infinie

On dit que Γ admet une branche infinie quand t tend vers α si $\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|$ tend vers l'infini. En pratique, la courbe présente une branche infinie quand x ou y tend vers l'infini. On considère le vecteur $\frac{\overrightarrow{OM}(t)}{\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|}$ (qui est unitaire). S'il existe un réel θ tel que ce dernier vecteur tend vers $\overrightarrow{u_\theta}$ alors la courbe Γ admet la direction asymptotique de $\overrightarrow{u_\theta}$. En pratique, on étudie la limite du rapport $\frac{y(t)}{x(t)}$; si

sur J_2	transformation
$x \circ \Psi = \mathrm{Id} \quad y \circ \Psi = \mathrm{Id}$	Identité
$x \circ \Psi = \mathrm{Id} \quad y \circ \Psi = -\mathrm{Id}$	Symétrie d'axe (Ox)
$x \circ \Psi = -\mathrm{Id} \quad y \circ \Psi = \mathrm{Id}$	Symétrie d'axe (Oy)
$x \circ \Psi = \mathrm{Id} + a \quad y \circ \Psi = \mathrm{Id} + b$	Translation de vecteur $\overrightarrow{u}(a,b)$
$x \circ \Psi = y \quad y \circ \Psi = x$	Symétrie / première bissectrice
$x \circ \Psi = -y \quad y \circ \Psi = -x$	Symétrie / origine

Tableau 6.1 – Symétries possibles

le rapport tend vers un réel p alors on dit que la courbe Γ admet une direction asymptotique de pente p, sinon la courbe admet une branche asymptotique verticale.

S'il existe une droite $\mathcal{D}$ telle que la limite de la distance entre la courbe est la droite est nulle en $t \to \alpha$, alors la droite $\mathcal{D}$ est asymptote à la courbe en α. Si la courbe admet une asymptote de pente p, on forme alors le terme $y(t) - px(t)$, si sa limite est un réel m en α alors l'asymptote a pour équation $y = px + m$ et si sa limite est infinie alors la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique de pente p mais ce n'est pas une asymptote. Si le rapport a une limite infinie et si x tend vers un réel c alors la courbe admet une asymptote d'équation $x = c$ et si x tend vers l'infini alors la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique verticale.

Le prolongement naturel de cette étude consiste à étudier la positon de la courbe Γ par rapport à l'asymptote Δ. Si l'équation de l'asymptote est $y = px + m$ alors on étudie le signe de $y(t) - px(t) - m$. Si on a une asymptote d'équation $x = c$ alors on étudie le signe de $x(t) - c$.

6.2.3 Étude des symétries

Afin de réduire l'intervalle d'étude, on cherche des symétries de Γ, c'est-à-dire des transformations qui la laissent globalement invariante. Soient J_1 et J_2 deux sous-intervalles de I, $\Psi : J_2 \longmapsto J_1$ une application continue bijective telle que Ψ^{-1} soit continue. On note $\Gamma_1 = (J_1, f_{|J_1})$ et $\Gamma_2 = (J_2, f_{|J_2})$. En pratique Ψ sera de la forme $\Psi(t) = t + \tau$, $\Psi(t) = -t$, $\Psi(t) = \frac{1}{t}$ et le reste. Suivant d'éventuelle formule liant $f(\Psi(A))$ et $f(t)$ on déduit la courbe Γ_2 de la courbe Γ_1 par une bonne transformation, un tableau de ces transformations est donné en table **??**.

6.2.4 Plan d'étude globale

1. Domaine de définition de f : $Df = Dx \cap Dy$
2. Restriction du domaine d'étude par la recherche de symétries
3. Étude des variations de x et y (recherche d'éventuels points singuliers et de tangentes)
4. Étude aux bornes
5. Tracé de la courbe, le morceau étudié complété par symétrie
6. Éventuellement, rechercher les points multiples (c'est-à-dire les points où la courbe se recoupe elle-même). On se place sur un intervalle I avec

TABLEAU 6.2 – Tableau de variations de la courbe paramétrée $\left(\frac{t}{1+t^3}, \frac{t^2}{1+t^3}\right)$

lequel on obtient toute la courbe. On regarde s'il existe $(u, v) \in I^2$ avec $u \neq v$ et $M(u) = M(v)$. On définit particulièrement la notion de point double, ou triple.

6.2.5 Folium de Descartes

Le folium est une courbe paramétrée définie telle que

$$x(t) = \frac{t}{1+t^3} \qquad y(t) = \frac{t^2}{1+t^3} \tag{6.23}$$

Le domaine de définition de cette courbe est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Pour tout réel non nul de D_f on a $x\left(\frac{1}{t}\right) = y(t)$ et $y\left(\frac{1}{t}\right) = x(t)$ alors on peut travailler dans $I =]-1\,;1[$ et on obtiendra le reste par symétrie par rapport à la première bissectrice. Les composantes de la courbe, x et y, sont dérivables sur I et on a pour tout $t \in I$

$$x'(t) = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2} \qquad y'(t) = \frac{t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \tag{6.24}$$

Alors pour tout $t \in I$, on a :

$$x'(t) = 0 \iff t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \qquad y'(t) = 0 \iff t = 0. \tag{6.25}$$

Tous les points sont donc réguliers.

— En $t = 0$, $x(0) = y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$, la tangente est horizontale ;

— en $t = t_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $x(t_0) = \frac{2^{2/3}}{3} \approx 0.53$ et $y(t_0) = \frac{2^{1/3}}{3} \approx 0.42$, la tangente est verticale.

Le tableau de variation de cette courbe paramétrée est donnée par le tableau **??**.

Étude aux bornes : ici les bornes à étudier sont 1 et -1. Si on étudie le comportement de cette courbe en 1, on remarque que $x(1) = y(1) = \frac{1}{2}$ et que $y'(1) = -x'(1) = -\frac{1}{4}$. La tangente est perpendiculaire à la première bissectrice.

L'étude en -1 montre que la courbe admet une branche infinie et si on forme le rapport $\frac{y}{x}$, on trouve qu'il vaut t et tend donc vers -1 en -1. Donc la courbe admet une direction asymptotique de pente -1. La différence $y(t) - px(t)$ avec $p = -1$ vaut pour tout t non nul de I $y(t) + x(t)$ et tend vers $-\frac{1}{3}$ donc la courbe admet une asymptote d'équation $y = -x - \frac{1}{3}$. Puisque le signe de $y(t) + x(t) + \frac{1}{3}$ est toujours positif, l'asymptote est sous la courbe. La représentation graphique du folium est donnée par la figure **??**.

Remarque : soit $\Psi : I \longmapsto \mathbb{R}$ continue et Γ le graphe de Ψ. Γ peut être considérée comme une courbe paramétrée $x(t) = t \quad y(t) = \Psi(t)$. On définit $f \colon \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$. Si Ψ est dérivable alors pour tout réel t de I on a $f'(t) = (1; \Psi'(t))$ alors tous les points sont réguliers. Si Ψ est deux fois dérivable alors f est deux fois dérivable et pour tout réel t de I on a $f''(t) = (0, \Psi''(t))$, alors $\mathrm{Det}(f'(t), f''(t)) = \Psi''(t)$ et donc l'équivalence est vraie

$$t_0 \text{ est un point birégulier} \iff \Psi''(t_0) \neq 0. \tag{6.26}$$

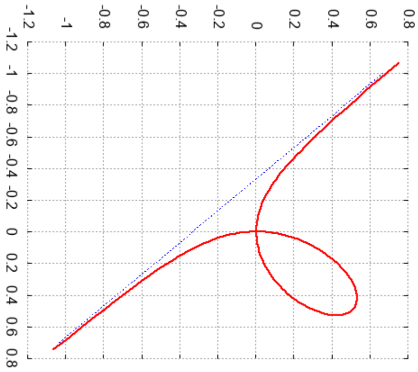

FIGURE 6.1 – Représentation graphique du folium de Descartes

6.3 Courbes en polaires

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, r une application de I vers $\mathbb{R}$ au moins de classe $\mathcal{C}^1$. On considère la courbe définie par l'équation polaire $\rho = r(\theta)$, qu'on étudie comme un arc paramétré par θ. On note $M(\theta)$ le point « courant ».

6.3.1 Étude locale en un point

6.3.1.1 Dérivation

On sait que $\theta(t) = \theta \quad \theta'(t) = 1 \quad \theta''(t) = 0$ alors si r et deux fois dérivable, en appliquant la formule de la section **??** on arrive à

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = r'(\theta)\overrightarrow{u}_\theta + r(\theta)\overrightarrow{v}_\theta; \tag{6.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta) = (r''(\theta) - r(\theta))\overrightarrow{u}_\theta + 2r'(\theta)\overrightarrow{v}_\theta. \tag{6.28}$$

6.3.1.2 Points réguliers

Pour tout réel θ de I,

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = 0 \iff \begin{cases} r'(\theta) = 0 \\ r(\theta) = 0 \end{cases}. \tag{6.29}$$

Tous les points différents du pôle (ou origine) sont réguliers. En un point tel que $r(\theta) \neq 0$, la courbe « tourne autour du pôle dans le sens direct ». Si le rapport $\frac{r'(\theta)}{r(\theta)}$ est négatif (resp. positif) alors $r(\theta)$ se rapproche (resp. s'éloigne) du pôle.

6.3.1.3 Points d'annulation

On suppose ici que θ_0 est un zéro *isolé* de la fonction r, c'est-à-dire $r(\theta_0) = 0$ et il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout réel θ de l'intervalle ouvert $]\theta_0 - \epsilon\,; \theta_0 + \epsilon[\setminus \{\theta_0\}$, on a $r(\theta) \neq 0$

Proposition 6.3 (admise)**.** Soit θ_0 un zéro isolé de la fonction r, alors Γ admet pour tangente en $M(\theta_0)$ la droite $\mathcal{D}_{\theta_0}$. De plus :

1. si r change de signe en θ_0 alors le point est d'allure normale (comme par exemple un cercle qui passe par le pôle) ;
2. si r s'annule sans changer de signe alors le point est un point de rebroussement de première espèce (comme par exemple une cardioïde).

6.3.2 Étude aux bornes

6.3.2.1 Lorsque θ tend vers l'infini

Si la fonction r tend vers zéro lorsque θ tend vers l'infini, alors le point courant tend vers le pôle. Γ n'admet pas d'asymptote et on dit que le pôle est un *point asymptote*.

Si la fonction r tend vers un réel a non nul lorsque θ tend vers l'infini, alors la distance du point courant au cercle $\mathcal{C}(0, |a|)$ tend vers zéro et donc c'est un *cercle asymptote*.

Si par contre la fonction r tend vers l'infini lorsque θ tend vers l'infini, alors la courbe admet une branche infinie sans direction asymptotique, on parle de *branche spirale*.

6.3.2.2 Lorsque θ tend vers θ_0

Si la fonction r tend vers une limite finie, il n'y a rien de particulier. Par contre si la fonction r tend vers l'infini lorsque θ tend vers θ_0, alors la courbe admet une branche infinie de direction asymptotique $\overrightarrow{u}_{\theta_0}$. On analyse s'il y a une asymptote. Pour le faire, on effectue un changement de repère et on se place dans le repère $\mathcal{R}'$ déduit du repère $\mathcal{R}$ par une rotation de centre O et d'angle θ_0. Les coordonnées cartésiennes de $M(\theta)$ dans $\mathcal{R}'$ seront alors

$$M(\theta) \begin{cases} X(\theta) = r(\theta)\cos(\theta - \theta_0) \\ Y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta - \theta_0) \end{cases} . \tag{6.30}$$

Lorsque θ tend vers θ_0, $X(\theta)$ tend vers l'infini et $Y(\theta)$ est une forme indéterminée. Deux cas se présentent :

— si Y tend vers une limite finie L alors la courbe admet une asymptote d'équation $y = L$ dans $\mathcal{R}'$;

— sinon la courbe n'admet pas d'asymptote, le graphe présente une branche parabolique de direction asymptotique $\overrightarrow{u}_{\theta_0}$.

6.3.3 Symétries

On cherche de nouveau à réduire l'intervalle d'étude. Une liste non-exhaustive de transformation est donnée dans la table **??**. Si la fonction r est de période T, alors on peut réduire l'intervalle d'étude.

Hypothèse	Transformation
$r(-\theta) = r(\theta)$	Symétrie / (Ox)
$r(-\theta) = -r(\theta)$	Symétrie / (Oy)
$r(\theta + \alpha) = kr(\theta)$	Similitude directe de centre O d'angle α et de rapport k
$r(\alpha - \theta) = r(\theta)$	Symétrie / droite $\mathcal{D}_{\alpha/2}$
$r(\alpha - \theta) = -r(\theta)$	Symétrie / droite $\mathcal{D}_{\pi/2+\alpha/2}$

Tableau 6.3 – Table des symétries

6.3.4 Points multiples

Le point $M(\theta)$ est un point multiple si et seulement s'il existe $\theta' \neq \theta$ tel que $M(\theta) = M(\theta')$ c'est-à-dire si et seulement si

$$r(\theta) = r(\theta') = 0, \tag{6.31}$$

$$r(\theta) = r(\theta') \quad \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}, \tag{6.32}$$

$$r(\theta) = -r(\theta') \quad \theta \equiv \theta' + \pi \pmod{2\pi}. \tag{6.33}$$

On se placera sur un intervalle, le plus petit possible, qui permet d'obtenir toute la courbe.

6.3.5 Plan d'étude globale

1. Ensemble de définition de la fonction r ;
2. Restriction du domaine d'étude par la recherche de symétries et périodes ;
3. Étude de r : variations, signe, points d'annulation, tangentes remarquables ;
4. Étude aux bornes ;
5. Tracé de la courbe (le morceau étudié puis complétion par symétrie) ;
6. Éventuellement les points multiples.

6.3.6 Exemple

Soit Γ définie par $r(\theta) = \cos\theta + \cos 3\theta$. La fonction r est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. Elle est 2π-périodique, on peut donc restreindre l'étude à $[-\pi\,;\pi]$. Puisque la fonction cosinus est paire, la fonction r est aussi paire, on peut donc encore restreindre le domaine d'étude à $[0\,;\pi]$ et ensuite on complétera la courbe par une symétrie d'axe (Ox). Pour tout réel $\theta \in [0\,;\pi]$ on a $r(\pi - \theta) = -r(\theta)$ alors on peut restreindre l'étude sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$ puis on complète par une symétrie d'axe $\mathcal{D}_{\pi/2+\pi/2}$ c'est-à-dire (Ox). On fait deux fois la même symétrie, cela signifie qu'on obtient toute la courbe pour $\theta \in [0\,;\pi]$. Au final le domaine d'étude est restreint à $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

Soit $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, alors $r(\theta) = \cos\theta + \cos 3\theta = 2\cos(2\theta)\cos\theta$ d'après les transformations produit en somme. Donc

$$r(\theta) = 0 \iff \cos(2\theta) = 0 \text{ ou } \cos\theta = 0 \iff \theta \in \left\{\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right\}. \tag{6.34}$$

La fonction r est dérivable sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Pour tout $\theta \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$, on a

$$r'(\theta) = -\sin\theta - 3\sin(3\theta). \tag{6.35}$$

De plus on sait que $\sin(3\theta) = \Im(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\theta})$ et

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,3\theta} = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta\,\mathrm{i}\sin\theta + 3\cos\theta\,\mathrm{i}^2\sin^2\theta + \mathrm{i}^3\sin^3\theta. \tag{6.36}$$

Ainsi $\sin(3\theta) = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$. En introduisant $\sin^2 = 1 - \cos^2$ dans l'équation et en factorisant, on arrive à

$$r'(\theta) = 2\sin\theta(1 - 6\cos^2\theta). \tag{6.37}$$

Alors

$$r'(\theta) = 0 \iff \sin\theta = 0 \text{ ou } \cos^2\theta = \frac{1}{6} \iff \theta \in \left\{0, \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\right\}. \tag{6.38}$$

— En $\frac{\pi}{4}$, on a $r\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$ et $r'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}$ et donc $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sqrt{2}\vec{u}_{\frac{\pi}{4}}$ La tangente est donc la première bissectrice ;

— en $\theta_0 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, on a $r'(\theta_0) = 0$ et

$$\begin{aligned} r(\theta_0) &= \cos(\theta_0) + \cos(3\theta_0) && (6.39)\\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} + \cos^3\theta_0 - 3\sin^2\theta_0\cos\theta_0 && (6.40)\\ &= \frac{\sqrt{6}}{6}\left(1 + \frac{1}{6} - 3\left(1 - \frac{1}{6}\right)\right) && (6.41)\\ &= -\frac{2\sqrt{6}}{9} && (6.42)\end{aligned}$$

En θ_0, la tangente est perpendiculaire à $(OM(\theta_0))$.

— En 0, $r'(0) = 0$ et $r(0) = 2$ et donc $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}(0) = 2\vec{v}_0 = 2\overrightarrow{j}$, la tangente est parallèle à (Oy) ;

— En $\frac{\pi}{2}$, $r\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $r'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ et donc $\frac{\mathrm{d}\vec{M}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\vec{v}_0 = 2\overrightarrow{j}$, la tangente est parallèle à (Oy).

On trace cette courbe paramétrée sur la figure **??**.

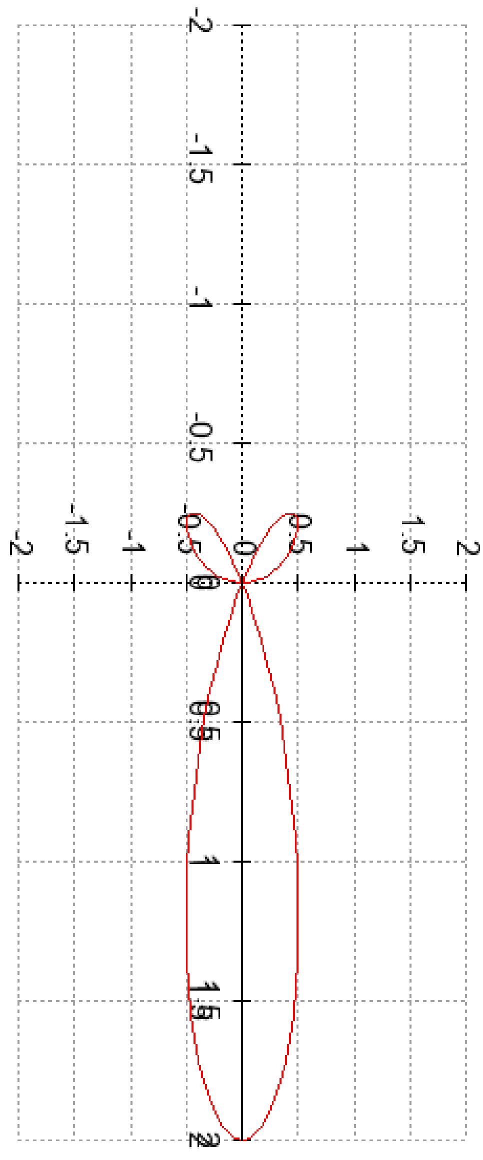

FIGURE 6.2 – Courbe polaire définie par $r(\theta) = \cos\theta + \cos(3\theta)$

Chapitre 7

Coniques

Sommaire

Figures

7.1 Définition monofocale et équation polaire

Soient F un point du plan, $\mathcal{D}$ une droite ne passant pas par F, e un réel strictement positif.

7.1.1 Définition monofocale

Définition 7.1. On appelle conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'excentricité e l'ensemble des points M du plan tels que

$$MF = eMH, \tag{7.1}$$

où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Définition 7.2. On appelle axe focal de la conique $\mathcal{C}_e$ la droite Δ perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$ passant par F.

Proposition 7.1. La conique $\mathcal{C}_e$ est symétrique par rapport à l'axe focal Δ.

Démonstration. On note K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$: $K = D \cap \Delta$. Soit $M \in \mathcal{C}_e$ et H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. Soit M' le symétrique de M par rapport à Δ, H' le projeté orthogonal de M' sur $\mathcal{D}$ (c'est aussi le symétrique de H par rapport à Δ). Alors

$$\frac{M'F}{M'H'} = \frac{MF}{MH} = e, \tag{7.2}$$

donc le point M' appartient à la conique $\mathcal{C}_e$. □

Si on considère l'application φ: $\left\{ \begin{array}{ccc} P \setminus \{\mathcal{D} \cup F\} & \longrightarrow &]0\,;+\infty[\\ M & \longmapsto & \frac{MF}{MH} \end{array} \right.$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, les coniques $\mathcal{C}_e$ de directrice $\mathcal{D}$ sont les lignes de niveau de φ. On cherche les points d'intersection entre $\mathcal{C}_e$ et l'axe Δ. On note K le projeté orthogonal de F sur $\mathcal{D}$. On place l'origine des abscisses en K et on oriente Δ de K vers F, on note $d = KF$.

Soit M sur Δ le point d'abscisse x. Le projeté orthogonal de M sur la directrice $\mathcal{D}$ est le point K, puisque $\mathcal{D}$ et Δ sont orthogonal et se croisent en K. On a alors la suite d'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_e &\iff MF = eMK & (7.3)\\ &\iff MF^2 = e^2MK^2 & (7.4)\\ &\iff (x-d)^2 = e^2x^2 & (7.5)\\ &\iff x^2 + d^2 - 2xd = e^2x^2 & (7.6)\\ &\iff x^2(1-e^2) - 2xd + d^2 = 0. & (7.7) \end{aligned}$$

On distingue deux cas :
- si $e = 1$, alors le point M est sur la conique si et seulement si $x = \frac{d}{2}$. Il y a donc un unique point d'intersection entre la conique $\mathcal{C}_1$ est son axe focal Δ, c'est le milieu de $[KF]$. Cette conique est une parabole ;
- sinon comme $1 - e^2 \neq 0$, on peut calculer le discriminant de ce trinôme qui vaut $(2de)^2$, alors les deux racines réelles du trinôme sont $x_1 = \frac{d}{1+e}$ et $x_2 = \frac{d}{1-e}$. Soient les points d'intersections A_1 et A_2 de $\mathcal{C}_e$ et Δ, d'abscisse respectives x_1 et x_2. Alors $\overrightarrow{KA} = \frac{1}{1+e}\overrightarrow{KF}$ et $\overrightarrow{KA'} = \frac{1}{1-e}\overrightarrow{KF}$. On peut distinguer deux sous-cas :
  - si $e < 1$ alors x_1 et x_2 sont positifs et les deux points A et A' sont du même côté de $\mathcal{D}$ que F. On dira que $\mathcal{C}_e$ est une ellipse ;
  - si $e > 1$ alors A est du même côté que F mais A' est de l'autre, dans ce cas là on dira que $\mathcal{C}_e$ est une hyperbole.

7.1.2 Équation polaire de $\mathcal{C}_e$

On munit le plan de la base orthonormale $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{FK}}{\left\|\overrightarrow{FK}\right\|}$ et où $\overrightarrow{j}$ est tel que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}) = \frac{\pi}{2}$ et $\left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$. On se place dans le repère $\mathcal{R} = (F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Notons $d = FK$, une équation de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}$ est $x = d$ et son équation polaire dans $\mathcal{R}$ est $\rho = \frac{d}{\cos\theta}$. Soient un point M du plan et son système de coordonnées polaires (ρ, θ) : $\overrightarrow{FM} = \rho \overrightarrow{u}_\theta$, alors :

$$M \in \mathcal{C}_e \iff MF = eMH \tag{7.8}$$

$$\iff |\rho| = e\,|d - \rho\cos\theta| \tag{7.9}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = ed - e\rho\cos\theta \\ \text{ou} \\ \rho = e\rho\cos\theta - ed \end{cases} \tag{7.10}$$

$$\iff \begin{cases} \rho = \frac{ed}{1+e\cos\theta} \\ \text{ou} \\ \rho = \frac{-ed}{1-e\cos\theta} \end{cases}. \tag{7.11}$$

On obtient deux équations polaires, mais ces deux équations sont les mêmes : en effet, si (ρ, θ) est un s.c.p. de M alors $\rho = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ et donc en prenant l'opposé $-\rho = \frac{-ed}{1-e\cos(\theta+\pi)}$ et donc $(-\rho, \theta+\pi)$, étant un deuxième s.c.p. de M dans $\mathcal{R}$ vérifie la deuxième équation. Alors :

$$M(\rho, \theta) \in \mathcal{C}_e \iff \rho = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}. \tag{7.12}$$

$\rho = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ est une équation polaire de la conique $\mathcal{C}_e$.

1. Si on oriente la droite (FK) dans l'autre sens on obtient une équation du même type avec un signe négatif ;
2. l'équation est la même pour toutes les valeurs de l'excentricité, mais le domaine dans lequel varie θ dépend de l'excentricité.

7.2 Équations réduites

Soit $\mathcal{C}_e$ la conique de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$, d'excentricité e. On note $d = d(F, \mathcal{D}) > 0$. On pose $p = ed$, p est appelé le paramètre de la conique $\mathcal{C}_e$. On se place dans le ROND $(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ avec $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{KF}}{KF}$. Dans ce repère, $F(0,0), K(-d, 0)$ et soit $M(x, y)$ un point du plan, H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, $H(-d, y)$. Alors :

$$M \in \mathcal{C}_e \iff MF = eMH \tag{7.13}$$

$$\iff MF^2 = e^2 MH^2 \tag{7.14}$$

$$\iff x^2 + y^2 = e^2(x+d)^2. \tag{7.15}$$

7.2.1 Cas de la parabole

Soit S l'unique point d'intersection entre $\mathcal{C}_1$ et Δ. Le point S est le sommet de la parabole, c'est aussi le milieu de $[KF]$, alors $S\left(\frac{-d}{2}\right)$. On adopte un nouveau repère : le ROND $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, si M a pour coordonnées (x, y) dans $(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (X, Y) dans $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ alors $X = x + \frac{d}{2}$ et $Y = y$. Ainsi :

$$M(X,Y) \in \mathcal{C}_1 \iff \left(X - \frac{d}{2}\right)^2 + Y^2 = \left(X + \frac{d}{2}\right)^2 \tag{7.16}$$

$$\iff \left(X - \frac{d}{2}\right)^2 - \left(X + \frac{d}{2}\right)^2 + Y^2 = 0 \tag{7.17}$$

$$\iff Y^2 = 2dX = 2pX, \tag{7.18}$$

puisque $p = ed = d$.

Théorème 7.1. *Soit $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F de directrice $\mathcal{D}$. Il existe un repère orthonormal $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans lequel $\mathcal{P}$ a pour équation $Y^2 = 2pX$, c'est ce qu'on appelle l'équation réduite de la parabole $\mathcal{P}$.*

Réciproquement, si p est un réel strictement positif, l'ensemble des points représentés par l'équation cartésienne $Y^2 = 2pX$ dans un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est une parabole de foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, de directrice $\mathcal{D}$ et d'équation $X = \frac{-p}{2}$. Le nombre p est le paramètre de la parabole. Un paramétrage de la parabole est :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} x(t) = \frac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases} . \tag{7.19}$$

Une parabole est représentée sur la figure **??**.

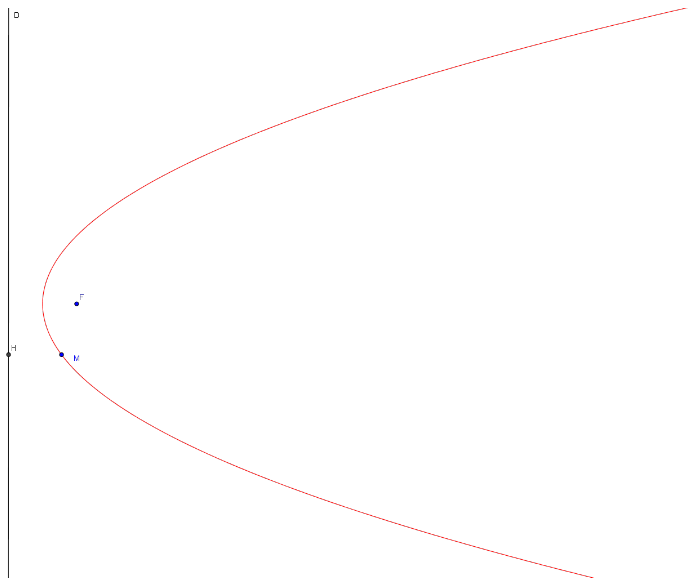

Figure 7.1 – Représentation graphique d'une parabole

7.2.2 Cas des coniques à centre ($e \neq 1$)

Dans ce cas la conique $\mathcal{C}_e$ est son axe focal Δ on deux points d'intersection. Dans le repère $(K, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, ce sont les points $A(\frac{d}{1+e}, 0)$ et $A'(\frac{d}{1-e}, 0)$. Ces deux points sont les sommets de la conique $\mathcal{C}_e$. On définit le milieu O de [AA'] et on se place dans le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Alors $\overrightarrow{KO} = \frac{1}{2}\left(\frac{d}{1+e} + \frac{d}{1-e}\right)\overrightarrow{i} = \frac{d}{1-e^2}\overrightarrow{i}$. Si M a pour coordonnées (x,y) dans $(K, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et (X,Y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ alors puisque $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KM} - \frac{d}{1-e^2}\overrightarrow{i}$ donc $X = x - \frac{d}{1-e^2}$ et $Y = y$. Alors on peut noter les coordonnées dans le nouveau repère :

$$K\left(-\frac{d}{1-e^2}, 0\right)\ F\left(-\frac{de^2}{1-e^2}, 0\right)\ A\left(-\frac{de}{1-e^2}, 0\right)\ A'\left(\frac{de}{1-e^2}, 0\right) \tag{7.20}$$

Soit un point $M(x, y)$ et son projeté sur la directrice $H\left(-\frac{d}{1-e^2}, Y\right)$. Alors :

$$M \in \mathcal{C}_e \iff MF^2 = e^2 MH^2 \tag{7.21}$$

$$\iff \left(X + \frac{de^2}{1-e^2}\right)^2 + Y^2 = e^2\left(X + \frac{d}{1-e^2}\right)^2 \tag{7.22}$$

$$\iff X^2 + \left(\frac{de^2}{1-e^2}\right)^2 + Y^2 = e^2X^2 + e^2\left(\frac{d}{1-e^2}\right)^2 \tag{7.23}$$

$$\iff X^2(1-e^2) + Y^2 = \frac{d^2e^2}{1-e^2} = \frac{p^2}{1-e^2}. \tag{7.24}$$

Alors finalement, on distingue deux sous-cas.

7.2.2.1 Cas des hyperboles ($e > 1$)

Si on pose $a = \frac{p}{e^2-1}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}}$, alors dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ l'équation devient :

$$M(X, Y) \in \mathcal{C}_e \iff \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1 \tag{7.25}$$

Théorème 7.2. *Il existe une repère orthonormal direct dans lequel l'hyperbole admet pour équation cartésienne :*

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1, \tag{7.26}$$

avec a et b des réels strictement positifs

Proposition 7.2.
1. $p = \frac{b^2}{a}$ et $e^2 - 1 = \frac{b^2}{a^2}$;
2. si on pose $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, alors $e = \frac{c}{a}$ $d = \frac{b^2}{c}$;
3. le foyer F a pour coordonnées $(c, 0)$ et la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $X = \frac{a^2}{c}$

Démonstration.
1. $\frac{b^2}{a} = \frac{\frac{p^2}{e^2-1}}{\frac{p}{e^2-1}} = p$ et $\frac{b^2}{a} = \frac{\frac{p^2}{e^2-1}}{\frac{p^2}{(e^2-1)^2}} = e^2 - 1$;
2. $c = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 + e^2 - 1} = e$ puisque $e > 0$ et $d = \frac{p}{e} = \frac{b^2}{a}\frac{a}{c} = \frac{b^2}{c}$;
3. à la base l'abscisse de F est $-\frac{de^2}{1-e^2} = \frac{-pe}{1-e^2} = ae = c$ et l'équation de la courbe est $X = -\frac{d}{1-e^2} = -\frac{p/e}{1-e^2} = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$

□

Théorème 7.3 (Théorème réciproque)**.** *Soient deux réels strictement positifs a et b et $c = \sqrt{a^2+b^2}$, un repère orthonormal $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. La courbe d'équation cartésienne dans R $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole de foyer $F(-c,0)$ et de directrice $\mathcal{D}$ d'équation $X = \frac{a^2}{c}$ d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ et de paramètre $p = \frac{b^2}{a}$.*

L'hyperbole $\mathcal{H}$ est aussi l'hyperbole de foyer $F'(-c,0)$ de directrice $\mathcal{D}'$: $X = -\frac{a^2}{c}$. Les intersections de $\mathcal{H}$ avec l'axe focal sont appelés les sommets de l'hyperbole. Ce sont les points $A(a,0)$ et $A'(-a,0)$.

Proposition 7.3. L'hyperbole $\mathcal{H}$ est la réunion des deux courbes paramétrées suivantes :

$$\Gamma_1 : x(t) = a\cosh(t), y(t) = b\sinh(t) \quad \Gamma_2 : x(t) = -a\cosh(t), y(t) = b\sinh(t) \tag{7.27}$$

Démonstration.
— On démontre dans ce premier point l'inclusion $\Gamma_1 \subset \mathcal{H}$: Soit un point $M(t)(x(t), y(t)) \in \Gamma_1$ alors pour chaque instant $t \in \mathbb{R}$, $\frac{x(t)^2}{a^2} - \frac{y(t)^2}{b^2} = \cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$ donc le point $M(t)$ est sur l'hyperbole.
— On démontre de la même manière l'inclusion $\Gamma_2 \subset \mathcal{H}$
— Démontrons maintenant l'inclusion inverse $\mathcal{H} \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Soit un point $M(x,y)$ sur l'hyperbole, on pose $t = \operatorname{argsinh}\left(\frac{y}{b}\right)$ alors $y = b\sinh(t)$ et puisque le point est sur l'hyperbole on écrit : $\frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} = \cosh(t)$ donc $x^2 = (a\cosh(t))^2$. Si $x \geq 0$ alors $x = a\cosh(t)$ et le point M est sur Γ_1 sinon $x = -a\cosh(t)$ et il est sur Γ_2. Dans tous les cas le point M est dans l'union $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Finalement $\mathcal{H} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. □

Proposition 7.4. L'hyperbole $\mathcal{H}$ admet pour asymptote les droites d'équations $y\frac{b}{a}x$ et $y\frac{-b}{a}x$.

Démonstration. Étudions la courbe paramétrée Γ_1 : lorsque $t \to +\infty$ alors x et y deviennent infinis, il y a donc une branche infinie. Le rapport $\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{b}{a}\tanh(t)$ tend vers $\frac{b}{a}$. Ainsi la courbe admet une direction asymptotique de pente $\frac{b}{a}$ et la différence $y(t) - \frac{b}{a}x(t) = b(\sinh t - \cosh t) = -b\,\mathrm{e}^{-t}$ tend vers 0. Alors la courbe admet bien la droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ pour asymptote. On raisonne de la même manière en $t \to -\infty$ et pour la courbe Γ_2. □

Si $a = b$, on dit que l'hyperbole est équilatère et les asymptotes sont les bissectrices.

7.2.2.2 Cas des ellipses ($e < 1$)

Si on pose $a = \frac{-p}{1-e^2}$ et $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$, alors dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ l'équation devient :

$$M(X,Y) \in \mathcal{C}_e \iff \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \tag{7.28}$$

Théorème 7.4. *Il existe une repère orthonormal direct dans lequel l'ellipse admet pour équation cartésienne :*

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1 \tag{7.29}$$

avec a et b des réels strictement positifs.

Proposition 7.5.

1. $p = \frac{b^2}{a}$ et $1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$;
2. si on pose $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, alors $e = \frac{c}{a}$ et $d = \frac{b^2}{c}$;
3. le foyer F a pour coordonnées $(c, 0)$ et la directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $X = \frac{a^2}{c}$

Démonstration.

1. $\frac{b^2}{a} = \frac{\frac{p^2}{1-e^2}}{\frac{p}{1-e^2}} = p$ et $\frac{b^2}{a^2} = \frac{\frac{p^2}{1-e^2}}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} = 1 - e^2$;
2. $\frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1 - 1 + e^2} = e$ puisque $e > 0$ et $d = \frac{p}{e} = \frac{b^2}{a}\frac{a}{c} = \frac{b^2}{c}$;
3. à la base l'abscisse de F est $-\frac{de^2}{1-e^2} = \frac{-pe}{1-e^2} = ae = c$ et l'équation de la courbe est $X = -\frac{d}{1-e^2} = -\frac{p/e}{1-e^2} = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$

□

Théorème 7.5 (Théorème réciproque)**.** *Soient deux réels strictement positifs a et b et $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, un repère orthonormal $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. La courbe d'équation cartésienne dans R $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse de foyer $F(c, 0)$ et de directrice $\mathcal{D}$ d'équation $X = \frac{a^2}{c}$ d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ et de paramètre $p = \frac{b^2}{a}$.*

Proposition 7.6. L'ellipse $\mathcal{E}$ est la courbe paramétrée suivante :

$$\Gamma : x(t) = a\cos(t), y(t) = b\sin(t). \tag{7.30}$$

7.3 Définition bifocale des coniques à centre

7.3.1 Définition bifocale de l'ellipse

Proposition 7.7. Soient F et F' deux points distincts et a un réel tel que $2a > FF'$. Alors l'ensemble des points M du plan tel que $MF + MF' = 2a$ est une ellipse de foyers F et F'.

Démonstration. Soit O le milieu de $[FF']$ et le vecteur $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{FF'}}{FF'}$ et le vecteur $\overrightarrow{j}$ tel que le repère $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ soit orthonormal direct. Les coordonnées de F et F' sont tels que $F'(c, 0)$ et $F(-c, 0)$. Soit $\epsilon = \{M \in \mathcal{P} \mid MF + MF' = 2a\}$, pour tout point $M(x,y)$,

$$
\begin{aligned}
M \in \epsilon &\iff MF + MF' = 2a && (7.31)\\
&\iff \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a && (7.32)\\
&\iff (x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2 \\
&\quad + 2\sqrt{((x+c)^2+y^2)((x-c)^2+y^2)} = 4a^2 && (7.33)\\
&\iff x^2+c^2+y^2+\sqrt{(x^2+c^2+y^2)^2-4c^2x^2} = 2a^2 && (7.34)\\
&\iff \begin{cases}(x^2+c^2+y^2)^2-4c^2x^2 = (2a^2-(c^2+y^2+x^2))^2\\ x^2+y^2 \leq 2a^2-c^2\end{cases} && (7.35)\\
&\iff \begin{cases}(x^2+c^2+y^2+2a^2-(c^2+y^2+x^2))\\ \times(x^2+c^2+y^2-2a^2+(c^2+y^2+x^2)) = 4c^2x^2\\ x^2+y^2 \leq 2a^2-c^2\end{cases} && (7.36)\\
&\iff \begin{cases}2a^2(2x^2+2y^2+2c^2-2a^2) = 4c^2x^2\\ x^2+y^2 \leq 2a^2-c^2\end{cases} && (7.37)\\
&\iff \begin{cases}(a^2-c^2)x^2+a^2y^2 = (a^2-c^2)a^2\\ x^2+y^2 \leq 2a^2-c^2\end{cases} && (7.38)
\end{aligned}
$$

L'équation (**??**) est justifiée puisque les deux membres sont positifs. Si on pose $b = \sqrt{a^2-c^2}$, $2a > FF' = 2c$ donc $a > c > 0$, alors

$$
\begin{aligned}
M \in \epsilon &\iff \begin{cases}b^2x^2+a^2y^2 = b^2a^2\\ x^2+y^2 \leq a^2+b^2\end{cases} && (7.39)\\
&\iff \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1\\ x^2+y^2 \leq a^2+b^2\end{cases} && (7.40)
\end{aligned}
$$

Si le couple (x,y) vérifie la première équation du système alors $\frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ et $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} \leq 1$ donc $x^2 \leq a^2$ et $y^2 \leq b^2$ et donc $x^2+y^2 \leq a^2+b^2$ ce qui correspond à la deuxième équation du système. Alors $M \in \epsilon \iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ donc ϵ est une ellipse et $c = \sqrt{a^2-b^2} > 0$, ϵ est une ellipse de foyer F et F'. $\square$

Soit $f\colon \begin{cases} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & MF+MF' \end{cases}$, un réel c tel que $2c = FF'$, $\lambda > c$ et l'ensemble $X_\lambda = \{M \in \mathcal{P} \mid f(M) = \lambda\}$ avec pour tout point M du plan $FF' \leq MF + MF'$.

- Si $\lambda < FF'$ alors $X_\lambda = \emptyset$;
- sinon si $\lambda = FF'$ alors $FF' = MF + MF'$ si et seulement si $M \in [F, F']$ soit si et seulement si $X_\lambda = [FF']$;
- sinon si $\lambda > FF'$ alors X_λ est une ellipse de foyer F et F'.

On a représenté une ellipse sur la figure **??**.

7.3.2 Définition bifocale de l'hyperbole

Proposition 7.8. Soient F et F' deux points distincts. Soit a un réel tel que $0 < 2a < FF'$. L'ensemble $\mathcal{H}$ des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ est une hyperbole de foyer F et F'.

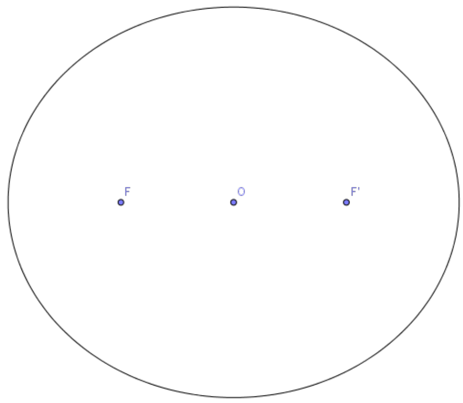

Figure 7.2 – Représentation d'une ellipse

Démonstration. On se place dans le même repère que pour la démonstration de ??. On note $F(-c,0)$ et $F'(c,0)$. Pour tout point $M(x,y)$ on a :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{H} &\iff |MF' - MF| = 2a && (7.41)\\
&\iff \left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a && (7.42)\\
&\iff (x+c)^2+y^2+(x-c)^2+y^2\\
&\qquad -2\sqrt{[(x-c)^2+y^2][(x+c)^2+y^2]} = 4a^2 && (7.43)\\
&\iff 2x^2+2y^2+2c^2-4a^2 = 2\sqrt{[(x-c)^2+y^2][(x+c)^2+y^2]} && (7.44)\\
&\iff \begin{cases}(x^2+y^2+c^2-2a^2)^2 = (x^2+y^2+c^2)^2-4c^2x^2\\ x^2+y^2+c^2-2a^2 \geq 0\end{cases} && (7.45)\\
&\iff \begin{cases}-a^2(x^2+y^2+c^2-a^2)+c^2x^2 = 0\\ x^2+y^2+c^2-2a^2 \geq 0\end{cases} && (7.46)\\
&\iff \begin{cases}(c^2-a^2)x^2-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)\\ x^2+y^2 \geq 2a^2-c^2\end{cases}. && (7.47)
\end{aligned}$$

Or $0 < 2a < FF' = 2c$ donc $0 < a < c$ et on pose $b = \sqrt{c^2-a^2}$, alors

$$M \in \mathcal{H} \iff \begin{cases}b^2x^2-a^2y^2 = a^2b^2\\ x^2+y^2 \geq a^2-b^2\end{cases} \iff \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1\\ x^2+y^2 \geq a^2-b^2\end{cases}. \tag{7.48}$$

Si (x,y) vérifie la première équation alors $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2}+1 > 1$ donc $x^2 \geq a^2$ et $y^2 \geq -b^2$ donc il vérifie l'inégalité $x^2+y^2 \geq a^2-b^2$, alors :

$$M \in \mathcal{H} \iff \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7.49}$$

$\mathcal{H}$ est donc une hyperbole. De plus $c = \sqrt{b^2 + a^2}$ donc F et F' sont les foyers de $\mathcal{H}$. $\square$

Soit l'application $g\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & |MF + MF'| \end{array} \right.$ alors d'après l'inégalité triangulaire $MF \leq MF' + F'F$ et $MF' \leq MF + FF'$ donc $MF - MF' \leq FF$ et $MF' - MF \leq FF'$ ainsi $|MF - MF'| \leq F'F$. Il y a égalité si et seulement si $MF' = MF + FF'$ ou si $MF = MF' + FF'$, c'est-à-dire si et seulement si M est dans $(FF') \setminus]F\,;F'[$. Soit λ un réel, si on considère l'ensemble $Y_\lambda = \{M \in \mathcal{P} \mid g(M) = \lambda\}$ alors plusieurs cas sont possibles :

— si $\lambda > FF'$ alors $Y_\lambda = \emptyset$;
— si $\lambda = FF'$ alors $Y_{FF'} = (FF') \setminus]F\,;F'[$;
— si $0 \leq \lambda \leq FF'$ alors Y_λ est l'hyperbole de foyer F et F' ;
— si $\lambda = 0$ alors Y_0 est la médiatrice de $[FF']$;
— si $\lambda < 0$ alors $Y_\lambda = \emptyset$ puisqu'une valeur absolue ne peut pas être négative.

On a représenté une hyperbole sur la figure **??**.

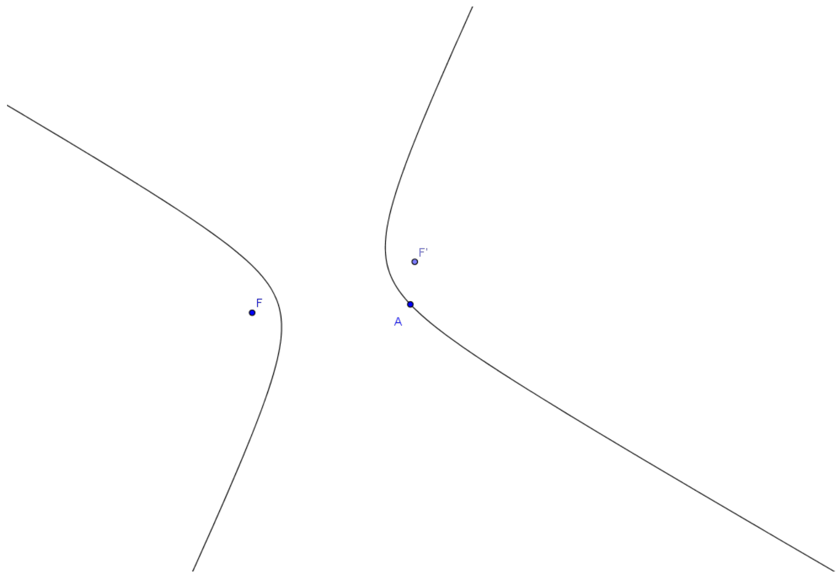

FIGURE 7.3 – Représentation d'une hyperbole

7.4 Courbes définies par une équation cartésienne de degré deux

7.4.1 Problème

On se donne six réels, a, b, c, d, e et f avec a, b, c non tous nuls. On veut décrire la courbe $\mathcal{C}$ définie dans un repère orthonormal par l'équation cartésienne suivante :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{7.50}$$

Un paramètre important de (**??**) est son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. L'idée est de reconnaître l'équation d'une conique par des changements de RON. On doit se débarrasser des termes xy et de degré 1 en x et y.

7.4.2 Étape 1 : si $b \neq 0$, on se ramène par changement de repère à l'équation où $b = 0$

Soit $(\overrightarrow{u_\varphi}, \overrightarrow{v_\varphi})$ la nouvelle BON. On va choisir φ judicieusement pour que l'équation de la courbe $\mathcal{C}$ dans la nouvelle base n'ait pas de termes en xy. Si $M(x, y)$ dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on note $M(X, Y)$ ses coordonnées dans $(O, \overrightarrow{u}_\varphi, \overrightarrow{v}_\varphi)$ alors : $\begin{cases} x &= \cos\varphi X - \sin\varphi Y \\ y &= \sin\varphi X + \cos\varphi Y \end{cases}$ ainsi :

$$ax^2 = a(\cos^2\varphi X^2 + \sin^2\varphi Y^2 - 2\cos\varphi\sin\varphi XY) \tag{7.51}$$
$$bxy = b(\cos\varphi X^2 - \sin\varphi\cos\varphi Y^2 + (\cos^2\varphi\sin^2\varphi)XY) \tag{7.52}$$
$$cy^2 = c(\sin^2\varphi Y^2 + \cos^2\varphi X^2 + 2\cos\varphi\sin\varphi XY) \tag{7.53}$$

alors l'équation (**??**) est équivalente à :

$$\begin{aligned}(a\cos^2\varphi + b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin^2\varphi)X^2 + (a\sin^2\varphi - b\cos\varphi\sin\varphi + c\cos^2\varphi)Y^2 \\ + (2c\cos\varphi\sin\varphi - 2a\cos\varphi\sin\varphi + b(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi))XY + \\ (d\cos\varphi + e\sin\varphi)X + (e\cos\varphi - d\sin\varphi)Y + f = 0\end{aligned} \tag{7.54}$$

c'est à dire qu'il existe six réels A,B,C,D,E et F tels que :

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0 \tag{7.55}$$

avec

$$B = (c - a)\sin(2\varphi) + b\cos(2\varphi). \tag{7.56}$$

Alors

$$B = 0 \iff \operatorname{cotan}(2\varphi) = \frac{a - c}{b}. \tag{7.57}$$

Puisque la cotangente induit une bijection de $]0\,;\pi[$ sur $\mathbb{R}$ alors il existe un certain φ tel que $B = 0$. On choisit maintenant φ tel que $B = 0$. Montrons que $B^2 - 4AC = -4AC = b^2 - 4ac$:

$$\begin{aligned}-4AC &= -4(a\cos^2\varphi + b\cos\varphi\sin\varphi + c\sin^2\varphi)(a\sin^2\varphi &&(7.58)\\ &- b\cos\varphi\sin\varphi + c\cos^2\varphi)\\ &= -4(ac\cos^4\varphi + ac\sin^4\varphi + (a^2 + c^2 - b^2)\cos^2\varphi\sin^2\varphi &&(7.59)\\ &+ (bc - ab)\cos^3\varphi\sin\varphi + (ab - bc)\cos\varphi\sin^3\varphi)\\ &= -4(ac(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 + (a^2 + c^2 - b^2)\cos^2\sin^2\varphi &&(7.60)\\ &+ b(c - a)\cos\varphi\sin\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi))\\ &= -4ac - \sin^2(2\varphi)[(a - c)^2 - b^2] - 2b(c - a)\sin(2\varphi)\cos(2\varphi) &&(7.61)\end{aligned}$$

et puisque $B = 0$, φ vérifie $(c - a)\sin(2\varphi) = -b\cos(2\varphi)$, alors

$$\begin{aligned}-4AC &= -4ac - (a - c)^2\sin^2(2\varphi) + b^2\sin^2(2\varphi) + 2b^2\cos^2(2\varphi) &&(7.62)\\ &= b^2 - 4ac - (a - c)^2\sin^2(2\varphi) + b^2\cos^2(2\varphi) &&(7.63)\\ &= b^2 - 4ac &&(7.64)\end{aligned}$$

7.4.3 Étape 2 : disjonction des cas selon la valeur de Δ

7.4.3.1 $\Delta = 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est du type parabole

C'est à dire que $A = 0$ ou $C = 0$, quitte à faire un changement d'axe on suppose que $C = 0$. Le réel A est non nul sinon $(A, B, C) = (0, 0, 0)$. Alors :

$$AX^2 + DX + EY + F = 0 \iff A\left(X + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{AD^2}{4A^2} + EY + F = 0 \quad (7.65)$$

on pose $\begin{cases} X' = X + \frac{D}{2A} \\ Y' = Y \end{cases}$ et $F' = F - \frac{D^2}{4A}$(on change d'origine) et on a :

$$AX'^2 + EY' + F' = 0. \quad (7.66)$$

Plusieurs cas sont possibles :
- si $E \neq 0$ alors $Y' = -\frac{A}{E}X'^2 - \frac{F'}{E}$ et donc la courbe $\mathcal{C}$ est une parabole ;
- sinon alors $AX'^2 + F' = 0$
  - si $\frac{F'}{A} > 0$ alors $\mathcal{C} = \emptyset$;
  - sinon si $F' = 0$ alors $X' = 0$ et $\mathcal{C}$ est une droite ;
  - sinon si $\frac{F'}{A} < 0$ alors $X' = \pm\sqrt{\frac{-F'}{A}}$, et $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites parallèles.

7.4.3.2 $\Delta > 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est du type hyperbole

Dans ce cas on a $AC < 0$ et quitte à changer l'équation en son opposée, on peut supposer que $A > 0$ et $C < 0$. Alors l'équation (**??**) est équivalente à :

$$A\left(X + \frac{D}{2A}\right)^2 - A\frac{D^2}{4A^2} + C\left(Y + \frac{E}{2C}\right)^2 - C\frac{E^2}{4C^2} + F = 0, \quad (7.67)$$

puis en effectuant le changement de variable

$$\begin{cases} X' = X + \frac{D}{2A} \\ Y' = Y + \frac{E}{2C} \end{cases}, \quad (7.68)$$

alors on obtient (en posant $F' = F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C}$) :

$$AX'^2 + CY'^2 + F' = 0. \quad (7.69)$$

Deux cas sont alors possibles :
- si $F' = 0$ alors $X' = \pm\sqrt{\frac{-C}{A}}$ et la courbe $\mathcal{C}$ est la réunion de deux droites sécantes d'équation $X' = \sqrt{\frac{-C}{A}}$ et $X' = -\sqrt{\frac{-C}{A}}$;
- sinon alors $\frac{-C}{F'}Y^2 - \frac{A}{F'}X^2 = 0$ et $\mathcal{C}$ est une hyperbole dont les asymptotes sont les droites précédentes.

7.4.3.3 $\Delta < 0$, la courbe $\mathcal{C}$ est du type ellipse

Dans ce cas on a $AC < 0$ et quitte à changer l'équation en son opposée, on peut supposer que $A > 0$ et $C > 0$. Alors l'équation (**??**) est équivalente à :

$$A\left(X + \frac{D}{2A}\right)^2 - A\frac{D^2}{4A^2} + C\left(Y + \frac{E}{2C}\right)^2 - C\frac{E^2}{4C^2} + F = 0. \quad (7.70)$$

En effectuant le changement de variable

$$\begin{cases} X' = X + \frac{D}{2A} \\ Y' = Y + \frac{E}{2C} \end{cases}, \tag{7.71}$$

on choisit une nouvelle origine $\Omega\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$. Alors on obtient (en posant $F' = F - \frac{D^2}{4A} - \frac{E^2}{4C}$) :

$$AX'^2 + CY'^2 + F' = 0. \tag{7.72}$$

Trois cas sont alors possibles :
- si $F' > 0$ alors $\mathcal{C} = \emptyset$;
- si $F' = 0$ alors $X' = Y' = 0$ et donc $\mathcal{C} = \{\Omega\}$;
- sinon $\frac{A}{-F'}X'^2 + \frac{C}{-F'}Y'^2 = 1$ et :
  - si $A = C$ alors $\mathcal{C}$ est un cercle ;
  - sinon alors $\mathcal{C}$ est une ellipse.

On parle de conique propre pour l'ellipse, l'hyperbole et la parabole ; sinon on parle de conique dégénérée pour le cercle et les droites.

7.5 Tangentes à une conique

7.5.1 Conique définie par une équation cartésienne

Soient a, b, c, d, e et f six réels avec a, b, c non tous nuls et $\mathcal{C}$ la conique d'équation :

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{7.73}$$

On suppose de plus que $\mathcal{C}$ est une conique propre. Nous avons vu dans la section **??** que $\mathcal{C}$ peut être paramétrées par (I, x, y) avec x et y dérivables. Nous rappelons que les équations étaient dans un bon repère telles que :
- pour une parabole on a $\begin{cases} x(t) &= \frac{t^2}{2p} \\ y(t) &= t \end{cases}$;
- pour une ellipse on a $\begin{cases} x(t) &= a\cos t \\ y(t) &= b\sin t \end{cases}$;
- et pour l'hyperbole $\begin{cases} x(t) &= \pm a\cosh t \\ y(t) &= \sinh t \end{cases}$.

On a aussi vu dans la section **??** que n'importe quelle conique admettait une équation cartésienne de degré deux telle que :

$$\forall t \in I \quad ax(t)^2 + bx(t)y(t) + cy(t)^2 + dx(t) + ey(t) + f = 0 \tag{7.74}$$

Les fonctions x et y sont dérivables, alors si on dérive cette équation on a :

$$\forall t \in I \quad x'(t) + [2ax(t) + by(t) + d] + y'(t) + [2cy(t) + bx(t) + e] = 0 \tag{7.75}$$

Montrons que si (x_0, y_0) est un point de la courbe $\mathcal{C}$ alors $(2ax_0 + by_0 + d, 2cy_0 + bx_0 + e) \neq (0, 0)$.

Démonstration. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan qui vérifie le système suivant $\begin{cases} 2ax_0 + by_0 + d &= 0 \\ 2cy_0 + bx_0 + e &= 0 \end{cases}$. Si on pose les points $M(x, y)$ et $M'(2x_0 - x, 2y_0 - y)$

alors après le développement des calculs on a :

$$\begin{aligned}a(2x_0-x)^2+b(2x_0-x)+c(2y_0-y)^2+d(2x_0-x)+e(2y_0-y)+f\\ =ax(t)^2+bx(t)y(t)+cy(t)^2+dx(t)+ey(t)+f\end{aligned} \tag{7.76}$$

Alors $M \in \mathcal{C} \iff M' \in \mathcal{C}'$. Un tel point serait un centre de symétrie de $\mathcal{C}$. Deux cas sont possibles :

— Si $\mathcal{C}$ est une parabole, un tel point n'existe pas ;

— sinon M_0 existe mais n'est pas sur $\mathcal{C}$.

En conclusion si un point $M_0(x_0, y_0)$ est sur $\mathcal{C}$ alors $2ax_0+by_0+d \neq 0$ ou $2cx_0+dy_0+e \neq 0$. $\square$

Par conséquent, en un point $M_0(x_0, y_0)$ la conique $\mathcal{C}$ admet une tangente T orthogonale à $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}2ax_0+by_0+d\\ 2cy_0+bx_0+e\end{pmatrix}$ alors :

$$M \in (T) \iff \overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{u}=0 \tag{7.77}$$

$$\iff (x-x_0)(2ax_0+by_0+d)+(y-y_0)(2cy_0+bx_0+e)=0 \tag{7.78}$$

$$\iff 2axx_0+b(xy_0+yx_0)+2cyy_0+dx+ey-\alpha=0 \tag{7.79}$$

avec

$$\alpha = 2ax_0^2+2bx_0y_0+2cy_0^2+dx_0+ey_0=-2f-dx_0-ey_0, \tag{7.80}$$

puisque le point M_0 est sur la conique. Alors

$$M \in (T) \iff 2axx_0+b(xy_0+x_0y)+2cyy_0+dx+e_y+dx_0+ey_0+2f=0. \tag{7.81}$$

On dit que l'équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ est obtenue à partir de l'équation de $\mathcal{C}$ par la règle du dédoublement. En pratique $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$ alors la tangente en un point (x_0, y_0) est telle que

$$\frac{1}{a^2}(2xx_0)+\frac{1}{b^2}(2yy_0)=2 \iff \frac{1}{a^2}(xx_0)+\frac{1}{b^2}(yy_0)=1. \tag{7.82}$$

7.5.2 Coniques définies par une équation polaire

Soit $\mathcal{C}$ la conique d'équation polaire $\rho=\frac{p}{1+e\cos\theta}$ avec $e>0$ et $p=ed>0$. la fonction ρ est dérivable. La tangente en un point M_θ de coordonnées polaires $(\rho(\theta), \theta)$ est dirigée par le vecteur $\rho'(\theta)\overrightarrow{u}_\theta+\rho(\theta)\overrightarrow{v}_\theta$ et on a :

$$\forall\theta\in\mathbb{R} \quad \rho'(\theta)=\frac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}, \tag{7.83}$$

alors

$$\rho'(\theta)\overrightarrow{u}_\theta+\rho(\theta)\overrightarrow{v}_\theta=\frac{p}{(1+e\cos\theta)^2}\overrightarrow{w}_\theta, \tag{7.84}$$

avec $\vec{w}_\theta = e\sin\theta\vec{u}_\theta + (1+e\cos\theta)\vec{v}_\theta$ le vecteur directeur de la tangente T. Dans le repère $(O, \vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$ soit $M(X,Y)$, alors

$$M \in T \iff \operatorname{Det}(\overrightarrow{M_\theta M}, \vec{w}_\theta) = 0 \tag{7.85}$$
$$\iff \begin{vmatrix} X-\rho(\theta) & e\sin\theta \\ Y & 1+e\cos\theta \end{vmatrix} = 0 \tag{7.86}$$
$$\iff X(1+e\cos\theta) - \rho(\theta)(1+e\cos\theta) - e\sin\theta Y = 0 \tag{7.87}$$
$$\iff (1+e\cos\theta)X - e\sin\theta Y = p. \tag{7.88}$$

Si on note les coordonnées de $M(x,y)$ dans le repère initial $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors

$$M \in T \iff (1+e\cos\theta)(\cos\theta x + \sin\theta y) - e\sin\theta(-\sin\theta x + \cos\theta y) = p \tag{7.89}$$
$$\iff (e+\cos\theta)x + \sin\theta y = p. \tag{7.90}$$

7.5.3 Caractérisation géométrique des tangentes à une conique

7.5.3.1 Cas de la parabole

Proposition 7.9. Soient $\mathcal{P}$ une parabole de foyer F et de directrice $\mathcal{D}$, un point M de $\mathcal{P}$ et son projeté orthogonal H sur $\mathcal{D}$. Ainsi la tangente à $\mathcal{P}$ en M est la médiatrice du segment $[FH]$.

Démonstration. On se place dans le repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $y^2 = 2px$, alors $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et $\mathcal{D}\ : x = -\frac{p}{2}$. Soit $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{P}$, l'équation de la tangente à $\mathcal{P}$ en M_0 est $yy_0 = p(x+x_0)$. Soit I le point d'intersection de T avec (Oy) alors l'ordonnée du point I vaut $p\frac{x_0}{y_0} = \frac{y_0^2}{2y_0} = \frac{y_0}{2}$. Les coordonnées du point H sont $H\left(\frac{-p}{2}, y_0\right)$ et celle du foyer sont bien sûr $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$. Le point I est donc le milieu de $[HF]$ or $M_0 \in \mathcal{P}$ donc $M_0H = M_0F$ donc $(M_0I) = T$ est la médiatrice de $[HF]$. □

Remarque : le point M_0 de la démonstration est confondu avec I si et seulement si $M_0 = O$ et alors dans ce cas $T = (Oy)$ et c'est encore la médiatrice de $[HF]$.

7.5.3.2 Cas de l'ellipse

Proposition 7.10. Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de foyer F et F'. Soit M un point de l'ellipse. La tangente T en M à l'ellipse est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$.

Démonstration. Soient $(I, f(t))$ un paramétrage de l'ellipse avec f une application dérivable et les applications $h = \left\|\overrightarrow{F'M}\right\|$ $g = \left\|\overrightarrow{FM}\right\|$. On sait que $g+h = 2a$ avec $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{F'M}$ tous deux non nuls (puisqu'on sait que les foyers ne sont pas sur l'ellipse). Alors g et h sont dérivables. Soit un réel t, alors :

$$g'(t) + h'(t) = 0; \tag{7.91}$$

$$\overrightarrow{FM}(t) = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OM}(t), \quad \overrightarrow{F'M}(t) = \overrightarrow{F'O} + \overrightarrow{OM}(t); \tag{7.92}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{FM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{F'M}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}. \tag{7.93}$$

Alors pour tout $t \in I$

$$0 = g'(t) + h'(t) = \frac{\overrightarrow{FM} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}{\left\|\overrightarrow{FM}(t)\right\|} \frac{\overrightarrow{F'M} \cdot \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}}{\left\|\overrightarrow{F'M}(t)\right\|} = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}. \tag{7.94}$$

Le vecteur $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ est orthogonal au vecteur $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}$ unitaire qui dirige (FM) et $\overrightarrow{v}$ unitaire qui dirige $(F'M)$, donc $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ dirige la bissectrice intérieure de $\widehat{F'MF}$. Alors T est la droite passant par M de vecteur normal $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$, donc T est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$. $\square$

7.5.3.3 Cas de l'hyperbole

Proposition 7.11. Soient $\mathcal{H}$ une hyperbole de foyers F et F', M un point de $\mathcal{H}$. La tangente T à $\mathcal{H}$ en M est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$.

Démonstration. Soit (I, f) un paramétrage d'une des deux branches de l'hyperbole avec f dérivable. Soient les applications $h = \left\|\overrightarrow{F'M}\right\|$ $g = \left\|\overrightarrow{FM}\right\|$. On sait que pour tout point M de l'hyperbole, $|MF' - MF| = 2a$. De plus, si on se place sur une des deux branche alors $MF' - MF$ est constant. Comme pour l'ellipse, les foyers n'appartiennent à l'hyperbole, donc $\overrightarrow{FM}(t)$ et $\overrightarrow{F'M}(t)$ sont toujours non nuls. Les fonction g et h sont ainsi dérivables sur I et de manière analogue à l'ellipse on a :

$$\forall t \in I \quad 0 = g'(t) - h'(t) = (\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t). \tag{7.95}$$

Le vecteur vitesse $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ est orthogonal au vecteur $(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}$ unitaire qui dirige (FM) et $\overrightarrow{v}$ unitaire qui dirige $(F'M)$, donc $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ dirige la bissectrice extérieure de $\widehat{F'MF}$. Alors T est la droite passant par M de vecteur normal $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, donc T est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{F'MF}$. $\square$

Chapitre 8

Géométrie élémentaire de l'espace

Sommaire

8.1 Modes de repérage dans l'espace

Soit $\mathcal{E}$ l'espace géométrique euclidien. On munit $\mathcal{E}$ d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

8.1.1 Coordonnées cartésiennes

Définition 8.1. Soit M un point de l'espace $\mathcal{E}$. Il existe un unique triplet $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, ce sont les coordonnées cartésiennes du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Réciproquement pour tout triplet (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ il existe un unique point M de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$

Ainsi la donnée d'un repère cartésien de l'espace permet de définir une bijection entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{E}$.

Changement de repère en coordonnées cartésiennes Soient $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $\mathcal{R}' = (\Omega, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ deux repères cartésiens. Dans $\mathcal{R}$ $\Omega(x_0, y_0, z_0)$ et les vecteurs $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ $\overrightarrow{v}(a', b', c')$ et $\overrightarrow{w}(a'', b'', c'')$. Soit M un point de l'espace. On note (x_0, y_0, z_0) ses coordonnées dans $\mathcal{R}$ et (X, Y, Z) ses coordonnées dans $\mathcal{R}'$. D'une part :

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}, \tag{8.1}$$

et d'autre part :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}. \tag{8.2}$$

Alors par unicité des coordonnées dans $\mathcal{R}$ on a :

$$\begin{cases} x = x_0 + aX + a'Y + a''Z \\ y = y_0 + bX + b'Y + b''Z \\ z = z_0 + cX + c'Y + c''Z \end{cases}. \tag{8.3}$$

⚠Ces formules donnent les « anciennes » coordonnées en fonction des « nouvelles ».

8.1.2 Coordonnées cylindriques

Pour tout réel φ on définit $\begin{cases} \overrightarrow{u}_\varphi = \cos\varphi\overrightarrow{i} + \sin\varphi\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{v}_\varphi = -\sin\varphi\overrightarrow{i} + \cos\varphi\overrightarrow{j} \end{cases}$. Soit un point M de l'espace de coordonnées (x, y, z) et P le projeté orthogonal de M sur le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, $P(x, y, 0)$. Soit (r, φ) un système de coordonnées polaires de P, alors $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{u}_\varphi$ et donc $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_\varphi + z\overrightarrow{k}$.

Définition 8.2. Soit M un point de l'espace $\mathcal{E}$, on appelle système de coordonnées cylindriques de M dans $\mathcal{R}$ tout triplet de réels (r, φ, z) avec $r > 0$ tel que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_\varphi + z\overrightarrow{k}$. Alors $\overrightarrow{OM} = r\cos\varphi\overrightarrow{i} + r\sin\varphi\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$, on peut retrouver les coordonnées cartésiennes. On a $r = OP$, l'unicité de z est claire car c'est la conséquence de l'unicité des coordonnées cartésiennes.

- Si $M \notin (Oz)$ alors $P \neq 0$ et donc $\varphi \equiv \widehat{(\overrightarrow{i}; \overrightarrow{OP})} \pmod{2\pi}$;
- par contre si $M \in (Oz)$ alors on définit le repère cylindrique associé à M, $(0, \overrightarrow{u}_\varphi, \overrightarrow{v}_\varphi, \overrightarrow{k})$ et c'est un repère orthonormal direct de l'espace.

Remarque : Soit $r_0 > 0$, l'ensemble des points M de l'espace dont un système de coordonnées cylindrique est (r_0, φ, z) lorsque (φ, z) varie dans $\mathbb{R}^2$ est un cylindre de rayon r_0 d'axe (Oz) d'où le nom de coordonnées cylindriques.

8.1.3 Coordonnées sphériques

On conserve les notations de la sous-section **??**. On sait que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_\varphi + z\overrightarrow{k}$, donc si on note $\rho = OM$ on a $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$.

— Si le point M est différent de l'origine alors $\rho > 0$ et $\frac{r^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2} = 1$; alors il existe $\theta \in [0\,;2\pi]$ tel que $\begin{cases} r = \rho\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$ on a $r \geq 0$ et $z \geq 0$ donc on peut choisir $\theta \in [0\,;\pi]$ et on a $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}_{\varphi,\theta}$ où $\overrightarrow{u}_{\varphi,\theta} = \sin\theta\overrightarrow{u}_\varphi + \cos\theta\overrightarrow{k}$.

— Si le point M est l'origine alors $\rho = r = z = 0$, on peut prendre n'importe quel $\theta \in [0\,;\pi]$ et on a encore $\begin{cases} r = \rho\sin\theta \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$.

Définition 8.3. Étant donné un point M de l'espace, on appelle système de coordonnées sphérique de M tout triplet $(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R} + \times\mathbb{R} \times [0\,;\pi]$ tel que $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}_{\varphi,\theta}$. On appelle r la rayon, θ la colatitude ($\frac{\pi}{2} - \theta$ est la latitude) et φ la longitude.

Alors $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u}_{\varphi,\theta} = \rho\sin\theta\cos\varphi\overrightarrow{i} + \rho\sin\theta\sin\varphi\overrightarrow{j} + \rho\cos\theta\overrightarrow{k}$. On peut retrouver les coordonnées cartésiennes à partir des coordonnées cylindriques grâce à :

$$\begin{cases} x &= \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z &= \rho\cos\theta \end{cases} \quad \begin{cases} r &= \rho\sin\theta \\ \varphi &= \varphi \\ z &= \rho\cos\theta \end{cases}. \tag{8.4}$$

On a $\rho = OM$ et si M est différent de l'origine alors θ est la mesure de l'angle non-orienté $(\overrightarrow{z}, \overrightarrow{OM})$ dans l'espace (défini de manière unique dans $[0\,;\pi]$).

— Si le point M est sur l'axe (Oz) alors l'angle φ est unique modulo 2π : $\varphi \equiv (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}$;

— par contre si le point M n'est pas sur cet axe alors on définit le repère sphérique attaché à M, c'est le ROND $(O, \overrightarrow{u}_{\varphi,\theta}, \overrightarrow{v}_{\varphi,\theta}, \overrightarrow{w}_{\varphi,\theta})$ où $\overrightarrow{v}_{\varphi,\theta} = \overrightarrow{v}_\varphi$ et $\overrightarrow{w}_{\varphi,\theta} = -\cos\theta\overrightarrow{u}_\varphi + \sin\theta\overrightarrow{k}$.

Remarque : Soit $\rho_0 > 0$, l'ensemble des points M de l'espace $\mathcal{E}$ dont un système de coordonnées sphérique est $(\rho_0, \varphi, \theta)$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$ et $\theta \in [0\,;\pi]$ est la sphère de centre O et de rayon r_0 (d'où le nom de coordonnées sphériques).

8.2 Produit scalaire

8.2.1 Définition géométrique

Définition 8.4. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. On définit le réel $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$ appelé *produit scalaire* des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par :

— Si $\overrightarrow{u} = 0$ ou $\overrightarrow{v} = 0$ on pose $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$;

— si $\overrightarrow{u} \neq 0$ ou $\overrightarrow{v} \neq 0$ on pose $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

Proposition 8.1. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \iff \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}. \tag{8.5}$$

Démonstration. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace, alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} &\iff \overrightarrow{u} = 0 \text{ ou } \overrightarrow{v} = 0 \text{ ou } (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \frac{\pi}{2} && (8.6)\\ &\iff \overrightarrow{u} = 0 \text{ ou } \overrightarrow{v} = 0 \text{ ou } \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = 0 && (8.7)\\ &\iff \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0. && (8.8) \end{aligned}$$

□

Remarque : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Si on se place dans le plan qui contient ces deux vecteurs, on comprend que la définition du produit scalaire dans le plan coïncide avec la définition du produit scalaire dans l'espace.

8.2.2 Propriétés algébriques

Proposition 8.2. Pour tous vecteur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, et $\overrightarrow{w}$ de l'espace $\mathcal{E}$ et pour tout réel λ on a :

1. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}$, c'est la symétrie ;
2. $\overrightarrow{u} \cdot (\lambda \overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$, c'est la linéarité à gauche ;
3. $(\lambda \overrightarrow{u}) \cdot \overrightarrow{v} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})$ et $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w}$, c'est la linéarité à droite ;
4. $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$.

Démonstration. La démonstration est donnée au chapitre **??**. □

Proposition 8.3. Soit $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une BOND de l'espace et $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans cette BON. Alors :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'. \tag{8.9}$$

Démonstration. De la même manière que pour la proposition **??**, la démonstration est la même qu'au chapitre **??**. □

Distance de deux points dans un repère orthonormal : Soit $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ un ROND et deux points de l'espace $A(a, b, c)$ et $B(a', b', c')$ dans $\mathcal{R}$ alors $AB = \sqrt{(a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2}$ puisque $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = AB^2$.

8.3 Produit vectoriel

8.3.1 Définition géométrique

Il y a plusieurs façons de définir le produit vectoriel :

— on peut le définir *en coordonnées*, c'est-à-dire en écrivant ses coordonnées en fonction de celle de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans une BOND ;

— on peut aussi le définir de manière théorique à partir du déterminant ;

— on peut finalement le définir de façon géométrique qu'on effectuera ici (selon les indications du programme).

Dans ce chapitre, on admet certains résultats concernant le produit vectoriel.

Proposition 8.4 (admise)**.** Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de l'espace non colinéaires. Il existe un troisième vecteur $\overrightarrow{w}$ directement orthogonal au plan engendré par les deux premiers vecteurs. De plus les vecteurs directement orthogonaux à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont alors engendrés par $\overrightarrow{w}$, c'est-à-dire qu'ils sont tous colinéaires à $\overrightarrow{w}$.

Définition 8.5. Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ de l'espace. On définit le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ appelé produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par :
— si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 0$;
— sinon $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est l'unique vecteur directement orthogonal à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de norme égale à $\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$.

8.3.1.1 Remarque

Notons que si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires alors en particulier ils sont non nuls et donc $\|\overrightarrow{u}\| > 0$, $\|\overrightarrow{v}\| > 0$ et $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) \in]0 ; \pi[$. Ainsi $\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) > 0$. La quantité $\|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ est donc positive.

Proposition 8.5. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{E}$, alors :

1. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \perp (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$;
2. $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 0 \iff \overrightarrow{u} \& \overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

Démonstration. 1. si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = O$ est orthogonal à tout vecteur ; sinon, c'est la définition.

2. $\Longleftarrow$ C'est la définition.
$\Longrightarrow$ Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, on a vu que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ possède une norme strictement positive donc il n'est pas nul. □

8.3.1.2 Interprétation géométrique

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires, $\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|$ est l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs. Si ABC est un triangle non plat, alors $\frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \right\|$ est son aire.

Proposition 8.6. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une BON de l'espace, alors :

$$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) \text{ est directe } \iff \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} \tag{8.10}$$

$$(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}) \text{ est indirecte } \iff \overrightarrow{k} = -\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}. \tag{8.11}$$

Démonstration. En effet, on a $\left\| \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} \right\| = 1$ et on sait que $\overrightarrow{k}$ est orthogonal à $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ de norme 1, donc $\overrightarrow{k} = \pm \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}$. □

8.3.2 Propriétés algébriques

Proposition 8.7. Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ de l'espace $\mathcal{E}$ et tout réel λ on a :

1. l'antisymétrie : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$;
2. la linéarité à droite : $\overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w}$;
3. la linéarité à gauche : $(\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{w} + \lambda\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w}$.

Proposition 8.8. Si deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux, alors :

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|\,. \tag{8.12}$$

Démonstration. Si l'un des deux vecteur est nul, alors c'est trivial ; sinon ils sont orthogonaux et non nuls et donc non colinéaires et $\sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 1$. □

Proposition 8.9. Soit deux vecteurs quelconques $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, alors :

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{v}\|^2\,. \tag{8.13}$$

Démonstration.

1. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors soit $\overrightarrow{u} = 0$ soit il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ si et seulement s'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ ou qu'il existe un autre réel μ tel que $\overrightarrow{v} = \mu\overrightarrow{u}$. Quitte à intervertir $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on peut supposer qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$. Alors :

$$\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2 + (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v})^2 = 0 + \lambda^2 \|\overrightarrow{u}\|^4 \tag{8.14}$$
$$= \|\lambda\overrightarrow{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{u}\|^2 \tag{8.15}$$
$$= \|\overrightarrow{u}\|^2 \cdot \|\overrightarrow{v}\|^2 \tag{8.16}$$

2. S'ils ne sont pas colinéaires, alors ils sont tous les deux non nuls et donc puisque $\sin^2 + \cos^2 = 1$ on a bien l'égalité.

□

Proposition 8.10. Soit $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une BOND, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') dans cette base. Alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ a pour coordonnée $(yz' - y'z, x'z - xz', xy' - yx')$

Démonstration. Puisque $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{v} = x'\,\overrightarrow{i} + y'\,\overrightarrow{j} + z'\,\overrightarrow{k}$ alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (xy' - x'y)\,\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} + (xz' - zx')\,\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{k} + (yz' - zy')\,\overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k}$ et comme $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormale directe on a $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = (xy' - x'y)\,\overrightarrow{k} - (xz' - zx')\,\overrightarrow{j} + (yz' - zy')\,\overrightarrow{i}$. □

Proposition 8.11 (Double produit vectoriel)**.** Soient trois vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ de l'espace $\mathcal{E}$, alors :

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{k} = (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}. \tag{8.17}$$

Démonstration. Si on suppose dans un premier temps que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et on prétend qu'il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v}$ et alors le premier terme de l'égalité est nul d'après la proposition **??** et le deuxième terme vaut $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} - (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u} = \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u} - \lambda(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u} = 0$.

On suppose dans un dernier temps que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires. On se place dans une base orthonormale directe adaptée à notre problème. On pose le premier vecteur de la BOND comme $\overrightarrow{i} = \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}$ et le deuxième $\overrightarrow{j}$ comme étant unitaire directement orthogonal à $\overrightarrow{i}$ dans le plan $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et pour finir la base on pose $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}$. Dans cette base les coordonnées de nos vecteurs de départs sont les suivantes : $\overrightarrow{u}(\alpha, 0, 0)$ $\overrightarrow{v}(\beta, \gamma, 0)$ et $\overrightarrow{w}(\delta, \epsilon, \eta)$. Alors si on calcule on obtient : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}(0, 0, \alpha\gamma)$ $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \wedge \overrightarrow{w}(-\alpha\gamma\epsilon, \alpha\gamma\delta, 0)$ et les produit scalaires : $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w} = \alpha\delta$ et donc $(\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v}(\alpha\delta\beta, \alpha\delta\gamma, 0)$ puis $\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \beta\delta + \gamma\epsilon$ et donc $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u}(\alpha\beta\delta + \alpha\gamma\epsilon, 0, 0)$. Au final on a bien l'égalité. □

8.4 Déterminant ou produit mixte

8.4.1 Définition

Définition 8.6. Soient trois vecteurs de $\mathcal{E}$ $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \& \overrightarrow{w}$. On leur associe un réel appelé déterminant ou produit mixte de $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ noté $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ ou $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}]$ définie par $\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$.

Interprétation géométrique : Le nombre $|\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})|$ est le volume du parallélépipède construit sur $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ noté $ABCDEFGH$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AE}$ alors le volume est égal à l'aire $\mathcal{A}$ de $ABCD$ multiplié par la hauteur h du parallélépipède. L'aire n'est rien d'autre que $\mathcal{A} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$ et si on note $\overrightarrow{k}$ un vecteur unitaire directement orthogonal à $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \mathcal{A}\overrightarrow{k}$. La hauteur est $h = \left|\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{w}\right|$. On a bien :

$$|\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})| = |(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}| = \left|\mathcal{A}\overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{w}\right| = \mathcal{A}h. \tag{8.18}$$

Proposition 8.12. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{E}$, alors :

$$\operatorname{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = 0 \iff \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \& \overrightarrow{w} \text{ sont coplanaires.} \tag{8.19}$$

Démonstration. On rappelle que trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si deux parmi ces trois vecteurs sont colinéaires ou si un des trois est une combinaison linéaire des deux autres (à savoir s'il existe deux réels λ, μ tel que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$).

$\Longleftarrow$ On suppose ces trois vecteurs coplanaires alors :
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires alors leur produit vectoriel est nul donc le déterminant des trois vecteurs est nul ;
- sinon s'il existe deux réels λ, μ tels que $\overrightarrow{w}\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ alors $(\overrightarrow{u}\wedge) \cdot \overrightarrow{w} = \lambda(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{u} + \mu(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{v} = 0$ puisque $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{v}$.

$\Longrightarrow$ On suppose que le produit mixte est nul, alors $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux.
- Soit $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dont colinéaires donc $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ;
- soit $\overrightarrow{w} = 0$ alors ils sont aussi coplanaires ;
- soit $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \neq 0$ et $\overrightarrow{w} \neq 0$ et donc $(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ et $\overrightarrow{w}$ sont « orthogonaux » et donc $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux au même vecteur non nul $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ donc ils sont coplanaires.

□

Proposition 8.13. Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une BON, c'est une base (in)directe si et seulement si $\mathrm{Det}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = \pm 1$

Démonstration. D'après la section **??**, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est (in)directe si et seulement si $\vec{k} = \pm \vec{i} \wedge \vec{j}$ donc si et seulement si $\mathrm{Det}(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) = (\vec{i} \wedge \vec{j}) \cdot \vec{k} = \pm \left\| \vec{k} \right\|^2 = \pm 1$. Il vaut un lorsque la base est directe. □

8.4.2 Propriétés algébriques

Proposition 8.14 (Antisymétrie, trilinéarité)**.** Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{z}$ de l'espace $\mathcal{E}$ et tout réel λ on a :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = \mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = \mathrm{Det}(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}); \tag{8.20}$$

$$\mathrm{Det}(\lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w}) = \lambda\,\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}); \tag{8.21}$$

$$\mathrm{Det}(\vec{u} + \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}) + \mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}); \tag{8.22}$$

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{z}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) + \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}); \tag{8.23}$$

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} + \vec{z}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}). \tag{8.24}$$

Démonstration. Les équations (**??**), (**??**), (**??**) et (**??**) sont des conséquences de la bilinéarité du produit scalaire et du produit vectoriel. Par exemple, on peut montrer l'équation (**??**) :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{z}) = (\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w})) \cdot \vec{z} \tag{8.25}$$

$$= (\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{z} \tag{8.26}$$

$$= (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{z} + (\vec{u} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{z} \tag{8.27}$$

$$= \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}) + \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z}) \tag{8.28}$$

Puisque le produit vectoriel est antisymétrique alors le produit mixte est antisymétrique. On peut démontrer un morceau de l'équation (**??**) :

$$\mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}) = (\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{w} \tag{8.29}$$

$$= (-\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \tag{8.30}$$

$$= -(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \tag{8.31}$$

$$= -\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}). \tag{8.32}$$

Pour les autres résultats, on utilise le résultat suivant : si deux des trois vecteurs sont égaux alors le déterminant est nul. Cela signifie que le déterminant est alterné

$$0 = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}, \vec{v} + \vec{w}) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}). \tag{8.33}$$

D'où le résultat. □

Corollaire 8.14.1. *Pour tous vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :*

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = \mathrm{Det}(\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}). \tag{8.34}$$

Démonstration. On échange deux vecteurs à chaque fois et on multiplie par $-1 \times (-1) = 1$:

$$\mathrm{Det}(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}) = -\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}) = -(-\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}))) = \mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}). \tag{8.35}$$

□

Proposition 8.15 (Règle de Sarrus)**.** Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une BOND de l'espace. On considère trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de coordonnées respectives (x, y, z), (x', y', z'), (x'', y'', z'') dans cette base, alors :

$$\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - xz'y'' - yx'z''. \tag{8.36}$$

Démonstration. La démonstration se construit sur le détail des calculs du produit vectoriel et du produit scalaire puisque $\mathrm{Det}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$. □

8.5 Droites et plans

On place dans toute cette section un ROND $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

8.5.1 Définition

Définition 8.7. On appelle droite de l'espace $\mathcal{E}$ toute partie $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ telle que :

— Tout barycentre d'une famille de points de $\mathcal{D}$ est dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire que $\mathcal{D}$ est un sous-espace affine ;

— la partie $\mathcal{D}$ contient au moins deux points, c'est-à-dire que $\mathcal{D}$ est au moins de dimension 1 ;

— trois points de $\mathcal{D}$ sont alignés, c'est-à-dire que $\mathcal{D}$ est au plus de dimension 1.

Par deux points passe une et une seule droite. On dit qu'un vecteur non nul $\vec{u}$ est directeur d'une droite $\mathcal{D}$ s'il existe deux points A et B de $\mathcal{D}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Définition 8.8. On appelle plan de l'espace $\mathcal{E}$ toute partie $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ telle que :

— tout barycentre de points de $\mathcal{P}$ est dans $\mathcal{P}$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ est un sous-espace affine ;

— quatre points quelconque de $\mathcal{P}$ sont nécessairement coplanaires, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ est au plus de dimension 2 ;

— $\mathcal{P}$ contient au moins trois points non alignés, c'est-à-dire que $\mathcal{P}$ est au moins de dimension 2.

Par trois points A, B, et C non alignés passe un unique plan. Un vecteur non nul $\vec{n}$ est dit normal au plan s'il est orthogonal à tous les vecteur du plan.

8.5.2 Représentations paramétriques

8.5.2.1 Représentation paramétrique d'une droite

Droite définie par un point et un vecteur directeur Soit $\mathcal{D}$ passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ dirigé selon $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ alors $\mathcal{D}$ est paramétré

$$\mathcal{D} : \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = at + x_0 \\ y(t) = bt + y_0 \\ z(t) = ct + z_0 \end{cases} . \tag{8.37}$$

Réciproquement un tel paramétrage avec a, b, c non tous nuls représente une droite passant par le point (x_0, y_0, z_0) de direction (a, b, c).

Droite définie par deux points distincts A et B C'est la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ avec $A(x_0, y_0, z_0)$ et $B(x_1, y_1, z_1)$ alors $\mathcal{D}$ est paramétrée

$$\mathcal{D} : \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} x(t) = (x_1 - x_0)t + x_0 \\ y(t) = (y_1 - y_0)t + y_0 \\ z(t) = (z_1 - z_0)t + z_0 \end{cases} . \tag{8.38}$$

8.5.2.2 Représentation paramétrique d'un plan

On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(x_0, y_0, z_0)$ de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}(a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{v}(a_2, b_2, c_2)$. Un paramétrage de $\mathcal{P}$ est :

$$\mathcal{P} : \forall (t, s) \in \mathbb{R}^2 \begin{cases} x(t, s) = a_1 t + a_2 s + x_0 \\ y(t, s) = b_1 t + b_2 s + y_0 \\ z(t, s) = c_1 t + c_2 s + z_0 \end{cases} . \tag{8.39}$$

C'est moins pratique que pour une droite, puisqu'il y a deux paramètres.

8.5.3 Équations cartésiennes

8.5.3.1 Représentation cartésienne d'un plan

Plan défini par un point et deux vecteur non colinéaires Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ dirigé par les vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}(a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{v}(a_2, b_2, c_2)$. Alors

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \text{ sont coplanaires} \tag{8.40}$$

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x - x_0 & a_1 & a_2 \\ y - y_0 & b_1 & b_2 \\ z - z_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8.41}$$

Plan déini par trois points non alignés Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A, B et C, alors $\mathcal{P}$ est le plan passant par A et dirigé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$,

$$M \in \mathcal{P} \iff \mathrm{Det}(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 0. \tag{8.42}$$

Plan défini par un point et un vecteur normal Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ de vecteur normal $\overrightarrow{n}(a, b, c)$ non nul. Soit un point $M(x, y, z)$, alors

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \tag{8.43}$$
$$\iff ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0. \tag{8.44}$$

Réciproquement une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz = \alpha$ avec a, b et c non tous nuls définit un plan dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}(a, b, c)$.

8.5.3.2 Représentation cartésienne d'une droite

Une droite est définie comme l'intersection de deux plans sécants. Soient deux plans sécants $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équation cartésiennes respectives :

$$ax + by + cz = \alpha \tag{8.45}$$
$$a'x + b'y + c'z = \alpha', \tag{8.46}$$

et leur intersection $\mathcal{D}$ est définie par :

$$\begin{cases} ax + by + cz & = \alpha \\ a'x + b'y + c'z & = \alpha' \end{cases}. \tag{8.47}$$

Réciproquement, un tel système d'équation cartésiennes peut définir :
- un plan si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus ;
- une droite, s'ils sont sécants ;
- le vide, s'ils sont paralléles mais non-confondus.

8.5.4 Positions relatives

8.5.4.1 Positions relatives de deux plans – Parallélisme et orthogonalité

Définition 8.9. Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont dits parallèles s'ils admettent un vecteur normal, non nul, commun.

Proposition 8.16. Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans d'équations cartésiennes respectives $ax + by + cz = \alpha$ et $a'x + b'y + c'z = \alpha'$. Alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont paralléles si et seulement si (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont égaux si et seulement si (a, b, c, α) et (a', b', c', α') sont proportionnels.

Définition 8.10. Deux plans sont orthogonaux s'ils admettent des vecteurs normaux orthogonaux.

Proposition 8.17. Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ d'équations cartésiennes respectives $ax + by + cz = \alpha$ et $a'x + b'y + c'z = \alpha'$ avec des vecteurs normaux non nuls ; alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont orthogonaux si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$.

8.5.4.2 Positions relatives d'une droite et d'un plan

Définition 8.11. Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan. On dit que $\mathcal{D}$ est parallèles à $\mathcal{P}$ si pour tout vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{D}$ il existe deux points du plan $\mathcal{P}$ tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.

Proposition 8.18. Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}$ un plan.

1. Si $\mathcal{D}$ est paralléles à $\mathcal{P}$:
   — soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$;
   — soit $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$.
2. Si $\mathcal{D}$ n'est pas paralléle à $\mathcal{P}$, alors l'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$ est un singleton.

Démonstration. 1. Si $\mathcal{D}$ est parallèle à $\mathcal{P}$ alors soit $\overrightarrow{u} \neq 0$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et on suppose qu'il existe $A \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P}$, alors il existe trois points C,D et E tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$. Pour tout point M du plan, il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{AE}$. Les point A et E sont dans le plan $\mathcal{P}$, alors la droite (AE) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$ donc si M est sur (AE) alors M est sur le plan $\mathcal{P}$, donc $D \subset \mathcal{P}$.

2. Si $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{D}$ est la droite passant par A et dirigé par $\overrightarrow{u}$. $\mathcal{P}$ est le plan passant par B de vecteur normal $\overrightarrow{v}$. Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas orthogonaux

$$M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \end{cases} \tag{8.48}$$

$$\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{v} = 0 \end{cases} \tag{8.49}$$

$$\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \\ \lambda\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v} \end{cases} \tag{8.50}$$

$$\iff \begin{cases} \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} \\ \lambda = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}} \end{cases} \tag{8.51}$$

$$M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{v}}{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}}\overrightarrow{u}. \tag{8.52}$$

Il y a donc un unique point d'intersection.

□

8.5.5 Distace d'un point à un plan ou à une droite

8.5.5.1 Projeté orthogonal

Définition 8.12. Soit M un point de l'espace ϵ et X une droite ou un plan. On appelle distance de M à X le réel :

$$d(M, X) = \inf \{MM' \mid M' \in X\}. \tag{8.53}$$

Il s'agit de la borne inférieur, la plus petite distance de M à un point de X.

Proposition 8.19. Soit M un point de l'espace ϵ et X une droite ou un plan. Il existe un unique point H de X tel que $\overrightarrow{MH}$ soit orthogonal à X. On l'appelle projeté orthogonal de M sur X et il vérifie $d(M, X) = MH$ et la distance de M à X n'est atteinte qu'en H.

Démonstration. — X est une droite. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur directeur de X, puis A et N des points de X. Alors :

$$\overrightarrow{MN} \perp X \iff \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{u} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \tag{8.54}$$

$$N \in X \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{u} \tag{8.55}$$

$$\overrightarrow{MN} \perp X \iff \lambda = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2}. \tag{8.56}$$

On a montré qu'il existe un unique point H de X tel que $\overrightarrow{AH} \perp X$ et de plus $\overrightarrow{AH} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|^2} \overrightarrow{u}$

— X est un plan. Soit A un point de X et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ une BON de X. Alors :

$$N \in X \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\ \overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{i} + \mu \overrightarrow{j} \tag{8.57}$$

$$\overrightarrow{MN} \perp X \iff \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{i} = 0 \wedge \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{j} = 0 \tag{8.58}$$

$$\iff \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{i} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{i} = 0 \wedge \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{j} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{j} = 0. \tag{8.59}$$

Or on sait que :

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{i} + \mu \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{i} = \lambda \tag{8.60}$$

$$\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} + \mu \overrightarrow{j} \cdot \overrightarrow{j} = \mu. \tag{8.61}$$

Alors finalement,

$$\overrightarrow{MN} \perp X \iff \lambda = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{i} \wedge \mu = \overrightarrow{AM} \overrightarrow{j}. \tag{8.62}$$

Il existe un seul point H de X tel que $\overrightarrow{MH} \perp X$.

— X est une droite ou un plan. Soit M' un point de X, $\overrightarrow{MH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{HM'}$; le théorème de Pythagore nous donne $MM'^2 = MH^2 + M'H^2$ donc $MM'^2 \geq MH^2$. Et $MM' = MH \iff HM' = 0 \iff H = M'$, la distance est atteinte pour $M' = H$ et seulement pour $M' = H$

□

8.5.5.2 Distance à un plan

Plan défini par un point A et deux vecteurs non colinéaires Soit $\mathcal{P}$ un plan, M un point de l'espace, H son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$. $\overrightarrow{HM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donc il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{HM} = \lambda \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.

$$\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{AH} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{HM} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) = \lambda \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|^2. \tag{8.63}$$

Donc du coup,

$$HM = |\lambda| \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\| = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|} = \frac{\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM})\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}. \tag{8.64}$$

Donc la distance vaut :

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{AM})\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}. \tag{8.65}$$

Plan défini par trois points non alignés A,B et C En appliquant la formule (**??**) avec ces trois points, on obtient :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM})\right|}{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|}. \tag{8.66}$$

Plan défini par un point A et un vecteur normal Ce vecteur normal est noté $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ et $A(x_0,y_0,z_0)$, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs directeurs directeurs de $\mathcal{P}$. Il existe un réel non nul λ tel que $\lambda\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$, alors

$$HM = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \lambda\overrightarrow{n}\right|}{\|\lambda\overrightarrow{n}\|} = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|}. \tag{8.67}$$

Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est $ax+by+cz=\alpha$ avec $\alpha = ax_0+by_0+cz_0$, finalement :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax+by+cz-\alpha|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \tag{8.68}$$

Définition 8.13. On dit qu'une équation d'un plan $\mathcal{P}$ du type $ax+by+cz=\alpha$ est une équation normale lorsque $a^2+b^2+c^2=1$, c'est-à-dire lorsque le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est de norme 1. Dans ce cas $d(M,\mathcal{P}) = |ax+by+cz-\alpha|$, où $|\alpha|$ est la distance de l'origine au plan $\mathcal{P}$.

8.5.5.3 Distance à une droite

Si la droite est définie par un point A et un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul, soit M un point de l'espace ϵ, H son projeté orthogonal sur $\mathcal{D}$. Alors $d(M,\mathcal{D}) = HM$ et $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u} = \overrightarrow{HM} \wedge \overrightarrow{u}$, donc $\left\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{HM}\right\| \|\overrightarrow{u}\|$, alors $d(M,\mathrm{d}) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}$.

Si la droite est définie par deux points distincts A et B, alors $d(M,\mathrm{d}) = \frac{\left\|\overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$.

8.5.6 Perpendiculaire commune et distance entre deux droites non parallèles

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace non parallèles.

Définition 8.14. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace,

- on dit qu'elles sont orthogonales si et seulement si leur vecteurs directeurs sont orthogonaux ;
- on dit qu'elles sont perpendiculaires si et seulement si elles sont orthogonales et sécantes.

8.5.6.1 Perpendiculaire commune

Théorème 8.1. *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites de l'espace non parallèles. Il existe une unique droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$, c'est la perpendiculaire commune de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.*

Existence. Soient A un point de $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{u}$ un de ses vecteur directeur et A' un point de $\mathcal{D}'$ et $\overrightarrow{u}'$ un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires. Soit le vecteur non nul $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'$. Le triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{v})$ est alors une base directe de l'espace. Il existe donc trois réels a, b, c tel que $\overrightarrow{AA'} = a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}' + c\overrightarrow{v}$. Posons le point H tel que $\overrightarrow{AH} = a\overrightarrow{u}$, alors H est un point de $\mathcal{D}$. De la même manière, on pose le point H' tel que $\overrightarrow{H'A'} = b\overrightarrow{u}'$ alors H' est un point de $\mathcal{D}'$. Soit Δ la droite passant par H et dirigée par $\overrightarrow{v}$. Premièrement, Δ passe par $H \in \mathcal{D}$, Δ et $\mathcal{D}$ sont sécantes. Δ est dirigée par $\overrightarrow{v}$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ donc Δ est orthogonale à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Il reste à montrer qu'elle est sécante avec $\mathcal{D}'$. Secondement,

$$\overrightarrow{HH'} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'H'} = -a\overrightarrow{u} + (a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{u}' + c\overrightarrow{v}) - b\overrightarrow{u}' = c\overrightarrow{v}. \quad (8.69)$$

Puisque $H \in \Delta$ et que $\overrightarrow{v}$ dirige Δ alors $H' \in \Delta$. Ainsi Δ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes. On a prouvé l'existence d'une droite perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$. □

Unicité. Soit Δ' une perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et à $\mathcal{D}'$. Notons C et C' ses points d'intesections avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Alors $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'C'}$. Puisque C et H sont des points de $\mathcal{D}$, il existe un réel α tel que $\overrightarrow{CH} = \alpha\overrightarrow{u}$ et puisque C' et H' sont des points de $\mathcal{D}'$, il existe un réel β tel que $\overrightarrow{C'H'} = \beta\overrightarrow{u}'$; nous savons aussi que $\overrightarrow{HH'} = c\overrightarrow{v}$. Alors $\overrightarrow{CC'} = \alpha\overrightarrow{u} + c\overrightarrow{v} + \beta\overrightarrow{u}'$, or $\overrightarrow{CC'}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u}$ et à $\overrightarrow{u}'$ donc il est colinéaire à $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'$. Par unicité des coordonnées, on a forcément $\alpha = \beta = 0$ alors $C = H$ et $C' = H'$. Ainsi $\Delta = \Delta'$. □

8.5.6.2 Distance entre deux droites non parallèles

Définition 8.15. Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles. On définit la distance entre $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ par :

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = \inf \{MM' \mid M \in \mathcal{D} \text{ et } M' \in \mathcal{D}'\}. \quad (8.70)$$

C'est la plus petite distance d'un point de $\mathcal{D}$ à un autre point de $\mathcal{D}'$.

Proposition 8.20. Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ non parallèles.

$$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = HH' \quad (8.71)$$

Démonstration. Pour tout point M de $\mathcal{D}$ et tout point M' de $\mathcal{D}'$,

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M'} \quad (8.72)$$

Il existe des réels α et β tel que $\overrightarrow{MH} = \alpha\overrightarrow{u}$ puisque M et H sont sur $\mathcal{D}$ et $\overrightarrow{M'H'} = \beta\overrightarrow{u}'$ puisque M' et H' sont sur $\mathcal{D}'$; il reste aussi $\overrightarrow{HH'} = c\overrightarrow{v}$. Alors $\overrightarrow{MM'} = (\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}') + c\overrightarrow{v}$. Le vecteur $\overrightarrow{v}$ est orthogonal à $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}'$.

Le théorème de Pythagore affirme donc que $MM'^2 = \|\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}'\|^2 + HH'^2$. Alors pour tous M de $\mathcal{D}$ et tout M' de $\mathcal{D}'$ on a $MM' \geq HH'$.

$$\begin{aligned} MM' = HH' &\iff \|\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}'\|^2 = 0 && (8.73)\\ &\iff \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{u}' = 0 && (8.74)\\ &\iff \alpha = 0 \wedge \beta = 0 && (8.75)\\ &\iff M = H \wedge M' = H' && (8.76) \end{aligned}$$

$d(\mathcal{D}, \mathcal{D}') = HH'$ et cette distance n'est atteinte qu'en H et H'. □

Proposition 8.21.

$$d(\mathcal{D},\mathcal{D}') = \frac{\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{AA'}\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'\|}. \tag{8.77}$$

Démonstration.

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{AA'}) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{AH}) + \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{HH'}) + \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{H'A'}) \tag{8.78}$$

$$= \mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{HH'}) \tag{8.79}$$

$$= (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}') \cdot \overrightarrow{HH'} \tag{8.80}$$

$$= c\,\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'\|^2. \tag{8.81}$$

Donc finalement,

$$HH' = \|c\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'\| = |c|\,\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'\| = \frac{\left|\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}', \overrightarrow{AA'})\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u}'\|}. \tag{8.82}$$

□

8.6 Cercles et sphères

8.6.1 Équations d'une sphère en ROND

On munit l'espace d'un ROND $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Définition 8.16. Soient A un point de l'espace et r un réel strictement positif. La sphère de centre A et de rayon r, $S(a,r)$, est l'ensemble des points M de l'espace tels que $AM = r$. Si le point A est de coordonnées (a,b,c), alors une équation cartésienne de $S(A,r)$ est :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2; \tag{8.83}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = d \quad d = r^2 - a^2 - b^2 - c^2. \tag{8.84}$$

Réciproquement, soit X l'ensemble défini par l'équation cartésienne suivante

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz = d \quad (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \tag{8.85}$$

si et seulement si

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = d + a^2 + b^2 + c^2. \tag{8.86}$$

— si $d + a^2 + b^2 + c^2 < 0$ alors $X = \emptyset$;
— si $d + a^2 + b^2 + c^2 = 0$ alors $X = A$;
— si $d + a^2 + b^2 + c^2 > 0$ alors $X = S(A, \sqrt{d + a^2 + b^2 + c^2})$.

Représentation paramétrique : Si S est la sphère de centre O de rayon $\rho_0 > 0$, alors S est l'ensemble des points qui admettent un système de coordonnées sphériques de la forme $(\rho_0, \varphi, \theta)$, avec $\varphi \in [0, \pi]$. On en déduit une représentation paramétrique de S :

$$\begin{cases} x(\varphi,\theta) = \rho_0 \sin\varphi \sin\theta \\ y(\varphi,\theta) = \rho_0 \cos\varphi \sin\theta \\ z(\varphi,\theta) = \rho_0 \cos\theta \end{cases}. \tag{8.87}$$

Soient A et B deux points distincts de l'espace, l'ensemble S tel que $S = \{M \in \epsilon, \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0\}$ et I le milieu de $[AB]$. Alors

$$
\begin{aligned}
M \in S &\iff (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}) = 0 && (8.88)\\
&\iff MI^2 - IA^2 = 0 && (8.89)\\
&\iff MI^2 = \frac{AB^2}{4}. && (8.90)
\end{aligned}
$$

S est la sphère de centre I de rayon $\frac{AB}{2}$, c'est aussi la sphère de diamètre $[AB]$.

8.6.2 Problème d'intersection

Soit S la sphère de centre $A(a, b, c)$ de rayon $\rho > 0$.

8.6.2.1 Intersection d'une sphère et d'une droite

Proposition 8.22. Soit $\mathcal{D}$ une droite de l'espace. L'intersection de S et de $\mathcal{D}$ est :

— vide, si $d(A, \mathcal{D}) > \rho$;

— réduite au projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{D}$, si $d(A, \mathcal{D}) = \rho$ et dans ce cas la sphère et la droites sont tangentes ;

— constituée de deux point symétrique par rapport au point H, si $d(A, \mathcal{D}) < \rho$.

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$. Soit M un point de $\mathcal{D}$, alors $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux. Le théorème de Pythagore dit que $AM^2 = d(A, \mathcal{D})^2 + HM^2$. Alors

$$
\begin{aligned}
M \in S &\iff AM = \rho && (8.91)\\
&\iff AM^2 = d(A, \mathcal{D})^2 + HM^2 = \rho^2 && (8.92)\\
&\iff HM^2 = \rho^2 - d(A, \mathcal{D})^2. && (8.93)
\end{aligned}
$$

Si $d(A, \mathcal{D}) > \rho$, alors l'intersection est vide ; si $d(A, \mathcal{D}) = \rho$ alors $HM = 0$ donc l'intersection est réduite au point H ; si $d(A, \mathcal{D}) < \rho$ alors $HM = \pm\sqrt{\rho^2 - d(A, \mathcal{D})^2}$. Si on note, pour le dernier cas, $\overrightarrow{u}$ un vecteur unitaire de $\mathcal{D}$ alors $\overrightarrow{HM_1} = \sqrt{\rho^2 - d(A, \mathcal{D})^2}\,\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{HM_2} = -\sqrt{\rho^2 - d(A, \mathcal{D})^2}\,\overrightarrow{u} = -\overrightarrow{HM_1}$, alors les points d'intersection sont symétriques par rapport au point H. □

8.6.2.2 Intersection d'une sphère et d'un plan

Proposition 8.23. Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace ϵ, l'intersection de S et $\mathcal{P}$ est :

— vide si $d(A, \mathcal{P}) > \rho$;

— réduite au projeté orthogonal H de A sur $\mathcal{P}$ si $d(A, \mathcal{P}) = \rho$ et dans ce cas la sphère et le plan sont dit tangents ;

— un cercle de centre H, si $d(A, \mathcal{P}) < \rho$.

Démonstration. Soit le point H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$. Soit M un point du plan $\mathcal{P}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont orthogonaux, alors le théorème de Pythagore affirme que $AM^2 = d(A, \mathcal{P})^2 + HM^2$. Alors

$$
\begin{aligned}
M \in S &\iff AM^2 = d(A, \mathcal{P})^2 + HM^2 = \rho^2 && (8.94)\\
&\iff HM^2 = \rho^2 - d(A, \mathcal{P})^2. && (8.95)
\end{aligned}
$$

Ainsi

— si $d(A,\mathcal{P}) > \rho$, alors l'intersection est vide ;

— si $d(A,\mathcal{P}) = \rho$, alors M est dans l'intersection si et seulement si $HM = 0$ donc si et seulement si $M = H$ donc l'intersection est réduite au point H ;

— si $d(A,\mathcal{P}) < \rho$ alors M est dans l'intersection si et seulement si M est dans le plan et si $HM = \sqrt{\rho^2 - d(A,\mathcal{P})^2}$, donc l'intersection est le cercle de centre H inclus dans $\mathcal{P}$ de rayon $\sqrt{\rho^2 - d(A,\mathcal{P})^2}$.

□

8.6.2.3 Intersection de deux sphères

Proposition 8.24. Soit S' une sphère de centre $A' \neq A$ et de rayon ρ'. L'intersection de S et de S' est :

— vide si $AA' > \rho + \rho'$ ou si $AA' < |\rho' - \rho|$;

— réduite à un point si $AA' = \rho + \rho'$ ou si $AA' = |\rho - \rho'|$, dans ce cas les sphères sont tangentes en un point H, qui est sur la droite (AA') ;

— un cercle si $|\rho - \rho'| < AA' < \rho + \rho'$, le centre de ce cercle est sur (AA') et se situe dans un plan orthogonal à (AA').

Démonstration. Puisque $A \neq A'$, soient $\overrightarrow{c} = \frac{\overrightarrow{AA'}}{\left\|\overrightarrow{AA'}\right\|}$ un vecteur directeur de (AA') $\overrightarrow{a}$ un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{c}$ et $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{c}$. Ainsi $(A, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c})$ est un ROND de l'espace. L'équation de S dans ce ROND est : $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$. et $\overrightarrow{AA'} = \left\|\overrightarrow{AA'}\right\| \overrightarrow{c} = d\overrightarrow{c}$ et donc $A'(0,0,d)$ et l'équation de S' est telle que $x^2 + y^2 + (z-d)^2 = \rho'^2$. Soit un point $M(x,y,z)$ de l'espace ϵ, alors

$$M \in S \cap S' \iff \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \\ x^2 + y^2 + (z-d)^2 = \rho'^2 \end{cases} \tag{8.96}$$

$$\iff \begin{cases} z = \frac{\rho^2-\rho'^2+d^2}{2d} \\ x^2 + y^2 + \left(\frac{\rho^2-\rho'^2+d^2}{2d}\right)^2 = \rho^2 \end{cases} . \tag{8.97}$$

Alors

$$M \in S \cap S' \iff x^2 + y^2 = \rho^2 - \left(\frac{\rho^2 - \rho'^2 + d^2}{2d}\right)^2 \tag{8.98}$$

$$\iff x^2 + y^2 = \left(\rho - \frac{\rho^2 - \rho'^2 + d^2}{2d}\right)\left(\rho + \frac{\rho^2 - \rho'^2 + d^2}{2d}\right) \tag{8.99}$$

$$\iff x^2 + y^2 = \frac{1}{4d^2}(\rho' - d + \rho)(\rho' + d - \rho)(\rho + d - \rho')(\rho + d + \rho') = \alpha. \tag{8.100}$$

Le réel α est du signe de $(\rho' - d + \rho)(\rho' + d - \rho)(\rho + d - \rho') = (\rho' + d - \rho)(d^2 - |\rho - \rho'|^2)$. Alors

— si $d > \rho + \rho'$ alors $d > |\rho - \rho'|$ donc $\alpha < 0$ et $S \cap S' = \emptyset$;

— si $d < |\rho + \rho'|$ alors $d < \rho + \rho'$ donc $\alpha < 0$ et $S \cap S' = \emptyset$;

— si $d = \rho + \rho'$ ou si $d = |\rho - \rho'|$ alors $\alpha = 0$ donc

$$M \in S \cap S' \iff \begin{cases} z = \frac{\rho^2-\rho'^2+d^2}{2d} \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases} , \tag{8.101}$$

et l'intersection est constituée d'un seul point H dont les coordonnées sont de la forme $(0, 0, z_H)$ et $\overrightarrow{AH} = z_H \overrightarrow{c}$, le point H est sur la droite (AA') ;

— si $|\rho - \rho'| \leq d \leq \rho + \rho'$ alors $\alpha > 0$ donc

$$M \in S \cap S' \iff \begin{cases} z = \frac{\rho^2 - \rho'^2 + d^2}{2d} \\ x^2 + y^2 = \alpha \end{cases}, \tag{8.102}$$

et l'intersection est constituée d'un cercle dans le plan d'équation $z = \frac{\rho^2 - \rho'^2 + d^2}{2d}$ et soit B le centre du cercle, qui est sur la droite (AA'). Ce cercle est dans le plan $(B, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ qui est orthogonal à $\overrightarrow{c}$ qui dirige (AA').

□

Dans le cas particulier où S et S' ont le même centre, alors on choisit un ROND de centre A et on a soit $\rho = \rho'$ et donc $S \cap S' = S = S'$ ou alors $\rho \neq \rho'$ et donc $\mathcal{S} \cap S' = \emptyset$.

8.6.3 Projection orthogonale d'un cercle sur un plan

Soient $\mathcal{C}$ un cercle contenu dans un plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ un deuxième plan. On définit l'application $\pi : \epsilon \longmapsto \mathcal{P}'$ qui à un point M associe son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}'$. On veut déterminer l'ensemble $X = \pi(\mathcal{C})$. On note A le centre du cercle $\mathcal{C}$. On pose $H = \pi(A)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}'$.

Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal unitaire du plan $\mathcal{P}$. Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$. Soit $\mathcal{D}'$ l'image par π de la droite $\mathcal{D}$. Soit $\overrightarrow{i}$ un vecteur unitaire de $\mathcal{D}'$ et soit $\overrightarrow{j}$ orthogonal à $\overrightarrow{i}$ unitaire dans le plan $\mathcal{P}'$. On pose $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}$. Le repère $(H, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est donc un ROND de l'espace ϵ.

Soit un point B tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{n}$, alors B est un point de la droite $\mathcal{D}$ et soit $B' = \pi(B)$ son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}'$, alors B' est un point de $\mathcal{D}'$. Le produit scalaire $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{j} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HB'} + \overrightarrow{B'B}) \cdot \overrightarrow{j}$ vaut $\overrightarrow{HB'} \cdot \overrightarrow{j}$ puisque $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{B'B}$ sont orthogonaux à $\mathcal{P}'$ donc à $\overrightarrow{j}$. Les point H et B' sont sur la droite $\mathcal{D}'$, le vecteur $\overrightarrow{i}$ dirige $\mathcal{D}'$ donc $\overrightarrow{HB'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{i}$. Par définition $\overrightarrow{i} \cdot \overrightarrow{j} = 0$ alors $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{j} = 0$, ainsi $\overrightarrow{n}$ est dans le plan $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{k})$, il existe alors un réel $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $\overrightarrow{n} = \cos\theta \overrightarrow{i} + \sin\theta \overrightarrow{k}$. Alors si on résume :

— l'équation de $\mathcal{P}'$ est telle que $z = 0$,

— les coordonnées du point A sont telles que $A(0, 0, d)$,

— les coordonnées du projeté orthogonal de $M(x, y, z)$ sur $\mathcal{P}'$ sont telles que $\pi(M)(x, y, 0)$,

— l'équation de $\mathcal{P}$ est telle que

$$M \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \tag{8.103}$$

$$\iff x\cos\theta + (z - d)\sin\theta = 0 \tag{8.104}$$

— l'équation de $\mathcal{C}$ est telle que

$$M \in \mathcal{C} \iff \begin{cases} AM = r \\ M \in \mathcal{P} \end{cases} \tag{8.105}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 + y^2 + (z - d)^2 = r^2 \\ \cos\theta x + \sin\theta(z - d) = 0 \end{cases}. \tag{8.106}$$

À partir de ce point, on peut déterminer l'ensemble X.

Soit $N(x,y,0)$, alors :

$$\begin{aligned} N \in X &\iff \exists M \in \mathcal{C}\ N = \pi(M) & (8.107)\\ &\iff \exists(\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{R}^3\ M(\alpha,\beta,\gamma)\ N = \pi(M) & (8.108)\\ &\iff \exists \gamma \in \mathbb{R}\ M(x,y,\gamma) \in \mathcal{C} & (8.109)\\ &\iff \exists \gamma \in \mathbb{R} \begin{cases} x^2+y^2+(\gamma-d)^2 = r^2 \\ \cos\theta x + \sin\theta(\gamma-d) = 0 \end{cases}. & (8.110)\end{aligned}$$

On distingue plusieurs cas selon la valeur de θ.

1. Dans le cas où $\sin\theta = 0$ alors $\overrightarrow{n} = \pm\overrightarrow{i}$, alors $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{k}$ sont orthogonaux, et les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ aussi. Alors

$$N \in X \iff \exists \gamma \in \mathbb{R} \begin{cases} x^2+y^2+(\gamma-d)^2 = r^2 \\ x = 0 \end{cases}, \tag{8.111}$$

donc

$$N \in X \iff \exists \gamma \in \mathbb{R} \begin{cases} x = 0 \\ \gamma = d \pm \sqrt{r^2-y^2} \end{cases}. \tag{8.112}$$

Finalement

$$N \in X \iff \begin{cases} x = 0 \\ -r \leq y \leq r \end{cases}. \tag{8.113}$$

On trouve un segment de la droite $(H, \overrightarrow{j})$

2. Dans le cas où $\sin\theta \neq 0$, alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas orthogonaux. Alors

$$N \in X \iff \exists \gamma \in \mathbb{R} \begin{cases} x^2+y^2+(\gamma-d)^2 = r^2 \\ \cos\theta x + \sin\theta(\gamma-d) = 0 \end{cases}. \tag{8.114}$$

Alors

$$N \in X \iff \exists \gamma \in \mathbb{R} \begin{cases} \gamma = d - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}x \\ x^2+y^2+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}x^2 = r^2 \end{cases}. \tag{8.115}$$

Si la deuxième équation est vraie alors il existe un réel γ tel que la première et la deuxième soient vraies. Si la deuxième équation est fausse alors les deux équations sont fausses. Donc

$$N \in X \iff x^2\left(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right) + y^2 = r^2. \tag{8.116}$$

Soit alors

$$N \in X \iff \frac{x^2}{r^2\sin^2\theta} + \frac{y^2}{r^2} = 1. \tag{8.117}$$

   (a) si $\sin^2\theta \neq 1$ alors $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{k}$ ne sont pas colinéaires donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles, X est alors une ellipse ;

   (b) si $\sin^2\theta = 1$ alors $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{k}$ sont colinéaires donc les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, X est alors le cercle de centre $H = \pi(A)$ de même rayon que $\mathcal{C}$.

   On vient de trouver X quelque soit θ.

Dans tous les cas, l'ensemble X est trouvé.

Chapitre 9

Nombres entiers naturels, récurrence et ensembles finis

Sommaire

9.1 Nombres entiers naturels

9.1.1 Ensemble des naturels $\mathbb{N}$

L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ est muni de deux lois de compositions internes : une addition notée $+$ et d'une multiplication notée $\times$ ou $\cdot$ ou rien du tout qui vérifient les propriétés suivantes. On notera $N^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Proposition 9.1 (Loi $+$)**.** Elle est associative

$$\forall (a, b, c) \in \mathbb{N}^3 \quad (a + b) + c = a + (b + c), \tag{9.1}$$

commutative
$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad a+b=b+a, \tag{9.2}$$
l'entier 0 est son élément neutre
$$\forall a \in \mathbb{N} \quad a+0=0+a=a, \tag{9.3}$$
et tout entier naturel est régulier pour cette loi
$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \quad a+b=a+c \implies b=c. \tag{9.4}$$

Proposition 9.2 (Loi $\times$)**.** Elle est associative
$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \quad (a\times b)\times c = a\times(b\times c), \tag{9.5}$$
commutative
$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad a\times b=b\times a, \tag{9.6}$$
distributive par rapport à la loi $+$
$$\forall (a,b,c) \in \mathbb{N}^3 \quad (a+b)\times c = a\times c+b\times c, \tag{9.7}$$
l'entier 1 est son élément neutre
$$\forall a \in \mathbb{N} \quad a\times 1=1\times a=a, \tag{9.8}$$
et tout entier naturel non nul est régulier pour cette loi
$$\forall a \in \mathbb{N}^* \ \forall (b,c) \in \mathbb{N}^3 \quad a\times b=a\times c \implies b=c. \tag{9.9}$$

On munit l'ensemble $\mathbb{N}$ d'une relation d'ordre total notée $\leq$ qui vérifie les propriétés suivantes

Proposition 9.3. Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément et toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Proposition 9.4. La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition et la multiplication. C'est-à-dire que
$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{N}^4 \quad \begin{cases} a\leq b \\ c\leq d \end{cases} \iff \begin{cases} a+c\leq b+d \\ ac\leq bd \end{cases}. \tag{9.10}$$

Si p et q sont des entiers naturels tels que $p \leq q$ alors $[\![p\,;q]\!] = \mathbb{N} \cap [p\,;q]$

9.1.2 Théorème de récurrence

Théorème 9.1 (théorème de récurrence)**.** *Soient A une partie de $\mathbb{N}$, et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que*

— Initialisation $n_0 \in A$ *;*

— Hérédité $\forall n \geq n_0 \quad n\in A \implies n+1 \in A$ *;*

Conclusion *Alors* $\forall n \in N \quad n\geq n_0 \implies n\in A.$

Démonstration. Soit $E = \mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[$ et $B = \complement_E A$. Montrons par l'absurde que B est vide.

Supposons que B est non vide, alors il admet un plus petit élément noté α. Alors $\alpha \geq n_0$ par hypothèse (Initialisation) et $n_0 \in A$ donc $\alpha \geq n_0 + 1 \geq 1$. Par suite $\alpha - 1 \geq n_0$.

Puisque α est le plus petit élément de B, $\alpha - 1 \notin B$ donc $\alpha - 1 \in A$. Or par hypothèse (Hérédité) on sait que $\alpha - 1 + 1 = \alpha \in A$.

L'hypothèse de départ qu'on avait fait nous disait que $\alpha \in B$. L'élément α ne peut être à la fois dans A et dans B, on arrive donc à une absurdité, alors B est vide, $E = A$. □

Corollaire 9.4.1 (Récurrence simple)**.** *Soit $\mathcal{P}$ une propriété définie sur $\mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[$ telle que*

— Initialisation $\mathcal{P}(n_0)$ *est vraie ;*

— Hérédité $\forall n \geq n_0 \quad \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ *;*

Conclusion *alors* $\forall n \geq n_0 \quad \mathcal{P}(n)$.

Démonstration. On applique le théorème de récurrence à $A = \{n \in \mathbb{N} \mid \mathcal{P}(n)\}$ puisque :

— *Initialisation* $\mathcal{P}(n_0) \iff n_0 \in A$

— *Hérédité*

$$(\forall n \geq n_0 \quad \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)) \iff (\forall n \geq n_0 \quad n \in A \implies n+1 \in A) \tag{9.11}$$

Conclusion alors d'après le théorème $A = \mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[$ □

Corollaire 9.4.2 (Récurrence double)**.** *Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[$ telle que*

— Initialisation $\mathcal{P}(n_0)$ *et* $\mathcal{P}(n_1)$ *sont vraie ;*

— Hérédité $\forall n \geq n_0$ $\mathcal{P}(n)$ *et* $\mathcal{P}(n+1) \implies \mathcal{P}(n+2)$ *;*

Conclusion *alors* $\forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[\ \ \mathcal{P}(n)$

Démonstration. On définit sur $\mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[$ la propriété $Q(n) = (\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1))$ et on applique le corollaire **??** à Q. □

Il ne faut pas oublier d'initialiser deux fois. Il existe aussi des récurrences triples ou multiples, qu'il ne faut pas oublier d'initialiser autant de fois.

Corollaire 9.4.3 (Récurrence forte)**.** *Soit P une propriété définie sur $\mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[$ telle que*

— Initialisation $\mathcal{P}(n_0)$ *est vraie ;*

— Hérédité $\forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[\ \ (\mathcal{P}(n_0), \ldots, \mathcal{P}(n)) \implies \mathcal{P}(n+1)$

Conclusion *alors* $\forall n \in \mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[\ \ \mathcal{P}(n)$

Démonstration. On définit sur $\mathbb{N} \cap [n_0\,;+\infty[$ la propriété $R(n) = (\mathcal{P}(n_0), \ldots, \mathcal{P}(n))$ et on applique le corollaire **??** à R. □

9.1.3 Suites définies par une relation de récurrence

Soit E un ensemble. On rappelle qu'une suite à valeur dans E est une famille d'éléments de E indexée par $\mathbb{N}$. Étant donné $a \in E$ et $f \in E^E$, il existe une seule suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que (I) $u_0 = a$ et (H) $u_{n+1} = f(u_n)$. C'est une conséquence du théorème de récurrence (théorème **??**).

De même on peut définir une unique suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par la donnée de :

1. u_0, u_1 deux éléments de E et une relation de récurrence de la forme $u_{n+2} = f(u_{n+1}, u_n)$ avec $f : E \times E \longmapsto E$ d'après le corollaire **??**.
2. u_0 élément de E et une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(n, u_0, \dots, u_n)$ avec $f : \mathbb{N} \times E^{n+1} \longmapsto E$ d'après le corollaire **??**.

9.1.4 Exemples

Définition 9.1 (Suite arithmétique)**.** Une suite arithmétique à valeurs dans le corps des complexes $\mathbb{C}$ est une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{C}$ et d'une relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r \tag{9.12}$$

où le complexe r est la raison et ne dépend pas de n.

Proposition 9.5. Soit u une suite arithmétique de raison r, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 + nr. \tag{9.13}$$

Démonstration. Pour tout entier n on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$"$u_n = u_0 + nr$. On initialise et on voit que $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Ensuite on vérifie l'hérédité : soit un entier n et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $u_{n+1} = u_n + r$ par définition et $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$ par hypothèse de récurrence, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Alors d'après le théorème de récurrence la proposition est vraie. □

Proposition 9.6. Soit u une suite arithmétique de premier terme $a \in \mathbb{C}$ et de raison $r \in \mathbb{C}$, alors pour tout entier n

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)a + r\frac{n(n+1)}{2}. \tag{9.14}$$

Démonstration. Soit un entier n, alors

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_0 + kr = \sum_{k=0}^{n} u_0 + r\sum_{k=0}^{n} k. \tag{9.15}$$

On montre par récurrence que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, en effet pour $n = 0$ $\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0(0+1)}{2}$ et pour l'hérédité si on considère que la somme est vraie pour un entier $n \geq 1$ alors $\sum_{k=0}^{n+1} k = n + 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$. □

Définition 9.2 (Suite géométrique)**.** Une suite géométrique à valeur dans $\mathbb{C}$ est une suite définie par la donnée de $u_0 \in \mathbb{C}$ et d'une relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = ru_n, \tag{9.16}$$

où $r \in \mathbb{C}$ est la raison de la suite et ne dépend pas de n.

Proposition 9.7. Soit u une suite géométrique de raison r, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = u_0 r^n. \tag{9.17}$$

Démonstration. Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ $u_n = u_0 r^n$. On remarque que $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $r^0 = 1$. Soit un naturel $n \geq 1$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Alors $u_{n+1} = ru_n$ par définition et par hypothèse de récurrence $u_{n+1} = ru_0 r^n = u_0 r^{n+1}$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par théorème de récurrence pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

Proposition 9.8. Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$ et de raison $r \in \mathbb{C}$. Soient p et q deux entiers naturels tels que $p \leq q$, alors

$$S_{p,q} = \sum_{k=p}^{q} u_k = \begin{cases} (q-p+1) & r = 1 \\ \frac{u_p - u_{q+1}}{1-r} = u_0 r^p \left(\frac{1-r^{q-p+1}}{1-r}\right) & r \neq 1 \end{cases}. \tag{9.18}$$

C'est “le premier terme écrit” moins “le premier terme négligé” sur “un moins la raison”.

Démonstration. Si $r = 1$ alors $S_{p,q} = \sum_{k=p}^{q} u_0 = (q-p+1)u_0$ et sinon on a

$$(1-r)S_{p,q} = (1-r)\sum_{k=p}^{q} u_0 r^k = \sum_{k=p}^{q} u_0 r^k - \sum_{k=p}^{q} u_0 r^{k+1} \tag{9.19}$$

$$= \sum_{k=p}^{q} u_0 r^k - \sum_{j=p+1}^{q+1} u_0 r^j \tag{9.20}$$

$$= u_0 r^p - u_0 r^{q+1} = u_p - u_{q+1}, \tag{9.21}$$

et puisque $r \neq 1$ on a bien $S_{p,q} = \frac{u_p - u_{q+1}}{1-r}$. □

Proposition 9.9. Soient a et b deux complexes et n un entier naturel, alors

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}. \tag{9.22}$$

Démonstration.
- si $a = b$ la proposition est vraie puisque $0 = 0$;
- si $a = 0$ alors $-b^{n+1} = -bb^n$;
- si $a \neq 0$ et $a \neq b$, on définit la suite géométrique u de premier terme 1 et de raison $\frac{b}{a}$ qui existe puisque $a \neq 0$ et qui est différente de 1 puisque $a \neq b$. En appliquant la proposition précédente on a :

$$S_{0,n} = \sum_{k=0} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}}, \tag{9.23}$$

donc

$$a^n \sum_{k=0} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a-b}, \tag{9.24}$$

finalement

$$(a-b)\sum_{k=0} b^k a^{n-k} = (a-b)\sum_{k=0} b^{n-k} a^k = a^{n+1} - b^{n+1}. \tag{9.25}$$

On peut aussi le démontrer directement en utilisant les sommes télescopiques comme dans le calcul de $S_{p,q}$. □

9.2 Entiers naturels $n!$ et $\binom{n}{k}$

9.2.1 Factorielle

Définition 9.3. Pour tout entier naturel n non nul, on définit $n! = \prod_{k=1}^{n} k$ et par convention $0! = 1$.

Proposition 9.10. La suite $(n!)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'unique suite u vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \geq 1 \quad u_{n+1} = (n+1)u_n \end{cases}. \tag{9.26}$$

Démonstration. L'unicité est assurée par le théorème de récurrence. □

9.2.2 Coefficients binomiaux – formule de Pascal

Définition 9.4 (Coefficients binomiaux)**.** Pour tout entier naturels n et p on définit un nombre noté $\binom{n}{p}$ par :

$$\begin{cases} \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} & 0 \leq p \leq n \\ \binom{n}{p} = 0 & p > n \end{cases}. \tag{9.27}$$

Proposition 9.11. Soit un entier naturel n, alors $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$ et $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Démonstration.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = 1; \tag{9.28}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \binom{m}{1} = \frac{m!}{1!(m-1)!} = m \binom{0}{1} = 0; \tag{9.29}$$

$$\forall n \geq 2 \quad \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \binom{0}{2} = \binom{1}{2} = 0. \tag{9.30}$$

□

Proposition 9.12.

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad 0 \leq p \leq n \quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}; \tag{9.31}$$

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad \binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} \quad \binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}; \tag{9.32}$$

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^{*2} \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}. \tag{9.33}$$

Démonstration. 1. Il faut et il suffit de changer n par $n-p$ dans la définition ;

2. soient $(p,n) \in \mathbb{N}^2$ $p \neq 0$ alors :
   — si $p > n$ alors $\binom{n}{p} = 0$ et $p-1 > n-1$ alors $\binom{n-1}{p-1} = 0$ d'où l'égalité, si $0 < p \leq n$ alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n}{p}\frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} \tag{9.34}$$

$$= \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1} \tag{9.35}$$

— si $p > n$ $\binom{n}{p} = 0$ alors $p - 1 \geq n$ et si $p - 1 = n$ alors $n - p + 1 = 0$ et les deux membres de l'égalité sont nuls ; si $p - 1 > n$ $\binom{n}{p-1} = 0$ et les deux membres de l'égalité sont nuls.
— si $0 < p < n$ alors

$$\binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p} \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)(n-p)!} \tag{9.36}$$

$$= \frac{n-p+1}{p} \frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!} \tag{9.37}$$

donc $\binom{n}{p} = \frac{n-p+1}{p}\binom{n}{p-1}$

3. Soient n et p deux entiers tout deux non nuls, alors
— si $p > n$ alors $p > p - 1 > n - 1$ alors $\binom{n}{p} = 0 = 0 + 0 = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$
— si $0 < p \leq n - 1$ alors $p < n$ et $p - 1 < n - 1$ donc

$$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} \tag{9.38}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!}\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{n-p}\right) \tag{9.39}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!} \frac{n}{p(n-p)} \tag{9.40}$$

$$= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \tag{9.41}$$

— si $p = n$ alors

$$\binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1} = \binom{n-1}{n} + \binom{n-1}{n-1} = 0 + 1 = \binom{n}{n}. \tag{9.42}$$

□

Proposition 9.13. Soient deux entiers naturels n et p, alors $\binom{n}{p}$ est un entier naturel.

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ "$\forall p \in \mathbb{N}$ $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$". On vérifie l'étape d'initialisation $n = 0$: $\binom{0}{p} = \begin{cases} 0 & p > 0 \\ 1 & p = 1 \end{cases}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Vérifions l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ soient vraie, alors $\binom{n+1}{0} = 1 \in \mathbb{N}$. Pour tout p non nul $\binom{n+1}{p} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}$ d'après la relation de Pascal. L'hypothèse de récurrence donne $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$ et $\binom{n}{p-1} \in \mathbb{N}$ et puisque l'addition est une loi de composition interne sur $\mathbb{N}$ alors $\binom{n+1}{p} \in \mathbb{N}$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Le théorème de récurrence nous permet de conclure et de dire que la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour n'importe quel entier naturel n. □

9.2.3 Formules du binôme de Newton

Proposition 9.14. Pour tous complexes a et b et tout entier n,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{9.43}$$

Démonstration. Soient a,b deux complexes et n un entier naturel, alors on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$". Vérifions l'étape initiale :

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k}, \tag{9.44}$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie. Vérifions ensuite l'hérédité en supposant que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie alors

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)^n = (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \tag{9.45}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \tag{9.46}$$

$$= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-j+1} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \tag{9.47}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \binom{n}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} \tag{9.48}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} \tag{9.49}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}. \tag{9.50}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Le théorème de récurrence nous permet donc de conclure et d'affirmer que pour tout entier n la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

Cas particulier :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{9.51}$$

9.3 Ensembles finis – dénombrement

9.3.1 Notion d'ensemble fini

Définition 9.5. Soit E un ensemble. E est fini s'il existe un entier n non nul et une bijection $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto E$, sinon E est infini.

Théorème 9.2. *Soient p et q deux entiers naturels non nuls. S'il existe une bijection $\varphi : [\![1\,;p]\!] \longmapsto [\![1\,;q]\!]$ alors $p = q$.*

Démonstration. Hors programme, cependant la démonstration est écrite en annexe **??**. □

Proposition 9.15 (Définition)**.** Soit E un ensemble fini. Alors l'entier naturel n de la définition est unique et on l'appelle le cardinale de E et on le note $\operatorname{Card} E$.

Par convention, l'ensemble vide est fini et son cardinal vaut 0.

Démonstration. Soient deux bijections $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto E$ et $\psi : [\![1\,;p]\!] \longmapsto E$ (on note $\psi^{-}1 : E \longmapsto [\![1\,;p]\!]$). Par composé de deux bijections, l'application $\psi^{-}1 \circ \varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto [\![1\,;p]\!]$ est une bijection. Si on applique le théorème **??** on en déduit donc que $n = p$. □

Proposition 9.16. Soit E un ensemble fini et F un ensemble tel qu'il existe une bijection $\varphi : E \longmapsto F$. alors F est un ensemble fini de même cardinal que E.

Démonstration. E est fini, donc il existe un entier n et une bijection $\psi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto E$. Ainsi l'application $\varphi \circ \psi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto F$ est bijective, puisque c'est la composée de deux applications bijectives. Donc F est un ensemble fini et $\operatorname{Card} F = n = \operatorname{Card} E$. □

Si E est un ensemble fini de cardinal $n \neq 0$, l'existence d'une bijection $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto E$ permet de "numéroter" les éléments de E et donc d'écrire l'ensemble E en extension $E = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}$. Réciproquement, si on dispose d'une écriture en extension on peut en déduire que E est un ensemble fini mais pas forcément que son cardinal est égal à p, car pour cela il faut que les éléments soient distincts.

La notion de cardinal correspond à la notion intuitive du nombre d'éléments d'un ensemble.

9.3.2 Parties finies

9.3.2.1 Parties finies de $\mathbb{N}$

Théorème 9.3. *Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. Alors il existe un entier non nul n et une bijection croissante $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto \mathcal{P}$. $\mathcal{P}$ est donc fini et de plus le couple (n, φ) est unique.*

Démonstration. La démonstration est hors programme, elle se fait par récurrence sur $M \in \mathbb{N}^*$ et la propriété est $\mathcal{P}(M)$ Pour toute partie non vide $\mathcal{P}$ de $\mathbb{N}$ et majorée par M, il existe un unique couple (n, φ) avec $n \neq 0$ et $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto \mathcal{P}$ bijective et croissante. □

1. La définition de la fonction φ correspond à l'idée de ranger les éléments par ordre croissant ;
2. L'application $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto \mathcal{P}$ $\mathcal{P} \subset \mathbb{N}$ est telle que $\varphi(1) \geq 0$ $\varphi(2) \geq 1$ $\ldots$;
3. On montre par récurrence que pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ $\varphi(k) \geq k - 1$, en particulier $\varphi(n) \leq n - 1$.
   Or M est un majorant de $\mathcal{P}$ donc $\varphi(n) \leq M$ donc $n - 1 \leq M$ soit alors $n \geq M + 1$.

4. M est un majorant de $\mathcal{P}$ donc $\varphi(n) \geq M$ et φ est strictement croissante donc $\varphi(n-1) < \varphi(n)$ donc $\varphi(n-1) \leq \varphi(n) - 1$ donc $\varphi(n-1) \leq M - 1$.

   On montre par récurrence descendante sur $k \in [\![0\,;n]\!]$ la propriété $\mathcal{P}(k)$ $\varphi(k) \leq M - (n-k)$

   Initialisation à n : $\mathcal{P}(n)$ est vraie puisque $\varphi(n) \leq M$.

   Hérédité : Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour tout entier $k \in \{2, \ldots, n\}$ et montrons alors que $\mathcal{P}(k-1)$ est vraie. Puisque φ est strictement croissante, on a $\varphi(k-1) \leq \varphi(k) - 1$ et par hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(k)$ est vraie donc $\varphi(k) \leq M-(n-k)$ et $\varphi(k-1) \leq M-(n-k)-1 = M-(n-k+1) = M - (n-(k-1))$ donc $\mathcal{P}(k-1)$ est vraie.

   On en conclue donc , grâce au théorème de récurrence, que la proposition est vraie. $\forall k \in \{1, \ldots, n\} \varphi(k) \leq M - (n-k)$. Si $n = M+1$ alors $k-1 \leq \varphi(k) \leq M-(M+1-k) = k-1$ donc $\forall k \in \{1, \ldots, n\} \varphi(k) = k-1$ et ainsi $\mathcal{P} = \varphi([\![1\,;n]\!]) = [\![0\,;n-1]\!] = [\![0\,;M]\!]$.

Proposition 9.17. Soit $\mathcal{P}$ une partie non vide de $\mathbb{N}$. Alors $\mathcal{P}$ est finie si et seulement si$\mathcal{P}$ est majorée.

Démonstration. $\Longleftarrow$ Déjà fait grâce au théorème **??**.

$\Longrightarrow$ On démontre par récurrence sur $p = \mathrm{Card}(\mathcal{P}) \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(p)$ pour toute partie finie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{N}$, si $\mathcal{P}$ est de cardinal p alors $\mathcal{P}$ est majorée.
Regardons l'initialisation à $p = 1$, si $\mathcal{P}$ est de cardinal 1, il existe un entier $a \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P} = \{a\}$ et a est un majorant de $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ est majorée.
Ensuite, passons à l'hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vérifiée. Soit une partie $\mathcal{P}$ de $\mathbb{N}$ à $p+1$ éléments, alors soit $a \in \mathcal{P}$ et $\mathcal{P}' = \mathcal{P} \setminus \{a\}$. La partie $\mathcal{P}'$ est une partie de $\mathbb{N}$ à p éléments, donc d'après l'hypothèse de récurrence elle et majorée. Notons M le majorant de $\mathcal{P}'$ et notons $N = \max(M, a)$. Alors N est un majorant de la partie $\mathcal{P}$. La partie $\mathcal{P}$ est donc majorée. $\mathcal{P}(p+1)$ est donc vérifiée.
Grâce au théorème de récurrence, on peut affirmer que la propriété $\mathcal{P}(p)$ est vraie sur N^*. Donc une partie finie de $\mathbb{N}$ est majorée.

□

9.3.2.2 Parties d'un ensemble fini

Théorème 9.4. *Soient E et F deux ensembles tel que E soit fini et $F \subset E$. Alors F est un ensemble fini et* $\mathrm{Card}(F) \leq \mathrm{Card}(E)$. *De plus* $F = E \iff \mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E)$

Démonstration. 1. Si $F = \emptyset$, F est fini et son cardinal est nul, $0 \leq \mathrm{Card}(E)$. De plus $E = F = \emptyset \iff \mathrm{Card}(E) = 0 = \mathrm{Card}(F)$;

2. sinon il existe un entier n non nul tel qu'il existe une bijection $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto E$. Soit $A = \varphi^{-1}(F) \subset [\![1\,;n]\!]$. A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. A est donc une partie finie de $\mathbb{N}$. Il existe donc un entier naturel p non nul et une bijection $\psi : [\![1\,;p]\!] \longmapsto A$. On peut définir la restriction $\widetilde{\varphi}$: $\left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \varphi(x) \end{array}\right.$. $\widetilde{\varphi}$ est bijective. En effet :
   - $\widetilde{\varphi}$ est injective, puisque si pour tout x, y de A $\widetilde{\varphi}(x) = \widetilde{\varphi}(y)$ alors $\varphi(x) = \varphi(y)$ et comme φ est injective (puisque bijective) on a $x = y$.

— $\widetilde{\varphi}$ est surjective, pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel $y\varphi(x)$. Mais $A = \varphi^{-1}(F)$ donc $x \in A$ et $y = \varphi(x) = \widetilde{\varphi}(x)$.

Soit $f = \widetilde{\varphi} \circ \psi$, alors f est bijective comme la composée de deux applications bijectives. On a prouvé que F est un ensemble fini de cardinal p. Soit $A' = \{x-1, x \in A\} \subset \mathbb{N}$. A' est une partie finie de $\mathbb{N}$ de même cardinal que A et donc que F. Puisque $A \subset [\![1\,;n]\!]$ alors $A' \subset [\![0\,;n-1]\!]$. $M = n-1$ est un majorant de A'. Alors $p = \mathrm{Card}(A') \leq M+1 = n-1+1 = n$. De plus,

— si $E = F$ alors $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$

— si $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$, alors $n = p = M+1$ on en déduit que $A' = [\![0\,;M]\!] = [\![0\,;n-1]\!]$ et donc que $A = [\![1\,;M+1]\!] = [\![1\,;n]\!]$. $F = \varphi(A) = \varphi([\![1\,;n]\!]) = E$

□

Si E est un ensemble infini, E peut par exemple être en bijection avec une de ces parties strictes. Comme par exemple $\mathbb{N}$ et l'ensemble des entiers pairs sont en bijection.

9.3.3 Opérations sur les ensembles finis

9.3.3.1 Réunion d'ensembles finis

Proposition 9.18. Soient E et F deux ensembles finis *disjoints*. Alors $E \cup F$ est fini et

$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F). \tag{9.52}$$

Démonstration. Soit $n = \mathrm{Card}(E) \geq 1$ et $m = \mathrm{Card}(F) \geq 1$. Il existe deux bijections φ et ψ telles que $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto E$ et $\psi : [\![1\,;m]\!] \longmapsto F$. Soit maintenant l'application

$$f\colon \left\{\begin{array}{ccc} [\![1\,;m+n]\!] & \longrightarrow & E \cup F \\ k & \longmapsto & \begin{cases} \varphi(k) & 1 \leq k \leq n \\ \psi(k-n) & n+1 \leq k \leq m+n \end{cases} \end{array}\right. . \tag{9.53}$$

Alors :

— la fonction f est bien définie puisque si $1 \leq k \leq n$ alors $\varphi(k)$ existe et $\varphi(k) \in E \subset E \cup F$. si $n+1 \leq k \leq n+m$ alors $1 \leq k-n \leq m$ et donc $\psi(k-n)$ existe et $\psi(k) \in F \subset E \cup F$.

— la fonction f est injective. En effet, soient deux entiers k et k' différents dans $[\![1\,;m+n]\!]$. Alors trois cas se proposent à nous :

  — si ces deux entiers sont dans $[\![1\,;n]\!]$, alors puisque φ est injective alors f l'est aussi.

  — si ces deux entiers sont dans $[\![n\,;n+m]\!]$, alors puisque ψ est injective alors f l'est aussi.

  — par contre si par exemple $k \in [\![1\,;n]\!]$ et $k' \in [\![n+1\,;n+m]\!]$ (on peut inverser les positions) alors $f(k) = \varphi(k') \in E$ et $f(k') = \psi(k'-n) \in F$ et $E \cap F = \emptyset$ donc $f(k) \neq f(k')$ donc f est aussi injective.

— La fonction f est surjective. En effet, soit un élément y de $E \cup F$. Si $y \in E$, alors il existe un entier k dans $[\![1\,;n]\!]$ tel que $y = \varphi(k) = f(k)$ puisque φ est surjective. Si $y \in F$, alors il existe un entier k dans $[\![1\,;n]\!]$ tel que $y = \psi(k) = f(k+n)$ puisque ψ est surjective. Donc f est surjective.

Au final, on a démontré que l'application f est bijective, donc $E \cup F$ est un ensemble fini avec $\mathrm{Card}(E \cup F) = n + m = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F)$. □

Proposition 9.19. Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \cup F$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(E \cup F) = \mathrm{Card}(E) + \mathrm{Card}(F) - \mathrm{Card}(E \cap F). \tag{9.54}$$

Démonstration. On sait que

$$E = (E \cap F) \cup (E \cap \overline{F}) \quad \emptyset = (E \cap F) \cap (E \cap \overline{F}), \tag{9.55}$$

alors en appliquant la proposition précédente on a

$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E \cap F) + \mathrm{Card}(E \cap \overline{F}). \tag{9.56}$$

Montrons que $E \cup F = (E \cap \overline{F}) \cup F$. D'une part $E \cap \overline{F} \subset E$ donc $(E \cap \overline{F}) \cup F \subset E \cup F$. D'autre part, soit un élément x, alors si $x \in$E∪F trois cas de figure se présentent :
— si $x \in F$ alors $x \in (E \cap \overline{F}) \cup F$;
— si $x \in E$ et $x \in F$ alors $x \in (E \cap \overline{F}) \cup F$;
— si $x \in E$ et $x \notin F$ alors $x \in E \cap \overline{F}$, donc $x \in (E \cap \overline{F}) \cup F$.
Alors $E \cup F \subset (E \cap \overline{F}) \cup F$, donc avec les deux inclusions $E \cup F = (E \cap \overline{F}) \cup F$. On a aussi $(E \cap \overline{F}) \cap F = \emptyset$, donc en appliquant la proposition **??**, $E \cup F$ est un ensemble fini et

$$\begin{aligned} \mathrm{Card}(E \cup F) &= \mathrm{Card}(E \cap \overline{F}) + \mathrm{Card}(F) && (9.57)\\ &= \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(E \cap F) + \mathrm{Card}(F). && (9.58) \end{aligned}$$

□

Proposition 9.20. Si F est une partie d'un ensemble fini E, alors F est fini, son complémentaire $\complement_E F$ est aussi fini et $\mathrm{Card}(\complement_E F) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(F)$.

Démonstration. En appliquant le théorème **??**, les ensembles F et $\complement_E F$ sont finis et comme ils sont disjoints de réunion égale à E, la proposition **??**, nous permet d'écrire que

$$\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F) + \mathrm{Card}(\complement_E F). \tag{9.59}$$

□

Proposition 9.21. Soient p un entier naturel et $(A_k)_{k \in [\![1;p]\!]}$ p ensembles deux à deux disjoints. Alors $\bigcup_{k=1}^{p} A_k$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(A_k). \tag{9.60}$$

Démonstration. On démontre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(p)$ "pour toute suite d'ensemble $(A_k)_{k \in [\![1;p]\!]}$ p ensembles deux à deux disjoints. Alors $\bigcup_{k=1}^{p} A_k$ est un ensemble fini et $\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(A_k)$". L'étape initiale pour $p = 1$ est évident. L'hérédité se démontre en supposant que pour un naturel p, $\mathcal{P}(p)$ vraie. On note $B_p = \bigcup_{k=1}^{p} A_k$ et donc $\bigcup_{k=1}^{p+1} A_k = A_{p+1} \cup B_p$.

Puisque $\mathcal{P}(p)$ est vraie, alors B_p est fini de cardinal $\mathrm{Card}(B_p) = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{Card}(A_k)$. Puisque tous les ensembles $(A_k)_{k\in[\![1;p+1]\!]}$ sont deux à deux disjoints on a $A_{p+1} \cap B_p = \emptyset$. D'après la proposition **??**, $A_{p+1} \cup B_p$ est fini et

$$\mathrm{Card}(A_{p+1} \cup B_p) = \mathrm{Card}(A_{p+1}) + \mathrm{Card}(B_p). \tag{9.61}$$

Donc si on remplace B_p par l'union on obtient

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{p+1} A_k\right) = \sum_{k=1}^{p+1} \mathrm{Card}(A_k). \tag{9.62}$$

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Alors le théorème de récurrence nous permet de conclure en affirmant que la propriété P est vraie pour tout naturel p non nul. $\square$

9.3.3.2 Produit d'ensembles finis

Proposition 9.22. Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \times F$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F). \tag{9.63}$$

Démonstration. Si $E = \emptyset$ alors $E \times F = \emptyset$ est finie et $\mathrm{Card}(E \times F) = 0 = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F)$.

Si $E \neq \emptyset$, alors il existe un entier naturel non nul n et une application bijective $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto E$. Donc on peut noter $E = \{\varphi(1), \ldots, \varphi(n)\}$ et $A_k = \{\varphi(k)\} \times F$. Alors $E \times F = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Puisque φ est bijective, les A_k sont deux à deux disjoints. Soit pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\psi_k : \left\{ \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & A_k \\ x & \longmapsto & (\varphi(k), x) \end{array} \right.$. Cette fonction est bien définie, elle est bijective. Donc A_k est un ensemble fini et $\mathrm{Card}(A_k) = \mathrm{Card}(F)$. Puisque les A_k sont finis et deux à deux disjoints, le produit $E \times F$ est fini et d'après la proposition **??** on a

$$\mathrm{Card}(E \times F) = \sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Card}(F) = n\,\mathrm{Card}(F) = \mathrm{Card}(E) \times \mathrm{Card}(F). \tag{9.64}$$

$\square$

Proposition 9.23. Soit E un ensemble fini, alors pour tout entier naturel p non nul E^p est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(E^p) = \mathrm{Card}(E)^p. \tag{9.65}$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(p)$ "E^p est fini et $\mathrm{Card}(E^p) = \mathrm{Card}(E)^p$". L'étape d'initialisation, pour $p = 1$ est triviale. L'hérédité se démontre en considérant que pour tout naturel $p \geq 1$, $\mathcal{P}(p)$ vraie pour montrer $\mathcal{P}(p+1)$. En effet puisque $E^{p+1} = E^p \times E$ d'après l'hypothèse de récurrence E^p est fini et $\mathrm{Card}(E^p) = \mathrm{Card}(E)^p$. La proposition **??** affirme que E^{p+1} est fini et que

$$\mathrm{Card}(E^{p+1}) = \mathrm{Card}(E^p) \times \mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(E)^{p+1}. \tag{9.66}$$

Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie. Ainsi par théorème de récurrence la proposition $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout entier p non nul. $\square$

9.3.4 Applications d'un ensemble fini vers un ensemble fini

Soient E et F deux ensembles finis. On s'intéresse à l'ensemble des applications de E dans F noté F^E.

Théorème 9.5. *Soient E et F deux ensembles finis non vides* de même cardinal *et $f \in F^E$, alors*

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective.} \tag{9.67}$$

Démonstration. On sait déjà que la bijectivité entraîne l'injectivité et la surjectivité.

— Supposons que f est injective. Soit $A = f(E)$, l'application $f^{|A}$ est une application bijective, donc $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$ et puisque E et F ont le même cardinal, $\text{Card}(A) = \text{Card}(F)$ mais on sait aussi que $A \subset F$ donc au final $A = f(E) = F$. Cela signifie que f est surjective. Elle est donc bijective ($f^{|A} = f$).

— Supposons que f est surjective. Pour tout $y \in F$ on peut choisir un élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Définissons l'ensemble A constitué par ces éléments x de E. L'application $f_{|A} : A \longmapsto E$ est donc bijective. Alors $\text{Card}(A) = \text{Card}(F)$ et puisque E et F ont le même cardinal, $\text{Card}(A) = \text{Card}(E)$, or $A \subset E$ donc $A = E$ et ainsi f est bijective ($f_{|A} = f$).

□

— Si E et F sont finis de même cardinal, il existe une bijection $\varphi : E \longmapsto F$. En effet il existe un entier naturel non nul n et une fonction $f_1 : [\![1\,;n]\!] \longmapsto E$ bijective (puisque E est fini) et une fonction $f_2 : [\![1\,;n]\!] \longmapsto F$ bijective (puisque F est fini), donc il faut et il suffit de prendre $\varphi = f_2 \circ f_1^{-1}$.

— Si E et F sont finis et une application $f : E \longmapsto F$, alors

$$f \text{ est injective} \implies \text{Card}(E) \leq \text{Card}(F); \tag{9.68}$$
$$f \text{ est surjective} \implies \text{Card}(E) \geq \text{Card}(F); \tag{9.69}$$
$$f \text{ est bijective} \implies \text{Card}(E) = \text{Card}(F). \tag{9.70}$$

Théorème 9.6. *Soient E et F des ensembles finis non vides, alors F^E est un ensemble fini tel que*

$$\text{Card}\left(F^E\right) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}. \tag{9.71}$$

Démonstration. Puisque E est fini, il existe un entier naturel p non nul et une bijection $\varphi : [\![1\,;p]\!] \longmapsto E$, c'est à dire qu'on peut écrire $E = \{\varphi(k)\}_{k \in [\![1;p]\!]}$. Soit l'application f telle que

$$f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} F^E & \longrightarrow & F^p \\ u & \longmapsto & (u(\varphi(1)), \ldots, u(\varphi(p))) \end{array} \right. . \tag{9.72}$$

Alors f est bien définie : puisque pour toute fonction u de F^E et tout entier i de $[\![1\,;p]\!]$, $\varphi(i) \in E$ et $u(\varphi(i)) \in F$. La fonction f est bijective, puisque pour tout $(b_1, \ldots, b_p) \in F^P$ il existe une unique application $u : E \longmapsto F$ telle que $u(\varphi(1)) = b_1, \ldots, u(\varphi(p)) = b_p$. Alors F^E est fini et $\text{Card}\left(F^E\right) = \text{Card}(F^p) = \text{Card}(F)^p = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}$. □

Proposition 9.24. Soient E et F des ensembles finis non vide de cardinaux respectifs p et n. Soit $I(E,F)$ l'ensemble des injections de E dans F. Alors $I(E,F)$ est fini et

$$\mathrm{Card}(I(E,F)) = \prod_{k=0}^{p-1}(n-k) = n(n-1)\cdots(n-p+1). \tag{9.73}$$

Démonstration. Notons A_n^p le nombre d'injections d'un ensemble à p éléments sur un ensemble à n éléments. On fait une récurrence sur le cardinal de l'ensemble de départ. Soit p un entier naturel non nul, alors $\mathcal{P}(p)$ "$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $A_n^p = \prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$".

I Si $\mathrm{Card}(E) = 1$ alors $E = \{a\}$ donc $I(E,F) = F^E$ puisque toutes les applications de E dans F sont injectives. Donc pour tout naturel non nul n $A_n^1 = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)} = n^1 = n = \prod_{k=0}^{1-1}(n-k)$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée.

H Supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie pour tout p non nul, alors soit E un ensemble fini de cardinal $p+1$. Soit un entier naturel non nul n et F un ensemble de cardinal n. Soit un élément $a \in E$ et $E' = E \setminus \{a\}$. Se donner une injection i de E dans F revient à se donner
— $i(a)$ un élément de F ($n = \mathrm{Card}(F)$ choix possibles),
— une application injective de E' sur $F \setminus \{i(a)\}$ (A_{n-1}^p choix possibles d'après l'hypothèse de récurrence).

Donc $A_n^{p+1} = n \times A_{n-1}^p$. Alors
— si $n \geq 2$, alors $A_{n-1}^p = \prod_{k=0}^{p-1}(n-1-k)$ et on a

$$A_n^{p+1} = n\prod_{k=0}^{p-1}(n-1-k) = \prod_{k=0}^{p}(n-k); \tag{9.74}$$

— si $n = 1$, alors $A_1^{p+1} = 0$ et $\prod_{k=0}^{p}(1-k) = 0$ car $p \geq 1$.

On a montré que pour tout entier naturel n non nul, $A_n^{p+1} = \prod_{k=0}^{p}(n-k)$. Donc $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

C Par théorème de récurrence, $\mathcal{P}(p)$ est vraie pour tout entier naturel p non nul.

□

Définition 9.6. Une permutation d'un ensemble E est une bijection de E dans E. On note $\sigma(E)$ leur ensemble.

Proposition 9.25. Si E est un ensemble fini, $\sigma(E)$ est un ensemble fini et

$$\mathrm{Card}(\sigma(E)) = \prod_{k=0}^{n-1}(n-k) = n!. \tag{9.75}$$

Démonstration. En appliquant le théorème **??** puisque E est fini et en notant que $\sigma(E) = I(E,E)$ puis en appliquant la proposition **??** et on obtient

$$\mathrm{Card}(\sigma(E)) = \prod_{k=0}^{n-1}(n-k) = n!. \tag{9.76}$$

□

9.3.5 Parties à p éléments d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini. On note pour tout entier naturel p, $\mathfrak{P}_p(E)$ l'ensemble des parties de E à p éléments.

Proposition 9.26. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ alors $\mathfrak{P}_p(E)$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card}(\mathfrak{P}_p(E)) = \binom{n}{p} \tag{9.77}$$

Démonstration. — si $p = 0$ alors $\mathfrak{P}_p(E) = \{\emptyset\}$ et $\operatorname{Card}(\mathfrak{P}_p(E)) = 1 = \binom{n}{0}$;
- si $p > n$ alors $\mathfrak{P}_p(E) = \emptyset$ et $\operatorname{Card}(\mathfrak{P}_p(E)) = 0 = \binom{n}{0}$;
- si $1 \leq p \leq n$ alors le nombre d'injection de $[\![1\,;p]\!]$ dans E est $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.
  Se donner une injection de $[\![1\,;p]\!]$ dans E revient à
  - choisir p éléments distincts dans E, c'est à dire une partie à p éléments de E ($\operatorname{Card}(\mathfrak{P}_p(E))$ choix possibles) ;
  - ordonner ces éléments, c'est à dire définir une bijection de $[\![1\,;p]\!]$ dans E ($p!$ choix possibles).

  Ainsi,
  $$\frac{n!}{(n-p)!} = \operatorname{Card}(\mathfrak{P}_p(E))p!. \tag{9.78}$$
  Du coup
  $$\operatorname{Card}(\mathfrak{P}_p(E)) = \binom{n}{p}. \tag{9.79}$$

□

Définition 9.7. Soit E un ensemble fini. On appelle combinaison de E à p éléments tout élément A de $\mathfrak{P}_p(E)$.

Proposition 9.27. Soit E un ensemble fini, alors l'ensemble des parties de E $\mathfrak{P}(E)$ est un ensemble fini et

$$\operatorname{Card}(\mathfrak{P}(E)) = 2^{\operatorname{Card}(E)}. \tag{9.80}$$

Démonstration. Soit $n = \operatorname{Card}(E) \in \mathbb{N}$. Alors $\mathfrak{P}(E) = \bigcup_{k=0}^{n} \mathfrak{P}_k(E)$, les $\mathfrak{P}_k(E)$ sont tous deux à deux disjoints, donc d'après le théorème **??** et la proposition **??** on a

$$\operatorname{Card}(\mathfrak{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{Card}(\mathfrak{P}_k(E)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \tag{9.81}$$

□

Chapitre 10

Nombres réels

Sommaire

Tableaux

10.1 Ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$

10.1.1 Notion d'ordre, éléments remarquables

10.1.1.1 Relation d'ordre $\leq$

On admet l'existence d'un ensemble $\mathbb{R}$ dont les éléments sont appelés réels, muni d'une relation d'ordre notée $\leq$, c'est-à-dire d'une relation binaire qui est :
— reflexive, $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \leq a$;
— antisymétrique, $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad a \leq b$ et $b \leq a \implies a = b$;
— transitive, $\forall (a, b, c) \in \mathbb{R}^2 \quad a \leq b$ et $b \leq c \implies a \leq c$.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné par $\leq$, c'est-à-dire que deux réels quelconques sont toujours comparables.

10.1.1.2 Relation d'ordre stricte <

Définition 10.1. On définit sur $\mathbb{R}$ une relation binaire, appelée “ordre” stricte et notée $<$ par :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad x < y \iff x \leq y \text{ et } x \neq y. \tag{10.1}$$

Ce n'est pas une relation d'ordre puisqu'elle n'est pas symétrique.

10.1.1.3 Éléments remarquables

Soit A une partie de $\mathbb{R}$, alors

Définition 10.2.
1. on appelle majorant de A dans $\mathbb{R}$ tout élément a de $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A \; x \leq a$. On dit que A est majorée si elle admet un majorant ;
2. on appelle minorant de A dans $\mathbb{R}$ tout élément b de $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A \; b \leq x$. On dit que A est minorée si elle admet un minorant ;
3. la partie A est bornée si et seulement si elle est majorée et minorée.

Définition 10.3.
1. On appelle un plus grand élément de A tout élément de A qui majore A et s'il existe, il est unique et on l'appelle le plus grand élément de A ;
2. on appelle un plus petit élément de A tout élément de A qui minore A et s'il existe, il est unique et on l'appelle le plus petit élément de A.

L'unicité est une conséquence de l'antisymétrie de la relation d'ordre.

10.1.2 Caractérisation d'une borne supérieure dans $\mathbb{R}$

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 10.4.
1. On appelle borne supérieure (ou supremum) de A dans $\mathbb{R}$, le plus petit élément, s'il existe, de l'ensemble des majorants de A et si elle existe elle est unique et on la note $\sup A$ ou $\sup\limits_{x \in A} x$;
2. On appelle borne inférieure (ou infimum) de A dans $\mathbb{R}$, le plus grand élément, s'il existe, de l'ensemble des minorants de A et si elle existe elle est unique et on la note $\inf A$ ou $\inf\limits_{x \in A} x$;

Théorème 10.1. *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et un réel a, alors*

$$a = \sup A \iff \begin{cases} \forall x \in A \; x \leq a \\ \forall \epsilon > 0 \; \exists x_0 \in A \; a - \epsilon < x_0 \end{cases}. \tag{10.2}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ si $a = \sup A$, alors par définition a majore A donc pour tout $x \in A$ on a $x \leq a$ et s'il existe un ϵ positif tel que pour tout $x \in A \; a - \epsilon \geq x$ alors $a - \epsilon$ est un majorant de A, or $a - \epsilon < a$ et c'est impossible puisque a est le plus petit des majorants de A. Donc pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x_0 \in A \; a - \epsilon < x_0$.

$\Longleftarrow$ Déjà a est un majorant de A. Supposons qu'il existe un majorant b qui soit plus petit que a. Soit $\epsilon = a - b > 0$, par hypothèse il existe $x_0 \in A$ tel que $x_0 > a - \epsilon = b$, alors b n'est pas un majorant de A. On arrive donc à une contradiction. Il n'existe donc pas de majorant de A qui soit strictement inférieur à a. Le réel a est donc la borne supérieure de la partie A.

□

Théorème 10.2. *Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et a un réel, alors*

$$a = \inf A \iff \begin{cases} \forall x \in A\ x \geq a \\ \forall \epsilon > 0\ \exists x_0 \in A\ x_0 < a + \epsilon \end{cases}. \tag{10.3}$$

Démonstration. Soit la partie $B = -A = \{x \in \mathbb{R}; -x \in A\}$. L'ensemble des minorants de A correspond à l'ensemble des majorants de B. S'il existe le plus grand élément de l'ensemble des minorants de A sera égal à l'opposé du plus petit élément de l'ensemble des majorants de B.

$$\inf A = -\sup B = -\sup(-A). \tag{10.4}$$

Alors,

$$a = \inf A \iff -a = \sup(-A) \tag{10.5}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x \in -A\ x \leq -a \\ \forall \epsilon > 0\ \exists x_0 \in -A\ x_0 > -a - \epsilon \end{cases} \tag{10.6}$$

$$\iff \begin{cases} \forall y \in A\ -y \leq -a \\ \forall \epsilon > 0\ \exists y_0 \in A\ -y_0 > -a - \epsilon \end{cases} \tag{10.7}$$

$$\iff \begin{cases} \forall y \in A\ y \geq a \\ \forall \epsilon > 0\ \exists y_0 \in A\ y_0 < a + \epsilon \end{cases}. \tag{10.8}$$

□

Si A admet un plus petit élément a, alors A admet une borne inférieure et $\inf A = a$. La réciproque est fausse. De la même manière, Si A admet un plus grand élément a, alors A admet une borne supérieure et $\sup A = a$ et la réciproque est aussi fausse.

10.2 Corps des réels $(\mathbb{R}, +, \times)$

10.2.1 Définition

L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni de deux lois de compositions internes, appelées addition et multiplication notées respectivement $+$ et $\times$ ou $\cdot$ ou rien.

Proposition 10.1. L'ensemble $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien (ou commutatif), c'est-à-dire que :

1. La loi $+$ est une loi de composition interne associative et commutative

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x + y) + z = x + (y + z)\ x + y = y + x; \tag{10.9}$$

2. $\mathbb{R}$ admet 0 comme élément neutre pour $+$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = 0 + x = x; \tag{10.10}$$

3. Tout élément $x \in \mathbb{R}$ admet un symétrique pour la loi $+$ noté $-x$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x + (-x) = -x + x = 0. \tag{10.11}$$

Proposition 10.2. L'ensemble $(R, +, \times)$ est un anneau commutatif, c'est-à-dire que :

1. L'ensemble $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe abélien ;
2. La loi $\times$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{R}$ qui est associative et commutative

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \times y) \times z = x \times (y \times z) \; x \times y = y \times x; \tag{10.12}$$

3. La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad x \times (y+z) = x \times y + x \times z \; (x+y) \times z = x \times z + y \times z; \tag{10.13}$$

4. $\mathbb{R}$ admet 1 comme élément neutre pour la loi $\times$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \times 1 = 1 \times x = x. \tag{10.14}$$

Proposition 10.3. L'ensemble $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps (commutatif), c'est-à-dire que :

1. L'ensemble $(R, +, \times)$ est un anneau commutatif ;
2. tout élément x non nul de $\mathbb{R}$ admet un symétrique pour la loi $\times$ noté $\frac{1}{x}$ tel que $x \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \cdot x = 1$;
3. $0 \neq 1$.

10.2.2 Propriétés de compatibilité avec l'ordre

Proposition 10.4. Pour tout réels x, y, et z on a :

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z \tag{10.15}$$

$$\begin{cases} x \leq y \\ 0 \leq z \end{cases} \implies xz \leq yz. \tag{10.16}$$

On dit que $(R, +, \times)$ muni de la relation d'ordre $\leq$ est un corps totalement ordonné. La multiplication d'une inégalité par un nombre négatif change le sens de cette inégalité.

1. Pour tous réels x, y, z et t on a :

$$\begin{cases} x \leq y \\ z \leq t \end{cases} \implies x + z \leq y + t; \tag{10.17}$$

2. pour tous réels x, y, z et t on a :

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq z \leq t \end{cases} \implies 0 \leq xz \leq yt; \tag{10.18}$$

3. pour tout réel x on a :

$$x > 0 \iff \frac{1}{x} > 0; \tag{10.19}$$

4. pour tous réels x et y on a :

$$0 < x \leq y \iff 0 < \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}. \tag{10.20}$$

10.2.3 Valeur absolue et distance

Définition 10.5. Pour tout réel x on définit un réel appelé valeur absolue de x noté $|x|$ par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}, \tag{10.21}$$

ou encore $|x| = \max(x, -x)$.

Proposition 10.5. Pour tout réel x

$$|x| \geq 0 \tag{10.22}$$
$$|x| = 0 \iff x = 0. \tag{10.23}$$

Démonstration. si $x \geq 0$ alors $|x| = x \geq 0$ et $|x| = 0 \iff x = 0$. Sinon si $x < 0$ alors $|x| = -x > 0$ donc $|x| \geq 0$ et $|x| \neq 0$. □

Proposition 10.6. Pour tous réels x et y et tout réel non nul z, on a :

$$|xy| = |x|\,|y|, \tag{10.24}$$
$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}. \tag{10.25}$$

Proposition 10.7 (Inégalité triangulaire)**.** Soient x et y deux réels, alors

$$||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|. \tag{10.26}$$

Démonstration. D'une part,

$$(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2 + 2\,|xy| - (x + y)^2 \tag{10.27}$$
$$= x^2 + y^2 + 2\,|xy| - x^2 - y^2 - 2xy \tag{10.28}$$
$$= 2(|xy| - xy) \geq 0. \tag{10.29}$$

Donc $|x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2$ et puisque les deux membres sont positifs $|x + y| \leq |x| + |y|$. D'autre part,

$$|x| = |x + y - y| \leq |x + y| + |y|. \tag{10.30}$$

Donc $|x| - |y| \leq |x + y|$ et par symétrie des rôles de x et y on complète en écrivant $||x| - |y|| \leq |x + y|$. □

Définition 10.6. Soit une application $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ appelée distance définie comme suit :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad d(x, y) = |x - y|. \tag{10.31}$$

Proposition 10.8. d est une distance sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que pour tout réels x, y et z on a

1. $d(x, y) \geq 0$, positivité ;
2. $d(x, y) = 0 \iff x = y$, séparation ;
3. $d(x, y) = d(y, x)$, symétrie ;
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, inégalité triangulaire.

Démonstration. Ce sont des conséquences immédiates des propriétés de la valeur absolue. □

Proposition 10.9. Pour tous réels x et y, on a

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}. \tag{10.32}$$

Démonstration. Si d'une part $x \geq y$ alors $|x - y| = x - y$ et donc $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{2x}{2} = x$ et $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{2y}{2} = y$. Si d'autre part $x \leq y$ alors $|x - y| = y - x$ et donc $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} = \frac{2y}{2} = y$ et $\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} = \frac{2x}{2} = x$. □

Définition 10.7. Pour tout réel x, on note $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = \max(-x, 0)$.

Proposition 10.10. Pour tout réel x, on a

$$x^+ = \frac{x + |x|}{2} \quad x^- = \frac{|x| - x}{2}, \tag{10.33}$$

ou alors

$$|x| = x^+ + x^- \quad x = x^+ - x^-. \tag{10.34}$$

Proposition 10.11. Pour tous réels x et y et tout réel $h > 0$

$$|x - y| \leq h \iff -h \leq x - y \leq h \tag{10.35}$$

$$\iff y - h \leq x \leq y + h \tag{10.36}$$

Proposition 10.12. Soit A une partie de $\mathbb{R}$, alors A est bornée si et seulement s'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout élément a de A on a $|a| \leq M$.

Démonstration. $\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe un réel M positif tel que pour tout élément a de A on ait $|a| \leq M$. Alors $-M \leq a \leq M$ donc $-M$ est un minorant de A et M en est un majorant. Ainsi A est bornée.

$\Longrightarrow$ Supposons que A soit bornée, c'est-à-dire majorée et minorée, alors il existe deux réels m_1 et m_2 tels que pour tout élément a de A on ait $m_1 \leq a \leq m_2$. Si on pose $M = \max(m_2, -m_1, 0)$ alors $|a| \leq M$.

□

10.2.4 Droite numérique achevée

Définition 10.8. On adjoint à $\mathbb{R}$ deux éléments distincts notés $+\infty$ et $-\infty$ et on note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. $\overline{\mathbb{R}}$ est la droite numérique achevée.

On prolonge la relation d'ordre $\leq$ définie sur $\mathbb{R}$ à $\overline{\mathbb{R}}$ en posant

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \quad -\infty \leq x \leq +\infty. \tag{10.37}$$

Le plus petit (grand) élément de $\overline{\mathbb{R}}$ est $-\infty$ $(+\infty)$. On prolonge aussi partiellement les lois $\times$ et $+$ à $\overline{\mathbb{R}}$.

$+$	$-\infty$	$y \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Ind
$x \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	$+\infty$
$+\infty$	Ind	$+\infty$	$+\infty$

TABLEAU 10.1 – Prolongement de la loi $+$ à la droite numérique achevée

$\times$	$-\infty$	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Ind	$-\infty$	$-\infty$
$y < 0$	$+\infty$	xy	0	xy	$-\infty$
$y = 0$	Ind	0	0	0	Ind
$y > 0$	$-\infty$	xy	0	xy	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Ind	$+\infty$	$+\infty$

TABLEAU 10.2 – Prolongement de la loi $\times$ à la droite numérique achevée

10.2.5 Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 10.9. Soient deux réels, a et b tels que $a < b$, les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties suivantes :

— $\mathbb{R} =]-\infty\,; +\infty[$;
— $[a\,; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ segment ;
— $[a\,; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ intervalle semi-ouvert ou semi-fermé ;
— $]a\,; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ idem ;
— $]a\,; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ intervalle ouvert ;
— $[a\,; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ demi-droite fermée ;
— $]a\,; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ demi-droite ouverte ;
— $]-\infty\,; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ demi-droite fermée ;
— $]-\infty\,; b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ demi-droite ouverte ;

On note que l'ensemble vide est aussi un intervalle $\emptyset =]a\,; a[$.

Définition 10.10. On notera que

— $\mathbb{R}+ = [0\,; +\infty[$;
— $\mathbb{R}- =]-\infty\,; 0]$;
— $\mathbb{R}+^* =]0\,; +\infty[$;
— $\mathbb{R}-^* =]-\infty\,; 0[$;
— $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} -^* \cup \mathbb{R}+^*$.

$\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Définition 10.11. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est convexe si et seulement si

$$\forall (x, y) \in A^2 \quad x \leq y \implies [x\,; y] \subset A. \tag{10.38}$$

Théorème 10.3. *Soit I une partie de $\mathbb{R}$, alors si I est un intervalle alors I est convexe.*

Démonstration. Soient a et b deux réels tels que $a \leq b$, alors

— $\mathbb{R}$ est convexe, puisque pour tout réels x et y, si $x \leq y$ alors $[x, y] \subset \mathbb{R}$;
— $[a\,; b]$ est convexe puisque pour tous réels x et y de $[a\,; b]$ si $a \leq x \leq y \leq b$ alors $[x\,; y] \subset [a\,; b]$. Idem pour les intervalles semi-ouverts et semi-fermés ;

— $[a\,;+\infty[$ est convexe, puisque pour tous réels x et y de $[a\,;+\infty[$ tels que $a \leq x \leq y$ $[x\,;y] \subset [a\,;+\infty[$. Idem pour les autres demi-droites.

□

10.3 Propriété de la borne supérieure

10.3.1 Axiome

Théorème 10.4 (Axiome de la borne supérieure)**.** *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Théorème 10.5. *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Démonstration. Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Soit $B = -A = \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in A\}$. B est donc non vide et majorée, alors en appliquant le théorème **??** B admet une borne supérieure. D'après la caractérisation de la borne inférieure, on en déduit que A admet une borne inférieure et de plus $\inf A = -\sup B$. □

10.3.2 Intervalles et parties convexes

Théorème 10.6. *Soit I une partie de $\mathbb{R}$, alors I est un intervalle si et seulement si c'est une partie convexe.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ déjà vue au théorème **??**.

$\Longleftarrow$ Supposons I convexe. Si I est vide, alors c'est un intervalle. Sinon, soit $a \in I$ et on définit $G_a =]-\infty\,;a] \cap I$ et $D_a = [a\,;+\infty[\cap I$.

— Si D_a n'est pas majoré, on va montrer que $D_a = [a\,;+\infty[$.

$$\forall M \geq a \ \exists b \in D_a \quad b \geq M. \tag{10.39}$$

Donc $b \in [a\,;+\infty[$ et $b \in I$. On note que $[a\,;b] \subset [a\,;+\infty[$. Comme I est convexe et que $a, b \in I$ $a \leq b$ alors $[a\,;b] \subset I$ et $M \in [a\,;b] \subset D_a$. On a donc montré que $[a\,;+\infty[\subset D_a$ et par définition de D_a l'inclusion réciproque est triviale donc $D_a = [a\,;+\infty[$.

— Si D_a est majorée et non vide (puisque $a \in D_a$) alors D_a admet une borne supérieure notée b. la borne supérieure b est un majorant de D_a donc $D_a \subset [a\,;b]$. D'après la caractérisation de la borne supérieure

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists x_0 \in D_a \ b - \epsilon < x_0 \leq b. \tag{10.40}$$

Soit $x \in [a\,;b[$, on pose $\epsilon = b - x > 0$. Il existe un $x_0 \in D_a$ tel que $b - \epsilon < x_0 \leq b$, qui est équivalent à ce que pour tout $x \in [a, b[$ il existe un $x_0 \in D_a$ tel que $x < x_0 \leq b$. Comme $[a\,;x_0] \subset [a\,;+\infty[$ et $[a\,;x_0] \subset I$ (car $a, x_0 \in I$ et I est convexe). Alors $[a\,;x_0] \subset D_a$. Comme $a \leq x < x_0 \leq b$ alors $x \in [a\,;x_0] \subset D_a$. Finalement $[a\,;b[\subset D_a \subset [a\,;b]$, alors $D_a = [a\,;b[$ ou $D_a = [a\,;b]$.

De la même manière, on peut montrer que soit $G_a =]-\infty\,;a]$, soit $G_a = [c\,;a]$, soit $G_a =]c\,;a]$.

Donc comme $I = G_a \cup D_a$, c'est un intervalle de $\mathbb{R}$. □

10.3.3 Propriété d'Archiméde

Proposition 10.13. Le corps des réels $\mathbb{R}$ est archimédien, c'est-à-dire

$$\forall x > 0\ \forall y \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} \quad nx \geq y. \tag{10.41}$$

Démonstration. On peut démontrer ce résultat par l'absurde. Supposons qu'il existe un réel $x > 0$ et un réel y et que pour tout entier naturel n on ait $nx < y$. Soit $A = \{nx \mid n \in \mathbb{N}\}$, alors A est non vide (car $0 \in A$) et majorée par y d'après l'hypothèse. La partie A admet donc une borne supérieure noté S. Soit un naturel n, alors $(n+1)x \in A$ donc $(n+1)x \leq S$ donc $nx \leq S-x$. Ceci montre que $S - x$ est un majorant de A, or $S - x < S$ puisque $x > 0$ et S est censé être le plus grand des majorants de A. On aboutit donc à une contradiction. L'hypothèse de départ est fausse. □

10.3.4 Partie entière d'un réel

Proposition 10.14. Pour tout réel x, il existe un unique entier n relatif, tel que $n \leq x < n + 1$, c'est la partie entière de x et on la note $E(x)$.

Unicité. Soient deux entiers relatifs n et m tels que $E(x) = m = n$, alors

$$n \leq x < n + 1 \tag{10.42}$$
$$m \leq x < m + 1. \tag{10.43}$$

Alors

$$n < m + 1 \tag{10.44}$$
$$m < n + 1, \tag{10.45}$$

et donc $-1 < n - m < 1$ et comme c'est un entier, forcément $m = n$. □

Existence. Le corps $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe donc deux naturels n et m tels ques $x \leq n$ et $-x \leq m$. Soit la partie $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x\}$, alors A est majorée par n et non vide puisque $-m \in A$. A est une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée, elle admet donc un plus grand élément noté n_0. Alors $n_0 \in \mathbb{Z}$ et $n_0 \leq x$. Puisque n_0 est le plus grand élément de A, $n_0 + 1$ n'est pas dans A. donc $n_0 + 1 > x$. Au final n_0 est la partie entière de x : $n_0 \leq x < n_0 + 1$. □

10.3.5 Ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Définition 10.12 (Densité)**.** Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si pour tout couple de réels (x, y) tels que $x < y$, on ait $[x\,;y] \cap A \neq \emptyset$.

Proposition 10.15. L'ensemble des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est non vide. Autrement dit, il existe des réels non rationnels.

Démonstration. On prouve qu'il existe des réels non rationnels en prenant l'exemple du nombre $\sqrt{2}$. Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel, alors il existe deux entiers p et $q \neq 0$ tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ (fraction irréductible), donc $2q^2 = p^2$. L'entier p^2 est pair, donc cela entraine qu'il existe un entier k tel que $p = 2k$. D'où $2q^2 = p^2 = 4k^2$ donc $q^2 = 2k^2$, alors q^2 est pair, donc q est pair. Alors p et q ne sont pas premiers enre eux. Contradiction. Alors $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. □

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\mathbb{Q}$ est stable par addition et multiplication et même quotient. Cependant, l'ensemble des irrationnels n'est pas un sous-corps, puisqu'il n'est stable ni pour la multiplication ni pour l'addition.

Proposition 10.16.

1. La somme d'un rationnel et d'un irrationnel quelconques est irrationnelle
$$\forall x \in \mathbb{Q}\ \forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \tag{10.46}$$
2. Le produit d'un rationnel non nul et d'un irrationnel quelconques est irrationnel
$$\forall x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}\ \forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \tag{10.47}$$

Démonstration.

1. Par l'absurde, si $x + y \in \mathbb{Q}$ alors $y = (x + y) - y \in \mathbb{Q}$, contradiction, donc $x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
2. idem, par l'absurde, si $xy \in \mathbb{Q}$ alors $y = \frac{1}{x} xy \in \mathbb{Q}$. contradiction, donc $xy \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

□

La conséquence est que ces deux ensembles sont infinis.

Théorème 10.7. *Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. D'après la définition de la densité, il faut montrer que pour tout couple de réels (x, y) avec $x < y$ il existe un rationnel a qui soit dans $[x\,;y]$ et un irrationnel b qui soit aussi dans $[x\,;y]$. Montrons d'abord la densité de $\mathbb{Q}$. Soit le rationnel $q = E\left(\frac{1}{y-x}\right) + 1$, donc $0 < \frac{1}{q} < y - x$. Soit $p = E(qx)$, alors $p \leq qx < p + 1$ et donc $\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q}$. Donc $x < \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < x + y - x$. Finalement $x < \frac{p+1}{q} < y$, donc $\frac{p+1}{q}$ est le rationnel recherché, ce qui prouve que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Montrons la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r tel que $x + \sqrt{2} < r < y + \sqrt{2}$ et $r - \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ avec $x < r - \sqrt{2} < y$, on montre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. □

Chapitre 11

Suites réelles

Sommaire

11.1 Convergence et divergence d'une suite numérique

11.1.1 $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \perp)$ des suites réelles à valeurs dans le corps $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

Définition 11.1. On appelle suite de nombres réels ou suites à valeurs réelles, toute famille de réels indexée par $\mathbb{N}$, c'est à dire toute application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

u_n est appelé le terme général de la suite réelle u. La suite réelle u est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Ne pas confondre la suite réelle u et son terme général u_n.* On notera $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suite réelles. Par extension on parlera aussi de suite réelle pour des familles indexées par $\mathbb{N}^*$ ou même indexées par $\mathbb{N} \cap [n_0\,; +\infty[$ pour un $n_0 \in \mathbb{N}$. On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ d'une loi de composition interne, noté $+$, définie par

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad u + v \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u_n + v_n \end{array} \right. . \tag{11.1}$$

L'ensemble $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +)$ est un groupe abélien. L'élément neutre pour l'addition est la suite réelle nulle de terme général égal à 0. On munit aussi $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ d'une loi de composition externe appelée multiplication par un réel et notée $\perp$ ou rien du tout définie telle que

$$\perp \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (\lambda, u) & \longmapsto & (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \right. . \tag{11.2}$$

Proposition 11.1. L'ensemble $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \perp)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On munit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ d'une deuxième loi de composition interne appelée multiplication et notée $\times$ ou rien du tout, définie par

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad uv = (u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{11.3}$$

Proposition 11.2. L'ensemble $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ est un anneau commutatif non intègre. De plus

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v). \tag{11.4}$$

Ainsi, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \perp, \cdot)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. La suite réelle constante égale à 1 est neutre pour la multiplication.

Définition 11.2. On dit qu'une suite réelle u est constante s'il existe un réel k tel que pour entier n $u_n = k$. On dit qu'une suite réelle u est stationnaire s'il existe un entier n_0 et un réel k tels que pour tout entier naturel n, si $n \geq n_0$ alors $u_n = k$.

11.1.2 $\mathbb{R}$-espace vectoriel $B(\mathbb{R})$ des suites réelles bornées

Définition 11.3. Soit u une suite réelle. On dit que :

1. la suite u est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier naturel n $u_n \leq M$

2. la suite u est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier naturel n $u_n \geq m$
3. la suite u est bornée si elle est majorée et minorée.

Proposition 11.3. Soit une suite réelle u, alors u est bornée si et seulement s'il existe un réel positif M tel que pour tout naturel n $|u_n| \leq M$.

Démonstration. $\Longleftarrow$ S'il existe un réel $M \geq 0$ tel que pour tout naturel n $|u_n| \leq M$, alors u est majorée par M et minoré par $-M$ donc u est bornée.

$\Longrightarrow$ Si u est bornée, il existe deux réels m et M tels que pour tout naturel n $m \leq u_n \leq M$. Posons $M_0 = \max(|m|, |M|)$, alors pour tout naturel n

$$-M_0 \leq -|m| \leq m \leq u_n \leq M \leq |M| \leq M_0, \tag{11.5}$$

donc en passant à la valeur absolue

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M_0. \tag{11.6}$$

□

On note $B(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles bornées.

Proposition 11.4. L'ensemble $B(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

Démonstration. Premièrement $B(\mathbb{R})$ est non vide, puisque la suite réelle nulle est bornée. La combinaison linéaire de deux suites réelles bornées est bornée, en effet soient u et v bornées et un réel λ. Il existe donc deux réels positifs M et M' tel que pour tout naturel n $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M'$. Alors pour tout naturel n

$$|\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda| |u_n| + |v_n| \leq |\lambda| M + M'. \tag{11.7}$$

Donc $\lambda u + v$ est bornée. Ainsi $B(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel. □

Proposition 11.5. Le produit de deux suites réelles bornées est bornée.

Démonstration. Soient u et v bornées. Il existe donc M et M' des réels positifs tels que pour tout naturel n $|u_n| \leq M$ et $|v_n| \leq M'$ donc $|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq MM'$. □

11.1.3 Notion de suite réelle convergente et de suite réelle divergente

11.1.3.1 Suites réelles convergentes

Définition 11.4. Soit une suite réelle u. On dit que la suite réelle u converge ou tend vers 0 si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \epsilon \tag{11.8}$$

Définition 11.5. Soient une suite réelle u et un réel l. On dit que u tend vers l si et seulement si $u - l$ tend vers 0. On dit que u est convergent si et seulement s'il existe un réel l tel que u tende vers l. Le réel l, s'il existe, est unique et il est appelé la limite de la suite réelle u. On note

$$l = \lim_{n \to \infty} u_n \quad l = \lim u \quad u_n \to l. \tag{11.9}$$

Unicité. Soit une suite réelle u. On suppose qu'il existe deux réels différents l et l' tels que u tende vers ces deux réels. Alors

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \epsilon \tag{11.10}$$

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_1 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \implies |u_n - l'| \leq \epsilon. \tag{11.11}$$

Puisque l et l' sont différents, prenons $\epsilon = \frac{|l-l'|}{3}$ et $n_2 = max(n_1, n_0)$ alors pour tout naturel n si $n \geq n_2$ alors

$$|l - l'| \leq |l - u_n| + |u_n - l'| \leq \frac{2}{3} |l - l'| , \tag{11.12}$$

alors puisque $|l - l'| > 0$ on obtient $1 \leq \frac{2}{3}$, ce qui est absurde. Donc $l = l'$. $\square$

Définition 11.6. Une suite réelle qui n'est pas convergente est divergente.

Proposition 11.6. Soient une suite réelle u et un réel l. Si u converge vers l, alors $|u|$ converge vers $|l|$. *La réciproque est fausse*

Démonstration. La suite réelle u converge vers l donc

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \epsilon. \tag{11.13}$$

Alors pour tout naturel n, si $n \geq n_0$ on a

$$||u_n| - |l|| = ||u_n| - |-l|| \leq |u_n + (-l)| \leq \epsilon. \tag{11.14}$$

Donc $|u|$ tend vers $|l|$. $\square$

La réciproque est fausse, en effet il peut arriver que $|u|$ converge sans que u converge comme par exemple la suite réelle de terme général $u_n = (-1)^n$.

Proposition 11.7. Toute suite réelle convergente est bornée. *La réciproque est fausse.*

Démonstration. Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on suppose que u converge vers l. On écrit la définition avec $\epsilon = 1$. Il existe alors un naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $|u_n - l| \leq 1$. Alors

$$|u_n| = |u_n - l + l| \leq |u_n - l| + |l| , \tag{11.15}$$

alors

$$|u_n| \leq 1 + |l| . \tag{11.16}$$

Soient $M_0 = \max(|u_0| , \ldots , |u_{n_0-1}|)$ et $M = \max(1 + |l| , M_0)$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} n \geq n_0 & |u_n| \leq 1 + |l| \leq M \\ n > n_0 & |u_n| \leq M_0 \leq M \end{cases} . \tag{11.17}$$

Dans tous les cas, on majore la valeur absolue de u par M. Donc u est bornée. $\square$

Si on sait qu'une suite réelle n'est pas bornée, on peut en conclure directement qu'elle diverge.

Proposition 11.8. Soient une suite réelle u et deux réels a et b. On suppose que u converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$

1. si $a < l$ alors il existe un naturel n_0 tel que pour tout naturel n, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq a$
2. si $b > l$ alors il existe un naturel n_1 tel que pour tout naturel n, si $n \geq n_1$ alors $u_n \leq b$
3. si $a \leq l \leq b$ alors il existe un naturel n_2 tel que pour tout naturel n, si $n \geq n_2$ alors $a \leq u_n \leq b$

Démonstration.

1. si $a < l$ alors on pose $\epsilon = l - a > 0$, il existe un naturel n_0 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $|u_n - l| \leq l - a$ alors $a - l \leq u_n \leq l - a$ donc $a \leq u_n$
2. De la même manière, si $b > l$ on pose $\epsilon = b - l$ et il existe un naturel n_1 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_1$ alors $|u_n - l| \leq b - l$ alors $u_n - l \leq |u_n - l| \leq b - l$ donc $u_n \leq b$
3. Soit $n_2 = \max(n_1, n_0)$ donc pour tout naturel n, si $n \geq n_2$ alors $u_n \geq a$ et $u_n \leq b$ donc $a \leq u_n \leq b$.

□

Définition 11.7. Soit une propriété P portant sur un entier n. On dira que P est vraie "à partir d'un certain rang" s'il existe un naturel n_0 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $P(n)$ est vraie.

Corollaire 11.8.1. *Soit une suite réelle u. Si u converge vers une limite l positive alors il existe un réel a positif tel que u soit minorée par a "à partir d'un certain rang"*

Démonstration. Soit $a = \frac{l}{2}$ alors $0 < a < l$. On applique la proposition avec ce réel a. Il existe un naturel n_0 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq a$. La suite réelle u est donc minorée "à partir d'un certain rang". □

Corollaire 11.8.2. *Soit une suite réelle u. Si u converge vers une limite l non nulle, alors il existe un réel a strictement positif tel que la suite réelle $|u|$ soit minorée par a "à partir d'un certain rang".*

Démonstration. On sait que $|u|$ converge vers $|l| > 0$. On applique le corollaire précédent à cette suite réelle. □

11.1.3.2 Suites réelles tendant vers l'infini

Définition 11.8. Soit une suite réelle u, on dit que u tend vers $+\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n \geq A, \tag{11.18}$$

et on note $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = +\infty$.

On dit aussi que u tend vers $-\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n \leq A \tag{11.19}$$

et on note $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = -\infty$.

Une suite réelle qui tend vers $\pm\infty$ diverge. De telles suites réelles sont dites divergentes de première espèce. Les suites réelles divergentes qui n'admettent pas de limites sont dites divergentes de deuxième espèce, par exemple telle que la suite réelle de terme général $u_n = (-1)^n$.

Proposition 11.9. Soit une suite réelle u. Si u tend vers $\pm\infty$ alors $|u|$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. En effet, si la limite de u est $+\infty$, alors pour tout réel A il existe un naturel n_0 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq A$, donc $|u_n| \geq u_n \geq A$. Ainsi $|u|$ tend vers $+\infty$.

De la même manière si u tend $-\infty$ alors pour tout réel B il existe un naturel n_1 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_1$ alors $u_n \leq -B$, alors $-u_n \geq B$ donc $|u_n| \geq -u_n \geq B$. Ainsi $|u|$ tend vers $+\infty$. □

Proposition 11.10. Soit une suite réelle u.

1. Si u tend vers $+\infty$ alors u est minorée mais n'est pas majorée.
2. Si u tend vers $-\infty$ alors u est majorée mais n'est pas minorée.

Démonstration.

1. D'après la définition, u n'est pas majorée. En particulier pour tout réel A il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} \geq A$. Si on applique la définition avec $A = 0$ alors pour tout entier n plus grand que n_0 $u_{n_0} \geq 0$. Soient $m_0 = \min(u_0, \ldots, u_{n_0-1}, 0)$ et un naturel n. Si $n > n_0$ alors $u_n \geq 0 \geq m_0$. Si $n \leq n_0$ alors $u_n \geq m_0$. Donc pour tout entier n $u_n \geq m_0$. La suite réelle u est minorée
2. idem

□

La suite réelle $|u|$ peut tendre vers $+\infty$ sans que u tende vers $+\infty$ ou $-\infty$. Comme par exemple la suite réelle de terme général $u_n = (-1)^n n$

11.1.4 Suites réelles extraites

Définition 11.9. Soit une suite réelle u, on dit que v est une suite réelle extraite de u s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_{\varphi(n)}$.

Lemme 11.1. *Soit une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante, alors pour tout naturel n $\varphi(n) \geq n$.*

Démonstration. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ $\varphi(n) \geq n$.

I $n = 0$, puisque $\varphi(0) \in \mathbb{N}$ alors $\varphi(0) \geq 0$.

H soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ alors puisque φ est strictement croissante $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et par hypothèse de récurrence $\varphi(n+1) > n$ et comme $\varphi(n+1) \in \mathbb{N}$ on a $\varphi(n+1) \geq n+1$. Alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

C par théorème de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout naturel n.

□

Proposition 11.11. Soient u une suite réelle et v une suite réelle extraite de u. Si u converge vers un réel l alors v converge aussi vers l. La réciproque est fausse.

Démonstration. Puisque v est extraite de u, il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout naturel n $v_n = u_{\varphi(n)}$. Puisque u converge vers l, pour tout $\epsilon > 0$ il existe un naturel n_0 tel que pour tout naturel n, si $n \geq n_0$ alors $|u_n - l| \leq \epsilon$. D'après le lemme, pour tout naturel n_0, $\varphi(n) \geq n \geq n_0$ donc $|v_n - l| = \left|u_{\varphi(n)} - l\right| \leq \epsilon$. Alors v converge vers l. $\square$

Pour démontrer qu'une suite réelle diverge, on peut parfois montrer soit qu'une de ses sous-suites réelles diverge, soit que deux de ses sous-suites réelles ont des limites différentes. Comme par exemple la suite réelle de terme général $u_n = (-1)^n$.

Proposition 11.12. Soit une suite réelle u. On suppose que les deux suite réelle extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux vers un réel l. Alors u converge vers l.

Démonstration. Soit un réel $\epsilon > 0$. Il existe alors deux naturels n_1 et n_2 tels que pour tout naturel n

$$n \geq n_0 \implies |u_{2n} - l| \leq \epsilon \tag{11.20}$$

$$n \geq n_1 \implies |u_{2n+1} - l| \leq \epsilon \tag{11.21}$$

On note $n_2 = \max(2n_0, 2n_1 + 1)$ et si $n \geq n_2$ alors
- n est pair, il existe donc un naturel p tel que $n = 2p$ donc $p \geq n_0$ d'où $|u_n - l| = |u_{2p} - l| \leq \epsilon$
- n est impair, il existe donc un naturel p tel que $n = 2p + 1$ donc $p \geq n_1$ d'où $|u_n - l| = |u_{2p+1} - l| \leq \epsilon$

Alors pour tout naturel n si $n \geq n_2$ alors $|u_n - l| \leq \epsilon$. Donc u converge vers l. $\square$

Proposition 11.13. Soit une suite réelle u et v une suite réelle extraite de u. Si u est bornée, alors v est aussi bornée. La réciproque est fausse.

11.1.5 $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles de limite nulle

Proposition 11.14. L'ensemble des suites réelles de limite nulle est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. La suite réelle nulle est de limite nulle, donc il est non vide. Cet espace est stable par combinaison linéaire, en effet soient deux suites réelles de limite nulle et un réel λ. Montrons que $\lambda u + v$ est de limite nulle. Déjà si $\lambda = 0$ alors $\lambda u + v = v$ est de limite nulle. On suppose désormais que λ est non nul. Soit $\epsilon > 0$ il existe deux naturels n_0 et n_1 tels que pour tout naturel n

$$n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \frac{\epsilon}{2\,|\lambda|} \tag{11.22}$$

$$n \geq n_1 \implies |v_n| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{11.23}$$

Posons $n_2 = \max(n_0, n_1)$ alors si $n \geq n_2$ on a

$$|\lambda u_n + v_n| \leq |\lambda|\,|u_n| + |v_n| \leq \epsilon \tag{11.24}$$

donc $\lambda u + v$ tend vers 0. $\square$

Proposition 11.15. Le produit d'une suite réelle de limite nulle par une suite réelle bornée est de limite nulle. En particulier le produit d'une suite réelle de limite nulle et d'une suite réelle convergente est de limite nulle.

Démonstration. Soient u et v deux suites réelles telles que u soit de limite nulle et v bornée. Il existe alors un réel strictement positif M tel que pour tout entier n $v_n \leq M$. Puisque u est de limite nulle, pour tout $epsilon > 0$ il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel n si $n \geq n_0$ alors $|u_n| \leq \frac{\epsilon}{M}$. Pour tout entier naturel n si $n \geq n_0$ $|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon$. Donc la suite réelle uv tend vers 0. □

11.1.6 Opérations sur les limites

11.1.6.1 Suites réelles convergentes

Proposition 11.16. Soient u et v deux suites réelles convergentes de limites respectives l et l'. Alors pour tout réels λ et μ :
— $\lambda u + \mu v$ tend vers $\lambda l + \mu l'$
— uv tend vers ll'

Démonstration. Soit un naturel n, alors $(\lambda u_n + \mu v_n) - (\lambda l + \mu l') = \lambda(u_n - l) + \mu(v_n - l')$. Puisque $(u_n - l)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n - l')_{n\in\mathbb{N}}$ sont de limite nulle. Le produit d'une suite réelle de limite de limite nulle par une constante est une suite réelle de limite nulle. Ainsi $\lambda(u_n - l)$ et $\mu(v_n - l')$ sont de limite nulle. Leur somme converge donc vers zéro. Pour tout entier naturel n

$$u_n v_n - ll' = (u_n - l)v_n + l(v_n - l'). \tag{11.25}$$

$l(v_n - l)$ tend vers zéro, puisque c'est une suite réelle de limite nulle multipliée par une constante. De même $(u_n - l)v_n$ tend vers zéro, puisque c'est le produit d'une suite réelle de limite nulle par une suite réelle convergente. La somme de deux suites réelles de limite nulle est donc de limite nulle. □

L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 11.17. Soit une suite réelle u. On suppose que u converge vers une limite l non nulle. Alors il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ $u_n \neq 0$. La suite réelle $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq n_0}$ est convergente et tend vers $\frac{1}{l}$

Démonstration. l est non nulle donc il existe un réel a strictement positif et un naturel n_0 tels que pour tout entier n si $n \geq n_0$ alors $|u_n| \geq a > 0$. En particulier si $n \geq n_0$ alors $u_n \neq 0$ donc on peut considérer la suite réelle $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq n_0}$. Soit un entier n tel que $n \geq n_0$ alors

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{l} = \frac{1}{lu_n}(l - u_n). \tag{11.26}$$

Or on sait que

$$\forall n \geq n_0 \quad |u_n| \geq a > 0 \tag{11.27}$$

$$0 \leq \frac{1}{|u_n|} \leq \frac{1}{a} \tag{11.28}$$

$$0 \leq \frac{1}{|lu_n|} \leq \frac{1}{a\,|l|}. \tag{11.29}$$

La suite réelle $\left(\frac{1}{|lu_n|}\right)_{n\geq n_0}$ est bornée et la suite réelle $(l-u_n)_{n\geq n_0}$ tend vers 0. Leur produit est une suite réelle de limite nulle. Autrement dit la suite réelle de terme général $\frac{1}{u_n}$ tend donc vers $\frac{1}{l}$. □

11.1.6.2 Suites réelles tendant vers l'infini

Proposition 11.18. Soient u et v deux suites réelles telles que u tende vers $+\infty$ et v soit minorée. Alors $u+v$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. v est minorée, il existe alors un réel a tel que pour tout entier naturel n tel que $u_n \geq a$. Comme u tend vers $+\infty$, soit un réel A, il existe un entier naturel n_0 tel que pour tout entier naturel n si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq A-a$. Ainsi si $n \geq n_0$ $u_n + v_n \geq A - a + a = A$ alors $u+v$ tend vers $+\infty$. □

Proposition 11.19. De la même manière on montre que si u tend vers $-\infty$ et si v est majorée, alors $u+v$ tend vers $-\infty$.

Proposition 11.20. Soient deux suites réelles u et v. On suppose que u tend vers $+\infty$ et que v est minorée par un réel strictement positif, au moins à partir d'un certain rang. Alors uv tend vers $+\infty$.

Démonstration. v est minorée donc il existe un réel $a>0$ et il existe un naturel n_0 tel que pour tout entier n si $n \geq n_0$ alors $v_n \geq a > 0$. La suite réelle u tend vers $+\infty$, donc pour tout réel A positif il existe un naturel n_1 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_1$ alors $u_n \geq \frac{A}{a}$. Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$ alors pour tout naturel n, si $n \geq n_2$ alors $u_n v_n \geq \frac{A}{a} a = A$. Alors uv tend vers $+\infty$. □

Proposition 11.21. Soit une suite réelle u, on suppose que u diverge vers $+\infty$. Alors il existe un naturel n_0 tel que pour tout naturel n, si $n \geq n_0$ alors $u_n > 0$. La suite réelle $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq n_0}$ est de limite nulle.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$, il existe un naturel n_1 tel que pour tout entier n si $n \geq n_1$ alors $\frac{1}{u_n} \geq \frac{1}{\epsilon} > 0$. D'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \implies 0 < \frac{1}{u_n} \geq \epsilon \tag{11.30}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \implies \left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n} \geq \epsilon. \tag{11.31}$$

Donc $\frac{1}{u}$ tend vers 0. □

Proposition 11.22. Soit une suite réelle u. On suppose que u est de limite nulle et qu'il existe un naturel n_0 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $u_n > 0$, alors la suite réelle $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq n_0}$ tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit $A > 0$ alors il existe un naturel n_1 tel que pour $n \geq n_1$ $|u_n| \leq \frac{1}{A}$. Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$ alors pour tout naturel $n \geq n_2$ on a

$$0 < u_n = |u_n| \leq \frac{1}{A}. \tag{11.32}$$

D'où

$$0 < A \leq \frac{1}{u_n}, \tag{11.33}$$

donc $\frac{1}{u}$ tend vers $+\infty$ □

11.1.6.3 Récapitulatif

Somme

$+$	l'	$+\infty$	$-\infty$	PL
l	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$	FI
PL	PL	FI	FI	FI

avec PL “pas de limite” et FI “forme indéterminée”

Produit

$\times$	$l'>0$	$l'=0$	$l'<0$	$+\infty$	$-\infty$	PL
$l>0$	ll'	0	ll'	$+\infty$	$-\infty$	PL
$l=0$	0	0	0	FI	FI	FI
$l>0$	ll'	0	ll'	$-\infty$	$+\infty$	PL
$+\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI
$-\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI
PL	PL	FI	PL	FI	FI	FI

11.1.6.4 Compatibilité avec la relation d'ordre

Proposition 11.23. Soient une suite réelle u et un réel l. On suppose qu'il existe une suite réelle α et un naturel n_0 tels que

— $\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n - l| \leq \alpha_n$;

— α est de limite nulle.

Alors u tend vers l.

Démonstration. Il existe un naturel n_0 tel que pour tout naturel n, si $n \geq n_0$ alors $|u_n - l| \leq \alpha_n$. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un naturel n_1 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_1$ alors $|\alpha_n| \leq \epsilon$. Soit $n_2 = \max(n_1, n_0)$ alors pour tout naturel n, si $n \geq n_2$ alors $|u_n - l| \leq |\alpha_n| \leq \epsilon$. Donc u tend vers l. □

Proposition 11.24 (Passage à la limite)**.** Soient u et v deux suites réelles convergentes et on suppose qu'il existe un naturel n_0 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $u_n \leq v_n$. Alors $\lim u \leq \lim v$.

Démonstration. Soit un naturel n et soit la suite réelle $w = v - u$. Alors la suite réelle w est positive, $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = |w_n|$. Alors

$$\lim w_n = \lim |w_n| = |\lim w_n| . \tag{11.34}$$

Alors la limite de w est positive. On sait aussi d'après la proposition sur la limite d'une somme de suites réelles convergentes que

$$\lim w_n = \lim v_n - \lim u_n \geq 0. \tag{11.35}$$

Finalement

$$\lim u_n \leq \lim v_n. \tag{11.36}$$

□

Théorème 11.1 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient u et v deux suites réelles convergentes de même limite l et une troisième suite réelle w telle qu'il existe un entier n_0 et que pour tout naturel n si $n \geq n_0$ on ait $u_n \leq w_n \leq v_n$. Alors w converge vers l.*

Démonstration. Soit un entier n, si $n \geq n_0$ alors $0 \leq w_n - u_n \leq v_n - u_n$. Puisque u et v ont la même limite, $v - u$ est de limite nulle. Donc pour $n \geq n_0$ $|w_n - u_n|$. Par conséquent, $w - u$ est convergente de limite nulle. Puisque $w = (w - u) + u$ avec $\lim w - u = 0$ et $\lim u = l$ on a $\lim w = l$. □

Proposition 11.25. Soient u et v deux suites réelles telles qu'il existe un naturel n_0 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $u_n < v_n$. Alors

$$\lim u = +\infty \implies \lim v = +\infty, \tag{11.37}$$
$$\lim v = -\infty \implies \lim u = -\infty. \tag{11.38}$$

Démonstration.
— Pour tout réel A il existe un naturel n_1 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_1$ alors $u_n \geq A$. Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$, donc pour tout naturel n, si $n \geq n_2$ alors $v_n \geq u_n \geq A$ donc $\lim v = +\infty$.
— Pour tout réel A il existe un naturel n_1 tel que pour tout naturel n si $n \geq n_1$ alors $v_n \leq A$. Soit $n_2 = \max(n_0, n_1)$, donc pour tout naturel n, si $n \geq n_2$ alors $u_n \leq v_n \leq A$ donc $\lim v = +\infty$.

□

Dans ce paragraphe bien faire la différence entre :
— des résultats qui permettent de comparer les limites lorsqu'on sait déjà qu'elles existent (passages à la limite dans les inégalités) ;
— des résultats qui permettent de conclure à l'existence d'une limite (gendarmes).

11.2 Suites réelles monotones, Théorème de Bolzano-Weiertrass

11.2.1 Étude de la convergence des suites réelles monotones

Définition 11.10. Soit une suite réelle u. On dit que u est
— croissante, si pour tout naturel n $u_n \leq u_{n+1}$;
— décroissante, si pour tout naturel n $u_n \geq u_{n+1}$;
— monotone, si u est croissante ou décroissante.

Définition 11.11. Soit une suite réelle u. On dit que u est
— strictement croissante, si pour tout naturel n $u_n < u_{n+1}$;
— strictement décroissante, si pour tout naturel n $u_n > u_{n+1}$;
— strictement monotone, si u est strictement croissante ou strictement décroissante.

Théorème 11.2. *Soit une suite réelle u croissante. Alors*
— *soit u est majorée et alors u converge de limite $l = \sup\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$;*
— *soit u n'est pas majorée et alors u tend vers $+\infty$.*

Démonstration. Supposons que u soit majorée. Il existe alors un réel M tel que pour tout naturel n $u_n \leq M$. Soit $A = \{u_n, n \in \mathbb{R}\}$ A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, donc elle admet une borne supérieure qu'on note l. Par caractérisation de la borne supérieure

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists a \in A \quad l - \epsilon < a \leq l \tag{11.39}$$
$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad l - \epsilon < u_{n_0} \leq l \tag{11.40}$$
$$\forall n \in \mathbb{N} \ n \geq n_0 \ l \geq u_n \geq u_{n_0} > l - \epsilon \tag{11.41}$$

donc pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $|u_n - l| = l - u_n \leq \epsilon$ donc $\lim u = l$.

Supposons d'autre part que la suite réelle u ne soit pas majorée. Alors pour tout réel M il existe un naturel n_0 tel que $u_{n_0} \geq M$. Or u est croissante donc pour tout naturel $n \geq n_0$ alors $u_n \geq u_{n_0} \geq M$. Donc $\lim u = +\infty$. □

En appliquant ce théorème à la suite réelle $-u$ on obtient le théorème suivant

Théorème 11.3. *Soit une suite réelle u décroissante. Alors*
- *soit u est minorée et elle converge et $\lim u = \inf\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$;*
- *soit u n'est pas minorée et elle tend vers $-\infty$.*

11.2.2 Suites réelles adjacentes

Définition 11.12. Soient u et v deux suites réelles. On dit que u et v sont adjacentes si
- u est croissante ;
- v est décroissante ;
- et $\lim u - v = 0$.

Proposition 11.26. Soient u et v deux suites réelles adjacentes, alors u et v convergent de même limite l, de plus

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq l \leq v_n \tag{11.42}$$

Démonstration. La suite réelle u est croissante et la suite réelle v est décroissante, alors $u - v$ est croissante. Or $u - v$ converge vers zéro. Alors $u - v$ est majorée et
$$\sup\{u_n - v_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \lim u - v = 0. \tag{11.43}$$

Par conséquent, pour tout naturel n on a $u_n - v_n \leq 0$ donc $u_n \leq v_n$ or v décroît par conséquent $u_n \leq v_n \leq v_0$.

La suite réelle u est alors croissante et majorée donc elle converge. On note l sa limite. Ensuite, $v = (v - u) + u$ et $v - u$ est de limite nulle et u tend vers l donc v tend vers l. On a montré que u et v converge de même limite l. De plus

$$l = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \inf\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\}. \tag{11.44}$$

Ainsi
$$\forall n \in \mathbb{N} u_n \leq l \leq v_n. \tag{11.45}$$

□

11.2.3 Valeurs décimales approchées d'un réel

Soit un réel x. Pour tout naturel n, on définit $P_n = E(10^n x)$. P_n est l'unique entier relatif tel que $P_n \leq 10^n x \leq p_n + 1$. Autrement dit $\frac{P_n}{10^n} \leq x \leq \frac{P_n+1}{10^n}$.

Définition 11.13. Pour tout naturel n, on appelle

— valeur décimale approchée de x par défaut à 10^{-n} près le réel $u_n = \frac{P_n}{10^n}$;

— valeur décimale approchée de x par excès à 10^{-n} près le réel $v_n = \frac{P_n+1}{10^n}$.

Proposition 11.27. Les suites réelles u et v des valeurs décimales approchées de x par défaut et par excès sont adjacentes et convergent vers x.

Démonstration. Soit un naturel n, alors $v_n - u_n = \frac{1}{10^n}$ et $\lim v - u = 0$. De plus

$$P_n \leq 10^n x \leq P_n + 1 \tag{11.46}$$

$$10P_n \leq 10^{n+1} x \leq 10P_n + 10. \tag{11.47}$$

P_{n+1} est l'unique entier tel que

$$P_{n+1} \leq 10^{n+1} x \leq P_{n+1} + 1. \tag{11.48}$$

$10P_n$ et $10P_n + 10$ sont des entiers, donc $\begin{cases} 10P_n \leq P_{n+1} \\ p_{n+1} + 1 \leq 10P_n + 10 \end{cases}$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{10^{n+1}} \geq \frac{10P_n}{10^{n+1}} = \frac{P_n}{10^n} = u_n. \tag{11.49}$$

La suite réelle u est donc croissante. Et

$$v_{n+1} = \frac{P_{n+1} + 1}{10^{n+1}} \leq \frac{10P_n + 10}{10^{n+1}} = \frac{P_n + 1}{10^n} = v_n. \tag{11.50}$$

La suite réelle v est donc décroissante. Ainsi les suites réelles u et v sont adjacentes. Elles admettent donc une même limite notée l. De plus par définition

$$u_n \leq x \leq v_n. \tag{11.51}$$

En passant à la limite on a $l = x$ □

Corollaire 11.27.1. *1. Tout réel est limite d'une suite réelle de rationnels ;*

2. tout réel est limite d'une suite réelle d'irrationnels.

Démonstration.

1. Soit un réel x, la suite réelle $\left(\frac{E(10^n x)}{10^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle de rationnels qui tend vers x ;
2. soit un réel y, pour tout naturel n on définit $w_n = \frac{E(10^n y)+\sqrt{2}}{10^n}$ donc $\lim w = y$. Puisque $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ alors $\forall n \in \mathbb{N}\ w_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

□

Ce corollaire est en fait une formulation différente de la densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

11.2.4 Théorème des segments emboîtés

Théorème 11.4 (Théorème des segments emboîtés)**.** *Soit* $(I_n = [a_n\,; b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite réelle décroissante par inclusion de segments non vides dont la longueur tend vers zéro. C'est-à-dire que*

— *pour tout naturel* n, $[a_{n+1}\,; b_{n+1}] \subset [a_n\,; b_n]$ *;*

— $\lim b - a = 0$.

Alors il existe un réel l *tel que* $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$.

Démonstration. On sait que $\lim b - a = 0$. L'hypothèse de décroissance par inclusion s'écrit aussi

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n. \tag{11.52}$$

La suite réelle a est croissante et la suite réelle b est décroissante. Les suites réelles a et b sont donc adjacentes. Elle convergent donc toutes les deux vers une limite l et pour tout naturel n, $a_n \leq l \leq b_n$. On a donc montré que les suites réelles sont convergentes de même limite l. Prouvons maintenant que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$

D'une part, pour tout naturel n on a $l \in I_n$ alors $l \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. D'autre part soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}$ alors pour tout naturel n $x \in I_n$ donc $a_n \leq x \leq b_n$. Puisque a et b sont convergentes de limite l, en passant à la limite dans l'inégalité il vient que $x = l$. Par conséquent $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$. □

11.2.5 Théorème de Bolzano-Weiertrass

Théorème 11.5 (Théorème de Bolzano-Weiertrass)**.** *De toute suite réelle bornée on peut extraire une sous-suite réelle convergente.*

Démonstration. La démonstration s'effectue en deux mouvements principaux. Le premier mouvement va construire par récurrence une suite réelle décroissante de segments emboîtés dont la longueur tend vers zéro. On en conclura grâce au théorème des segments emboîtés que la suite réelle tend vers un réel l. Le deuxième mouvement va construire une sous-suite réelle de u qui converge vers l en définissant par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante. On montrera que la sous-suite réelle $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Soit une suite réelle bornée u. Soient m un minorant de u et M un majorant de u. Alors pour tout naturel n, $m \leq u_n \leq M$.

Premier mouvement :

Construisons par récurrence une suite réelle de segments emboîtés $([a_n\,; b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

— $\lim b - a = 0$

— pour tout naturel n l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n\,; b_n]\}$ soit infini.

Attention, cela signifie que $u_k \in [a_n\,; b_n]$ pour une infinité d'indices k, mais surtout pas que $[a_n\,; b_n]$ contient une infinité de termes de la suites réelles u. Un contre exemple est une suite réelle constante.

Initialisation : Soit $a_0 = m$ et $b_0 = M$ alors pour tout naturel k $a_0 \leq u_k \leq b_0$. Du coup $\{k \in \mathbb{N} \mid a_0 \leq u_k \leq b_0\} = \mathbb{N}$ est infini.

Hérédité : Supposons avoir construit les segments vérifiant les hypothèses. C'est-à-dire que

— $\lim b - a = 0$

— pour tout naturel n l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n\,;b_n]\}$ soit infini.

Soit deux ensembles $\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; u_k \in \left[a_n\,;\frac{a_n+b_n}{2}\right]\right\}$ et $\left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; u_k \in \left[\frac{a_n+b_n}{2}\,;b_n\right]\right\}$. Alors l'un des deux au moins est forcément infini. Puisque s'ils étaient finis, on pourrait écrire que

$\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_n\,;b_n]\} = \left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; u_k \in \left[a_n\,;\frac{a_n+b_n}{2}\right]\right\} \cup \left\{k \in \mathbb{N} \;\middle|\; u_k \in \left[\frac{a_n+b_n}{2}\,;b_n\right]\right\}$

Ce serait donc l'union de deux ensembles finis, donc il serait fini (Contradiction). On choisit alors comme segment suivant $[a_{n+1}\,;b_{n+1}]$ l'un des deux segments $\left[a_n\,;\frac{a_n+b_n}{2}\right]$ ou $\left[\frac{a_n+b_n}{2}\,;b_n\right]$ qui vérifie

$$\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_{n+1}\,;b_{n+1}]\} \text{ est infini.} \tag{11.53}$$

Conclusion : On dispose donc d'une suite de segments réels $([a_n\,;b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout naturel n

— $[a_{n+1}\,;b_{n+1}] \subset [a_n\,;b_n]$;

— $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_{n+1}\,;b_{n+1}]\}$ est infini ;

— $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n - a_n)$.

La suite réelle $b-a$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ de premier terme $b_0 - a_0 = M - m$. Alors pour tout naturel n, $b_n - a_n = (M-m)\left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'où $\lim b - a = 0$. Par théorème des segments emboîtés, il existe un réel l tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n\,;b_n] = \{l\}$ et $l = \lim a = \lim b$.

Deuxième mouvement : On construit une sous-suite réelle de u qui converge vers l. On définit par récurrence une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n. \tag{11.54}$$

Initialisation : On pose $\varphi(0) = 0$ alors $a_0 = m \leq u_{\varphi(0)} = u_0 \leq b_0 = M$.

Hérédité : Supposons avoir construit $\varphi(0) < \ldots < \varphi(n)$ tels que

$$\forall p \in [\![0\,;n]\!] \quad a_p \leq u_{\varphi(p)} \leq b_p. \tag{11.55}$$

On sait d'après le premier mouvement de la démonstration que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid u_k \in [a_{n+1}\,;b_{n+1}]\}$ est infini. C'est une partie de $\mathbb{N}$ infinie donc elle n'est pas majorée.

Il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{k_0} \in [a_{n+1}\,;b_{n+1}]$ et $k_0 > \varphi(n)$. On pose $k_0 = \varphi(n+1)$. Ainsi $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $u_{\varphi(n+1)} = u_{k_0} \in [a_{n+1}\,;b_{n+1}]$.

Conclusion : On a défini une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout naturel n, $u_{\varphi(n)} \in [a_n\,;b_n]$. La suite réelle $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle extraite de u et pour tout naturel n $a_n \leq u_{\varphi(n)} \leq b_n$. On sait que les suites réelles a et b convergent de même limite l. On déduit du théorème des gendarmes que $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l. □

Le procédé utilisé ici s'appelle la dichotomie. Il permet de prouver l'existence d'une suite réelle extraite qui converge mais ne donne pas de méthode pratique pour en trouver une.

11.3 Relations de comparaison

11.3.1 Relation de domination

Définition 11.14. Soient u et v deux suites réelles. On dit que u est dominée par v et on écrit $u = O(v)$ ou encore $u_n = O(v_n)$ lorsque n tend vers l'infini si et seulement s'il existe une suite réelle w bornée et un naturel n_0 tels que pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $u_n = v_n w_n$.

Proposition 11.28. La définition de la relation de domination est équivalente à : soient deux suites réelles u et v, alors

$$u = O(v) \iff \exists M \in \mathbb{R}+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n| \leq M\,|v_n|\,. \tag{11.56}$$

Démonstration. Si $u = O(v)$ il existe une suite réelle bornée w telle qu'à partir d'un certain rang n_0 pour tout naturel n on a $u_n = v_n w_n$ alors il existe un réel M positif tel que pour tout entier n $|w_n| \leq M$. Alors pour tout entier $n > n_0$, $|u_n| \leq M\,|v_n|$.

Si $n \in [\![0\,; n_0 - 1]\!]$ on pose $w_n = 0$. Si $n \geq n_0$ et si $v_n \neq 0$ on pose $w_n = \frac{u_n}{v_n}$ ainsi $u_n = v_n w_n$; si $v_n = 0$ alors $|u_n| \leq M\,|v_n|$ donc $u_n = 0$ on pose $w_n = 0$ ainsi $u_n = v_n w_n$.

On a construit une suite réelle w telle que pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $u_n = v_n w_n$. De plus w est bornée puisque pour tout naturel n si $n \leq n_0 - 1$ alors $w_n = 0$ sinon si $n \geq n_0$ et $v_n = 0$ alors $w_n = 0$ mais si $v_n \neq 0$ alors $|w_n| = \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$. La suite réelle w est donc bornée donc $u = O(v)$. □

Proposition 11.29. Soient u et v deux suites réelles. On suppose que v ne s'annule pas, alors u est dominée par v si et seulement si $\frac{u}{v}$ est bornée.

Démonstration. La suite réelle v ne s'annule pas donc u est dominée par v si et seulement s'il existe un réel positif M et un entier n_0 tel que pour tout entier n si $n \geq n_0$ alors $\left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq M$. Ce qui est équivalent à la suite réelle $\frac{u}{v}$ est bornée à partir d'un certain rang ce qui équivaut à ce que la suite réelle $\frac{u}{v}$ est bornée. □

En particulier $u = O(1) \iff u$ est bornée.

Proposition 11.30 (Règles de calculs)**.** Soient quatre suites réelles u_1, u_2, v_1 et v_2, alors

$$u_1 = O(v_1) \text{ et } u_2 = O(v_1) \implies u_1 + u_2 = O(v_1) \tag{11.57}$$

$$u_1 = O(v_1) \text{ et } u_2 = O(v_2) \implies u_1 u_2 = O(v_1 v_2) \tag{11.58}$$

$$u_1 = O(v_1) \text{ et } v_1 = O(v_2) \implies u_1 = O(v_2)\,. \tag{11.59}$$

Démonstration.

1. Il existe deux suites bornées w_1, w_2 et deux naturels n_1 et n_2 tels que pour tout naturel n

$$n \geq n_1 \implies u_{1,n} = v_{1,n} w_{1,n} \tag{11.60}$$

$$n \geq n_2 \implies u_{2,n} = v_{1,n} w_{2,n}. \tag{11.61}$$

Soit $n_0 = \max(n_1, n_2)$ donc si $n \geq n_0$ alors $u_{1,n}+u_{2,n} = v_{1,n}(w_{2,n}+w_{1,n})$. La suite $w_1 + w_2$ est bornée donc $u_1 + u_2 = O(v_1)$.

2. Il existe deux suites bornées w_1, w_2 et deux naturels n_1 et n_2 tels que pour tout naturel n

$$n \geq n_1 \implies u_{1,n} = v_{1,n} w_{1,n} \tag{11.62}$$

$$n \geq n_2 \implies u_{2,n} = v_{1,n} w_{2,n}, \tag{11.63}$$

alors pour tout naturel $n \geq \max(n_1, n_2)$ on a

$$u_{1,n}u_{2,n} = v_{1,n}v_{2,n}w_{1,n}w_{2,n}. \tag{11.64}$$

La suite w_1w_2 est le produit de deux suites bornées donc elle est bornée, alors $u_1u_2 = O(v_1v_2)$.

3. Il existe deux suites bornées w_1, w_2 et deux naturels n_1 et n_2 tels que pour tout naturel n

$$n \geq n_1 \implies u_{1,n} = v_{1,n}w_{1,n} \tag{11.65}$$
$$n \geq n_2 \implies v_{1,n} = u_{2,n}w_{2,n}, \tag{11.66}$$

alors pour tout naturel $n \geq \max(n_1, n_2)$ on a

$$u_{1,n} = (v_{2,n}w_{2,n})w_{1,n} = (w_{2,n}w_{1,n})v_{2,n}. \tag{11.67}$$

La suite w_1w_2 est bornée (comme étant le produit de deux suites bornées) donc $u_1 = O(v_2)$.

□

11.3.2 Relation de négligeabilité

Définition 11.15. Soient u et v deux suites réelles, on dit que u est négligeable devant v et on note $u = o(v)$ lorsque n tend vers l'infini s'il existe une suite w de limite nulle et un naturel n_0 à partir duquel on ait pour tout naturel $n \geq n_0$ $u_n = v_nw_n$.

Proposition 11.31. La définition de la relation de négligeabilité est équivalente à : soient deux suites réelles u et v telles que

$$u = o(v) \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \epsilon \, |v_n| \, . \tag{11.68}$$

Démonstration. Supposons que $u = o(v)$ alors il existe un naturel n_0 tel que pour tout entier, si $n \geq n_0$ alors $u_n = v_nw_n$. La suite w tend vers zéro donc

$$\forall \epsilon > 0 \exists n_1 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \ n \geq n_1 \implies |w_n| \leq \epsilon. \tag{11.69}$$

Alors pour tout naturel n, si $n \geq \max(n_0, n_1)$ alors $|u_n| = |v_nw_n| \leq \epsilon \, |v_n|$.

D'autre part, pour tout naturel n, on définit la suite w :

$$\begin{cases} w_n = \frac{u_n}{v_n} & v_n \neq 0 \\ w_n = 0 & v_n = 0 \end{cases}. \tag{11.70}$$

Avec $\epsilon = 1$ il existe un naturel n_0 tel que pour tout entier n, si $n \geq n_0$ alors $|u_n| \leq |v_n|$. Montrons que w tend vers zéro. On sait que

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \implies |u_n| \leq \epsilon \, |v_n| \tag{11.71}$$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \implies |w_n| = \begin{cases} 0 \leq \epsilon & v_n = 0 \\ \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \epsilon & v_n \neq 0 \end{cases} \tag{11.72}$$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists n_1 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_1 \implies |w_n| \leq \epsilon. \tag{11.73}$$

Alors w est de limite nulle donc $u = o(v)$. Les définitions sont équivalentes. □

Proposition 11.32. Soient u et v deux suites réelles, on suppose que v ne s'annule pas. Alors

$$u = o(v) \iff \lim \frac{u}{v} = 0. \tag{11.74}$$

Démonstration.

$$u = o(v) \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies |u_n| \leq \epsilon \, |v_n| \tag{11.75}$$

$$\iff \forall \epsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \epsilon \tag{11.76}$$

$$\iff \lim \frac{u}{v} = 0. \tag{11.77}$$

□

En particulier $u = o(1) \iff \lim u = 0$.

Proposition 11.33. Soient u et v deux suites réelles, si $u = o(v)$ alors $u = O(v)$.

Démonstration. cela découle des deux définitions, puisqu'une suite de limite nulle est a fortiori bornée. □

Proposition 11.34. Soient quatre suites réelles u_1, u_2, v_1 et v_2. Alors

$$u_1 = o(v_1) \text{ et } u_2 = o(v_1) \implies u_1 + u_2 = o(v_1)\,; \tag{11.78}$$

$$u_1 = o(v_1) \text{ et } u_2 = O(v_2) \implies u_1 u_2 = o(v_1 v_2)\,; \tag{11.79}$$

$$u_1 = o(v_1) \text{ et } u_2 = o(v_2) \implies u_1 u_2 = o(v_1 v_2)\,; \tag{11.80}$$

$$u_1 = O(v_1) \text{ et } v_1 = O(v_2) \implies u_1 = O(v_2)\,; \tag{11.81}$$

$$u_1 = o(v_1) \text{ et } v_1 = O(v_2) \implies u_1 = o(v_2)\,; \tag{11.82}$$

$$u_1 = O(v_1) \text{ et } v_1 = o(v_2) \implies u_1 = o(v_2)\,; \tag{11.83}$$

$$u_1 = o(v_1) \text{ et } v_1 = o(v_2) \implies u_1 = o(v_2)\,. \tag{11.84}$$

Démonstration. La preuve est presque identique à la preuve pour la relation de domination.

- idem. La somme de deux suites de limites nulle est une somme de limite nulle.
- Il existe une suite w_1 de limite nulle et un naturel n_1 tel que si $n \geq n_1$ alors $u_{1,n} = v_{1,n} w_{1,n}$. Il existe une suite w_2 bornée et un naturel n_2 tel que si $n \geq n_2$ alors $u_{2,n} = v_{2,n} w_{2,n}$. Pour tout naturel $n \geq \max(n_1, n_2)$ on a $u_{1,n} u_{2,n} = (w_{1,n} w_{2,n}) v_{1,n} v_{2,n}$ Or $w_{1,n} w_{2,n}$ est une suite de limite nulle (puisque c'est le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle), donc $u_1 u_2 = o(v_1 v_2)$.
- idem pour les autres points.

□

Proposition 11.35. Soient u et v deux suites réelles. Alors

- si $u = O(v)$ et si $\lim v = 0$ alors $\lim u = 0$,
- si $u = o(v)$ et si v est bornée alors $\lim u = 0$.

Démonstration.

- $u = O(v)$ et $v = o(1)$ donc $u = O(o(1)) = o(1)$, alors $\lim u = 0$,

— $u = o(v)$ et $v = O(1)$ donc $u = o(O(1)) = o(1)$, alors $\lim u = 0$.

□

⚠Les notations $u = O(0)$ et $u = o(0)$ signifient toutes les deux que u est nulle à partir d'un certain rang. Ce qui ne se produit que très rarement. Il ne sera pas autorisé d'écrire cette équivalence.

11.3.3 Relation d'équivalence

Définition 11.16. Soient u et v deux suites réelles. On dit que u est équivalente à v et on note $u \sim v$ en l'infini s'il existe une suite w qui tend vers 1 et un naturel n_0 tel que pour tout naturel n, si $n \geq n_0$ alors $u_n = w_n v_n$.

Si u est équivalente à v, alors v est équivalente à u. En effet w tend vers 1, alors il existe un naturel n_1 tel que pour tout naturel n, si $n \geq n_1$ $w_n > 0$. Donc pour tout naturel $n \geq \max(n_0, n_1)$, $v_n = \frac{1}{w_n} u_n$ et la suite $\frac{1}{w}$ tend vers 1. On dira que u et v sont équivalentes.

Proposition 11.36. Soient u et v deux suite réelles. Alors

$$u \sim v \iff u - v = o(v)\,. \tag{11.85}$$

Démonstration.

$$u \sim v \iff \exists w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ \lim w = 1\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n = v_n w_n \tag{11.86}$$

$$\iff \exists w \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ \lim w = 1\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n - v_n = v_n(w_n - 1) \tag{11.87}$$

$$\iff \exists z \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ \lim z = 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n - v_n = v_n z_n \tag{11.88}$$

$$u \sim v \iff u - v = o(v)\,. \tag{11.89}$$

□

Proposition 11.37. Soient u et v deux suites réelles. On suppose que v ne s'annule pas, alors

$$u \sim v \iff \lim \frac{u}{v} = 1. \tag{11.90}$$

Démonstration. La suite v ne s'annule pas, donc

$$u \sim v \iff u - v = o(v) \tag{11.91}$$

$$\iff \lim \frac{u - v}{v} = 0 \tag{11.92}$$

$$\iff \lim \frac{u}{v} = 1. \tag{11.93}$$

□

En particulier pour tout réel l non nul, $u \sim l$ signifie que $\lim u = l$. Cependant $u \sim 0$ signifie que u est nulle à partir d'un certain rang, ce qui n'arrive que très rarement. En bref, on n'écrit jamais ~ 0.

Proposition 11.38. Soient quatre suites réelles $u_1, u_2, v_1 v_2$.

1. si $u_1 \sim u_2$ et $u_2 \sim v_1$ alors $u_1 \sim v_1$;
2. si $u_1 \sim u_2$ et $v_1 \sim v_2$ alors $u_1 v_1 \sim u_2 v_2$;
3. si $u_1 \sim u_2$ et $v_1 \sim v_2$ et si v_1 et v_2 ne s'annulent pas (au moins à partir d'un certain rang) alors $\frac{u_1}{v_1} \sim \frac{u_2}{v_2}$;
4. si $u_1 \sim u_2$ et si elles sont strictement positives (au moins à partir d'un certain rang) alors pour tout réel α $u_1^\alpha \sim u_2^\alpha$.

Démonstration.

1. Il existe deux suites w_1 et w_2 de limite égale à 1 et deux entiers n_1 et n_2 tels que pour tout entier naturel n

$$n \geq n_1 \implies u_{1,n} = w_{1,n} u_{2,n}, \tag{11.94}$$
$$n \geq n_2 \implies u_{2,n} = w_{2,n} v_{2,n}. \tag{11.95}$$

   Donc pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$ on a $u_{1,n} = (w_{1,n} w_{2,n}) v_{1,n}$. La suite $w_1 w_2$ tend vers 1 donc $u_1 \sim v_1$.

2. Il existe deux suites w_1 et w_2 de limite égale à 1 et deux entiers n_1 et n_2 tels que pour tout entier naturel n

$$n \geq n_1 \implies u_{1,n} = w_{1,n} u_{2,n}, \tag{11.96}$$
$$n \geq n_2 \implies u_{2,n} = w_{2,n} v_{2,n}. \tag{11.97}$$

   Donc pour tout $n \geq \max(n_1, n_2)$ on a $u_{1,n} v_{1,n} = (w_{1,n} w_{2,n}) u_{2,n} v_{2,n}$. La suite $w_1 w_2$ tend vers 1 donc $u_1 v_1 \sim u_2 v_2$.

3. idem pour les autres points.

□

On peut faire des produits et des quotients d'équivalents, mais on ne peut pas faire des sommes, des différences ou des composition (par exponentielle ou logarithme par exemple). Cependant, on peut démontrer quelque propositions.

Proposition 11.39. Soient u et v deux suites réelles telles que $u = o(v)$ alors $u + v \sim v$.

Démonstration. On a $(u + v) - v = u = o(v)$ donc $u + v \sim v$. □

Proposition 11.40. Étant données deux suites réelles u et v équivalentes, si v tend vers une limite l réelle ou infinie, alors u admet la même limite l.

Démonstration. Puisque u et v sont équivalentes, il existe une suite réelle w de limite égale à 1 et un naturel n_0 tels que pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $u_n = w_n v_n$ En passant à la limite, on obtient $\lim u = \lim w \lim v = l$. □

Proposition 11.41. Soient u et v deux suites réelles équivalentes. Alors

1. si v ne s'annule pas à partir d'un certain rang alors u ne s'annule pas à partir d'un certain rang ;
2. à partir d'un certain rang u et v sont de même signe.

Démonstration. Il existe une suite w de limite égale à 1 telle qu'il existe un naturel n_0 et si pour tout naturel n $n \geq n_0$ alors $u_n = v_n w_n$. Comme w tend vers 1, il existe un naturel n_1 à partir duquel w est strictement positive. Donc pour tout naturel n, si $n \geq \max(n_0, n_1)$ alors $u_n = w_n v_n$ avec $w_n > 0$. On en déduit les deux points de la proposition. □

La relation d'équivalence est symétrique et transitive. Pour toute suite réelle u, on peut écrire que $u \sim u$, elle est donc réflexive. C'est donc une *vraie* relation d'équivalence.

11.4 Suites de référence

11.4.1 Suites géométriques, arithmétiques & arithmético-géométriques

11.4.1.1 Suites géométriques

Définition 11.17. Soit une suite réelle u. S'il existe un réel r telle que pour tout naturel n $u_{n+1} = ru_n$ alors la suite u est dite géométrique de raison r.

Proposition 11.42. Soit une suite géométrique u de raison r. Alors pour tout naturel n

$$u_n = u_0 r^n \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} (n+1)u_0 & r = 1 \\ u_0 \frac{1-r^{n+1}}{1-r} & r \neq 1 \end{cases}. \tag{11.98}$$

Proposition 11.43. Convergence d'une suite géométrique Soit une suite réelle u géométrique de raison r.

1. si $|r| < 1$ alors u est de limite nulle ;
2. si $r = 1$, alors u est constante égale à u_0 ;
3. si $r = -1$ et $u_0 \neq 0$ u est divergente de deuxième espèce ;
4. si $|r| > 1$ et $u_0 \neq 0$ alors $|u|$ est divergente de première espèce.

Pour le quatrième cas, la suite u n'admet pas forcément de limite.

Proposition 11.44. Convergence d'une série géométrique Soit une suite u géométrique de raison r et S la suite définie comme étant la somme partielle de u. Alors

1. si $|r| < 1$ la série converge et $\lim S = \frac{u_0}{1-r}$;
2. si $|r| \geq 1$ et $u_0 \neq 0$ la série diverge.

Démonstration. 1. S converge puisque $\lim\limits_{n\to\infty} r^{n+1} = 0$;

2. — si $|r| > 1$ alors $\lim_{n\to\infty} |r|^{n+1} = +\infty$ donc S diverge ;
   — si $r = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = (n+1)u_0$ donc S diverge ;
   — si $r = -1$ $(-1)^n$ diverge alors S diverge.

□

11.4.1.2 Suites arithmétiques

Définition 11.18. Soit une suite réelle u. On dit que u est arithmétique s'il existe un réel r tel que pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. La suite u est dite arithmétique de raison r.

Proposition 11.45. Soit une suite u arithmétique de raison r. Alors pour tout entier naturel n

$$u_n = u_0 + nr \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2} r. \tag{11.99}$$

Proposition 11.46. Convergence d'une suite arithmétique Soit une suite u arithmétique de raison r. Alors

1. si $r = 0$ alors u est constante égale à u_0 ;
2. si $r > 0$ alors $\lim u = +\infty$;
3. si $r < 0$ alors $\lim u = -\infty$.

11.4.1.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 11.19. Soit une suite réelle u. On dit que u est arithmético-géométrique s'il existe deux entiers a et b tels que pour tout naturel n $u_{n+1} = au_n + b$

Si $a = 1$, alors u est arithmétique de raison b. Si $b = 0$ alors u est géométrique de raison a.

Proposition 11.47. Si $a \neq 1$ il existe une unique réel α tel que $\alpha = a\alpha + b$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \alpha + a^n(u_0 - \alpha). \tag{11.100}$$

Démonstration. Puisque $a \neq 1$ on a $\alpha = \frac{b}{1-a}$. Soit v, la suite définie comme

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = u_n - \alpha. \tag{11.101}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - \alpha && (11.102)\\
&= au_n + b - a\alpha - b && (11.103)\\
&= a(u_n - \alpha) = av_n. && (11.104)
\end{aligned}$$

Donc v est géométrique de raison a, ainsi pour tout naturel n on a $u_n = \alpha + (u_0 - \alpha)a^n$. □

11.4.1.4 Suites récurrentes

Elles sont définies par une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. Elles seront étudiées plus tard dans le cours.

11.4.2 Comparaison des suites de référence

Proposition 11.48. Soient α et β deux réels tels que $\alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o\big(n^\beta\big)$

Démonstration.

$$\forall n \geq 1 \; n^\beta \neq 0 \quad \frac{n^\alpha}{n^\beta} = \frac{1}{n^{\beta-\alpha}} \to 0 \tag{11.105}$$

□

Proposition 11.49. Soient α et β deux réels avec $\alpha > 0$, alors $\ln^\beta n = o(n^\alpha)$

Démonstration.

$$\forall n \geq 1 \; (n^\alpha \neq 0) \quad \frac{\ln^\beta n}{n^\alpha} \to 0. \tag{11.106}$$

En effet

$$\begin{cases} \beta \neq 0 & \frac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = \frac{1}{\ln^{-\beta} n n^\alpha} \to 0 \\ \beta > 0 & \frac{\ln^\beta n}{n^\alpha} = \left(\frac{\ln n}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta = \left(\frac{\frac{\beta}{\alpha}\ln n^{\alpha/\beta}}{n^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right)^\beta \to 0 \end{cases}. \tag{11.107}$$

□

Proposition 11.50. Pour tout réel a, $a^n = o(n!)$.

Démonstration. Soit un naturel n, alors puisque $n! \neq 0$ on écrit $\frac{a^n}{n!} = \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{a}{k}\right)$. Soit un naturel N tel que $N \geq |a|$ alors pour tout naturel $n \geq N$

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^N}{N!} \prod_{k=N+1}^{n} \left(\frac{a}{k}\right), \tag{11.108}$$

et on a

$$\left| \prod_{k=N+1}^{n} \left(\frac{a}{k}\right) \right| = \prod_{k=N+1}^{n} \left(\frac{|a|}{k}\right). \tag{11.109}$$

Pour tout naturel k tel que $N + 1 \leq k \leq n$ ou $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{N+1}$ on a

$$\left| \prod_{k=N+1}^{n} \left(\frac{a}{k}\right) \right| \leq \prod_{k=N+1}^{n} \frac{|a|}{N+1} = \left(\frac{|a|}{N+1}\right)^{n-N}. \tag{11.110}$$

Alors du coup

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|\frac{a^n}{n!}\right| \leq \frac{a^N}{N!} \left(\frac{|a|}{N+1}\right)^{n-N}. \tag{11.111}$$

De plus $0 \leq \frac{|a|}{N+1} < 1$ donc $\left(\frac{a^N}{N!}\left(\frac{|a|}{N+1}\right)^{n-N}\right)_{n \geq N}$ converge de limite nulle. Par théorème des gendarmes $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers zéro. □

11.4.3 Exemples d'équivalents

Soit une suite réelle u telle que $\lim u \neq 0$. On suppose que u n'est pas stationnaire à zéro. Alors $\ln(1 + u_n) \sim_\infty u_n$. En effet, puisque $\frac{\ln(1+u_n)}{u_n} = \frac{\ln(1+u_n)-\ln(1+0)}{u_n-0} \to \frac{1}{1+0} = 1$ par taux d'accroissement. On sait aussi que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$ donc $\mathrm{e}^{u_n} - 1 \sim_\infty u_n$. Soit $f\colon \left\{ \begin{array}{ccc}]-1\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (1+x)^\alpha \end{array} \right.$ f est dérivable et pour tout réel x de $]-1\,;1[$, $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$. On a $f'(0) = \alpha = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}$ si $\alpha \neq 0$ $(1+u_n)^\alpha \sim \alpha u_n$.

11.5 Brève extension aux suites complexes

11.5.1 Notion de suite à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 11.20. On appelle suite complexe ou suite à valeur complexe toute famille de complexe indexée par $\mathbb{N}$ c'est à dire une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$. On note $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ leur ensemble.

Définition 11.21. Soit u une suite complexe, on lui associe les suites suivantes : $|u|$, $\Re(u)$, $\Im(u)$ et $\overline{u}$.

Définition 11.22. Soit une suite complexe u. On dit que u est bornée si la suite réelle $|u|$ est bornée.

Proposition 11.51. Soit une suite complexe u. Alors u est bornée si et seulement si sa partie imaginaire et sa partie réelle sont bornées.

Démonstration. Supposons que u est bornée, alors il existe un réel M tel que pour tout naturel n $|u_n| \leq M$ alors $|\Re(u_n)| \leq |u_n|$ et $|\Im(u_n)| \leq |u_n|$. Alors $\Re(u)$ et $\Im(u)$ sont bornées.

Supposons maintenant que $\Re(u)$ et $\Im(u)$ sont bornées. Alors il existe deux réels M et N qui majorent respectivement $\Re(u)$ et $\Im(u)$. Du coup le réel $\sqrt{N^2 + M^2}$ majore $|u|$ donc u est bornée. □

Proposition 11.52. Soient deux suites complexe u et v bornées et deux complexes λ et μ, alors

— $\lambda u + \mu v$ est bornée ;

— uv est bornée.

Il existe alors deux réels M et N qui majorent respectivement $|u|$ et $|v|$ alors le réel $|\lambda|\, M + |\mu|\, N$ majore la suite $|\lambda u + \mu v|$ et le réel MN majore $|uv|$. Donc ces deux suites sont bornées.

11.5.2 Convergence d'une suite complexe

Définition 11.23. Soit une suite complexe u et un complexe λ. On dit que u converge vers λ si la suite $|u - \lambda|$ tend vers zéro. Le complexe λ est alors l'unique limite de u. On note $\lambda = \lim u$.

Démonstration. Supposons que u tendent vers deux complexes λ et λ' alors on a

$$0 \leq |\lambda - \lambda'| \leq |u_n - \lambda| + |u_n - \lambda'| \,. \tag{11.112}$$

Par théorème des gendarmes comme les deux suites tendent vers zéro, alors $\lambda = \lambda'$. □

Proposition 11.53. Soit une suite complexe u, elle converge si et seulement si $\Re(u)$ et $\Im(u)$ convergents. Auquel cas $\lim u = \lim \Re(u) + i \lim \Im(u)$.

Démonstration. Si u converge vers $\lambda = \alpha + i\beta$ on sait que pour tout naturel n, $|u_n - \lambda| = |\Re(u_n) - \alpha + i(\Im(u_n) - \beta)|$. Alors

$$0 \leq |\Re(u_n) - \alpha| \leq |u_n - \lambda| \,, \tag{11.113}$$
$$0 \leq |\Im(u_n) - \beta| \leq |u_n - \lambda| \,. \tag{11.114}$$

Par théorème des gendarmes, on en déduit que les deux suites réelles $\Re u$ et $\Im u$ tendent respectivement vers α et β.

Supposons désormais que deux suites réelles $\Re u$ et $\Im u$ tendent respectivement vers deux réels α et β. Posons $\lambda = \alpha + i\beta$, alors pour tout naturel n on a par inégalité triangulaire

$$|u_n - \lambda| \leq |\Re(u_n) - \alpha| + |\Im(u_n) - \beta| \,. \tag{11.115}$$

En appliquant le théorème des gendarmes on en conclue que u tend vers le complexe λ. □

Proposition 11.54. Soit une suite complexe u convergente vers λ, alors $|u|$ tend vers $|\lambda|$, $\Re(u)$ tend vers $\Re(\lambda)$, $\Im(u)$ tend vers $\Im(\lambda)$, $\overline{u}$ tend vers $\overline{\lambda}$.

Démonstration. Soit un naturel n, alors

— $0 \leq || u_n | - | \lambda || \leq |u_n - \lambda|$, donc $|u|$ tend vers $|\lambda|$;
— $0 \leq \left|\overline{u_n} - \overline{\lambda}\right| \leq |u_n - \lambda|$, donc $\overline{u}$ tend vers $\overline{\lambda}$;
— voir proposition ci-avant ;
— idem.

□

Proposition 11.55. Soit une suite complexe u, si elle converge alors elle est bornée.

Démonstration. Il existe un complexe λ tel que $|u - \lambda|$ tende vers zéro, alors $|u - \lambda|$ est bornée. Il existe un réel M tel que pour tout naturel n $|u_n - \lambda| \leq M$ donc $|u_n| \leq |u_n - \lambda| + |\lambda| \leq M + |\lambda|$ donc u est bornée. □

11.5.3 Opérations sur les limites

Proposition 11.56. Soient deux suites complexes u et v qui convergent de limite respectives λ et λ'. Soit α et β deux complexes, alors

— $\alpha u + \beta v$ converge de limite $\alpha\lambda + \beta\lambda'$;
— uv est convergente de limite $\lambda\lambda'$.

Démonstration. Voir la démonstration pour les suite réelles. □

Proposition 11.57. Soit une suite complexe u, supposons que u converge vers un complexe λ. Il existe donc un naturel n_0 à partir duquel u est non nulle. Donc la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ tend vers $\frac{1}{\lambda}$.

Démonstration. On sait que $|u|$ tend vers $|\lambda| > 0$ et pour tout naturel n si $n \geq n_0$ alors $|u_n| \geq 0$, on peu alors définir la suite inverse $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n \geq n_0}$ et on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies \frac{1}{u_n} = \frac{\overline{u_n}}{|u_n|^2}. \tag{11.116}$$

La suite réelle $\frac{1}{|u_n|^2}$ tend vers $\frac{1}{|\lambda|^2}$ et de plus on sait que $\lim \overline{u} = \overline{\lambda}$. Alors par produit $\lim \frac{1}{u} = \frac{1}{\lambda}$ □

11.5.4 Suites extraites et théorème de Bolzano-Weiertrass

Définition 11.24. Soit une suite complexe u. Une suite complexe v est dite extraite de u s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que pour tout naturel n $v_n = u_{\varphi(n)}$.

Proposition 11.58. Soit une suite complexe u et v une suite extraite de u. Alors

— si u converge alors v converge de même limite ;
— si u est bornée, alors v est bornée.

Les deux réciproques sont fausses.

Démonstration. — il existe un complexe λ tel que $|u - \lambda|$ tende vers zéro. La proposition appliqué aux suites réelles donne que la suite $|v - \lambda|$ tend vers zéro. La suite v tend vers λ.

— La suite réelle $|u|$ est bornée et la suite réelle $|v|$ est extraite de $|u|$ alors v est bornée.

$\square$

Théorème 11.6 (théorème de Bolzano-Weiertrass)**.** *De toute suite complexe bornée on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit une suite complexe u bornée. La suite réelle $\Re(u)$ est bornée, on applique donc le théorème pour les suites réelles pour affirmer qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(\Re(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La suite réelle $v = \Im(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée puisqu'elle est extraite de la suite $\Im(u)$. le théorème pour les suites réelles permet d'affirmer qu'il existe une application $\psi : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(v_{\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Alors $v_{\psi(n)} = \Im(u_{\varphi\circ\psi(n)})$ et l'application $\varphi\circ\psi$ est strictement croissante. Ainsi $u_{\varphi\circ\psi(n)}$ est extraite de u. La suite $\Im(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc. La suite $\Re(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $\Re(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, donc elle converge aussi. De cette manière la suite $(u_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge. $\square$

Ne pas étendre aux suites complexes les propositions, vues sur les suites réelles, relatives à la notion d'ordre. Puisqu'il n'y a pas d'ordre sur $\mathbb{C}$.

Chapitre 12

Limites et continuité des fonctions réelles de la variable réelle

Sommaire

12.1 Ensemble des fonctions de X vers $\mathbb{R}$ $(\mathbb{R}^X, +, \cdot, \perp, \leq)$

12.1.1 $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(\mathbb{R}^X, +, \perp)$ & anneau $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$

On note $\mathbb{R}^X$ l'ensemble des applications de X vers $\mathbb{R}$. On munit $\mathbb{R}^X$ de deux lois de composition internes, l'une est appelée addition notée $+$ et l'autre est appelée multiplication notée $\cdot$ ou rien. On le munit aussi d'une loi de composition externe appelée multiplication par un réel notée $\perp$. Ces opérations sont telles que pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}^X$ et tout réel λ

$$f + g \colon \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array} \right. , \tag{12.1}$$

$$fg \colon \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array} \right. , \tag{12.2}$$

$$\lambda f \colon \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array} \right. . \tag{12.3}$$

Proposition 12.1. L'ensemble $(\mathbb{R}^X, +, \perp)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'élément neutre pour l'addition est la fonction nulle $\tilde{0}$.

Proposition 12.2. L'ensemble $(\mathbb{R}^X, +, \cdot)$ est un anneau commutatif non intègre (dès que X admet au moins deux éléments). De plus pour toutes fonctions f et g de $\mathbb{R}^X$ et tout réel λ on a

$$\lambda(fg) = (\lambda f)g = f(\lambda g). \tag{12.4}$$

Dans ce cas, on dit que $(\mathbb{R}^X, +, \cdot, \perp)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre. Le neutre pour la multiplication est la fonction constante égale à un.

Définition 12.1. Soit $f \in \mathbb{R}^X$. On suppose que pour tout réel x, $f(x) \neq 0$, alors on peut définir la fonction inverse de f notée $\frac{1}{f}$ telle que $\frac{1}{f} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{f(x)} \end{array} \right.$.

12.1.2 Ensemble $(\mathbb{R}^X, \leq)$ partiellement ordonné

On définit une relation d'ordre sur $\mathbb{R}^X$ à partir de la relation d'ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante

$$\forall f, g \in \mathbb{R}^X \quad f \leq g \iff \forall x \in X \ f(x) \leq g(x). \tag{12.5}$$

Cet ordre n'est pas total. En effet, on peut trouver des fonctions qui ne sont pas comparables par $\leq$. Attention à la notation $f < g$, car elle est ambiguë puisqu'elle peut signifier

— soit $\forall x \in X \ f(x) < g(x)$;
— soit $f \leq g$ et $f \neq g$ c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathcal{X}$, $f(x) \leq g(x)$ et $\exists x_0 \in X \ f(x_0) < g(x_0)$.

Ne pas utiliser cette notation si possible. En particulier se méfier de la notation $f > \tilde{0}$ qui peut signifier

— soit f est à valeur strictement positives ;

— soit f est à valeurs positives ou nulles et f est différente de $\tilde{0}$.

Les propriétés de compatibilité de l'ordre sur $\mathbb{R}^X$ avec l'addition, la multiplication par un réel et la multiplication interne se déduisent des propriétés de compatibilité de l'ordre sur $\mathbb{R}$ avec l'addition et la multiplication.

12.1.3 Application valeur absolue, borne supérieure et borne inférieure

12.1.3.1 Valeur absolue

Définition 12.2. Pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^X$, on définit une fonction appelée valeur absolue notée $|f|$ et définie par

$$\forall x \in X \quad |f|(x) = |f(x)|. \tag{12.6}$$

12.1.3.2 Borne supérieure et borne inférieure

Définition 12.3. Soient f et g deux fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On définit deux applications S et I de X vers $\mathbb{R}$ par

$$S\colon \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \max(f(x), g(x)) \end{array} \right., \tag{12.7}$$

$$I\colon \left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \min(f(x), g(x)) \end{array} \right.. \tag{12.8}$$

Proposition 12.3. La fonction S (resp. I) est la borne supérieure (resp. inférieure) de $\{f, g\}$ dans l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}^X, \leq)$. On notera

$$S = \sup(f, g), \quad I = \inf(f, g). \tag{12.9}$$

Démonstration. Pour la fonction S. Montrons que S est le plus petit des majorants de $\{f, g\}$ dans $(\mathbb{R}^X, \leq)$. Soit un réel $x \in X$ $S(x) = \max(f(x), g(x))$ alors $S(x) \geq f(x)$ et $S(x) \geq g(x)$ donc $S \geq f$ et $S \geq g$ donc S est un majorant de $\{f, g\}$. Soit h un majorant de $\{f, g\}$ dans $\mathbb{R}^X$, c'est-à-dire que $h \geq f$ et $h \geq g$ et donc que pour tout réel x de la partie X on a $h(x) \geq f(x)$ et $h(x) \geq g(x)$ donc que $h(x) \geq \max(f(x), g(x)) = S(x)$ donc $h \geq S$. Alors S est le plus petit majorant. Finalement $S = \sup\{f, g\}$. □

Proposition 12.4. On peut exprimer différemment sup et inf, en effet pour toutes fonctions f et g de X dans $\mathbb{R}$ on a

$$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad \inf(f, g) = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|). \tag{12.10}$$

Démonstration. Voir celle du chapitre **??**. □

Corollaire 12.4.1. *Pour toute fonction* $f \in \mathbb{R}^X$,

$$|f| = \sup(f, -f). \tag{12.11}$$

Démonstration. En effet, $\sup(f, -f) = \frac{1}{2}(f - f + |2f|) = |f|$. □

12.1.3.3 Applications f^+ et f^-

Définition 12.4. Soit une fonction $f \in \mathbb{R}^X$, on lui associe deux applications de X dans $\mathbb{R}$, notées f^+ et f^- définies par

$$f^+ = \sup(f, 0) = \frac{|f| + f}{2}, \quad f^- = \sup(-f, 0) = \frac{|f| - f}{2}. \tag{12.12}$$

Proposition 12.5 (Propriétés)**.**
- f^+ et f^- sont à valeurs positives ou nulles ;
- $|f| = f^+ + f^-$;
- $f = f^+ - f^-$;
- $-f^- = \inf(f, 0)$;
- $-f^+ = \inf(-f, 0)$.

12.1.4 Fonctions majorées, minorées et bornées

12.1.4.1 Définitions

Définition 12.5. Soit une fonction $f \in \mathbb{R}^X$, on dit que
- f est majorée, s'il existe un réel M tel que pour tout $x \in X$ $f(x) \leq M$;
- f est minorée, s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in X$ $f(x) \geq m$;
- f est bornée si elle est majorée et minorée.

Proposition 12.6. Soit une fonction f de X dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée si et seulement s'il existe un réel M positif tel que pour tout réel $x \in X$, $|f(x)| \leq M$.

Démonstration. Voir celle du chapitre **??**. □

Définition 12.6. On appelle $\mathcal{B}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications bornées de X dans $\mathbb{R}$.

12.1.4.2 Borne supérieure d'une fonction majorée

Soit une fonction $f \in \mathbb{R}^X$, alors f est majorée si et seulement si la partie $f(X)$ est majorée dans $\mathbb{R}$. Puisque X est non vide alors $f(X)$ est non vide et par conséquent $f(X)$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$ et on la note $\sup\limits_X f$ ou $\sup\limits_{x \in X} f(x)$.

Définition 12.7. Soit une fonction $f \in \mathbb{R}^X$ et a un réel de X.
- On dit que f admet un maximum en a si pour tout $x \in X$, $f(x) \leq f(a)$;
- On dit que f admet un maximum local en a s'il existe un réel $h > 0$ tel que pour tout réel $x \in X$, $|x - a| \leq h \implies f(x) \leq f(a)$;
- On dit que f admet un minimum en a si pour tout $x \in X$, $f(x) \geq f(a)$;
- On dit que f admet un minimum local en a s'il existe un réel $h > 0$ tel que pour tout réel $x \in X$, $|x - a| \leq h \implies f(x) \geq f(a)$.

Soit $f \in \mathbb{R}^X$, si elle est majorée alors $\sup\limits_X f$ existe mais a priori $\sup\limits_X f \notin f(X)$ (une borne supérieure n'est en général pas atteinte). Cependant si $\sup\limits_X f \in f(X)$ alors f admet un maximum et c'est la borne supérieure. Mais si f admet une borne supérieure ce n'est pas forcément le maximum.

12.1.4.3 Propriétés de de la borne supérieure

Proposition 12.7. Soient deux fonctions f, g de $\mathbb{R}^X$. Si f et g sont majorées, alors $f+g$ est majorée et de plus

$$\sup_X (f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g. \tag{12.13}$$

En général, ce n'est pas une égalité. Il suffit de prendre $X = [0\,;1]$ et $f = \mathrm{Id}$ et $g = -\mathrm{Id}$ pour voir que $\sup_X (f+g) \neq \sup_X f + \sup_X g$ ($\sup_X f = 1$, $\sup_X g = 0$ et $\sup_X (f+g) = 0$).

Démonstration. Comme f et g sont majorées, alors leurs bornes supérieures existent. Soit $x \in X$ alors

$$f(x) + g(x) \leq \sup_X f + \sup_X g. \tag{12.14}$$

Donc $\sup_X f + \sup_X g$ est un majorant de $f+g$, donc $f+g$ admet une borne supérieure. Par définition, comme c'est le plus petit des majorants, en passant à la borne supérieure dans l'inégalité on a bien le résultat

$$\sup_X (f+g) \leq \sup_X f + \sup_X g. \tag{12.15}$$

□

Proposition 12.8. Soit une fonction $f \in \mathbb{R}^X$ et $\lambda \in [0\,;+\infty[$. On suppose que f est majorée, alors λf est aussi majorée et

$$\sup_X (\lambda f) = \lambda \sup_X f. \tag{12.16}$$

Démonstration. f est majorée, donc elle admet une borne supérieure et puisque $\lambda \geq 0$ alors, on a

$$\lambda f \leq \lambda \sup_X f. \tag{12.17}$$

Alors $\sup_X f$ est un majorant de la partie $\{\lambda f(x) \mid x \in X\}$. La fonction λf est majorée donc $\sup_X \lambda f$ existe. Puisque c'est le plus petit des majorant de la partie $\{\lambda f(x) \mid x \in X\}$, on passe à la borne supérieure dans l'inégalité

$$\sup_X \lambda f \leq \lambda \sup_X f. \tag{12.18}$$

Deux cas de figures se présentent :
- si $\lambda = 0$ alors λf est la fonction nulle donc il y a égalité.
- sinon, on a $\lambda > 0$ et
$$\lambda \sup_X f = \lambda \sup_X \frac{1}{\lambda} \lambda f. \tag{12.19}$$
Or d'après la première partie de la preuve, en notant $g = \lambda f$ et en appliquant l'équation. (**??**) à la fonction g et au réel $\frac{1}{\lambda}$, on a
$$\sup_X \frac{1}{\lambda} g \leq \frac{1}{\lambda} \sup_X g. \tag{12.20}$$

Or $\dfrac{1}{\lambda}g = f$ et en multipliant par $\lambda > 0$ de chaque coté de l'équation. (**??**), on obtient

$$\lambda \sup_X f \leq \sup_X \lambda f. \tag{12.21}$$

D'où l'égalité par double inégalité.

□

Proposition 12.9. Soient f et g deux applications de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \geq \tilde{0}$, $g \geq \tilde{0}$ et que f et g sont majorées. Alors la fonction fg est majorée et

$$\sup_X (fg) \leq (\sup_X f)(\sup_X g). \tag{12.22}$$

Ce n'est en général pas une égalité.

Démonstration. Les fonctions f et g sont majorées donc $\sup_X f$ et $\sup_X g$ existent. Soit $x \in X$ alors

$$0 \leq f(x) \leq \sup_X f, \tag{12.23}$$

$$0 \leq g(x) \leq \sup_X g. \tag{12.24}$$

Donc en multipliant les inégalités

$$0 \leq f(x)g(x) \leq (\sup_X f)(\sup_X g). \tag{12.25}$$

Alors $(\sup_X f)(\sup_X g)$ est un majorant de fg, donc la fonction fg est majorée, elle admet donc une borne supérieure et de plus

$$\sup_X fg \leq (\sup_X f)(\sup_X g). \tag{12.26}$$

□

12.1.4.4 Définition et propriétés de la borne inférieure

Définition 12.8. Soit une fonction $f \in \mathbb{R}^X$ est minorée, alors la partie $f(X)$ est minorée et non vide. Donc celle-ci admet une borne inférieure notée $\inf_X f$ ou $\inf_{x \in X} f(x)$.

Lemme 12.1. *Soit une fonction $f \in \mathbb{R}^X$. Alors f est minorée si et seulement si $-f$ est majorée. Auquel cas $\inf_X f = -\sup_X(-f)$*

Démonstration. En effet, puisque

$$\begin{aligned}
f \text{ est minorée} &\iff \exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in X\ \ m \leq f(x) &(12.27)\\
&\iff \exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in X\ -f(x) \leq -m &(12.28)\\
&\iff \exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in X\ -f(x) \leq M &(12.29)\\
&\iff -f \text{ est majorée.} &(12.30)
\end{aligned}$$

La fonction $-f$ est majorée, donc $\sup_X(-f)$ existe et

$$\forall x \in X \quad -f(x) \leq \sup_X(-f), \tag{12.31}$$

et donc

$$\forall x \in X \quad f(x) \geq -\sup_X(-f). \tag{12.32}$$

Du coup $-\sup_X(-f)$ est un minorant de la partie $f(X)$. Soit m un minorant de $f(X)$, alors

$$\forall x \in X \quad f(x) \geq m, \tag{12.33}$$

donc

$$\forall x \in X \quad -f(x) \leq -m. \tag{12.34}$$

Alors $-m$ est majorant de la partie $\{-f(x) \mid x \in X\}$. Donc $-m \geq \sup_X(-f)$ (puisque $\sup_X(-f)$ est le plus petit des majorants de $\{-f(x) \mid x \in X\}$). Ainsi $m \leq -\sup_X(-f)$ et $-\sup_X(-f)$ est donc le plus grand des minorants de $\{f(x) \mid x \in X\}$.

$$\inf_X f = -\sup_X(-f). \tag{12.35}$$

□

Grâce à ce lemme, on peut déduire trois propositions :

Proposition 12.10. Soient f et g deux applications de X dans $\mathbb{R}$. Si f et g sont minorée, alors $f+g$ l'est aussi et de plus

$$\inf_X(f+g) \geq \inf_X f + \inf_X g. \tag{12.36}$$

Démonstration. Les applications f est g sont minorées, donc d'après le lemme $-f$ et $-g$ sont majorées. Alors d'après la propriété sur la borne supérieure $-f-g$ est majorée. Encore d'après le lemme l'application $f+g$ est minorée et

$$\inf_X(f+g) = -\sup_X(-f-g). \tag{12.37}$$

D'après les propriétés de la borne supérieure

$$\sup_X(-f-g) \leq \sup_X(-f) + \sup_X(-g). \tag{12.38}$$

Alors en inversant l'inégalité on obtient

$$\inf_X(f+g) = -\sup_X(-f-g) \geq -\sup_X(-f) - \sup_X(-g) = \inf_X f + \inf_X g. \tag{12.39}$$

□

Proposition 12.11. Soient $f \in \mathbb{R}^X$ et un réel positif λ. Si f est minorée, alors λf est minoré et de pus

$$\inf_X(\lambda f) = \lambda \inf_X f. \tag{12.40}$$

Démonstration. Si f est minorée, alors $-f$ est majorée, comme $\lambda \geq 0$ alors $-\lambda f$ est majorée et sa borne supérieure existe et de plus $\sup_X(\lambda f) = \lambda \sup_X(-f)$. Alors λf est minorée et

$$\inf_X(\lambda f) = -\sup_X(-\lambda f) = -\lambda \sup_X(-f) = \lambda \inf_X f \tag{12.41}$$

□

Proposition 12.12. Soient f et g deux fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont minorées et à valeurs négatives, alors fg est majorée et

$$\sup_X fg \leq \inf_X f \inf_X g. \tag{12.42}$$

Démonstration. f et g sont minorées, donc leurs bornes inférieures existent. Alors $-f$ et $-g$ sont positives et majorées. D'après les propriétés sur la borne supérieure $fg = (-f)(-g)$ est majorée et de plus

$$\sup_X[(-f)(-g)] \leq \sup_X(-f) \sup_X(-g), \tag{12.43}$$

donc

$$\sup_X fg \leq (-\inf_X f)(-\inf_X g). \tag{12.44}$$

Finalement

$$\sup_X fg \leq \inf_X f \inf_X g. \tag{12.45}$$

□

12.1.4.5 Ensemble des fonctions bornées

Théorème 12.1. *L'ensemble $\mathcal{B}(X,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^X$. c'est-à-dire qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire.*

On peut aussi dire que c'est une sous-algèbre puisque $\tilde{0}$ et $\tilde{1}$ sont bornées et qu'il est stable par produit.

Définition 12.9 (Norme infinie)**.** Pour toute fonction $f \in \mathcal{B}(X,\mathbb{R})$, $|f|$ est majorée donc sa borne supérieure existe. On appelle cette borne supérieure la norme infinie ou la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_X |f|. \tag{12.46}$$

Théorème 12.2. *L'application norme infinie* $\|.\|_\infty : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{B}(X,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \|f\|_\infty \end{array} \right.$ *est une vraie norme, c'est-à-dire qu'elle vérifie pour toutes fonctions bornées f et g et tout réel λ :*

$$\|f\|_\infty \geq 0; \tag{12.47}$$
$$\|f\|_\infty = 0 \iff f = \tilde{0}; \tag{12.48}$$
$$\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty; \tag{12.49}$$
$$\|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty. \tag{12.50}$$

Démonstration. — $|f| \geq \tilde{0}$ donc en passant à la borne supérieure $\|f\|_\infty \geq 0$;

— $\|f\|_\infty = 0 \iff \sup_X |f| = 0$ c'est-à-dire si et seulement si $|f| = \tilde{0}$ donc si et seulement si $f = \tilde{0}$;

— C'est une conséquence des propriétés de la borne supérieure.

□

12.1.5 Fonctions paires et fonctions impaires

Définition 12.10. Soit une fonction f de $\mathbb{R}^X$. On suppose que pour tout $x \in X$, $-x \in X$. La fonction f est dite paire si et seulement si pour tout $x \in X$ $f(-x) = f(x)$ et elle est dite impaire si et seulement si pour tout $x \in X$ $f(-x) = -f(x)$. On note $\mathcal{P}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions paires de X dans $\mathbb{R}$ et $\mathcal{I}(X, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions impaires de X dans $\mathbb{R}$.

Si une fonction $f \in \mathcal{P}(X, \mathbb{R})$ alors son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Si une fonction $f \in \mathcal{I}(X, \mathbb{R})$ alors son graphe est symétrique par rapport à l'origine. Si $0 \in X$ est que f est impaire, alors $f(0) = 0$. Cependant, zéro peut ne pas être dans X. Néanmoins si f est définie sur un intervalle I non vide symétrique par rapport à 0 alors $0 \in I$.

Proposition 12.13. Soit X une partie de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à zéro. $\mathcal{P}(X, \mathbb{R})$ et $\mathcal{I}(X, \mathbb{R},)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^X$. C'est-à-dire qu'ils sont stables par combinaisons linéaires et que pour toute fonction $f \in \mathbb{R}^X$ il existe un unique couple (φ, ψ) de fonction de $\mathbb{R}^X$ tel que : $f = \varphi + \psi$, φ est paire et ψ est impaire.

Analyse & unicité. On suppose qu'il existe un tel couple (φ, ψ) de $\mathbb{R}^X$, alors pour tout réel $x \in X$ on a

$$\forall x \in X \quad f(x) = \varphi(x) + \psi(x), \tag{12.51}$$

et aussi

$$\forall x \in X \quad f(-x) = \varphi(x) - \psi(x). \tag{12.52}$$

Alors

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \tag{12.53}$$

On a prouvé l'unicité du couple. Si la solution existe elle est unique et le couple est donné comme étant les fonction ci-dessus. □

Synthèse & existence. On définit les fonctions suivantes

$$\varphi \colon \begin{cases} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)+f(-x)}{2} \end{cases}, \tag{12.54}$$

$$\psi \colon \begin{cases} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(-x)}{2} \end{cases}. \tag{12.55}$$

Montrons que le couple est solution du problème. Soit un réel $x \in X$, alors

$$\varphi(x) + \psi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2} = f(x), \tag{12.56}$$

$$\varphi(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \varphi(x), \tag{12.57}$$

$$\psi(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = -\psi(x). \tag{12.58}$$

Alors on a montré qu'il existe une fonction φ paire et un fonction ψ impaire telle que $f = \varphi + \psi$. $\square$

12.1.6 Fonctions périodiques

Définition 12.11. Soit T un réel non nul et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On dit que T est une période de f, ou que f est T-périodique si pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$.

On n'a pas forcément besoin que f soit définie sur $\mathbb{R}$ mais sinon il faut préciser que pour tout réel $x \in X$, $x + T \in X$ comme par exemple la fonction tangente.

Proposition 12.14. Soit un réel T non nul. L'ensemble des applications périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. C'est même une sous-algèbre.

12.2 Limites et continuité en un point

12.2.1 Fonctions définies sur un voisinage

Soit un réel a.

Définition 12.12. Soit une fonction $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. On dit que f est définie au voisinage de a s'il existe un réel $h > 0$ tel que
- soit $[a - h\,; a + h] \setminus \{a\} \subset \mathcal{D}_f$;
- soit $]a - h\,; a[\subset \mathcal{D}_f$;
- ou soit $]a\,; a + h[\subset \mathcal{D}_f$.

Par exemple la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ est définie au voisinage de zéro.

Définition 12.13. Soit une fonction $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}$. On dit que f est définie au voisinage de $+\infty$ s'il existe un réel A tel que $[A\,; +\infty[\subset \mathcal{D}_f$. De la même manière, on dit que f est définie au voisinage de $-\infty$ s'il existe un réel B tel que $]-\infty\,; B] \subset \mathcal{D}_f$.

Définition 12.14. Soit $b \in \overline{\mathbb{R}}$ et $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit qu'une propriété P portant sur f est vraie au voisinage de b, si f est définie au voisinage de b et si
- $b \in \mathbb{R}$, il existe un réel h tel que P soit vraie sur $[a - h\,; a + h] \cap \mathcal{D}_f$;
- $b = +\infty$, il existe un réel A tel que P soit vraie sur $[A\,; +\infty[\cap \mathcal{D}_f$;
- $b = +\infty$, il existe un réel A tel que P soit vraie sur $]-\infty\,; A] \cap \mathcal{D}_f$.

12.2.2 Limite en un point d'une fonction

12.2.2.1 Fonctions de limite nulle

Définition 12.15.
- Soit un réel a et une fonction $f : \mathcal{D}_f \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que f tend vers zéro en a si f est définie au voisinage de a et si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x)| \leq \epsilon; \tag{12.59}$$

- on dit que f tend vers zéro en $+\infty$ si f est définie au voisinage de $+\infty$ et si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists A \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \geq A \implies |f(x)| \leq \epsilon; \tag{12.60}$$

— on dit que f tend vers zéro en $-\infty$ si f est définie au voisinage de $+\infty$ et si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists A \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \leq A \implies |f(x)| \leq \epsilon. \tag{12.61}$$

12.2.2.2 Fonctions admettant une limite finie

Définition 12.16. Soient $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f tend vers ℓ en a si la fonction $f - \ell$ tend vers zéro en a.

Théorème 12.3 (Unicité de la limite)**.** *Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une application définie au voisinage de a. Il existe au plus un réel ℓ tel que f tende vers ℓ en a. S'il existe on dit que ℓ est la limite de la fonction f en a. On note*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \qquad \lim_a f = \ell \qquad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell. \tag{12.62}$$

Démonstration. Pour $a \in \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe ℓ et ℓ' deux réels différents tels que $f - \ell$ et $f - \ell'$ tendent vers zéro en a. On va chercher une absurdité pour montrer que $\ell = \ell'$. Soit $\epsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3} > 0$ puisque $\ell \neq \ell'$. Il existe donc deux réels η_1 et η_2 strictement positifs tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ on ait

$$|x - a| \leq \eta_1 \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon, \tag{12.63}$$

$$|x - a| \leq \eta_2 \implies |f(x) - \ell'| \leq \epsilon. \tag{12.64}$$

Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, alors pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ si $|x - a| \leq \eta$ alors par inégalité triangulaire

$$|\ell - \ell'| \leq |f(x) - \ell| + |f(x) - \ell'| \leq \frac{2}{3} |\ell - \ell'| \,. \tag{12.65}$$

Car $|\ell - \ell'| > 0$, on peut simplifier l'inégalité et $1 \leq \frac{2}{3}$, ce qui est absurde. Donc $\ell = \ell'$. $\square$

12.2.2.3 Fonction admettant une limite infinie

Définition 12.17. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une application définie au voisinage de a. On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

— si $a \in \mathbb{R}$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x - a| \leq \eta \implies f(x) \geq A; \tag{12.66}$$

— si $a = +\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists B \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \geq B \implies f(x) \geq A; \tag{12.67}$$

— si $a = -\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists B \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \leq B \implies f(x) \geq A. \tag{12.68}$$

On dit aussi que f admet $+\infty$ pour limite en a et on note

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \qquad \lim_a f = +\infty \qquad f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty. \tag{12.69}$$

Définition 12.18. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f une application définie au voisinage de a. On dit que f tend vers $-\infty$ en a si $-f$ tend vers $+\infty$ en a. c'est-à-dire

— si $a \in \mathbb{R}$

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists \eta > 0\ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x-a| \leq \eta \implies f(x) \leq A; \tag{12.70}$$

— si $a = +\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \geq B \implies f(x) \leq A; \tag{12.71}$$

— si $a = -\infty$

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \leq B \implies f(x) \leq A. \tag{12.72}$$

On dit aussi que f admet $-\infty$ pour limite en a et on note

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \qquad \lim_a f = -\infty \qquad f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty. \tag{12.73}$$

Théorème 12.4.

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty. \tag{12.74}$$

Démonstration. Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $\mathbb{R}$ est archimédien, il existe un entier naturel n tel que $n \ln 2 \geq A$. Soit $B = 2^n$, alors

$$\forall x \geq B \quad \ln x \geq \ln B, \tag{12.75}$$

car le logarithme népérien est croissant. Alors $\ln x \geq \ln B \geq A$ donc $\ln x \geq A$. On a montré

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathbb{R}\ \forall x \geq B \quad \ln x \geq A, \tag{12.76}$$

donc $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$. □

12.2.2.4 Restriction – Limites à gauche – Limites à droite

Soit un intervalle réel I.

Proposition 12.15. Soit un réel a et une fonction $f \in \mathbb{R}^I$. Soit un intervalle non vide $I' \subset I$. On suppose que $f_{|I'}$ est définie au voisinage de a. Alors

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = \lim_a f = \ell \implies \lim_{\substack{x \to a \\ x \in I'}} f(x) = \lim_a f_{|I'} = \ell \tag{12.77}$$

La réciproque est fausse. Par exemple, on prend $I = [-1,1]$, $I' = [0,1]$, $a = 0$ et

$$f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & -1 \leq x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}, \end{array} \right. \tag{12.78}$$

alors $\lim_{x\to 0} f_{|I'}(x) = 1$ cependant f n'admet pas de limite en zéro.

Démonstration. On a $I' \subset I$, par exemple si $\lim_a f = \ell$ alors

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I' \subset I \quad |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon. \tag{12.79}$$

□

Limites à droite et limite à gauche :

Soit $f \in \mathbb{R}^I$, $a \in \mathbb{R}$ et $I' = I \cap]a, +\infty[\neq \emptyset$. Alors f est définie au voisinage de a. On considère la restriction de f à I'. On dit que f admet une limite à droite en a si $f_{|I'}$ admet une limite en a. On note sous réserve d'existence

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{a^+} f \tag{12.80}$$

Définition 12.19 (Écriture quantifiée de la limite à droite)**.** Soit $f \in \mathbb{R}^I$, $a \in \mathbb{R}$ et $l \in \mathbb{R}$. La fonction f admet pour limite à droite ℓ en a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad a < x \leq a + \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon \tag{12.81}$$

Proposition 12.16. Si f tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, en a alors $\lim\limits_{a^+} f = \ell$. La réciproque est fausse.

Démonstration. C'est une conséquence du résultat sur les restrictions et de la définition de la limite à droite. □

On définit de la même manière la limite à gauche et les propriétés sont identiques.

Proposition 12.17. Soient $f \in \mathbb{R}^I$, $a \in \mathbb{R}$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. La fonction f admet ℓ pour limite à gauche et limite à droite en a si et seulement si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I \setminus \{a\}}} f(x) = \ell$.

Démonstration. $\Longleftarrow$ C'est la conséquence de la proposition sur les restrictions.

$\Longrightarrow$ On peut par exemple le montrer avec $\ell = +\infty$. On a la limite à droite $\lim\limits_{a^+} f = \ell$, alors

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \quad a < x < a + \eta \implies f(x) \geq A \tag{12.82}$$

et la limite à gauche $\lim\limits_{a^-} f = \ell$

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists \alpha > 0 \ \forall x \in I \quad a - \alpha \leq x < a \tag{12.83}$$

Soit $\beta = \min(\alpha, \eta)$. Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$

$$|x - a| \leq \beta \implies a - \beta \leq x \leq a + \beta, \tag{12.84}$$

alors deux cas de figure se présentent :
— soit $a < x \leq a + \beta \leq a + \eta$ et alors $f(x) \geq A$;
— soit $\alpha - \beta \leq x < a$ et comme $\beta \leq \alpha$ alors on a $a - \alpha \leq x < a$ donc $f(x) \geq A$.

Pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ on a bien $|x - a| \leq \beta \implies f(x) \geq A$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in I \setminus \{a\}}} f(x) = +\infty$.

□

L'égalité des limites à gauche et à droite à ℓ n'est pas équivalente à $\lim_a f = \ell$. En effet, si on considère la fonction définie sur $[0\,;1]$ qui est nulle partout sauf en 1 où elle vaut 1. Alors les limites à droite et à gauche sont nulles pourtant la limite de f en zéro n'existe pas. Si f tend vers ℓ en zéro, alors les limites à gauche et à droite sont égales à $\ell = 0$. En effet, si f était de limite nulle en zéro on aurait

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in [-1\,;1] \quad |x - 0| \leq \eta \implies |f(x) - 0| \leq \epsilon. \tag{12.85}$$

Avec $\epsilon = \frac{1}{2}$, on écrit

$$\exists \eta > 0\ \forall x \in [-1\,;1] \quad |x| \leq \eta \implies |f(x)| \leq \frac{1}{2}. \tag{12.86}$$

Or $0 \in [-1\,;1]$ et $|0| \leq \eta$ donc $|f(0)| = 1 \leq \frac{1}{2}$, ce qui est absurde. Donc f n'est pas continue en zéro.

12.2.2.5 Propriétés des limites

Soient f une fonction définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

Proposition 12.18.

$$\lim_a f = \ell \iff \lim_a |f - \ell| = 0 \tag{12.87}$$

$$\lim_a f = \ell \iff \lim_a |f| = |\ell|\,. \tag{12.88}$$

Démonstration. Voir la démonstration équivalente du chapitre **??** relative aux suites. □

Proposition 12.19. Si la fonction f admet une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. Par exemple, si on prend $a = -\infty$ alors il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{-\infty} f = \ell$. c'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0\ \exists A \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon. \tag{12.89}$$

Avec $\epsilon = 1$, on écrit

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq 1. \tag{12.90}$$

On pose $M = 1 + |l|$, alors

$$\forall x \in \mathcal{D}_f \cap \,]-\infty\,; A] \quad |f(x)| \leq |f(x) - \ell| + |\ell| \leq 1 + |\ell| = M. \tag{12.91}$$

La fonction f est donc bornée au voisinage de $-\infty$. □

Proposition 12.20. Soit un réel m. On suppose que $\lim_a f = \ell$ avec $\ell > m$. Alors f est minorée par m au voisinage de a.

Démonstration. Prenons le cas où $a \in \mathbb{R}$. Alors deux cas de figures se présentent : soit $\ell \in \mathbb{R}$ ou soit $\ell = +\infty$

— Dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}$, on pose $\epsilon = \ell - m > 0$ et donc

$$\exists \eta > 0 \ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon. \tag{12.92}$$

Alors pour tout $x \in \mathcal{D}_f \cap [a-\eta, ; a+\eta]$ on a $-\epsilon \leq f(x) - l \leq \epsilon$ soit en particulier $m - \ell \leq f(x) - \ell$, donc $m \leq f(x)$. La fonction f est donc minorée au voisinage de a.

— Dans le cas où $\ell = \infty$, on écrit la définition

$$\forall m \in \mathbb{R} \ \exists \eta \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathcal{D}_f \quad |x-a| \leq \eta \implies f() \geq m. \tag{12.93}$$

Donc $\forall x \in \mathcal{D}_f \cap [a-\eta\,; a+\eta] \quad f(x) \geq m$. La fonction f est donc minorée au voisinage de a.

□

Corollaire 12.20.1. — *Si f admet une limite positive, finie ou infinie, en $a \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est minorée par un réel strictement positif au voisinage de a,*

— *si f admet une limite non nulle, alors $|f|$ est minorée par un réel strictement positif au voisinage de a.*

Proposition 12.21. Soient $a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R}^X$, et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

$$\lim_a f = \ell \iff \lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell. \tag{12.94}$$

Démonstration. Soient l'ensemble $Y = \{h \in \mathbb{R} \mid a+h \in X\}$ et la fonction

$$g\colon \left\{ \begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & f(a+h) \end{array} \right. . \tag{12.95}$$

Alors

$$\lim_{x\to a, x\in X} f(x) = \ell \iff \lim_{x-a\to 0, x\in X} f(a+x-a) = \ell \iff \lim_{h\to 0, h\in Y} g(h) = \ell. \tag{12.96}$$

□

12.2.3 Notion de continuité en un point

12.2.3.1 Définition de la continuité en un point

Proposition 12.22. Soient $f \in \mathbb{R}^X$ et $a \in X$. La limite en a de f existe et est finie si et seulement si $\lim\limits_a f = f(a)$.

Démonstration. $\Longleftarrow$ Évident

$\Longrightarrow$ Soit $l = \lim\limits_a f$. Supposons que $l \neq f(a)$. Alors puisque ℓ existe et est finie, on a

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in X \quad |x-a| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon \tag{12.97}$$

Avec $\epsilon = \frac{|f(a)-\ell|}{2}$ et avec $a \in X$ ($|a-a| = 0 \leq \eta$) on a

$$|f(a) - \ell| \leq \frac{|f(a) - \ell|}{2}, \tag{12.98}$$

et comme $|f(a) - \ell| > 0$ on simplifie et on obtient $1 \leq \frac{1}{2}$. Ce qui est absurde donc $\ell = f(a)$.

□

Définition 12.20. Soient $f \in \mathbb{R}^X$ et $a \in X$. On dit que f est continue en a si et seulement si f admet une limite finie en a. En vertu de la proposition précédente, f est continue en a si et seulement si $\lim_a f = f(a)$.

12.2.3.2 Prolongement par continuité en un point

Soient X une partie de $\mathbb{R}$ et a un réel. On suppose que f est définie sur X, qu'elle est définie au voisinage de a mais pas en a, par exemple $X =]a, b]$, ou $X = \mathbb{R} \setminus \{a\}$. On suppose que f admet une limite finie ℓ en a. Le prolongement par continuité de f en a est la fonction $g : X \cup \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie comme égale à f sur X et égale à ℓ en a.

Proposition 12.23. Le prolongement par continuité de f en a est une application continue en a et c'est l'unique prolongement de f à $X \cup \{a\}$ qui soit continu en a.

Preuve de la continuité. On sait que $\ell = \lim_a f$ donc

$$\forall \epsilon > 0 \; \exists A \in \mathbb{R} \; \forall x \in X \quad x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon. \tag{12.99}$$

Pour tout $x \in X \cup \{a\}$ tel que $|x - a| \leq \eta$, deux cas de figure se présentent :
- si $x \in X$ alors $|g(x) - \ell| = |f(x) - \ell| \leq \epsilon$,
- si $x = a$ alors $|g(a) - \ell| = 0 \leq \epsilon$.

Donc pour tout $x \in X \cup \{a\}$, si $|x - a| \leq \eta$ alors $|g(x) - \ell| \leq \epsilon$. La fonction g admet une limite finie en a, alors elle est continue en a. □

Preuve de l'unicité. Soit h un prolongement de f à $X \cup \{a\}$ continue en a. Pour tout réel $x \in X$, $f(x) = g(x) = h(x)$.

$$h(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in X \cup \{a\}}} h(x). \tag{12.100}$$

D'après les résultats sur les restrictions cela implique que

$$h(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in X \cup \{a\}}} h(x) \text{ et } h(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in X \cup \{a\}}} f(x). \tag{12.101}$$

On en déduit donc par unicité de la limite que $h(a) = \ell = g(a)$. Ainsi $h = g$ et g est l'unique prolongement de f en a continu. □

Exemples :
- Soit la fonction $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\sin x}{x} \end{cases}$. On sait que $\lim_0 f = 1$. On peut prolonger f par continuité en zéro en prenant $f(0) = 1$ (en notant abusivement f la fonction prolongée alors que ces deux fonctions sont différentes). On obtient une fonction définie sur $\mathbb{R}$ appelée sinus cardinal et notée sinc couramment utilisée en physique.
- Soit la fonction $g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} \end{cases}$. On sait que $\lim_0 g = 0$. On peut prolonger g par continuité en posant $g(0) = 0$.

— Soit la fonction h: $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} \end{array}\right.$. Cette fonction n'est pas prolongeable par continuité puisque $\lim_{0^+} h = 0$ et $\lim_{0^-} h = +\infty$. Par contre la restriction de h à $]0, +\infty[$ notée h_1 est prolongeable par continuité en posant $h_1(0) = 0$.

12.2.3.3 Continuité à gauche et continuité à droite

Définition 12.21. Soient une fonction $f \in \mathbb{R}^X$ et un réel $a \in X$. Alors f est continue à droite en a si et seulement si la restriction de f à $X \cap [a\,;+\infty[$ est continue en a si et seulement si la restriction de f à $X \cap [a\,;+\infty[$ admet une limite finie en a si et seulement si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.

La définition est similaire pour la continuité à gauche.

Proposition 12.24. Soient $f \in \mathbb{R}^X$ et un réel $a \in X$. Alors f est continue en a si et seulement si f est continue à droite en a et si f est continue à gauche en a.

Les limites à gauche et à droite peuvent être différentes. Par exemple prenons la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{R}+$ et est nulle ailleurs. Alors $\lim_{0^+} f = 1$ et $\lim_{0^-} f = 0$. La fonction f n'est pas continue à gauche en zéro.

Démonstration. $\Longrightarrow$ C'est une conséquence du théorème sur les restrictions.

$\Longleftarrow$ Soit $\epsilon > 0$, il existe alors deux réels η_1 et η_2 strictement positifs tels que pour tout $x \in X$ on a

$$a < x \leq a + \eta_1 \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon; \qquad (12.102)$$

$$a - \eta_2 \leq x < a \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon. \qquad (12.103)$$

On pose $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Si $|x - a| \leq \eta$, trois cas de figures se présentent
— si $a < x \leq a + \eta_0 \leq a + \eta_1$ alors $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$;
— si $x = a$ alors $|f(x) - f(a)| = 0 \leq \epsilon$;
— si $a - \eta_2 < a - \eta_0 \leq x < a$ alors $|f(x) - f(a)| \leq \epsilon$.
Finalement,

$$\forall x \in X \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon. \qquad (12.104)$$

Alors $\lim_{a} f = f(a)$. La fonction f est continue en a.

$\square$

12.2.4 $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de limite nulle

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

Théorème 12.5. *L'ensemble des applications de X vers $\mathbb{R}$ admettant une limite nulle en a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^X$. C'est-à-dire qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire.*

Démonstration. Avec $a = +\infty$. Cette ensemble contient l'application nulle. Soit f et g deux fonctions de limite nulle en $+\infty$ et un réel λ. Alors Pour tout $\epsilon > 0$ il existe deux réels A et B tels que pour tout $x \in X$ on a

$$x \geq A \implies |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2(|\lambda| + 1)}; \tag{12.105}$$

$$x \geq B \implies |g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{12.106}$$

Soit $C = \max(A, B)$, alors pour tout réel $x \in X$, si $x \geq C$ alors

$$|\lambda f(x) + g(x)| \leq |\lambda f(x)| + |g(x)| \leq |\lambda| \frac{\epsilon}{2(|\lambda| + 1)} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon. \tag{12.107}$$

Donc $\lambda f + g$ tend vers zéro en l'infini. □

Proposition 12.25. Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}^X$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On suppose que f est de limite nulle en a et que g est bornée au voisinage de a, alors l'application fg est de limite nulle en a.

Démonstration. Avec $a \in \mathbb{R}$. La fonction g est bornée au voisinage de a, il existe donc un réel $M \geq 0$ et un réel $h > 0$ tels que pour tout $x \in X \cap [a - h, a + h]$ $|g(x)| \leq M$. On sait aussi que la limite de f en a est nulle, donc

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in X \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x)| \leq \frac{\epsilon}{M + 1}. \tag{12.108}$$

Soit $\alpha = \min(\eta, h) > 0$, alors pour tout $x \in X$ si $|x - a| \leq \alpha$ alors $|f(x)g(x)| \leq \frac{\epsilon}{M+1} M \leq \epsilon$. Donc $\lim\limits_{a} fg = 0$. □

12.2.5 Opérations algébriques

les opérations 1,2,3 et 4 concernant les limites finies et infinies, la somme, le produit et le quotient sont sur le polycopié.

12.2.5.1 Composition

Théorème 12.6. *Soient I et J deux intervalles réels, $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ et a, b dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que $\lim\limits_{a} f = b$, $\lim\limits_{b} g = \ell$ et que $f(I) \subset J$ alors $\lim\limits_{a} g \circ f = \ell$*

Démonstration. Soit par exemple $a \in \mathbb{R}$, $b = -\infty$ et $\ell = +\infty$. Comme $\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$ on écrit

$$\forall A \in \mathbb{R} \ \exists B \in \mathbb{R} \ \forall y \in J \quad y \leq B \implies g(y) \geq A. \tag{12.109}$$

Comme $\lim\limits_{a} f = -\infty$ alors

$$\exists \eta > 0 \ \forall x \in I \quad |x - a| \leq \eta \implies f(x) \leq B. \tag{12.110}$$

Alors partant de là on a

$$\begin{aligned} \forall x \in I \quad |x - a| \leq \eta &\implies f(x) \leq B && (12.111)\\ &\implies g \circ f(x) = g(f(x)) \geq A && (12.112) \end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = +\infty = \ell$ □

Corollaire 12.25.1. *Soient I et J deux intervalles réels, $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ et $a \in I$. On suppose que f est continue en a, g est continue en $f(a)$ et que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est continue en a.*

Démonstration. D'après la définition, $g \circ f$ est continue en a est équivalent à ce que la limite de $g \circ f$ en a soit finie. On applique ensuite le théorème du dessus. □

12.2.6 Caractérisation séquentielle de la limite et de la continuité

Théorème 12.7 (Caractérisation séquentielle de la limite)**.** *Soient $f \in \mathbb{R}^X$, $(a, \ell) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Alors $\lim\limits_a f = \ell$ si et seulement si pour toute suite $u \in X^{\mathbb{N}}$, $\lim u = a \implies \lim f(u) = \ell$.*

Démonstration. On prend par exemple $a = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$.

$\implies$ On suppose que la limite en a de f vaut ℓ. Alors

$$\forall \epsilon > 0\ \exists A \in \mathbb{R}\ \forall x \in X \quad x \leq A \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon. \tag{12.113}$$

Soit une suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim u = a = -\infty$, alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq n_0 \implies u_n \leq A. \tag{12.114}$$

Pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in X$ et $u_n \leq A$ donc $|f(u_n) - \ell| \leq \epsilon$. Par conséquent $\lim f(u) = \ell$.

$\Longleftarrow$ On montre cela par contraposée. Supposons que f n'admette pas ℓ comme limite en $a = -\infty$ alors

$$\exists \epsilon\ \forall A \in \mathbb{R}\ \exists x \in X \quad x \leq A \wedge |f(x) - \ell| > \epsilon. \tag{12.115}$$

En particulier avec $A = -n$ pour tout naturel n.

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in X\ x_n \leq -n \wedge |f(x_n) - \ell| \geq \epsilon. \tag{12.116}$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $a = -\infty$ et la suite $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers ℓ. On a donc montré que si f n'admet pas ℓ pour limite en a alors il existe une suite $x \in X^{\mathbb{N}}$ qui converge vers a telle que $f(x_n)$ ne converge pas vers ℓ. Finalement, par contraposée, la limite de f en a vaut ℓ.

□

Théorème 12.8 (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.** *Soient $f \in \mathbb{R}^X$, $a \in X$. Alors f est continue en a si et seulement si pour toute suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ si u tend vers a alors $f(u)$ tend vers $f(a)$.*

Démonstration. La fonction f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_a f = f(a)$ et d'après le théorème précédent si et seulement si pour toute suite $u \in X^{\mathbb{N}}$ $\lim u = a \implies \lim f(u) = f(a)$. □

Les théorèmes précédents sont très utiles pour démontrer qu'une fonction n'a pas de limite ou alors qu'elle n'est pas continue. Pour cela il suffit de trouver :

— une suite u qui tend vers a alors que $f(u)$ diverge ;

— deux suites u et v qui tendent vers a alors que $f(u)$ et $f(v)$ ont deux limites distinctes.

Par exemple, montrons que la fonction cosinus n'a pas de limite en $+\infty$. Soit pour tout naturel n $u_n = 2n\pi$, alors u tend à l'infini, pourtant $\cos(u)$ est constante égale à 1. Soit pour tout naturel n, $v_n = \pi(2n+1)$. Alors v tend à l'infini et pourtant $\cos(v)$ est constante égale à -1. Alors cosinus n'admet pas de limite en l'infini.

12.2.7 Applications monotones

12.2.7.1 Définitions

Soient X une partie de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments et $f \in \mathbb{R}^X$. Soit x et x' deux éléments de X. Alors

1. f est croissante si $x \leq x' \implies f(x) \leq f(x')$;
2. f est décroissante si $x \leq x' \implies f(x) \geq f(x')$;
3. f est monotone si elle est croissante ou décroissante ;
4. f est strictement croissante si $x < x' \implies f(x) < f(x')$;
5. f est strictement décroissante si $x < x' \implies f(x) > f(x')$;
6. f est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

12.2.7.2 Monotonie et opérations algébriques

Proposition 12.26. Soient f et g deux applications de $\mathbb{R}^X$ et un réel λ. Alors

1. si f et g sont croissantes, alors $f+g$ est croissante ;
2. si f est croissante et $\lambda \geq 0$ alors λf est croissante ;
3. si f est croissante et $\lambda \leq 0$ alors λf est décroissante ;
4. si f et g sont croissantes et positives, alors fg est croissante ;
5. si f est croissante et $f(X) \subset]0, +\infty[$ alors $\frac{1}{f}$ est décroissante ;
6. si f est croissante et $f(X) \subset]-\infty, 0[$ alors $\frac{1}{f}$ est décroissante.

Démonstration. Les quatre premiers points se démontrent facilement, intéressons nous au cinquième et au sixième. Si f est croissante et que $f(X) \subset]0\,; +\infty[$ [ou $f(X) \subset]-\infty\,; 0[$. Alors soit deux éléments x et x' de X. Si $x \leq x'$ alors $f(x) \leq f(x')$. Dans les deux cas $f(x)f(x') > 0$. Donc en divisant on a $\frac{f(x)}{f(x)f(x')} \leq \frac{f(x')}{f(x)f(x')}$ et en simplifiant $\frac{1}{f(x')} \leq \frac{1}{f(x)}$. Alors $\frac{1}{f}$ décroît. □

Théorème 12.9. *Soient $f \in \mathbb{R}^X$ et $g \in \mathbb{R}^Y$ tels que $f(X) \subset Y$. Si f et g sont monotones alors $g \circ f$ est monotone. De plus*

— *$g \circ f$ est croissante si f et g sont de même monotonie ;*
— *$g \circ f$ est décroissante sinon.*

12.2.7.3 Monotonie et injectivité

Théorème 12.10. *Soit $g \in \mathbb{R}^X$, alors f est injective et monotone si et seulement si f est strictement monotone.*

Démonstration. $\implies$ Soit $(x, x') \in X^2$ tels que $x < x'$. Alors $f(x) \leq f(x')$ puisque f croît et ensuite comme $x \neq x'$ et que f est injective alors $f(x) < f(x')$. Donc f est strictement croissante.

$\impliedby$ f est strictement monotone donc f est monotone. Soit x et x' deux éléments de X différents. Deux cas de figure se présentent
— soit $x < x'$ auquel cas $f(x) < f(x')$ donc $f(x) \neq f(x')$;
— soit $x > x'$ auquel cas $f(x) > f(x')$ donc $f(x) \neq f(x')$.
Dans les deux cas, $\forall (x, x') \in X^2 \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$. La fonction f est donc injective.

□

Corollaire 12.26.1. *Soit $f \in \mathbb{R}^X$ une application strictement monotone, alors f induit une bijection g de X sur $f(X)$. De plus la bijection réciproque g^{-1} (notée abusivement f^{-1}) est strictement monotone, de même sens de monotonie que f.*

Démonstration. La fonction f est injective d'après le théorème précédent. La fonction $g = f^{|f(X)}$ est surjective. Donc g est bijective. On définit donc sa bijection réciproque $g^{-1} : f(X) \longrightarrow X$. On suppose que f est strictement décroissante. Montrons que g^{-1} est strictement décroissante.

La fonction g est strictement décroissante si et seulement si

$$\forall x, x' \in f(X) \quad x < x' \implies g^{-1}(x) > g^{-1}(x'), \tag{12.117}$$

c'est-à-dire, par contraposée, si et seulement si

$$\forall x, x' \in f(X) \quad g^{-1}(x) \leq g^{-1}(x') \implies x \geq x'. \tag{12.118}$$

Montrons cette dernière inégalité pour conclure. Soient $(x, x') \in f(X)^2$, supposons que $g^{-1}(x) \leq g^{-1}(x')$ alors comme f est décroissante on a $f \circ g^{-1}(x) \geq f \circ g^{-1}(x')$ donc comme $f = g$, on a bien $x \geq x'$. La fonction g^{-1} est alors strictement décroissante. □

12.2.7.4 Monotonie et limite

Théorème 12.11. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f : [a\,; b[\longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f croît. Alors*
— *Soit f est majorée et f admet une limite en b et $\lim\limits_b = \sup\limits_{[a\,;b]} f$;*
— *Soit f n'est pas majorée et $\lim\limits_b f = +\infty$.*

Démonstration. Soit la partie $E = \{f(x) \mid x \in [a\,; b[\}$.
— si f est majorée, alors E est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc une borne supérieure notée S. Par caractérisation de la borne supérieure

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists y_0 \in E \quad S - \epsilon < y_0 \leq S, \tag{12.119}$$

ou alors

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists x_0 \in [a\,; b[\quad S - \epsilon < f(x_0) \leq S. \tag{12.120}$$

Pour tout $x \geq x_0$ dans $[a\,;b[$ $S \geq f(x) \geq f(x_0) > S - \epsilon$. Pour tout $x \geq x_0$ dans $[a\,;b[$, $|f(x) - S| = S - f(x) \leq \epsilon$ donc $\lim_b f = S$.

— Si f n'est pas majorée. Alors

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists y_0 \in E \quad y_0 \geq A, \tag{12.121}$$

ou alors

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists x_0 \in [a\,;b[\quad f(x_0) \geq A. \tag{12.122}$$

La fonction f est croissante, donc

$$\forall x \in [a\,;b[\quad x \geq x_0 \implies f(x) \geq f(x_0) \geq A. \tag{12.123}$$

Alors f tend vers $+\infty$.

$\square$

Théorème 12.12. *Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f croît. Alors f est majorée et $\lim_{b^-} f \leq f(b)$.*

Démonstration. f est croissante donc $f(b)$ est un majorant de $E = f([a\,;b[)$. Alors $\sup E$ existe et $\sup E \leq f(b)$, c'est-à-dire $\lim_{b^-} f \leq f(b)$. $\square$

On peut énoncer de la même manière.

Théorème 12.13. *Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $b > a$ et $f :]a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Alors*

- *soit f est minorée sur $]a\,;b]$ et alors f admet une limite en a telle que $\lim_a f = \inf_{]a\,;b]} f$;*
- *soit f n'est pas minorée et $\lim_a f = -\infty$.*

Démonstration. Soit la fonction $g\colon \begin{cases} [-b\,;-a[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -f(-x) \end{cases}$. La fonction g est croissante comme f. Appliquons le théorème précédent à g puisque f est majorée si et seulement si g est minorée. $\square$

Théorème 12.14. *Soit deux réels a, b tels que $a < b$ et soit une application croissante $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Alors f est minorée, $\lim_{a^+} f$ existe et $f(a) \leq \lim_{a^+} f$.*

Corollaire 12.26.2. *Soient deux réels a et b tels que $a < b$, un réel $c \in]a\,;b[$ et une application $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ croissante. Alors $\lim_{c^+} f$ et $\lim_{c^-} f$ existe et de plus $\lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \lim_{c^+} f$.*

Démonstration. C'est une conséquence des deux théorèmes précédents. $\square$

Il existe des énoncés analogues pour les fonctions décroissantes.

12.3 Continuité sur un intervalle

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui contient au moins deux éléments distincts.

12.3.1 Retour sur la continuité en un point

Rappel 12.1. Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$. Alors f est continue en a si et seulement si f admet une limite finie en a, c'est-à-dire

$$\iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \tag{12.124}$$

$$\iff \forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon \tag{12.125}$$

$$\iff \forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I \setminus \{a\} \quad |x - a| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon \tag{12.126}$$

$$\iff \lim_{x \in I \setminus \{a\} \to a} f = f(a). \tag{12.127}$$

On notera $\mathcal{C}_a(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}^I$ qui sont continues en a.

Rappel 12.2. Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$. Alors, f n'est pas continue en a s'écrit

$$\exists \epsilon > 0\ \forall \eta > 0\ \exists x \in I \setminus \{a\} \quad |x - a| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(a)| > \epsilon. \tag{12.128}$$

Proposition 12.27.

1. Si $f \in \mathcal{C}_a(I, \mathbb{R})$ alors f est bornée au voisinage de a, ça ne signifie pas que f est bornée sur I.
2. L'ensemble $\mathcal{C}_a(I, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}^I$.
3. Si $f \in \mathcal{C}_a(I, \mathbb{R})$ et $f(a) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est définie au voisinage de a et $\frac{1}{f}$ est continue en a.
4. Soit $f \in \mathbb{R}^I$, J un intervalle réel et $g \in \mathbb{R}^J$ telles que $f(I) \subset J$. Alors si $f \in \mathcal{C}_a(I, \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}_a(J, \mathbb{R})$ alors $g \circ f \in \mathcal{C}_a(I, \mathbb{R})$.

12.3.2 Continuité sur un intervalle

12.3.2.1 Définition

Définition 12.22. Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On dit que f est continue, ou continue sur I, si f est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications continues de I vers $\mathbb{R}$. De plus

$$\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{a \in I} \mathcal{C}_a(I, \mathbb{R}). \tag{12.129}$$

12.3.2.2 Restrictions et prolongements

Proposition 12.28. Soient $f \in \mathbb{R}^I$, J un intervalle inclus dans I qui contient au moins deux points. Si la fonction f est continue, alors $f_{|J}$ est continue. La réciproque est fausse.

Démonstration. Soit $a \in J$ alors $a \in I$ et puisque f est continue $f(a) = \lim\limits_{x \in I, x \to a} f(x)$ et comme $J \subset I$, d'après les résultats sur les restrictions de la continuité en un point, on peut écrire que $f_{|J}(a) = \lim\limits_{x \in I, x \to a} f_{|J}(x)$, alors $f_{|J}$ est continue en a. Puisque c'est vrai pour tout $a \in J$ alors $f_{|J}$ est continue. $\square$

Proposition 12.29. Soient a, b, c trois réels tels que $a < b < c$ et $f : [a\,;c] \to \mathbb{R}$ alors, f est continue sur $[a\,;c]$ si et seulement si f est continue sue $[a\,;b]$ et sur $[b\,;c]$.

Démonstration. $\Longrightarrow$ C'est la conséquence de la proposition précédente.

$\Longleftarrow$ La fonction f est continue en tout point de $[a\,;c]$ autre que b. Pourtant $\lim\limits_{b^-} f = f(b)$ et $\lim\limits_{b^+} f = f(b)$ donc $\lim\limits_{b} f$ existe et vaut $f(b)$. Alors f est continues en b.

□

Proposition 12.30. Soient a et b deux réels, $f : [a\,;b[\to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose que f admet une limite finie ℓ en b. Alors l'application $g\colon \left\{\begin{array}{ccc} [a\,;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} f(x) & x \in [a\,;b[\\ \ell & x = b \end{cases} \end{array}\right.$ est continue sur $[a\,;b]$.

Démonstration. On a déjà vu que g est continue en b et que c'est l'unique prolongement de f à $[a\,;b]$ continu en b. Il reste simplement à voir que g est continue en tout point de $[a\,;b[$. Or $g_{[a\,;b[} = f$ et f est continue, donc g est continue sur $[a\,;b]$. □

12.3.3 Opérations algébriques

Proposition 12.31. Soient f et g deux applications continues de I dans $\mathbb{R}$ et λ un réel, alors :

- $f + g$ est continue ;
- λf est continue ;
- pour tout naturel n, f^n est continue ;
- fg est continue ;
- si f ne s'annule pas, $\frac{1}{f}$ est continue ;
- si f ne s'annule pas, $\frac{g}{f}$ est continue ;
- si f ne s'annule pas, pour tout relatif n, f^n est continue.

$\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ est alors un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}^I$.

Démonstration. C'est la conséquence des résultats vus sur la continuité en un point. □

Proposition 12.32. Soient f et g deux application continues de I vers $\mathbb{R}$. Alors

1. $|f|$ est continue ;
2. $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ sont continues ;
3. f^+ et f^- sont continues.

Démonstration.
1. Soit a un élément de I, alors f admet une limite finie ℓ en a, donc $|f|$ tend vers $|\ell|$; l'application $|f|$ est donc continue en tout point de I ;
2. Puisque $\sup(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f, g) = \frac{f+g-|f-g|}{2}$ alors d'après le point précédent elles sont continues ;
3. Puisque $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = \sup(-f, 0)$ alors d'après le point précédent elles sont continues ;

□

Proposition 12.33. Soient I et J deux intervalles réels et f et g deux applications telles que $f(I) \subset J$. Si f et g sont continues alors la composée $g \circ f$ est continue.

Démonstration. On le démontre en prenant un point a quelconque de I. □

12.3.4 Image d'un intervalle par une application continue

Rappel 12.3. On a montré au chapitre **??** sur les réels que les intervalles de $\mathbb{R}$ sont les parties convexes de $\mathbb{R}$. C'est-à-dire les parties I telles que

$$\forall (x, y) \in I^2 \quad x \leq y \implies [x\,; y] \subset I \tag{12.130}$$

12.3.4.1 Image d'un intervalle quelconque I par une application continue f

Théorème 12.15. *Soient $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$ et une application $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(a)f(b) < 0$ (Elle change de signe sur l'intervalle). Alors il existe un élément $c \in]a\,; b[$ tel que $f(c) = 0$.*

Démonstration hors-programme. On utilise une méthode de dichotomie et on construit par récurrence deux suites a et b. Initialement, on pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ on a bien $f(a_0)f(b_0) < 0$ et quitte à changer f en $-f$ on peut supposer que $f(a_0) > 0$ et $f(b_0) < 0$. Pour l'hérédité, on suppose avoir construit a et b jusqu'au rang n de telle sorte que

$$f(a_n) > 0 \geq f(b_n). \tag{12.131}$$

Soit alors $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. Si $f(c_n) > 0$ alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$, sinon $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Dans les deux cas $f(a_{n+1}) > 0 \geq f(b_{n+1})$. Les deux suites (a_n) et (b_n) vérifient :

1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad f(a_n) > 0 > f(b_n)$;
2. La suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante ;
3. pour tout naturel n, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$.

La suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ donc elle tend vers zéro. Les suite (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Alors elles tendent vers la même limite qu'on note c. Alors pour tout naturel n, $a \leq a_n \leq c \leq b_n \leq b$. donc $c \in [a, b]$. On sait que f est continue en c. Alors les suites $(f(a_n))$ et $(f(b_n))$ tendent vers $f(c)$. D'ailleurs pour tout naturel n, $f(a_n) \geq 0 \geq f(b_n)$ donc en passant à la limite on obtient que $f(c) \geq 0 \geq f(c)$ donc $f(c) = 0$. On a trouvé un élément $c \in [a\,; b]$ tel que $f(c) = 0$. Or $f(a)f(b) < 0$ donc c est dans$]a\,; b[$. □

Corollaire 12.33.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soient f une application continue sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs réelles et $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$. Alors pour tout λ strictement comprit entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in]a\,; b[$ tel que $\lambda = f(c)$.*

Démonstration. Soit l'application continue $g = f - \lambda$. Puisque λ est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on a $g(a)g(b) < 0$. Donc, en appliquant le théorème, il existe un réel $c \in]a\,; b[$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = \lambda$. □

Corollaire 12.33.2 (Théorème fondamental)**.** *L'image directe par une application continue d'un intervalle est un intervalle.*

Démonstration. Soient I un intervalle et $f \in \mathbb{R}^I$ une application continue. Montrons que $f(I)$ est un intervalle en montrant qu'il est convexe. Soit $(y, y') \in f(I)^2$ avec $y \leq y'$. Si $y = y'$ alors $[y\,; y'] \subset f(I)$, sinon il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $y = f(a)$ et $y' = f(b)$. Pour tout λ strictement compris entre y et y' il existe un réel $c \in I$ strictement compris entre a et b tel que $\lambda = f(c) \in f(I)$. Alors $[y\,; y'] \subset f(I)$. Ainsi $f(I)$ est convexe, c'est donc un intervalle. □

Corollaire 12.33.3. *Soient un intervalle I et $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, alors*

1. *si f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en une extrémité de I et prend par ailleurs une valeur strictement négative (resp. positive) en un point de I, alors f s'annule au moins en un point de I ;*
2. *si f admet pour limite $+\infty$ en une extrémité de I et $-\infty$ en l'autre alors f s'annule en au moins un point de I.*

Démonstration.

1. Soit par exemple $I = [a\,; b[$ avec $\lim_b f = +\infty$. Alors il existe $d \in I$ tel que $f(d) > 0$. On sait qu'il existe $e \in I$ tel que $f(e) < 0$. Alors d'après le théorème il existe $c \in I$ tel que $f(c) = 0$.
2. Soit par exemple $I =]a\,; b[$ avec $\lim_b f = +\infty$ et $\lim_a f = -\infty$ alors il existe d et e dans I tels que $f(d) > 0$ et $f(e) < 0$. D'après le théorème, il existe un point c de I tel que $f(c) = 0$.

□

12.3.4.2 Image d'un segment $[a\,; b]$ par une application continue

Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non majorée, on définit $\sup A = +\infty$ par convention. Si on voit A comme une partie de $\overline{\mathbb{R}}$, alors $+\infty$ est un majorant de A dans $\overline{\mathbb{R}}$ et c'est même le seul donc c'est le plus petit et donc $+\infty = \sup_{\overline{\mathbb{R}}} A$.

Lemme 12.2. *Soient A et B deux parties non vide de $\mathbb{R}$, alors*

— *si A et B sont majorées alors $A \cup B$ est majorée et $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;*

— *si A ou B n'est pas majoré alors $A \cup B$ n'est pas majorée et $\sup(A \cup B) = +\infty$.*

Démonstration.

— Si A et B sont majorées, alors $\sup A$ etsup B existent. Soit $c \in A \cup B$. si $c \in A$ alors $c \leq \sup A \leq \max(\sup A, \sup B)$, sinon $c \in B$ alors $c \leq \sup B \leq \max(\sup A, \sup B)$. Dans tous les cas $c \leq \max(\sup A, \sup B)$ donc $A \cup B$ est majorée. Soit M un autre majorant de $A \cup B$, alors M est un majorant de A et de B et donc $M \geq \sup A$ et $M \geq \sup B$. Par conséquent $M \geq \max(\sup A, \sup B)$. C'est donc bien la borne supérieure $\max(\sup A, \sup B) = \sup(A \cup B)$.

— Si A ou B n'est pas majorée, alors l'union non plus et donc $\sup(A \cup B) = +\infty$.

□

Alors pour tout réel $\alpha < \beta < \gamma$ et pour toute application f

$$\sup_{[\alpha\,;\gamma]} f = \max(\sup_{[\alpha\,;\beta]} f, \sup_{[\beta\,;\gamma]} f). \tag{12.132}$$

Théorème 12.16 (Théorème des bornes)**.** *Soient $a < b$ deux réels et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes, c'est-à-dire qu'il existe c et d dans $[a\,;b]$ tels que $f(c) = \sup_{[a\,;b]} f$ et $f(d) = \inf_{[a\,;b]} f$*

Démonstration. On construit deux suites (a_n) et (b_n) par récurrence. Initialement $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Soit $S = \sup_{[a\,;b]} f \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors $S = \sup_{[a_0\,;b_0]} f \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose avoir construit (a_n) et (b_n) telles que $S = \sup_{[a_n\,;b_n]} f \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ alors on pose $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$. On sait d'après le lemme que

$$\sup_{[a_n\,;b_n]} f = \max(\sup_{[a_n\,;c_n]} f, \sup_{[c_n\,;b_n]} f). \tag{12.133}$$

Deux cas se présentent :
— si $S = \sup_{[a_n\,;c_n]} f$ alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$;
— si $S = \sup_{[c_n\,;b_n]} f$ alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Dans les deux cas, la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Les suites (a_n) et (b_n) vérifient les propriétés suivantes

1. pour tout naturel n, $S = \sup_{[a_n\,;b_n]} f$;
2. la suite a est croissante et la suite b est décroissante ;
3. la suite $(b - a)_n$ tend vers zéro.

Alors les suite (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles tendent alors vers la même limite notée c. Alors $c \in [a\,;b]$. Il reste à prouver que S est finie et que $f(c) = S$. Supposons par l'absurde que $S = +\infty$. Alors pour tout naturel n, $+\infty = \sup_{[a_n\,;b_n]} f$. Il existe alors $x_n \in [a_n\,;b_n]$ tel que $f(x_n) \geq n$. On sait aussi que pour tout naturel n, $a_n \leq x_n \leq b_n$ et que par théorème des gendarmes $(x_n)_{n_i n\mathbb{N}}$ tend vers c. D'une part, pour tout naturel n, $f(x_n) \geq n$ donc en passant à la limite $\lim f(x_n) = +\infty$. D'autre part comme f est continue sur $[a\,;b]$, notamment en c, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(c)$. On arrive donc à une absurdité par unicité de la limite donc S est finie. Avec $\epsilon = \frac{1}{n+1}$, par caractérisation de la borne supérieure, il existe $x_n \in [a_n\,;b_n]$ tel que

$$S - \frac{1}{n+1} < f(x_n) \leq S. \tag{12.134}$$

Le théorème des gendarmes appliqué à cette inégalité nous montre que $S = \lim f(x_n)$. De la même manière pour tout naturel n, $a_n \leq x_n \leq b_n$ donc par théorème des gendarmes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers c et comme f est continue $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $f(c)$. Par unicité de la limite $f(c) = S$. La fonction continue f est majorée sur $[a\,;b]$ et atteint sa borne supérieure. □

Théorème 12.17 (Théorème fondamental)**.** *L'image directe par une application continue d'un segment est un segment.*

Démonstration. Soit $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. On sait déjà que l'image directe $f([a\,;b])$ est un intervalle. Le théorème des bornes nous dit que f est bornée et atteint ses bornes. Ainsi $f([a\,;b]) = \left[\inf_{[a\,;b]} f\,; \sup_{[a\,;b]} f\right]$. □

12.3.4.3 Image directe d'un intervalle par une application continue et monotone

Théorème 12.18. *Soient $a < b$ des réels et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et croissante. Alors $f([a\,;b]) = [f(a)\,;f(b)]$.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème fondamental. Comme f est continue $f([a\,;b]) = \left[\inf_{[a\,;b]} f\,;\sup_{[a\,;b]} f\right]$. Il existe c et d dans $[a\,;b]$ tels que $\inf_{[a\,;b]} f = f(c)$ et $\sup_{[a\,;b]} f = f(d)$ or f croît donc $f(a) = f(c)$ et $f(b) = f(d)$. Ainsi $f([a\,;b]) = [f(a)\,;f(b)]$. $\square$

Théorème 12.19. *Soient a un réel et b dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$, une application continue croissante $f : [a\,;b[\longrightarrow \mathbb{R}$. Alors*

1. *si f n'est pas majorée, $f([a\,;b[) = [f(a),\,;+\infty[$*
2. *si f est majorée, on pose $S = \sup_{[a\,;b[} f$ et alors*

$$[f(a)\,;S[\subset f([a\,;b[) \subset [f(a)\,;S]\,. \tag{12.135}$$

Si on suppose de plus que f est strictement croissante alors

$$f([a\,;b[) = [f(a)\,;S[\,. \tag{12.136}$$

Démonstration. 1. — Soit $y \in f([a\,;b[)$. Il existe alors un réel $x \in [a\,;b[$ tel que $y = f(x)$. Puisque f croît alors $f(x) \geq f(a)$. Alors $y \in [f(a)\,;+\infty[$.
— Soit $y \in [f(a)\,;+\infty[$, il existe alors un réel $c \in [a\,;b[$ tel que $f(c) \geq y$. L'application continue f croît sur $[a\,;c]$ donc d'après le théorème **??** on écrit que $f([a\,;c]) = [f(a)\,;f(c)]$. On sait que $f(a) \leq y \leq f(c)$ alors $y \in f([a\,;c])$. Il existe donc un réel $d \in [a\,;c]$ tel que $y = f(d)$.

Par double inclusion, on a montré l'égalité $f([a\,;b[) = [f(a)\,;+\infty[$.

2. Si f est majorés, alors on pose $S = \sup_{[a\,;b[} f$
   — Si $y \in f([a\,;b[)$, alors il existe $x \in [a\,;b[$ tel que $y = f(x)$. f est croissante donc $y \geq f(a)$ mais $S = \sup_{[a\,;b[} f$ alors $y \leq S$. Alors $y \in [f(a)\,;S]$. D'où l'inclusion.
   — Si $y \in [f(a)\,;S[$, alors $y < S$ et soit $\epsilon = S - y$. Par caractérisation de la borne supérieure, il existe un réel $c \in [a\,;b[$ tel que

$$y = S - \epsilon < f(c) \leq S \tag{12.137}$$

la fonction f croît et est continue sur $[a\,;c]$ donc $f([a\,;c]) = [f(a)\,;f(c)]$. Alors $y \in f([a\,;c])$ et donc $y \in f([a\,;b[)$ (car $f([a\,;c]) \subset f([a\,;b[)$).

On a montré que

$$[f(a)\,;S[\subset f([a\,;b[) \subset [f(a)\,;S]\,, \tag{12.138}$$

c'est-à-dire

$$f([a\,;b[) = [f(a)\,;S[\text{ ou } f([a\,;b[) = [f(a)\,;S]\,. \tag{12.139}$$

Dans le cas général, on ne peut rien dire de plus. Dans le cas où f est strictement croissante, on va montrer que $f([a\,;b[) = [f(a)\,;S[$. Il faut montrer que S n'admet pas d'antécédents. On suppose par l'absurde que S en admet un. Alors il existe un réel $c \in [a\,;b[$ tel que $f(c) = S$. Puisque f croît strictement il existe un $x \in]c\,;b[$ tel que $f(x) \geq f(c) = S$. Or c'est absurde puisque S est la borne supérieure de f. Alors S n'admet pas d'antécédent et $f([a\,;b[) = [f(a)\,;S[$.

□

12.3.5 Continuité d'une bijection réciproque

12.3.5.1 Condition suffisante pour qu'une application monotone soit continue

Théorème 12.20. *Soit f une application monotone d'un intervalle I vers $\mathbb{R}$. Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue. La réciproque est toujours vraie même sans l'hypothèse de monotonie.*

Démonstration. Supposons par exemple que f soit croissante tel que $f(I)$ soit un intervalle. Supposons par l'absurde qu'il existe $c \in I$ tel que f ne soit pas continue en c

1. Dans le cas où c est à l'intérieur de I. On a

$$\ell_1 = \lim_{c^-} f \leq f(c) \leq \ell_2 = \lim_{c^+} f. \tag{12.140}$$

   Dire que f n'est pas continue en c revient à dire que l'une des deux au moins de ces inégalités est stricte. Supposons que c'est la première $\ell_1 < f(c)$ et $\ell_1 = \lim\limits_{c^-} f = \sup\limits_{x<c} f(x)$. Soient $b \in I$ tel que $b < c$, alors $f(b) \leq l_1$. Soit $y \in]\ell_1\,;f(c)[\subset]f(b)\,;f(c)[$. Alors on a
   — $y \in]f(b)\,;f(c)[$;
   — $f(b)$ et $f(c)$ sont dans $f(I)$;
   — I est convexe (car c'est un intervalle).
   Donc $y \in f(I)$. Il existe donc un $x \in I$ tel que $y = f(x)$, or
   — si $x < c$ alors $f(x) < \ell_1$;
   — si $x \geq c$ alors $f(x) \geq f(c)$ (car f est croissante).
   C'est absurde puisqu'on avait posé $f(x) = y \in]\ell_1\,;f(c)[$. Alors f est continue.

2. Si c est une borne de I alors on fait le même raisonnement avec une inégalité.

□

12.3.5.2 Applications continues strictement monotones

Théorème 12.21. *Soit f une application continue et strictement monotone sur l'intervalle I. Alors*

1. *$f(I)$ est un intervalle ;*
2. *f induit une bijection de I sur $f(I)$;*
3. *la bijection réciproque g, notée abusivement f^{-1}, est continue et strictement monotone (de même monotonie que f) sur $f(I)$.*

Démonstration. Tout a déjà été vu sauf la continuité de f^{-1}. On sait que f^{-1} est strictement monotone (déjà vu) et que $I = f^{-1}(f(I))$ est un intervalle. Donc f^{-1} est continue. □

12.3.5.3 Condition suffisante pour qu'une application continue soit monotone

Théorème 12.22. *Soit f une application continue et injective de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est monotone et le théorème précédent s'applique.*

Démonstration par l'aburde. Supposons que f n'est pas monotone, alors f n'est pas croissante donc il existe $(a, b) \in I^2$ tel que $a < b$ et $f(a) > f(b)$. Elle n'est pas non plus décroissante donc il existe $(c, d) \in I^2$ tel que $c < d$ et $f(c) > f(d)$. Soit la fonction

$$\varphi \colon \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(ta + (1-t)c) - f(tb + (1-t)d) \end{array} \right. . \tag{12.141}$$

La fonction φ est bien définie parce que pour tout $t \in [0\,;1]$ $ta + (1-t)c \in [a\,;c]$ et $tb + (1-t)d \in [b\,;d]$. I est un intervalle et a, b, c et d sont dans I donc $[a\,;c] \subset I$ et $[b\,;d] \subset I$. La fonction φ est continue puisque f est continue. On a $\varphi(0) = f(c) - f(d) < 0$ et $\varphi(1) = f(a) - f(b) > 0$. Par théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel $t_0 \in \,]0\,;1[$ tel que $\varphi(t_0) = 0$. C'est-à-dire

$$f(t_0 a + (1-t_0)c) - f(t_0 b + (1-t_0)d) = 0, \tag{12.142}$$

comme f est injective, cela signifie que $t_0 a + (1-t_0)c = t_0 b + (1-t_0)d$ donc $t_0(a-b) = (1-t_0)(b-c)$. Le premier membre est strictement négatif alors que le deuxième membre est strictement positif. C'est absurde, donc f est monotone. □

Corollaire 12.33.4. *Soient I et J deux intervalles réels, et soit $f : I \longrightarrow J$. Il y a équivalence entre*

1. *f est une bijection et f est continue ;*
2. *f est une bijection et f est monotone.*

Une telle application qui vérifie l'une ou l'autre hypothèse est appelée un homéomorphisme.

Démonstration.
- $1 \Longrightarrow 2$ C'est la conséquence du théorème précédent, f est continue et bijective donc f est continue et injective donc monotone.
- $2 \Longrightarrow 1$ La fonction f est monotone et $f(I) = J$ (puisque f est bijective) donc $f(I)$ est un intervalle alors par théorème (**??**) l'application f est continue.

□

12.3.6 Applications uniformément continues

12.3.6.1 Définition

Définition 12.23. Soit I un intervalle réel et f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue sur I, ou uniformément continue, si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall (x, x') \in I^2 \quad |x - x'| \leq \eta \implies |f(x) - f(x')| \leq \epsilon \tag{12.143}$$

Si la fonction f est non uniformément continue cela équivaut à

$$\exists\epsilon > 0\ \forall\eta > 0\ \exists(x, x') \in I^2 \quad |x - x'| \le \eta \text{ et } |f(x) - f(x')| > \epsilon \tag{12.144}$$

12.3.6.2 Propriétés

Théorème 12.23. *Soit f une application de I vers $\mathbb{R}$. Si f est uniformément continue, alors elle est continue. La réciproque est fausse.*

Démonstration. Pour tout $(x, x') \in I^2$ on note

$$C(x, x') \iff |x - x'| \le \eta \implies |f(x) - f(x')| \le \epsilon. \tag{12.145}$$

Alors

$$\begin{aligned} f \text{ est uniformément continue} &\iff \forall\epsilon > 0\ \exists\eta_\epsilon > 0\ \forall(x, x') \in I^2 \quad C(x, x') && (12.146)\\ &\implies \forall\epsilon > 0\ \forall x \in I\ \exists\eta_{\epsilon,x} > 0\ \forall x' \in I \quad C(x, x') && (12.147)\\ &\implies \forall x \in I\ [\forall\epsilon > 0\ \exists\eta_{\epsilon,x} > 0\ \forall x' \in I \quad C(x, x')] && (12.148)\\ &\implies \forall x \in I\ f \text{ est continue en } x && (12.149)\end{aligned}$$

Alors f est continue sur I. □

Contre-exemple : Soit la fonction $f\colon \left\{\begin{array}{ccc}]0\,;1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{x}\end{array}\right.$. Alors f est continue, montrons qu'elle n'est pas uniformément continue. Soit $\epsilon = 1$, montrons que

$$\forall\eta > 0\ \exists(x, x') \in]0\,;1[^2 \quad |x - x'| \le \eta \text{ et } |f(x') - f(x)| > 1. \tag{12.150}$$

Soit $(x, x') \in]0\,;1[^2$ tel que $x < x'$, alors

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| > 1 &\iff \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x'}\right| > 1 && (12.151)\\ &\iff |x' - x| > |xx'| && (12.152)\\ &\iff x' - x > xx'. && (12.153)\end{aligned}$$

On a deux cas, soit $1 > \eta > 0$ ou soit $\eta > 1$ alors

- Pour tout $1 > \eta > 0$, si on pose $x' = \eta$ et $x = \frac{\eta}{2}$ alors $|x' - x| = \frac{\eta}{2} \le \eta$ et $xx' = \eta\frac{\eta}{2} < \frac{\eta}{2}$. Avec ce x et ce x' on a $x' - x > xx'$ ce qui est équivalent à $|f(x') - f(x)| > 1$;
- pour tout $\eta \ge 1$, on pose $\eta_0 \in]0\,;1[$ tel que $|x - x'| \le \eta_0 \le \eta$ et, comme dans le premier cas, $|f(x) - f(x')| > 1$.

La fonction f n'est pas uniformément continue. On dispose cependant du théorème suivant.

Théorème 12.24 (Théorème de Heine)**.** *Soit f une application continue définie sur un* segment*. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration par l'absurde. Soient deux réels, a et b tels que $a < b$. Supposons que f ne soit pas uniformément continue. Alors

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall \eta > 0 \ \exists (x, y) \in [a\,; b]^2 \quad |x - y| \leq \eta \text{ et } |f(x) - f(y)| > \epsilon. \tag{12.154}$$

En particulier

$$\exists \epsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists (x_n, y_n) \in [a\,; b]^2 \quad |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n+1} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| > \epsilon. \tag{12.155}$$

La suite (x_n) est bornée (puisqu'elle est à valeurs dans $[a\,; b]$) et on peut donc appliquer le théorème de Bolzano-Weierstrass. Il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que la suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ soit convergente de limite notée c. On sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq x_{\varphi(n)} \leq b. \tag{12.156}$$

Donc $c \in [a\,; b]$ et on sait que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}\right| \leq \frac{1}{\varphi(n)+1} \leq \frac{1}{n+1}. \tag{12.157}$$

Alors en passant à la limite $\lim x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}$. La suite $(y_{\varphi(n)})$ tend aussi vers c. On avait supposé que f était non uniformément continue donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |f(x_{\varphi n}) - f(y_{\varphi n})| > \epsilon. \tag{12.158}$$

Les suites $(y_{\varphi(n)})$ et $(x_{\varphi(n)})$ convergent de même limite c, f est continue sur $[a\,; b]$ par hypothèse donc particulièrement en c. Par conséquent les suites $f(x_{\varphi n})$ et $f(y_{\varphi n})$ convergent vers $f(c)$. On peut donc passer à la limite dans l'équation **??** pour écrire que $0 \geq \epsilon$. C'est absurde puisqu'on avait posé $\epsilon > 0$. Alors la fonction f est uniformément continue. □

Proposition 12.34.

1. Soient f et g deux fonctions uniformément continues de I vers $\mathbb{R}$ et un réel λ. Alors $\lambda f + g$ est uniformément continue mais en général le produit fg n'est pas uniformément continu.
2. Soient deux intervalles réels I, J et deux fonctions $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ uniformément continues telles que $f(I) \subset J$. Alors la fonction $f \circ g$ est uniformément continue sur I.

Démonstration.

1. Soit $\epsilon > 0$, il existe alors deux réels η_1 et η_2 tels que pour tout $(x, x') \in I^2$ on ait

$$|x - x'| \leq \eta_1 \implies |f(x) - f(x')| \leq \frac{\epsilon}{2(|\lambda|+1)}, \tag{12.159}$$

$$|x - x'| \leq \eta_2 \implies |g(x) - g(x')| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{12.160}$$

Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$ et donc si $|x' - x| \leq \eta$ alors

$$|(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(x')| \leq |\lambda|\,|f(x) - f(x')| + |g(x) - g(x')| \tag{12.161}$$

$$\leq \frac{|\lambda|}{|\lambda|+1}\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon. \tag{12.162}$$

Alors $\lambda f + g$ est uniformément continue.

2. Puisque g est uniformément continue, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tels que pour tout $(y, y') \in J^2$ si $|y - y'| \leq \eta$ alors $|g(y) - g(y')| \leq \epsilon$. Comme f est aussi uniformément continue il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $(x, x') \in I^2$ si $|x - x'| \leq \alpha$ alors $|f(x) - f(x')| \leq \eta$. Comme $f(x)$ et $f(x')$ sont dans $f(I)$, ils sont dans J et $|f(x) - f(x')| \leq \eta$. Alors en appliquant g on a $|g \circ f(x) - g \circ f(x')| \leq \epsilon$. Alors la composée $g \circ f$ est uniformément continue.

□

Attention, le produit fg n'est pas forcément uniformément continu.

12.3.7 Applications lipschitziennes

12.3.7.1 Définitions

Définition 12.24. Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et un réel $k \geq 0$. On dit que f est $k-$lipschitzienne si et seulement si

$$\forall (x, x')^2 \in I \quad |f(x) - f(x')| \leq k\,|x - x'|\,. \tag{12.163}$$

On dit que f est lipschitzienne s'il existe un réel $k \geq 0$ tel que f soit $k-$lipschitzienne.

Si f est $k-$lipschitzienne, alors f est $k'-$lipschitzienne pour tout $k' \geq k$. Lorsque $k \in \,]0\,;1[$, on dit que f est $k-$contractante.

Théorème 12.25. *Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue. La réciproque est fausse.*

Démonstration. Soient $k > 0$ et f une application $k-$lipschitzienne, alors pour tout $(x, x') \in I^2$, $f(x) - f(x') \leq k\,|x - x'|$. Soit $\epsilon > 0$ il existe alors $\eta = \frac{\epsilon}{k+1}$ tel que si $|x - x'| \leq \eta$ alors

$$|f(x) - f(x')| \leq k\,|x - x'| \leq \frac{k}{k+1}\epsilon \leq \epsilon. \tag{12.164}$$

Donc f est uniformément continue. □

La réciproque est fausse. On en donne un contre-exemple. Soit $I = [0\,;1]$ et $f\colon \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}\right.$. Alors f est continue sur le segment I. D'après le théorème de Heine, elle est uniformément continue. Montrons qu'elle n'est pas lipschitzienne. Supposons par l'absurde qu'elle le soit, alors il existe un $k > 0$ tel que pour tout $(x, x') \in I^2$, $\left|\sqrt{x} - \sqrt{x'}\right| \leq k\,|x - x'|$. Soit alors en prenant $x' = 0$ on a $\sqrt{x} \leq kx$. Alors pour tout $x \in \,]0\,;1]$ on aurait $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \leq k$. Par passage à la limite en 0 on aurait $k \geq +\infty$. Ce qui est complètement absurde. Alors f n'est pas lipschitzienne.

Si on note $\mathcal{L}ip(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications lipschitziennes de I dans $\mathbb{R}$ et $\mu\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des applications uniformément continues de I dans $\mathbb{R}$. Alors on a montré que

$$\mathcal{L}ip(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mu\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}(I, \mathbb{R}). \tag{12.165}$$

Proposition 12.35. Soient I un intervalle réel, deux réels k et k' positifs, un autre réel λ et deux applications $f \in \mathbb{R}^I$ $k-$lipschitzienne et $g \in \mathbb{R}^I$ $k'-$lipschitzienne. Alors

1. $\lambda f + g$ est $|\lambda|\, k + k'$-lipschitzienne ;
2. si on suppose que $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est $kk'-$lipschitzienne.

Démonstration. 1. Soient $(x, x') \in I^2$ alors

$$|(\lambda f + g)(x) - (\lambda f + g)(x')| \leq |\lambda|\, |f(x) - f(x')| + |g(x) - g(x')| \tag{12.166}$$

$$\leq (|\lambda|\, k + k')\, |x - x'|\,, \tag{12.167}$$

alors $\lambda f + g$ est $|\lambda|\, k + k'$-lipschitzienne.

2. Soients $(x, x') \in I^2$ alors

$$|g \circ f(x) - g \circ f(x')| \leq k'\, |f(x) - f(x')| \leq kk'\, |x - x'|\,, \tag{12.168}$$

alors $g \circ f$ est $kk'-$lipschitzienne

□

12.4 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

12.4.1 Notion de fonction à valeurs complexes

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ qui contient au moins deux éléments. On note $\mathbb{C}^X$ l'ensemble des fonctions définies sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Définition 12.25. Soit $f \in \mathbb{C}^X$, on lui associe les fonctions suivantes :

1. La partie réelle de f, $\Re(f)$: $\left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \Re(f(x)) \end{array} \right.$;
2. La partie imaginaire de f, $\Im(f)$: $\left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \Im(f(x)) \end{array} \right.$;
3. Le module de f, $|f|$: $\left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & |f(x)| \end{array} \right.$;
4. Le conjugué de f, $\overline{f}$: $\left\{ \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \overline{f(x)} \end{array} \right.$.

Définition 12.26. Soit $f \in \mathbb{C}^X$. On dit que f est bornée lorsque $|f|$ est bornée.

Proposition 12.36. Soit $f \in \mathbb{C}^X$, alors f est bornée si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont bornées.

Proposition 12.37. Soient f et g de $\mathbb{C}^X$ et deux complexes λ et μ. Si les fonctions f et g sont bornées alors $\lambda f + \mu g$ est bornée et fg aussi.

12.4.2 Limite et continuité en un point

12.4.2.1 Limites

Définition 12.27. Soit $f \in \mathbb{C}^X$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que la fonction f tend vers le complexe ℓ en a lorsque la fonction réelle $|f-l|$ tend vers zéro en a.

Proposition 12.38. Soient $f \in \mathbb{C}^X$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \mathbb{C}$. Alors

$$\lim_a f = l \iff \lim_a \Re(f) = \Re(l) \wedge \lim_a \Im(f) = \Im(l). \tag{12.169}$$

Démonstration. $\implies$ Soit $x \in X$, alors $|\Re(f)x - \Re(l)| = |\Re(f(x)-l)| \leq |f(x)-l|$ par passage à la limite, on a $\lim_a \Re(f) = \Re(l)$ et de la même manière $|\Im(f)(x) - \Im(l)| = |\Im(f(x)-l)| \leq |f(x)-l|$ par passage à la limite, on a $\lim_a \Im(f) = \Im(l)$.

$\Longleftarrow$ Si $\Re(f)$ tend vers α en a et si $\Im(f)$ tend vers β en a alors pour tout $x \in X$ on a par inégalité triangulaire

$$|f(x) - (\alpha + \mathrm{i}\,\beta)| \leq |\Re(f)(x) - \alpha| + |\Im(f)(x) - \beta|\,, \tag{12.170}$$

alors en passant à la limite on montre que f tend vers $\alpha + \mathrm{i}\,\beta$ en a.

□

Corollaire 12.38.1 (Unicité de la limite)**.** *Soient $f \in \mathbb{C}^X$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Il existe au plus un complexe ℓ tel que f tende vers ℓ en a. Si un tel ℓ existe, il est la limite de f en a et on note $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_a f = \ell$.*

Démonstration. D'après la proposition, $\Re(\ell)$ et $\Im(\ell)$ sont uniques, donc ℓ est unique. □

Proposition 12.39. Soient $f \in \mathbb{C}^X$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$, si $\ell = \lim_a f$ alors

- $\lim_a |f| = |\ell|$;
- $\lim_a \Re(f) = \Re(\ell)$;
- $\lim_a \Im(f) = \Im(\ell)$;
- $\lim_a \overline{f} = \overline{\ell}$.

Démonstration. On a déjà vu la preuve pour la partie réelle et la partie imaginaire. Soit $x \in X$, alors $\left|\overline{f}(x) - \overline{\ell}\right| = |f(x) - \ell| \to 0$ et $||f|(x) - |\ell|| \leq |f(x) - \ell| \to 0$. □

Proposition 12.40. Soient $f \in \mathbb{C}^X$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si f admet une limite en a, alors f est bornée au voisinage de a.

Démonstration. Si f tend vers ℓ en a, alors $\Im(f)$ et $\Re(f)$ admettent des limites finies en a et donc elles sont bornées au voisinage de a. Ainsi f est bornée au voisinage de a. □

12.4.2.2 Opérations algébriques sur les limites

cf polycopié

12.4.2.3 Continuité en un point

Définition 12.28. Soit $f \in \mathbb{C}^X$ et $a \in X$. On dit que f est continue en a si et seulement si f admet une limite finie en a.

Proposition 12.41. Soit $f \in \mathbb{C}^X$ et $a \in X$. Alors f est continue en a si et seulement si $\Im(f)$ et $\Re(f)$ sont continues en a.

Démonstration. f est continue en a si et seulement si f admet une limite en a. C'est équivalent à ce que $\Im(f)$ et $\Re(f)$ aient des limites finies en a, c'est-à-dire si et seulement si $\Im(f)$ et $\Re(f)$ sont continues en a. □

12.4.3 Continuité sur un intervalle

Soit I un intervalle réel qui contient au moins deux points.

Définition 12.29. Soit $f \in \mathbb{C}^I$. On dit que f est continue, ou continue sur I si elle est continue en tout point de I. On note $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues de I vers $\mathbb{C}$.

Proposition 12.42. Soit $f \in \mathbb{C}^I$, alors

$$f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C}) \iff \Re(f) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \text{ et } \Im(f) \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \tag{12.171}$$

Proposition 12.43. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$, alors $\overline{f} \in \mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ et $|f| \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.

Proposition 12.44. L'ensemble $\mathcal{C}(I, \mathbb{C})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{C}^I$.

Théorème 12.26. *Soient I et J deux intervalles réels et $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{C}^J$ tel que $f(I) \subset J$. Si f est continue et que g est continue alors $f \circ g$ est continue. Attention, f doit être à valeurs réelles.*

Théorème 12.27. *Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et $f : [a\,;b] \longrightarrow \mathbb{C}$. Si f est continue sur $[a\,;b]$ alors f est bornée et il existe $x_0 \in [a\,;b]$ tel que $|f(x_0)| = \sup\limits_{[a\,;b]} |f|$.*

Démonstration. La fonction $|f|$ est continue sur $[a\,;b]$. On lui applique le théorème des bornes et on dit qu'elle est bornée et atteint ses bornes. □

Chapitre 13

Comparaison locale des fonctions

Sommaire

Tableaux

13.1 Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que a est un point de A ou une borne de A. On s'intéresse à des fonctions de A vers $\mathbb{R}$ définies au voisinage de a.

Définition 13.1. Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et U une partie de $\mathbb{R}$. On dit que U est un voisinage de a

— si $a \in \mathbb{R}$, s'il existe $h > 0$ tel que $U = [a-h\,; a+h]$ ou $U = [a-h\,; a[$ ou $U =]a\,; a+h]$;
— si $a = +\infty$, s'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $U = [A\,; +\infty[$;
— si $a = -\infty$, s'il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que $U =]-\infty\,; B]$.

Proposition 13.1. Si U et V sont deux voisinages de a, alors $U \cap V$ est aussi un voisingae de a.

13.1.1 Relation de domination

Définition 13.2. Soient f et g deux fonctions de A vers $\mathbb{R}$. On dit que f est dominée par g au voisinage de a et on note $f = O_a(g)$ si et seulement s'il existe un voisinage U de a et une application $\Lambda : U \cap A \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :

— pour tout $x \in U \cap A$ $f(x) = \Lambda(x)g(x)$;
— la fonction Λ est bornée.

Proposition 13.2. Dans le cas où g ne s'annule pas au voisinage de a, alors f est dominée par g au voisinage de a si et seulement si $\frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

Cas particuliers importants :

— f est dominée par l'application constante égale à 1 au voisinage de a signifie que f est bornée au voisinage de a ;
— f est dominée par l'application nulle au voisinage de a signifie que f est idetiquement nulle au voisinage de a.

Proposition 13.3 (Transitivité)**.** Soient f, g et h des applications de A vers $\mathbb{R}$, alors si au voisinage de a f est dominée par g et g est dominée par h alors f est dominée par h au voisinage de a.

$$f = O_a(g) \;\; g = O_a(h) \implies f = O_a(h)\,. \tag{13.1}$$

Démonstration. D'après les hypothèses il existe deux voisinage de U_1 et U_2 de a et deux fonctions bornées $\Lambda_1 : U_1 \cap A \to \mathbb{R}$ et $\Lambda_2 : U_2 \cap A \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in U_1 \cap A \quad f(x) = \Lambda_1(x)g(x); \tag{13.2}$$
$$\forall x \in U_2 \cap A \quad g(x) = \Lambda_2(x)h(x). \tag{13.3}$$

Soit $U_0 = U_1 \cap U_2$, qui est aussi un voisinage de a, on a

$$\forall x \in U_0 \cap A \quad f(x) = (\Lambda_1(x)\Lambda_2(x))h(x). \tag{13.4}$$

La fonction $\Lambda_1\Lambda_2$ est bornée donc $f = O_a(h)$. □

Proposition 13.4. Soit $g \in \mathbb{R}^A$. On note $F = \left\{ f \in \mathbb{R}^A \mid f = O_a(g) \right\}$. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^A$, c'est-à-dire qu'il est non vide et stable par combinaison linéaire.

Démonstration. Il est non vide, puisque l'application nulle lui appartient. Pour toutes fonctions f et h de F et tous réels λ et μ il existe deux voisinages de a U_1, U_2 et deux applications bornées $\Lambda_1 : U_1 \cap A \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\Lambda_2 : U_2 \cap A \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in U_1 \cap A \quad f(x) = \Lambda_1(x) g(x), \tag{13.5}$$

$$\forall x \in U_2 \cap A \quad h(x) = \Lambda_2(x) g(x). \tag{13.6}$$

$$\tag{13.7}$$

Soit $U_0 = U_1 \cap U_2$, c'est aussi un voisinage de a et pour tout x de $U_0 \cap A$ on a $(\lambda f + \mu g)(x) = (\lambda\Delta_1(x) + \mu\Delta_2(x))g(x)$. L'application $\lambda\Delta_1 + \mu\Delta_2$ est bornée donc $\lambda f + \mu g$ est dominée par g au voisinage de a. Donc F est stable par combinaison linéaire. C'est donc au final un sous-espace vectoriel. □

Proposition 13.5 (Compatibilité avec la multiplication)**.** Soient f_1, f_2, g_1 et g_2 des applications de A dans $\mathbb{R}$. Alors

$$f_1 = O_a(g_1) \text{ et } f_2 = O_a(g_2) \Longrightarrow f_1 f_2 = O_a(g_1 g_2)\,. \tag{13.8}$$

Démonstration. D'après les hypothèse il existe deux voisinage de U_1 et U_2 de a et deux fonctions bornées $\Lambda_1 : U_1 \cap A \to \mathbb{R}$ $\Lambda_2 : U_2 \cap A \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U_1 \cap A \quad f_1(x) = \Lambda_1(x) g_1(x) \tag{13.9}$$

$$\forall x \in U_2 \cap A \quad f_2(x) = \Lambda_2(x) g_2(x) \tag{13.10}$$

Soit $U_0 = U_1 \cap U_2$, c'est aussi un voisinage de a et

$$\forall x \in U_0 \cap A \quad f_1(x) f_2(x) = (\Lambda_1(x)\Lambda_2(x)) g_1(x) g_2 \tag{13.11}$$

La fonction $\Lambda_1\Lambda_2$ est bornée, donc $f_1 f_2 = O_a(g_1 g_2)$. □

13.1.2 Relation de négligeabilité

Définition 13.3. Soient f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$. On dit que f est négligeable devant g au voisinage de a et on note $f = o_a(g)$ si et seulement s'il existe un voisinage de U de a et une application $\epsilon : U \cap A \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que
- — $\forall x \in U \cap A \; f(x) = g(x)\epsilon(x)$;
- — $\lim\limits_{a} \epsilon = 0$.

Proposition 13.6. Soient f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$. Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a,

$$f = o_a(g) \iff \lim_a \frac{f}{g} = 0. \tag{13.12}$$

Cas particuliers :
- — si une fonction f est négligeable devant la fonction constante égale à 1 en a alors elle tend vers zéro en a ;
- — si une fonction f est négligeable devant la fonction nulle au voisinage de a alors elle est identiquement nulle au voisinage de a.

13.1.3 Propriétés et relations de domination et de négligeabilité

Proposition 13.7. Soit f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$,

$$f = o_a(g) \implies f = O_a(g)\,. \tag{13.13}$$

Démonstration. Il existe un voisinage U de a et une application $\epsilon : U \cap A \to \mathbb{R}$ telle que

— $\forall x \in U \cap A\ f(x) = g(x)\epsilon(x)$;

— $\lim\limits_a \epsilon = 0$.

La fonction ϵ est bornée au voisinage de a. On note V un voisinage de a telle que ϵ soit bornée dessus. Soit $U_0 = U \cap V$, qui est aussi un voisinage de A, alors ϵ est bornée sur U_0 et $\forall x \in U_0 \cap A$, $f(x) = g(x)\epsilon(x)$. Alors $f = O_a(g)$. □

Proposition 13.8 (Transitivité)**.** Pour toutes fonctions f, g, et h de $\mathbb{R}^A$, on a :

$$f = o_a(g) \text{ et } g = O_a(h) \implies f = o_a(h)\,; \tag{13.14}$$

$$f = o_a(g) \text{ et } g = o_a(h) \implies f = o_a(h)\,. \tag{13.15}$$

Démonstration. Montrons la première implication, il existe deux voisinage de a U_1, U_2. Il existe aussi une fonction bornée $\Lambda : U_1 \cap A \to \mathbb{R}$ et une fonction de limite nulle en a $\epsilon : U_2 \cap A \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U_1 \cap A \quad f(x) = \epsilon(x)g(x) \tag{13.16}$$

$$\forall x \in U_2 \cap A \quad g(x) = \Lambda(x)h(x) \tag{13.17}$$

Soit $U_0 = U_1 \cap U_2$, c'est aussi un voisinage de a.

$$\forall x \in U_0 \cap A \quad f(x) = \epsilon(x)\Lambda(x)h(x) \tag{13.18}$$

La fonction $\epsilon\Lambda$ tend vers zéro en a, donc $f = o_a(h)$.

La deuxième implication se montre de la même façon en inversant. La transitivité découle de la proposition précédente, mais ce qu'on a montré est plus général. □

Proposition 13.9. Soit $g \in \mathbb{R}^A$, on note $G = \left\{ f \in \mathbb{R}^A \;\middle|\; f = o_a(g) \right\}$. Alors G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^A$. C'est-à-dire qu'il est non vide est stable par combinaison linéaire.

Démonstration. L'ensemble G n'est pas vide puisque la fonction nulle lui appartient. Pour toute fonction $f, h \in G$ et tous réels λ, μ il existe deux voisinages U_1 et U_2 et deux fonctions de limite nulle en a, $\epsilon_1 : A \cap U_1 \to \mathbb{R}$ et $\epsilon_2 : A \cap U_2 \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U_1 \cap A \quad f(x) = \epsilon_1(x)g(x); \tag{13.19}$$

$$\forall x \in U_2 \cap A \quad h(x) = \epsilon_2(x)g(x). \tag{13.20}$$

Soit $U_0 = U_1 \cap U_2$, qui est un voisinage de a. Pour tout réel $x \in U_0 \cap A$, on a $(\lambda f + \mu h)(x) = (\lambda\epsilon_1 + \mu\epsilon_2)(x)g(x)$. La fonction $\lambda\epsilon_1 + \mu\epsilon_2$ tend vers zéro en a, donc $(\lambda f + \mu h) = o_a(g)$ et donc $\lambda f + \mu h \in G$. □

Proposition 13.10 (Compatibilité avec la multiplication)**.** Soient f_1, f_2, g_1, et g_2 des applications de A vers $\mathbb{R}$. Alors

$$f_1 = o_a(g_1) \text{ et } f_2 = o_a(g_2) \implies f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)\,. \tag{13.21}$$

Démonstration. Il existe deux voisinage U_1, U_2 de a. Il existe aussi une fonction bornée $\Lambda : U_1 \cap A \to \mathbb{R}$ et une fonction de limite nulle en a $\epsilon : U_2 \cap A \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U_1 \cap A \quad f_1(x) = \Lambda(x) g_1(x), \tag{13.22}$$
$$\forall x \in U_2 \cap A \quad f_2(x) = \epsilon(x) g_2(x). \tag{13.23}$$

Soit $U_0 = U_1 \cap U_2$, c'est aussi un voisinage de a. Pour tout $x \in U_0 \cap A$ $(f_1 f_2)(x) = (\Lambda\epsilon)(x)(g_1 g_2)(x)$. La fonction $\Lambda\epsilon$ tend vers zéro en a, alors $f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)$. Alors puisque si la fonction f est négligeable par rapport à g, elle est dominée par g donc

$$f_1 = o_a(g_1) \text{ et } f_2 = o_a(g_2) \implies f_1 f_2 = o_a(g_1 g_2)\,. \tag{13.24}$$

□

13.1.4 Relation d'équivalence

Définition 13.4. Soient f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$. On dit que f est équivalente à g et on note $f \sim_a g$ si et seulement si $f - g = o_a(g)$.

Proposition 13.11. Soient f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$. La fonction f est équivalente à g au voisinage de a si et seulement s'il existe un voisinage U de a et une application $\varphi : U \cap A \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in U \cap A$ $f(x) = \varphi(x) g(x)$ et $\lim\limits_a \varphi = 1$.

Démonstration. En effet,

$$\begin{aligned}
f \sim_a g &\iff f - g = o_a(g) && (13.25)\\
&\iff \exists U \in v(a) \exists \epsilon : U \cap A \to \mathbb{R} \lim_a \epsilon = 0 \\
&\qquad \text{et } \forall x \in U \cap A \ f(x) = (\epsilon(x) + 1) g(x) && (13.26)\\
&\iff \exists U \in v(a) \exists \varphi : U \cap A \to \mathbb{R} \lim_a \varphi = 1 \\
&\qquad \text{et } \forall x \in U \cap A \ f(x) = \varphi(x) g(x) && (13.27)
\end{aligned}$$

□

Proposition 13.12. Soient f et g deux applications de A dans $\mathbb{R}$. Dans le cas où la fonction g ne s'annule pas au voisinage de a,

$$f \sim_a g \iff \lim_a \frac{f}{g} = 1. \tag{13.28}$$

En particulier

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad f(x) \sim_a \ell \iff \lim_{x \to a} f(x) = \ell. \tag{13.29}$$

$f \sim_a 0$ signifie que f est constante nulle au voisinage de zéro, à ne pas utiliser.

Proposition 13.13. La relation d'équivalence est une “vraie” relation d'équivalence, c'est à dire qu'elle est :

— réflexive, $\forall f \in \mathbb{R}^A\ f \sim_a f$;
— symétrique, $\forall f, g \in \mathbb{R}^A\ f \sim_a g \implies g \sim_a f$;
— transitive, $\forall f, g, h \in \mathbb{R}^A\ (f \sim_a g \text{ et } g \sim_a h) \implies f \sim_a h$.

Démonstration. — $\forall f \in \mathbb{R}^A\ f = \tilde{1}f$ et $\tilde{1} \to 1$;

— On suppose que $f \sim_a g$, il existe un voisinage U de a et une application $\varphi : U \cap A \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_a \varphi = 1$ et telles que pour tout $x \in U \cap A$ $f(x) = \varphi(x)g(x)$. Il existe donc un voisinage V tel que pour tout $x \in V$ $\varphi(x) \neq 0$.
Soit $U_0 = V \cap U$, c'est aussi un voisinage de a et pour tout $x \in U_0 \cap A$ $g(x) = \frac{1}{\varphi(x)} f(x)$ et $\lim\limits_a \frac{1}{\varphi} = 1$. Donc $g \sim_a f$.
— Il existe deux voisinage de a U_1, U_2. Il existe aussi deux fonctions de limite égale à 1 en a $\varphi_1 : U_1 \cap A \to \mathbb{R}$ et $\varphi_2 : U_2 \cap A \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in U_1 \cap A \quad f(x) = \varphi_1(x)g_1(x), \tag{13.30}$$
$$\forall x \in U_2 \cap A \quad g(x) = \varphi_2(x)h(x). \tag{13.31}$$

Soit $U_0 = U_1 \cap U_2$, c'est aussi un voisinage de a. Pour tout $x \in U_0 \cap A$, $f(x) = \varphi_1(x)\varphi_2(x)h(x)$. La fonction $\varphi_1\varphi_2$ est de limite égale à 1 en a. Donc $f \sim_a h$.

□

Proposition 13.14. Soient f et g dans $\mathbb{R}^A$ et $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f \sim_a g$ et $\lim\limits_a g = \ell$ alors $\lim\limits_a f = \ell$. La réciproque est fausse.

Démonstration. Au voisinage de a, $f = \varphi g$ où φ tend vers 1 en a. Si g tend vers ℓ en a, alors $f = \varphi g$ tend aussi vers ℓ en a. □

Contre exemple de la réciproque : Soient $A =]0\,;+\infty[$, $a = +\infty$ et $f\colon \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$ puis $g\colon \begin{cases} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{cases}$. Ces deux fonctions ont la même limite en a, c'est à dire $+\infty$, cependant elles ne sont pas équivalentes puisque $\lim\limits_a \frac{g}{f} = 0$

Proposition 13.15. Soient deux fonctions f et g de $\mathbb{R}^A$. Si $f \sim_a g$ alors fg est positive au voisinage de a. De plus si f est à valeurs strictement positives au voisinage de a, alors g aussi.

Démonstration. Il existe une fonction φ de limite égale à 1 en a telle qu'au voisinage de a on a $f = \varphi g$. Alors au voisinage de a $fg = \varphi g^2$. Au voisinage de a, φ est à valeurs strictement positives donc $\varphi g^2 \geq 0$ et ainsi $fg \geq 0$. Si g est à valeurs strictement positives au voisinage de a, alors $f = \varphi g$ est à valeurs strictement positives au voisinage de a. □

Proposition 13.16 (Compatibilités)**.** Soient f, g, f_1, g_1, f_2, et g_2 des fonctions de $\mathbb{R}^A$, alors :

$$f_1 \sim_a g_1 \text{ et } f_2 \sim_a g_2 \implies f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2; \tag{13.32}$$

$$f \sim_a g \text{ et } g \neq_{v(a)} 0 \implies \frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g} \text{ et } f \neq_{v(a)} 0; \tag{13.33}$$

$$f_1 \sim_a g_1 \text{ et } f_2 \sim_a g_2 \text{ et } g_2 \neq_{v(a)} 0 \implies \frac{f_1}{f_2} \sim_a \frac{g_1}{g_2} \text{ et } f_2 \neq_{v(a)} 0; \tag{13.34}$$

$$f \sim_a g \implies \forall n \in \mathbb{N}^* f^n \sim_a g^n. \tag{13.35}$$

Démonstration.

1. Au voisinage de a, il existe φ_1 et φ_2 de limite égale à 1 en a telles que $f_1 = \varphi_1 g_1$ et $f_2 = \varphi_2 g_2$. Au voisinage de a, $f_1 f_2 = \varphi_1 \varphi_2 g_1 g_2$ et la limite du produit $\varphi_1 \varphi_2$ vaut 1 en a, donc on a bien $f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2$.
2. Au voisinage de a, il existe φ de limite égale à 1 en a telle que $g = \varphi f$ et comme f ne s'annule pas (et φ non plus) au voisinage de a, on écrit $\frac{1}{g} = \frac{1}{\varphi}\frac{1}{f}$ et on a $\frac{1}{\varphi}$ qui tend vers 1 en a. Donc on a bien $\frac{1}{f} \sim_a \frac{1}{g}$.
3. Ce point est la conséquence des deux précédents.
4. S'obtient par récurrence immédiate d'après le premier point.

□

13.2 Pratique de la comparaison locale de fonctions

13.2.1 Exemples fondamentaux d'équivalents – comparaison de fonctions usuelles

13.2.1.1 Polynômes

Soit f une fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il existe deux entiers naturels p, n avec $p \leq n$ et des réels $a_p, \dots, a_n$ avec $a_p \neq 0$ et $a_n \neq 0$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{k=p}^{n} a_k x^k = a_p x^P + \cdots + a_n x^n \tag{13.36}$$

L'entier n est le degré du polynôme et p est sa valuation.

Proposition 13.17 (Voisinage de l'infini)**.** Soit $a \in \{-\infty, +\infty\}$, alors $f(x) \sim_a a_n X^n$, le polynôme est équivalent à son terme de plus haut degré en l'infini.

Démonstration. Soit $x \neq 0$, alors

$$f(x) = a_n x^n \left(\frac{a_p}{a_n} x^{p-n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + 1 \right). \tag{13.37}$$

On pose $\varphi(x) = \left(\frac{a_p}{a_n} x^{p-n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{-1} + 1\right)$. Lorsque x tend vers a alors $\varphi(x)$ tend vers 1, alors $f(x) \sim_a a_n x^n$. □

Proposition 13.18 (Voisinage de zéro)**.** Soit $a = 0$, alors $f(x) \sim_a a_p X^p$, le polynôme est équivalent à son terme de plus bas degré en zéro.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$f(x) = a_p x^p \left(1 + \sum_{k=1}^{n-p} \frac{a_{p+k}}{a_p} x^k\right). \tag{13.38}$$

On pose $\varphi(x) = \left(1 + \sum_{k=1}^{n-p} \frac{a_{p+k}}{a_p} x^k\right)$ et on a $\lim_a \varphi = 1$. Donc on a bien $f(x) \sim_a a_p X^p$. □

13.2.1.2 Fonctions continues en un point

Soient I un intervalle réel, $a \in I$ et $f \in \mathbb{R}^I$. Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors $f \sim_a f(a)$.

13.2.1.3 Fonctions dérivables en un point

Soient I un intervalle réel, $a \in I$ et $f \in \mathbb{R}^I$. Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$ alors $f \sim_a f'(a)(x-a)$.

Démonstration. Soit la fonction φ: $\begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{1}{f'(a)} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & x \neq a \\ 1 & x = a \end{cases} \end{cases}$. Par définition de la dérivée de f en a, $\lim_a \varphi = \varphi(a) = 1$ et donc

$$\forall x \in I \quad f(x) - f(a) = \varphi(x) f'(a)(x-a). \tag{13.39}$$

Ainsi $f \sim_a f'(a)(x-a)$. □

Conséquences, équivalents usuels en zéro D'après ce qui précéde, on a les équivalents en zéro des fonctions suivantes sur la table **??**. Cette méthode

$\sin x \sim x$	$\sinh x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$\tan x \sim x$	$\tanh x \sim x$	$\mathrm{e}^x - 1 \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$\arctan x \sim x$	$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \ \alpha \neq 0$

Tableau 13.1 – Équivalents usuels en zéro

ne permet pas d'obtenir d'équivalent pour cos ou cosh car leurs dérivées sont nulles en zéro. On peut cependant écrire que pour tout réel x

$$\cos x - 1 = \cos x - \cos 0 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right); \tag{13.40}$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim_0 \frac{x}{2}; \tag{13.41}$$

$$\cos x - 1 \sim_0 -2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = -\frac{x^2}{2}; \tag{13.42}$$

$$\cosh x - 1 \sim_0 2\sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim_0 \frac{x^2}{2}. \tag{13.43}$$

Tous les équivalents sont à connaître par cœur. On peut par exemple les appliquer pour trouver la limite d'une forme indéterminée. Trouvons par exemple la limite de la fonction suivante en zéro. Soit la fonction définie sur $\mathcal{D}_f =]-1\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)\sin x}{\cosh x - 1}. \tag{13.44}$$

Alors en zéro, on a les équivalent suivants

$$\ln(1+x) \sim x \tag{13.45}$$
$$\sin x \sim x \tag{13.46}$$
$$\cosh x - 1 \sim \frac{x^2}{2}. \tag{13.47}$$

La fonction $x \longmapsto \cosh x - 1$ ne s'annule pas au voisinage de zéro, donc on peut faire le quotient et on obtient $f \sim_0 2$ donc $\lim\limits_0 f = 2$.

13.2.1.4 Logarithmes, puissances & exponentielles

Soient α, α', β, β', γ, γ' des réels strictement positifs tels que $0 < \alpha < \alpha'$, $0 < \beta < \beta'$ et $0 < \gamma < \gamma'$.

Proposition 13.19 (Voisinage de l'infini)**.**

$$\ln^\alpha x = o_{+\infty}\Big(\ln^{\alpha'} x\Big) \qquad x^\beta = o_{+\infty}\Big(x^{\beta'}\Big) \qquad \mathrm{e}^{\gamma x} = o_{+\infty}\Big(\mathrm{e}^{\gamma' x}\Big) \tag{13.48}$$
$$\ln^\alpha x = o_{+\infty}\big(x^\beta\big) \qquad x^\beta = o_{+\infty}(\mathrm{e}^{\gamma x}) \tag{13.49}$$

Proposition 13.20 (Voisinage de zéro plus)**.**

$$|\ln|^\alpha x = o_0\Big(|\ln|^{\alpha'} x\Big) \qquad x^{-\beta} = o_0\Big(x^{-\beta'}\Big) \tag{13.50}$$
$$|\ln|^\alpha x = o_0\big(x^{-\beta}\big) \qquad x^{\beta'} = o_0(\mathrm{e}^{\gamma x}) \tag{13.51}$$

13.2.2 Équivalence et changement de variable

Théorème 13.1. *Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $a \in A$ (ou une borne de A) et deux applications f et g de $\mathbb{R}^A$. Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $\alpha \in X$ et $u \in \mathbb{R}^X$. Alors*

$$\left.\begin{array}{l} f \sim_a g \\ \lim\limits_\alpha u = a \\ u(X) \subset A \end{array}\right\} \Longrightarrow f \circ u \sim_a g \circ u. \tag{13.52}$$

Démonstration. Il existe un voisinage U de a et une application $\varphi : A \cap U \to \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_a \varphi = 1$ et $\forall x \in A \cap U f(x) = \varphi(x)g(x)$. U est un voisinage de a et puisque u admet a pour limite en α, il existe un voisinage V de α tel que $x \in V \implies u(x) \in U$. V est un voisinage de α, donc pour tout $x \in V \cap X$, $u(x) \in U \cap A$ (car $u(X) \subset A$). Alors $f(u(x)) = \varphi(u(x))g(u(x))$ et si on pose $\psi = \varphi \circ u$ alors $f \circ u = \psi \cdot g \circ u$. Finalement, on a $\lim\limits_\alpha \psi = 1$ (par définition de ψ) et ainsi $f \circ u \sim_a g \circ u$. $\square$

En pratique on connaît les équivalents des fonctions usuelles au voisinage de zéro. Si on cherche un équivalent au voisinage de a d'une fonction f, on peut se ramener à la recherche d'un équivalent en zéro grâce au changement de variable $t = x - a$.

$$g(t) = g(x-a) = f(x) = f(a+t). \tag{13.53}$$

On détermine un équivalent en zéro de g puis on revient à f en faisant le changement de variable $x = a + t$.

Application : Soient X une partie de $\mathbb{R}$, $\alpha \in X$ et u, v deux applications de $\mathbb{R}^X$ telles que $\lim\limits_{\alpha} u = 0 = \lim\limits_{\alpha} v$. Que peut on dire de $\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v$?

Soit $x \in X$, alors $\mathrm{e}^{u(x)} - \mathrm{e}^{v(x)} = \mathrm{e}^{v(x)}(\mathrm{e}^{u(x)-v(x)} - 1)$ et on sait que $\lim\limits_{\alpha} u - v = 0$ et que $\mathrm{e}^y - 1 \sim_0 y$. Alors par théorème sur le changement de variable, $\mathrm{e}^{u-v} \sim_\alpha u - v$. On a d'ailleurs $\lim\limits_{\alpha} \mathrm{e}^v = 1$ donc $\mathrm{e}^v \sim_\alpha 1$. Par produit d'équivalents, $\mathrm{e}^u - \mathrm{e}^v \sim_\alpha u - v$.

13.2.3 Équivalence et composition

Retenir qu'en général on ne peut pas composer les équivalents. $f \sim g$ n'implique pas $h \circ f \sim h \circ g$. Cependant, il existe des exceptions et on peut les écrire dans les propositions suivantes.

Proposition 13.21. Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $a \in A$ et f, g deux application de $\mathbb{R}^A$. Alors

$$f \sim_a g \implies |f| \sim_a |g|. \tag{13.54}$$

Démonstration. Au voisinage de a, il existe une fonction φ de limite égale à 1 en a telle que $f = \varphi g$, alors au voisinage de a, φ est à valeur positives. Au voisinage de a, $|f| = |\varphi||g| = \varphi|g|$ donc $|f| \sim_a |g|$. ☐

Proposition 13.22. Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $a \in A$ et f, g deux application de $\mathbb{R}^A$ telles que g est à valeur strictement positives au voisinage de a. Alors

$$f \sim_a g \implies f^\alpha \sim_a g^\alpha. \tag{13.55}$$

Démonstration. Il existe une fonction φ de limite égale à 1 en a telle qu'au voisinage de a, $f = \varphi g$ et que f, g et φ sont à valeurs strictement positives. Alors au voisinage de a

$$f^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln f} = \mathrm{e}^{\alpha \ln \varphi}\, \mathrm{e}^{\alpha \ln g} = \mathrm{e}^{\alpha \ln \varphi}\, g^\alpha. \tag{13.56}$$

Lorsque x tend vers a, φ tend vers 1 et donc $\psi = \mathrm{e}^{\alpha \ln \varphi}$ tend vers 1. Au voisinage de a, $f^\alpha = \psi g^\alpha$ avec $\lim\limits_{a} \psi = 1$. Donc $f^\alpha \sim_a g^\alpha$. ☐

Attention, ici α est une constante et elle ne dépend pas de x.

13.2.3.1 Composition par le logarithme

Retenir qu'en général on ne peut pas composer par le logarithme. On montre un contre-exemple :

Soit $A = \left]\frac{-1}{2} ; \frac{1}{2}\right[$, $a = 0$ $f : x \longmapsto 1 + x$ et $g : x \longmapsto 1 + 2x$. On sait que $f \sim_0 g$. Cependant $\ln(f(x)) \sim_0 x$ et $\ln(g(x)) \sim_0 2x$, donc $\ln(f)$ et $\ln(g)$ ne sont pas équivalents en zéro. La composition par le logarithme n'a pas conservé l'équivalence. Cependant, il existe des cas particulier ou la composition par le logarithme conserve l'équivalence. On en montre par les propositions suivantes.

Proposition 13.23. Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $a \in A$ et f, g deux application de $\mathbb{R}^A$. On suppose que g admet une limite ℓ en a avec $\ell \in [0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty]$ et que g est à valeurs strictement positives au voisinage de a. Alors

$$f \sim_a g \implies \ln(f) \sim_a \ln(g). \tag{13.57}$$

Démonstration. La fonction g est à valeurs strictement positives au voisinage de a et comme f est équivalente à g en a, f est à valeurs strictement positives au voisinage de a. Comme $\ell \neq 1$, alors $\lim_a \ln g \neq 0$. Au voisinage de a, $\ln g$ ne s'annule pas et donc

$$\frac{\ln(f)}{\ln(g)} - 1 = \frac{\ln\left(\frac{f}{g}\right)}{\ln(g)}. \tag{13.58}$$

Puisque $f \sim_a g$, on a $\frac{f}{g} \to 1$, donc $\ln\left(\frac{f}{g}\right) \to 0$. Au dénominateur, trois cas sont possibles

- si $\ell = 0$ alors $\ln g$ tend vers $-\infty$ et donc $\frac{\ln(f)}{\ln(g)} - 1$ tend vers 0 ;
- si $\ell \in]0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ alors $\ln g$ tend vers $\ln \ell \neq 0$ et donc $\frac{\ln(f)}{\ln(g)} - 1$ tend vers 0 ;
- si $\ell = +\infty$ alors $\ln g$ tend vers $+\infty$ et $\frac{\ln(f)}{\ln(g)} - 1$ tend vers 0.

Dans tous les cas $\frac{\ln f}{\ln g}$ tend vers 1, donc $\ln f \sim_a \ln g$. □

Il faut faire très attention aux hypothèses, il faut que g admette une limite et elle doit être différente de 1. Sinon l'équivalence n'est pas forcèment vérifiée lors du passage au logarithme.

13.2.3.2 Composition par l'exponentielle

On ne peut pas composer des équivalences avec la fonction exponentielle. On peut exhiber un contre-exemple. Soit $A = \mathbb{R}$ et $a = +\infty$ avec $f\colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$ et $g\colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}\right.$. Ces deux fonctions sont équivalentes en l'infini mais $\frac{e^f}{e^g} = \frac{1}{e}$ qui ne tend pas vers 1 donc e^f et e^g ne sont pas équivalentes.

Théorème 13.2. *Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $a \in A$ et f, g deux application de $\mathbb{R}^A$. Alors*

$$e^f \sim_a e^g \iff \lim_a f - g = 0. \tag{13.59}$$

Démonstration.

$$e^f \sim_a e^g \iff \frac{e^f}{e^g} = e^{f-g} \to 1 \tag{13.60}$$

$$\iff f - g \to 0. \tag{13.61}$$

□

13.2.4 Équivalence et somme

Retenir qu'en général, on ne peut pas sommer les équivalents. Prenons par exemple $A = \mathbb{R}$ $a = 0$, $f_1\colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}\right.$, $g_1\colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}\right.$,

$f_2\colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}\right.$ et $g_2\colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -x \end{array}\right.$. Alors $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$. Cependant $f_1 + f_2$ n'est pas équivalente à $g_1 + g_2 = 0$ au voisinage de zéro, puisque $f_1 + f_2$ n'est pas constante nulle au voisinage de zéro.

Proposition 13.24. Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $a \in A$ et f_1, f_2, g_1, g_2 des applications de $\mathbb{R}^A$. Alors

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \sim_a g_1 \\ f_2 \sim_a g_2 \\ g_1 = o_a(g_2) \end{array}\right\} \implies f_1 + f_2 \sim_a g_2. \tag{13.62}$$

Démonstration. On a $f_1+f_2-g_2 = (f_1-g_1)+(f_2-g_2)+g_1$ avec $f_1-g_1 = o_a(g_1)$, $f_2 - g_2 = o_a(g_2)$ et $g_1 = o_a(g_2)$ alors forcèment $f_1 - g_1 = o_a(g_2)$. La somme de trois fonctions qui sont négligeable devant g_2 est une fonction négligeable devant g_2. Donc $f_1 + f_2 - g_2 = o_a(g_2)$. Par définition de l'équivalence on a $f_1 + f_2 \sim_a g_2$. □

Proposition 13.25. Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f_1, f_2, g des applications de $\mathbb{R}^A$ puis des réels non nuls λ_1 et λ_2. On suppose que $f \sim_a \lambda_1 g$ et que $f_2 \sim_a \lambda_2 g$. Alors

- si $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $f_1 + f_2 = o_a(g)$;
- sinon $f_1 + f_2 \sim_a (\lambda_1 + \lambda_2)g$.

Démonstration. Il existe deux fonctions φ_1 et φ_2 de limite égale à 1 en a, telles qu'au voisinage de a

$$f_1 = \varphi_1(\lambda_1 g), \tag{13.63}$$

$$f_2 = \varphi_2(\lambda_2 g). \tag{13.64}$$

Alors au voisinage de a, $f_1 + f_2 = (\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2)g$.

- si $lambda_1 + \lambda_2 = 0$ alors $f_1 + f_2 = \lambda_1(\varphi_1 - \varphi_2)g$ au voisinage de a, avec $\lim_a \varphi_1 = 1$ et $\lim_a \varphi_2 = 1$ donc $f_1 + f_2$ est de limite nulle en a. Ainsi par définition, $f_1 + f_2 = o_a(()\, g)$.
- sinon, au voisinage de a, $f_1 + f_2 = \left(\frac{\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)(\lambda_1 + \lambda_2)g$. On pose $\psi = \frac{\lambda_1\varphi_1+\lambda_2\varphi_2}{\lambda_1+\lambda_2}$. Ainsi $\lim_a \psi = 1$ et $f_1+f_2 = \psi(\lambda_1+\lambda_2)g$, alors $f_1+f_2 \sim_a (\lambda_1 + \lambda_2)g$.

□

Proposition 13.26. Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f_1, f_2, g_1, g_2 des applications de $\mathbb{R}^A$. On suppose que g_1 et g_2 sont à valeurs strictement positives au voisinage de a. Alors

$$\left.\begin{array}{l} f_1 \sim_a g_1 \\ f_2 \sim_a g_2 \end{array}\right\} \implies f_1 + f_2 \sim_a g_1 + g_2. \tag{13.65}$$

Démonstration. Il existe deux voisinages U, V de a et deux application φ_1 et φ_2 de limite égale à 1 en a telles que

$$\forall x \in A \cap U\, f_1(x) = \varphi_1(x)g_1(x); \tag{13.66}$$

$$\forall x \in A \cap V\, f_2(x) = \varphi_2(x)g_2(x). \tag{13.67}$$

Il existe un voisinage W de a dans lequel g_1 et g_2 sont strictements positives. Soit le voisinage de a, $U_0 = U \cap V \cap W$, alors

$$\forall x \in U_0 \quad \left|\frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} - 1\right| = \frac{|(\varphi_1(x)-1)g_1(x) + (\varphi_2(x)-1)g_2(x)|}{g_1(x)+g_2(x)} \tag{13.68}$$

$$\leq \frac{g_1(x)\,|\varphi_1(x)-1|}{g_1(x)+g_2(x)} + \frac{g_2(x)\,|\varphi_2(x)-1|}{g_1(x)+g_2(x)} \tag{13.69}$$

De plus

$$\forall x \in W \ \frac{g_1(x)}{g_1(x)+g_2(x)} \leq 1 \quad \frac{g_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} \leq 1. \tag{13.70}$$

Alors

$$\forall x \in U_0 \quad \left|\frac{f_1(x)+f_2(x)}{g_1(x)+g_2(x)} - 1\right| \leq |\varphi_1(x)-1| + |\varphi_2(x)-1|\,. \tag{13.71}$$

On sait que φ_1 et φ_2 tendent vers 1 en a. Donc par théorème d'encadrement $\frac{f_1+f_2}{g_1+g_2}$ tend vers 1 en a. C'est-à-dire que $f_1 + f_2 \sim_a g_1 + g_2$. □

13.3 Développement limité au voisinage d'un point

13.3.1 Notion de développement limite

Soient I un intervalle réel, $a \in I$ et $A = I$ ou $A = I \setminus \{a\}$. On s'intéresse à des fonctions définies sur A, donc définies au voisinage de a.

13.3.1.1 Définition

Définition 13.5. Soit $f \in \mathbb{R}^A$ et un naturel n. On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a s'il existe :
— une application polynomiale P_n de degré inférieur ou égal à n ;
— une application $\epsilon \in \mathbb{R}^A$.
telles que $\lim_a \epsilon = 0$ et $\forall x \in A\ f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \epsilon(x)$. Le polynôme P_n est de degré inférieur ou égal à n, donc il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\forall x \in A \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n \epsilon(x). \tag{13.72}$$

La partie polynomiale s'appelle la partie régulière du développement limité et $(x-a)^n\epsilon(x)$ est le reste (à ne pas oublier).

13.3.1.2 Autre notation pour le reste

La fonction $x \longmapsto (x-a)^n \epsilon(x)$ avec $\lim_a \epsilon = 0$ est négligeable au voisinage de a devant la fonction $x \longmapsto (x-a)^n$. On écrira les développements limités sous la forme

$$\forall x \in A \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n)\,. \tag{13.73}$$

13.3.1.3 Exemples

Soit $I =]-\infty\,;1[$, $a = 0$ $A = I$ et $f\colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1-x} \end{array}\right.$. On va montrer que pour tout naturel n, la fonction f admet un développement limité à l'ordre n en zéro, noté $DL_n(0)$. Soit un naturel n et un réel $x \in A$,

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \tag{13.74}$$

puisque $x \neq 1$. Donc

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n \cdot \frac{x}{1-x}. \tag{13.75}$$

Soit $\epsilon\colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x}{1-x} \end{array}\right.$ et lorsque $x \to 0$ alors $\epsilon \to 0$. Ainsi

$$\forall x \in A \quad f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x). \tag{13.76}$$

La fonction f admet donc le $DL_n(0)$ suivant

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n \epsilon(x). \tag{13.77}$$

Soit $I = \mathbb{R}$, $a = 0$, $A = \mathbb{R}^*$ et $f\colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \exp(-\frac{1}{x^2}) \end{array}\right.$. Montrons que f admet un $DL_n(0)$ pour tout naturel n, on va montrer que pour tout naturel n et pour tout réel $x \in A$, $f(x) = o_0(x^n)$. En effet, soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A$, alors

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}}{x^n}. \tag{13.78}$$

Si on effectue le changement de variable $y = x^{-2}$ (lorsque $x \to 0$, $y \to +\infty$) alors $\frac{f(x)}{x^n} = y^{n/2}\,\mathrm{e}^{-y}$. Comme $\lim\limits_{y\to\infty} y^{n/2}\,\mathrm{e}^{-y} = 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^n} = 0$. Donc pour tout naturel n, f admet un $DL_n(0)$ telle que la partie régulière est nulle.

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x \in A \quad \mathrm{e}^{-1/x^2} = o(x^n). \tag{13.79}$$

Soit $I = [0\,;+\infty[$, $A =]0\,;+\infty[$, $a = 0$ et $f\colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}\right.$. Quelque soit le naturel n, la fonction f n'admet pas de $DL_n(0)$. Démontrons le par l'absurde. Supposons que f admette un DL_n pour tout naturel n. Alors il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ et une application $\epsilon \in \mathbb{R}^A$ de limite nulle en zéro telles que

$$\forall x \in A \quad \ln x = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + x^n \epsilon(x). \tag{13.80}$$

On sait que $\lim_0 f = -\infty$ et que $\lim_{x\to 0} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + x^n \epsilon(x) = \alpha_0$. Or α_0 est fini donc il y a une contradiction.

Ce résultat est généralisable à toute fonction n'admettant pas de limite finie en zéro, voire même en n'importe quel point $a \in A$.

13.3.2 Unicité du développement limité

Proposition 13.27. Soit $f \in \mathbb{R}^A$ et un naturel n. On suppose qu'il existe deux applications polynomiales P_n, et Q_n de degré inférieur ou égal à n et deux fonctions de limite nulle en zéro ϵ_1, et ϵ_2 telles que

$$\forall x \in A \quad f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \epsilon_1(x) \tag{13.81}$$
$$= Q_n(x-a) + (x-a)^n \epsilon_2(x). \tag{13.82}$$

Alors $P_n = Q_n$ et $\epsilon_1 = \epsilon_2$.

Démonstration. Il existe des réels $\alpha_0, \cdots, \alpha_n$ et $\beta_0, \cdots, \beta_n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k, \tag{13.83}$$
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \beta_k x^k. \tag{13.84}$$

Alors

$$\forall x \in A \quad f(x) = P_n(x-a) + (x-a)^n \epsilon_1(x) \tag{13.85}$$
$$= Q_n(x-a) + (x-a)^n \epsilon_2(x). \tag{13.86}$$

Donc

$$P_n(x-a) - Q_n(x-a) + (x-a)^n(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)) = 0 \tag{13.87}$$
$$(\alpha_0 - \beta_0) + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) x^k + (x-a)^n(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)) = 0. \tag{13.88}$$

Lorsque x tend vers 0, on trouve que $\alpha_0 = \beta_0$. Pour tout $x \in A$

$$(\alpha_1 - \beta_1)(x-a) + \sum_{k=2}^{n} (\alpha_k - \beta_k) x^k + (x-a)^n(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)) = 0, \tag{13.89}$$

pour $x \neq a$, on peut simplifer l'équation et alors

$$(\alpha_1 - \beta_1) + \sum_{k=2}^{n} (\alpha_k - \beta_k) x^{k-1} + (x-a)^{n-1}(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)) = 0. \tag{13.90}$$

Cette égalité est vraie au voisinage de a, lorsqu'on passe à la limite on a $\alpha_1 = \beta_1$.

En itérant ce processus on arrive à ce que pour tout $x \neq a$

$$(\alpha_n - \beta_n)(x-a)^0 + (x-a)^0(\epsilon_1(x) - \epsilon_2(x)) = 0, \tag{13.91}$$

soit alors

$$\alpha_n - \beta_n = \epsilon_2(x) - \epsilon_1(x). \tag{13.92}$$

Alors l'application $\epsilon_2 - \epsilon_1$ est constante sur A ou sur $A \setminus \{a\}$ et par hypothèse les limites en a de ces deux fonctions sont nulles donc en passant à la limite on a $\lim_a \epsilon_2 - \epsilon_1 = 0$ et donc obtient $\alpha_n = \beta_n$.

On a prouvé que $P_n = Q_n$. Il reste à montrer que si $a \in A$, alors $\epsilon_1(a) = \epsilon_2(a)$. Si $a \in A$, que dit l'hypothèse $\lim_a \epsilon_1 = 0 = \lim_a \epsilon_2$?

ϵ_1 et ϵ_2 sont continues en a et $\epsilon_1(a) = 0 = \epsilon_2(a)$. C'était déjà vrai. Donc les deux développements limités sont égaux. □

Le réel a appartient ou pas à A. Mais si $a \in A$, alors ϵ est continue en a. Sinon, $\epsilon(a)$ n'est pas défini.

13.3.2.1 Application au fonctions paires et impaires

Proposition 13.28. Soit I un intervalle réel symétrique en zéro ($\forall x \in I, -x \in I$). Soit $f \in \mathbb{R}^I$ admettant le $DL_n(0)$ suivant

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + x^n \epsilon(x). \tag{13.93}$$

Alors si f est (im)paire, P_n est (im)paire

Démonstration. Dans l'hypothèse où f est paire.

$$\forall x \in I \quad f(x) = P_n(x) + x^n \epsilon(x) \tag{13.94}$$

$$f(-x) = P_n(-x) + x^n[(-1)^n \epsilon(-x)] \tag{13.95}$$

On définit $Q_n : x \longmapsto P_n(-x)$, c'est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n. On définit aussi $\epsilon_1 : x \longmapsto (-1)^n \epsilon(-x)$ elle tend aussi vers zéro en zéro. Comme f est paire on a alors $P_n = Q_n$ et $\epsilon = \epsilon_1$. Deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont les même coefficient donc

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!] \quad \alpha_k = (-1)^k \alpha_k. \tag{13.96}$$

Si k est pair c'est tout le temps vrai, sinon k est impair et alors là $\alpha_k = 0$. Alors les termes de puissance impaires du polynôme P_n sont nuls. Donc P_n est paire. La démonstration est analogue pour le cas où f est impaire. $\square$

Cependant, la réciproque est fausse. Une fonction peut très bien être ni paire ni impaire et avoir un DL_n pair ou impaire. Comme par exemple la fonction $x \longmapsto \sin x + x^2$. Elle n'est ni paire ni impaire et pourtant $DL_1(0) = x + o_0(x)$. Sa partie régulière est impaire.

13.3.3 Lien entre $DL_n(a)$ et $DL_n(0)$

En pratique on connaît les développements limités des fonctions usuelles en zéro. Si d'aventure on voudrait calculer un développement limité en un réel a, il faudrait se ramener en zéro. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $A = I$ ou $A = I \setminus \{a\}$, on pose $J = \{t \in \mathbb{R} \mid t + a \in I\}$ et $B = J$ ou $B = J \setminus \{0\}$. Soit $f \in \mathbb{R}^A$ et $g\colon \left\{ \begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(a+t) \end{array} \right.$. Alors f admet le $DL_n(a)$ suivant

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n) \tag{13.97}$$

si et seulement si g admet un $DL_n(0)$ suivant

$$g(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k + o_0(t^n)\,. \tag{13.98}$$

En pratique si on cherche le $DL_n(a)$ de f,

- on définit $g : t \longmapsto f(a+t)$;
- on trouve le $DL_n(0)$ de g ;
- on revient à f en écrivant $f(x) = g(x-a)$.

13.3.4 Troncature

On conserve les mêmes notations.

Théorème 13.3. *Soient p et n deux naturels tels que $p \leq n$. Si f admet le $DL_n(a)$ suivant*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n)\,, \tag{13.99}$$

alors f admet le $DL_p(a)$ suivant

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^p)\,. \tag{13.100}$$

La réciproque est fausse : une fonction peut admettre un développement limité à un ordre p mais pas de développement limité aux ordres supérieurs

Démonstration. Il existe $\epsilon \in \mathbb{R}^A$ de limite nulle telle que

$$\begin{aligned}
\forall x \in A \quad f(x) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \epsilon(x)(x-a)^n) && (13.101)\\
&= \sum_{k=0}^{p} \alpha_k (x-a)^k + \sum_{k=p+1}^{n} \alpha_k (x-a)^k + \epsilon(x)(x-a)^n && (13.102)\\
&= \sum_{k=0}^{p} \alpha_k (x-a)^k && (13.103)\\
&\quad + (x-a)^p \left[\sum_{k=p+1}^{n} \alpha_k (x-a)^{k-p} + \epsilon(x)(x-a)^{n-p} \right], && (13.104)
\end{aligned}$$

comme tous les entiers $k \geq p+1$ dans la deuxième somme alors

$$\lim_{x \to a} \sum_{k=p+1}^{n} \alpha_k (x-a)^{k-p} + \epsilon(x)(x-a)^{n-p} = 0. \tag{13.105}$$

On note pour tout $x \in A$, $\epsilon_1(x)$ le terme du dessus alors

$$\forall x \in A \quad f(x) = \sum_{k=0}^{p} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^p \epsilon_1(x), \tag{13.106}$$

avec $\lim_a \epsilon_1 = 0$. Donc f admet un $DL_p(a)$. □

13.3.4.1 Application à la recherche d'équivalents

Soit $f \in \mathbb{R}^A$ admettant un $DL_n(a)$ dont la partie régulière est non nulle. Alors il existe des réels α_k tels que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n)\,. \tag{13.107}$$

Soit $p = \min\{k \in [\![0\,;n]\!] \mid \alpha_k \neq 0\}$ qui existe puisque la partie régulière est non nulle. Alors

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n)\,. \tag{13.108}$$

Alors au voisinage de a, $f(x) \sim_a \alpha_p (x-a)^p$.

Démonstration. Par troncature, f admet le $DL_p(a)$ suivant

$$f(x) = \sum_{k=p}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^p)\,, \tag{13.109}$$

donc $f(x) \sim_a \alpha_p (x-a)^p$, avec $\alpha_p \neq 0$. □

13.3.5 Lien entre $DL_0(a)$ et limite et continuité en a

Soit I un intervale réel, $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$ et $A = I$ ou $A = I \setminus \{a\}$

Proposition 13.29. On suppose que f est continue en a. Alors f admet le $DL_0(a)$ suivant $f(x) = f(a) + o_a(1)$. Pour la réciproque, on doit distinguer deux cas selon que $a \in A$ ou pas.

Proposition 13.30. Si on suppose que f admet le $DL_0(a)$ suivant $f(x) = \alpha + o_a(1)$. Alors f est continue en a et $f(a) = \alpha$.

Proposition 13.31. Soit $A = I \setminus \{a\}$ et $g \in \mathbb{R}^A$. On suppose que g admet le $DL_0(a)$ suivant $g(x) = \alpha + o_a(1)$ alors g admet une limite finie en a et elle est prolongeable par continuité en a par $\tilde{g}$: $\begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} g(x) & x \in A \\ \alpha & x = a \end{cases} \end{cases}$.

13.3.6 Opérations algébriques

13.3.6.1 Notations

On note $DL_{n,a}(A,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^A$ qui admettent un $DL_n(a)$. Si $f \in DL_{n,a}(A,\mathbb{R})$, on note $p_n(f)$ la partie régulière de son développement limité à l'ordre n

$$f(x) = p_n(f)(x-a) + o_a((x-a)^n)\,. \tag{13.110}$$

On dispose d'une application

$$p_n\colon \begin{cases} DL_{n,a}(A,\mathbb{R}) & \longrightarrow & DL_{n,a}(A,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & p_n(f) \end{cases}, \tag{13.111}$$

pour tout $f \in DL_{n,a}(A,\mathbb{R})$, $p_n(f)$ est une fonction polynomiale en $(x-a)$ de degré inférieur ou égal à n. Elle admet un $DL_n(a)$ dont le reste est nul. L'ensemble $DL_{n,a}(A,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathbb{R}^A$.

13.3.6.2 Somme

Proposition 13.32 (Linéarité)**.** Soient $f, g \in DL_{n,a}(A, \mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $\lambda f + g \in DL_{n,a}(A, \mathbb{R})$ et $p_n(\lambda f + g) = \lambda p_n(f) + p_n(g)$.

Démonstration. Il existe deux fonctions ϵ_1 et ϵ_2 tendant vers zéro en a telles que pour tout x au voisinage de a

$$f(x) = p_n(f)(x-a) + \epsilon_1(x)(x-a)^n, \tag{13.112}$$
$$g(x) = p_n(g)(x-a) + \epsilon_2(x)(x-a)^n. \tag{13.113}$$

Alors

$$f(x) + \mu g(x) = (\lambda p_n(f) + p_n(g))(x-a) + (\lambda\epsilon_1(x) + \epsilon_2(x)). \tag{13.114}$$

De plus $\lambda p_n(f) + p_n(g)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n et $\lim\limits_{a} \lambda\epsilon_1 + \epsilon_2 = 0$ donc c'est un $DL_n(a)$ de $\lambda f + g$. L'application p_n est linéaire, de plus c'est un projecteur et $p_n \circ p_n = p_n$. □

13.3.6.3 Produit

Théorème 13.4. *Soient $f, g \in DL_{n,a}(A, \mathbb{R})$ alors $fg \in DL_{n,a}(A, \mathbb{R})$ et $p_n(fg) = p_n(p_n(f)p_n(g))$*

Démonstration. Il existe deux application ϵ_1 et ϵ_2 de limite nulle en a telles que

$$\forall x \in A \quad f(x) = p_n(f)(x-a) + \epsilon_1(x)(x-a)^n, \tag{13.115}$$
$$g(x) = p_n(g)(x-a) + \epsilon_2(x)(x-a)^n. \tag{13.116}$$

Alors

$$\forall x \in A \quad f(x)g(x) = p_n(f)(x-a)p_n(g)(x-a) + p_n(f)(x-a)\epsilon_2(x)(x-a)^n \tag{13.117}$$
$$+ p_n(g)(x-a)\epsilon_1(x)(x-a)^n + \epsilon_1(x)(x-a)^n\epsilon_2(x)(x-a)^n \tag{13.118}$$
$$= p_n(f)(x-a)p_n(g)(x-a) + (x-a)^n\varphi(x). \tag{13.119}$$

avec $\lim\limits_{a} \varphi = 0$. La fonction $p_n(f)(x-a)p_n(g)(x-a)$ est polynomiale mais pas forcément de degré inférieur ou égale à n. On doit prendre sa partie régulière

$$\forall x \in A \quad p_n(f)(x-a)p_n(g)(x-a) = p_n(p_n(f)p_n(g))(x-a) + o_a((x-a)^n)\,. \tag{13.120}$$

Du coup pour fg, on a bien

$$\forall x \in A \quad f(x)g(x) = p_n(p_n(f)p_n(g))(x-a) + o_a((x-a)^n) + (x-a)^n\varphi(x). \tag{13.121}$$

□

En clair, on enlève les termes de degré trop élevé lorsqu'on fait le produit.

13.3.6.4 Quotient

Théorème 13.5. *Soit $u \in \mathbb{R}^A$ telle que u est de limite nulle en a et admet un $DL_n(a)$. Alors la fonction $x \longrightarrow \frac{1}{1-u(x)}$ est définie au voisinage de a et admet un $DL_n(a)$.*

Démonstration. Il existe des réels $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ et une application $\epsilon_1 \in \mathbb{R}^A$ de limite nulle en a telle que

$$\forall x \in A \quad u(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n \epsilon_1(x). \tag{13.122}$$

Comme $\lim_a u = 0$ alors $\alpha_0 = 0$. On sait que la fonction $y \longmapsto \frac{1}{1-y}$ admet le développement limité à l'ordre n en a suivant avec ϵ_2 une fonction de limite nulle en zéro

$$\forall y \in v(0) \quad \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + \dots + y^n + y^n \epsilon_2(x). \tag{13.123}$$

Au voisinage de a, u est bien définie de zéro donc $x \longmapsto \frac{1}{1-u(x)}$ est bien définie et

$$\forall x \in A \quad \frac{1}{1-u(x)} = 1 + u(x) + \dots + u(x)^n + u(x)^n \epsilon_2(u(x)). \tag{13.124}$$

De plus au voisinage de zéro

$$u(x)^n = \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + (x-a)^n \epsilon_1(x) \right)^n \tag{13.125}$$

$$= (x-a)^n \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^{k-1} + (x-a)^{n-1} \epsilon_1(x) \right)^n \tag{13.126}$$

$$u(x)^n \epsilon_2(u(x)) = (x-a)^n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^{k-1} + (x-a)^{n-1} \epsilon_1(x) \right)^n \epsilon_2(u(x))}_{\epsilon_3(x)}. \tag{13.127}$$

On sait que $\lim_a u = 0$ donc $\lim_a \epsilon_2(u(x)) = 0$. De plus $\lim_{x \to a} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^{k-1} + (x-a)^{n-1} \epsilon_1(x) = \alpha_1$. Aisni donc $\lim_a \epsilon_3 = 0$.

La fonction $x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} u(x)^k$ admet un développement limité à l'ordre n en a par produit et somme de développements limité. Donc $\frac{1}{1-u}$ admet un développement limité à l'ordre n en a. □

13.3.6.5 Application

On peut obtenir des $DL_n(a)$ de fonctions de la forme $g = \frac{1}{f}$ avec comme hypothèse que f admet un $DL_n(a)$ et que $\lim_a f = \ell \neq 0$.

$$g = \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell} \frac{1}{1 - (1 - \frac{f}{\ell})}. \tag{13.128}$$

On pose $u = 1 - \frac{f}{\ell}$ et donc $\lim_a u = 0$. On peut alors obtenir des $DL_n(a)$ pour des quotients $\frac{f}{g}$ tels que f et g admettent des $DL_n(a)$ et que $\lim_a g \neq 0$.

13.3.7 Développement limité d'une fonction composée

Le programme prévoit que l'étude de la composition se fasse par des exemples

13.3.7.1 $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\sin x}$

La fonction sinus admet le $DL_2(0)$ suivant

$$\sin x = x + x^2\epsilon_1(x), \tag{13.129}$$

avec ϵ_1 tendant vers zéro en zéro. La fonction exponentielle admet le $DL_2(0)$ suivant

$$\mathrm{e}^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + y^2\epsilon_2(x). \tag{13.130}$$

Alors en substituant y par $\sin x$ on obtient

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{1}{2}\sin^2(x) + \sin^2(x)\epsilon_2(\sin(x)) && (13.131)\\
&= 1 + (x + x^2\epsilon_1(x)) + \frac{1}{2}(x + x^2\epsilon_1(x))^2 + (x + x^2\epsilon_1(x))^2\epsilon_2(\sin(x)) && (13.132)\\
&= 1 + x + x^2\epsilon_1(x) + \frac{1}{2}(x^2 + x^4\epsilon_1(x) + 2x^3\epsilon_1(x)) && (13.133)\\
&+ x^2(1 + x\epsilon_1(x))^2\epsilon_2(\sin(x)) && (13.134)\\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_3(x). && (13.135)
\end{aligned}$$

avec ϵ_3 qui tend vers zéro en zéro.

13.3.7.2 $DL_2(0)$ de $x \longmapsto \mathrm{e}^{\cos x}$

On sait que pour tout réel x, $\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e}\ \mathrm{e}^{\cos x - 1}$. La fonction $x \longmapsto \cos x - 1$ admet le $DL_2(0)$ suivant

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x). \tag{13.136}$$

On pose $y = \cos x - 1$. Les puissances de y supérieures ou égales à 2 sont des multiples de puissance supérieure ou égale à 4. On a seulement besoin du $DL_1(0)$ de l'exponentielle

$$\mathrm{e}^y = 1 + y + y\epsilon_2(y). \tag{13.137}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\cos x - 1} &= 1 + (\cos x - 1) + (\cos x - 1)\epsilon_2(\cos x - 1) && (13.138)\\
&= 1 - \frac{x^2}{2}x^2\epsilon_1(x) + \left(\frac{-x^2}{2} + x^2\epsilon_1(x)\right)\epsilon_2(\cos x - 1) && (13.139)\\
&= 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\underbrace{\left(\epsilon_1(x) - \left(\frac{1}{2} - \epsilon_1(x)\right)\epsilon_2(\cos x - 1)\right)}_{\epsilon_3(x)}, && (13.140)
\end{aligned}$$

avec ϵ_3 qui tend vers zéro en zéro. Donc $\mathrm{e}^{\cos x} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x^2 + o(x^2)$.

13.3.7.3 $DL_7(0)$ de $x \longmapsto \ln(\cos x)$

La fonction cosinus est strictement positive sur $A = \left]\frac{-\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ alors $\ln(\cos x)$ est bien définie au voisinage de zéro. De plus

$$\forall x \in A \quad \ln(\cos(x)) = \ln(1 + (\cos x - 1)). \tag{13.141}$$

L'application $x \longmapsto \cos x - 1$ admet le $DL_7(0)$ suivant

$$\cos x - 1 = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o_0\big(x^7\big)\,. \tag{13.142}$$

En posant $y = \cos x - 1$, on voit que les puissances de y supérieures ou égales à 4 sont des multiples de puissances de x supérieures ou égales à 8. On peut donc se contenter du $DL_3(0)$ de $y \longmapsto \ln(1 + y)$

$$\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o_0\big(y^3\big) \tag{13.143}$$

$$\ln(\cos(x)) = \left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right)^2 \tag{13.144}$$

$$+ \frac{1}{3}\left(\frac{-x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}\right)^3 + o_0\big(x^7\big) \tag{13.145}$$

$$= \frac{-x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o_0\big(x^7\big)\,. \tag{13.146}$$

13.3.8 Remarques

On verra plus tard qu'il est possible d'intégrer des développements limités. Retenir dès maintenant qu'il est interdit de dériver les développements limités.

Théorème 13.6 (Formule de Taylor-Young)**.** *Soit I un intervalle réel, $a \in I$ et $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$. Alors f admet le $DL_n(a)$ suivant*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(x-a)^k + o_a((x-a)^n)\,. \tag{13.147}$$

On l'admet pour l'instant, elle sera démontrée au chapitre **??** sur l'intégration. On peut l'utiliser dès maintenant. Elle permet de trouver les développements limités de nombreuses fonctions.

13.3.9 Applications aux études locales

13.3.9.1 Au voisinage d'un réel

On suppose que f admet le $DL_n(a)$ suivant

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n)\,. \tag{13.148}$$

Alors $f(x) \sim_a \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k$ en supposant qu'il existe $k \leq n-1$ tel que $\alpha_k \neq 0$ alors

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (x-a)^k \sim_a \alpha_n (x-a)^n. \tag{13.149}$$

En particulier

1. si $n = 1$ $\alpha_0 \neq 0$ et $\alpha_1 = 0$ alors $f(x) \sim_a \alpha_0$. Et de plus $f(x) - \alpha_0 \sim_a \alpha_1(x-a)$. Si par exemple $\alpha_1 > 0$ alors la courbe de f est sous la droite d'équation $y = \alpha_0$ avant a et au-dessus après a.
2. si $n = 2$ $(\alpha_0, \alpha_1) \neq (0,0)$ et $\alpha_2 \neq 0$, alors $f(x) - \alpha_0 - \alpha_1(x-a) \sim_a \alpha_2(x-a)^2$. La droite d'équation $y = \alpha_0 + \alpha_1(x-a)$ est tangente à la courbe représentative de f en a. On connaît la position relative de la courbe par rapport à sa tangente en fonction du signe de α_2. S'il est positif la courbe est au-dessus de la tangente sinon elle est sous la tangente.

13.3.9.2 Au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$

Pour travailler au voisinage de l'infini on doit généraliser la notion de développement limité. On parlera de développement asymptotique. Au voisinage de $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{R}$ et $f : [A\,; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ tels qu'au voisinage de $+\infty$ on ait

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{1}{t^k} + \frac{1}{t^n}\epsilon\left(\frac{1}{t}\right), \tag{13.150}$$

où ϵ tend vers zéro en zéro. On dira que f admet un développement asymptotique à l'ordre n en $+\infty$ et on définit g: $\left\{\begin{array}{ccc} \left]0\,; \frac{1}{A}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(\frac{1}{x}\right) \end{array}\right.$. Alors f admet le développement asymptotique (**??**) si et seulement si g admet le $DL_n(0)$ suivant

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k + o_0(x^n)\,. \tag{13.151}$$

Pour travailler en $+\infty$ on fera le changement de variabel $x = \frac{1}{t}$ afin de se ramener en zéro et de pouvoir utiliser les résultats sur les fonctions usuelles. On peut généraliser encore la notion de développement asymptotique. Si $\gamma \in \mathbb{R}$, si $t \longmapsto t^\gamma f(t)$ admet le développement asymptotique

$$t^\gamma f(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{1}{t^k} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^n}\right) \tag{13.152}$$

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \frac{1}{t^{\gamma+k}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{n+\gamma}}\right) \tag{13.153}$$

Par exemple avec $\gamma = -1$

$$\frac{f(t)}{t} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{t} + \cdots + \frac{\alpha_n}{t^n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^n}\right) \tag{13.154}$$

$$f(t) = \alpha_0 t + \alpha_1 + \cdots + \frac{\alpha_n}{t^{n-1}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{n-1}}\right) \tag{13.155}$$

La droite d'équation $y = \alpha_0 x + \alpha_1$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et

$$f(t) - \alpha_0 t - \alpha_1 \sim_\infty \frac{\alpha_2}{t}, \tag{13.156}$$

avec $\alpha_2 \neq 0$. La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de α_2. S'il est positif, la courbe est au-dessus.

Ceci est généralisable à $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \frac{\alpha_p}{t^{p-1}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^{p-1}}\right)$ avec $\alpha_p \neq 0$. La position de la courbe par rapport à l'asymptote sera donnée par le signe de α_p.

Chapitre 14

Dérivation des fonctions à valeurs réelles de la variable réelle

Sommaire

Dans tout le chapitre I désigne un intevalle réel non vide et non réduit à un point.

14.1 Dérivation en un point

14.1.1 Dérivée en un point

14.1.1.1 Définition

Définition 14.1. Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe dans $\mathbb{R}$. On note $f'(a)$ cette limite finie si elle existe. Elle est appelée la dérivée de f en a.

C'est équivalent à ce que $h \longrightarrow \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie en zéro. Lorsqu'il existe $f'(a)$ est aussi noté $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$. Avec les quantificateurs, si f est dérivable en a, $f'(a)$ vérifie

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in I \setminus \{a\} \quad |x-a| \le \eta \implies \left| \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right| \le \epsilon. \tag{14.1}$$

14.1.1.2 Interprétation graphique

Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$. On suppose que f est dérivable en a. On définit deux fonctions

$$\varphi\colon \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} & x \neq a, \\ f'(a) & x = a \end{cases} \end{cases} \tag{14.2}$$

$$\epsilon\colon \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) & x \neq a \\ 0 & x = a \end{cases} \end{cases} \tag{14.3}$$

Proposition 14.1. Les fonctions φ et ϵ sont toutes les deux continues en a. De plus

$$\forall x \in I \quad \varphi(x) = \epsilon(x) + f'(a). \tag{14.4}$$

La fonction f admet le développement limité à l'ordre un suivant

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \epsilon(x)(x-a), \tag{14.5}$$

avec $\lim\limits_{a} \epsilon = 0$. Soit h la partie régulière du $DL_1(a)$ de f, c'est une fonction affine appelée fonction affine tangente. La droite d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ est tangente à la courbe représentative de f au point $A(a, f(a))$.

Lorsque $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ tend vers $\pm\infty$ alors la tangente est verticale. La fonction n'est dans ce cas pas dérivable en a.

14.1.1.3 Interprétation cinématique

Si on suppose que $f(t)$ représente la position d'un point mobile $M(t)$ à l'innstant t :
— $\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$ est la vitesse moyenne du point M entre les instants a et t ;
— $f'(a)$ est la vitesse instantannée à l'instant a.

14.1.2 Dérivée à droite, dérivée à gauche

14.1.2.1 Définition

Soit $f \in \mathbb{R}^I$, $a \in I$ et on suppose que $I \cap]a\,;+\infty[$ est non vide.

Définition 14.2. On dit que f est dérivable à droite en a lorsque la restriction de f à $I \cap]a\,;+\infty[$ est dérivable en a. C'est équivalent à

1. la fonction $h_1\colon \left\{\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}\right.$ admet une limite finie à droite en a ;
2. la fonction $h_2\colon \left\{\begin{array}{ccc} I \cap]a\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}\right.$ admet une limite finie en a.

Sous réserve d'existence de cette limite, on note $f'_d(a) = \lim\limits_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. On définit de manière analogue la dérivée à gauche en f. On note $f'_g(a) = \lim\limits_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ lorsque la limite existe et est finie..

14.1.2.2 Propriétés

Soit $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$.

Proposition 14.2. Si f est dérivable en a et si $I \cap]a\,;+\infty[$ est non vide, alors f est dérivable à droite en a et $f'_d(a) = f'(a)$. La réciproque est fausse.

Proposition 14.3. Si f est dérivable en a et si $I \cap]-\infty\,;a[$ est non vide, alors f est dérivable à gauche en a et $f'_g(a) = f'(a)$. La réciproque est fausse.

Proposition 14.4. Si a appartient à l'intérieur de I (c'est-à-dire si $I \cap]a\,;+\infty[$ et $]-\infty\,;a[$ sont non vides) alors f est dérivable en a si et seulement si f est dérivable à gauche et à droite en a et si $f'_g(a) = f'_d(a)$ et auquel cas $f'_g(a) = f'_d(a) = f'(a)$.

Démonstration. Les deux premières propositions découlent de la définition. La troisième découle des deux premières. □

14.1.2.3 Dérivabilité et continuité

Proposition 14.5. Soit $f \in \mathbb{R}^I$, $a \in I$. Si f est dérivable en a alors elle est continue en a. La réciproque est fausse.

Démonstration. On avait vu que si f est dérivable alors elle admet le développement limité à l'ordre 1 suivant

$$\forall x \in I \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + (x-a)\epsilon(x), \tag{14.6}$$

avec ϵ de limite nulle en a (donc continue en a). La fonction $x \longrightarrow x - a$ est continue alors par produit $x \longmapsto (x-a)\epsilon(x)$ est continue en a. La fonction affine $x \longrightarrow f(a) + f'(a)(x-a)$ est continue en a. Ainsi par somme f est continue en a. □

La réciproque est fausse, on peut avoir des fonctions continues qui ne sont pas dérivables, comme par exemple la valeur absolue en zéro. On peut avoir des fonctions continue en tout point mais dérivable nulle part, comme par exemple la trajectoire du mouvement brownien.

14.1.3 Extremums locaux et dérivées

14.1.3.1 Définitions

Soit $f \in \mathbb{R}^I$, $a \in I$, on dit que

1. f admet un maximum global en a si $\forall x \in I \quad f(x) \leq f(a)$;
2. f admet un minimum global en a si $\forall x \in I \quad f(x) \geq f(a)$;
3. f admet un extremum global en a si elle admet un maximum ou un minimum global en a ;
4. f admet un maximum local en a si $\exists h > 0 \forall x \in I \cap]a-h\,;a+h[\quad f(x) \leq f(a)$;
5. f admet un minimum local en a si $\exists h > 0 \forall x \in I \cap]a-h\,;a+h[\quad f(x) \geq f(a)$;
6. f admet un extremum local en a si elle admet un maximum ou un minimum local en a ;
7. On définit les notions d'extremum stricts de la même manière en remplaçant $\leq$ resp. $\geq$ par $<$ resp. $>$.

14.1.3.2 Liens avec les dérivées

Théorème 14.1. *Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in I$ qui n'est pas une borne de I. On suppose que f est dérivable en a et que f admet un extremum local en a. Alors $f'(a) = 0$.*

Démonstration. On suppose par exemple que f admet un maximum local en a. Le réel a est dans l'intérieur de I donc il existe $h_1 > 0$ tel que $[a-h_1\,;a+h_1] \subset I$. La fonction f admet un maximum local en a donc il existe $h_2 > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a-h_2\,;a+h_2]$, $f(x) \leq f(a)$. Soit $h_0 = \min(h_1, h_2)$ alors $[a-h_0\,;a+h_0] \cap A = [a-h_0\,;a+h_0]$. Soit $x \in [a-h_0\,;a+h_0]$,

— Si $x > a$ alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ et donc par passage à la limite $f'_d(a) \leq 0$;

— Si $x < a$ alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ et donc par passage à la limite $f'_g(a) \geq 0$.

Or on sait que f est dérivable en a, donc $0 \leq f'_d(a) = f'_g(a) \leq 0$. Donc $f'(a) = 0$. □

La réciproque est fausse, un contre-exemple suffisant est la fonction cube en zéro. Sa dérivée est nulle et pourtant elle n'admet pas d'extremum. En fait c'est un point d'inflexion. Cependant une fonction peut admettre un extremum en un point où elle n'est pas dérivable. En effet, la fonction valeur absolue admet zéro comme minimum global en zéro alors qu'elle n'est pas dérivable en zéro.

14.1.4 Dérivabilité en un point et existence d'un développement limité à l'ordre un

On a déja dit que si f est dérivable en a, alors elle admet un $DL_1(a)$. De manière réciproque on peut énoncer la proposition suivante

Proposition 14.6. Soit $f \in \mathbb{R}^I$, $a \in I$. On suppose que f admet le $DL_1(a)$ suivant

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + (x-a)\epsilon(x) \quad \lim_a \epsilon = 0, \tag{14.7}$$

alors f est dérivable en a et $\alpha_0 = f(a)$ et $f'(a) = \alpha_1$.

Démonstration. On a déjà vu que $\alpha_0 = f(a)$, par troncature. D'autre part

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \alpha_1 + \epsilon(x). \tag{14.8}$$

En passant à la limite, puisque ϵ tend vers zéro en a, on a bien $f'(a) = \alpha_1$. $\square$

Cependant, la propriété n'est pas généralisable pour un $DLn(a)$ où $n \geq 2$.

14.1.4.1 Interprétation graphique du $DL_1(a)$

Si f admet le $DL_1(a)$ $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1(x-a) + o_a((x-a))$ avec $x \longrightarrow \alpha_0 + \alpha_1(x-a)$ la fonction affine tangente. On suppose que f admet un $DL_n(a)$ avec $n \geq 2$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o_a((x-a)^n), \tag{14.9}$$

tel qu'il existe $k \in [\![2\,;n]\!]$ et $\alpha_k \neq 0$. Si $p = \min\{k \in [\![2\,;n]\!] \mid \alpha_k \neq 0\}$ alors

$$f(x) - \alpha_0 - \alpha_1(x-a) \sim_a \alpha_p(x-a)^p. \tag{14.10}$$

On peut donc étudier la position relative de la courbe représentative de f par rapport à sa tangente en a en fonction du signe du réel α_p et de la parité du naturel p.

14.1.5 Fonction dérivée. Opérations algébriques

14.1.5.1 Fonction dérivée

Soient I un intervalle contenant au moins deux points et un réel $a \in I$. On note $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I vers $\mathbb{R}$ qui sont dérivables en a. On dit que f est dérivable sur I si elle est continue en tout point de I. On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ dérivables sur I. On a $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{a \in I} \mathcal{D}_a(I, \mathbb{R})$.

Lorsque f est dérivable sur I, on peut définir l'application

$$f' \colon \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{array} \right. . \tag{14.11}$$

Cette application est appelée la dérivée de f. On note $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ telle que la fonction dérivée est continue sur I.

$$\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}(I, \mathbb{R}). \tag{14.12}$$

Les inclusions sont strictes, puisqu'une fonction peut être continue sans être dérivable et dérivable sans que sa dérivée soit continue. On dispose des applications suivantes

$$\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}_a(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f'(a) \end{array} \right. ; \tag{14.13}$$

$$\psi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^I \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right. ; \tag{14.14}$$

$$\zeta\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I,\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right. . \tag{14.15}$$

14.1.5.2 Somme

Théorème 14.2. *L'ensemble $\mathcal{D}_a(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$. Autrement dit l'application φ est linéaire.*

Démonstration. Soient f et g deux applications dérivables sur I, un réel λ. Alors pour tout $x \in I \setminus \{a\}$

$$\frac{(\lambda f+g)(x)-(\lambda f+g)(a)}{x-a} = \lambda\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x)-g(a)}{x-a}. \tag{14.16}$$

En passant à la limite en a, on a

$$(\lambda f+g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a). \tag{14.17}$$

□

Corollaire 14.2.1. *L'ensemble $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$. Autrement dit l'application ψ est linéaire.*

Corollaire 14.2.2. *L'ensemble $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^I$. Autrement dit l'application ζ est linéaire.*

14.1.5.3 Produit

Théorème 14.3. *Soient f et g deux applications de $\mathcal{D}_a(I,\mathbb{R})$ alors $fg \in \mathcal{D}_a(I,\mathbb{R})$ et*

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a) \tag{14.18}$$

Démonstration. Soit un réel $x \in I \setminus \{a\}$ alors

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x) + f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}. \tag{14.19}$$

Donc, puisque f et g sont dérivable en a, en passant à la limite en a on a bien

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a). \tag{14.20}$$

□

Corollaire 14.3.1. *Soient f et g deux applications de $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})n$ alors $fg \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et*

$$(fg)' = f'g + fg'. \tag{14.21}$$

Corollaire 14.3.2. *Soient f et g deux applications de $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})n$ alors $fg \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et*
$$(fg)' = f'g + fg'. \tag{14.22}$$

En particulier, si f est dans $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ alors pour tout naturel n non nul $f^n \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$ (preuve par récurrence facile à vérifier).

14.1.5.4 Inverse et quotient

Théorème 14.4. *Soit une fonction $g \in \mathcal{D}_a(I,\mathbb{R})$ qui ne s'annule pas en a. Alors il existe un voisinage de a dans le quel g ne s'annule pas. Soit U un tel voisinage. Alors $\frac{1}{g}$ est définie et dérivable sur U telle que*
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g(a)^2}. \tag{14.23}$$
Pour toute fonction f dérivable sur I, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur U et
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \tag{14.24}$$

Démonstration. La fonction g est dérivable en a, donc elle est continue en a et $g(a) \neq 0$. Il existe donc un voisinage U de a sur lequel g ne s'annule pas.
$$\forall x \in U \setminus \{a\} \quad \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x-a} = \frac{-1}{g(x)g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}. \tag{14.25}$$
En passant à la limite en a, puisque g est dérivable en a, alors par produit de limite on a bien
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}. \tag{14.26}$$
Pour le quotient, on applique le premier point et le résultat sur les produits. □

Corollaire 14.4.1. *Soient f et g dans $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ telles que g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{14.27}$$

Corollaire 14.4.2. *Soient f et g dans $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ telles que g ne s'annule pas sur I, alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et*
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}. \tag{14.28}$$

On montre par récurrence que si f est dérivable et ne s'annule pas sur I alors pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, f^n est dérivable sur I.

14.1.5.5 Dérivée logarithmique

Définition 14.3. Soit $f \in \mathcal{D}_a(I,\mathbb{R})$ qui ne s'annule pas en a. On appelle dérivée logarithmique de f en a le réel $\frac{f'(a)}{f(a)}$.

Théorème 14.5. *Soient deux fonction f et g de $\mathcal{D}_a(I,\mathbb{R})$ qui ne s'annulent pas en a. Alors*

$$\frac{(fg)'(a)}{(fg)(a)} = \frac{f'(a)}{f(a)} + \frac{g'(a)}{g(a)}; \tag{14.29}$$

$$\forall\lambda \in \mathbb{R}^* \quad \frac{(\lambda f)'(a)}{(\lambda f)(a)} = \frac{f'(a)}{f(a)}; \tag{14.30}$$

$$\frac{(f/g)'(a)}{(f/g)(a)} = \frac{f'(a)}{f(a)} - \frac{g'(a)}{g(a)}; \tag{14.31}$$

$$\forall\alpha \in \mathbb{Z} \quad \frac{(f^\alpha)'(a)}{(f^\alpha)(a)} = \alpha\frac{f'(a)}{f(a)}. \tag{14.32}$$

Ce théorème est parfois utile pour calculer les dérivées de produits ou de quotient.

14.1.6 Composition de fonctions dérivables

Théorème 14.6. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathbb{R}^I$, $g \in \mathbb{R}^J$ avec $f(I) \subset J$. Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$ alors $f \circ g$ est dérivabele en a et*

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)(g' \circ f)(a). \tag{14.33}$$

Démonstration. On sait que

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{x - a} = \frac{g \circ f(x) - g \circ f(a)}{f(x) - f(a)} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}. \tag{14.34}$$

Puisque f est dérivable en a, on a bien $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ et elle est continue en a, donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. La fonction g est dérivable en $f(a)$ donc $\lim\limits_{y\to f(a)} \frac{g(y)-g(f(a))}{y-f(a)} = g'(f(a))$. Par composition de limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to a} \frac{g(f(x))-g(f(a))}{f(x)-f(a)} = g'(f(a))$. Donc par produit, $\lim\limits_{x\to a} \frac{g\circ f(x)-g\circ f(a)}{x-a} = g'(f(a))f'(a)$. □

Corollaire 14.6.1. *Soient deux fonctions $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(J)$ telles que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$.*

Corollaire 14.6.2. *Soient deux fonctions $f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{C}^1(J)$ telles que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$.*

Exemples

1. Si $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$) alors $\mathrm{e}^f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$) et $(\mathrm{e}^f)' = f'\,\mathrm{e}^f$;
2. si $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ qui ne s'annule pas, alors $\ln|f| \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(\ln|f|)' = \frac{f'}{f}$;
3. si $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $f(I) \subset]0\,;+\infty[$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $f^\alpha \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(f^\alpha)' = \alpha f' f^{\alpha-1}$;
4. si $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ avec $f(I) \subset]0\,;+\infty[$ et $u \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ alors $f^u = \mathrm{e}^{u\ln f} \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$ et $(f^u)' = \left(u'\ln f + u\frac{f'}{f}\right) f^u$.

14.1.7 Dérivation d'une fonction réciproque

Théorème 14.7. *Soit I un intervalle réel et $a \in I$. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ strictement monotone. Alors f induit une bijection de I sur $f(I) = J$ dont on note f^{-1} l'application réciproque. Alors*

$$f \in \mathcal{D}_a(I) \text{ et } f'(a) \neq 0 \implies f^{-1} \in \mathcal{D}_{f(a)}(J) \text{ et } (f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}. \tag{14.35}$$

Démonstration. Soit $y \in J \setminus \{f(a)\}$, on note $x = f^{-1}(y)$. Alors

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{\varphi_{f,a}(x)} = \frac{1}{\varphi_{f,a}(f^{-1}(y))}. \tag{14.36}$$

Comme f^{-1} est continue, on a $\lim_{y \to f(a)} f^{-1}(y) = a$ et comme f est dérivable $\lim_{x \to a} \varphi_{f,a}(x) = f'(a)$. Donc par composition de limite on a $\lim_{y \to f(a)} \varphi_{f,a}(f^{-1}(y)) = f'(a)$. Comme $f'(a)$ n'est pas nul on peut l'inverser et f^{-1} est dérivable en $f(a)$, et :

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)} = \lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}. \tag{14.37}$$

□

Corollaire 14.7.1. *Soit I un intervalle réel, $f \in \mathbb{R}^I$ strictement monotone, dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I. Alors f induit une bijection de I sur $J = f(I)$ et l'application réciproque f^{-1} est dérivable sur J et de plus*

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \tag{14.38}$$

Corollaire 14.7.2. *Sous les mêmes hypothèses, si on suppose que $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ alors $f^{-1} \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.*

Que se passe-t-il si f' s'annule en a ?

Comme f est strictement monotone, la fonction $\varphi_{f,a}$ est à valeurs soit strictement positives soit strictement négatives. La limite en $f(a)$ de $\frac{1}{\varphi_{f,a}}$ est infinie. Alors f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$ mais la courbe représentative de f^{-1} admet une tangente verticale en $(f(a), a)$. Comme par exemple la fonction argument cosinus hyperbolique en un.

14.1.8 Dérivées successives

14.1.8.1 Définitions et notations

Soit I un intervalle réel et $f \in \mathbb{R}^I$. Si f est dérivable en tout point a de I, alors on dispose de l'application f' qui associe le réel a eu réel $f'(a)$. Si f' est définie et continue sur I, alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Si f' est définie sur I et si f' est dérivable en un point $a \in I$, le réel $(f')'(a)$ noté $f''(a)$ est la dérivée seconde de f en a. Si f' est définie et dérivable en tout point a de I on note sa dérivée l'application f'' ou encore $f^{(2)}$. Si f'' est continue sur I on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$.

On itére le processus. Supposons que $f^{(k-1)}$ est définie sur I. Si $f^{(k-1)}$ est dérivable en $a \in I$ on note $f^{(k)}(a)$ le nombre dérivé $(f^{(k-1)})'(a)$ et on dit que f est k fois dérivable en a. Si $f^{(k-1)}$ est définie et dérivable sur I on note $f^{(k)} = (f^{(k-1)})'$ et on dit que f est k fois dérivable sur I.

Ne pas confondre $f^{(k)}$ qui est la dérivée k^{e}de f avec la puissance f^k. Si $f^{(k)}$ est continue sur I, alors on dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I.

Finalement sous réserve d'existence, $f^{(0)} = f$ et pour tout naturel n, $f^{(n+1)} = (f^{(n)})' = (f')^{(n)}$. Soit un naturel n, alors

— f est dite $\mathcal{D}^n$ lorsqu'elle est dérivable n fois sur I. On note $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions qui sont $\mathcal{D}^n$ sur I ;
— f est dite $\mathcal{C}^n$ lorsqu'elle est dérivable n fois sur I et que $f^{(n)}$ est continue. On note $\mathcal{C}^n(I)$ l'ensemble des applications qui sont $\mathcal{C}^n$ sur I ;
— f est dite $\mathcal{C}^\infty$ lorsque pour tout naturel n, f est $\mathcal{C}^n$; on note

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}). \tag{14.39}$$

On a donc les inclusions suivantes :

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathbb{R}^I. \tag{14.40}$$

Les inclusions sont strictes.

Proposition 14.7. L'égalité suivante est vraie

$$\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) \tag{14.41}$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}$ alors $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}) \subset \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$. Donc $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}) \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$.

Soit $f \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})$, alors pour tout naturel n $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ alors $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. Finalement $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$. On dira que f est indéfiniment dérivable. □

14.1.8.2 Opérations algébriques et théorème de Leibniz

Théorème 14.8. *Soient n un naturel non nul, λ un réel, f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$.*

1. *Si f et g sont n fois dérivables alors $\lambda f + g$ l'est aussi et $(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)}$ et fg est aussi n fois dérivable telle que $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$;*
2. *si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ alors $\lambda f + g$ et fg sont aussi de classe $\mathcal{C}^n$;*
3. *si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors $\lambda f + g$ et fg sont aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

Démonstration. La linéarité de $f \longmapsto f^{(n)}$ se démontre par réccurence à partir de la linéarité de $f \longmapsto f'$. C'est assez facile. Par contre le morceaux le plus difficile est la formule de Leibniz. Soit un naturel n, on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$

$$\forall (f, g) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R})^2 \quad fg \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) \text{ et } (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}. \tag{14.42}$$

Soit $n=1$, alors si f et g sont dérivables, alors on sait que fg est dérivable d'après les propriétés et $(fg)' = f'g + g'f = \sum_{k=0}^{1} \binom{1,k}{f}^{(k)} g^{(1-k)}$. Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Supposons maintenant $\mathcal{P}(n)$ pour $n \neq 0$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit f et g $n+1$ fois dérivables, alors elles le sont n fois et par hypothèse de récurrence $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$. Pour tout $k \leq n$ $f^{(k)}$ et $g^{(n-k)}$ sont dérivables (puisque f et g le sont $n+1$ fois). Par produit est combinaisons linéaires de fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est dérivable. Autrement dit fg est $n+1$ fois dérivable et

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f^{(k)} g^{(n-k)}]' \tag{14.43}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}] \tag{14.44}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n,k}{f}^{(k)} g^{(n-k+1)}. \tag{14.45}$$

On change de variable $j = k+1$ dans la première somme et on obtient

$$(fg)^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} f^{(j)} g^{(n+1-j)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k+1)} \tag{14.46}$$

$$= \binom{n}{n} f^{(n+1)} g^{(0)} + \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right] f^{(j)} g^{(n+1-j)} + \binom{n}{0} f^{(0)} g^{(n+1)} \tag{14.47}$$

$$= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} f^{(j)} g^{(n+1-j)}. \tag{14.48}$$

Alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel n non nul. $\square$

Théorème 14.9. *Soient deux applications f et g de I dans $\mathbb{R}$ telles que g ne s'annulent pas sur I. Soit un naturel n non nul.*

1. *Si f et g sont n fois dérivables alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ le sont aussi ;*
2. *si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ le sont aussi ;*
3. *si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ le sont aussi.*

Démonstration par récurrence. Soit un naturel n non nul et la propriété $\mathcal{P}(n)$:"$\forall g \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})\ 0 \notin g(I) \quad \frac{1}{g} \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$".

L'initialisation a déjà été vue dans les propriétés, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors soit $g \in \mathcal{D}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ qui ne s'annule pas.

L'hérédité se montre comme tel : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $g \in \mathcal{D}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ telle que $0 \notin g(I)$. En particulier g est dérivable et puisqu'elle ne s'annule pas $\frac{1}{g}$ est dérivable et $\frac{1}{g}' = -\frac{g'}{g^2}$. Alors $-g'$

est n fois dérivable et par hypothèse de récurrence $\frac{1}{g}$ est n fois dérivable et donc par produit $\frac{1}{g^2}$ est n fois dérivable. Finalement $\frac{1}{g}'$ est n fois dérivable donc $\frac{1}{g}$ est $n+1$ fois dérivable. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Alors par théorème de récurrence la propriété P est vrai pour tout naturel n non nul. □

14.1.8.3 Composition

Théorème 14.10. *Soient deux intervalles réels I et J, $f \in \mathbb{R}^I$, $g \in \mathbb{R}^J$, telles que $f(I) \subset J$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Si f et g sont n fois dérivable alors $g \circ f$ est aussi n fois dérivables. Idem avec $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$.*

Démonstration par récurrence. Soit un naturel n non nul et la propriété $\mathcal{P}(n)$ "$\forall (f,g) \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})^2 \times \mathcal{D}^n(J,\mathbb{R}) / f(I) \subset J \quad g \circ f \in \mathcal{D}^n(I,\mathbb{R})$".

$\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après les propriétés sur la dérivée. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathcal{P}(n)$ alors soit $f \in \mathcal{D}^{n+1}(I,\mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}^{n+1}(J)$ telles que $f(I) \subset J$. En particulier f et g sont dérivables et donc $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)' = f'g' \circ f$. Alors f et f' sont n fois dérivable et g' aussi. Alors par hypothèse de récurrence $g' \circ f$ est n fois dérivable et par produit $(g \circ f)'$ est n fois dérivable. Alors finalement $g \circ f$ est $n+1$ fois dérivable. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Le théorème de récurrence affirme donc que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel n non nul. □

14.1.8.4 Application réciproque

Théorème 14.11. *Soit un naturel n non nul et $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose que f est n fois dérivable et qu'elle est strictement monotone. Alors f induit une bijection de I dur $J = f(I)$ et f^{-1} est n fois dérivable. Idem avec $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$.*

Démonstration par récurrence. L'initialisation est vraie pour $n = 1$ grâce aux propriétés sur la dérivation. Soit ensuite $n \geq 1$ et supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit alors f $n+1$ fois dérivable et $f'(I) \subset]0, +\infty[$. Par théorème on sait que f^{-1} est dérivable et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$. Par hypothèse de récurrence on sait que f^{-1} est n fois dérivable. On sait aussi que f' est n fois dérivable. Alors d'après le théorème précédent $f' \circ f^{-1}$ est n fois dérivable. Puisque $f' \circ f^{-1}$ ne s'annule pas, son inverse et aussi n fois dérivable. Donc finalement (f^{-1}) est n fois dérivable. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Le théorème de récurrence affirme donc que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel n non nul. □

14.2 Étude globale de la dérivation sur un intervalle

14.2.1 Théorème de Rolle

Théorème 14.12 (Théorème de Rolle)**.** *Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$. On suppose que*

- *f est continue sur $[a\,;b]$;*
- *f est dérivable sur $]a\,;b[$;*
- *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe au moins un réel $c \in]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. La fonction f est continue sur $[a\,;b]$. Le théorème des bornes nous dit alors qu'il existe deux réels m, M tels que $f([a\,;b]) = [m\,;M]$, $m = \inf_{[a\,;b]} f$ et $M = \sup_{[a\,;b]} f$. Deux cas se présentent :

1. Si $M = m$, alors f est constante sur $[a\,;b]$ et sa dérivée et constante nulle sur l'intérieur. On peut donc choisir n'importe quel c à l'intérieur ;
2. Si $M > m$, $f(a)$ ne peut être à la fois égal à m et à M. On suppose par exemple que $f(a) \neq m$, alors $f(b) \neq m$. Comme $m \in f([a\,;b])$, il existe un réel $c \in\,]a\,;b[$ tel que $m = f(c)$. Le réel m est un extremum (dans l'exemple ici un minimum) donc $f'(c) = 0$.

Dans les deux cas, on a montré l'existence d'un réel $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f'(c) = 0$. □

C'est-à-dire que graphiquement, il existe au moins une tangente horizontale à la courbe représentative de f sur $]a\,;b[$.

Corollaire 14.12.1. *Soit un intervalle réel I et $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose que*

1. *f est continue sur I ;*
2. *f est dérivable sur $\mathring{I}$, l'intérieur de I ;*

Alors entre deux zéros de f sur I, il existe un zéro de f'.

14.2.2 Égalité des accroissements finis

Théorème 14.13 (Égalité des accroissements finis)**.** *Soient deux réels a, b tels que $a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$. On suppose que*

1. *f est continue sur $[a\,;b]$;*
2. *f est dérivable sur $]a\,;b[$.*

Alors il existe au moins un réel $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction définie pour tout réel k :

$$\varphi_k : \begin{cases} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - f(b) + k(x - b) \end{cases}. \tag{14.49}$$

Par construction $\varphi_k(b) = 0$ et on veut $\varphi_k(a) = 0$ alors on choisit $k = -\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$. Avec cette valeur de k on a bien les hypothèses du théorème de Rolle alors il existe un réel $c \in\,]a\,;b[$ tel que $\varphi_k'(c) = 0$. Or pour tout réel $x \in\,]a\,;b[$ on a $\varphi_k'(x) = f'(x) + k$ et donc comme $\varphi_k'(c) = 0$ alors $f'(c) = -k = \frac{f(a)-f(b)}{a-b}$.

On a montré l'existence d'un réel $c \in\,]a\,;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. □

Graphiquement, ce théorème s'interpréte comme cela : il existe au moins un réel $c \in\,]a\,;b[$ tel que la tangente à la courbe représentative de f au point $(c, f(c))$ soit parallèle à la droite $(A(a, f(a))B(b, f(b)))$.

Autres formulations :

Proposition 14.8. Soit un intervalle réel I et $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors pour tous x_1, x_2 de I – tels que $x_1 \neq x_2$– il existe $c \in](x_1, x_2)[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_1 - x_2)$, où $](x_1, x_2)[= \begin{cases}]x_1\,;x_2[& x_1 < x_2 \\ [x_2\,;x_1] & x_2 < x_1 \end{cases}$.

Proposition 14.9. Soit un intervalle réel I et $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors pour tout $x \in I$, tout $h \in \mathbb{R}$ tel que $x+h \in I$, il existe au moins un réel $\theta \in]0\,;1[$ tel que $f(x+h) = f(x)+hf'(x+\theta h)$.

En particulier, si $\theta \in I$ pour tout $x \in I$, il existe $\theta \in]0\,;1[$ tel que $f(x) = f(0) + xf'(\theta h)$.

Démonstration. — si $h = 0$, on choisit n'importe quel $\theta \in]0\,;1[$
— sinon, on pose $x_1 = x$ et $x_2 = x + h$ et alors $x_1 \neq x_2$ et on applique la proposition précédente pour dire qu'il existe un $c \in](x_1, x_2)[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_1 - x_2)$. Alors $f(x + h) - f(x) = hf'(c)$ et $](x_1, x_2)[= \{x + \theta h \mid 0 < \theta < 1\}$. Alors comme $c \in \{x + \theta h \mid 0 < \theta < 1\}$, on a $f(x + h) - f(x) = hf'(x + \theta h)$.

□

14.2.3 Inégalité des accroissements finis

Théorème 14.14 (IAF)**.** *Soit un intervalle réel I et $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. On suppose de plus qu'il existe des réels m, M tels que pour tout réel $x \in \mathring{I}$ $m \leq f'(x) \leq M$.*

Alors pour tout réel $x_1 \neq x_2 \in I$ on a $m < \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < M$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'égalité des accroissements finis. Soient $x_1, x_2 \in I$ différents, alors il existe un réel $c \in](x_1, x_2)[$ tel que $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = f'(c) \in [m\,; M]$ □

Corollaire 14.14.1. *Soient deux réels $a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$. On suppose que f est continue sur $[a\,; b]$ et dérivable sur $]a\,; b[$ et qu'il existe deux réels m, M tels que pour tout $x \in]a\,; b[$ $m \leq f'(x) \leq M$.*

Alors pour tout réel $x \in [a\,; b]$, $f(a) + m(x - a) \leq f(x) \leq f(a) + M(x - a)$.

Démonstration. — si $x = a$ alors $f(a) \leq f(a) \leq f(a)$ est vraie
— sinon, $x \in]a\,; b]$ et on applique l'inégalité des accroissements finis avec $x_1 = a$ et $x_2 \neq x_1$. Alors $m \leq \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq M$. Comme $x - a > 0$ on a bien $f(a) + m(x - a) \leq f(x) \leq f(a) + M(x - a)$.

□

Cas particulier :

Proposition 14.10. Soient a, b deux réels tels que $a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors f' est bornée sur $[a\,; b]$ et pour tout x, y de $[a\,; b]$ différents on a

$$\inf_{[a\,;b]} f' \leq \inf_{[(x,y)]} f' \leq \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \sup_{[(x,y)]} f' \leq \sup_{[a\,;b]} f'. \tag{14.50}$$

Théorème 14.15. *Soient un intervalle réel I et $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose que*
— *f est continue sur I ;*
— *f est dérivable sur $\mathring{I}$;*
— *qu'il existe $k \in \mathbb{R}+$ tel que pour tout $x \in \mathring{I}$ $|f'(x)| \leq k$.*

Alors pour tout x, y dans I, $|f(x) - f(y)| \leq k\,|x - y|$

Si $a < b$ et si $f \in \mathcal{C}^1([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ alors les hypothèses du théorèmes sont satisfaites avec $k = \sup_{[a\,;b]} |f'|$ car f' est continue sur le segment $[a\,;b]$ donc elle est bornée.

Démonstration. — si $x_1 = x_2$, alors on a bien $0 \leq 0$;

— sinon, grâce aux inéaglités des accroissements finis on a

$$-k \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq k, \tag{14.51}$$

et donc

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq k\,|x_2 - x_1|\,. \tag{14.52}$$

□

14.2.4 Caractérisation des fonctions constantes, monotones, strictement monotones et lipschitziennes parmi les fonctions dérivables

À n'utiliser que si on sait que les fonctions sont dérivables. Toutes les fonctions ne le sont pas.

Théorème 14.16. *Soient I un intervalle réel et $f \in \mathbb{R}^I$ et $k \in [0\,;+\infty[$. On suppose que f est continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Alors*

1. *f est constante qur I si et seulement si f' est nulle sur $\mathring{I}$;*
2. *f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si f' est positive (resp. négative) sur $\mathring{I}$;*
3. *f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I si et seulement si f' est positive (resp. négative) sur $\mathring{I}$ et pour tout $a, b \in I$ qu'il existe un $c \in \,]a\,;b[$ en lequel f' est non nulle ;*
4. *f est k-lipschitzienne si et seulement si $\sup_{\mathring{I}} |f'| \leq k$.*

Démonstration. Démontrons le deuxième point pour f croissante. Si f est croissante alors pour tout $x_0 \in \mathring{I}$ et tout $x \in I$ $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ or on sait que f est dérivable en x_0 donc par passage à la limite $f'(x_0) \geq 0$. Si maintenant f' est positive sur $\mathring{I}$ alors pour tout x, y de I tels que $x < y$, par égalité des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$. Or $f'(c) \geq 0$ et $y - x > 0$. Donc $f(y) \geq f(x)$ et ainsi f est croissante. Pour f décroissante on applique le résultat qui précéde à $-f$.

Le premier point se déduit du deuxième puisque f est constante si et seulement si f est croissante et f est décroissante.

Démontrons le troisième point pour f strictement croissante. La fonction f est strictement croissante si et seulement si elle est croissante et injective, c'est à dire si et seulement si $f' \geq \tilde{0}$ et f injective. Donc d'après l'égalité des accroissement finis pour tout $a, b \in I$ avec $a < b$ il existe un $c \in \,]a\,;b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$. Comme $a \neq b$ et que f est injective alors $f'(c) \neq 0$. Si maintenant on suppose que f est croissante et qu'il existe un $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) \neq 0$. Alors d'après le premier point f n'est pas constante donc $f(a) < f(b)$ (Il serait absurde d'avoir $f(a) = f(b)$). Alors f est strictement croissante. On a montré l'équivalence. Pour f strictement décroissante on applique le résultat à $-f$.

Pour le quatrième point, on a déjà vu que si f' était bornée alors f est $k-$lipschitzienne. Si maintenant on suppose que f est $k-$lipschitzienne et dérivable sur $\mathring{I}$, alors pour tout $x_0 \in \mathring{I}$ et tout $x \in I$ $x \neq x_0$ on a $\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right| \leq k$. Comme f est dérivable en x_0, on peut passer à la limite en x_0 et donc on a bien $|f'(x_0)| \leq k$. Il faut quand même vérifier que f est bien dérivable avant d'appliquer ce point. $\square$

En particulier si $x \in \mathring{I}$, alors $f'(x) > 0$ et donc f est strictement croissante. Ou encore si pour tout $x \in \mathring{I}$, $f'(x_0) > 0$ et si f' ne s'annule qu'en un nombre fini de point alors f est strictement croissante.

14.2.5 Prolongement de la dérivée

Théorème 14.17. *Soient deux réels a, b avec $a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b[}$. On suppose que*

1. *f est croissante sur $[a\,;b[$;*
2. *f est dérivable sur $]a\,;b[$;*
3. *qu'il existe un réel l tel que $\ell = \lim\limits_{a^+} f'$.*

Alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$ et la dérivée de f est continue en a.

Démonstration. Pour tout $x \in \,]a\,;b[$, on peut appliquer l'égalité des accroissements finis à f sur $[a\,;x]$ car

1. f est continue sur $[a\,;x] \subset [a\,;b[$;
2. f est dérivable sur $]a\,;x[\subset]a\,;b[$.

Alors pour tout $x \in \,]a\,;b[$ il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(c_x)$. Par théorème des gendarmes $\lim x \to ac_x = a$ et par hypothèse $\ell = \lim\limits_{a^+} f'$. Alors par composition $\lim\limits_{x \to a^+} f'(c_x) = \ell$. Alors on a montré que $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell$. Ainsi f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$. Par hypothèse on a aussi $\ell = \lim\limits_{a^+} f'$. Finalement $f'(a) = \lim\limits_{a^+} f'$ donc f' est continue en a. $\square$

Corollaire 14.17.1. *Soient deux réels a, b avec $a < b$ et $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$. On suppose que*

1. *f est continue sur $[a\,;b]$;*
2. *f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a\,;b]$;*
3. *qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \lim\limits_{a^+} f'$.*

Alors $f \in \mathcal{C}^1([a\,;b]\,, \mathbb{R})$ et $f'(a) = \ell$.

Que se passe-t-il si, avec les mêmes hypothèses, on remplace "il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\ell = \lim\limits_{a^+} f'$" par "$\lim\limits_{a^+} f' = \pm\infty$" ?

On montre de la même manière que $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \to \pm\infty$ et que f n'est pas dérivable en a et que la courbe représentative de f admet une tangente verticale au point d'abcisse a.

14.3 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$. On ne dérivera pas des fonctions définies ailleurs ailleurs que sur $\mathbb{R}$.

14.3.1 Dérivation en un point

14.3.1.1 Dérivée en un point

Définition 14.4. Soit $f \in \mathbb{C}^I$ et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque la fonction $x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite ℓ. Si cette limite existe elle est unique. On l'appelle nombre dérivée de f en a et on note $\ell = f'(a)$.

On note $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{C}^I$ qui sont dérivables en a.

Théorème 14.18. *Soit $f \in \mathbb{C}^I$ et $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si sa partie réelle $\Re(f)$ et sa partie imaginaire $\Im(f)$ sont dérivables en a. Auquel cas*

$$f'(a) = \Re(f)'(a) + \mathrm{i}\,\Im(f)'(a). \tag{14.53}$$

Démonstration. On note $g\colon \left\{ \begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array} \right.$. La fonction f est dérivable en a si et seulement si g admet une limite en a – par définition. Cette fonction g admet une limite en a si et seulement si sa partie réelle $\Re(g)$ et sa partie imaginaire $\Im(g)$ admettent une limite en a et auquel cas $\lim\limits_a g = \lim\limits_a \Re(g) + \mathrm{i} \lim\limits_a \Im(g)$. Les fonctions $\Re(g)$ et $\Im(g)$ admettent une limite en a si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivables en a et auquel cas $f'(a) = \Re(f)'(a) + \mathrm{i}\,\Im(f)'(a)$. □

Proposition 14.11. Soit $f \in \mathbb{C}^I$ et $a \in I$. Si f est dérivable en a alors elle est continue en a.

Démonstration. Si f est dérivable en a, alors sa partie réelle et imaginaire sont dérivable en a. Alors la partie réelle et imaginaire sont continues en a (ce sont des fonctions à valeurs réelles). Alor f est continue en a, d'après le chapitre sur la continuité. □

Définition 14.5. Soit $f \in \mathbb{C}^I$. On dit que f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I. On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ les fonctions de I vers $\mathbb{C}$ qui sont dérivables sur I. On définit $f'\colon \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ a & \longmapsto & f'(a) \end{array} \right.$. On dit que $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et si f' est continue sur I.

14.3.1.2 Opérations algébriques

Proposition 14.12. Soit $a \in I$. Les ensembles $\mathcal{D}_a(I, \mathbb{C})$, $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ sont des $\mathbb{C}-$espaces vectoriels. C'est à dire que pour tout $f, g \in \mathbb{C}^I$, tout $\lambda \in \mathbb{C}$ si $f, g \in \mathcal{D}_a(I, \mathbb{C})$ alors $\lambda f + g \in \mathcal{D}_a(I, \mathbb{C})$. Idem pour $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$.

Proposition 14.13. Soit $a \in I$. Soient deux fonctions à valeurs complexes f et g dérivables en a telles que g ne s'annule pas sur I. Alors il existe un voisinage

U de a sur lequel g est non nulle. Ainsi $\frac{f}{g}$ est définie et dérivable sur U. De plus

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2} \tag{14.54}$$

Idem pour $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$.

Proposition 14.14. Soient I et J deux intervalles réels, $a \in I$, $f \in \mathbb{R}^I$ (à valeurs réelles) et $g \in \mathbb{C}^J$ telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = f'(a)(g' \circ f)(a) \tag{14.55}$$

Idem pour $\mathcal{D}(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$.

14.3.1.3 Dérivées successives

Définition 14.6. Soit $f \in \mathbb{C}^I$. On pose $f^{(0)} = f$ et on définit par réccurence les dérivées successives de f si elles existent. Pour $n \geq 1 f^{(n)} = f'^{(n-1)}$.

On note $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{C}$ qui sont n fois dérivables. On note $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{C})$ qui sont continues, on dit qu'elles sont n fois continûment dérivables. Enfin on note $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions qui sont indéfiniment continûment dérivables.

Proposition 14.15.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall f \in \mathbb{C}^I \quad f \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{C}) \Longleftrightarrow \Re(f), \Im(f) \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{R}) \tag{14.56}$$

$$f^{(n)} = \Re(f)^{(n)} + \mathrm{i}\,\Im(f)^{(n)} \tag{14.57}$$

Idem pour $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$.

Proposition 14.16. Pour tout naturel n non nul, les ensembles $\mathcal{D}^n(I, \mathbb{C})$, $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$ sont des sous-espaces vectoriels et des sous-anneaux de $\mathbb{C}^I$. C'est à dire qu'ils sont stables par combinaison linéaire et produit :

$$\forall f, g \in \mathbb{C}^I \ \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad f, g \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{C}) \implies \lambda f + g, fg \in \mathcal{D}^n(I, \mathbb{C}) \tag{14.58}$$

Idem pour $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{C})$. Auquel cas

$$(\lambda f + g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + g^{(n)} \quad (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \tag{14.59}$$

14.3.2 Étude globale de la dérivation sur un intervalle

Le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis ne s'appliquent pas pour des fonctions à valeurs complexes, puisque les complexes n'ont pas de signe.

En effet, prenons par exemple la fonction $f \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} \end{array} \right.$. Nous avons $f(0) = f(2\pi) = 1$, f est continue sur $[0, 2\pi]$ et dérivable sur $]0, 2\pi[$. Toutes les hypothèses du théorème de Rolle sont réunis, néanmoins pour tout réel $t \in]0, 2\pi[$ $f'(t) = i\,\mathrm{e}^{it}$ et $|f'(t)| = 1$ donc f' ne s'annule pas.

Théorème 14.19. *Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{C})$. Alors f est constante sur I si et seulement si f' est nulle sur I.*

Démonstration. La preuve se fait en passant par les parties réelle et imaginaire, puisqu'elles sont à valeur dans $\mathbb{R}$. □

Proposition 14.17. Soit $f \in \mathbb{C}^I$. Si f est dérivable alors $\overline{f}$ est dérivable et $\left(\overline{f}\right)' = \overline{f'}$. Idem pour $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{C})$

Proposition 14.18. Soit $f \in \mathbb{C}^I$, on suppose que f est dérivable sur I et qu'elle ne s'annule pas. Alors $|f|$ est dérivable et

$$|f|' = \frac{\Re(f)\Re(f') + \Im(f)\Im(f')}{|f|} \tag{14.60}$$

Démonstration. On sait que $|f|^2 = \Re(f)^2 + \Im(f)^2$. Comme f est dérivable alors sa partie réelle et imaginaire le sont et donc $|f|$ l'est aussi. En dérivant $|f|^2$ on obtient la formule. □

14.4 Fonctions convexes

Les fonctions convexes sont étudiées dans ce chapitre car on va utiliser des résultats des deux premières sections. Cependant cela ne signifie pas que ce sont des fonctions dérivables. En général, elles ne le sont pas.

14.4.1 Notion de fonction convexe

14.4.1.1 Définition

Soit I un intervalle réel non vide et non réduit à un point.

Définition 14.7. Soit $f \in \mathbb{R}^I$. La fonction f est convexe si et seulement si

$$\forall (x_1,x_2) \in I^2\ \forall t \in [0\,;1] \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{14.61}$$

De la même manière la fonction f est concave si et seulement si

$$\forall (x_1,x_2) \in I^2\ \forall t \in [0\,;1] \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \ge tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{14.62}$$

Proposition 14.19. Soit $f \in \mathbb{R}^I$, f est concave si et seulement si $-f$ est convexe.

14.4.1.2 Inégalité de convexité

Théorème 14.20 (Inégalité de convexité ou de Jensen)**.** *Soient $f \in \mathbb{R}^I$ convexe, $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots x_n \in I$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!]\ \alpha_k \ge 0 \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k = 1 \tag{14.63}$$

Alors

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \in I \quad f\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k) \tag{14.64}$$

Démonstration par récurrence. Soit un naturel n non nul et la propriété $\mathcal{P}$ telle que $\mathcal{P}(n)$ "$\forall x_1, \dots x_n \in I\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $\forall k \in [\![1\,;n]\!]\ \alpha_k \geq 0 \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$ alors $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \in I\ f\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f(x_k)$".

Pour l'initialisation à $n = 1$, on a $\alpha_1 = 1 \geq 0$ alors $\alpha_1 x_1 = x_1 \in I$ et $f(\alpha_1 x_1) = f(x_1) = \alpha_1 f(x_1)$ alors $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soient $x_1, \dots, x_{n+1} \in I\ \forall \alpha_1, \dots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}$ tels que $\forall k \in [\![1, n+1]\!]\ \alpha_k \geq 0 \quad \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1$. Deux cas de figure se présentent :

— si $\alpha_{n+1} = 1$ les autres sont tous nuls et donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = x_{n+1} \in I \quad f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) = f(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k). \tag{14.65}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

— sinon, $\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k = 1 - \alpha_{n+1} \neq 0$ et donc

$$\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1} \tag{14.66}$$

$$= (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{1 - \alpha_{n+1}} x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1}. \tag{14.67}$$

On note pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$ $\beta_k = \frac{\alpha_k}{1-\alpha_{n+1}} \geq 0$. Alors $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1$. Par hypothèse de récurrence, $\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k \in I$. De plus $x_{n+1} \in I$, alors puisque I est un intervalle, il est convexe donc $(1 - \alpha_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k + \alpha_{n+1} x_{n+1} \in I$. En appliquant f qui est convexe on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leq (1 - \alpha_{n+1}) f\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k\right) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}). \tag{14.68}$$

Par hypothèse de récurrence, puisque pour tout k $\beta_k \geq 0$ et $\sum_{k=1}^{n} \beta_k = 1$ alors $f\left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \beta_k f(x_k)$. Puisque $1 - \alpha_{n+1} \geq 0$ on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leq (1 - \alpha_{n+1}) \sum_{k=1}^{n} \beta_k f(x_k) + \alpha_{n+1} f(x_{n+1}) \tag{14.69}$$

Par définition des β_k on obtient

$$f\left(\sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n+1} \alpha_k f(x_k). \tag{14.70}$$

Alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Dans tous les cas, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$ et $\mathcal{P}(1)$ est vrai donc par théorème de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel n non nul. □

14.4.1.3 Interprétation graphique

Soit une fonction f de I dans $\mathbb{R}$. La fonction f est convexe si et seulement si tout sous-arc du graphe de f est en dessous de la corde qui le sous-tend. Soient

$x_1, x_2 \in I$ et les points $M_1(x_1, f(x_1))$ et $M_2(x_2, f(x_2))$. Le segment $[M_1M_2]$ est l'ensemble des barycentres à coefficients dans $[0,1]$ de M_1 et M_2.

$$[M_1M_2] = \{tM_1 + (1-t)M_2 \mid t \in [0\,;1]\} \tag{14.71}$$

et il existe un point $M \in [M_1M_2]$ si et seulement si $M(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$.

Démonstration. La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $(x_1, x_2) \in I^2$ et tout $t \in [0\,;1]$, $f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$. Si pour tout $t \in [0\,;1]$, tout $x_1, x_2 \in I$ on note $M_1(x_1, f(x_1))$, $M_2(x_2, f(x_2))$, $M(t)(tx_1 + (1-t)x_2, f(tx_1 + (1-t)x_2))$ et $G(t)(tx_1 + (1-t)x_2, tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$ alors f est convexe si et seulement si l'ordonnée de $G(t)$ est inférieure à celle de $M(t)$. Finalement f est convexe si et seulement si pour tout point M_1, M_2 de la courbe de f l'arc $\widehat{M_1M_2}$ est sous la corde $[M_1M_2]$. □

14.4.2 Premières caractérisations des fonctions convexes

Théorème 14.21. *Soit une fonction f de I dans $\mathbb{R}$. Alors f est convexe si et seulement si pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et tout réel $t \in]0\,;1[$*

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{14.72}$$

Démonstration. Si f est convexe alors par définition on a pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et tout réel $t \in]0\,;1[$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{14.73}$$

Supposons aussi que pour tout $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et tout réel $t \in]0\,;1[$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{14.74}$$

Pour avoir la définition il manque

1. si $t = 0$ et si $x_1, x_2 \in I$ alors $f(tx_1 + (1-t)x_2) = f(x_2) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$;
2. si $t = 1$ et si $x_1, x_2 \in I$ alors $f(tx_1 + (1-t)x_2) = f(x_1) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$;
3. si $x_1 = x_2$ et si $t \in [0,1]$ alors $f(tx_1 + (1-t)x_2) = f(x_2) = f(x_2) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$;
4. si $x_1 > x_2$ et si $t \in]0,1[$ on pose $x'_1 = x_2$, $x'_2 = x_1$ et $t' = 1-t$ et on a

$$\begin{aligned} f(tx_1 + (1-t)x_2) &= f((1-t')x'_2 + t'x'_2) && (14.75)\\ &= (1-t')f(x'_2) + t'f(x'_1) && (14.76)\\ &= tf(x_1) + (1-t)f(x_2). && (14.77) \end{aligned}$$

Finalement puisque ces quatres conditions sont vérifiées, la fonction f est convexe. □

14.4.2.1 Caractérisation de l'épigraphe

Définition 14.8. Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On appelle épigraphe de f l'ensemble

$$\epsilon(f) = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid y \geq f(x)\}\,. \tag{14.78}$$

Définition 14.9. Soient $A \subset \mathbb{R}^2$, on dit que A est convexe si et seulement si tout segment reliant deux points de A est inclus dans A.

Théorème 14.22. *Soit $f \in \mathbb{R}^I$. La fonction f est convexe si et seulement si $\epsilon(f)$ est une partie convexe du plan $\mathbb{R}^2$.*

Démonstration. Supposons que f soit convexe. Soient alors M_1 et M_2 dans son épigraphe. Alors $y_1 \geq f(x_1)$ et $y_2 \geq f(x_2)$. Soit un point $M \in [M_1 M_2]$. Il existe un réel $t \in [0\,;1]$ tel que $M(tx_1+(1-t)x_2, ty_1+(1-t)y_2)$. Comme f est convexe on a $f(tx_1+(1-t)x_2) \leq tf(x_1)+(1-t)f(x_2) \leq ty_1+(1-t)y_2$. C'est à dire $f(x_M) \leq y_M$. Donc M est dans l'épigraphe de f. L'épigraphe de f est donc convexe.

Supposons ensuite que c'est l'épigraphe de f qui est convexe. Alors pour tout points M_1, M_2 de l'épigraphe, le segment $[M_1M_2] \subset \epsilon(f)$. Ce qui signifie que la corde $[M_1M_2]$ est au-dessus de l'arc $\widehat{M_1M_2}$. Alors f est convexe. $\square$

14.4.2.2 Caractérisation par les pentes des cordes

Théorème 14.23. *Soit $f \in \mathbb{R}^I$ convexe, alors*

$$\forall (a,b,c) \in I^1 \;\; a < b < c \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leq \frac{f(c)-f(b)}{c-b}. \tag{14.79}$$

Démonstration. On sait que $b \in \,]a\,;c[$ alors il existe un réel $t \in \,]0\,;1[$ tel que $b = ta+(1-t)c$ et donc $b-a = (1-t)(c-a)$ et $c-b = t(c-a)$. La fonction f est convexe alors $f(b) \leq tf(a)+(1-t)f(c)$. Alors $f(b)-f(a) \leq (1-t)(f(c)-f(a))$. Comme $b-a > 0$ on divise et on obtient la premièer inégalité :

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{1-t}{b-a}(f(c)-f(a)) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a}. \tag{14.80}$$

et on a aussi $f(c)-f(b) \geq -tf(a)-(1-t)f(c)+f(c) = t(f(c)-f(a))$. Comme $t = \frac{c-b}{c-a}$ on obtient $f(c)-f(b) \geq \frac{c-b}{c-a}(f(c)-f(a))$. Puisque $c-b > 0$ on divise et on a la deuxième inégalité

$$\frac{f(c)-f(b)}{c-b} \geq \frac{f(c)-f(a)}{c-a}. \tag{14.81}$$

$\square$

Théorème 14.24. *Soit $f \in \mathbb{R}^I$. La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $a \in I$, la fonction p_a:* $\left\{\begin{array}{ccc} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}\right.$ *est croissante.*

Démonstration. Supposons que f soit convexe. Soit $a \in I$, montrons que p_a croît. Soient $(x,x') \in I \backslash \{a\}^2$ tels que $x < x'$. La démarche repose sur l'utilisation du théorème **??**. Trois cas de figures se présentent :

1. $x < x' < a$ et dans ce cas le théorème nous dit que
$$\frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \leq \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(a)-f(x')}{a-x'} \tag{14.82}$$
et donc $p_a(x) \leq p_a(x')$;
2. $a < x < x'$ et dans ce cas le théorème nous dit que
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(x')-f(a)}{x'-a} \leq \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \tag{14.83}$$
et donc $p_a(x) \leq p_a(x')$;
3. $x < a < x'$ et dans ce cas le théorème nous dit que
$$\frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leq \frac{f(x')-f(x)}{x'-x} \leq \frac{f(x')-f(a)}{x'-a} \tag{14.84}$$
et donc $p_a(x) \leq p_a(x')$.

Dans tous les cas, on a montré que p_a était croissante.

Supposons maintenant que pour tout $a \in I$ la fonction p_a soit croissante. Soient alors $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et $t \in]0\,;1[$. Posons $y = tx_1 + (1-t)x_2 \in]x_1\,;x_2[$. Nous voulons démontrer que $f(y) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$. Par hypothèse la fonctions p_{x_1} est croissante donc
$$\frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \tag{14.85}$$
De plus $y - x_1 = (1-t)(x_2 - x_1)$. Alors l'inégalité devient
$$\frac{f(y)-f(x_1)}{(1-t)(x_2-x_1)} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}. \tag{14.86}$$
Comme $(1-t)(x_2 - x_1) > 0$ on peut simplifier et alors
$$f(y) \leq f(x_1) + (1-t)(f(x_2)-f(x_1)) = tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{14.87}$$
Par caractérisation, la fonction f est convexe. □

14.4.3 Caractérisation des fonctions convexes parmi les fonctions dérivables

En général, les fonctions convexes ne sont pas dérivables. Soit un intervalle réel I.

14.4.3.1 Caractérisation par la croissance de la dérivée

Théorème 14.25. *Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose que f est convexe et dérivable. Alors*
$$\forall (a,b) \in I^2 \;\; a < b \quad f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b). \tag{14.88}$$

Démonstration. Soient $(a,b) \in I^2$ tels que $a < b$ et $x \in]a\,;b[$. D'après le théorème **??** on a

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}. \tag{14.89}$$

On sait que f est dérivable et par passage à la limite en a^+ et en b^- dans l'inégalité on obtient le résultat. □

Théorème 14.26. *Soit $f \in \mathbb{R}^I$ dérivable, alors f est convexe si et seulement si f' est croissante.*

Démonstration. Si f est convexe alors d'après le théorème **??** la dérivée f' est croissante.

On suppose que f' est croissante. Soient $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 < x_2$ et $t \in]0\,;1[$. Posons $y = tx_1 + (1-t)x_2 \in]x_1\,;x_2[$. Nous voulons démontrer que $f(y) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$. La fonction f est continue sur $[x_1\,;y]$ et dérivable sur $]x_1\,;y[$. En appliquant l'égalité des accroissements finis, il existe un réel $c_1 \in]x_1\,;y[$ tel que

$$f(y) - f(x_1) = f'(c_1)(y-x_1) = f'(c_1)(1-t)(x_2-x_1). \tag{14.90}$$

De la même façon f est continue sur $[y\,;x_2]$ et dérivable sur $]y\,;x_2[$. En appliquant l'égalité des accroissements finis, il existe un réel $c_2 \in]y\,;x_2[$ tel que

$$f(x_2) - f(y) = f'(c_2)(x_2-y) = f'(c_2)t(x_2-x_1). \tag{14.91}$$

Comme $x_1 < c_1 < y < c_2 < y_2$, comme f' croît on a $f'(c_1) \leq f'(c_2)$. Comme $0 < t < 1$ et $x_1 < x_2$ on divise et on obtient

$$f'(c_1) = \frac{f(y)-f(x_1)}{(1-t)(x_2-x_1)} \quad f'(c_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{t(x_2-x_1)}. \tag{14.92}$$

Alors

$$\frac{f(y)-f(x_1)}{(1-t)(x_2-x_1)} \leq \frac{f(x_2)-f(x_1)}{t(x_2-x_1)}. \tag{14.93}$$

Soit alors, puisque $t > 0, 1-t > 0$ et $x_2 - x_1 > 0$,

$$t(f(y)-f(x_1)) \leq (1-t)(f(x_2)-f(y)). \tag{14.94}$$

Finalement

$$f(y) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2). \tag{14.95}$$

Par caractérisation des fonctions convexes, la fonction f est convexe. □

Corollaire 14.26.1. *Soit $f \in \mathbb{R}^I$. Si f est deux fois dérivable sur I alors f est convexe si et seulement si f'' est positive.*

14.4.3.2 Caractérisation par les tangentes

Théorème 14.27. *Soit $f \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})$. La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $x, a \in I$, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. C'est-à-dire que pour tout $a \in I$, la courbe de f est au-dessus de sa tangente en a.*

Démonstration. Supposons que f soit convexe. Soit $a \in I$.

— Si $x = a$ alors la proposition est vraie $f(a) \geq f(a)$;

— si $x < a$ alors d'après le théorème **??** $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq f'(a)$ et donc comme $x - a < 0$ on a $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$;
— si $x > a$ alors d'après le théorème **??** $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq f'(a)$ et donc comme $x - a > 0$ on a $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$.

Supposons maintenant que pour tout $(x, a) \in I^2$, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$. Pour montrer que f est convexe, on va montrer que f' est croissante. Soit $(a, b) \in I^2$ tels que $a \leq b$ alors

$$f(b) \geq f(a) + f'(a)(b-a); \tag{14.96}$$

$$f(a) \geq f(b) + f'(b)(a-b). \tag{14.97}$$

En ajouant ces deux inégalités, on a

$$f(b) + f(a) \geq f(a) + f(b) + (f'(a) - f'(b))(b-a), \tag{14.98}$$

alors $(f'(a) - f'(b))(b-a) \leq 0$ et comme $b - a \geq 0$ alors $f'(a) \leq f'(b)$ et donc f' est croissante. Finalement f est convexe. $\square$

14.5 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Soit I un intervalle réel qui contient au moins deux points. Soit $f \in \mathbb{R}^I$, pas forcèment dérivable.

14.5.1 Définition de la suite et propriétés générales

Pour pouvoir définir une suite u par $\begin{cases} u_0 = a \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ il faut supposer que I est stable par f, c'est à dire que $f(I) \subset I$. On supposera également que I est fermé.

Proposition 14.20. On suppose que

1. f est continue ;
2. I est stable par f ;
3. I est fermé.

Soit $a \in I$ et u définie par $\begin{cases} u_0 = a \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. On suppose que u tend vers ℓ. Alors $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$.

Démonstration. Grâce à la deuxième hypothèse, la suite u est définie. Tous les termes de u sont dans I et I est fermé (d'après la troisième hypothèse), donc on écrira des inégalités larges, par exemple

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a \leq u_n \leq b. \tag{14.99}$$

On sait que la suite u tend vers ℓ par hypothèse. Par passage à la limite dans l'inégalité on obtient que $\ell \in I$. D'ailleurs

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n). \tag{14.100}$$

On sait que $\lim u_{n+1} = \ell$ puisque $(u_{n+1})_n$ est une sous-suite de u. Comme f est continue d'après la première hypothèse, alors en passant à la limite $\ell = f(\ell)$. $\square$

Sous les trois premières hypothèses, si la fonction f n'admet pas de point fixe dans I, c'est à dire $(\forall x \in I \ f(x) \neq x)$ alors la suite u est divergente.

14.5.2 Cas où f est monotone

14.5.2.1 f est croissante sur I

Proposition 14.21. On suppose que I est stable par f et que f est croissante sur I. Alors pour tout $a \in I$, la suite définie par $\begin{cases} u_0 = a \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ est monotone.

Démonstration.

1. si $u_0 \leq u_1$, on montre par récurrence la sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ "$u_n \leq u_{n+1}$". $\mathcal{P}(0)$ est vraie par hypothèse. Supposons que pour un $n \in \mathbb{N}$ donné, $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée, alors puisque f est croissante on a $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Alors par théorème de récurrence la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite u croît.
2. si $u_0 \geq u_1$, on montre de la même manière que pour tout naturel n $u_n \geq u_{n+1}$. La suite u décroît.

□

Si u_0 est un point fixe de f, alors u est constante égale à u_0. Sous les hypothèses de la proposition **??**, il suffit de vérifier si la suite est majorée ou minorée pour savoir si elle converge.

14.5.2.2 f est décroissante sur I

Proposition 14.22. On suppose que I est stable par f et que f est décroissante sur I. Soit la suite définie pour tout $a \in I$ par $\begin{cases} u_0 = a \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Alors les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens opposés.

Démonstration. L'application f est décroissante, donc la composée $f \circ f$ est aussi décroissante. Pour tout naturel n $u_{2n+2} = f \circ f(u_{2n})$. D'après la proposition **??** la suite extraite (u_{2n}) est monotone. Deux cas de figure se présentent

1. si (u_{2n}) est croissante alors pour tout naturel n on a $u_{2n} \leq u_{2n+2}$ et comme f est décroissante $f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2})$ c'est à dire $u_{2n+1} \geq u_{2n+3}$. Alors la suite extraite (u_{2n+1}) est décroissante ;
2. si (u_{2n}) est décroissante on montre de la même manière que (u_{2n+1}) est croissante.

□

On étudie la convergence des suites extraites en regardant si elles sont majorées ou minorées. Si elles convergent toutes les deux vers la même limite alors la suite u converge aussi vers cette limite. Si l'une au moins des deux est divergente ou si leurs limites sont différentes, alors la suite u diverge.

14.5.3 Cas où f est dérivable sur I

Proposition 14.23. On suppose que I e st stable par f et que f est dérivable sur I. On suppose aussi qu'il existe un réel M strictement positif qui borne f'. Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ et ℓ un point fixe de f.

Alors pour tout naturel n

$$|u_{n+1} - \ell| \leq M\,|u_n - \ell|\,; \tag{14.101}$$
$$|u_n - \ell| \leq M^n\,|u_0 - \ell|\,. \tag{14.102}$$

En particulier si $M < 1$ alors u tend vers ℓ.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le deuxième corollaire de l'inégalité des accroissements finis **??**. Soit un naturel n, alors

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq M\,|u_n - \ell|\,. \tag{14.103}$$

La deuxième inégalité se démontre par une récurrence SUR $n \in \mathbb{N}$. Si $M < 1$ alors la suite (M^n) tend vers zéro et par théorème d'encadrement la suite u tend vers ℓ. □

Proposition 14.24. On suppose que f est dérivable et que I est stable par f. Soit $\ell \in I$ un point fixe de f. On suppose que $|f'(\ell)| > 1$.

Soit u la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, alors u ne converge vers ℓ que si elle est stationnaire égale à ℓ.

Démonstration. S'il existe un rang n_0 à partir duquel u vaut ℓ alors u est stationnaire et tend vers ℓ.

On démontre la suite par l'absurde.

Sinon, alors pour tout naturel n $u_n \neq \ell$. Soit la suite $v = |u - \ell| > 0$. Supposons que u tend vers ℓ alors v tend vers zéro. On sait que $|f'(l)| > 1$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $|f'(\ell)| > a > 1$. Pour tout naturel n $v_n > 0$ donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left|\frac{f(u_n)-f(\ell)}{u_n-\ell}\right| \to |f'(\ell)|$. Comme $|f'(\ell)| > a$ il existe un naturel n_0 à partir duquel $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq a$. Alors par récurrence immédiate pour tout naturel p non nul $v_{n_0+p} \geq a^p v_{n_0}$.

Or $\lim p \to \infty v_{n_0+p} = 0$ par hypothèse, mais comme $a > 1$ $\lim\limits_{p\to\infty} a^p v_{n_0} = +\infty$. On aboutit à une absurdité. La suite u ne tend pas vers ℓ. □

14.5.4 Étude d'un exemple

Considérons la fonction $f\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 + \frac{1}{x} \end{array}\right.$. Deux intervalles sont possibles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$. Or $f(-1) = 0$ donc $]-\infty\,;0[$ n'est pas stable par f. On travaille $]0\,;+\infty[$. La fonction f est dérivable et sa dérivée est strcitement négative, alors f est strictement décroissante. De plus

$$f(]0\,;+\infty[) =]1\,;+\infty[\,; \tag{14.104}$$
$$f(]1\,;+\infty[) =]1\,;2[\,; \tag{14.105}$$
$$f(]1\,;2[) =]3/2\,;2[\subset]1\,;2[\,. \tag{14.106}$$

Alors l'intervalle $I = [1\,;2]$ est stable par f.

Soit la suite définie pour tout naturel n $u_{n+1} = f(u_n)$ et par $u_0 = a > 0$. Déjà $u_2 \in I$ et I est stable par f (on l'a choisit exprès). Pour tout naturel $n \geq 2$, $u_n \in I$. La suite u est bornée. La fonction f est décroissante donc les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens contraires. Comme u est bornées, elles sont bornées donc elles convergent. On pourrait calculer leurs limites et vérifier que c'est la même. Si u tend vers ℓ, alors $\ell \in I$, et de plus $f(\ell) = \ell$. Lorsqu'on résoud l'équation, la seule solution possible est $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On pose $J = \left[\frac{3}{2}\,;2\right]$, qui est stable par f. Pour tout $n \geq 3$, $u_n \in J$. De plus $\ell \in J$.

$$\forall x \in J \quad |f'(x)| \leq \frac{4}{9}, \tag{14.107}$$

et d'après l'inégalité des accroissements finis on a

$$\forall n \geq 3 \quad |u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9}\,|u_n - \ell|\,. \tag{14.108}$$

Alors

$$\forall n \geq 3 \quad |u_n - \ell| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-3} |u_3 - \ell|\,. \tag{14.109}$$

En passant à la limite dans l'inégalité, u tend vers $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

14.5.5 Application à l'approximation d'un zéro ou d'un point ixe d'une fonction

Notons déjà que les problèmes sont équivalents, puisqu'un zéro de la fonction f est un point fixe de la fonction $g = \mathrm{Id} - f$ et un point fixe de g est un zéro de f. Soient deux points distincts de $\mathbb{R}$ a et b, $I = [a\,;b]$ et les fonctions continues $f \in C(I)$, $g = \mathrm{Id} - f$. On définit la suite u par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = g(u_n)$. Si cette suite converge vers ℓ, alors ℓ est un point fixe de g et un zéro de f. Mais cela ne fonctionne que si u converge.

14.5.5.1 Méthode de Newton

On modifie la fonction g pour s'assurer de la convergence de la suite u avec quelques hypothèses sur f. Soit $g\colon \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{cases}$ en supposant que f est dérivable et que f' ne s'annule pas. Plus précisément on pose

1. $f(a)f(b) < 0$, c'est à dire que f change de signe sur I ;
2. f est strictement croissante ou décroissante (on supposera que f est strictement décroissante dans la suite).

La fonction f est continue et $f(a)f(b) < 0$ si et seulement si f s'annule au moins une fois sur $\mathring{I}$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires. La deuxième hypothèse entraîne que f est strictement monotone, alors f ne peut s'annuler qu'une et une seule fois dans $\mathring{I}$. Notons c cet unique zéro de f. Construisons une suite u qui tend vers c. Soit $u_0 \in [a\,;b]$ et $u_1 = g(u_0)$. La tangente à la courbe de f en u_0 s'exprime comme

$$y = f'(u_0)(x - u_0) + f(u_0). \tag{14.110}$$

La tangente en u_0 s'annule au point d'abcisse $x = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)} = g(u_0)$. Cependant, il n'est pas assuré que $g(u_0) \in I$. On doit supposer en plus que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et qu'elle est convexe. Si $f(u_0) < 0$ on peut encore avoir $g(u_0) \notin I$, alors on suppose que $f(u_0) \geq 0$. Puisque $f(c) = 0$ et puisque f est décroissante alors $u_0 \leq c$ et $g(u_0) = u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)} \geq u_0$. La fonction f est convexe alors $\mathcal{C}_f$ est au dessus de toutes ses tangentes. C'est-à-dire en particulier en u_0 :

$$\forall x \in I \quad f(x) \geq f(u_0) + (x - u_0)f'(u_0). \tag{14.111}$$

En $x = c$, on a

$$0 \geq f(u_0) + (c - u_0)f'(u_0), \tag{14.112}$$

et comme $f'(u_0) < 0$ on divise et on obtient

$$0 \geq c - g(u_0). \tag{14.113}$$

Comme $u_1 = g(u_0)$ on a $u_0 \geq u_1 \geq c$. Finalement on s'est rapproché de c. Comparons $|u_1 - c|$ et $|u_0 - c|$:

$$|u_1 - c| = \left| u_0 - \frac{f(u_0)}{f'(u_0)} - c \right| = \frac{|f'(u_0)u_0 - f(u_0) - f'(u_0)c|}{|f'(u_0)|} \tag{14.114}$$

$$= \frac{|f(c) - f(u_0) - f'(u_0)(c - u_0)|}{|f'(u_0)|}. \tag{14.115}$$

En attendant les formules de Taylor, on admet qu'il existe $d \in]u_0\,;c[$ tel que

$$|f(c) - f(u_0) - f'(u_0)(c - u_0)| = |f''(d)| \frac{(c - u_0)^2}{2}, \tag{14.116}$$

alors

$$|u_1 - c| = \frac{(c - u_0)^2}{2} \frac{|f''(d)|}{f'(u_0)}. \tag{14.117}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I donc il existe un réel M qui borne f' :

$$\forall x \in [a\,;b] \quad |f'(x)| \leq M. \tag{14.118}$$

Comme f' est continue sur un segment, il existe $(\alpha, \beta) \in [a\,;b]^2$ tel que :

$$\forall x \in [a\,;b] \quad f'(\alpha) \leq f'(x) \leq f'(\beta) < 0. \tag{14.119}$$

On pose $m = -f'(\beta) > 0$ et on a

$$\forall x \in [a\,;b] \quad |f'(x)| \geq m. \tag{14.120}$$

Alors

$$|u_1 - c| \leq \frac{M}{2m} |u_0 - c|^2, \tag{14.121}$$

en posant $k = \frac{M}{2m}$ et en itérant

$$|u_n - c| \leq k^{2^n - 1} |u_0 - c|^{2^n}. \tag{14.122}$$

C'est intéressant lorsque $k < 1$ et on parle dans ce cas de convergence quadratique. On construit par récurrence une suite u telle que pour tout naturel n, $u_{n+1} = g(u_n)$. Si $k < 1$ alors $\lim u = c$. On dispose d'une majoration de $|u_n - c|$ par récurrence donc si on approche c par u_n avec n assez grand, on a une majoration de l'erreur commise.

Chapitre 15

Groupe, anneau, corps & arithmétique

Sommaire

15.1 Groupe

15.1.1 Notion de loi de composition interne

15.1.1.1 Définition

Définition 15.1. Soit E un ensemble quelconque, on appelle loi de composition interne sur E toute application $* : E \times E \longmapsto E$. Pour $x, y \in E$ on note $x * y$.

15.1.1.2 Partie stable par une loi de composition interne

Définition 15.2. Soit $(E, *)$ un couple où E est un ensemble et $*$ une loi de composition interne sur E. On dit que c'est un magma. Soit A une partie de E. On dit que la partie A est stable pour la loi $*$ si et seulement si pour tout $x, y \in A$ $x * y \in A$. On dispose alors de la restriction $*_A : A \times A \longmapsto A$. On l'appelle loi induite sur A par la loi $*$.

15.1.1.3 Qualités éventuelles d'une loi de composition interne

Soit le magma $(E, *)$. Les qualités éventuelles sont les suivantes

1. la loi $*$ est commutative si et seulement si
$$\forall (x, y) \in E^2 \quad x * y = y * x; \tag{15.1}$$
2. la loi $*$ est associative si et seulement si
$$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad x * (y * z) = (x * y) * z, \tag{15.2}$$
qu'on pourra noter $x * y * z$.

On dit que E admet un élément neutre pour $*$ lorsqu'il existe un élément $e \in E$ tel que pour tout élément $x \in E$, $x * e = e * x = x$. Soit $e \in E$, alors

— e est neutre à gauche si et seulement si $\forall x \in E \quad e * x = x$;

— e est neutre à droite si et seulement si $\forall x \in E \quad x * e = x$.

e est un élément neutre si et seulement si e est neutre à gauche et e est neutre à droite.

Proposition 15.1. Un élément neutre, s'il existe, est unique.

Démonstration. Supposons, qu'il en existe deux e_1, e_2. Alors $e_1 * e_2 = e_1$ puisque e_2 est neutre donc neutre à droite. Puisque e_1 est neutre donc neutre à gauche, on a aussi $e_1 * e_2 = e_2$ donc finalement $e_1 = e_2$. □

15.1.1.4 Propriétés élémentaires

Soit le magma $(E, *)$. On suppose que $*$ est associative et que e est le neutre de E.

Définition 15.3. Soit $x \in E$. On dit que x est symétrisable à gauche s'il existe $x' \in E$ tel que $x' * x = e$. De la même manière x est symétrisable à droite s'il existe $x'' \in E$ tel que $x * x'' = e$.

Proposition 15.2. Soit $x \in E$. Si x admet un symétrique à droite x' et un symétrique à gauche x'' alors $x' = x''$. On a donc $x * x' = x' * x = e$. On dit dans ce cas que x est inversible et x' est l'inverse de x.

Démonstration. On sait par hypothèse que $x' * x = e$ et que $x * x'' = e$. Alors $x' * (x * x'') = x' * e = x'$ et comme $*$ est associative on a
$$x' = x' * (x * x'') = (x' * x) * x'' = e * x'' = x''. \tag{15.3}$$
□

Proposition 15.3. Soit $x \in E$. Si x est inversible alors l'inverse est unique et on le note x^{-1}.

Démonstration. Soient x' et x'' deux inverses de x, alors x' est inversible à gauche et on a $x' * x = e$. On compose par x'' à droite et on a $x' * (x * x'') = e * x''$. Alors $x' * e = x''$ donc $x' = x''$. □

Proposition 15.4. Soit $x \in E$. Si x est inversible d'inverse x^{-1} alors celui-ci est inversible d'inverse x, $(x^{-1})^{-1} = x$.

Démonstration. On sait que $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ donc x^{-1} est inversible et $x^{-1} * (x^{-1})^{-1} = e$ en composant par x à gauche on a $(x * x^{-1}) * (x^{-1})^{-1} = x * e$ d'où le résultat. □

Proposition 15.5. Soient $x, y \in E$ inversibles, d'inverse respectif x^{-1} et y^{-1}. Alors $x * y$ est inversible d'inverse $y^{-1} * x^{-1}$.

Démonstration.

$$(x * y) * (y^{-1} * x^{-1}) = x * (y * y^{-1}) * x^{-1} = x * x^{-1} = e; \tag{15.4}$$

$$(y^{-1} * x^{-1}) * (x * y) = y^{-1} * (x^{-1} * x) * y = y^{-1} * y = e. \tag{15.5}$$

□

Définition 15.4. Soit $a \in E$. On dit que a est simplifiable à droite dans E si

$$\forall x, y \in E \quad x * a = y * a \implies x = y. \tag{15.6}$$

On dit que a est simplifiable à gauche dans E si

$$\forall x, y \in E \quad a * x = a * y \implies x = y. \tag{15.7}$$

On dit que a est simplifiable ou régulier s'il est simplifiable à droite et à gauche.

Proposition 15.6. Tout élément inversible est régulier.

Démonstration. Soit $a \in E$ inversible, et notons a^{-1} son inverse. Soient $x, y \in E$ tels que $x * a = y * a$. Alors

$$(x * a) * a^{-1} = (y * a) * a^{-1} \tag{15.8}$$

$$x * (a * a^{-1}) = y * (a * a^{-1}) \tag{15.9}$$

$$x * e = y * e \tag{15.10}$$

$$x = y. \tag{15.11}$$

On a montré que a est simplifiable à droite, on peut monter de la même manière que a est simplifiable à gauche. □

15.1.1.5 Notations usuelles

Notation multiplicative La loi est notée $\cdot$, pour $a, b \in E$ on a $a * b = ab$. Le neutre est noté 1 et le symétrique de a est noté a^{-1}.

Notation additive La loi est notée $+$, pour $a, b \in E$ on a $a * b = a + b$. Le neutre est noté 0 et le symétrique de a est noté $-a$. La notation additive est en général réservée au cas où la loi est commutative.

Itérés d'un élément Soit $x \in E$. Pour un naturel n non nul, si la loi $*$ est commutative on définit $x * \ldots * x = *^n x = x^n$. Par convention on pose $x^0 = e$ et par récurrence $x^{n+1} = x * x^n$. Si x est inversible, on peut définir les itérés pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ par $x^n = (x^{-1})^{-n}$.

15.1.1.6 Premiers exemples

Soit un ensemble E, E^E est l'ensemble des applications de E dans E. La loi de composition $\circ$ est une loi de composition interne sur E^E. Elle est associative et Id est son élément neutre. Elle n'est en revanche pas commutative et tous les élément de E^E ne sont pas inversibles. Les lois habituelles $+$ et $\times$ sont des lois associatives et commutatives sur $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$. 0 est le neutre de $+$ et 1 est le neutre de $\times$.

Soit E un ensemble. $\mathfrak{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E. Les opérations $\bigcap$ et $\bigcup$ sont des lois de composition internes sur $\mathfrak{P}(E)$. Elles sont toutes deux associatives et commutatives. E est le neutre pour $\bigcap$ et $\emptyset$ est le neutre de $\bigcup$.

15.1.2 Notion de groupe

15.1.2.1 Définition

Définition 15.5. Soit $(G, *)$ un magma. On dit que $(G, *)$ est un groupe si
- la loi $*$ est associative ;
- G admet un neutre pour $*$, noté e ;
- tout élément de G est inversible par $*$.

Définition 15.6. Un groupe commutatif ou abélien est un groupe pour lequel la loi est commutative.

15.1.2.2 Propriétés

Proposition 15.7. Un groupe n'est jamais vide. Puisqu'il contient au moins son neutre.

Proposition 15.8. L'élément neutre d'un groupe est unique.

Proposition 15.9. Tout élément d'un groupe admet un et un seul inverse.

Proposition 15.10. Tout élément d'un groupe est régulier. Puisque tout élément d'un groupe est inversible.

15.1.2.3 Exemples

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes. Par contre $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{R}, \times)$ ne sont pas des groupes.

Soit E un ensemble et $\sigma(E)$ l'ensemble des permutations de E. Alors $(\sigma(E), \circ)$ est un groupe. Mais $(E^E, \circ)$ n'est pas un groupe puisqu'il existe des application de E dans E qui ne sont pas inversibles.

Si $(G, *_1)$ et $(H, *_2)$ sont deux groupes alors $(G \times H, *)$ est un groupe, le groupe produit, où $*$ est la loi de composition interne définie par

$$\forall (g_1, g_2) \in G^2 \ \forall (h_1, h_2) \in H^2 \quad (g_1, h_1) * (g_2, h_2) = (g_1 *_1 g_2, h_1 *_2 h_2). \quad (15.12)$$

La loi $*$ est appelée la loi produit.

Soit E un ensemble. Si on note Δ la différence symétrique alors $(\mathfrak{P}(E), \Delta)$ est un groupe abélien. Avec

$$\forall A, B \in \mathfrak{P}(E) \quad A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \tag{15.13}$$

L'ensemble vide est le neutre de Δ et l'inverse de chaque élément est l'élément lui-même

$$\forall A \in \mathfrak{P}(E) \quad A \Delta \emptyset = A \setminus \emptyset = A; \tag{15.14}$$
$$\forall A \in \mathfrak{P}(E) \quad A \Delta A = A \setminus A = \emptyset. \tag{15.15}$$

15.1.3 Sous-groupe

15.1.3.1 Définition

Définition 15.7. Soit $(G, *)$ un groupe. Une partie H de G est un sous-groupe si

— H est stable pour la loi $*$;

— H muni de la loi induite $*_H$ est un groupe.

15.1.3.2 Propriétés

Soit $(G, *)$ un groupe et H un sous-groupe de G.

Proposition 15.11. Si G est un groupe abélien, alors H est un groupe abélien.

Démonstration. Soient $g, h \in H$ alors $h *_H g = h * g$ par définition de $*_H$ et comme G est abélien $h * g = g * h$ donc $h *_H g = g *_H h$. □

Proposition 15.12. $e_H = e_G$.

Démonstration. Comme H et G sont des groupes, on a $e_H * e_H = e_H *_H e_H = e_H = e_H * e_G$. Donc $e_H * e_H = e_H * e_G$ et comme e_H est simplifiable on a $e_H = e_G$. □

Proposition 15.13. Tout élément de H admet le même symétrique dans H et dans G.

Démonstration. Soit $h \in H$. H est un groupe donc il existe un élément $h' \in H$ qui est le symétrique de h dans H. $h \in G$ et G est un groupe donc il existe un élément $h'' \in H$ qui est le symétrique de h dans G. Ainsi

$$h *_H h' = h' *_H h = e_H; \tag{15.16}$$
$$h * h' = h' * h = e_H. \tag{15.17}$$

De plus

$$h * h'' = h'' * h = e_H. \tag{15.18}$$

Par unicité du symétrique dans G on a forcément $h' = h''$. □

15.1.3.3 Caractérisation des sous-groupes

Théorème 15.1. *Soit $(G, *)$ un groupe et H une partie de G. Il y a équivalence entre*

1. *H est un sous-groupe de G ;*
2. *$H \neq \emptyset$, $H \subset G$, H est stable pour la loi $*$ et stable par passage au symétrique ;*
3. *$H \neq \emptyset$, $H \subset G$, $\forall x, y \in H$ $x * y^{-1} \in H$.*

Démonstration. 1 $\implies$ 2 Si H est un sous-groupe de G alors par définition H est non vide, $H \subset G$ et H est stable par la loi de G. Soit $x \in H$ alors son symétrique dans H est le même que dans G (d'après la proposition **??**). Donc son symétrique dans G est dans H. H est donc stable par passage au symétrique.

2 $\implies$ 3 Il faut juste démontrer le troisième sous-point. Soit $(x, y) \in H^2$, H est stable par symétrie donc $y^{-1} \in H$. x et y^{-1} sont dans H et comme H est stable pour la loi $*$, on a $x * y^{-1} \in H$.

3 $\implies$ 1 Déjà $H \subset G$ et H est non vide. Alors il existe $h \in H$ tel que $e_G = h * h^{-1}$ alors $e_G \in H$. Soit $y \in H$ alors $e_G * y^{-1} = y^{-1} \in H$. Tout élément de H admet un symétrique dans H. Soit $x \in H$ alors comme $y^{-1} \in H$ on a $x * y = x * (y^{-1})^{-1} \in H$. H est stable par $*$ donc on peut considérer le couple $(H, *_H)$ où $*_H$ est la loi induite. Montrons que $(H, *_H)$ est un groupe. La loi $*_H$ est associative puisque $*$ l'est. Soit $h \in H$ alors

$$h *_H e_G = h * e_G = h; \tag{15.19}$$

$$e_G *_H h = e_G * h = h. \tag{15.20}$$

Donc e_G est neutre dans H. Tout élément de H admet un symétrique dans H. Alors $(H, *_H)$ est un groupe.

□

15.1.3.4 Exemples de sous-groupes

Soit $(G, *)$ un groupe, alors les sous-groupes dits triviaux sont G et $\{e_G\}$. $\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$, c'est à dire $n\mathbb{Z} = \{np \mid p \in \mathbb{Z}\}$. $\mathbb{U}$ et $\mathbb{U}_n$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Soit $(G, *)$ un groupe, H_1 et H_2 deux sous-groupes de $(G, *)$. Soit $H = H_1 \cap H_2$ alors c'est aussi un sous-groupe de G.

Démonstration. Puisque $H_1 \subset G$ et $H_2 \subset G$ alors $H \subset G$. On sait que $e_G \in H_1$ et $e_G \in H_2$ donc $e_G \in H$. Il est non vide. Soit ensuite $(x, y) \in H^2$ alors ils sont dans H_1 et dans H_2. Alors $x * y^{-1}$ est dans H_1 et dans H_2 donc il est dans H. Par caractérisation, H est un sous-groupe de $(G, *)$. □

En général l'union de sous-groupes n'est pas un sous-groupe.

15.1.4 Morphismes de groupes

15.1.4.1 Définition

Définition 15.8. Soient $(G, *)$ et $(H, \#)$ deux groupes. Une application $f : (G, *) \longrightarrow (H, \#)$ est un morphisme (ou homo-morphisme) de groupes du groupe G sur le groupe H si et seulement si

$$\forall x, y \in G \quad f(x * g) = f(x) \# f(y). \tag{15.21}$$

Soit $f : (G, *) \longrightarrow (H, \#)$ un morphisme de groupes. On dit que
— f est un isomorphisme si f est bijective ;
— f est un endomorphisme si $G = H$ et $* = \#$;
— f est un automorphisme si $G = H$, $* = \#$ et si f est bijective.

Définition 15.9. Soient $(G, *)$ et $(H, \#)$ deux groupes. On dit que $(G, *)$ et $(H, \#)$ sont isomorphes si et seulement s'il existe un isomorphisme de groupe de $(G, *)$ sur $(H, \#)$.

15.1.4.2 Propriétés

Proposition 15.14. Soient $(G, *)$, $(H, \#)$ et $(I, \$)$ trois groupes. Soient $f : (G, *) \longrightarrow (H, \#)$ et $g : (H, \#) \longrightarrow (I, \$)$ deux morphismes de groupes. Alors la composée $g \circ f$ est un morphisme de groupe de $(G, *)$ sur $(I, \$)$.

Démonstration. Déjà $g \circ f$ es bien définie et pour tout $(x, y) \in G^2$ on a

$$g \circ f(x * y) = g(f(x) \# f(y)) = g \circ f(x) \$ g \circ f(y) \tag{15.22}$$

□

Proposition 15.15. Soit f un isomorphisme de $(G, *)$ sur $(H, \#)$. Alors la réciproque f^{-1} est un isomorphisme de $(H, \#)$ sur $(G, *)$.

Démonstration. f est un isomorphisme donc f est bijective et sa réciproque existe. On sait que $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_H$ donc pour tout $(x, y) \in H^2$ on a

$$f^{-1}(x \# y) = f^{-1}(f \circ f^{-1}(x) \# f \circ f^{-1}(y)) \tag{15.23}$$
$$= f^{-1}[f(f^{-1}(x) * f^{-1}(y))] \tag{15.24}$$
$$= f^{-1}(x) * f^{-1}(y). \tag{15.25}$$

C'est donc bien un morphisme de $(H, \#)$ sur $(G, *)$. Comme f est bijective alors f^{-1} est aussi bijective. Finalement f^{-1} est bien un isomorphisme. □

Proposition 15.16. Soit $(G, *)$ un groupe. Alors $\mathbf{Aut}\,(G)$ (ensemble des automorphismes de G) est un sous-groupe de l'ensemble des permutations de G muni de la composition, $(\sigma(G), \circ)$.

Démonstration. Déjà $\mathbf{Aut}\,(G) \subset \sigma(G)$ car par définition les automorphismes de G sont des bijections de G dans G.

— L'application identité est une bijection de G dans lui-même et

$$\forall (x, y) \in G^2 \quad \mathrm{Id}_G(x * y) = x * y = \mathrm{Id}_G(x) * \mathrm{Id}_G(y), \tag{15.26}$$

alors l'identité est un endomorphisme de $(G, *)$. Comme c'est une bijection, alors $\mathrm{Id}_G \in \mathbf{Aut}\,(G)$.

— Soient f et g deux automorphismes de G. Déjà $f \circ g^{-1}$ est une bijection de G dans G. D'après la proposition **??**, g^{-1} est un isomorphisme. D'après la proposition **??**, $f \circ g^{-1}$ est un morphisme. Comme f et g^{-1} sont bijectives alors $f \circ g^{-1}$ est bijective donc c'est un isomorphisme de G dans G. Finalement c'est un automorphisme.

Par caractérisation des sous-groupes, on conclue en écrivant que **Aut** (G) est un sous-groupe de $\sigma(G)$. □

Théorème 15.2. *Soit f un morphisme de groupe de $(G,*)$ vers $(H,\#)$, alors*

$$f(e_G) = e_H; \tag{15.27}$$

$$\forall x \in G \quad f(x^{-1}) = f(x)^{-1}; \tag{15.28}$$

$$\forall (x,y) \in G^2 \quad f(x * y^{-1}) = f(x)\#f(y)^{-1}; \tag{15.29}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \forall (x_1,\dots,x_n) \in G^n \quad f(x_1 * \dots * x_n) = f(x_1)\#\dots\#f(x_n); \tag{15.30}$$

$$\forall k \in \mathbb{Z} \ \forall x \in G \quad f(x^k) = f(x)^k. \tag{15.31}$$

Démonstration.

1. f est un morphisme donc $f(e_G * e_G) = f(e_G)\#f(e_G)$. Comme e_G est le neutre, on a $f(e_G * e_G) = f(e_G)$. Comme e_H est le neutre de H on a $f(e_G * e_G) = f(e_G)\#e_H$. Donc $f(e_G)\#f(e_G) = f(e_G)\#e_H$. Comme H est un sous-groupe, tous ses éléments sont simplifiables alors $f(e_G) = e_H$.
2. Soit $x \in G$, puisque f est un morphisme alors
$$f(x)\#f(x^{-1}) = f(x * x^{-1}) = f(e_G) = e_H, \tag{15.32}$$
d'après le premier point. De même on montre $f(x^{-1})\#f(x) = e_H$. Alors $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
3. Soient $(x,y) \in G^2$ alors comme f est un morphisme, on a
$$f(x * y^{-1}) = f(x)\#f(y^{-1}) = f(x)\#f(y)^{-1}, \tag{15.33}$$
d'après le deuxième point.
4. On démontre par récurrence à partir de la définition
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad P(n)\text{"}\forall (x_1,\dots,x_n) \in G^n \quad f(x_1 * \dots * x_n) = f(x_1)\#\dots\#f(x_n)\text{"} \tag{15.34}$$
5. Si $k \in \mathbb{N}$ on applique le quatrième point pour $x_k = x$, sinon on a
$$f(x^k) = f((x^{-1})^{-k}) = f(x^{-1})^{-k} = (f(x)^{-1})^{-k} = f(x)^k. \tag{15.35}$$

□

15.1.4.3 Image et noyau d'un morphisme de groupes

Soient $(G,*)$ et $(H,\#)$ deux groupes et f un morphisme de G sur H.

Théorème 15.3. *Soit G' un sous-groupe de G. Alors l'image directe $f(G')$ est un sous-groupe de H.*

Démonstration. — $f(G') \subset H$ par définition ;

— G' est un sous-groupe de G donc $e_G \in G'$. $f(e_G) = e_H \in f(G')$ alors $f(G')$ est non vide ;
— Soient $(x, y) \in f(G')^2$ il existe $(z, t) \in G'^2$ tels que $x = f(z)$ et $y = f(t)$ et
$$x \# y^{-1} = f(z * y^{-1}). \tag{15.36}$$
G' est un sous-groupe de G et comme z et t sont dans G' alors $z*y^{-1} \in G'$ d'où $f(z * y^{-1}) \in f(G')$. On a montré que $x\#y^{-1} \in f(G')$.

Par caractérisation des sous-groupes, $f(G')$ est un sous-groupe de H. □

Théorème 15.4. *Soit H' un sous-groupe de H. Alors l'image réciproque $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G.*

Démonstration. $f^{-1}(H')$ est un image réciproque et $f^{-1}(H') = \{x \in G \mid f(x) \in H'\}$.
— Par définition $f^{-1}(H') \subset G$;
— $f(e_G) = e_H$, H' est un sous-groupe de H donc $e_H \in H'$ et donc $f(e_G) \in H'$, alors $e_G \in f^{-1}(H')$ donc $f^{-1}(H')$ est non-vide ;
— soient $(x, y) \in f^{-1}(H')^2$, montrons que $x * y^{-1} \in f^{-1}(H')$; comme f est un morphisme
$$f(x * y^{-1}) = f(x)\#f(y)^{-1}, \tag{15.37}$$
et comme $(x, y) \in f^{-1}(H')^2$ alors $(f(x), f(y)) \in H'^2$ et puisque H' est un sous-groupe $f(y)^{-1} \in H'$ et $f(x)\#f(y)^{-1} \in H'$. Finalement $f(x * y^{-1}) \in H'$ donc $x * y^{-1} \in f^{-1}(H')$.

Par caractérisation des sous-groupes, $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G. □

Définition 15.10. Soient $(G, *)$ et $(H, \#)$ deux groupes et f un morphisme de G sur H. On pose
$$\mathrm{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in G\} = \{y \in H \mid \exists x \in G \quad y = f(x)\} = f(G) \tag{15.38}$$
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\} = f^{-1}(\{e_{G'}\}). \tag{15.39}$$

Proposition 15.17. L'image $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe de H et le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe de G.

Démonstration. On sait que $\mathrm{Im}(f) = f(G)$ et comme G est un sous-groupe de G alors d'après le théorème **??** $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-groupe. On sait aussi que $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}(\{e_H\})$ et $\{e_H\}$ est un sous-groupe de H donc d'après le théorème **??** $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-groupe. □

Proposition 15.18. Soit $f : (G, *) \longrightarrow (H, \#)$ un morphisme de groupes. Alors f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = H$.

Démonstration. Déjà faite au chapitre 3. □

Proposition 15.19. Soit $f : (G, *) \longrightarrow (H, \#)$ un morphisme de groupes. Alors f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$.

Démonstration. Supposons f injective, alors comme c'est un morphisme de groupes $f(e_G) = e_H$ alors $\{e_G\} \subset \mathrm{Ker}(f)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$ alors $f(x) = e_H = f(e_G)$ or f est injective donc $x = e_G$ donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \{e_G\}$. Finalement $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$.

Supposons que $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$. Soit $(x, y) \in G^2$ tels que $f(x) = f(y)$ alors $f(x)\#f(y)^{-1} = f(y)\#f(y)^{-1} = e_H$. Comme f est un morphisme on a

$f(x)\#f(y)^{-1} = f(x * y^{-1})$. Alors $f(x * y^{-1}) = e_H$ et donc $x * y^{-1} \in \operatorname{Ker}(f)$. Comme $\operatorname{Ker}(f) = \{e_G\}$ on a $x * y^{-1} = e_G$. Par conséquent $(x * y^{-1}) * y = e_G * y$ et par associativité et grâce aux qualités du neutre on a $x = y$. Alors f est injective. □

15.1.4.4 Exemples

La fonction logarithme est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur $(\mathbb{R}, +)$, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in]0\,;+\infty[^2 \quad \ln(xy) = \ln x + \ln y. \tag{15.40}$$

La fonction exponentielle est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{R}_+^*, \times)$, c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y\,. \tag{15.41}$$

La fonction $\psi\colon \begin{cases}]0\,;+\infty[\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ (r,\theta) & \longmapsto & r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \end{cases}$ est un morphisme de groupes du groupe produit des groupes $(]0\,;+\infty[\,, \times)$ et $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$

$$\forall (r, r') \in]0\,;+\infty[^2 \;\; \forall \theta \in \mathbb{R} \quad \psi(rr', \theta + \theta') = \psi(r, \theta) \times \psi(r', \theta'). \tag{15.42}$$

C'est un morphisme surjectif, $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{C}^*$ mais non injectif puisque $\operatorname{Ker}(f) = \{1\} \times 2\pi\mathbb{Z}$ [1].

15.2 Anneau et corps

15.2.1 Structure d'anneau

15.2.1.1 Définition

Définition 15.11. On appelle anneau tout triplet $(A, +, \times)$ où $+$ et $\times$ deux lois de composition internes sur A telles que

1. $(A, +)$ est un groupe abélien ;
2. $\times$ est associative ;
3. $\times$ admet un élément neutre noté 1 ;
4. $\times$ est distributive sur $+$:

$$\forall (a, b, c) \in A^3 \qquad a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad (a + b) \times c = a \times c + b \times c. \tag{15.43}$$

Si de plus la loi $\times$ est commutative, on dira que l'anneau $(A, +, \times)$ est commutatif.

15.2.1.2 Propriétés

Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Déjà $(A, +)$ est un groupe abélien, donc

— il existe un unique élément neutre pour la loi $+$ noté 0 et appelé élément nul de A ;

1. cf. chapitre 2

— tous les éléments de A admettent un unique symétrique pour $+$ dans A noté $-x$;
— tous les éléments de A sont réguliers pour $+$;
— il existe un unique élément neutre pour $\times$ noté 1 et c'est l'élément unité de A.

Mais $(A, \times)$ n'est pas un groupe. Les éléments de A n'admettent pas en général d'inverse pour $\times$. Les éléments de A ne sont en général pas réguliers pour $\times$.

15.2.2 Exemples d'anneaux

15.2.2.1 Anneaux usuels de nombres

Les quatre anneaux suivants sont commutatifs : $(\mathbb{Z}, +, \times)$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$, $(\mathbb{R}, +, \times)$, $(\mathbb{C}, +, \times)$. Pour $\mathbb{Z}$ les éléments inversibles sont 1 et -1 et sont non nuls pour $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

15.2.2.2 Ensemble quelconque

Soit E un ensemble quelconque, $(P(E), \Delta, \bigcap)$ est un anneau.

15.2.2.3 Anneau produit

Soient $(A, +_1, \times_1)$ et $(B, +_2, \times_2)$ deux anneaux. On munit $A_1 \times A_2$ des lois produits $+$ et $\times$ définies par

$$\forall (a_1, b_1) \in A_1^2 \ \forall (a_2, b_2) \in A_2^2 \quad (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 +_1 b_1, a_2 +_2 b_2); \tag{15.44}$$

$$\forall (a_1, b_1) \in A_1^2 \ \forall (a_2, b_2) \in A_2^2 \quad (a_1, a_2) \times (b_1, b_2) = (a_1 \times_1 b_1, a_2 \times_2 b_2). \tag{15.45}$$

Alors $(A_1 \times A_2, +, \times)$ est un anneau commutatif appelé anneau produit des anneaux A_1 et A_2. S'ils sont commutatifs alors $A_1 \times A_2$ est commutatif.

15.2.2.4 Anneau nul

Soit $A = \{a\}$. Alors $a + a = a$ et $a \times a = a$ alors $0 = 1 = a$ donc $A = \{0\}$. A est un anneau commutatif appelé anneau nul.

15.2.2.5 Anneau de fonctions

Soient X un ensemble non nul, $(A, +, \times)$ un anneau. On munit A^X de deux lois de composition internes :

— une addition définie par

$$\forall (f, g) \in \left(A^X\right)^2 \ \forall x \in X \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x); \tag{15.46}$$

— une multiplication définie par

$$\forall (f, g) \in \left(A^X\right)^2 \ \forall x \in X \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x). \tag{15.47}$$

Alors $(A^X, +, \times)$ est un anneau. Si A est commutatif alors A^X est aussi commutatif. L'élément nul est l'application nulle et l'élément unité est la fonction constante égale à 1.

15.2.3 Anneau intègre

Définition 15.12. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. S'il existe $(a, b) \in A^2$ tous non nuls tels que $ab = 0$. On dit alors que (a, b) est un couple diviseur de zéro dans A.

Comme A n'est pas commutatif, on peut avoir $ab = 0$ et $ba \neq 0$.

Définition 15.13. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que A est un anneau intègre si

1. la multiplication est commutative ;
2. A n'est pas réduit à l'anneau nul ;
3. A n'admet pas de diviseur de zéro.

Théorème 15.5. *Si $(A, +, \times)$ est un anneau intègre. Alors*

$$\forall (a, b) \in A^2 \quad ab = 0 \implies a = 0 \textit{ ou } b = 0. \tag{15.48}$$

Démonstration. l'anneau A n'admet pas de diviseurs de zéro, alors il n'existe pas de couple (a, b) tel que $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et $ab = 0$. Alors lorsqu'on prend la négation de cette assertion, on a bien

$$\forall (a, b) \in A^2 \quad ab = 0 \implies a = 0 \text{ ou } b = 0. \tag{15.49}$$

□

Théorème 15.6. *Dans un anneau intègre, tout élément non nul est simplifiable par la multiplication*

Démonstration. Soient $a \in A^*$ et $(x, y) \in A^2$ alors

$$\begin{aligned} ax = ay &\implies ax + (-ay) = ay - ay && (15.50) \\ &\implies a(x - y) = 0. && (15.51) \end{aligned}$$

Alors $a = 0$ ou $x = y$ puisque A est intègre. Cependant a n'est pas nul donc $x = y$.

On a montré que a est simplifiable à gauche. On peut faire de même pour montrer qu'il est simplifiable à droite. Alors a est simplifiable. □

Les anneaux $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ munis des lois usuelles sont intègres. Si l'ensemble X a au moins deux éléments, l'anneau $\mathbb{R}^X$ n'est pas intègre. Il existe deux éléments différents $a, b \in A$ tel que f est nulle partout sauf en a et g est nulle partout sauf en b. Alors f et g sont non nulles et pourtant fg est nulle. De la même manière l'ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^N$ n'est pas intègre. L'anneau $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ n'est pas intègre puisque $(1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$.

15.2.4 Règles de calcul dans un anneau

Théorème 15.7. *Soit* $(A, +, \cdot)$ *un anneau alors*

$$\forall x \in A \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0; \tag{15.52}$$

$$\forall (x, y) \in A^2 \qquad x(-y) = -(xy) \quad (-y)x = -(yx); \tag{15.53}$$

$$\forall (x, y, y') \in A^3 \qquad x(y - y') = xy - xy' \quad (y - y')x = yx - y'x; \tag{15.54}$$

$$\forall (x, y) \in A^2 \ \forall k \in \mathbb{Z} \qquad x(ky) = k(xy) \quad (ky)x = k(xy); \tag{15.55}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall (x, y_1, \ldots, y_n) \in A^{n+1} \qquad x \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} xy_i \quad \left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) x = \sum_{i=1}^{n} y_i x. \tag{15.56}$$

Démonstration. Soit $x \in A$, on définit $f \colon \left\{ \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ y & \longmapsto & xy \end{array} \right.$. La fonction f est bien définie puisque $(A, +, \cdot)$ est un anneau donc il est stable. De plus f est un endomorphisme du groupe $(A, +)$

$$\forall (y, y') \in A^2 \quad f(y + y') = x(y + y') = xy + xy' = f(y) + f(y'). \tag{15.57}$$

Alors les propriétés découlent des propriétés des endomorphismes de groupe. □

Théorème 15.8. *Soit* $(A, +, \cdot)$ *un anneau non nul, alors*

1. $1 \neq 0$
2. 0 *n'est pas inversible pour la multiplication.*

Démonstration. Si $0 = 1$ alors pour tout $x \in A$ on a $x = x \cdot 1 = x \cdot 0 = 0$, alors l'anneau serait nul. Contradiction.

Pour tout $x \in A$ $x \cdot 0 = 0 \neq 1$ alors 0 n'est pas inversible dans A pour la multiplication. □

Lemme 15.1. *Soit* $(A, +, \cdot)$ *un anneau. Pour un couple d'éléments* $(a, b) \in A^2$ *qui commutent, c'est-à-dire tels que* $ab = ba$*, on a* $\forall p, q \in \mathbb{N} \quad a^p b^q = b^q a^p$.

Démonstration. On démontre ce résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(p)$"$\forall (a, b) \in A^2 \quad ab = ba \implies a^p b = ba^p$".

L'initialisation est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$ supposons $\mathcal{P}(p)$ alors pour tout $a, b \in A$ tels que $ab = ba$. Alors

$$\begin{aligned} a^{p+1} b = (a \cdot a^p) b &= a(a^p \cdot b) && (15.58) \\ &= a(b \cdot a^p) && (15.59) \\ &= (ab) \cdot a^p && (15.60) \\ &= (ba) \cdot a^p && (15.61) \\ &= b(a \cdot a^p) && (15.62) \\ &= ba^{p+1}. && (15.63) \end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{P}(p + 1)$ est vraie. Alors par théorème de récurrence La propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout p. Les éléments a^p et b commutent. Il suffit d'appliquer ce résultat en posant $p = q$, $a = b$ et $b = a^p$ et on obtient le résultat $b^q a^p = a^p b^q$. □

Théorème 15.9 (Formule du binôme de Newton)**.** *Soit* $(A, +, \cdot)$ *un anneau. Pour deux éléments* $(a, b) \in A^2$ *qui commutent on a*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}. \tag{15.64}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le lemme et la démonstration est la même qu'au chapitre **??**. □

Théorème 15.10. *Soient* $(A, +, \cdot)$ *un anneau,* $n \in \mathbb{N}$ *et* $a, b \in A$ *commutant alors*

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b) \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}. \tag{15.65}$$

Démonstration.

$$(a-b)\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} = a\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} - b\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k} \tag{15.66}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a^{k+1} b^{n-k} - \sum_{k=0}^{n} ba^k b^{n-k} \tag{15.67}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a^j b^{n+1-j} - \sum_{k=0}^{n} b^{n-k+1} a^k \tag{15.68}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} b^{n+1-j} a^j - \sum_{k=0}^{n} b^{n-k+1} a^k \tag{15.69}$$

$$= b^0 a^{n+1} - b^{n+1} a^0 \tag{15.70}$$

$$= a^{n+1} - b^{n+1}. \tag{15.71}$$

□

Corollaire 15.10.1. *Soit* $(A, +, \cdot)$ *un anneau et* $a \in A$*. Alors pour tout naturel* n

$$1 - a^{n+1} = (1-a) \sum_{j=0}^{n} a^j. \tag{15.72}$$

Si $1 - a$ *est inversible dans l'anneau alors*

$$\sum_{j=0}^{n} a^j = (1-a)^{-1}(1-a^{n+1}). \tag{15.73}$$

Dans un corps, tous les éléments non nuls sont réguliers. Le corollaire sera valable pour tout a différent de 1.

Théorème 15.11 (Distributivité généralisée)**.** *Soit* $(A, +, \cdot)$ *un anneau. Pour tous* I *et* J *des ensembles finis non vides, toutes familles* $(x_i)_{i \in I}$ *et* $(y_j)_{j \in J}$ *d'éléments de* A *on a*

$$\left(\sum_{i \in I} x_i\right)\left(\sum_{j \in J} y_j\right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} x_i y_j. \tag{15.74}$$

Démonstration par récurrence. On pose par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$: quelque soient les ensembles I fini de cardinal n et J fini et non vide et pour toute famille d'éléments de A $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ on a

$$\left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j. \tag{15.75}$$

L'initialisation est vraie puisque

$$\forall x \in A\ \forall (y_j)_{j\in J} \in A^J \quad x\left(\sum_{j\in J} y_j\right) = \sum_{j\in J} x y_j. \tag{15.76}$$

Supposons ensuite que la propriété est vraie au rang n, montrons la au rang $n+1$. Soient I fini de cardinal $n+1$ et J fini non vide, soient aussi deux familles $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_j)_{j\in J}$ d'éléments de A. Soit $i_0 \in I$ et $I' = I \setminus \{i_0\}$ alors I' est de cardinal n. Alors

$$\left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right) = x_{i_0}\sum_{j\in J} y_j + \left(\sum_{i\in I'} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right) \tag{15.77}$$

$$= \sum_{j\in J} x_{i_0} y_j + \sum_{(i,j)\in I'\times J} x_i y_j. \tag{15.78}$$

Puisque $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies. Alors en regroupant

$$\left(\sum_{i\in I} x_i\right)\left(\sum_{j\in J} y_j\right) = \sum_{(i,j)\in I\times J} x_i y_j. \tag{15.79}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Le théorème de récurrence nous affirme donc que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel non nul n. □

Théorème 15.12. *Soit* $(A, +, \cdot)$ *un anneau. On note*

$$\mathfrak{U}(A) = \{a \in A \mid a \text{ inversible pour la loi } \cdot\}. \tag{15.80}$$

Alors $(\mathfrak{U}(A), \cdot)$ *est un groupe appelé groupe des inversibles (ou des unités) de* A*.*

Démonstration. La loi $\cdot$ est une loi de composition interne sur $\mathfrak{U}(A)$ puisque si a et b sont des éléments de A inversibles, leur produit ab est inversible d'inverse $b^{-1}a^{-1}$. La loi $\cdot$ est associative car A est un anneau. On a $1 \in \mathfrak{U}(A)$, donc il est non vide. Soit $a \in \mathfrak{U}(A)$ et notons a^{-1} l'inverse de A, alors $a^{-1} \in \mathfrak{U}(A)$.

Tout élément de $\mathfrak{U}(A)$ admet un inverse dans $\mathfrak{U}(A)$. Donc finalement $(\mathfrak{U}(A), \cdot)$ est un groupe. □

15.2.5 Sous-anneau

15.2.5.1 Définition

Définition 15.14. Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau. On appelle sous-anneau de A, toute partie B de A telle que :

1. B est stable pour les lois $+$ et $\cdot$;
2. muni des lois induites, B est un anneau ;
3. $1 \in B$.

15.2.5.2 Propriétés préliminaires

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et B un sous-anneau de A, alors

1. B et A ont le même 0 ;
2. B et A ont le même 1 ;
3. Si $(A, +, \cdot)$ est un anneau commutatif, alors B est aussi commutatif ;
4. Si $(A, +, \cdot)$ est un anneau intègre, alors B est aussi intègre.

Démonstration. $(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$. $(B, +, \cdot)$ est un anneau, il admet donc un neutre pour $\cdot$. C'est aussi un neutre pour la loi $\cdot$ de A. Alors a fortiori par unicité du neutre ils sont égaux. Idem pour 0. Si la loi sur A est commutative, alors elle est commutative sur B. Si maintenant A est intègre, alors il est commutatif, donc B est commutatif. A est un anneau non nul donc $0 \neq A$ sur A. Comme ils ont le même zéro et le même un on a $O \neq 1$ sur B. Si on considère un couple (a, b) diviseur de zéro dans B alors c'est aussi un couple diviseurs de zéro dans A, et comme A est intègre, il n'en a pas donc le couple (a, b) en question n'existe pas et alors B n'en a pas non plus. Finalement B est un anneau intègre. $\square$

15.2.5.3 Caractérisation des sous-anneaux

Théorème 15.13. *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et B une partie de A. Alors il y a équivalence entre*

1. *B est un sous-anneau de A ;*
2. *$(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$, B est stable pour $\cdot$ et $1 \in B$;*
3. *$B \subset A$ et $\forall (x, y) \in B^2 \quad x - y \in B$ et $xy \in B$ et $1 \in B$.*

Démonstration. 2 et 3 sont équivalents grâce à la caractérisation des sous-groupes. 1 entraîne 2 par définition. Montrons ensuite que 1 entraîne 2. B est stable par $\cdot$ par hypothèse et comme $(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ il est stable par $+$. On a $1 \in B$. Il reste à montrer que B, muni des lois induites, est un anneau

— $(B, +)$ est un groupe abélien car c'est un sous-groupe de A ;
— $\cdot$ sur B est un restriction de la loi associative $\cdot$ sur A, donc elle est associative ;
— $\cdot$ est aussi distributive sur $+$ sur B puisqu'elle l'est sur A ;
— $1 \in B$.

Alors B est un anneau. $\square$

15.2.6 Exemples

Si $(A, +, \cdot)$ est un anneau, alors A est un sous-anneau mais en général $\{0\}$ n'est pas un sous-anneau de A.

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un sous-anneau de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$. $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

15.2.7 Morphisme d'anneaux

Définition 15.15. Soient $(A, +, \cdot)$ et $(B, +, \cdot)$ deux anneaux. On appelle morphisme d'anneaux de A sur B toute application $f : A \longrightarrow B$ telle que

1. $\forall (a, b) \in A^2 \quad f(a + b) = f(a) + f(b)$;
2. $\forall (a, b) \in A^2 \quad f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$;
3. $f(1) = 1$.

Si f est un morphisme d'anneaux de $(A, +, \cdot)$ et $(B, +, \cdot)$ alors c'est un morphisme de groupe de $(A, +)$ sur $(B, +)$.

15.2.8 Corps et sous-corps

15.2.8.1 Corps

Définition 15.16. On appelle corps tout anneau $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ commutatif, non nul, dans lequel tous les éléments non nul admettent un inverse pour $\cdot$.

Proposition 15.20. Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps. Alors

1. $\mathbb{K}$ admet au moins deux éléments distincts ;
2. $\mathfrak{U}(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \setminus \{0\}$;
3. $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ est un groupe ;
4. $\mathbb{K}$ est un anneau intègre.

Démonstration. Par définition tous les éléments non nuls sont inversibles. Attention à la notation étoilé. A^* peut signifier $\mathfrak{U}(A)$ ou $A \setminus \{0\}$ qui peuvent être différents. Comme par exemple $\mathfrak{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ Puisque $\mathbb{K} \setminus \{0\} = \mathfrak{U}(\mathbb{K})$ alors c'est un groupe.

Soit $a, b \in K$ tous non nuls. Si $ab = 0$ et comme a est non nul alors il est inversible donc $b = 0$ (Contradiction). Donc $\mathbb{K}$ n'admet pas de diviseur de zéro. En plus il est commutatif et non nul donc il est intègre. $\square$

15.2.8.2 Sous-corps

Définition 15.17. Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps. On appelle sous-corps de $\mathbb{K}$ tout sous-anneau $\mathbb{L}$ de $\mathbb{K}$ qui, muni des lois induites par celles de $\mathbb{K}$, est un corps.

Théorème 15.14 (Caractérisation des sous-corps)**.** *Soit $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un corps. Soit $\mathbb{L}$ une partie de $\mathbb{K}$. Il y a équivalence entre*

1. *$\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$;*
2. *$\mathbb{L}$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}$ et pour tout élément non nul $x \in \mathbb{L}$ on a $x^{-1} \in \mathbb{L}$.*

Démonstration. Si $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$ alors $\mathbb{L}$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}$. Muni des lois induites, $\mathbb{L}$ est un corps et dans un corps tous les éléments non nuls sont inversibles.

Si $\mathbb{L}$ est un sous-anneau de $\mathbb{K}$, il faut juste vérifier que, muni des lois induites par celles de $\mathbb{K}$, c'est un corps. Déjà $\mathbb{L}$ est un sous-anneau commutatif, ensuite c'est un sous-anneau de $\mathbb{K}$ donc $0 \in \mathbb{L}$ et $1 \in \mathbb{L}$. Comme $\mathbb{K}$ est un corps $0 \neq 1$. Donc $\mathbb{L}$ n'est pas réduit à $\{0\}$. Tout x non nul dans $\mathbb{L}$ admet un inverse dans $\mathbb{K}$ et c'est le même dans $\mathbb{L}$. $\mathbb{L}$ muni des lois induites est un corps. C'est donc un sous-corps de $\mathbb{K}$. $\square$

15.2.8.3 Exemples

Les ensembles de nombres $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps. Un corps à deux éléments est $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ tel que $0+0 = 0$, $0+1 = 1+0 = 1$, $1+1 = 0$, $0\cdot 0 = 1\cdot 0 = 0\cdot 1 = 0$ et $1 \cdot 1 = 1$.

15.2.8.4 Corps des fractions d'un anneau intègre

Théorème 15.15 (Admis)**.** *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau intègre. Il existe un corps $\mathbb{K}$, unique à isomorphisme près, tel que A soit un sous-anneau de $\mathbb{K}$ et tel que les éléments de $\mathbb{K}$ soient de la forme $\frac{a}{b}$, avec $a, b \in A$ et $b \neq 0$. Ce corps $\mathbb{K}$ est appelé corps des fractions de l'anneau intègre A.*

"Unique à isomorphisme près" signifie que si deux corps $\mathbb{K}$ et $\mathbb{K}'$ vérifient ces hypothèses alors ils sont isomorphes. Comme par exemple, $\mathbb{Q}$ est le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{Z}$. $\mathbb{K}(X)$, l'ensemble des fractions rationnelles, est le corps des fractions de l'anneau des polynômes $K[X]$.

15.3 Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

15.3.1 Entiers relatifs et division euclidienne

15.3.1.1 Anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$

Les éléments de $\mathbb{Z}$ sont les entiers relatifs. On admet les résultats suivants

Structure de $\mathbb{Z}$ $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est un anneau intègre. L'ensemble des inversibles de $\mathbb{Z}$, $\mathfrak{U}(\mathbb{Z}) = \{-1, 1\}$, muni de la multiplication est un groupe.

Ordre sur $\mathbb{Z}$ Muni de l'ordre usuel $\leq$, $\mathbb{Z}$ est un ensemble totalement ordonné. L'ordre est compatible avec la structure d'anneau de $\mathbb{Z}$.

$$\forall (p, p', q, q') \in \mathbb{Z}^4 \quad p \leq p' \ q \leq q' \implies p + q \leq p' + q'; \tag{15.81}$$

$$\forall (p, p', q, q') \in \mathbb{Z}^4 \quad p \leq p' \ 0 \leq q \implies pq \leq p'q. \tag{15.82}$$

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément. De la même manière, toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément. $\mathbb{Z}$ n'admet ni de plus petit ni de plus grand élément.

$\mathbb{Z}$ est archimédien C'est-à-dire que

$$\forall a \in \mathbb{Z}\ \forall b \in \mathbb{N}^*\ \exists n \in \mathbb{N} \quad a \neq nb. \tag{15.83}$$

Démonstration. Si $a \leq 0$ on peut prendre $n = 0$ puisque $0 \cdot b = 0 \geq a$. Sinon $a \geq 1$ et $b \in \mathbb{N}^*$ donc $b \geq 1$ alors $ab \geq a$. On peut prendre $n = a \in \mathbb{N}$. $\square$

15.3.1.2 Division euclidienne

La division euclidienne d'un entier relatif par un entier relatif non nul est telle que

Théorème 15.16. *Pour tout couple* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ *avec* $b \neq 0$. *Il existe un unique couple* $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que*

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}. \tag{15.84}$$

L'entier q est appelé le quotient de la division euclidienne de a par b. L'entier r est appelé le reste de la division euclidienne de a par b.

Unicité. Soient (q, r) et (q', r') deux couples de $\mathbb{Z}^2$ tels que

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leq r' < b \end{cases}. \tag{15.85}$$

Alors $bq + r = bq' + r'$ et donc $b(q - q') = r' - r$. De plus $|r' - r| < b$. Supposons que $q - q' \neq 0$, alors $|q - q'| \geq 1$ alors $|r' - r| = b\,|q - q'| \geq b$. Contradiction. Donc $q = q'$. Par conséquent $r = r'$. □

Existence. Soit l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid bk \leq a\}$. Alors
- A est une partie de $\mathbb{Z}$;
- A est non vide :
  - si $a \geq 0$ alors $0b \leq a$ donc $0 \in A$;
  - si $a < 0$ alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$ $bk \leq a \iff -a \leq b(-k)$;
  - $\mathbb{Z}$ est archimédien et $b > 0$ donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $-a \leq bm$ on pose $k = -m \in \mathbb{Z}$ alors $bk \leq a$ donc $k \in A$.
- A est majorée, puisque pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $bk \leq a \leq |a| \leq b\,|a|$ car $b \geq 1$. Alors $b(k - |a|) \leq 0$ or $b \geq 0$ donc $k - |a| \geq 0$ alors $k \leq |a|$. Donc $|a|$ est un majorant de A.

Finalement A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ donc A admet un plus grand élément et on le note q. On pose $z = ab - q$. Alors $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ par définition. L'élément q est le plus grand de A donc $q \in A$ et $q + 1 \notin A$. Ainsi $bq \leq a$ et $b(q + 1) > a$. Alors $0 \leq r < b$.

Le couple (q, r) convient. □

Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Théorème 15.17. *Pour tout couple* $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ *avec* $b \neq 0$. *Il existe un unique couple* $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ *tel que*

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}. \tag{15.86}$$

Démonstration. On applique le théorème précédent. La seule chose à vérifier est alors $q \in \mathbb{N}$. Supposons que $q \notin \mathbb{N}$ alors $q \leq -1$. Puisque $b > 0$ donc $bq \leq -b$. Alors $a = bq + r \leq r - b < 0$, ce qui contredit l'hypothèse de départ. Donc $q \in \mathbb{N}$. □

Autre division euclidienne dans $\mathbb{Z}$

Théorème 15.18. *Pour tout couple* $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ *avec* $b \neq 0$. *Il existe un unique couple* $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que*

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < |b| \end{cases}. \tag{15.87}$$

Existence. Si $b > 0$, on applique le premier théorème et on a $b = |b|$. Si $b < 0$, on applique le premier théorème à $(a, -b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ et

$$\exists (q^*, r^*) \in \mathbb{Z}^2 \begin{cases} a = -bq^* + r^* \\ 0 \leq r^* < -b = |b| \end{cases} . \tag{15.88}$$

On pose $r = r^*$ et $q = -q^*$ et on a

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases} . \tag{15.89}$$

□

Unicité. Si on a deux couples (q, r) et (q', r') d'entiers relatifs avec

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leq r < b \end{cases} \quad \begin{cases} a = bq' + r' \\ 0 \leq r' < b \end{cases} . \tag{15.90}$$

On a $b(q - q') = r' - r$ et on a $|r' - r| < |b|$. Si $q \neq q'$ alors $|q - q'| \geq 1$ et donc $|r' - r| = |b|\,|q - q'| \geq |b|$. On a une contradiction donc $q = q'$ et alors $r = r'$. □

Algorithme de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$ Soit $a, b \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 0$. On notera $q(a, b)$ et $r(a, b)$ le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.

Proposition 15.21. Si $a \leq b$ alors $q(a, b) = 0$ et $r(a, b) = a$. Si $a \geq b$ alors $q(a, b) = q(a - b, b) + 1$ et $r(a, b) = r(a - b, b)$.

Démonstration. Si $a < b$ alors $a = 0 \cdot b + a$. On a $0 \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{N}$ et $0 \leq a < b$ par unicité du reste et du quotient $q(a, b) = 0$ et $r(a, b) = a$.

Si $a > b$ alors $a = q(a, b)b + r(a, b)$ et donc $a - b = q(a, b)b + r(a, b) - b = (q(a, b) - 1)b + r(a, b)$.

On sait que $q(a, b) - 1 \in \mathbb{N}$ puisque sinon on aurait $q(a, b) = 0$ et alors on aurait $a = r(a, b) \leq b$ ce qui contredit l'hypothèse.

Par unicité de la division euclidienne de $a - b$ par b.

$$\begin{cases} q(a - b, b) = q(a, b) - 1 \\ r(a - b) = r(a, b) \end{cases} . \tag{15.91}$$

□

15.3.1.3 Divisibilité

Proposition 15.22. Pour tout entier a, l'ensemble $a\mathbb{Z} = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists q \in \mathbb{Z} b = aq\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

Démonstration. 1. $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$;

2. $0 \in a\mathbb{Z}$ donc $a\mathbb{Z}$ est non vide ;
3. soient $(x, y) \in a\mathbb{Z}^2$ alors il existe deux entiers relatifs q, q' tels que $x = aq$ et $y = aq'$, alors $x - y = a(q - q')$ et comme $q - q' \in \mathbb{Z}$ on a $x - y \in a\mathbb{Z}$.

Par caractérisation des sous-groupes, $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. □

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Définition 15.18. Soient $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$, on dit que b divise a dans $\mathbb{Z}$, ou que b est un multiple de a dans $\mathbb{Z}$ et on note $b \mid a$ si et seulement s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$.

$$b \mid a \iff a \in b\mathbb{Z}. \tag{15.92}$$

On a $0 \mid 0$ puisque pour tout $q \in \mathbb{Z}$, $0 = 0 \times q$. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ $q \mid 0$ car $0 = 0 \times q$. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$, si $0 \mid q$ alors $q = 0$.

Proposition 15.23. La relation de divisibilité est réflexive et transitive, cependant elle n'est ni symétrique ni antisymétrique.

Démonstration. Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, on a $a \mid a$. Soient $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $a \mid b$ et $b \mid c$ alors il existe k et l dans $\mathbb{Z}$ tels que $b = ak$ $c = lb$ donc $c = (lk)a$ donc $a \mid c$. Ainsi la relation de divisibilité est transitive. Elle ,n'est pas symétrique puisque 2 divise 4 mais 4 ne divise pas 2. Elle n'est pas antisymétrique puisque $5 \mid -5$ et $-5[5$ mais $5 \neq -5$. □

Proposition 15.24.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b \mid a \iff a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}. \tag{15.93}$$

Démonstration.

- $\Longleftarrow$ Si $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$ alors $a \in b\mathbb{Z}$ donc $b \mid a$.
- $\Longrightarrow$ Si $b \mid a$ alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$. Soit $n \in a\mathbb{Z}$, alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $n = aq$. Alors $n = aq = b(kq)$ donc $n \in b\mathbb{Z}$. Alors $a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$.

□

Proposition 15.25.

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \ b \neq 0 \quad b \mid a \iff r(a,b) = 0. \tag{15.94}$$

Démonstration.

- $\Longrightarrow$ Si $b \mid a$ alors il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq + 0$ et on a $0 \leq |b|$ donc par unicité de la division euclidienne $r(a,b) = 0$.
- $\Longleftarrow$ Si $r(a,b) = 0$ alors $a = q(a,b)b + r(a,b)$ avec $q(a,b) \in \mathbb{Z}$ et $r(a,b) = 0$ et $q = q(a,b)$ par définition $b|a$.

□

Si $b \neq 0$ et si $b \mid a$, le quotient q de la division euclidienne de a par b alors $a = bq$. Il est appelé le quotient exact de a par b et noté parfois $q = \frac{a}{b}$. Cependant cette notation est un peu abusive et elle est à éviter.

Entiers relatifs associés

Définition 15.19. Pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ on dit que a et b sont associés si et seulement si $a \mid b$ et $b \mid a$.

Proposition 15.26. Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$, a et b sont associés si et seulement si $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$, c'est à dire si et seulement si $a = b$ ou $a = -b$.

Démonstration. On a déjà vu que $a \mid b \iff b\mathbb{Z} \subset a\mathbb{Z}$. Alors a et b sont associés si et seulement si $a \mid b$ et $b \mid a$ donc si et seulement si (par double inclusion) $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$.

Il faut monter la deuxième équivalence. Si $a = b$ ou $a = -b$, on a clairement $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$. Si a et b sont associées alors $b \mid a$ et $a \mid b$ donc il existe k et l dans $\mathbb{Z}$ tels que $b = ak$ et $a = bl$. donc $b = blk$ donc $b(1 - lk) = 0$. L'anneau $\mathbb{Z}$ est intègre, donc $b = 0$ ou $1 - lk = 0$.

Si $b = 0$ alors $a = bl = 0$ donc $a = b$. Sinon alors $1-lk = 0$ alors $(l, k) = (1, 1)$ ou $(l, k) = (-1, -1)$. Alors $a = b$ ou $a = -b$. □

La relation d'association dans $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence. En effet, elle est réflexive, a est associé à a :

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad a\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}; \tag{15.95}$$

elle est symétrique, si a est associé à b alors b est associé à a :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} \quad a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \iff b\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}; \tag{15.96}$$

elle est transitive, si a est associé à b et si b est associé à c alors a est associé à c :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}\ b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z} \iff a\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}. \tag{15.97}$$

15.3.1.4 Sous groupes additifs de $\mathbb{Z}$

Théorème 15.19. *les sous-groupes additifs de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les parties de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{N}$. De plus si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, il existe un unique entier $a \in \mathbb{N}$ tel que $H = a\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Les $a\mathbb{Z}$ $a \in \mathbb{N}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$. Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Si H est le sous-groupe nul alors c'est un $a\mathbb{Z}$ avec $a = 0$. Sinon, il y a dans H au moins un entier relatif n_0 non nul. Soit alors $A = \{|h| \mid h \in H \setminus \{0\}\}$, alors c'est une partie de $\mathbb{N}$ qui est non vide (puisque $|n_0| \in A$). Alors A admet un plus petit élément noté a. Alors $a \in \mathbb{N}$ donc $|a| = a$ et $a \in H \setminus \{0\}$. Montrons que $H = a\mathbb{Z}$, par double inclusion. Déjà $a \in H$. Puisque H est un sous-groupe, alors il est stable par addition. Ainsi par récurrence on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad na \in H. \tag{15.98}$$

Si $n = 0$ alors $na = 0 \in H$ puisque c'est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \quad na = -(-na) \quad -n \in \mathbb{N}, \tag{15.99}$$

comme $-na \in H$ d'après le premier point et comme H est stable par passage au symétrique $na \in H$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad na \in H. \tag{15.100}$$

On vient de montrer que $a\mathbb{Z} \subset H$. Soit $h \in H$, montrons que $h \in a\mathbb{Z}$. On sait que $a \neq 0$ donc on peut effectuer la division euclidienne de h par a

$$\exists!(q, r) \in \mathbb{Z}^2 \quad \begin{cases} h = aq + r \\ 0 \leq r < a \end{cases}. \tag{15.101}$$

Déjà $h \in H$ et comme $aq \in a\mathbb{Z} \subset H$ on a $r = h - aq \in H$ puisque H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Or $0 \leq r < a$, si $r \neq 0$ alors $r \in H \setminus \{0\}$ donc $|r| = r \in A$

or $r < a$ et a est le plus petit élément de H, c'est impossible. Nécessairement $r = 0$. Donc $a \mid h$ et $h \in a\mathbb{Z}$. Ainsi $H \subset a\mathbb{Z}$. Finalement par double inclusion $H = a\mathbb{Z}$. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $a\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}$ alors a et b sont associés alors $a = b$ ou $a = -b$. Or $a \geq 0$ et $b \geq 0$ donc $a = b$. Si H est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ alors il existe un unique naturel a tel que $H = a\mathbb{Z}$. □

15.3.2 PGCD & PPCM

15.3.2.1 Diviseurs communs de deux entiers

Ensemble des diviseurs d'un entier

Définition 15.20. Soit $a \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\mathrm{Div}(a) = \{b \in \mathbb{Z} \mid b \mid a\} = \{b \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = bk\}. \tag{15.102}$$

Proposition 15.27.

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \{1, -1, a, -a\} \subset \mathrm{Div}(a). \tag{15.103}$$

Ce sont les diviseurs triviaux. S'il existe d'autres diviseurs, ils sont appelés les diviseurs propres de a.

$$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \mathrm{Div}(a) = \mathrm{Div}(-a) = \mathrm{Div}(|a|); \tag{15.104}$$

$$\forall (a, x) \in \mathbb{Z}^2 \quad -x \in \mathrm{Div}(a) \iff x \in \mathrm{Div}(a). \tag{15.105}$$

Proposition 15.28.

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b \in \mathrm{Div}(a) \iff b \mid a \iff a \in b\mathbb{Z}; \tag{15.106}$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \mathrm{Div}(b) \subset \mathrm{Div}(a) \iff b \mid a \iff a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}; \tag{15.107}$$

$$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \mathrm{Div}(a) = \mathrm{Div}(b) \iff a \mid b \text{ et } b \mid a \iff a = b \text{ et } a = -b. \tag{15.108}$$

$b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ mais pas $\mathrm{Div}(a)$. En effet, par exemple $\mathrm{Div}(1) = \{-1, 1\}$ n'est pas un sous-groupe puisque $0 \notin \mathrm{Div}(1)$ et puisqu'il n'est pas stable par l'addition.

Proposition 15.29. $\mathrm{Div}(0) = \mathbb{Z}$ et $b \in \mathrm{Div}(0) \iff \exists k \in \mathbb{Z}\ 0 = bk \quad \forall b \in \mathbb{Z}\ 0 = b \cdot 0$.

Si $a \neq 0$, $|a|$ est le plus grand élément de $\mathrm{Div}(a)$ pour l'ordre usuel (et $-|a|$ est le plus petit).

$$\forall a \in \mathbb{Z}^* \quad (a, -a) \in \mathrm{Div}(a)^2 \tag{15.109}$$

$$\forall x \in \mathrm{Div}(a) \quad x \mid a \text{ et } x \mid -a. \tag{15.110}$$

a et $-a$ sont deux plus grand éléments pour la relation de divisibilité. La relation de divisibilité n'est pas une relation d'ordre dans $\mathbb{Z}$ car elle n'est pas antisymétrique, c'est pourquoi il n'y a pas unicité du plus grand élément.

Si $a = 0$; 0 est le plus grand élément de $\mathbb{Z}$ qui divise a.

Diviseurs communs de deux entiers Étant donnés deux entiers relatifs a et b. L'ensemble des diviseurs communs de a et b est $\mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b)$,

$$\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad \{-1,1\} \subset \mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b). \tag{15.111}$$

Définition 15.21. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$. Si $\mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b) = \{-1,1\}$. On dit que a et b sont premiers entre eux. Cela signifie que les seuls diviseurs communs de a et b sont 1 et -1.

15.3.2.2 PGCD de deux entiers

Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$.

Sous-groupe $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$

Définition 15.22. On définit

$$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \left\{ak + bl \;\middle|\; (k,l) \in \mathbb{Z}^2\right\} = \left\{n \in \mathbb{Z} \;\middle|\; \exists (k,l) \in \mathbb{Z}^2 \quad n = ak + bl\right\}. \tag{15.112}$$

Théorème 15.20. *$a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$.*

Démonstration.
— Déjà $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ par définition ;
— $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ n'est pas vide et il contient 0 ;
— soient $(x,y) \in (a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z})^2$, alors il existe des entiers relatifs k, l, m, n tels que $x = ak + bl$ et $y = am + bn$; alors $x - y = a(k-m) + b(l-n)$ donc $x - y \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$.

Par caractérisation des sous-groupes, $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z},+)$. □

Corollaire 15.20.1. *Il existe un unique naturel d tel que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = d\mathbb{Z}$. On l'appelle le PGCD de a et de b. On note $d = a \wedge b = \mathrm{pgcd}(a,b)$.*

Théorème 15.21. *Quelque soient les relatifs a et b, il existe deux entiers relatifs u_0, v_0 tels que $\mathrm{pgcd}(a,b) = au_0 + bv_0$.*

Démonstration. On sait que $\mathrm{pgcd}(a,b) \in \mathrm{pgcd}(a,b)\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, alors il existe deux entiers relatifs u_0, v_0 tels que $\mathrm{pgcd}(a,b) = au_0 + bv_0$. □

Si $a = b = 0$ alors $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \{0\}$ alors $\mathrm{pgcd}(a,b) = 0$. Si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ alors a et b sont dans $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ et donc $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} \neq \{0\}$ alors $\mathrm{pgcd}(a,b) \neq 0$.

Théorème 15.22. *Quelque soient $a, b \in \mathbb{Z}$, on a*

$$\mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b) = \mathrm{Div}(\mathrm{pgcd}(a,b)). \tag{15.113}$$

Démonstration. On montre cette égalité par deux inclusions. On sait qu'il existe $u_0, v_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $\mathrm{pgcd}(a,b) = au_0 + bv_0$.

Soit $x \in \mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b)$. Alors $x \mid a$ et $x \mid b$. Alors $x \mid au_0$ et $x \mid bv_0$ et donc $x \mid au_0 + bv_0$. Finalement $x \mid \mathrm{pgcd}(a,b)$ et donc $x \in \mathrm{Div}(\mathrm{pgcd}(a,b))$. Alors $\mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b) \subset \mathrm{Div}(\mathrm{pgcd}(a,b))$.

Soit $x \in \mathrm{Div}(\mathrm{pgcd}(a,b))$. On sait que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathrm{pgcd}(a,b)\mathbb{Z}$ et comme $a \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ alors $a \in \mathrm{pgcd}(a,b)\mathbb{Z}$ et donc $\mathrm{pgcd}(a,b) \mid a$. De la même manière $\mathrm{pgcd}(a,b) \mid b$. Or $x \mid \mathrm{pgcd}(a,b)$, alors par transitivité $x \mid a$ et $x \mid b$, donc $x \in \mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b)$. Au final $\mathrm{Div}(\mathrm{pgcd}(a,b)) \subset \mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b)$.

Finalement par double inclusion, $\mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b) = \mathrm{Div}(\mathrm{pgcd}(a,b))$. □

Interprétation Les diviseurs communs de a et b sont les diviseurs de $\operatorname{pgcd}(a,b)$. L'entier $\operatorname{pgcd}(a,b)$ est le plus grand naturel au sens de la divisibilité de l'ensemble des diviseurs communs de a et b. D'où son nom de “Plus Grand Commun Diviseur”.

On définit l'application $\bigwedge : \begin{cases} \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (a,b) & \longmapsto & \operatorname{pgcd}(a,b) \end{cases}$. Elle vérifie les propriétés suivantes

1. $\bigwedge$ est une loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$;
2. $\bigwedge$ est commutative et commutative ;
3. $\bigwedge$ est pseudo-distributive ;
$$\forall (a,b,c)\in\mathbb{Z}^2 \quad \operatorname{pgcd}(ca,cb) = |c| \operatorname{pgcd}(a,b); \tag{15.114}$$
4. Pour tout relatif a, $a\wedge a = |a|$, $a\wedge 0 = |a|$ et $a\wedge 1 = 1$;
5. Quelque soient $a,b\in\mathbb{Z}$
$$b \mid a \iff \operatorname{pgcd}(a,b) = |b|\,. \tag{15.115}$$

Démonstration. 1. En effet, le PGCD de deux entiers relatifs est un entier relatif ;

2. Comme $+$ est commutative $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} = b\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}$ donc $\operatorname{pgcd}(a,b) = \operatorname{pgcd}(b,a)$;
3.
$$\operatorname{Div}((a\wedge b)\wedge c) = (\operatorname{Div}(a)\cap\operatorname{Div}(b))\cap\operatorname{Div}(c) \tag{15.116}$$
$$= \operatorname{Div}(a)\cap(\operatorname{Div}(b)\cap\operatorname{Div}(c)) \tag{15.117}$$
$$= \operatorname{Div}(a\wedge(b\wedge c)), \tag{15.118}$$
donc $(a\wedge b)\wedge c = a\wedge(b\wedge c)$;
4. Soient $d = a\wedge b$ et $\delta = (ca)\wedge(cb)$, alors $d \mid a$ et $d \mid b$. Ainsi $|c|\,d \mid ca$ et $|c|\,d \mid cb$. L'entier $|c|\,d$ est un diviseur commun de ca et de cb donc $|c|\,d \mid \delta$.
Il existe deux relatifs tels que $d = au_0 + bv_0$ alors $|c|\,d = acu_0 + bcv_0$. Puisque $\delta = (ca)\wedge(cb)$ on a $\delta \mid ca$ et $\delta \mid bc$. Ainsi $\delta \mid acu_0$ et $\delta \mid bcv_0$. D'où $\delta \mid acu_0 + bcv_0 = cd$. Alors $\delta \mid |c|\,d$.
Puisque $|c|\,d \mid \delta$ et $\delta \mid |c|\,d$ donc ils sont associés et comme ils sont tous les deux positifs ou nul on a $|c|\,d = \delta$;
5. On a
$$\operatorname{Div}(a)\cap\operatorname{Div}(a) = \operatorname{Div}(a) = \operatorname{Div}(|a|) \tag{15.119}$$
$$\operatorname{Div}(a)\cap\operatorname{Div}(0) = \operatorname{Div}(a)\cap\mathbb{Z} = \operatorname{Div}(a) = \operatorname{Div}(|a|) \tag{15.120}$$
$$\operatorname{Div}(a)\cap\operatorname{Div}(1) = \operatorname{Div}(a)\cap\{-1,1\} = \{-1,1\} = \operatorname{Div}(1); \tag{15.121}$$
6.
$$b \mid a \iff \operatorname{Div}(b)\subset\operatorname{Div}(a) \tag{15.122}$$
$$\iff \operatorname{Div}(b)\cap\operatorname{Div}(a) = \operatorname{Div}(b) = \operatorname{Div}(|b|) \tag{15.123}$$
$$\iff a\wedge b = |b|\,. \tag{15.124}$$

□

15.3.2.3 Algorithme d'Euclide pour la détermination du PGCD

Nous savons que pour tous relatifs a et b on a $a \wedge 0 = |a|$ et $\text{pgcd}(a, -b) = \text{pgcd}(-a, -b) = \text{pgcd}(a, b)$. Alors on peut supposer, sans perte de généralité, que $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$. De plus $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, a)$, alors on peut supposer de plus que $a \geq b$.

Lemme 15.2. *Soit $r(a, b)$ le reste de la division euclidienne de a par b, $b \neq 0$, alors*

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r(a, b)). \tag{15.125}$$

Démonstration. Soit q le quotient de la division et r le reste, alors $a = bq + r$.
- Si $x \in \text{Div}(b) \cap \text{Div}(r)$ alors $x \mid b$ et donc $x \mid bq$ et $x \mid r$, $x \mid a$ et alors $x \in \text{Div}(a)$; ainsi $x \in \text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$ et finalement $\text{Div}(b) \cap \text{Div}(r) \subset \text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$;
- Si $x \in \text{Div}(a) \cap \text{Div}(b)$ alors comme $r = a - bq$, $x \mid a$ et $x \mid b$ donc $x \mid r$; alors $x \in \text{Div}(r)$; ainsi $x \in \text{Div}(r) \cap \text{Div}(b)$ et finalement $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) \subset \text{Div}(b) \cap \text{Div}(r)$.

Alors par double inclusion $\text{Div}(a) \cap \text{Div}(b) = \text{Div}(b) \cap \text{Div}(r)$. Donc $\text{Div}(\text{pgcd}(a, b)) = \text{Div}(\text{pgcd}(b, r))$ et alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$. ☐

Algorithme d'Euclide Soit $a \geq b$ on pose $r_0 = a$, $r_1 = b$ et $r_2 = r(a, b)$. Alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(r_0, r_1) = \text{pgcd}(r_1, r_2)$. Tant que $r_k \neq 0$ on effectue la division euclidienne de r_{k-1} par r_k et on pose $r_{k+1} = r(r_{k-1}, r_k)$. Alors $r_{k+1} < r_k$.

La suite $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante, à valeurs dans $\mathbb{N}$. La suite s'annule forcément à partir d'un certain rang. Donc il existe un naturel n tel que $r_n \neq 0$ et $r_{n+1} = 0$. Alors $\text{pgcd}(a, b)$ est égal au dernier reste non nul dans la suite des division euclidiennes de l'algorithme d'Euclide.

15.3.2.4 PPCM de deux entiers

Soient a et b deux entiers relatifs. L'ensemble $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers multiples communs de a et b.

Théorème 15.23. *Pour tous relatifs a et b, $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.*

Démonstration. On sait que $a\mathbb{Z}$ et $b\mathbb{Z}$ sont des sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ et comme l'intersection de deux sous-groupes est un sous-groupe alors $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$ est un sous-groupe. ☐

Corollaire 15.23.1. *Pour tous relatifs a et b il existe un unique naturel m tel que $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$. L'entier m est appelé le PPCM de a et de b, on le note $a \vee b = \text{ppcm}(a, b)$.*

Théorème 15.24. *Quelque soient les relatifs a et b*

$$a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \text{ppcm}(a, b)\mathbb{Z} \tag{15.126}$$

Interprétation Les multiples communs de a et de b sont exactement les multiples de $\text{ppcm}(a,b)$. $\text{ppcm}(a,b)$ est le plus petit naturel, au sens de la divisibilité, de l'ensemble des multiples communs de a et de b. D'où le nom de Plus Petit Commun Multiple.

Si $a = 0$ ou $b = 0$ alors $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = \{0\} = 0\mathbb{Z}$ donc $\text{ppcm}(a,b) = 0$. Si a et b sont tous les deux non nuls alors $\text{ppcm}(a,b)$ est non nul car $ab \neq 0$ et $ab \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$.

Proposition 15.30. Comme le PPCM est défini de manière unique, on peut définir une application $\bigvee : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (a,b) & \longmapsto & \text{ppcm}(a,b) \end{array} \right.$. Cette application vérifie les propriétés suivantes

1. c'est une loi de composition interne ;
2. elle est commutative, $\text{ppcm}(a,b) = \text{ppcm}(b,a)$;
3. elle est associative, $\text{ppcm}((\text{ppcm}(a,b),c) = \text{ppcm}(a, \text{ppcm}(b,c))$;
4. elle est pseudo-distributive, $\text{ppcm}(ca,cb) = |c| \,\text{ppcm}(a,b)$;
5. $\forall a \in \mathbb{Z} \quad \text{ppcm}(a,a) = |a| \;\; \text{ppcm}(a,0) = 0 \;\; \text{ppcm}(a,1) = |a|$;
6. $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad b \mid a \iff \text{ppcm}(a,b) = |a|$.

Démonstration. Soient a, b et c trois relatifs

1. le PPCM est un entier relatif ;
2. $a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = b\mathbb{Z} \cap a\mathbb{Z}$;
3.

$$\begin{aligned}
\text{ppcm}((\text{ppcm}(a,b),c)\mathbb{Z} &= a\mathbb{Z} \cap \text{ppcm}(b,c)\mathbb{Z} && (15.127)\\
&= a\mathbb{Z} \cap (b\mathbb{Z} \cap c\mathbb{Z}) && (15.128)\\
&= (a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}) \cap c\mathbb{Z} && (15.129)\\
&= \text{ppcm}(a,b)\mathbb{Z} \cap c\mathbb{Z} && (15.130)\\
&= \text{ppcm}(\text{ppcm}(a,b),c)\mathbb{Z} && (15.131)
\end{aligned}$$

   d'où $\text{ppcm}((\text{ppcm}(a,b),c) = \text{ppcm}(a, \text{ppcm}(b,c))$.

4. On note $m = \text{ppcm}(a,b)$ et $\mu = \text{ppcm}(ca,cb)$. Alors $a \mid m$ et $b \mid m$. Par conséquent $ca \mid |c|\, m$ et $cb \mid |c|\, m$. Alors $|c|\, m$ est un multiple commun de ca et cb. D'où $\mu = \text{ppcm}(ca,cb)$ divise $|c|\, m$.

   On sait que $ca \mid \mu$ et $cb \mid \mu$. Alors il existe deux relatifs p et q tels que $\mu = cap$ et $\mu = cbq$. Alors $cap = cbq$ et donc $c(ap - bq) = 0$. Comme $\mathbb{Z}$ est intègre donc soit $c = 0$ ou soit $ap - bq = 0$.
   — Si $c = 0$ alors $\mu = 0 = |c| = m$;
   — Si $c \neq 0$ alors $ap - bq = 0$ donc $ap = bq$ est un multiple commun de a et de b. C'est donc un multiple du PPCM m. Alors $m \mid ap = bq$ et $|c|\, m \mid cap = bqc = \mu$.

   On a montré que $\mu \mid |c|\, m$ et $|c|\, m \mid \mu$, or ce sont des naturels donc ils sont égaux. $\mu = |c|\, m$, soit $\text{ppcm}(ca,cb) = |c| \,\text{ppcm}(a,b)$.
5. $a\mathbb{Z} \cap a\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$, $a\mathbb{Z} \cap 0\mathbb{Z} = 0\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \cap 1\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap \mathbb{Z} = a\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z}$.
6. $b \mid a \iff a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z} \iff a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} = |a|\mathbb{Z}$.

□

15.3.3 Entiers premiers entre eux

Soient a et b deux entiers relatifs. On a défini plus tôt dans ce cours, cf. définition **??**, que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $\mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b) = \{-1, 1\}$ or $\mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b) = \mathrm{Div}(\mathrm{pgcd}(a, b))$. Donc a et b sont premiers entre eux si et seulement si leur PGCD vaut 1.

Théorème 15.25 (Théorème de Bezout)**.** *Étant donnés deux relatifs a et b. Ils sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.*

Démonstration. Si a et b sont premiers entre eux alors $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$. On sait que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \mathrm{pgcd}(a, b)\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. On a $1 \in \mathbb{Z}$ donc $1 \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ donc il existe deux relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

S'il existe deux relatifs u et v tels que $au + bv = 1$. Si $d \in \mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b)$ alors $d \mid au$ et $d \mid bv$ donc $d \mid au + bv = 1$ donc $d \in \{-1, 1\}$. Alors $\mathrm{Div}(a) \cap \mathrm{Div}(b) \subset \{-1, 1\}$. L'autre inclusion est vraie aussi. Alors a et b sont premiers entre eux. □

Définition 15.23. Soient a et b deux entiers relatifs premiers entre eux. Tout couple (u, v) de relatifs tel que $au + bv = 1$ est un couple de coefficients de Bezout de (a, b).

Algorithme de Bezout On tente de trouver le couple de Bezout de (a, b). Il s'agit de "remonter" l'algorithme d'Euclide. Soient deux naturels a et b non nuls avec $a > b$. On pose $r_0 = a$, $r_1 = b$ et $r_2 = r(a, b)$ et par récurrence $r_k = r(r_{k-1}, r_{k-2})$ tant que $r_k \neq 0$. Il existe alors un naturel n tel que $r_n \neq 0$ et $r_{n+1} = 0$. On a $r_n = \mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.

Il existe une suite $(q_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ telle que

$$r_0 = r_1 q_1 + r_2 \tag{15.132}$$
$$r_1 = r_2 q_2 + r_3 \tag{15.133}$$
$$\vdots = \vdots$$
$$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-2} + r_{n-1} \tag{15.134}$$
$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \tag{15.135}$$
$$r_{n-1} = r_n q_n + r_{n+1}. \tag{15.136}$$

Alors

$$1 = r_n = r_{n-2} - r_{n-1} q_{n-1} \tag{15.137}$$
$$= r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2} q_{n-2}) q_{n-1} \tag{15.138}$$
$$= \vdots$$
$$= u r_0 + v r_1 \tag{15.139}$$
$$= au + bv. \tag{15.140}$$

Théorème 15.26 (Théorème de Gauß)**.** *Pour tous relatifs a, b et c, si $a \mid bc$ et $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$ alors $a \mid c$.*

Première démonstration. Les entiers a et b sont premiers entre eux alors on peut définir un couple de coefficients de Bezout (u, v) tel que $au + bv = 1$ donc $cau + cbv = c$. Par hypothèse $a \mid bc$ donc $a \mid bcv$ et de plus $a \mid acu$ donc $a \mid acu + bcv = c$. □

Deuxième démonstration. Comme $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ alors $\operatorname{pgcd}(ca, cb) = |c|$. Or $a \mid bc$, par hypothèse et $a \mid ac$ donc $a \mid |c|$ soit $a \mid c$. □

Propriétés

Proposition 15.31. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b_1, ..., b_n des entiers relatifs. On suppose que a est premier avec chacun des b_i (pour i variant de 1 à n). Alors a est premiers avec $b_1 \cdots b_n$.

Démonstration. On démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ "$\operatorname{pgcd}(a, b_1 \cdots b_n) = 1$".

Initialisation. Pour $n = 1$ le résultat est évident.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie alors par hypothèse de récurrence il existe un couple de coefficients de Bezout (u, v) tel que $au + (b_1 \cdots b_n)v = 1$. On sait aussi que b_{n+1} et a sont premiers entre eux alors il existe un deuxième couple de coefficients de Bezout (w, z) tel que $aw + b_{n+1}z = 1$.

En multipliant les deux relations on a

$$1 = (au + (b_1 \cdots b_n)v)(aw + b_{n+1}z) \tag{15.141}$$

$$1 = a^2uw + aub_{n+1}z + (b_1 \cdots b_n)vaw + (b_1 \cdots b_{n+1})vz \tag{15.142}$$

$$1 = a[auw + ub_{n+1}z + (b_1 \cdots b_n)vw] + (b_1 \cdots b_{n+1})vz \tag{15.143}$$

On pose $\mathfrak{U} = auw + ub_{n+1}z + (b_1 \cdots b_n)vw \in \mathbb{Z}$ et $\mathfrak{V} = vz \in \mathbb{Z}$ donc

$$1 = a\mathfrak{U} + (b_1 \cdots b_n)\mathfrak{V} \tag{15.144}$$

Alors d'après le théorème de Bezout, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Conclusion. La propriété $\mathcal{P}$ est donc vraie pour tout naturel n non nul. □

Proposition 15.32 (Généralisation du théorème de Gauß)**.** Soient un naturel n non nul et des relatifs a, c, b_1, ..., b_n. On suppose que $a \mid b_1 \cdots b_n \cdot c$ et que pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, a et b_i sont premiers, alors $a \mid c$.

Démonstration. D'après la proposition **??** on sait que $\operatorname{pgcd}(a, b_1 \cdots b_n) = 1$ et d'après le théorème de Gauß on a $a \mid c$. □

Proposition 15.33. Soient un naturel n non nul un relatif a et $b_1, \ldots, b_n$ des diviseurs de a. On suppose que les b_i sont premiers entre eux deux à deux. Alors $b_1 \cdots b_n \mid a$.

Démonstration. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ "$\forall a \in \mathbb{Z} \quad \forall b_1, \ldots b_n$ diviseurs de a premiers antre eux deux à deux, $b_1 \cdots b_n \mid a$"

Initialisation. Pour $n = 1$ c'est évident.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. Soient des relatifs $a, b_1, \ldots, b_{n+1}$ tels que les b_i divisent a et sont premiers entre eux deux à deux. D'après l'hypothèse de récurrence $b_1 \cdots b_n \mid a$. Il existe un relatif q tel que $a = b_1 \ldots b_n q$. Or $b_{n+1} \mid a$ donc

$b_{n+1} \mid b_1 \cdots b_n q$. Cependant $\forall i \in [\![1,n]\!]$ $\operatorname{pgcd}(b_{n+1}, b_i) = 1$. Donc d'après la proposition **??** on a $b_{n+1} \mid q$. Il existe donc un relatif r tel que $q = b_{n+1} r$. Alors $a = b_1 \cdots b_n q = b_1 \cdots b_{n+1} r$. Alors $b_1 \ldots b_{n+1} \mid a$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion Par théorème de récurrence, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout naturel n non nul. □

Retour sur le PPCM et le PGCD Soient deux relatifs a et b. Si x est un diviseur non nul de a il existe un unique entier relatif q tel que $a = xq$ $\left(\text{"}\frac{a}{x}\text{"}\right)$.

Proposition 15.34. Soient deux relatifs a et b et un naturel non nul d. Alors

$$\operatorname{pgcd}(a,b) = d \iff d \mid a \text{ et } d \mid b \text{ et } \operatorname{pgcd}\left(\text{"}\frac{a}{b}\text{"}, \text{"}\frac{b}{a}\text{"}\right) = 1 \tag{15.145}$$

Démonstration. Si $\operatorname{pgcd}(a,b) = d$ alors $d \mid a$, $d \mid b$ et il existe deux relatifs a_1 et b_1 tels que $a = a_1 d$ et $b = b_1 d$. Or $\operatorname{pgcd}(a,b) = d$ donc $\operatorname{pgcd}(a_1 d, b_1 d) = d$. Donc comme $d \in \mathbb{N}^*$ alors $\operatorname{pgcd}(a_1, b_1) = 1$.

Si on suppose que $d \mid a$ et $d \mid b$ alors il existe deux relatifs a_1 et b_1 tels que $a = a_1 d$ et $b = b_1 d$. De plus par hypothèse ils sont premiers entre eux. Alors $\operatorname{pgcd}(a,b) = |d| \operatorname{pgcd}(a_1, b_1) = d$, puisque $d \in \mathbb{N}^*$ et puisque a_1 et b_1 sont premiers entre eux. □

Proposition 15.35. Soient deux entiers relatifs a et b, alors $\operatorname{pgcd}(a,b) \cdot \operatorname{ppcm}(a,b) = |ab|$

Démonstration.
— Cas 1, $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$. Comme ab est un multiple commun de a et de b on a $\operatorname{ppcm}(a,b) \mid ab$. De plus $a \mid \operatorname{ppcm}(a,b)$, $b \mid \operatorname{ppcm}(a,b)$ et $\operatorname{pgcd}(a,b) = 1$ alors d'après la proposition **??** on a $ab \mid \operatorname{ppcm}(a,b)$. Ainsi $\operatorname{ppcm}(a,b)$ et ab sont associés, c'est-à-dire que $\operatorname{ppcm}(a,b) = |ab|$. Finalement $\operatorname{ppcm}(a,b) \operatorname{pgcd}(a,b) = |ab|$.
— Cas 2, $\operatorname{pgcd}(a,b) \neq 1$:
  — si $\operatorname{pgcd}(a,b) = 0$ alors $a = b = 0$ donc $ab = 0 = \operatorname{pgcd}(a,b)$;
  — si $\operatorname{pgcd}(a,b) = d \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, en utilisant la proposition **??**, comme $d \mid a$ et $d \mid b$ alors il existe deux entiers relatifs a_1 et b_1 tels que $a = a_1 d$ et $b = b_1 d$ et $\operatorname{pgcd}(a_1, b_1) = 1$; si on applique le premier cas au couple (a_1, b_1) on obtient

$$\operatorname{pgcd}(a_1, b_1) \operatorname{ppcm}(a_1, b_1) = |a_1 b_1| \,, \tag{15.146}$$

en multipliant par d^2, on obtient

$$d \operatorname{pgcd}(a_1, b_1) d \operatorname{ppcm}(a_1, b_1) = d\,|a_1|\, d\,|b_1| \,, \tag{15.147}$$

et comme $d \geq 0$ alors $d = |d|$ et donc

$$\operatorname{pgcd}(da_1, db_1) \operatorname{ppcm}(da_1, db_1) = |da_1|\,|db_1| \,, \tag{15.148}$$

en remplaçant, on a bien

$$\operatorname{pgcd}(a,b) \cdot \operatorname{ppcm}(a,b) = |ab| \,. \tag{15.149}$$

□

15.3.4 Nombres premiers

15.3.4.1 Notion de nombre premier

Définition 15.24. Un naturel n est dit nombre premier lorsqu'il a exactement deux diviseurs distincts (1 et lui-même) dans $\mathbb{N}$.

Remarque : Le nombre 1 n'est pas premier, puisqu'il n'a qu'un seul diviseur : lui-même.

Définition 15.25. Un entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ est dit premier ou irréductible si et seulement si

— n n'est pas une unité de $\mathbb{Z}$ ($n \notin \{-1, 1\}$) ;

— n n'a pas de diviseurs propres dans $\mathbb{Z}$ ($\mathrm{Div}(n) = \{-1, 1, -n, n\}$).

Autrement dit, n admet exactement quatre diviseurs dans $\mathbb{Z}$.

15.3.4.2 Propriétés

Proposition 15.36. Soient a et p deux relatifs tels que p est premier. Alors

$$\mathrm{pgcd}(a, p) = 1 \iff p \nmid a. \tag{15.150}$$

Démonstration. Si $p \mid a$ alors $\mathrm{pgcd}(a, p) = |p| \neq 1$ car p est premier. Alors par contraposée on a montré $\mathrm{pgcd}(a, p) = 1 \implies p \nmid a$.

Si $p \nmid a$ alors $\mathrm{pgcd}(a, p)$ divise p or p est premier donc $\mathrm{pgcd}(a, p) \in \{1, |p|\}$. Si on avait $\mathrm{pgcd}(a, p) = |p|$ alors on aurait $|p| \mid a$, ce qui contredit l'hypothèse. Donc $\mathrm{pgcd}(a, p) = 1$. □

Corollaire 15.36.1. *Deux entiers relatifs premiers p et q sont premiers entre eux dès que $|p| \neq |q|$.*

Proposition 15.37. Soit p un entier premier, n un naturel et $a_1, \ldots, a_n$ des entiers relatifs quelconques. Alors

$$p \mid a_1 \cdots a_n \iff \exists k \in [\![1\,;n]\!] \quad p \mid a_k. \tag{15.151}$$

Démonstration. Si p divise l'un des a_k alors il divise le produit des a_k, c'est évident.

Sinon alors pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $p \nmid a_k$. Alors d'après la proposition **??** pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a $\mathrm{pgcd}(p, a_k) = 1$. D'après la proposition **??**, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{pgcd}(p, a_1 \cdots a_k) = 1$. On a montré par contraposée

$$p \mid a_1 \cdots a_n \implies \exists k \in [\![1\,;n]\!] \quad p \mid a_k. \tag{15.152}$$

□

Proposition 15.38. Tout entier relatif distinct d'une unité admet parmi ses diviseurs au moins un nombre premier.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$. Si a est nul alors $a = 2 \times 0$ et 2 est premier. S'il est non nul alors $|a| \geq 2$. On définit $\epsilon(a) = \{|b| \mid b \mid a \text{ et } b \notin \{0, 1, -1\}\}$. Alors $\epsilon(a) \subset \mathbb{N}$ et il est non vide ($a \in \epsilon(a)$). Alors $\epsilon(a)$ admet un plus petit élément noté p.

Alors $p \in \mathbb{N}$, $p \mid a$ et $p \geq 2$. Soit $q \in \mathbb{N}$ tel que $q \mid p$. Alors par transitivité $q \mid a$.

Si $q < p$ alors $q \notin \epsilon(a)$ car p est le plus petit élément de $\epsilon(a)$. Alors au final $q \notin \epsilon(a)$, $q \mid a$ et $q \in \mathbb{N}$ alors $q = 1$. Les seuls diviseurs de p dans $\mathbb{N}$ sont donc 1 et p. Alors p est un nombre premier.

On a trouvé un nombre premier parmi les diviseurs de a. $\square$

Proposition 15.39. L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Si $\mathcal{P}$ est fini, alors on peut écrire pour tout naturel non nul N $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in [\![1\,; N]\!]\}$. Il est non vide puisque 2 est premier. Soit $a = p_1 \cdots p_N + 1$ et comme $\mathcal{P}$ est non vide on a $a \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. D'après la proposition **??** a admet au moins un nombre premier parmi ses diviseurs. Ce qui s'écrit $\exists k \in [\![1\,; n]\!] \quad p_k \mid a$. Alors $p_k \mid a$ et $p_k \mid p_1 \cdots p_N$ ce qui implique que $p_k \mid 1$. Ce qui est absurde puisque le seul diviseur de 1 est 1 lui-même, alors p_k est premier. Donc $\mathcal{P}$ est infini. $\square$

Proposition 15.40 (Crible d'Ératosthéne)**.** Tout naturel $n \geq 4$ non premier admet au moins un diviseur q compris entre 2 et $E(\sqrt{n})$ (partie entière).

Démonstration. Soit un naturel $n \geq 4$ non premier. Il admet des diviseurs propres, donc il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = xy$ avec $x \geq 2$ et $y \geq 2$.

Quitte à intervertir les rôles de x et y, on peut supposer que $x \leq y$. D'où $x^2 \leq n$ et donc $x \leq \sqrt{n}$. Or $x \in \mathbb{N}$ donc $x \leq E(\sqrt{n})$. On a donc trouvé un diviseur x de n compris entre 2 et $E(\sqrt{n})$. $\square$

Pour l'application pratique du crible, on utilise la contraposée. Si n est un entier plus grand que 4 qui n'admet pas de diviseurs compris entre 2 et $\sqrt{n}$ alors n est un nombre premier.

Soit $n \geq 4$. Supposons connus tous les nombres premiers inférieurs à $E(\sqrt{n})$. Pour chaque p premier tel que $p \leq E(\sqrt{n})$, on garde p et on barre tous les multiples de p inférieur ou égaux à n.

Les nombres restants sont les nombres premiers inférieurs à n. Par exemple pour $n = 100$ $E(\sqrt{n}) = 10$. L'ensemble des nombres premiers inférieurs à 10 est $\{2, 3, 5, 7\}$. Alors on barre tous les multiples de 2, de 3, de 5 et de 7. Au final l'ensemble des nombres premiers inférieurs à 100 est

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_{\leq 100} = \{&2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53,\\ &61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97\}.\end{aligned} \tag{15.153}$$

15.3.4.3 Décomposition d'un entier en produit de nombres premiers

On suppose que n est un entier naturel.

Théorème 15.27. *Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Il existe $m \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \ldots, p_m$ des nombres premiers distincts, $k_1, \ldots, k_m$ des naturels non nuls tels que*

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}. \tag{15.154}$$

De plus cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. On dit que c'est la décomposition primaire du naturel n. L'ensemble $\{p_i \mid i \in [\![1\,; m]\!]\}$ est appelé le support primaire de n.

Existence. On démontre par récurrence forte sur $n \geq 2$ la propriété $\mathcal{P}(n)$ "n est produit de facteurs premiers".

Initialisation. Pour $n = 2$. $2 = 2$, $m = 1$, $p_1 = 2$ et $k_1 = 1$. Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geq 2$ et on suppose que $\mathcal{P}(2), \ldots, \mathcal{P}(n)$ sont vraies. Alors $n+1$ admet au moins un diviseur de p qui est un nombre premier. Deux cas se présentent

1. $p = n+1$. Alors $n+1$ est premier, il est égal à un produit de facteurs premiers, $m = 1$, $p_1 = n+1$ et $k_1 = 1$.
2. $p \neq n+1$ et alors $p < n+1$. Il existe un naturel q tel que $n+1 = pq$. Le nombre p est premier donc $p \geq 2$. Alors $2 \leq q \leq n$. Comme $\mathcal{P}(q)$ est vraie alors q est égal à un produit de nombres premiers.

   Alors $n+1 = pq$ est lui aussi égal à un produit de facteurs premiers, puisque p est premier. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par théorème de récurrence forte, la propriété $\mathcal{P}$ est vraie pour tout naturel $n \geq 2$.

Il reste à mettre le produit sous la bonne forme. □

Unicité. Soient deux décompositions primaires de n

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i} = \prod_{j=1}^{r} q_j^{l_j}. \tag{15.155}$$

Soit $i \in [\![1\,;m]\!]$, alors $p_i \mid n$ et p_i est premier donc il existe un naturel $j \in [\![1\,;r]\!]$ tel que $p_i \mid q_j$. Le nombre q_j est premier et c'est un naturel donc $p_i = 1$ ou $p_i = q_j$. Or p_i est aussi premier donc $p_i = q_j$. on vient de montrer que $\{p_1, \ldots, p_m\} \subset \{q_1, \ldots q_r\}$. Par symétrie des rôle on a l'autre inclusion et donc l'égalité $\{p_1, \ldots, p_m\} = \{q_1, \ldots q_r\}$ et $m = r$.

Quitte à ré-indexer les q_j, on peut supposer que pour tout $i \in [\![1\,;m]\!]$, $p_i = q_i$. Alors

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i} = \prod_{i=1}^{m} p_i^{l_i}. \tag{15.156}$$

Montrons que pour tout $i \in [\![1\,;m]\!]$, $k_i = l_i$. S'il existe $i_0[\![1\,;m]\!]$ tel que $k_{i_0} \neq l_{i_0}$ (par exemple $k_{i_0} > l_{i_0}$) alors $p_{i_0}^{k_{i_0}} \geq p_{i_0}^{k_{i_0}-l_{i_0}}$. Alors

$$n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i} = \prod_{i=1}^{m} p_i^{l_i} \tag{15.157}$$

$$p_{i_0}^{l_{i_0}} \cdot p_{i_0}^{k_{i_0}-l_{i_0}} \prod_{i \neq i_0}^{m} p_i^{k_i} = p_{i_0}^{l_{i_0}} \cdot \prod_{i \neq i_0}^{m} p_i^{k_i} \tag{15.158}$$

$$p_{i_0}^{k_{i_0}-l_{i_0}} \prod_{i \neq i_0}^{m} p_i^{k_i} = \prod_{i \neq i_0}^{m} p_i^{k_i}, \tag{15.159}$$

puisque $p_{i_0}^{l_{i_0}} \neq 0$. Alors p_{i_0} divise le membre de gauche mais pas celui de droite. C'est absurde. Donc pour tout $i \in [\![1\,;m]\!]$, $k_i = l_i$. □

Corollaire 15.27.1. *Soit* $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$ *une décomposition primaire. Alors*

1. *pour $i \in [\![1\,;m]\!]$ alors k_i est le plus grand entier k tel que $p_i^k \mid n$;*
2. *les diviseurs de n dans $\mathbb{N}$ sont les $\prod_{i=1}^m p_i^{l_i}$ avec $0 \leq l_i \leq k_i$ (pas tout à fait une décomposition primaire) ;*
3. *Soient deux naturels a et b et leurs décompositions primaires*

$$a = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}, \quad b = \prod_{i=1}^m p_i^{l_i}, \tag{15.160}$$

ce sont des décompositions primaires dans lesquelles on autorise les puissances k_i et l_i à être nulles.
Alors

$$\text{pgcd}(a,b) = \prod_{i=1}^m p_i^{\min(k_i,l_i)}, \quad \text{ppcm}(a,b) = \prod_{i=1}^m p_i^{\max(k_i,l_i)}. \tag{15.161}$$

Démonstration. 1. Déjà $p_i^{k_i} \mid n$. Ensuite, si $k > k_i$ et si p_i^k divisait n alors il existerait $q \in \mathbb{N}$ tel que $n = qp_i^k$. Alors

$$qp_i^k = \prod_{j=1}^m p_j^{k_j} = p_i^{k_i} \prod_{j\neq i} p_j^{k_j}, \tag{15.162}$$

donc

$$qp_i^{k-k_i} p_i^{k_i} = p_i^{k_i} \prod_{j\neq i} p_j^{k_j}, \tag{15.163}$$

et comme $p_i^{k_i} \neq 0$ on simplifie et on obtient

$$qp_i^{k-k_i} = \prod_{j\neq i} p_j^{k_j}. \tag{15.164}$$

Alors p_i diviserait le terme de gauche mais pas celui de droite, c'est absurde donc p_i^k ne divise pas n.

2. Déjà les $p_i^{k_i}$ sont bien des diviseurs de n. Soit $q \in \mathbb{N}$ qui divise n. Si p est un nombre premier qui divise q, alors par transitivité p divise n. Puisque $n = \prod_{i=1}^m p_i^{k_i}$ il existe $i \in [\![1\,;m]\!]$ tel que $p = p_i$.
Les diviseurs premiers de q sont donc à choisir dans $\{p_1, \ldots, p_m\}$. On peut alors écrire $q = \prod_{i=1}^m p_i^{l_i}$ avec $\forall i \in [\![1\,;m]\!]$, $l_i \in \mathbb{N}$. Donc pour tout $i \in [\![1\,;m]\!]$, $p_i^{l_i} \mid q$ donc $p_i^{l_i} \mid n$ et d'après le premier point $l_i \leq k_i$.

3. On pose $d = \text{pgcd}(a,b)$ et $\delta = \prod_{i=1}^m p_i^{\min(k_i,l_i)}$. Comme $\min(k_i,l_i) \leq k_i$ alors d'après le deuxième point $\delta \mid a$ et de la même manière $\min(k_i,l_i) \leq l_i$ donc $\delta \mid b$. Alors $\delta \mid d$.
D'autre part $d \mid a$ et $d \mid b$ donc on peut écrire, d'après le deuxième point, d sous la forme

$$d = \prod_{i=1}^m p_i^{\alpha_i} \quad \alpha_i \leq k_i \text{ et } \alpha_i \leq l_i. \tag{15.165}$$

Alors $\alpha_i \leq \min(k_i,l_i)$ et donc, toujours d'après le deuxième point, $d \mid \prod_{i=1}^m p_i^{min(l_i,k_i)} = \delta$. Finalement d et δ sont associés et comme ils sont positifs $d = \delta$. On sait que

$$ab = |ab| = \text{pgcd}(a,b) \cdot \text{ppcm}(a,b), \tag{15.166}$$

alors

$$ab = \prod_{i=1}^{m} p_i^{l_i+k_i} = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\min(k_i,l_i)+\max(k_i,l_i)} = \operatorname{pgcd}(a,b) \prod_{i=1}^{m} p_i^{\max(k_i,l_i)}, \tag{15.167}$$

et comme le PPCM est unique, on en conclue que la formule est vraie.

□

15.3.5 Nombres rationnels

15.3.5.1 Corps des nombres rationnels : $\mathbb{Q}$

Définition 15.26. On appelle $\mathbb{Q}$ le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Q}$ est appelé le corps des rationnels, les éléments de $\mathbb{Q}$ sont les nombres rationnels. Par définition, les éléments de $\mathbb{Q}$ s'écrivent sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b des relatifs et b non nul. Par définition, pour tous relatifs a et a' et tous relatifs non nuls b et b' on a

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \iff ab' = ba'. \tag{15.168}$$

Définition 15.27. Soit $x \in \mathbb{Q}$. Si $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ vérifie $x = \frac{a}{b}$, on dit que $\frac{a}{b}$ est une représentation du rationnel x.

On peut toujours trouver un représentant tel que $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Si $b < 0$ alors $\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}$.

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ est un corps où pour tout relatifs (a, a') et tout relatifs non nul (b, b') on a

$$\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab' + ba'}{bb'}; \tag{15.169}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a'}{b'} = \frac{aa'}{bb'}. \tag{15.170}$$

Immersion de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}$ L'application $j\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ a & \longmapsto & \frac{a}{1} \end{array} \right.$ est un morphisme injectif d'anneaux. j induit un isomorphisme de $\mathbb{Z}$ sur $\operatorname{Im} j$ et on choisit d'identifier $\mathbb{Z}$ et $\operatorname{Im} j$. Autrement dit, pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on identifie a avec le rationnel $\frac{a}{1}$.

Ainsi $\mathbb{Z}$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

15.3.5.2 Relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$

Définition 15.28. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ deux éléments de $\mathbb{Q}$. On définit $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ par $(ad - bc)bd \leq 0$.

C'est légitime car :

1. Le signe de $(ad - bc)bd$ ne dépend pas du choix du représentants des rationnels $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$: si $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ et $\frac{c}{d} = \frac{c'}{d'}$ alors $ab' = b'a$ et $c'd = cd'$ et

$$(a'd' - b'c')(b'd')(bd)^2 = (a'd'bd - b'c'bd)(b'd')(bd) \tag{15.171}$$
$$= (ab'dd' - cd'b'b)(b'd')(bd) \tag{15.172}$$
$$= (ad - bc)(b'd')^2(bd), \tag{15.173}$$

les relatifs $(bd)^2$ et $(b'd')^2$ sont positifs ou nuls donc $(a'd' - b'c')(b'd')$ a le même signe que $(ad - bc)(bd)$;

2. soient a et c deux relatifs (ce sont aussi des rationnels) et $a \leq c$ dans $\mathbb{Q}$ est équivalent à $\frac{a}{1} \leq \frac{c}{1}$ qui est équivalent à $(a \cdot 1 - c \cdot 1) \cdot 1 \cdot 1 \leq 0$ dans $\mathbb{Z}$ qui est équivalent à $a \leq c$ dans $\mathbb{Z}$.

La relations d'ordre définie sur $\mathbb{Q}$ prolonge la relation définie sur $\mathbb{Z}$.

Propriétés

Proposition 15.41. Pour tout relatif a et tout relatif non nul b

$$\frac{a}{b} \geq 0 \iff ab \geq_{\mathbb{Z}} 0. \tag{15.174}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} \geq 0 &\iff \frac{a}{b} \geq \frac{0}{1} &(15.175)\\ &\iff (a \cdot 1 - 0 \cdot b) \cdot b \cdot 1 \geq 0 &(15.176)\\ &\iff ab \geq 0. &(15.177)\end{aligned}$$

□

Proposition 15.42. La relation $\leq$ définie sur $\mathbb{Q}$ est bien une relation d'ordre, c'est-à-dire qu'elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Démonstration.

$$\forall \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}, \tag{15.178}$$

puisque $(ab - ba)b^2 = 0 \leq 0$. La relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ est réflexive.

$$\forall (r, s) \in \mathbb{Q}^2 \ \exists (a, c) \in \mathbb{Z}^2 \ \exists (b, d) \in (\mathbb{Z}^*)^2 \quad r = \frac{a}{b} \ s = \frac{c}{d}. \tag{15.179}$$

Si $r \leq s$ et $s \leq r$ alors $(ad - bc)bd \leq 0$ et $(ad - bc)bd \geq 0$ et comme $\leq$ est antisymétrique sur $\mathbb{Z}$ alors $(ad - bc)bd = 0$ or b et d sont non nuls et comme $\mathbb{Z}$ est intègre alors $ad = bc$ donc $r = s$. La relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ est antisymétrique.

Soient trois rationnels r, s et t et leur représentants $r = \frac{a}{b}$, $s = \frac{d}{c}$ et $t = \frac{e}{f}$ tels que $r \leq s$ et $s \leq t$. Alors

$$\begin{aligned} (ad - bc)bd &\leq 0, &(15.180)\\ (cf - ed)df &\leq 0. &(15.181)\end{aligned}$$

Comme f^2 et b^2 sont positifs alors

$$\begin{aligned} abd^2f^2 &\leq cdb^2f^2, &(15.182)\\ cdf^2b^2 &\leq efd^2b^2. &(15.183)\end{aligned}$$

Par transitivité de la relation d'ordre sur $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} abd^2f^2 &\leq efd^2b^2, &(15.184)\\ (af - eb)bd^2f &\leq 0, &(15.185)\\ (af - eb)bf &\leq 0. &(15.186)\end{aligned}$$

Donc $\frac{a}{b} \leq \frac{e}{f}$. La relation d'ordre sur $\mathbb{Q}$ est transitive. □

Proposition 15.43. L'ordre $\leq$ est total sur $\mathbb{Q}$.

Démonstration. L'ordre $\leq$ est un ordre total sur $\mathbb{Z}$ donc $\forall \left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right) \in \mathbb{Q}^2$ on a soit $(ad - bc)bd \geq 0$ ou soit $(ad - bc)bd \leq 0$. Donc soit $\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d}$ ou soit $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$. □

Proposition 15.44. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$ est un corps totalement ordonné, c'est-à-dire que

— $\mathbb{Q}$ est un corps ;
— l'ordre $\leq$ est total sur $\mathbb{Q}$;
— l'ordre $\leq$ est compatible avec les lois $+$ et $\cdot$ de $\mathbb{Q}$.

Démonstration. Soient r, r' et s des rationnels. Soient (a, b), (c, d) et (a', b') des représentants respectifs de r, s et r'. On suppose que $r \leq r'$. Alors $(ab' - a'b)bb' \leq 0$. On sait aussi que $r + s = \frac{ad+cb}{bd}$ et $r' + s = \frac{a'd+cb'}{b'd}$. Alors

$$[(ad + bc)b'd - (a'd + cb')bd](bdb'd) = (ab'd^2 + bb'cd - a'bd^2 - bb'cd)(bb'd^2) \tag{15.187}$$

$$= (ab' - a'b)(bb')d^4 \leq 0, \tag{15.188}$$

puisque $d^4 \leq 0$ et $(ab' - a'b)bb' \leq 0$. Donc $r + r' \leq r' + s$.

On suppose maintenant que $s \geq 0$, c'est à dire $cd \geq 0$. Alors $rs = \frac{ac}{bd}$ et $r's = \frac{a'c}{b'd}$. Donc

$$(acb'd - a'cbd)(bdb'd) = (ab' - a'b)(bb')(cd)d^2 \leq 0, \tag{15.189}$$

puisque $cd \geq 0$, $d^2 \geq 0$ et $(ab' - a'b)bb' \leq 0$. D'où $rs \leq r's$. □

Proposition 15.45. Le corps totalement ordonné $\mathbb{Q}$ est archimédien. C'est-à-dire que

$$\forall r \in \mathbb{Q}\ \forall s \in \mathbb{Q}_+^*\ \exists n \in \mathbb{N} \quad r \leq ns \tag{15.190}$$

Démonstration. Soient $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ des représentants respectifs de r et s. Comme $s \geq 0$ on a $cd \geq 0$. Soit un naturel n alors

$$r \leq ns \iff \frac{a}{b} \leq \frac{nc}{d} \tag{15.191}$$

$$\iff (ad - bnc)bd \leq 0 \tag{15.192}$$

$$\iff abd^2 \leq n(b^2cd). \tag{15.193}$$

Or l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ est archimédien, $b^2cd \in \mathbb{Z}_+^*$ donc le naturel n existe bien. Alors $\mathbb{Q}$ est archimédien. □

15.3.5.3 Représentation irréductible d'un rationnel

Définition 15.29. Soit un rationnel r. On appelle représentant irréductible du rationnel r tout couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que

1. $r = \frac{a}{b}$;
2. $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.

Théorème 15.28. *Tout rationnel admet au moins un représentant irréductible.*

Démonstration. Soit un rationnel r. Il existe alors $(c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ tel que $r = \frac{a}{b}$. Soit $d = \operatorname{pgcd}(a, b)$ comme $b \neq 0$ on a $\operatorname{pgcd}(a, b) \neq 0$. Soient a_1 et b_1 les quotients exacts de a et de b par d. C'est-à-dire que $a = a_1 d$ et $b = b_1 d$. On sait alors que $\operatorname{pgcd}(a_1, b_1) = 1$. Alors $ab_1 = a_1 b_1 d = a_1 b$. D'où $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$.

On a trouvé un représentant irréductible de r. On dit que r est mis sous forme irréductible. □

Théorème 15.29. *Soient* $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *et* $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *tels que* $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$. *Alors*

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \iff \exists d \in \mathbb{Z}^* \; a = dp \text{ et } b = dp \text{ et } |d| = \operatorname{pgcd}(a, b). \tag{15.194}$$

Démonstration. $\Longleftarrow$ Soit $d = \operatorname{pgcd}(a, b)$ tel que $a = dp$ et $b = dq$ alors $aq = dpq = bp$ donc $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$.

$\Longrightarrow$ Si $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ alors $aq = bp$ dans $\mathbb{Z}$ et $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$. Le théorème de Gauß nous affirme donc que $q \mid b$. Il existe donc $d \in \mathbb{Z}^*$ tel que $b = dq$. Alors $aq = bp = dpq$ donc $(a - dp)q = 0$ or $q \neq 0$ donc $a = dp$ puisque $\mathbb{Z}$ est intègre. Ainsi $\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(dp, dq) = |d| \operatorname{pgcd}(p, q) = |d|$.

□

Corollaire 15.29.1. *Pour tout* $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *et* $(p', q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *tels que* $\operatorname{pgcd}(p, q) = 1$ *et* $\operatorname{pgcd}(p', q') = 1$, *on a*

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \iff \exists \mu \in \{-1, 1\} \begin{cases} p' = \mu p \\ q' = \mu q \end{cases} . \tag{15.195}$$

Tout rationnel admet exactement deux représentants irréductibles et un unique représentant irréductible dont le dénominateur est un naturel non nul.

Chapitre 16

Espaces vectoriels

Sommaire

Dans tout ce chapitre, $(\mathbb{K},+,\cdot)$ est un corps, en pratique $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et en général E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

16.1 Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels

16.1.1 Structure d'espace vectoriel

Définition 16.1. Soit E un ensemble. On appelle loi de composition externe sur E à opérateurs dans le corps $\mathbb{K}$ toute application $\perp : \begin{cases} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda x \end{cases}$.

Définition 16.2. On appelle espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ tout triplet $(E, +, \perp$ $)$ où

1. $(E, +)$ est un groupe abélien ;
2. $\perp$ est une loi de composition externe sur E à opérateurs dans $\mathbb{K}$;
3. vérifiant les propriétés suivantes :

$$\forall(\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2 \ \forall x \in E \quad (\lambda + \lambda')x = \lambda x + \lambda' x; \tag{16.1}$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall (x, x)' \in E^2 \quad \lambda(x + x') = \lambda x + \lambda x'; \tag{16.2}$$

$$\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \ \forall x \in E \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x; \tag{16.3}$$

$$\forall x \in E \quad 1x = x. \tag{16.4}$$

Les éléments du corps $\mathbb{K}$ sont les scalaires et les éléments de E sont les vecteurs. Comme $(E, +)$ est un groupe abélien, on dispose d'un neutre pour la loi $+$, noté 0, appelé le vecteur nul. Attention à ne pas confondre l'addition vectorielle et l'addition scalaire. Il ne faut pas confondre non plus la multiplication interne dans le corps $\mathbb{K}$ et la multiplication externe $\perp$. Il n'y a pas de multiplication interne dans un espace vectoriel. Cela n'a aucun sens, dans un espace vectoriel, de multiplier les vecteurs entre eux. Il ne faut pas non plus ajouter un scalaire et un vecteur. Comme $(E, +)$ est un groupe, il est non vide. Alors un espace vectoriel n'est jamais vide.

16.1.2 Premiers exemples

16.1.2.1 Propositions préliminaires

Proposition 16.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soit $\mathbb{L}$ un sous-corps de $\mathbb{K}$. Alors E est un $\mathbb{L}$-espace vectoriel. Plus particuliérement, tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Démonstration. $(E, +)$ est un groupe abélien. $\mathbb{L}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$. On peut donc considérer comme loi externe à opérateurs dans $\mathbb{L}$ la loi induite par celle à opérateurs dans $\mathbb{K}$. Les propriétés de la définition sont respectées dans $\mathbb{K}$ alors elles le sont dans $\mathbb{L}$. □

Proposition 16.2. Tout corps est un espace vectoriel sur lui-même.

Démonstration. $(\mathbb{K}, +)$ est un groupe abélien. On prend comme loi externe à opérateurs dans $\mathbb{K}$ la multiplication de $\mathbb{K}$. Comme c'est un corps, la loi $\cdot$ est distributive sur la loi $+$. la loi $\cdot$ est associative. L'élément 1 est neutre pour la multiplication dans $\mathbb{K}$. □

Corollaire 16.2.1. *Tout corps est un espace vectoriel sur chacun de ses sous-corps.*

16.1.2.2 Espace vectoriel produit

Soient deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels $(E_1, +_1, \perp_1)$ et $(E_2, +_2, \perp_2)$. On munit le produit cartésien $E_1 \times E_2$

— d'une loi de composition interne noté $+$ définie par

$$\forall (x_1, y_1) \in E_1^2 \ \forall (x_2, y_2) \in E_2^2 \quad (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2); \tag{16.5}$$

— d'une loi de composition externe $\perp$ à opérateurs dans $\mathbb{K}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \ \forall (x_1, x_2) \in E^2 \quad \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2). \tag{16.6}$$

Ainsi $(E_1 \times E_2, +, \perp)$ est un espace vectoriel appelé espace vectoriel produit.

16.1.2.3 Espace vectoriel des applications d'un ensemble X vers un espace vectoriel E

Soient X un ensemble non vide et $(E, +_E, \perp_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On s'intéresse à l'ensemble des applications de X vers E, c'est-à-dire E^X. Soient deux fonctions f et g de E^X. On définit la fonction $f + g$ par

$$\forall x \in E \quad (f + g)(x) = f(x) +_E g(x). \tag{16.7}$$

Soit l'application " multiplication par un scalaire" $\perp$: $\begin{cases} \mathbb{K} \times E^X & \longrightarrow & E^X \\ (\lambda, f) & \longmapsto & \lambda f \end{cases}$ telle que

$$\forall x \in E \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x). \tag{16.8}$$

Ainsi $(E^X, +, \perp)$ obtient une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

16.1.3 Règles de calcul dans un espace vectoriel

Soit $(E, +, \perp)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 16.3. Soient un naturel n, $\lambda, \lambda', \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des scalaires de $\mathbb{K}$ et $x, x', x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs de E. Alors on a

A	B
$0x = 0$	$\lambda 0 = 0$
$(-\lambda)x = -(\lambda x)$	$\lambda(-x) = -(\lambda x)$
$(\lambda - \lambda')x = \lambda x - \lambda' x$	$\lambda(x - x') = \lambda x - \lambda x'$
$\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x$	$\lambda \left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda x_i$
$(k\lambda)x = k(\lambda x)$	$\lambda(kx) = k(\lambda x)$

Démonstration. On définit pour tout vecteur x de E l'application f_x: $\begin{cases} \mathbb{K} & \longrightarrow & E \\ \lambda & \longmapsto & \lambda x \end{cases}$.
C'est un morphisme de groupes de $(\mathbb{K}, +)$ dans $(E, +)$. C'est-à-dire que

$$\forall (\lambda, \lambda') \in \mathbb{K}^2 \quad f_x(\lambda + \lambda') = f_x(\lambda) + f_x(\lambda'). \tag{16.9}$$

Alors les propriétés de la colonne A découlent des propriétés des morphismes de groupes.

De la même manière on définit pour tout scalaire λ de $\mathbb{K}$ l'application $h_\lambda\colon \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}\right.$. C'est un endomorphisme du groupe $(E,+)$. C'est-à-dire que

$$\forall (x,x') \in E^2 \quad h_\lambda(x+x') = h_\lambda(x) + h_\lambda(x'). \tag{16.10}$$

Alors les propriétés de la colonne B découlent des propriétés des morphismes de groupes. □

Proposition 16.4. Pour tout scalaire λ et tout vecteur x on a

$$\lambda x = 0 \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = 0. \tag{16.11}$$

Démonstration. Si $x = 0$ ou $\lambda = 0$ alors d'après ce qui précéde on a $\lambda x = 0$.

Si maintenant $\lambda \neq 0$, alors il est inversible dans $\mathbb{K}$ et λ^{-1} existe. Alors d'une part

$$\lambda^{-1}(\lambda x) = \lambda 0 = 0 \tag{16.12}$$

et d'autre part

$$\lambda^{-1}(\lambda x) = 1x = x. \tag{16.13}$$

Alors $x = 0$. On a montré que si $\lambda x = 0$ alors soit $\lambda = 0$ ou soit $x = 0$. □

Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Comme la fonction qu'on avait définit h_λ est un endomorphisme du groupe $(E,+)$, on dispose de son noyau $\mathrm{Ker}(h_\lambda)$ et de son image $\mathrm{Im}(h_\lambda)$. Alors

$$\mathrm{Ker}(h_\lambda) = \{x \in E \mid h_\lambda(x) = 0\} = \{0\}, \tag{16.14}$$

alors h_λ est injective. L'image vaut

$$\mathrm{Im}(h_\lambda) = \{y \in E \mid \exists x \in E \quad y = h_\lambda(x) = \lambda x\} = E, \tag{16.15}$$

donc h_λ est surjective.

Au final c'est un endomorphisme bijectif de E, donc un endomorphisme et un isomorphisme de E. Ainsi h_λ est un automorphisme de E.

Proposition 16.5. Pour tous scalaires λ et λ' de $\mathbb{K}$ et tous vecteurs x et x' de E on a

$$\lambda x = \lambda x' \iff \lambda = 0 \text{ ou } x = x'; \tag{16.16}$$

$$\lambda x = \lambda' x \iff x = 0 \text{ ou } \lambda = \lambda'. \tag{16.17}$$

Démonstration. Supposons que $\lambda x = \lambda x'$ on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \lambda x = \lambda x' &\iff \lambda x - \lambda x' = 0 && (16.18)\\ &\iff \lambda(x - x') = 0 && (16.19)\\ &\iff \lambda = 0 \text{ ou } x - x' = 0 && (16.20)\\ &\iff \lambda = 0 \text{ ou } x = x'. && (16.21) \end{aligned}$$

Supposons que $\lambda x = \lambda' x$ on a les équivalences suivantes

$$\begin{aligned} \lambda x = \lambda' x &\iff \lambda x - \lambda' x = 0 && (16.22)\\ &\iff (\lambda - \lambda')x = 0 && (16.23)\\ &\iff x = 0 \text{ ou } \lambda - \lambda' = 0 && (16.24)\\ &\iff x = 0 \text{ ou } \lambda = \lambda'. && (16.25) \end{aligned}$$

□

16.1.4 Sous-espaces vectoriels

16.1.4.1 Définition et caractérisation

Définition 16.3. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +_E, \perp_E)$ et E' une partie de E. On dit que E' est un sous-espace vectoriel de E si E' est stable par $+_E$ et $\perp_E$ et si, muni des lois induites, $(E', +_{E'}, \perp_{E'})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 16.1 (Caractérisation des sous-espaces vectoriels)**.** *Il y a équivalence entre les assertions suivantes*

1. *E' est un sous-espace vectoriel de E ;*
2. *E' est une partie de E non vide stable pour $+$ et $\perp$;*
3. *E' est une partie de E non vide telle que*
$$\forall (x, y) \in E'^2 \ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \lambda x + \mu y \in E'; \tag{16.26}$$
4. *E' est une partie de E non vide telle que*
$$\forall (x, y) \in E'^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x + y \in E'; \tag{16.27}$$
5. *$(E', +, \perp)$ est un sous-groupe de $(E, +)$ et E' est stable par $\perp$.*

Démonstration. On montre ces équivalences de manière circulaire :

1 $\implies$ 2 C'est la définition d'un sous-espace vectoriel ;

2 $\implies$ 3 on a déjà $E' \neq \emptyset$ et $E' \subset E$ et l'équation (**??**) est la découle de la définition de la stabilité par $\perp$ et de la stabilité par $+$;

3 $\implies$ 4 on a déjà $E' \neq \emptyset$ et $E' \subset E$ et l'équation (**??**) découle de l'équation (**??**) en prenant $\mu = 1$;

4 $\implies$ 5 on a déjà $E' \neq \emptyset$ et $E' \subset E$ et on prend dans (**??**) $\lambda = -1$ et on obtient
$$\forall (x, y) \in E'^2 \quad y - x \in E', \tag{16.28}$$
alors par caractérisation E' est un sous-groupe de E ; comme E' est un sous-groupe, $0 \in E'$ et
$$\forall x \in E' \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x + 0 = \lambda x \in E', \tag{16.29}$$
et donc E' est stable par $\perp$.

5 $\implies$ 1 on a déjà $E' \subset E$ et E' stable par $\perp$ et par $+$ (puisque c'est un sous-groupe de $(E, +)$). On peut considérer E' muni des lois induites et on a

— $(E', +_{E'})$ est un groupe abélien puisque c'est un sous-groupe du groupe abélien $(E, +_E)$;

— la loi de composition externe est la loi induite par celle de E ;

— les propriétés du troisième point de la définition d'un espace vectoriel sont vérifiées sur E' puisqu'elles le sont sur E et on considère les lois induites ;

donc $(E', +_E, \perp_E)$ est un sous-espace vectoriel de E.

□

16.1.4.2 Exemples

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\{0\}$ et E sont les sous-espaces vectoriels triviaux de E. Si E_1 est un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et si E_2 est un sous-espace vectoriel de E_1 alors E_2 est un sous-espace vectoriel de E. L'ensemble des suites réelles bornées $B(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit un intervalle réel I, l'ensemble des fonction dérivables sur I, $\mathcal{D}(I,\mathbb{R})$, est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de I vers $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^I$. Idem pour $\mathcal{C}(I,\mathbb{R})$, pour $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$, et pour $\mathcal{C}^\infty(I,\mathbb{R})$. $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$:
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$;
- $\mathbb{R} \neq \emptyset$;
- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \lambda x + y \in \mathbb{R}$.

Mais $\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

16.2 Applications linéaires

16.2.1 Notion d'application linéaire

16.2.1.1 Définition

Définition 16.4. Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel $(E,+_E,\perp_E)$ et $(F,+_F,\perp_F)$. On appelle application linéaire de E vers F tout morphisme u du groupe $(E,+_E)$ sur le groupe $(F,+_F)$ tel que

$$\forall x \in E\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad u(\lambda x) = \lambda u(x). \tag{16.30}$$

Autrement dit

$$\forall (x,x') \in E^2\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x'). \tag{16.31}$$

16.2.1.2 Vocabulaire

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et u une application linéaire de E vers F. On note $\mathcal{L}\left(E,F\right)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F. Si $E = F$, $+_E = +_F$ et $\perp_E = \perp_F$ on dira que u est un endomorphisme linéaire de E ou encore opérateur linéaire de E. On note $\mathcal{L}\left(E\right)$ leur ensemble. Si u est bijective, on dira que u est un isomorphisme linéaire de E dans F. On dira alors que E et F sont isomorphes si et seulement s'il existe un isomorphisme de l'un vers l'autre. On notera $\mathbf{Isom}\left(E,F\right)$ leur ensemble. Si u est un endomorphisme linéaire et un isomorphisme linéaire, on dira que c'est un automorphisme linéaire de E et on note $\mathcal{GL}\left(E\right)$ leur ensemble.

16.2.1.3 Propriétés

Soient E et F deux K-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}\left(E,F\right)$.

Proposition 16.6. *u est un morphisme du groupe $(E,+_E)$ vers $(F,+_F)$, c'est-à-dire que*

$$\forall (x,x') \in E^2 \quad u(x +_E x') = u(x) +_F u(x'). \tag{16.32}$$

Alors u vérifie les égalités suivantes

1. $u(0) = 0$;
2. $\forall x \in E \quad u(-x) = -u(x)$;
3. $\forall (x, x') \in E^2 \quad u(x - x') = u(x) - u(x')$;
4. $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n \quad u\left(\sum_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n u(x_i)$.

De plus on dispose de l'image et du noyau de u :

$$\mathrm{Im}(u) = \{y \in F \mid \exists x \in E \quad y = f(x)\}\,; \tag{16.33}$$

$$\mathrm{Ker}(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0\}\,. \tag{16.34}$$

Proposition 16.7.

$$u \text{ est injective} \iff \mathrm{Ker}(u) = \{0\}; \tag{16.35}$$

$$u \text{ est surjective} \iff \mathrm{Im}(u) = F. \tag{16.36}$$

Si E_1 est un sous-espace vectoriel de E, on peut considérer la restriction $u_1\colon \left\{\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & u(x) \end{array}\right.$. Alors $u \in \mathcal{L}\left(E_1, F\right)$, $\mathrm{Ker}(u_1) = E_1 \cap \mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u_1) = u(E_1)$.

Proposition 16.8. Soient un naturel n non nul, $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des scalaires de $\mathbb{K}$. On dispose de $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in E$. Alors

$$u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(x_i). \tag{16.37}$$

16.2.1.4 Exemples

Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +_E, \perp_E)$ et E_1 un sous-espace vectoriel de E. On définit $j\colon \left\{\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}\right.$ appelé injection canonique de E_1 dans E et $j \in \mathcal{L}\left(E_1, E\right)$. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On dispose de l'espace vectoriel produit $E \times F$ muni des lois produits. On définit $\Pi\colon \left\{\begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \longmapsto & x \end{array}\right.$, et alors $\Pi \in \mathcal{L}\left(E, F\right)$ et Π est surjective $\forall x \in E \quad x = \Pi(x, 0)$.

Homothétie Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Pour tout scalaire λ, on définit l'application $h_\lambda\colon \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array}\right.$. Ces fonctions vérifient les propositions suivantes

Proposition 16.9. Pour tout scalaire λ, $h_\lambda \in \mathcal{L}\left(E\right)$.

Démonstration. On a déjà vu que c'est un endomorphisme du groupe $(E, +)$ (cf. la sous-section sur les régles de calculs dans un espace vectoriel). Il reste à vérifier que

$$\forall x \in E \; \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad h_\lambda(\alpha x) = \alpha h_\lambda(x) \tag{16.38}$$

En effet, grâce à la pseudo-associativité et à la commutativité de la multiplication dans le corps $\mathbb{K}$, on a pour tout scalaire α et tout vecteur x

$$h_\lambda(\alpha x) = \lambda(\alpha x) = \alpha(\lambda x) = \alpha h_\lambda(x). \tag{16.39}$$

Alors $h_\lambda \in \mathcal{L}\left(E\right)$. $\square$

Proposition 16.10 (Commutativité des homothéties)**.** Pour tous scalaire λ et μ, on a

$$h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu} = h_\mu \circ h_\lambda. \tag{16.40}$$

Démonstration. Soit un vecteur x, alors

$$\begin{aligned} h_\lambda \circ h_\mu(x) &= \lambda(\mu x)) && (16.41)\\ &= (\lambda\mu)(x) && (16.42)\\ &= h_{\lambda\mu}(x). && (16.43) \end{aligned}$$

Alors $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu}$. Comme la multiplication est commutative sur $\mathbb{K}$, on peut faire commuter les deux applications $h_\mu \circ h_\lambda = h_\lambda \circ h_\mu$. □

Proposition 16.11. Pour tout scalaire λ non nul, h_λ est bijective et $(h_\lambda)^{-1} = h_{\lambda^{-1}}$.

Démonstration. Le scalaire λ est non nul donc son inverse existe et d'après la proposition précédente,

$$h_{\lambda^{-1}} \circ h_\lambda = h_\lambda \circ h_{\lambda^{-1}} = h_1 = \operatorname{Id}. \tag{16.44}$$

□

Dérivation Soit un intervalle réel I. On appelle application de dérivation l'application telle que $\mathcal{D}\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{D}(I,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^I \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$. Cette application est linéaire,

$$\forall (f,g) \in \mathcal{D}(I,\mathbb{R})^2 \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \mathcal{D}(\alpha f + g) = \alpha\mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(g). \tag{16.45}$$

16.2.2 Images directe et réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

16.2.2.1 Image directe

Théorème 16.2. *Soient E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E,F)$, E_1 un sous-espace vectoriel de E. Alors l'image directe $u(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Démonstration. Déjà $u(E_1)$ est inclus dans F par définition et il n'est pas vide, car $0 \in E_1$ et u est linéaire donc $u(0_E) = 0_F \in u(E_1)$. Soient deux vecteurs x, y de $u(E_1)$ et un scalaire λ. Alors il existe z et t dans E_1 tels que $x = u(z)$ et $y = u(t)$. Comme u est linéaire on a

$$\lambda x + y = \lambda u(z) + u(t) = u(\lambda z + t). \tag{16.46}$$

Comme z et t sont dans E_1 et que c'est un sous-espace vectoriel on a $\lambda z + t \in E_1$. Ainsi $\lambda x + y \in u(E_1)$. Par caractérisation $u(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F. □

Corollaire 16.2.1. *Soient deux K-espaces vectoriel E et F et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors $\operatorname{Im}(u) = u(E)$ est un sous-espace vectoriel de F.*

16.2.2.2 Image réciproque

Théorème 16.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$, F_1 un sous-espace vectoriel de F. Alors l'image réciproque $u^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. Par définition, l'image réciproque $u^{-1}(F_1)$ est incluse dans E. Elle n'est pas vide puisque F_1 est un sous-espace vectoriel, alors $0_F \in F_1$ et comme u est linéaire $u(0_E) = 0_F$ donc $0_E \in u^{-1}(F_1)$. Soient deux vecteurs x, y de $u^{-1}(F_1)$ et un scalaire λ. Comme u est linéaire $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$. Or comme F_1 est un sous-espace vectoriel et que $u(x) \in F_1$ et $u(y) \in F_1$ on a $u(\lambda x + y) \in F_1$ alors $\lambda x + y \in u^{-1}(F_1)$. Par caractérisation $u^{-1}(F_1)$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Corollaire 16.3.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors* $\mathrm{Ker}(u)$ *est un sous-espace vectoriel de E.*

16.2.3 Équations linéaires

Soient E et F deux espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. On veut résoudre l'équation

$$u(x) = b, \tag{16.47}$$

c'est-à-dire trouver l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{x \in E \mid u(x) = b\}. \tag{16.48}$$

Deux cas se présentent :
— soit $b \notin \mathrm{Im}(u)$ et alors $\mathcal{S}$ est vide ;
— soit $b \in \mathrm{Im}(u)$ alors il existe $x_0 \in E$ tel que $u(x_0) = b$, x_0 est la solution particulière et on dit que l'équation est compatible. Alors pour tout $x \in E$

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{S} &\iff u(x) = b & (16.49)\\ &\iff u(x) = u(x_0) & (16.50)\\ &\iff u(x - x_0) = 0_F & (16.51)\\ &\iff x - x_0 \in \mathrm{Ker}(u) & (16.52)\\ &\iff \exists y \in \mathrm{Ker}(u)\ x = x_0 + y. & (16.53) \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{x_0 + y \mid y \in \mathrm{Ker}(u)\} =$ "$x_0 + \mathrm{Ker}(u)$". On dit que c'est le sous-espace affine passant par x_0 de direction le sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}(u)$.

Applications : On peut par exemple étendre ce résultat aux suites récurrentes linéaires doubles, ou encore aux équations différentielles. Soient par exemples a, b et c trois applications au moins continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit aussi l'équation différentielle $y'' + ay' + by = c$ et l'application linéaire u : $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & f'' + af' + bf \end{array}\right.$. Alors l'équation différentielle peut s'écrire $u(f) = c$ et résoudre l'équation homogéne associée $u(f) = 0$ consiste à trouver le noyau de u. Si $c \in \mathrm{Im}\, u$ alors il existe $f_0 \in \mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $u(f_0) = c$ et f_0 est la solution dite particulière. L'ensemble des solution de l'équation différentielle est donc le sous-espace affine $\mathcal{S} = f_0 + \mathrm{Ker}(u)$.

16.2.4 $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathcal{L}(E,F),+,\perp)$

Théorème 16.4. *Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, alors l'ensemble des applications linéaires de E dans F $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel des applications de F dans E $(F^E,+,\perp)$.*

Démonstration. F étant un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on sait que $(F^E,+,\perp)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de plus

— $\mathcal{L}(E,F)$ est inclus dans F^E ;

— l'application nulle qui va de E dans F est linéaire, donc $\mathcal{L}(E,F)$ n'est pas vide ;

— Soient deux applications $f,g \in \mathcal{L}(E,F)$ et un scalaire α. Montrons que $h = \alpha f + g$ est linéaire. Soit alors deux vecteurs x,y de E et un scalaire λ et on a

$$\begin{aligned}
h(\lambda x+y) &= (\alpha f+g)(\lambda x+y) && (16.54)\\
&= \alpha f(\lambda x+y)+g(\lambda x+y) && (16.55)\\
&= \alpha(\lambda f(x)+f(y))+\lambda g(x)+g(y) && (16.56)\\
&= \lambda(\alpha f(x))+\lambda g(x)+\alpha f(y)+g(y) && (16.57)\\
&= \lambda(\alpha f(x)+g(x))+\alpha f(y)+g(y) && (16.58)\\
&= \lambda h(x)+h(y), && (16.59)
\end{aligned}$$

donc $h = \alpha f + g$ est linéaire, $h \in \mathcal{L}(E,F)$.

Alors par caractérisation, $\mathcal{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E. □

16.2.5 Formes linéaires

On sait que $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même.

Définition 16.5. Soit $(E,+,\perp)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E vers $\mathbb{K}$.

Soient, par exemple, deux reéls a et b tels que $a < b$ alors l'application

$$I\colon \left\{\begin{array}{ccc} C([a\,;b],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f(t)\mathrm{d}t \end{array}\right. \tag{16.60}$$

est une forme linéaire. Puisque pour toutes fonctions f et g continues de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{R}$ et tout sclaire α on a

$$\int_a^b (\alpha f(t)+g(t))\mathrm{d}t = \alpha\int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\mathrm{d}t \tag{16.61}$$

$$I(\alpha f+g) = \alpha I(f)+I(g). \tag{16.62}$$

Soit X un ensemble quelconque. $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même, donc on dispose du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^X$ des applications de X vers $\mathbb{K}$. Alors pour tout élément $a \in X$, on peut définir $\hat{a}\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}^X & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array}\right.$. La fonction $\hat{a}$ est une forme linéaire sur $\mathbb{K}^X$.

Théorème 16.5. *Toute forme linéaire non nulle est surjective.*

Démonstration. Soit $(E, +, \perp)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathbb{K}^E$ une forme linéaire non nulle. Comme elle est non nulle, il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) \neq 0$. On pose $\lambda = f(x_0)$. Comme il est non nul, on dispose de son inverse λ^{-1}. Pour tout scalaire μ, on a

$$\begin{aligned}
\mu &= 1\mu && (16.63)\\
&= \mu(\lambda\lambda^{-1}) && (16.64)\\
&= (\mu\lambda^{-1})f(x_0) && (16.65)\\
&= f(\mu\lambda^{-1}x_0). && (16.66)
\end{aligned}$$

Donc $\mu \in \mathrm{Im}(f)$. Alors $\mathbb{K} \subset \mathrm{Im}(f)$. L'autre inclusion est évidente donc $\mathbb{K} = \mathrm{Im}(f)$. Donc l'application f est surjective. □

Si E est un espace vectoriel, on note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E. Il est appelé le dual de E.

16.2.6 Ensemble des endomorphismes $\mathcal{L}(E)$

16.2.6.1 Composition d'applications linéaires

Théorème 16.6. *Soient trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F et G. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.*

Démonstration. Déjà, $v \circ u$ est bien définie puisque $\mathrm{Im}(u) \subset F$. Soient x et x' deux vecteurs de E et un scalaire λ. Alors

$$\begin{aligned}
v \circ u(\lambda x + x') &= v(u(\lambda x + x')) && (16.67)\\
&= v(\lambda u(x) + u(x')) && (16.68)\\
&= \lambda v \circ u(x) + v \circ u(x'), && (16.69)
\end{aligned}$$

donc $v \circ u$ est linéaire. □

Proposition 16.12. Soient trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F et G et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On définit $\Phi_u \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F, G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ v & \longmapsto & v \circ u \end{array} \right.$. Alors Φ_u est linéaire.

Démonstration. Soient deux applications linéaires v, v' de $\mathcal{L}(F, G)$ et un scalaire λ. On a

$$\Phi_u(\lambda v + v') = (\lambda v + v') \circ u \qquad \lambda\Phi_u(v) + \Phi_u(v') = \lambda v \circ u + v' \circ u. \quad (16.70)$$

Alors en appliquant cette fonction à tout vecteur x de E, on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi_u(\lambda v + v')(x) &= ((\lambda v + v') \circ u)(x) && (16.71)\\
&= \lambda v \circ u(x) + v' \circ u(x) && (16.72)\\
&= (\lambda v \circ u + v' \circ u)(x) && (16.73)\\
&= (\Phi_u(v) + \Phi_u(v'))(x). && (16.74)
\end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour tout $x \in E$, on a alors $\Phi_u(\lambda v + v') = \lambda\Phi_u(v) + \Phi_u(v')$. Φ_u est donc linéaire. □

Corollaire 16.12.1. *La loi de composition* $\circ$ *est distributive à droite par rapport à la loi* $+$ *dans* $\mathcal{L}(E)$.

$$\forall (u,v,v') \in \mathcal{L}(E)^3 \quad (v+v') \circ u = v \circ u + v' \circ u. \tag{16.75}$$

Ce qui est valable même si les applications ne sont pas linéaires.

Proposition 16.13. Soient trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E, F, G et $u \in \mathcal{L}(F,G)$. On définit $\Psi_v : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E,G) \\ v & \longmapsto & v \circ u \end{array} \right.$. Alors Ψ_v est linéaire.

Démonstration. Soient deux applications linéaires u, u' de $\mathcal{L}(E,F)$ et un scalaire λ. On a

$$\Psi_v(\lambda u + u') = v \circ (\lambda u + u') \qquad \lambda \Psi_v(u) + \Psi_v(u') = \lambda v \circ u + v \circ u'. \tag{16.76}$$

Alors en appliquant cette fonction à tout vecteur x de E, on obtient

$$\begin{aligned} \Psi_v(\lambda u + u')(x) &= v \circ (\lambda u + u')(x) &(16.77)\\ &= \lambda v(u(x)) + v(u'(x)) &(16.78)\\ &= \lambda v \circ u(x) + v \circ u'(x) &(16.79)\\ &= (\lambda \Psi_v(u) + \Psi_v(u'))(x). &(16.80) \end{aligned}$$

Attention, l'égalité (**??**) est valable parce que v est linéaire. Comme ceci est vrai pour tout $x \in E$, on a alors $\Psi_v(\lambda u + u') = \lambda \Psi_v(u) + \Psi_v(u')$, et donc Ψ_v est linéaire. □

Corollaire 16.13.1. *La loi de composition* $\circ$ *est distributive à gauche par rapport à la loi* $+$ *dans* $\mathcal{L}(E)$.

$$\forall (u,v,v') \in \mathcal{L}(E)^3 \quad v \circ (u+u') = v \circ u + v \circ u'. \tag{16.81}$$

Ce qui est valable uniquement si v *est linéaire.*

16.2.6.2 Structure de $\mathcal{L}(E)$

Soit $(E, +, \perp)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires de E. Alors

- $(\mathcal{L}(E), +, \perp)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et son élément nul est l'application nulle ;
- $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau :
  - $(\mathcal{L}(E), +)$ est un groupe abélien (puisque $(\mathcal{L}(E), +, \perp)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel),
  - on a vu que la loi $\circ$ était associative et distributive par rapport à la loi $+$,
  - l'élément neutre pour $\circ$ est l'identité $\mathrm{Id}_{\mathcal{L}(E)}$;
- la linéarité des fonctions construites Φ_u et Ψ_v entraînent que

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(E)^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda u \circ v = (\lambda u) \circ v = u \circ (\lambda v). \tag{16.82}$$

Ces trois points principaux signifient que $(\mathcal{L}(E), +, \circ, \perp)$ est une $\mathbb{K}$-algébre.

16.2.6.3 Groupe linéaire $\mathcal{GL}(E)$

Théorème 16.7. *Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F. Alors*

$$u \in \mathbf{Isom}(E,F) \implies u^{-1} \in \mathbf{Isom}(E,F). \tag{16.83}$$

Démonstration. Soit un isomorphisme u de E dans F. Comme u est bijective, son inverse u^{-1} est bien définie de F dans E et elle est aussi bijective. Montrons qu'elle est linéaire. Soient deux vecteurs x et x' de E et un scalaire λ. Alors

$$\begin{aligned} u^{-1}(\lambda x + x') &= u^{-1}(\lambda u \circ u^{-1}(x) + u \circ u^{-1}(x')) && (16.84)\\ &= u^{-1}(u(\lambda u^{-1}x + u^{-1}(x'))) && (16.85)\\ &= \lambda u^{-1}x + u^{-1}(x'). && (16.86)\end{aligned}$$

Donc u^{-1} est linéaire et comme elle est aussi bijective on a $u^{-1} \in \mathbf{Isom}(E,F)$. □

Corollaire 16.7.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors*

$$u \in \mathcal{GL}(E) \implies u^{-1} \in \mathcal{GL}(E). \tag{16.87}$$

Étant donné un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, on dispose de
- $\mathcal{GL}(E) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid u \text{ est bijective}\}$;
- $\mathfrak{U}(\mathcal{L}(E)) = \{u \in \mathcal{L}(E) \mid \exists v \in \mathcal{L}(E) \quad v \circ u = u \circ v = Id_E\}$ est le groupe des inversible de l'anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$.

Proposition 16.14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors

$$\mathcal{GL}(E) = \mathfrak{U}(\mathcal{L}(E)). \tag{16.88}$$

Démonstration. Soit $u \in E^E$, alors

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{GL}(E) &\iff u \in \mathcal{L}(E) \text{ et u bijective} && (16.89)\\ &\iff u \in \mathcal{L}(E) \quad \exists v \in E^E \; v \circ u = u \circ v = \mathrm{Id}_E && (16.90)\\ &\iff u \in \mathcal{L}(E) \quad \exists v \in \mathcal{L}(E) \; v \circ u = u \circ v = \mathrm{Id}_E && (16.91)\\ &\iff u \in \mathfrak{U}(\mathcal{L}(E)). && (16.92)\end{aligned}$$

La deuxième équivalence est due à la caractérisation des bijections et la troisième au corollaire précédent. Du coup $\mathcal{GL}(E) = \mathfrak{U}(\mathcal{L}(E))$. □

Théorème 16.8. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Alors $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe appelé groupe des automorphismes linéaires de E, ou groupe linéaire de E.*

Démonstration. On sait que $\mathcal{GL}(E) = \mathfrak{U}(\mathcal{L}(E))$ et on a vu dans le chapitre **??** au théorème **??** à la page **??** que c'est un groupe. □

16.3 Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

16.3.1 Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels

Théorème 16.9. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble quelconque et $(E_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous-espaces vectoriels de E. Alors $\bigcap_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration. On note F cette intersection. Alors
— par définition F est inclus dans E ;
— pour tout $i \in I$, E_i est un sous-espace vectoriel donc $0 \in E_i$. Alors $0 \in F$ et F est non vide ;
— soient un scalaire λ et deux vecteurs $(x, y) \in F^2$. Comme ils sont dans F, ils sont dans tous les E_i pour $i \in I$; et comme chaque E_i est un sous-espace vectoriel, on a $\lambda x + y \in E_i$ et comme c'est vrai pour chaque $i \in I$ alors $\lambda x + y \in F$.

Par caractérisation, F est un sous-espace vectoriel de E. □

En général, l'union de deux sous-espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$:
— $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel ;
— $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$ aussi.

Pourtant $\mathbb{R} \cup \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ n'est pas un sous-espace vectoriel. En effet $1 \in \mathbb{R}$ donc $1 \in \mathbb{R} \cup \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ et $\mathrm{i} \in \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ donc $\mathrm{i} \in \mathbb{R} \cup \mathrm{i}\,\mathbb{R}$, mais $1 + i \notin \mathbb{R} \cup \mathrm{i}\,\mathbb{R}$. Donc $\mathbb{R} \cup \mathrm{i}\,\mathbb{R}$ n'est pas stable par addition. Ce n'est donc pas un soius-espace vectoriel.

16.3.2 Sous-espace vectoriel engendré par une partie

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et X une partie quelconque de E.

16.3.2.1 Définition de $\operatorname{Vect} X$

Soit $\Xi = \{E' \in \mathfrak{P}(E) \mid E'$ est un sous-espace vectoriel de E et $X \subset E'\}$. Alors
— Ξ est une partie non vide car $E \in \Xi$;
— d'après la dernière sous section, $\bigcap_{E' \in \Xi} E'$ est un sous-espace vectoriel de E ;
— pour tout $E' \in \Xi$, on a $X \in E'$ donc il est dans l'intersection $X \subset \bigcap_{E' \in \Xi} E'$;
— soit E'_0 un sous-espace vectoriel de E qui contient X, alors par définition $E'_0 \in \Xi$.

Donc $\bigcap_{E' \in \Xi} E' \subset E'_0$.

Définition 16.6. Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et X une partie de E. L'ensemble Ξ des sous-espaces vectoriels de E qui contiennent X admet un plus petit élément pour l'inclusion, c'est $\bigcap_{E' \in \Xi} E'$. Ce plus petit élément est appelé sous-espace vectoriel engendré par la partie X et est noté $\operatorname{Vect}(X)$.

En "clair" : $\operatorname{Vect}(X)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant X.

Proposition 16.15 (Caractérisation pratique)**.** Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et X une partie de E. Pour tout $E_1 \in \mathfrak{P}(E)$,

$$E_1 = \operatorname{Vect}(X) \iff \begin{cases} E_1 \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \\ X \subset E_1 \\ \forall E_2 \text{ sous-espace vectoriel de E } X \subset E_2 \implies E_1 \subset E_2 \end{cases}. \tag{16.93}$$

16.3.2.2 Description de Vect(X)

Proposition 16.16. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Pour toute partie X de E, $X = \text{Vect}(X)$ si et seulement si X est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Par définition Vect(X) est un sous-espace vectoriel de E donc si $X = \text{Vect}(X)$ alors X est un sous-espace vectoriel de E. Si maintenant on vérifie les hypothèses pour la caractérisation
- $E_1 = X$ est un sous-espace vectoriel de E ;
- $X \subset E_1 = X$;
- pour tout sous-espace vectoriel E_2 de E si $X \subset E_2$ alors $X = E_1 \subset E_2$.

Comme elles sont validées, on peut écrire que $E_1 = X = \text{Vect}(X)$. □

Proposition 16.17. Si $X = \emptyset$ alors Vect$(X) = \{0_E\}$.

Démonstration. On démontre ce résultat grâce à une caractérisation. Vérifions les hypothèses :
- $\{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E ;
- $\emptyset \subset \{0_E\}$
- pour tout sous-espace vectoriel E_2 de E, $\{0\} \subset E_2$.

Alors par caractérisation, Vect$(\emptyset) = \{0_E\}$. □

Proposition 16.18. Si $X \in \mathfrak{P}(E) \setminus \{\emptyset\}$ alors

$$\text{Vect}(X) = \left\{ y \in E \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}^* \ \exists (x_1, \dots, x_n) \in X^n \ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\}. \tag{16.94}$$

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de X.

Démonstration. Soit

$$V = \left\{ y \in E \;\middle|\; \exists n \in \mathbb{N}^* \ \exists (x_1, \dots, x_n) \in X^n \ \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right\}. \tag{16.95}$$

On va montrer que $V = \text{Vect}(X)$ par caractérisation :
- V est un sous-espace vectoriel de E :
  - $V \subset E$;
  - $V \neq \emptyset$ car $X \neq \emptyset$ donc il existe $x \in X$ et $x = 1x \in V$;
  - Soit deux vecteurs $y, z \in V$ et un scalaire α :

$$y \in V \quad \exists n \in \mathbb{N}^* \ \exists x_1, \dots, x_n \in X \ \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \ y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \tag{16.96}$$

$$z \in V \quad \exists p \in \mathbb{N}^* \ \exists x'_1, \dots, x'_p \in X \ \exists \lambda'_1, \dots, \lambda' \in \mathbb{K} \ z = \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i x'_i, \tag{16.97}$$

alors

$$\alpha y + z = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i x'_i \tag{16.98}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i) x_i + \sum_{i=1}^{p} \lambda'_i x'_i, \tag{16.99}$$

et donc $\alpha y + z \in V$.

Alors par caractérisation, V est un sous-espace vectoriel de E.

— $X \subset V$: en effet pour tout $x \in X$, $x = 1x \in V$;
— soit F un sous-espace vectoriel de E qui contient X, alors F est stable par combinaison linéaire et donc il contient toutes les combinaisons linéaires d'éléments de X, c'est-à-dire V.

Alors par caractérisation, $V = \mathrm{Vect}(X)$. □

Définition 16.7. Si $E_1 = \mathrm{Vect}(X)$, on dira que X est une partie génératrice du sous-espace vectoriel E_1.

Définition 16.8. Si X est une partie finie de E de cardinal $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $X = \{x_1, \ldots, x_q\}$ et tel que $\mathrm{Vect}(X) = \{\sum_{i=1}^{q} \lambda_i x_i \ \lambda_1, \ldots, \lambda_q \in \mathbb{K}\}$ alors X est appelé une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(X)$.

Il n'y a pas d'unicité de la famille génératrice, en effet $\{0\} = \mathrm{Vect}(\emptyset) = \mathrm{Vect}(\{0\})$.

Exemples : Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ on a $\mathbb{R} = \mathrm{Vect}(\{1\}) = \mathrm{Vect}(\{\pi\})$, $\mathrm{i}\,\mathbb{R} = \mathrm{Vect}(\{\mathrm{i}\})$ et $\mathbb{C} = \mathrm{Vect}(\{1, \mathrm{i}\})$ et alors $\{1, \mathrm{i}\}$ est une famille génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ $\{1\}$ est une famille génératrice du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

16.3.3 Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 16.9. Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E puis E_1 et E_2 deux de ses sous-espaces vectoriels. On définit l'ensemble

$$E_1 + E_2 = \{y \in E \mid \exists (x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \quad y = x_1 + x_2\}, \tag{16.100}$$

et il est appelé la somme de E_1 et de E_2.

Théorème 16.10. *Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E puis E_1 et E_2 deux de ses sous-espaces vectoriels. Alors*

1. *$E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E ;*
2. *$E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(E_1 \cup E_2)$.*

Démonstration. 1. On démontre que c'est un sous-espace vectoriel par caractérisation :

— par définition $E_1 + E_2 \subset E$;
— comme E_1 et E_2 sont des sous esapces vectoriels de E, $0 \in E_1$ et $0 \in E_2$ donc par somme $0 = 0 + 0 \in E_1 + E_2$, donc il n'est pas vide ;

— pour tout scalaire λ et tous vecteusr y, y' de $E_1 + E_2$ on peut dire qu'il existe x_1, x'_1 dans E_1 et x_2, x'_2 dans E_2 tels que $y = x_1 + x_2$ et $y' = x'_1 + x'_2$, alors

$$\lambda y + y' = \lambda(x_1 + x_2) + x'_1 + x'_2 \tag{16.101}$$
$$= (\lambda x_1 + x'_1) + (\lambda x_2 + x'_2), \tag{16.102}$$

comme E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriel de E on a $(\lambda x_1 + x'_1) \in E_1$ et $(\lambda x_2 + x'_2) \in E_2$, ainsi $\lambda y + y' \in E_1 + E_2$.

Alors $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

2. — on sait que $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E ;
   — quelque soit $x_1 \in E_1$ on a aussi $0 \in E_2$ donc $x_1 = x_1 + 0 \in E_1 + E_2$, alors $E_1 \subset E_1 + E_2$, de la même manière $E_2 \subset E_1 + E_2$, ainsi en réunissant les deux ensembles : $E_1 \cup E_2 \subset E_1 + E_2$;
   — Soit un sous-espace vectoriel F de E qui contient $E_1 \cup E_2$, montrons que $E_1 + E_2 \subset F$: Soit $y \in E_1 + E_2$ alors il existe $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $y = x_1 + x_2$; comme $x_1 \in E_1 \subset E_1 \cup E_2 \subset F$ idem $x_2 \in E_2 \subset E_1 \cup E_2 \subset F$; F est un sous-espace vectoriel alors $y = x_1 + x_2 \in F$ et finalement $E_1 + E_2 \subset F$.

   Alors par caractérisation $E_1 + E_2 = \mathrm{Vect}(E_1 \cup E_2)$. Il est appelé l'espace somme de $E_1 \cup E_2$.

□

Définition 16.10. Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E puis E_1 et E_2 deux de ses sous-espaces vectoriels. On dit que la somme $E_1 + E_2$ est directe, on notera $E_1 \oplus E_2$, si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Par exemple, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus \mathrm{i}\,\mathbb{R}$. Puisque tout complexe z admet une partie réelle a et une partie imaginaire b tels que $z = a + \mathrm{i}\,b$, de plus $\mathbb{R} \cap \mathrm{i}\,\mathbb{R} = \{0\}$.

Théorème 16.11. *Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E puis E_1 et E_2 deux de ses sous-espaces vectoriels. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1. $\forall x \in E_1 + E_2 \ \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \quad x = x_1 + x_2$ *;*
2. $\exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \quad x_1 + x_2 = 0$ *;*
3. $\forall(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \quad x_1 + x_2 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$ *;*
4. $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.

Démonstration. $1 \implies 2$: On applique l'égalité à 0 puisque $E_1 + E_2$ est un sous esapce vectoriel de E.

$2 \implies 3$: On sait que $0_{E_1} + 0_{E_2} = 0_E$ et si $x_1 + x_2 = 0$ avec $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ alors par unicité on en déduit que $x_1 = x_2 = 0$.

$3 \implies 4$: Soit $x \in E_1 \cap E_2$ alors $-x \in E_1 \cap E_2$ puisque c'est un sous-espace vectoriel. Alors $0 = x - x$ donc d'après 3, $x = -x = 0$ donc $E_1 \cap E_2 \subset \{0\}$ et l'autre inclusion est vraie puisque c'est un sous-espace vectoriel.

$4 \implies 1$ Supposons que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Par définition de l'espace somme on sait que pour tout $x \in E_1 + E_2$ il existe $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Montrons que ce couple est unique : supposons qu'il existe un deuxième couple $(x'_1, x'_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x'_1 + x'_2$. Alors $x_1 + x_2 = x'_1 + x'_2$. Alors $x_1 - x'_1 = x_2 - x'_2$ or $x_1 - x'_1 \in E_1$ et $x_2 - x'_2 \in E_2$ et comme ils sont égaux ils sont dans l'intersection $E_1 \cap E_2$. Or comme elle est nulle, par hypothèse, donc $x_1 = x'_1$ et $x'_2 = x_2$. □

16.3.4 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

16.3.4.1 Définitions

Définition 16.11. Soient E_1 et E_2 des sous-espace vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. On dit que E_1 et E_2 sont supplémentaire dans E si et seulement si $E_1 \oplus E_2 = E$, c'est-à-dire si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $E = E_1 + E_2$.

Théorème 16.12. *Soient E_1 et E_2 deux sous-espace vectoriels d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors ils sont supplémentaires si et seulement si*

$$\forall x \in E\ \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \quad x = x_1 + x_2. \tag{16.103}$$

Démonstration. S'ils sont supplémentaires alors on a $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ (qui donne l'unicité du couple) et $E = E_1 + E_2$ (qui donne l'existence du couple). Si maintenant on suppose que

$$\forall x \in E\ \exists!(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \quad x = x_1 + x_2. \tag{16.104}$$

alors elle nous dit que $E \subset E_1 + E_2$ et comme l'autre inclusion est triviale on a $E = E_1 + E_2$. Par le théorème **??** c'est équivalent à $E_1 \cap E_2 = \{0\}$. □

Exemples : $\mathbb{R}$ et $\mathrm{i}\,\mathbb{R}$ sont supplémentaires dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel C. Pour n'importe quel $\mathbb{K}$-espace vectoriel E $E = E \oplus \{0\}$. Si on note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions et si on note P l'ensemble des fonctions paires et I l'ensemble des fonctions impaires alors $\mathbb{R}^R = P \oplus I$. En effet, ce sont des sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et on a montré au chapitre 1 que

$$\forall f \in \mathbb{R}^R\ \exists!(\varphi, \psi) \in P \times I \quad f = \varphi + \psi, \tag{16.105}$$

puisque pour toute fonction f on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \tag{16.106}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \tag{16.107}$$

Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire. Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est pas un sous-espace vectoriel puisqu'il ne contient pas 0.

16.3.4.2 Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

Définition 16.12. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et E_1 un sous-espace vectoriel de E. On appelle supplémentaire de E_1 dans E tout sous-espace vectoriel E_2 de E tel que $E = E_1 \oplus E_2$.

Un sous-espace vectoriel donné admet-il un supplémentaire ? Si oui, est-ce-que ce supplémentiare est unique ?

Pour l'existence, on la démontrera en dimension finie au chapitre **??** et en dimension infinie c'est une conséquence de l'axiome du choix. Cependant, il n'y a pas unicité du supplémentaire.

Proposition 16.19. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et E_1 un sous-espace vectoriel de E. Supposons que E_1 admettent deux supplémentaires notés E_2 et E_2'. Alors
— Ils sont isomorphes ;
— si $E_2 \subset E_2'$ ou l'inverse alors $E_2 = E_2'$.

Démonstration. — voir la sous-sous-section **??**
— On sait que $E = E_1 \oplus E_2 = E_1 \oplus E_2'$ et que $E_2 \subset E_2'$. Soit $x \in E_2' \subset E$ et comme $E = E_1 \oplus E_2$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Donc $x - x_2 = x_1$ et alors comme $x_2 \in E_2 \subset E_2'$ et comme c'est un sous-espace vectoriel on a $x - x_2 \in E_2'$ et $x_1 \in E_1$ comme ils sont égaux et que $E_1 \cap E_2' = 0$ alors $x = x_2 \in E_2$. On a montré $E_2' \subset E_2$ donc l'égalité.

□

16.3.4.3 Préparation du théorème du rang

Théorème 16.13. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Ainsi tout supplémentaire à* $\mathrm{Ker}(u)$ *est isomorphe à* $\mathrm{Im}(u)$.

Démonstration. Soit un supplémentaire S de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E. Construisons un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$. Soit l'application $v = u_{|S}^{|\mathrm{Im}(u)}$. Alors :

1. v est bien définie puisque pour tout $x \in S$, $u(x) \in \mathrm{Im}(u)$;
2. v est linéaire puisque c'est une restriction de l'application linéaire u ;
3. $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(u) \cap S = \{0\}$ puisque par hypothèse ils sont supplémentaires, alors v est injective ;
4. Montrons que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(v)$:
   (a) Déjà $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(u)$ par définition de v
   (b) et ensuite soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Comme $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus S$ il existe un unique couple $(z, t) \in \mathrm{Ker}(u) \times S$ tel que $x = z + t$. Alors $y = u(z + t) = u(z) + u(t) = u(t) = v(t)$ parce que $z \in \mathrm{Ker}(u)$ et parce que $t \in S$. Alors $y \in \mathrm{Im}(v)$. Ainsi $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Im}(v)$

   Par double inclusion $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Im}(v)$, donc v est surjective.

Finalement l'application v est bijective et linéaire. C'est donc un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(u)$. □

16.4 Éléments remarquables de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{GL}(E)$

Dans toute cette section, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni de son addition et de sa multiplication par un scalaire.

16.4.1 Projecteurs

16.4.1.1 Projections

Définition 16.13. Soient E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Pour tout vecteur $x \in E$ il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$ (d'après le théorème **??**). Alors on peut définir les applications

$p_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_1 \\ x & \longmapsto & x_1 \end{array} \right.$ et $p_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_2 \\ x & \longmapsto & x_2 \end{array} \right.$. L'application p_1 est appelée la projection sur E_1 parallèlement à E_2. De manière analogue, l'application p_2 est appelée la projection sur E_2 parallèlement à E_1.

Théorème 16.14. *Soiet E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. Soit aussi p_1 la projection sur E_1 parallèlement à E_2 et l'application p_2 la projection sur E_2 parallèlement à E_1. Alors ces projections vérifient les propriétés suivantes*

1. *p_1 et p_2 sont des endomorphismes de E ;*
2. $\mathrm{Im}(p_1) = E_1$ *et de manière analogue* $\mathrm{Im}(p_2) = E_2$ *;*
3. $\mathrm{Ker}(p_1) = E_2$ *et de manière analogue* $\mathrm{Ker}(p_2) = E_1$ *;*
4. *$p_1 \circ p_1 = p_1$ et de manière analogue $p_2 \circ p_2 = p_2$;*
5. *$p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$;*
6. *$p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$.*

Démonstration.

1. Soient x et y deux vecteurs de E et un scalaire λ. Puisque E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, il existe deux uniques couples $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ et $(y_1, y_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$. Alors
$$\lambda x + y = \lambda(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) = (\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2), \quad (16.108)$$
et comme E_1 et E_2 sont stables par combinaison linéaire $\lambda x_1 + y_1 \in E_1$ et $\lambda x_2 + y_2 \in E_2$ et comme cette décomposition est unique on a bien :
$$\lambda p_1(x) + p_1(y) = p_1(\lambda x + y); \quad (16.109)$$
$$\lambda p_2(x) + p_2(y) = p_2(\lambda x + y). \quad (16.110)$$
Ce qui montre bien que p_1 et p_2 sont linéaires, de plus par définition $\mathrm{Im}(p_1) \subset E_1 \subset E$ et $\mathrm{Im}(p_2) \subset E_2 \subset E$ donc $p_1, p_2 \in \mathcal{L}(E)$.
2. On démontre le résultat pour p_1. Par définition $\mathrm{Im}(p_1) \subset E_1$, alors montrons l'autre inclusion. Soit $x_1 \in E_1$ et on a $x_1 = x_1 + 0$ donc $p(x_1) = x_1$. Ainsi $x_1 \in \mathrm{Im}(p_1)$ et alors $E_1 \subset \mathrm{Im}(p_1)$. Par double inclusion $\mathrm{Im}(p_1) = E_1$.
3. On démontre le résultat pour p_1. Soit $x_2 \in E_2$ et comme $x_2 = 0 + x_2$ alors $p_1(x_2) = 0$, on a montré l'inclusion $E_2 \subset \mathrm{Ker}(p_1)$. Soit maintenant $x \in \mathrm{Ker}(p_1) \subset E$ alors $p_1(x) = 0$. Comme $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Comme $x_1 = p_1(x) = 0$ on a $x = x_2 \in E_2$. Alors on vient de montrer $\mathrm{Ker}(p_1) \in E_2$. Par double inclusion on obtient $\mathrm{Ker}(p_1) = E_2$.
4. On démontre le résultat pour p_1. Soit $x \in E$, alors $p_1(x) \in E_1$ donc $p_1(p_1(x)) = p_1(x)$ (puisque $\mathrm{Im}(p_1) = E_1$). donc $p_1 \circ p_1 = p_1$.
5. On démontre le résultat pour p_1. Soit $x \in E$, comme $p_2(x) \in E_2 = \mathrm{Ker}(p_1)$ alors $p_1(p_2(x)) = 0$ alors $p_1 \circ p_2 = 0$.
6. Soit un vecteur $x \in E$, il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. De plus $x_1 = p_1(x)$ et $x_2 = p_2(x)$ alors $x = (p_1 + p_2)(x)$. Finalament $p_1 + p_2 = \mathrm{Id}$.

□

Démonstration de la proposition **??**. Soient E_1, E_2, E_2' trois sous-espaces vectoriels de E tels que E_1 et E_2 soient supplémentaires et tels que E_1 et E_2' soient aussi supplémentaires.

$$E = E_1 \oplus E_2 = E_1 \oplus E_2' \tag{16.111}$$

Soit p_1 la projection sur E_1 parallèlement à E_2' et p_2' la projection sur E_2' parallèlement à E_1. Soit l'application $\varphi = p_2'{}_{|E_2}^{|E_2'}$, qui est légitime puisque $E_2' = \mathrm{Im}(p_2')$. L'application φ est linéaire puisque c'est une restriction de p_2' qui est linéaire. Comme E_2 est un supplémentaire de E_1 on a $E_1 = \mathrm{Ker}(p_2')$ et par définition $E_2' = \mathrm{Im}(p_2')$. D'après le théorème **??**, comme p_2' est linéaire tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(p_2')$ est isomorphe à $\mathrm{Im}(p_2')$. C'est-à-dire en remplaçant que φ est un isomorphisme de E_2 sur E_2'. $\square$

16.4.1.2 Projecteurs

Définition 16.14. On appelle projection tout endomorphisme $p \in \mathcal{L}(E)$ tel que $p \circ p = p$.

Proposition 16.20 (Caractérisation de l'image d'un projecteur)**.** Soit p un projecteur de E alors pour tout vecteur $x \in E$,

$$x \in \mathrm{Im}(p) \iff p(x) = x. \tag{16.112}$$

Démonstration. Si $p(x) = x$ alors $x \in \mathrm{Im}(p)$, c'est trivial. Soit maintenant $x \in \mathrm{Im}(p)$, alors il existe $y \in E$ tem que $x = p(y)$ et $p(x) = p(p(y)) = p(y) = x$. $\square$

Proposition 16.21 (Caractérisation des projecteurs)**.** Soit une application $p \in E^E$, alors

$$p \text{ est un projecteur} \iff p \in \mathcal{L}(E) \text{ et } \forall x \in \mathrm{Im}(p) \quad p(x) = x. \tag{16.113}$$

Démonstration. Si p est un projecteur alors par définition, p est linéaire et d'après la proposition **??** pour tout $x \in \mathrm{Im}(p)$ $p(x) = x$.

Si maintenant on suppose que $p \in \mathcal{L}(E)$ et $\forall x \in \mathrm{Im}(p)$ $p(x) = x$. On veut montrer que c'est un projecteur. Déjà p est linéaire et ensuite $p(x) = x \in \mathrm{Im}(p)$ donc $p(x) = p(p(x))$ alors $p \circ p = p$. $\square$

Proposition 16.22. Soit p un projecteur de E, alors

$$E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Im}(p). \tag{16.114}$$

Cependant, la réciproque n'est pas vraie. Ce n'est pas une caractérisation.

Démonstration. Soit $x \in \mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p)$. Alors comme $x \in \mathrm{Ker}(p)$ on a $p(x) = 0$ et comme on a aussi $x \in \mathrm{Im}(p)$ alors $p(x) = x$. Au final $x = 0$ donc $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) \subset \{0\}$. Ce sont aussi des sous-espaces vectoriel donjc leur intersection aussi donc l'autre inclusion est triviale. Ainsi $\mathrm{Ker}(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.

Soit un vecteur $x \in E$. On a $x = p(x) + (x - p(x))$ et $p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ et $p(x - p(x)) = p(x) - p(p(x)) = 0$ (p est un projecteur) alors $x - p(x) \in \mathrm{Ker}(p)$. On vient de montrer que $E \subset \mathrm{Im}(p) + \mathrm{Ker}(p)$. L'autre inclusion est triviale puisque ce sont des sous-espace vectoriels et donc $E = \mathrm{Ker}(p) + \mathrm{Im}(p)$.

Finalement le noyau et l'image d'un projecteur sont supplémentaire dans l'espace vectoriel E. $\square$

Proposition 16.23 (Équivalence entre projecteur et projection)**.** Les projections et les projecteurs de E vérifient :

1. Toute projection est un projecteur ;
2. Tout projecteur p est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallélement à $\mathrm{Ker}(p)$.

On pourra utiliser indifféremment les deux termes.

Démonstration.

1. Déjà vu au théorème **??** au point 4.
2. Si p est un projecteur, on a montré que $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$ (proposition **??**). Alors p est la projection su $\mathrm{Im}(p)$ parallélement à $\mathrm{Ker}(p)$.

□

Proposition 16.24 (Projecteur associé)**.** Soit un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$, alors $q = \mathrm{Id} - p$ est aussi un projecteur appelé projecteur associée de p et

$$\mathrm{Im}(q) = \mathrm{Ker}(p); \tag{16.115}$$
$$\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p); \tag{16.116}$$
$$p \circ q = q \circ p = 0. \tag{16.117}$$

Démonstration. On note $E_1 = \mathrm{Im}(p)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(p)$. D'après la sous-section **??** on sait que $q = \mathrm{Id} - p$ est la projection sur E_2 parallèlement à E_1 et les égalités en découlent. □

Définition 16.15. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ on définit l'ensemble des invariants

$$\mathrm{Inv}(u) = \{x \in E \mid u(x) = x\}, \tag{16.118}$$

et l'ensemble des opposés

$$\mathrm{Opp}(u) = x \in Eu(x) = -x. \tag{16.119}$$

Proposition 16.25. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Inv}(u)$ et $\mathrm{Opp}(u)$ sont des sous-espaces vectoriels de E.

Démonstration. Soit un vecteur $x \in E$

$$x \in \mathrm{Inv}(u) \iff u(x) = x \tag{16.120}$$
$$\iff (u - \mathrm{Id})(x) = 0 \tag{16.121}$$
$$\iff x \in \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}) \tag{16.122}$$

et alors $\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id})$, de la même manière $\mathrm{Opp}(u) = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id})$. Comme ce sont des noyaux d'applications linéaires, ce sont des sous-espaces vectoriels de E. □

Proposition 16.26. Pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Inv}(u) \cap \mathrm{Opp}(u) = \{0\}$.

Démonstration. L'inclusion $\{0\} \subset \mathrm{Inv}(u) \cap \mathrm{Opp}(u)$ est triviale puisque ce sont deux sous-espaces vecteoriels donc l'intersection l'est aussi. Soit $x \in \mathrm{Inv}(u) \cap \mathrm{Opp}(u)$ alors $-x = u(x) = x$ donc $2x = 0$ et comme dans $\mathbb{K}$ $2 \neq 0$ on a bien $x = 0$, alors $\mathrm{Inv}(u) \cap \mathrm{Opp}(u) \subset \{0\}$.

Au final $\mathrm{Inv}(u) \cap \mathrm{Opp}(u) = \{0\}$, cependant en général on n'a pas $E = \mathrm{Inv}(u) + \mathrm{Opp}(u)$. □

Proposition 16.27. Soit un projecteur $p \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathrm{Inv}(p) = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathrm{Opp}(p) = \{0\}$.

Démonstration. On a $\mathrm{Inv}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x\} = \mathrm{Im}(p)$, d'après la caractérisation de l'image d'un projecteur.

Ensuite soit $x \in \mathrm{Opp}(p)$ alors $p(x) = -x$ et comme p est linéaire on a $x = p(-x)$ et ainsi $x \in \mathrm{Im}(p) = \mathrm{Inv}(p)$. Donc $x \in \mathrm{Opp}(p) \cap \mathrm{Inv}(p) = \{0\}$. Alors $\mathrm{Opp}(p) \cap \mathrm{Inv}(p) \subset \{0\}$ et donc $\mathrm{Opp}(p) \subset 0$ et c'est un sous-espace vectoriel l'autre inclusion est triviale. Au final $\mathrm{Opp}(p) = \{0\}$. □

16.4.2 Homothéties vectorielles

Définition 16.16. Soit un scalaire λ, on appelle homothétie vectorielle de rapport λ l'application $h_\lambda \colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \lambda x \end{array} \right.$

Proposition 16.28. Soient λ, μ des scalaires et λ_0 un scalaire non nul, alors

1. $h_\lambda \in \mathcal{L}(E)$;
2. $h_\lambda \circ h_\mu = h_{\lambda\mu} = h_{\mu\lambda} = h_\mu \circ h_\lambda$;
3. $h_{\lambda_0} \in \mathcal{GL}(E)$ $(h_{\lambda_0})^{-1} = h_{\lambda_0^{-1}}$;
4. l'application $\Phi \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathcal{GL}(E) \\ \lambda & \longmapsto & h_\lambda \end{array} \right.$ est un morphisme de groupes du groupe $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \times)$ sur le groupe $(\mathcal{GL}(E), \circ)$. Soit $\mathcal{H} = \mathrm{Im}(\Phi)$, alors $\mathcal{H}$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$ isomorphe à $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \times)$.

Démonstration. Les trois premiers points ont déjà vu à la sous-sous section **??**.

Pour le quatrième point, l'application Φ est bien définie d'après le troisième point. C'est un morphisme grâce au deuxième point. Déjà $\Phi^{|\mathcal{H}}$ est surjectif par définition. Montrons qu'il est injectif.

Déjà $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \Phi(\lambda) = \mathrm{Id}\}$ et soit un scalaire non nul λ, alors

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) = 1 &\iff \forall x \in E \quad \lambda x = x && (16.123) \\ &\iff \forall x \in E \quad (\lambda - 1)x = 0 && (16.124) \\ &\iff \lambda = 1. && (16.125) \end{aligned}$$

Alors $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{1\}$ donc Φ est injectif.

Finalement Φ induit une bijection de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ sur $\mathcal{H} = \mathrm{Im}(\Phi)$. □

16.4.3 Symétries vectorielles

Définition 16.17. On appelle symétrie vectorielle de E tout endomorphisme involutif s de E, c'est-à-dire que $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{Id}$.

Proposition 16.29. Soit une symétrie de s de E, alors $s \in \mathcal{GL}(E)$ et $s^{-1} = s$.

Démonstration. Trivial □

16.4.3.1 Des projecteurs aux symétries

Soit un projecteur p de E, on dispose de $E_1 = \mathrm{Im}(p)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(p)$. On sait que $E = E_1 \oplus E_2$ et que p est la projection sur E_1 parallélement à E_2. On leui associe le projecteur $q = \mathrm{Id} - p$.

Proposition 16.30. L'application $s = p - q = 2p - \mathrm{Id}$ est une symétrie vectorielle de E, appellée la symétrie par rapport à E_1 selon E_2.

Démonstration. Comme $(p, q) \in \mathcal{L}(E)^2$ et que $s = p - q$ alors $s \in \mathcal{L}(E)$. De pluq

$$
\begin{aligned}
s \circ s &= (p - q) \circ (p - q) && (16.126)\\
&= p \circ p - p \circ q - q \circ p + q \circ q && (16.127)\\
&= p + q && (16.128)\\
&= \mathrm{Id}\,. && (16.129)
\end{aligned}
$$

Puisque $\circ$ est distributive à droite et à gauche et puisque p et q sont des projecteurs. □

Remarque : L'application $\sigma = q - p$ est la symétrie associée au projecteur q, ou la symétrie par rapport à E_2 selon E_1.

16.4.3.2 Des symétries aux projecteurs

Soit une symétrie vectorielle $s \in \mathcal{L}(E)$. Comme $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, le nombre $\frac{1}{2}$ existe et on définit une application $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id})$.

Proposition 16.31. L'application p est un projecteur de E et s est la symétrie associée à p.

Démonstration. Comme $s, \mathrm{Id} \in \mathcal{L}(E)$ alors $p \in \mathcal{L}(E)$. De plus

$$
\begin{aligned}
p \circ p &= \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}) \circ \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}) && (16.130)\\
&= \frac{1}{4}(s \circ s + s \circ \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \circ s + \mathrm{Id} \circ \mathrm{Id}) && (16.131)\\
&= \frac{1}{4}(\mathrm{Id} + s + s + \mathrm{Id}) && (16.132)\\
&= \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}). && (16.133)
\end{aligned}
$$

p est donc un projecteur, $s = 2p - \mathrm{Id}$ donc s est la symétrie associée à p. □

16.4.3.3 $\mathrm{Inv}(s)$ et $\mathrm{Opp}(s)$ pour une symétrie s

Si on garde les notations de la sous-sous section précédente, on a p, q des projecteurs et s une symétrie tels que $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id})$, $q = p - \mathrm{Id}$ et $E_1 = \mathrm{Im}(p)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(p)$. Alors pour tout $x \in E$

$$
\begin{aligned}
x \in \mathrm{Inv}(s) &\iff s(x) = x && (16.134)\\
&\iff p(x) - q(x) = p(x) + q(x) && (16.135)\\
&\iff 2q(x) = 0 && (16.136)\\
&\iff x \in \mathrm{Ker}(q). && (16.137)
\end{aligned}
$$

Alors comme $\mathrm{Ker}(q) = \mathrm{Im}(p) = E_1$ on a $\mathrm{Inv}(s) = E_1$.

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Opp}(s) &\iff s(x) = -x && (16.138)\\ &\iff p(x) - q(x) = -p(x) - q(x) && (16.139)\\ &\iff 2p(x) = 0 && (16.140)\\ &\iff x \in \mathrm{Ker}(p). && (16.141)\end{aligned}$$

Alors comme $\mathrm{Ker}(p) = E_2$ on a $\mathrm{Opp}(s) = E_2$.

Proposition 16.32. Soit une symétrie vectorielle s de E, alors

$$E = \mathrm{Inv}(s) \oplus \mathrm{Opp}(s). \tag{16.142}$$

Démonstration. Si on note p le projecteur associé à s, on a montré juste avant que $\mathrm{Opp}(s) = \mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Inv}(s) = \mathrm{Im}(p)$ et on sait que l'image et le noyau d'un projecteur sont supplémentaires (proposition **??**). $\square$

Exemple : Soit l'application $s\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & -x \end{array} \right.$, donc $s = -\mathrm{Id} \in \mathcal{L}(E)$. $s \circ s = (-\mathrm{Id}) \circ (-\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$ donc s est une symétrie. Le projecteur auquel s est associée est nul : $p = \frac{1}{2}(s+\mathrm{Id}) = 0$. Alors $E_1 = \mathrm{Im}(p) = \{0\}$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(p) = E$ et alors $\mathrm{Opp}(s) = \mathrm{Ker}(p) = E$ et $\mathrm{Inv}(s) = \mathrm{Im}(p) = \{0\}$.

16.4.4 Affinités vectorielles

16.4.4.1 Des projecteurs aux affinités

Lemme 16.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et E_1, E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, alors une application linéaire de E est parfaitement définie par son action sur E_1 et sur E_2. C'est-à-dire que*

$$\forall (u_1, u_2) \in \mathcal{L}(E)^2 \ \exists ! u \in \mathcal{L}(E) \quad u_{|E_1} = u_{1|E_1} \ u_{|E_2} = u_{2|E_2}. \tag{16.143}$$

On note p_1 la projection sur E_1 parallélement à E_2 et $p_2 = \mathrm{Id} - p_1$ la projection sur E_2 parallélement à E_1.

Unicité. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u_{|E_1} = u_{1|E_1}$ et $u_{|E_2} = u_{2|E_2}$. Pour tout $x \in E$, on a :

$$\begin{aligned} x &= p_1(x) + p_2(x) && (16.144)\\ u(x) &= u(p_1(x)) + u(p_2(x)) && (16.145)\\ &= u_1(p_1(x)) + u_2(p_2(x)) && (16.146)\\ &= [u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2](x). && (16.147)\end{aligned}$$

Donc nécessairement $u = u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2$ et il y a unicité. $\square$

Existence. Soit $u = u_1 \circ p_1 + u_2 \circ p_2$. Puisque $u_1, p_1, u_2, p_2 \in \mathcal{L}(E)$ on a $u \in \mathcal{L}(E)$.
- Si $x \in E_1$ alors $p_1(x) = x$ et $p_2(x) = 0$ donc $u(x) = u_1(x) + u_2(0) = u_1(x)$;
- Si $x \in E_2$ alors $p_1(x) = 0$ et $p_2(x) = x$ donc $u(x) = u_1(0) + u_2(x) = u_2(x)$.

Donc $u_{|E_1} = u_{1|E_1}$ $u_{|E_2} = u_{2|E_2}$. $\square$

Définition 16.18. Soient E_1 et E_2 deux supplémentaires dans E et un scalaire α. On appelle affinité de rapport α, de base E_1 selon E_2 l'unique application linéaire $a_\alpha \in \mathcal{L}(E)$ telle que $a_{\alpha|E_1} = \mathrm{Id}_{|E_1}$ et $a_{\alpha|E_2} = h_{\alpha|E_2}$.

Proposition 16.33. Avec les notations du lemme **??** et de la définition **??**, $a_\alpha = p_1 + \alpha p_2$.

Démonstration. Puisque E_1 et E_2 sont supplémentaires, alors $a_\alpha = a_{\alpha|E_1} + a_{\alpha|E_2}$, c'est à dire avec les notations de la définition $a_\alpha = \mathrm{Id} \circ p_1 + h_\alpha \circ p_2$ et donc pour tout $x \in E$ $a_\alpha(x) = p_1(x) + \alpha p_2(x)$. □

Cas particuliers : Si $E_1 = E$ et $E_2 = \{0\}$ alors $a_\alpha = \mathrm{Id}$ et si c'est le contraire, $E_1 = \{0\}$ et $E_2 = E$ alors $a_\alpha = h_\alpha$. $\alpha_{-1} = p_1 - p_2$ est une symétrie.

Proposition 16.34 (Propriétés des affinités vectorielles)**.** On considère toujours le même couple de sous-espaces vectoriels supplémentaire, $E = E_1 \oplus E_2$ et on considère les affinités de base E_1 selon E_2. Alors :

$$\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2 \quad a_\alpha \circ a_\beta = a_{\alpha\beta} = a_\beta \circ a_\alpha; \forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \quad a_\alpha \in \mathcal{GL}(E) \;\; (a_\alpha)^{-1} = a_{\alpha^{-1}}; \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad (a_\alpha - \mathrm{Id} \tag{16.148}$$

Démonstration.

$$a_\alpha \circ a_\beta = (p_1 + \alpha p_2) \circ (p_1 + \beta p_2) \tag{16.149}$$
$$= p_1 \circ p_1 + \beta p_1 \circ p_2 + \alpha p_2 \circ p_1 + \alpha\beta p_2 \circ p_2 \tag{16.150}$$
$$= p_1 + \alpha\beta p_2 \tag{16.151}$$
$$= a_{\alpha\beta} \tag{16.152}$$

puisque p_1 et p_2 sont des projecteurs.

Si α est non nul, alors il est inversible d'invers α^{-1} et on a

$$a_\alpha \circ a_{\alpha^{-1}} = a_{\alpha\alpha^{-1}} = \alpha_1 = p_1 + p_2 = \mathrm{Id} \tag{16.153}$$

donc $a_\alpha \in \mathcal{GL}(E)$ et $(a_\alpha)^{-1} = a_{\alpha^{-1}}$.

On a $a_\alpha - \mathrm{Id} = p_1 + \alpha p_2 - (p_1 + p_2) = (\alpha - 1)p_2$ et $a_\alpha - \alpha\,\mathrm{Id} = p_1 + \alpha p_2 - \alpha(p_1 + p_2) = (1 - \alpha)p_1$. Alors

$$(a_\alpha - \mathrm{Id}) \circ (a_\alpha - \alpha\,\mathrm{Id}) = -(\alpha - 1)^2 p_2 \circ p_1 = 0. \tag{16.154}$$

On a $a_\alpha - \mathrm{Id} = (\alpha - 1)p_2$ et comme $\alpha \neq 1$ on a $\mathrm{Ker}(a_\alpha - \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(p_2) = E_1$. De la même manière $a_\alpha - \alpha\,\mathrm{Id} = (1-\alpha)p_1$ et comme $\alpha \neq 1$ on a $\mathrm{Ker}(a_\alpha - \alpha\,\mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(p_1) = E_2$. Comme $E = E_1 \oplus E_2$ alors $E = \mathrm{Ker}(a_\alpha - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(a_\alpha - \alpha\,\mathrm{Id})$. □

Remarques : La troisième propriété fait appel à des notions de polynôme annulateur. Si p est est projecteur alors $p \circ p = p$ et on dit que $X^2 - X$ est annulateur de p. Si s est une symétrie, comme $s \circ s = \mathrm{Id}$ alors son polynôme annulateur est $X^2 - 1$. Si a_α est une affinité de rapport α alors $(X-1)(X-\alpha$ est son polynôme annulmateur. La quatrième propriété est en fait une conséquence de la troisième et du théorème de décomposition des noyaux, car les polynômes sont premiers entre eux cf. chapitre **??**.

Proposition 16.35. Soit un scalaire $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$, si une application $a \in \mathcal{L}(E)$ vérifie

$$(a - \mathrm{Id}) \circ (a - \alpha\,\mathrm{Id}) = 0, \tag{16.155}$$

alors a est une affinité vectorielle de rapport α.

Démonstration. Comme $1-\alpha \neq 0$, on peut poser $p_1 = \frac{1}{1-\alpha}(a - \alpha\,\mathrm{Id})$. Cette application est un endomorphisme de E et de plus

$$\begin{aligned}
p_1 \circ p_1 &= \frac{1}{1-\alpha}(a-\alpha\,\mathrm{Id}) \circ \frac{1}{1-\alpha}(a-\alpha\,\mathrm{Id}) && (16.156)\\
&= \frac{1}{(1-\alpha)^2}(a-\alpha\,\mathrm{Id}) \circ (a-\alpha\,\mathrm{Id}) && (16.157)\\
&= \frac{1}{(1-\alpha)^2}(a-\mathrm{Id}+(1-\alpha)\,\mathrm{Id}) \circ (a-\alpha\,\mathrm{Id}) && (16.158)\\
&= \frac{1}{(1-\alpha)^2}(a-\mathrm{Id}) \circ (a-\alpha\,\mathrm{Id}) + \frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2}(a-\alpha\,\mathrm{Id}) && (16.159)\\
&= 0 + \frac{1}{(1-\alpha)}(a-\alpha\,\mathrm{Id}) && (16.160)\\
&= p_1. && (16.161)
\end{aligned}$$

Alors p_1 est un projecteur. Ainsi $E_1 = \mathrm{Im}(p_1)$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(p_1)$ et ils sont supplémentaires dans E. Alors

$$a = (1-\alpha)p_1 + \alpha\,\mathrm{Id} = p_1 + \alpha(\mathrm{Id} - p_1) = p_1 + \alpha p_2, \qquad (16.162)$$

avec p_2 le projecteur associé à p_1. L'endomorphisme a est donc une affinité vectorielle. □

16.4.4.2 $\mathrm{Inv}(a)$ et $\mathrm{Opp}(a)$ pour une affinité a

Soient, comme d'habitude, E_1 et E_2 deux sous-espace vectoriels supplémentaires de E. On note p_1 la projection sur E_1 parallélement à E_2 et p_2 la projection sur E_2 parallélement à E_1. Pour tout scalaire α, on note $a_\alpha = p_1 + \alpha p_2$ l'affinité vectorielle de rapport α de base E_1 selon E_2. Alors

$$\begin{aligned}
\forall x \in E \quad x \in \mathrm{Inv}(a_\alpha) &\iff a_\alpha(x) = x && (16.163)\\
&\iff p_1(x) + \alpha p_2(x) = p_1(x) + p_2(x) && (16.164)\\
&\iff (\alpha - 1)p_2(x) = 0. && (16.165)
\end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$ alors $a_1 = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Inv}(a_1) = E$. Sinon, alors $\mathrm{Inv}(a_\alpha) = \mathrm{Ker}(p_2) = \mathrm{Im}(p_1) = E_1$, et

$$\begin{aligned}
\forall x \in E \quad x \in \mathrm{Opp}(a_\alpha) &\iff a_\alpha(x) = -x && (16.166)\\
&\iff p_1(x) + \alpha p_2(x) = -p_1(x) - p_2(x) && (16.167)\\
&\iff 2p_1(x) = -(\alpha+1)p_2(x). && (16.168)
\end{aligned}$$

Or $2p_1(x) \in E_1$ et $-(\alpha+1)p_2(x) \in E_2$. Puisque ces sous-espaces vectoriels sont supplémentaires alors leur intersection est nulle donc chacun des termes est nul. Donc

$$\forall x \in E \quad x \in \mathrm{Opp}(a_\alpha) \iff \begin{cases} 2p_1(x) &= 0 \\ -(\alpha+1)p_2(x) &= 0 \end{cases} \qquad (16.169)$$

Deux cas se présentent :
- si $\alpha = -1$ alors $x \in \mathrm{Opp}(a_\alpha) \iff 2p_1(x) = 0 \iff x \in \mathrm{Ker}(p_1) = E_2$;
- sinon alors $x \in \mathrm{Opp}(a_\alpha) \iff \begin{cases} x \in \mathrm{Ker}(p_1) \\ x \in \mathrm{Ker}(p_2) \end{cases} \iff x = 0.$

Finalement
- si $\alpha \neq 1$ et $\alpha \neq -1$ alors $\text{Inv}(a_\alpha) = E_1$ et $\text{Opp}(a_\alpha) = \{0\}$;
- si $\alpha = 1$ alors $\text{Inv}(a_{-1}) = E_1$ et $\text{Opp}(a_{-1}) = E_2$ et on a bien les propriétés d'une symétrie $E = \text{Inv}(a_{-1}) \oplus \text{Opp}(a_{-1})$;
- si $\alpha = 1$ alors $\text{Inv}(a_1) = E$ et $\text{Opp}(a_1) = \{0\}$ et c'est normal parce que $a_1 = \text{Id}$.

16.5 Translation, sous-espace affine

16.5.1 Notion d'espace affine

Définition 16.19. On appelle espace affine tout couple $(\mathcal{A}, E)$ où :

1. $\mathcal{A}$ est un ensemble non vide ;
2. $(E, +, \perp)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
3. Il existe une application $+\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times E & \longrightarrow & E \\ (A, x) & \longmapsto & A + x \end{array} \right.$ telle que :
   (a) $\forall A \in \mathcal{A} \quad +_A\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & A + x \end{array} \right.$ est bijective ;
   (b) $\forall A \in \mathcal{A}\ \forall (x, y) \in E^2 \quad (A + x) + y = A + (x + y)$.

Proposition 16.36 (Exemple fondamental d'espace affine)**.** Soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel $(E, +, \perp)$. Alors le couple (E, E) muni de la loi $+$ de E est un espace affine. On dit que le $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est muni de sa structure d'espace affine canonique.

Démonstration. 1. E est non vide, puisque c'est un espace vectoriel ;
2. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ;
3. Soit l'application $+\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (A, x) & \longmapsto & A + x \end{array} \right.$, soit $A \in E$ alors
   (a) l'application $x \longmapsto A + x$ est injective
   $$\forall (x, y) \in E^2 \quad A + x = A + y \implies x = y, \tag{16.170}$$
   puisque $(E, +)$ est un groupe et donc tous les éléments sont simplifiables pour $+$.
   (b) l'application $x \longmapsto A + x$ est surjective
   $$\forall B \in E\ \exists x \in E \quad A + x = B, \tag{16.171}$$
   en prenant $x = B - A \in E$ puisque E est un espace vectoriel.
   (c) associativité de l'addition dans E.

Alors le couple (E, E) muni de la loi $+$ de E est un espace affine. □

Dans toute la suite, $(E, +, \perp)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de sa structure canonique d'espace affine. Si $(A, x) \in E \times E$, A est appelé un point et x est appelé un vecteur. On représentera en général les points par une majuscule et les vecteurs par une minuscule.

16.5.2 Translations

16.5.2.1 Equipollence – Relation de Chasles

On dispose de l'application $+ \colon \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & E \\ (A, x) & \longmapsto & A + x \end{array} \right.$.

Définition 16.20. Soit un point $A \in E$. Pour tout point $B \in E$, il existe un unique vecteur $x \in E$ tel que $A + x = B$, on note $x = \overrightarrow{AB}$. Ainsi $B = A + \overrightarrow{AB}$.

Définition 16.21. Soients quatre points A, B, C et D de E. Alors les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Remarque :la relation d'équipollence est en fait une relation d'équivalence (réflexive, symetrique, transitive).

Proposition 16.37. Soient trois points A, B et C de E, alors

1. $\overrightarrow{AB} = 0 \iff A = B$;
2. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$;
3. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, c'est la relation de Chasles.

Remarque :Si on fixe une origine A de l'espace $\mathcal{E}$ on pourra identifier un point B avec le vecteur $\overrightarrow{AB}$. En général $A = 0$ et on identifiera le vecteur $\overrightarrow{0B}$ au point B.

16.5.2.2 Translations

Définition 16.22. Soit $x_0 \in E$. On appelle translation de vecteur x_0 l'application $t_{x_0} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ A & \longmapsto & A + x_0 \end{array} \right.$. On note $\tau(E)$ l'ensemble des translations de l'espace affine E, $\tau(E) = \{t_{x_0}, x_0 \in E\}$.

Proposition 16.38. Pour tous vecteurs x_0, y_0 de E

$$t_{x_0} \circ t_{y_0} = t_{x_0+y_0} = t_{y_0} \circ t_{x_0}. \tag{16.172}$$

Démonstration. Soit un point A de E, alors

$$t_{x_0} \circ t_{y_0}(A) = t_{x_0}(A+y_0) = (A+y_0)+x_0 = A+(x_0+y_0) = t_{x_0+y_0}(A), \tag{16.173}$$

puisque la loi $+$ est associative. Ensuite de la même manière

$$t_{y_0} \circ t_{x_0}(A) = t_{y_0}(A+x_0) = (A+x_0)+y_0 = A+(x_0+y_0) = t_{x_0+y_0}(A). \tag{16.174}$$

□

Proposition 16.39. Pour tout vecteur $x_0 \in E$, la translation t_{x_0} est bijective et $(t_{x_0})^{-1} = t_{-x_0}$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition **??** pour $y_0 = -x_0$. □

On peut considérer l'application $T \colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \sigma(E) \\ x_0 & \longmapsto & t_{x_0} \end{array} \right.$ avec $\sigma(E)$ l'ensemble des permutations de E. On rappelle que $(\sigma(E), \circ)$ est un groupe. La proposition **??** peut se reformuler ainsi : T est un morphisme du groupe $(E, +)$ sur le groupe $(\sigma(E), \circ)$. On note $T(E) = \mathrm{Im}(T)$.

Proposition 16.40. $(T(E), \circ)$ est un sous-groupe abélien du groupe $(\sigma(E), \circ)$.

Noyau du morphisme T :

$$\mathrm{Ker}(T) = \{x_0 \in E \mid t_{x_0} = \mathrm{Id}\}, \tag{16.175}$$

alors pour tout $x_0 \in E$

$$\begin{aligned} x_0 \in \mathrm{Ker}(T) &\iff \forall A \in E \quad t_{x_0}(A) = A & (16.176)\\ &\iff \forall A \in E \quad A + x_0 = A & (16.177)\\ &\iff x_0 = 0. & (16.178)\end{aligned}$$

Alors $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$, alors T est injectif. Ainsi T induit un isomorphisme de $(E, +)$ sur $(T(E), \circ)$. On en déduit que

Proposition 16.41. Le groupe $(T(E), \circ)$ est isomorphe au groupe $(E, +)$.

Théorème 16.15. *Soit $f \in E^E$, alors f est une translation si et seulement si pour tous points M et N de E $\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{MN}$*

Démonstration. Si f est une translation de E, il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que $f = t_{x_0}$ et

$$\forall (M, N) \in E^2 \quad f(M) = M + x_0 \text{ et } f(N) = N + x_0. \tag{16.179}$$

donc $\overrightarrow{f(M)f(N)} = f(N) - f(M) = (N + x_0) - (M + x_0) = N - M = \overrightarrow{MN}$.

Soit $A \in E$ et on pose $B = f(A)$ et $x_0 = \overrightarrow{AB}$. Montrons que $f = t_{x_0}$. Pour tout point $M \in E$ on a par hypothèse

$$\overrightarrow{f(A)f(M)} = \overrightarrow{AM}, \tag{16.180}$$

alors

$$\begin{aligned} f(M) &= f(A) + \overrightarrow{AM} & (16.181)\\ f(M) &= B + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) & (16.182)\\ f(M) &= (B + \overrightarrow{BM}) + \overrightarrow{AB} & (16.183)\\ f(M) &= M + x_0 & (16.184)\\ f(M) &= t_{x_0}(M). & (16.185)\end{aligned}$$

Alors $f = t_{x_0}$ est une translation. □

16.5.3 Sous-espaces affines

16.5.3.1 Définition

Définition 16.23. On appelle sous-espace affine de E toute partie W_1 de E telle que :

1. il existe un point A_1 de E ;
2. il existe un sous-espace vectoriel E_1 de E ;

vérifiant $W_1 = \{A_1 + x \mid x \in E_1\} = \{A_1\} + E_1$. On notera $W_1 = A_1 + E_1$.

Proposition 16.42. Si $W_1 = A_1 + E_1$ est un sous-espace affine de E, alors le point A_1 appartient à W_1.

Démonstration. E_1 est un sous-espace vectoriel de E donc $0 \in E_1$ et $A_1 = A_1 + 0 \in W_1$. □

Proposition 16.43. Pour tout point $A \in E$, le singleton $\{A\}$ est un sous-espace affine.

Démonstration. $\{0\} = E_1$ est un sous-espace vectoriel de E donc $\{A_1\} = A_1 + \{0\}$ est un sous-espace affine de E. □

Proposition 16.44.

— Les sous-espace vectoriels sont des sous-espaces affines ;
— si $W_1 = A_1 + E_1$ est un sous-espace affine, alors c'est un sous-espace vectoriel si et seulement s'il contient 0.

Démonstration.

— Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E, alors $E_1 = \{0\} + E_1$, c'est donc un sous-espace affine ;
— soit $W_1 = A_1 + E_1$ un sous-espace affine : $\Longrightarrow$ Si W_1 est un sous-espace vectoriel, alors il contient 0 ;
$\Longleftarrow$ Si $0 \in W_1$, il existe $x \in E_1$ tel que $A_1 + x = 0$ et donc $A_1 = -x \in E_1$ car c'est un sous-espace vectoriel.
Montrons que $W_1 = E1$. Si $A \in W_1$, il existe alors $x \in E_1$ tel que $A = A_1 + x \in E_1$ donc $W_1 \subset E_1$. Si $A \in E_1$, alors $A = A_1 + \overrightarrow{A_1A}$ et comme A_1 et A sont dans E, le vecteur $\overrightarrow{A_1A} \in E$ donc $A \in W_1$. Ainsi $E_1 \subset W_1$. Par double inclusion $W_1 = E1$

□

Choix du point A_1

Proposition 16.45. Soit $W_1 = A_1 + E_1$ un sous-espace affine. Pour tout point $A' \in E$, $A' \in W_1$ si et seulement s'il existe un sous-espace vectoriel E' de E tel que $W_1 = A' + E'$.

Démonstration. Considérons que $A' \in W_1$ alors $A' = A' + 0 \in W_1$.

Soit maintenant $A' \in W_1$, il existe un vecteur $x \in E_1$ tel que $A' = A + x$. Montrons que $W_1 = A' + E_1$. Soit $M \in W_1$, alors il existe $y \in E_1$ tel que $M = A_1 + y = (A' - x) + y = A' + (-x + y)$. Comme $x, y \in E_1$ et puisque c'est un sous-espace vectoriel on a $-x + y \in E_1$ donc $M \in A' + E_1$. Alors $W_1 \subset A' + E_1$. Soit $M \in A' + E_1$, alors il existe $y \in E_1$ tel que $M = A' + y = (A_1 + x) + y = A_1 + (x + y)$. Comme $x, y \in E_1$ et puisque c'est un sous-espace vectoriel on a $x + y \in E_1$ donc $M \in A_1 + E_1 = W_1$. Donc $A' + E_1 \subset W_1$.

Finalement par double inclusion $W_1 = A' + E_1$. □

Choix du sous-espace vectoriel

Proposition 16.46. Soit $W_1 = A_1 + E_1$ un sous-espace affine. Alors

$$E_1 = \left\{ \overrightarrow{A_1M_1} \,\middle|\, M_1 \in W_1 \right\} \tag{16.186}$$

$$= \left\{ \overrightarrow{M_1N_1} \,\middle|\, M_1, N_1 \in \overrightarrow{w}_1 \right\}. \tag{16.187}$$

Démonstration. Soit $x \in E_1$ et $M_1 = A_1 + x \in W_1$ avec $x = \overrightarrow{A_1M_1}$. Donc $E_1 \subset \left\{ \overrightarrow{A_1M_1} \,\middle|\, M_1 \in W_1 \right\}$. Soit $x \in \left\{ \overrightarrow{A_1M_1} \,\middle|\, M_1 \in W_1 \right\}$ alors $M_1 = A_1 + x$, or $M_1 \in W_1$ donc il existe $y \in E_1$ tel que $M_1 = A_1 + y$. Ainsi $x = y \in E_1$. Donc $\left\{ \overrightarrow{A_1M_1} \,\middle|\, M_1 \in W_1 \right\} \subset E_1$. Finalement par double inclusion $E_1 = \left\{ \overrightarrow{A_1M_1} \,\middle|\, M_1 \in W_1 \right\}$.

Comme $A_1 \in W_1$, on a $\left\{ \overrightarrow{A_1M_1} \,\middle|\, M_1 \in W_1 \right\} \subset \left\{ \overrightarrow{M_1N_1} \,\middle|\, (M_1, N_1) \in \overrightarrow{w}_1^2 \right\}$. Soit maintenant $x \in \left\{ \overrightarrow{M_1N_1} \,\middle|\, (M_1, N_1) \in \overrightarrow{w}_1^2 \right\}$, alors il existe $(M_1, N_1) \in W_1^2$ tel que $x = \overrightarrow{M_1N_1}$ et il existe $(y, z) \in E_1^2$ tels que $M_1 = A_1 + y$ et $N_1 = A_1 + z$ donc $x = z - y \in E_1$ puisque c'est un sous-espace vectoriel. Alors $\left\{ \overrightarrow{M_1N_1} \,\middle|\, (M_1, N_1) \in \overrightarrow{w}_1^2 \right\} \subset E_1$. Par double inclusion, on a bien $E_1 = \left\{ \overrightarrow{M_1N_1} \,\middle|\, (M_1, N_1) \in \overrightarrow{w}_1^2 \right\}$. □

Corollaire 16.46.1. *Pour tout sous-espace affine W_1, il existe un unique sous-espace vectoriel E_1 tel que W_1 puisse s'écrire*

$$W_1 = A_1 + E_1. \tag{16.188}$$

Ce sous-espace vectoriel est la direction de W_1 et on dit que c'est le sous-espace affine passant par A et dirigé par E_1.

16.5.3.2 Parallélisme de sous-espaces affines

Définition 16.24. Soient W_1 et W_2 deux sous-espaces affines de directions respectives E_1 et E_2. Alors

1. W_1 est parallèle à W_2 si et seulement si $E_1 \subset E_2$;
2. W_1 et W_2 sont parallèles si et seulement si $E_1 = E_2$.

Proposition 16.47. Dans l'ensemble des sous-espaces affines de E

1. la relation “est parallèle à” est réflexive et transitive ;
2. la relation $\mathfrak{R}$ définie par $W_1 \mathfrak{R} W_2$ par “W_1 et W_2 sont parallèles” est une relation déquivalence.

Démonstration.

1. Si W_1 est un sous-espace affine, W_1 est parallèle à lui-même car $E_1 \subset E_1$, donc elle est symétrique. Si W_1 est parallèle à W_2 et si W_2 est parallèle à W_3 alors $E_1 \subset E_2 \subset E_3$ donc W_1 est parallèle à W_3, donc elle est transitive.
2. Puisque $E_1 = E_1$ alors $W_1 \mathfrak{R} W_1$, symétrique. Si $W_1 \mathfrak{R} W_2$ alors $W_1 = W_2$ donc $W_2 \mathfrak{R} W_1$, symétrique. Si $W_1 \mathfrak{R} W_2$ et $W_2 \mathfrak{R} W_3$ alors $E_1 = E_2 = E_3$ donc $W_1 \mathfrak{R} W_3$.

□

Proposition 16.48. Soient deux sous-espaces affines W_1 et W_2 alors

$$W_1 \subset W_2 \implies W_1 \text{ est parallèle à } W_2. \tag{16.189}$$

Démonstration. Notons E_1 et E_2 les directions respectives de W_1 et W_2. Soit $I \in W_1$, alors $W_1 = I + E_1$. Puisque $W_1 \subset W_2$ on a$I \in W_2$ donc $W_2 = I + E_2$. Soit $x \in E_1$ alors $I + x \in W_1 \subset W_2$ donc il existe $y \in E_2$ tel que $I + x = I + y$ donc $x = y \in E_2$. Finalement $E_1 \subset E_2$. Donc W_1 est parallèle à W_2. □

Proposition 16.49. Soient deux sous-espaces affines W_1 et W_2 alors

$$W_1 \subset W_2 \iff \begin{cases} W_1 \text{ est parallèle à } W_2 \\ W_1 \cap W_2 \neq \emptyset \end{cases} \tag{16.190}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$: Déjà vu dans la proposition précédente et $W_1 \cap W_2 = W_1 \neq \emptyset$.

$\Longleftarrow$: Puisque W_1 est parallèle à W_2, on a $E_1 \subset E_2$. Comme $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, il existe $I \in W_1 \cap W_2$ tel que $W_1 = I + E_1$ et $W_2 = I + E_2$ et comme $E_1 \subset E_2$ alors $W_1 \subset W_2$. □

16.5.3.3 Intersection de sous-espaces affines

Soient W_1 et W_2 deux sous-espaces affines de direction respectives E_1 et E_2.

Proposition 16.50. Si $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, alors $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace affine. De plus si pour tout $I \in W_1 \cap W_2$ $W_1 \cap W_2 = I + E_1 \cap E_2$.

Si $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, alors ce n'est pas un sous-espace effine puisqu'un sous-espace affine n'est jamais vide.

Démonstration. Soit $I \in W_1 \cap W_2$. On sait que $I + \mathcal{E}_1 \cap E_2$ est un sous-espace affine car $E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel. Montrons que $W_1 \cap W_2 = I + E_1 \cap E_2$.

Soit $M \in W_1 \cap W_2$, alors $M \in I + E_1$ donc il existe $x \in E_1$ tel que $M = I + x$ et $M \in I + E_2$ aussi donc il existe $y \in E_2$ tel que $M = I + y$. D'où $x = y = \overrightarrow{IM}$ alors $x = y \in E_1 \cap E_2$, alors $M = I + x \in I + E_1 \cap E_2$. On a montré l'inclusion $W_1 \cap W_2 \subset E_1 \cap E_2$.

Soit $M \in I + E_1 \cap E_2$. Il existe $x \in E_1 \cap E_2$ tel que $M = I + x$. Comme $x \in E_1$ alors $M \in I + E_1 = W_1$ et aussi $x \in E_2$ alors $M \in I + E_2 = W_2$. Ainsi $M \in W_1 \cap W_2$. On a montré l'inclusion $E_1 \cap E_2 \subset W_1 \cap W_2$.

Finalement par double inclusion $W_1 \cap W_2 = I + E_1 \cap E_2$. □

Proposition 16.51 (Cas particulier)**.** Si E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E, alors $W_1 \cap W_2$ est un singleton.

Démonstration. W_1 et W_2 sont tous deux non vides car ce sont des sous-espaces affines. Soit $(A_1, A_2) \in W_1 \times W_2$ et $\overrightarrow{A_1A_2} \in E$.

Or $E = E_1 \oplus E_2$ donc il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $\overrightarrow{A_1A_2} = x_1 + x_2$ alors $A_2 - x_2 = x_1 + A_1$. Comme A_2 et x_2 sont dans W_2 alors $A_2 - x_2 \in W_2$ et comme A_1 et x_1 sont dans W_1 alors $A_1 + x_1 \in W_1$. Si on pose $I = A_2 - x_2 = x_1 + A_1$ alors $I \in W_1 \cap W_2$. D'après la propostion **??**, $W_1 \cap W_2$ est un sous-espace affine et $W_1 \cap W_2 = I + E_1 \cap E_2 = I + \{0\} = \{I\}$. □

L'union de sous-espaces affines n'est pas, en général, un sous-espace affine.

Proposition 16.52. Si $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$, pour tout $I \in W_1 \cup W_2$, $I + (E_1 + E_2)$ est le plus petit sous-espace affine contenant $W_1 \cup W_2$.

Démonstration. Soit $A \in W_1 \cap W_2$. Alors :

— $W = A + (E_2 + E_2)$ est un sous-espace affine puisque $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel ;

— $W_1 = A + E_1$ et $W_2 = A + E_2$, et comme $E_1 \subset E_1 +_2$ et $E_2 \subset E_1 + E_2$ alors $W_1 \subset W$ et $W_2 \subset W$, donc $W_1 \cup W_2 \subset W$; et alors W est un sous-espace affine qui contient $W_1 \cup W_2$;
— soit W' un sous-espace affine qui contient $W_1 \cup W_2$ et soit E' sa direction ; Puisque $A \in W_1 \cap W_2 \subset W_1 \cup W_2 \subset W'$ on peut écrire que $W' = A + E'$; soit $M \in W$ il existe alors $x \in E_1 + E_2$ tel que $M = A + x$; il existe $x_1 \in E_1$ et $x_2 \in E_2$ tels que $x = x_1 + x_2$, donc $M = A + x_1 + x_2$; comme $A + x_1 \in W_1 \subset W' = A + E'$ on a $x_1 \in E'$; comme aussi $A + x_2 \in W_2 \subset W' = A + E'$ on a $x_2 \in E'$; enfin $M = A + (x_1 + x_2) \in A + E' = W'$ alors $W \subset W'$.

On vient de montrer que pour tout $I \in W_1 \cup W_2$, $I + (E_1 + E_2)$ est le plus petit sous-espace affine contenant $W_1 \cup W_2$. □

16.5.4 Barycentres et convexité

16.5.4.1 Barycentre

Définition 16.25. On appelle un point pondéré dans E tout couple (A, λ) où A est un point de E et λ un réel.

Théorème 16.16. *Soient un entier naturel n non nul, $\{(A_i, \lambda_i)\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de points pondérés de E tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ (masse totale non nulle). Alors il existe un unique point G, appelé barycentre de la famille noté $G = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$, vérifiant les propriétés équivalentes suivantes :*

1. $\sum_{i=1}^n \overrightarrow{GA_i} = 0$;
2. $\forall A \in E \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$;
3. $\exists A \in E \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AG} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AA_i}$.

Démonstration. L'égalité 1 est équivalente à $\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) G$ alors pour tout point $A \in E$ on a

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) G \iff \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AA_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AG} \tag{16.191}$$

Les égalités 2 et 3 ne dépendent pas du point A, donc $1 \iff 2 \iff 3 \iff \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) G = \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i$ et comme la masse totale est non nulle, le point G existe et est unique et vérifie $G = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$. □

Proposition 16.53 (Homogénéité)**.** Soit une famille de points pondérés de E $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ de masse totale non nulle. Soit un réel λ non nul. Alors

$$\mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1,\ldots,n} = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda\lambda_i)_{i=1,\ldots,n} \tag{16.192}$$

Démonstration. Par hypothèse $\sum_{i=1}^n \lambda_i \neq 0$ et comme $\lambda \neq 0$ on a $\sum_{i=1}^n \lambda\lambda_i \neq 0$. On dispose de

$$G = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1,\ldots,n}; \tag{16.193}$$

$$G' = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda\lambda_i)_{i=1,\ldots,n}. \tag{16.194}$$

alors $G' = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda\lambda_i A_i}{\sum_{i=1}^n \lambda\lambda_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = G$. □

Conséquence Importante ; Si $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ est une famille de points pondérés de masse totale non nulle, on peut se ramener à $G = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n} = \mathrm{Bar}(A_i, \alpha_i)_{i=1,\dots,n}$ avec $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ en prenant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $\alpha_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^n \lambda_i}$.

Proposition 16.54 (Associtivité)**.** Soit une famille de points pondérés de E $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ de masse totale non nulle. Soit $(I_j)_{j=1,\dots,p}$ une partition de $[\![1, n]\!]$, ce qui signifie que

$$\bigcup_{j=1}^{p} I_j = [\![1\,;n]\!]; \tag{16.195}$$

$$\forall (j,k) \in [\![1\,;n]\!]^2 \quad j \neq k \implies I_j \cap I_k = \emptyset. \tag{16.196}$$

On suppose de plus que chaque “sous-masse” est non nulle, c'est à dire que pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $\mu_j = \sum_{i \in I_j} \lambda_i \neq 0$. On définit pour tout $j \in [\![1, p$ le barycentre $G_j = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i \in I_j}$. Alors

$$\mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n} = \mathrm{Bar}(G_j, \mu_j)_{j=1,\dots,p}. \tag{16.197}$$

Démonstration. On pose

$$G' = \mathrm{Bar}(G_j, \mu_j)_{j=1,\dots,p}; \tag{16.198}$$

$$G = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}. \tag{16.199}$$

$$\tag{16.200}$$

Alors pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$:

$$G_j = \frac{\sum_{i \in I_j} \lambda_i A_i}{\sum_{i \in I_j} \lambda_i} = \frac{1}{\mu_j} \sum_{i \in I_j} \lambda_i A_i; \tag{16.201}$$

$$G' = \frac{\sum_{j=1}^p \mu_j G_j}{\sum_{j=1}^p \mu_j} = \frac{\sum_{j=1}^p \sum_{i \in I_j} \lambda_i A_i}{\sum_{j=1}^p \sum_{i \in I_j} \lambda_i}. \tag{16.202}$$

Comme $(I_j)_{j=1,\dots,p}$ est une partition de $[\![1\,;n]\!]$ alors

$$G' = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{i=1}^n \lambda_i A_i = G. \tag{16.203}$$

□

Proposition 16.55. Soit une famille de points pondérés de E $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ de masse totale non nulle. Soit $x_0 \in E$, on condidére la translation de vecteur x_0, t_{x_0}. Alors

$$\mathrm{Bar}(t_{x_0}(A_i), \lambda_i)_{i=1,\dots,n} = t_{x_0}(\mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}). \tag{16.204}$$

Démonstration. Soien les points

$$G = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}; \tag{16.205}$$

$$G' = \mathrm{Bar}(t_{x_0}(A_i), \lambda_i)_{i=1,\dots,n}. \tag{16.206}$$

Alors

$$G' = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{i=1}^n \lambda_i t_{x_0}(A_i) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i A_i + \sum_{i=1}^n \lambda_i x_0 \right) = G + x_0 = t_{x_0}(G). \tag{16.207}$$

□

16.5.4.2 Stabilité d'un sous-espace affine par barycentration

Proposition 16.56. Soit W_1 un sous-espace affine et soit une famille de points pondérés de E $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\ldots,n}$ de masse totale non nulle de barycentre G. Alors

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad A_i \in W_1 \implies G \in W_1. \tag{16.208}$$

Démonstration. Soient $A_1 \in W_1$ et E_1 la direction de E_1, $W_1 = A_1 + E_1$. Supposons que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $A_i \in W_1$ alors $\frac{AA_i}{\in} E_1$. Or E_1 est un sous-espace vectoriel de E donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AA_i} \in E_1$. Par définition du barycentre on a

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{AA_i}. \tag{16.209}$$

donc $\overrightarrow{AG} \in E_1$ et comme $G = A + \overrightarrow{AG}$ on a $G \in W_1$. □

16.5.4.3 Segments

Définition 16.26. Soient A et B deux points de l'espace affine E. On définit le sgment $[A; B]$ par

$$[A; B] = \{M \in E \mid \exists \lambda \in [0\,;1] \quad M = \lambda A + (1-\lambda)B\}. \tag{16.210}$$

C'est l'ensemble des barycentres de A et B à coefficients dans $[0\,;1]$.

Remarques :

1. $[A; B] = [B; A]$;
2. si $A \neq B$ on définit la droite (AB) par

$$\begin{aligned} \forall M \in E \quad M \in (AB) &\iff \exists \mu \in \mathbb{R} \overrightarrow{AM} = \mu \overrightarrow{AB} && (16.211) \\ &\iff \exists \mu \in \mathbb{R} M = \mu B + (1-\mu)A. && (16.212) \\ & && (16.213) \end{aligned}$$

C'est l'ensemble des barycentres de A et de B. Soit l'application suivante $\varphi\colon \left\{ \begin{array}{lll} \mathbb{R} & \longrightarrow & E \\ \lambda & \longmapsto & \lambda A + (1-\lambda)B \end{array} \right.$. Elle est injective et induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur (AB). φ est un paramétrage de (AB). La restriction de φ à $[0, 1]$ permet de réaliser un paramétrage du segment $[A; B]$.

16.5.4.4 Parties convexes

Définition 16.27. Soit $\mathcal{C}$ une partie de E. $\mathcal{C}$ est dite conxe si et seulement si $\forall (A, B) \in \mathcal{C}^2 \quad [A; B] \in \mathcal{C}$.

Proposition 16.57. Pour toute partie $\mathcal{C}$ de E, $\mathcal{C}$ est convexe si et seulement si elle est stable par barycentration à coefficients positifs non nuls.

Démonstration. $\Longleftarrow$, Supposons que $\mathcal{C}$ est stable par barycentration à coefficients positifs non nuls. Alors si A et B sont dans $\mathcal{C}$, tous leurs barycentres à coefficients positifs non nuls le sont aussi et donc $\mathcal{C}$ est une partie convexe.

$\Longrightarrow$, On va montrer par récurrence sur $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ "pour toute famille $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ de points pondérés de $\mathcal{C}$ telle que tous les $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ alors $\mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathcal{C}$".

Initialisation : $\mathcal{P}(2)$ est vraie par définition d'une partie convexe.

Hérédité : Soit $n \geq 2$ et supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit une famille, $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n+}$ telle que pour tout i $A_i \in \mathcal{C}$, $\lambda_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \neq 0$. Deux cas se présentent :

1. si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ alors pour tout $i \in [\![1, n]\!] \lambda_i = 0$ et donc
$$G = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n+1} = A_{n+1} \in \mathcal{C} \tag{16.214}$$
2. Sinon, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à la famille $(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n}$ alors $G_n = \mathrm{Bar}(A_i, \lambda_i)_{i=1,\dots,n} \in \mathcal{C}$. Alors par associativite
$$G = \mathrm{Bar}\left(\left(G_n, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right), (A_{n+1}, \lambda_{n+1})\right), \tag{16.215}$$
et alors $G \in \mathcal{C}$.

Dans les deux cas, $G \in \mathcal{C}$ et alors par définiton $\mathcal{C}$ est une partie convexe. Alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : on a montré que $\mathcal{P}(2)$ est vraie et que $\forall n \geq 2 \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ alors par théorème de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$. □

Corollaire 16.57.1. *Les sous-espace affines sont des parties convexes.*

Proposition 16.58. Soit $(\mathcal{C}_i)_{i \in I}$ une famille de parties convexes de E. Alors $\bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$ est aussi une partie convexe.

Démonstration. Soient deux points $A, B \in \bigcap_{i \in I} \mathcal{C}_i$. Alors pour tout $i \in I$ $A, B \in C_i$ et comme C_i est convexe on a $[A; B] \subset C_i$ et donc $[A; B] \subset \bigcap_{i \in I} C_i$. □

Remarques :

1. Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux parties convexes d'intersection vide, alors comme l'ensemble vide est convexe, la proposition précédente est encore vraie.
2. Par contre l'union de deux paries convexes n'est pas convexe en général. Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles cf. chapitre **??**.

Chapitre 17

Espaces vectoriels de dimension finie

Sommaire

Dans tout le chapitre, $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ désigne un corps et $(E, +, \perp)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et I un ensemble quelconque lorsque ce n'est pas précisé.

17.1 Familles de vecteurs

17.1.1 Familles génératrices

Définition 17.1. On appelle combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I} \in E^I$ (I fini) tout vecteur de E de la forme $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i$ avec $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$.

Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ (I fini) et $E_1 = \{\sum_{i\in I} \alpha_i x_i, (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I\} = \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$.

E_1 est le sous-espace vectoriel engendré par la famille $\mathcal{X}$.

Définition 17.2. Soient E_1 un sous-espace vectoriel de E, $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille finie de vecteurs de E.

Si $E_1 = \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$, on dit que $\mathcal{X}$ est une famille génératrice de E_1.

On a les hypothèses suivantes :

— $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ avec I fini ;

— E_1 est un sous-espace vectoriel de E ;

— si $E_1 = \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$ alors $\mathcal{X} \subset E_1$.

Alors finalement

$$\mathcal{X} \text{ est génératrice de } E_1 \iff \begin{cases} \forall i \in I \quad x_i \in E_1 \\ \forall x \in E_1\ \exists (\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \quad x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i \end{cases}. \tag{17.1}$$

Exemples : La famille $(1, \mathrm{i})$ est génératrice du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Soit $(x_i)_{i\in I} \in E^I$. On appelle sous-famille de $(x_i)_{i\in I}$ toute famille $(x_i)_{i\in J}$ avec $J \subset I$. On appelle sur-famille de $(x_i)_{i\in I}$ toute famille $(x_i)_{i\in L}$ avec $I \subset L$.

Proposition 17.1. Toute sur-famille d'une famille génératrice est aussi génératrice. Plus précisément : soit E_1 un sous-espace vectoriel de E, I et L deux ensembles finis tels que $I \subset L$ et $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$, $\mathcal{Y} = (x_i)_{i\in L} \in E^L$. Si :

— $\mathcal{X}$ est génératrice de E_1 ;

— pour tout $i \in L \setminus I \quad x_i \in E_1$;

alors $\mathcal{Y}$ est génératrice de E_1.

Démonstration. Soit $i \in L$ tel que $x_i \in E_1$ alors soit $i \in L\setminus I$ et c'est l'hypothèse, soit $i \in I$ et c'est la conséquence de $\mathcal{X}$ est génératrice de E_1.

Soit $x \in E_1$ alors il existe une famille de scalaire $(\alpha_i)_{i\in I}$ telle que

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i = \sum_{i\in L} \alpha_i x_i + \sum_{i\in L\setminus I} 0 x_i = \sum_{i\in L} \lambda_i x_i. \tag{17.2}$$

Avec $\lambda_i = \alpha_i$ si $i \in I$ et $\lambda_i = 0$ sinon. Ainsi x est une combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in L}$. Donc $\mathcal{Y}$ est une famille génératrice de E_1. □

Proposition 17.2. Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I}$ (I fini) une famille génératrice d'un sous-espace vectoriel E_1. Soit $i_0 \in I$. Alors la famille $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est génératrice si et seulement si x_{i_0} est une combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.

Démonstration. Supposons que $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est génératrice de E_1. Puisque x_{i_0} est un vecteur de E_1, il s'écrit comme une combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.

Supposons maintenant que x_{i_0} est une combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$. Alors pour tout $i \in I \setminus \{i_0\}$ $x_i \in E_1$ (puisque $\mathcal{X}$ est génératrice de E_1 et donc tous les x_i sont dans E_1). De plus pour tout $x \in E_1$, il existe une famille de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que

$$x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i = \alpha_{i_0} x_{i_0} + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \alpha_i x_i. \tag{17.3}$$

Par hypothèse, il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I} \in K^I$ telle que $x_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i x_i$. Alors finalement

$$x = \alpha_{i_0} \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i x_i + \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \alpha_i x_i = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} (\alpha_{i_0}\lambda_i + \alpha_i) x_i, \tag{17.4}$$

alors $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ est une famille génératrice de E_1. □

17.1.2 Familles libres, familles liées

Définition 17.3. Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ (I fini). On appelle relation de dépendance linéaire (RDL) toute famille de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0$.

Définition 17.4. Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ (I fini). La famille $\mathcal{X}$ est libre si et seulement si toute relation de dépendance linéaire est nulle (les vecteurs sont linéairement indépendants). La famille $\mathcal{X}$ est liée si et seulement s'il existe une relation de dépendance linéaire non nulle de $\mathcal{X}$. Mathématiquement on écrit :

- La famille $\mathcal{X}$ est libre si pour toute famille de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0$ alors pour tout $i \in I$, $\alpha_i = 0$;
- la famille $\mathcal{X}$ est liée s'il existe une famille de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que $\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0$ et s'il existe $i_0 \in I \alpha_{i_0} \neq 0$.

Proposition 17.3. Si $I = \emptyset$ alors toute famille indexée sur I est libre. Si I est un singleton alors on a un vecteur $a \in E$ tel que $(x_i)_{i\in I} = (a)$, alors (a) est libre si et seulement si $a \neq 0$ et (a) est liée si et seulement si $a = 0$.

Démonstration. Si $a = 0$ alors $1 \times a = 0$ or $1 \neq 0$ (1) est une relation de dépendance linéaire non nulle de (a), donc elle est liée. Si a est non nul alors pour tout scalaire α si on a$\alpha a = 0$ alors $\alpha = 0$ donc (a) est libre. □

Proposition 17.4. Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ (I fini). La famille $\mathcal{X}$ est liée si et seulement s'il existe $i_0 \in I$ tel que x_{i_0} est combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$.

Démonstration. S'il existe $i_0 \in I$ tel que x_{i_0} est combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}}$ alors il existe une famille de scalaires $(\lambda_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}} \in \mathbb{K}^{I\setminus\{i_0\}}$ tel que $x_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i x_i$ alors en posant $\lambda_{i_0} = 1$ on a$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = 0$ comme la famille de scalaire n'est pas la famille alors $\mathcal{X}$ est liée.

Si $\mathcal{X}$ est liée, alors par définition il existe une famille de scalaires non tous nul $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ et un élément i_0, $\alpha_{i_0} \neq 0$ tels que

$$0 = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \alpha_i x_i + \alpha_{i_0} x_{i_0} \tag{17.5}$$

$$x_{i_0} = -\frac{1}{\alpha_{i_0}} \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \alpha_i x_i \qquad (\alpha_{i_0} \neq 0) \tag{17.6}$$

$$x_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \lambda_i x_i \qquad \left(\lambda_i = -\frac{\alpha_i}{\alpha_{i_0}}\right) \tag{17.7}$$

□

Proposition 17.5. Toute sous famille d'une famille libre est libre. Toute sur famille d'une famille liée est liée.

Démonstration. Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille libre (I fini). Soit $J \subset I$ et $\mathcal{Y} = (x_i)_{i\in J} \in E^J$, $(\alpha_i)_{i\in J} \in \mathbb{K}^J$ telles que $\sum_{i\in J} \alpha_i x_i = 0$. On définit la famille de scalaires λ comme étant nulle sur $I \setminus J$ et égale à α sur J. Ainsi

$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i = \sum_{i\in J} \alpha_i x_i + 0 = 0 \tag{17.8}$$

Comme la famille $\mathcal{X}$ est libre on en déduit que la famille de scalaires λ est nulle. En particulier $\forall i \in J \quad \alpha_i = 0$ donc $\mathcal{Y}$ est libre.

Soit $\mathcal{X}$ une famille liée et $\mathcal{Z}$ une sur famille de $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{Z}$ était libre, alors $\mathcal{X}$ serait libre (en tant que sous famille de $\mathcal{Z}$). Ce qui contrdit l'hypothèse. Donc la famille $\mathcal{Z}$ est liée. □

Proposition 17.6. Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E (I fini) et $i_0 \notin I$. Alors la famille $(x_i)_{i\in I\cup\{i_0\}}$ est libre si et seulement si x_{i_0} n'est pas combinaison linéaire de la famille $\mathcal{X}$.

Démonstration. Montrons la première implication : si x_{i_0} est une combinaison linéaire de $\mathcal{X}$ alors $(x_i)_{i\in I\cup\{i_0\}}$ est liée. Alors par contraposée si $(x_i)_{i\in I\cup\{i_0\}}$ est libre alors x_{i_0} n'est pas une combinaison linéaire de $\mathcal{X}$.

Montrons la deuxième implication : Soit une famille de scalaire α indexée sur $I \cup \{i_0\}$ telle que $\sum_{i\in I\cup\{i_0\}} \alpha_i x_i = 0$. Alors

$$\alpha_{i_0} x_{i_0} + \sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0 \tag{17.9}$$

Si $\alpha_{i_0} \neq 0$ alors x_{i_0} est une combinaison linéaire de $(x_i)_{i\in I}$, ce qui est impossible par hypothèse. Ainsi $\alpha_{i_0} = 0$ et

$$\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = 0 \tag{17.10}$$

et comme $\mathcal{X}$ est libre alors $\forall i \in I \quad \alpha_i = 0$. Ainsi $\forall i \in I \cup \{i_0\} \quad \alpha_i = 0$. Alors $(x_i)_{i\in I\cup\{i_0\}}$ est libre. □

Cas particulier important : On dit que deux vecteur x, y sont colinéaires s'il existe un scalaire λ tel que $x = ky$ ou s'il existe un scalaire μ tel que $x = \mu y$.

Proposition 17.7. Soit deux vecteurs de E x, y, alors ils sont colinéaires si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Démonstration. On peut trouver une combinaison linéaire ... □

Remarque : Dans une famille libre on ne peut pas trouver
— le vecteur nul ;
— deux vecteurs colinéaires a fortiori égaux

Proposition 17.8. Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I}$ une famille libre de vecteurs de E (I fini). Soient deux familles α et β de scalaires indexées par I. Alors

$$\sum_{i\in I} \alpha_i x_i = \sum_{i\in I} \beta_i \implies \forall i \in I \quad \alpha_i = \beta_i \tag{17.11}$$

Démonstration. Par hypothèse $\sum_{i\in I}(\alpha_i - \beta_i)x_i = 0$. Comme la famille $\mathcal{X}$ est libre on a bien $\forall i \in I\ \alpha_i = \beta_i$. □

17.1.3 Bases d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 17.5. On appelle base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute famille $\mathcal{X} \in E^I$ libre et génératrice de E.

Théorème 17.1. *Soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I} \in E^I$ une famille finie de vecteurs de E. Alors c'est une base de E si et seulement si pour tout $x \in E$ il existe une unique famille de scalaires $(x_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$.*

Démonstration. Si $\mathcal{E}$ est une base de E, soit un vecteur $x \in E$ alors

— elle est génératrice donc il existe une famille de scalaires $(x_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$

— elle est libre donc si $(x_i)_{i\in I}$ et $(y_i)_{i\in I}$ sont deux familles de scalaires telles que $x = \sum_{i\in I} x_i e_i = \sum_{i\in I} y_i e_i$ alors pour tout $i \in I\ x_i = y_i$.

Supposons que pour tout $x \in E$ il existe un unique famille de scalaires $(x_i)_{i\in I}$ telle que $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$. Alors $\mathcal{E}$ est génératrice (puisqu'il existe ...). Montrons qu'elle est libre. Soit une famille de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I}$ telle que $\sum_{i\in I} \alpha_i e_i = 0$, or $0 = \sum_{i\in I} 0 e_i$ et par unicité d'une telle écriture, $\forall i \in I\ \alpha_i = 0$. Donc $\mathcal{E}$ est libre. □

Exemples :

1. $(1, \mathrm{i})$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$;
2. deux vecteurs non colinéaires forment une base du plan ;
3. trois vecteurs non coplanaires forment une base de l'espace ;
4. dans $E = \mathbb{K}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on a $e_i = (\delta_{ij})_{j\in[\![1;n]\!]}$ avec δ le symbole de Krönecker défini par $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et zéro sinon. La famille $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ définie ainsi est une base appelée la base canonique.

17.1.4 Applications linéaires et familles de vecteurs

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour toute famille $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$ on dispose de la famille $u(\mathcal{X}) = (u(x_i))_{i\in I} \in F^I$ appelée famille image de la famille $\mathcal{X}$.

17.1.4.1 Propriétés de la famille $u(\mathcal{X})$ déduites de celle de u et de $\mathcal{X}$

Proposition 17.9. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$. Alors

si $\mathcal{X}$ est ...	si u est ...	alors $u(\mathcal{X})$ est ...
liée		liée
génératrice de E		génératrice de $\mathrm{Im}(u)$
génératrice de E	surjective	génératrice de F
libre	injective	libre
base de E	bijective	base de F

Démonstration. Si $\mathcal{X}$ est liée, alors par définition il existe une famille de scalaires α indexée par I telle que $\sum_{i\in I}\alpha_i x_i = 0$ et il existe $i_0 \in I$ tel que $\alpha_{i_0} \neq 0$. L'application u est linéaire donc

$$u\left(\sum_{i\in I}\alpha_i x_i\right) = u(0) \tag{17.12}$$

$$\sum_{i\in I}\alpha_i u(x_i) = 0 \tag{17.13}$$

Donc $u(\mathcal{X})$ est liée.

Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, il existe donc un vecteur $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Comme $\mathcal{X}$ est génératrice de E alors il existe une famille de scalaires α inndexée par I telle que $x = \sum_{i\in I}\alpha_i x_i$. L'application u est linéaire donc $y = u\left(\sum_{i\in I}\alpha_i x_i\right) = \sum_{i\in I}\alpha_i u(x_i)$. Alors $u(\mathcal{X})$ est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$.

Si u est surjective et que $\mathcal{X}$ est génératrice de E alors $u(\mathcal{X})$ est génératrice de $\mathrm{Im}(u) = F$.

Si $\mathcal{X}$ est libre et u injective. Soit une famille de scalaires α inndexée par I telle que $x = \sum_{i\in I}\alpha_i u(x_i) = 0$. Comme u est linéaire on a $u\left(\sum_{i\in I}\alpha_i x_i\right) = 0$. Ainsi $\sum_{i\in I}\alpha_i x_i \in \mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ (puisque u est injective). Alors $\sum_{i\in I}\alpha_i x_i = 0$ et comme $\mathcal{X}$ est libre α est la famille nulle. Donc $u(\mathcal{X})$ est libre.

Si $\mathcal{X}$ est une base de E et si u est bijective, alors :

— $\mathcal{X}$ est libre et u est injective donc $u(\mathcal{X})$ est libre ;

— $\mathcal{X}$ est génératrice de E donc $u(\mathcal{X})$ est génératrice de $u(\mathcal{X})$.

alors $u(\mathcal{X})$ est une base de F. □

17.1.4.2 Propriétés de u déduites de son effet sur une famille de vecteurs de E

Proposition 17.10. Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{X} = (x_i)_{i\in I} \in E^I$. Alors

si $\mathcal{X}$ est ...	si $u(\mathcal{X})$ est ...	alors u est ...
	génératrice de F	surjective
génératrice de E	libre	injective
génératrice de E	base de F	bijective

Démonstration. Soit $y \in F$. La famille $u(\mathcal{X})$ est génératrice de F donc il existe une famille de scalaire α indexée par I telle que

$$y = \sum_{i\in I}\alpha_i u(x_i) = u\left(\sum_{i\in I}\alpha_i x_i\right), \tag{17.14}$$

car u est linéaire. Alors $y \in \mathrm{Im}(u)$ et donc on a $F \subset \mathrm{Im}(u)$. On a aussi $u \in \mathcal{L}(E,F)$ donc $\mathrm{Im}(u) \subset F$. Par doucble inclusion $\mathrm{Im}(u) = F$. L'application u est donc surjective.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(u) \subset E$. La famille $\mathcal{X}$ est génératrice de E alors il existe une famille de scalaires α indéxée sur I telle que $x = \sum_{i\in I}\alpha_i x_i$. Comme u est linéaire et comme x est dans le noyau de u, on a $0 = u(x) = \sum_{i\in I}\alpha_i u(x_i)$. Par hypothèse la famille $u(\mathcal{X})$ est libre donc α est la famille nulle et donc $x = 0$. On a montré que $\mathrm{Ker}(u) \subset \{0\}$ et comme l'autre inclusion est triviale on a $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ et ainsi l'application u est injective.

Si $\mathcal{X}$ est génératrice et si $u(\mathcal{X})$ est une base alors u est bijective (conséquence des points précédents). □

Théorème 17.2 (Caractérisation des isomorphismes par l'image d'une base)**.** *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels. On suppose que E admet une base finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *u est un isomorphisme de E dans F ;*
2. *pour toute base $\mathcal{E}$ de E, $u(\mathcal{E})$ est une base de F ;*
3. *il existe une base $\mathcal{E}_0$ de E telle que $u(\mathcal{E}_0)$ soit une base de F.*

Démonstration. $1 \implies 2$, c'est une conséquence de la proposition **??** cinquième ligne.

$2 \implies 3$, par hypothèse il existe une base $\mathcal{E}_0$ de E à laquelle on applique 2.

$3 \implies 1$, c'est une conséquence de la proposition **??** troisième ligne. □

17.1.4.3 Caractérisation d'une application linéaire par la donnée de l'image d'une base

Lemme 17.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ et $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1,\dots,p}$ une base de E. Pour tout vecteur $x \in E$, il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$. On définit pour tout entier $i \in [\![1\,;p]\!]$ l'application "coordonnée" C_i: $\left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & x_i \end{array}\right.$. Alors pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$ l'application C_i est linéaire.*

Démonstration. Soient deux vecteurs x, z de E et un scalaire λ. Comme $\mathcal{E}$ est une base de E, il esxiste deux uniques p-uplets $(x_1, \dots, x_p)$ et $(z_1, \dots, z_p)$ tels que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ et $z = \sum_{i=1}^{p} z_i e_i$. Alors

$$x + \lambda z = \sum_{i=1}^{p} (x_i + \lambda z_i) e_i \tag{17.15}$$

Par unicité des coordonnées on a bien la linéarité quelque soit $i \in [\![1\,;p]\!]$ de l'application C_i :

$$C_i(x + \lambda z) = C_i(x) + \lambda C_i(z) \tag{17.16}$$

□

Théorème 17.3. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et p un naturel plus grand que 1. Soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i=1,\dots,p}$ une base de E. Soit $\mathcal{Y} = (y_i)_{i=1,\dots,p}$ une famille quelconque de p vecteurs de F. Alors il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(\mathcal{E}) = \mathcal{Y}$.*

Unicité. Supposons qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(\mathcal{E}) = \mathcal{Y}$. Comme $\mathcal{E}$ est une base de E, pour tout vecteur $x \in E$ il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ de scalaires tel que

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \tag{17.17}$$

Alors comme u est linéaire on a

$$u(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i u(e_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i \tag{17.18}$$

donc u est unique (puisque les x_i et les y_i sont uniques). □

Existence. Si on prend les définitions du lemme, on prend l'application $u\colon \begin{cases} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \sum_{i=1}^{p} C_i(x) y_i \end{cases}$, alors

— u est linéaire puisque pour tout i l'application C_i est linéaire (d'après le lemme) : Soient deux vecteurs x, z de E et un scalaire λ.

$$u(x+\lambda z) = \sum_{i=1}^{p} C_i(x+\lambda z) y_i \tag{17.19}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} [C_i(x) + \lambda C_i(z)] y_i \tag{17.20}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} C_i(x) y_i + \lambda \sum_{i=1}^{p} C_i(z) y_i \tag{17.21}$$

$$= u(x) + \lambda u(z) \tag{17.22}$$

— Pour tout $i_0 \in [\![1\,;p]\!]$ $u(e_{i_O}) = \sum_{i=1}^{p} C_i(e_{i_0}) y_i$ et $e_{i_0} = \sum_{i=1}^{p} c_i(e_{i_0}) e_i$ puisque $c_i(e_{i_0}) = 1$ si $i = i_0$ et zéro sinon. Donc $u(e_{i_0}) = c_{i_0}(e_{i_0}) y_{i_0} = y_{i_0}$. Alors $u(\mathcal{E}) = \mathcal{Y}$.

□

Remarque : La famille $\mathcal{E}$ est une base de E donc elle est génératrice de E, $\mathcal{Y} = u(\mathcal{E})$

— Si $\mathcal{Y}$ est libre alors u est injective ;
— Si $\mathcal{Y}$ est génératrice de F alors u est surjective ;
— Si $\mathcal{Y}$ est une base de F alors u est bijective.

Cas particulier : Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E, $p \in \mathbb{N}$ $p > 1$ et une famille $\mathcal{X} = (x_1, \ldots, x_p)$ de p vecteurs de E. On considère l'espace $\mathbb{K}^p$ et on dispose de la base canonique $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ où pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, $e_i = (\delta_{i,j})_{j\in[\![1;p]\!]}$. Il existe une unique application linéaire $u : \mathbb{K}^p \to E$ telle que $u(\mathcal{E}) = \mathcal{X}$.

Que peut-on dire de u ?

Noyau : Pour toute famille de p éléments $\alpha \in \mathbb{K}^p$ on a

$$u(\alpha) = 0 \iff u\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\right) = 0 \tag{17.23}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u(e_i) = 0 \tag{17.24}$$

$$\iff \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i = 0 \tag{17.25}$$

$$\iff \alpha \text{ est une RDL de } \mathcal{X}. \tag{17.26}$$

Alors u est injective si et seulement si $\mathcal{X}$ est libre.

Image : Pour tout vecteur $x \in E$ on a

$$y \in \mathrm{Im}(u) \iff \exists \alpha \in \mathbb{K}^p \quad y = u(\alpha) \tag{17.27}$$

$$\iff \exists \alpha \in \mathbb{K}^p \quad y = u\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u(e_i) \tag{17.28}$$

$$\iff \exists \alpha \in \mathbb{K}^p \quad y = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i x_i \tag{17.29}$$

$$\iff y \in \mathrm{Vect}(\mathcal{X}). \tag{17.30}$$

Alors u est surjective si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathcal{X}$ est génératrice de E.

Finalament u est bijective si et seulement si $\mathcal{X}$ est une base de E.

17.2 Espaces vectoriels de dimension finie

17.2.1 Base d'un espace vectoriel de dimension finie

Définition 17.6. On appelle $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel qui admet au moins une famille génératrice finie. Sinon il est dit de dimension infinie.

Théorème 17.4 (Extraction d'une base)**.** *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E, $\mathcal{L}$ une famille libre de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que*

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G} \tag{17.31}$$

Démonstration. Premièrement, comme E est de dimension finie, il existe bien une telle famille $\mathcal{G}$. Soit alors $\mathcal{G} = (x_i)_{i \in I}$ avec I fini. Il ,existe une famille $\mathcal{L} = (x_i)_{i \in \emptyset}$. La famille $\mathcal{L}$ est libre et incluse dans $\mathcal{G}$. Donc elles existent bien.

Soit I et J finis tels que $J \subset I$, $\mathcal{G} = (x_i)_{i \in I}$ et $\mathcal{L} = (x_i)_{i \in J}$. Soit

$$S = \{\mathrm{Card}(J') \mid J \subset J' \subset I \text{ et } (x_i)_{i \in J'} \text{ est libre}\}, \tag{17.32}$$

alors :

— $S \subset \mathbb{N}$;

— $S \neq \emptyset$ puisque $\mathrm{Card}\, J \in S$ ($\mathcal{L}$ est libre) ;

— S est majorée par $\mathrm{Card}(I)$.

La partie S est une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée, elle admet donc un plus grand élément noté n_0. Soit J_0 l'ensemble tel que $n_0 = \mathrm{Card}(J_0)$. Soit $\mathcal{B} = (x_i)_{i \in J_0}$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base de E. On sait déjà qu'elle est libre, il faut montrer qu'elle est génératrice de E. Prouvons que tous les vecteurs de $\mathcal{G}$ sont des combinaisons linéaires de vecteurs de $\mathcal{B}$.

Soit $i \in I$ et $x_i \in \mathcal{G}$, alors :

— si $i \in J_0$ alors $x_i \in \mathcal{B}$

— si $i \in I \backslash J_0$ alors si x_i n'est pas une combinaison linéaire de $\mathcal{B}$ alors $\mathcal{B} \cup \{x_i\}$ est une famille libre de cardinal $n_0 + 1 > n_0$, ce qui est contradictoire puisqye n_0 est le plus grand cardinal d'une famille libre de E. Alors x_i est une combinaison linéaire de vecteur de $\mathcal{B}$: $x_i \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

On a montré que $\mathcal{G} \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$.

Soit $x \in E$. Comme la famille $\mathcal{G}$ est génératrice, il existe une famille de scalaires α indéxée sur I telle que $x = \sum_{i\in I} \alpha_i x_i$. Or $\mathcal{G} \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{B})$ donc pour tout $i \in I \setminus J_0$ il existe une famille de scalaires β_i indexée sur J_0 telle que $x_i = \sum_{j\in J_0} \beta_{ij} x_j$. Alors

$$x = \sum_{i\in J_0} \alpha_i x_i + \sum_{i\in I\setminus J_0} \alpha_i \left(\sum_{j\in J_0} \beta_{ij} x_j \right) \in \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) \tag{17.33}$$

Alors $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E. Finalement c'est une base de E. □

Théorème 17.5 (Existence de base en dimension finie)**.** *Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie admet au moins une base (finie).*

Démonstration. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors par définition E admet au moins une famille génératrice finie $\mathcal{G} = (x_i)_{i\in I}$ avec I fini. On prend une famille libre $\mathcal{L} = (x_i)_{i\in\emptyset}$ et c'est une sous famille de G. D'après le théorème d'extraction de base, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$. Donc E admet au moins une base. □

Théorème 17.6 (Théorème de la base incomplète)**.** *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{L}$ soit une sous famille de $\mathcal{B}$.*

Démonstration. Par définition, E admet une famille génératrice finie $\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{H} = \mathcal{G} \cup \mathcal{L}$. Alors $\mathcal{H}$ est une famille finie de vecteurs de E et de plus génératrice telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{H}$.

Par théorème d'extraction de base, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{H} \tag{17.34}$$

$$\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{G} \cup \mathcal{L} \tag{17.35}$$

$\mathcal{B}$ est obtenue en complétant la famille libre $\mathcal{L}$ par des vecteurs de la famille génératrice $\mathcal{G}$ □

17.2.2 Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Lemme 17.2. *Soit $n \in N$ on pose $\mathcal{P}(n)$ "Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{G}$ une famille de n vecteurs de E, $\mathcal{X}$ une famille de $n+1$ vecteurs de E. On suppose que $\mathcal{X} \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$. Alors la famille $\mathcal{X}$ est liée"*

Démonstration par récurrence. Initilisation : pour $n = 0$ $\mathcal{G} = \emptyset$, $\mathcal{X} = \{x_1\}$ $\mathcal{X} \subset \mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0\}$ donc $x_1 = 0$ et $\mathcal{X}$ est liée. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ on suppose $\mathcal{P}(n)$. Démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_{n+1})$ et $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_{n+2})$. $\mathcal{X} \subset \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$ c'est-à-dire que pour tout $j \in [\![1\,; n+2]\!]$ $\quad x_j \in \mathrm{Vect}(\mathcal{G})$ donc il existe $y_j \in E$ et $\lambda_j \in \mathbb{K}$ tel que

$$\begin{cases} x_j = y_j + \lambda_j g_{n+1} \\ y_j \in \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_n) \end{cases} \tag{17.36}$$

Deux cas de figure se présentent :

1. Soit pour tout $j \in [\![1\,;n+1]\!]$ $\lambda_j = 0$ et donc pour tout $j \in [\![1\,;n+1]\!]$ $x_j = y_j \in \operatorname{Vect}(g_1,\dots,g_n)$, donc par hypothèse de récurrence la famille $(x_1,\dots,x_{n+1})$ est liée. Par conséquent $\mathcal{X}$ est liée aussi.
2. Soit il existe $j_0 \in [\![1\,;n+2]\!]$ $\lambda_j \neq 0$ et quitte à réindexer, supposons que c'est λ_1. Ainsi

$$x_1 = y_1 + \lambda_1 g_{n+1} \tag{17.37}$$

$$g_{n+1} = \lambda_1^{-1}(x_1 - y_1) \tag{17.38}$$

$$\forall j \in [\![2\,;n+2]\!] \quad x_j = y_j + \lambda_j g_{n+1} = y_j + \lambda_j\lambda_1^{-1}(x_1 - y_1) \tag{17.39}$$

$$\forall j \in [\![2\,;n+2]\!] \quad x_j - \lambda_j\lambda_1^{-1}x_1 = y_j - \lambda_j\lambda_1^{-1}y_1 \tag{17.40}$$

Alors pour tout $j \in [\![2\,;n+2]\!]$

$$x_j - \lambda_j\lambda_1^{-1}x_1 \in \operatorname{Vect}(y_1,\dots,y_{n+2}) \subset \operatorname{Vect}(g_1,\dots,g_n) \tag{17.41}$$

Alors par hypothèse de récurrence la famille $(x_j - \lambda_j\lambda_1^{-1}x_1)_{j\in[\![2;n+2]\!]}$ est liée. Il existe donc une famille de scalaires α indéxée sur $[\![2\,;n+2]\!]$ telle que

$$\sum_{j=2}^{n+2}\alpha_j(x_j - \lambda_j\lambda_1^{-1}x_1) = 0 \quad \exists j_0 \in [\![2\,;n+2]\!]\ \alpha_{j_0} \neq 0 \tag{17.42}$$

si on pose $\alpha_1 = -\sum_{j=2}^{n+2}\alpha_j\lambda_j\lambda_1^{-1}$ on a alors

$$\sum_{j=1}^{n+2}\alpha_j x_j = 0 \quad \exists j_0 \in [\![2\,;n+2]\!]\ \alpha_{j_0} \neq 0 \tag{17.43}$$

Donc $\mathcal{X}$ est liée. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Comme $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ est aussi vraie, alors par théorème de récurrence, l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel n. □

Corollaire 17.10.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E, $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors*

$$\operatorname{Card}(\mathcal{L}) \leq \operatorname{Card}(\mathcal{G}) \tag{17.44}$$

Démonstration par l'absurde. Soit $n = \operatorname{Card}(\mathcal{G})$. Supposons que $\operatorname{Card}(\mathcal{L}) \geq n+1$, alors il existe une sous famille $\mathcal{L}'$ de $\mathcal{L}$ telle que $\operatorname{Card}(\mathcal{L}') = n+1$ et $\mathcal{L}' \subset \operatorname{Vect}(\mathcal{G}) = E$. D'après le lemme $\mathcal{L}'$ serait liée, ce qui est impossible puisque c'est une sous famille d'une famille libre, donc $\mathcal{L}'$ est libre. Aburde. Ainsi

$$\operatorname{Card}(\mathcal{L}) \leq \operatorname{Card}(\mathcal{G}) \tag{17.45}$$

□

Théorème 17.7 (Théorème de la dimension)**.** *Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Toutes les bases de E sont finies de même cardinal. Ce cardinal est appelé la dimension de E sur $\mathbb{K}$ noté* $\dim_{\mathbb{K}} E$.

Démonstration. Soient deux bases de E $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Comme $\mathcal{B}_1$ et libre et $\mathcal{B}_2$ est génératrice d'aprèse le corollaire $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_1) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)$ et en inversant les rôles on obtient l'inégalité réxirproque. Finalement $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_1) = \mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)$. □

Remarque : Ne pas oublier de préciser le corps de l'espace vectoriel, puisque $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$ et $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$. La dimension de l'espace nul est nulle car il est engendré par l'ensemble vide.

Théorème 17.8 (Caractérisation des bases parmi les familles génératrices)**.** *Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Soit $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E. Alors*

$$\mathrm{Card}(\mathcal{G}) \geq \dim_{\mathbb{K}} E \tag{17.46}$$

et

$$\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{K}} E \iff \mathcal{G} \textit{ est une base de } E \tag{17.47}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}} E$ et $\mathcal{B}$ est libre donc d'après le corollaire $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}} E \leq \mathrm{Card}(\mathcal{G})$.

$\Longleftarrow$ Théorème de la dimension.

$\Longrightarrow$ la famille $\mathcal{G}$ est génératrice de E donc il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ or $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}} E$ (puisque c'est une base) et par hypothèse $\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{K}} E$ alors

$$\begin{cases} \mathcal{B} \subset \mathcal{G} \\ \mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \mathrm{Card}(\mathcal{G}) \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{G} \tag{17.48}$$

alors $\mathcal{G}$ est une base. □

Théorème 17.9 (Caractérisation des bases parmi les familles libres)**.** *Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Soit $\mathcal{L}$ une famille libre de E. Alors*

$$\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leq \dim_{\mathbb{K}} E, \tag{17.49}$$

et

$$\mathrm{Card}(\mathcal{G}) = \dim_{\mathbb{K}} E \iff \mathcal{L} \textit{ est une base de } E \tag{17.50}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E, alors elle est génératrice donc $\mathrm{Card}(\mathcal{L}) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}} E$.

$\Longleftarrow$ Théorème de la dimension.

$\Longrightarrow$ Si $\mathcal{L}$ est une famille libre, on peut la compléter en une base $\mathcal{B}$ de E ($\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$) par théorème de la base incompléte. Alors $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}} E = \mathrm{Card}(\mathcal{L})$. Ainsi $\mathcal{L} = \mathcal{B}$ et c'est une base de E. □

17.2.3 Théorème d'isomorphisme

Proposition 17.11. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et F un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On suppose qu'il existe un isomorphisme de E dans F. Alors F est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E$.

Démonstration. Soit $n = \dim_{\mathbb{K}} E$, $\mathcal{B}$ une base de E ($\dim_{\mathbb{K}} E = \mathrm{Card}(\mathcal{B})$) et u un isomorphisme de E dans F. Alors la famille $u(\mathcal{B})$ est une base de F (puisque u est bijective et $\mathcal{B}$ est une base). La famille $u(\mathcal{B})$ est de cardinal fini le même que $\mathcal{B}$. Ainsi $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} E$. □

Théorème 17.10 (Théorème d'isomorphisme)**.** *Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie E et F. Ces deux espaces vectoriels sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension.*

Démonstration. S'ils sont isomorphes, la proposition précédente nous dit qu'ils ont la même dimension.

Supposons qu'ils ont la même dimension n. Soient $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F. D'après le théorème **??** il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$.

Comme $\mathcal{B}$ est une base de E (donc génératrice), alors $\mathcal{E}$ une base de F et $u(\mathcal{B}) = \mathcal{E}$. Donc u est bijective (proposition **??**). Ainsi E et F sont isomorphes. □

Corollaire 17.10.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \in \mathbb{N}$. Alors E et $\mathbb{K}^n$ sont isomorphes si et seulement si E est de dimension finie égale à n.*

Démonstration. Si E est de dimension finie, on applique le théorème précédent avec $F = \mathbb{K}^n$. Si E n'est pas de dimension finie alors il n'est pas isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et il n'est pas de dimension finie égale à n. □

17.2.4 Dimension du produit cartésien $E \times F$

Théorème 17.11. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors le produit cartésien $E \times F$ est de dimension fine et*

$$\dim_{\mathbb{K}} E \times F = \dim_{\mathbb{K}} E + \dim_{\mathbb{K}} F. \tag{17.51}$$

Démonstration. On note $p = \dim_{\mathbb{K}} E$ et $n = \dim_{\mathbb{K}} F$. Soient $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_p)$ une base de E et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de F. Pour tous vecteurs $x \in E$ et $y \in F$ il existe deux uniques familles de scalaires $(x_i)_{i \in [\![1;p]\!]}$ et $(y_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ telles que

$$x = \sum_{i=1}^{p} x_i b_i \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i. \tag{17.52}$$

Donc on a

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{p} x_i (b_i, 0) + \sum_{i=1}^{n} y_i (0, e_i). \tag{17.53}$$

Soit la famille $\mathcal{F} = (f_k)_{k \in [\![1;n+p]\!]}$ définie par :

— si $1 \leq k \leq p$ alors $f_k = (b_k, 0)$;

— si $p + 1 \leq k < n$ alors $f_k = (0, e_{k-p})$.

Ainsi

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{p} x_i f_i + \sum_{j=p+1}^{n+p} y_{j-p} f_j. \tag{17.54}$$

On vient de montrer que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de $E \times F$ de cardinal $n+p$. On a montré que $E \times F$ est de dimension finie et que $\dim_{\mathbb{K}} E \times F \leq n + p$.

Montrons qu'elle est libre. Soit $(\lambda_k)_{k\in[\![1;n+1]\!]} \in \mathbb{K}^{n+p}$ telle que $\sum_{i=1}^{n+p} \lambda_i f_i = (0,0)$. Alors

$$\iff \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(b_k,0) + \sum_{k=p+1}^{n+p} \lambda_k(0,e_{k-p}) = (0,0) \tag{17.55}$$

$$\iff \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k, 0\right) + \left(0, \sum_{k=p+1}^{n+p} \lambda_k e_{k-p}\right) = (0,0) \tag{17.56}$$

$$\iff \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k, \sum_{k=p+1}^{n+p} \lambda_k e_{k-p}\right) = (0,0) \tag{17.57}$$

$$\iff \begin{cases} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k b_k = 0 \\ \sum_{k=p+1}^{n+p} \lambda_k e_{k-p} = 0 \end{cases} \tag{17.58}$$

Or $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_p)$ est une base de $\mathcal{E}$ donc a fortiori $\mathcal{B}$ est libre, ainsi pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$ $\lambda_k = 0$. De même $\mathcal{E}$ est une base de de F donc elle est libre, ainsi pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ $\lambda_{j+p} = 0$. Alors $\mathcal{F}$ est une famille libre.

Finalement c'est une base de $E \times F$ et elle est de cardinal $n+p$ donc $E \times F$ est de dimension $n+p$. □

17.2.5 Dimension de $\mathcal{L}\,(E,F)$

Théorème 17.12. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors l'ensemble $\mathcal{L}\,(E,F)$ des applications linéaires de E vers F est de dimension fine et*

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{L}\,(E,F) = \dim_{\mathbb{K}} E \times \dim_{\mathbb{K}} F. \tag{17.59}$$

Démonstration. On note $p = \dim_{\mathbb{K}} E$ et $n = \dim_{\mathbb{K}} F$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. On définit une famille d'applications linéaires de E dans F $\Phi = (\varphi_{i,j})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ par : pour tout couple $(i,j) \in intervalleentier 1n \times [\![1\,;p]\!]$, $\varphi_{i,j}$ est définie par son action sur la base $\mathcal{B}$:

$$\forall k \in [\![1,p]\!] \quad \varphi_{i,j}(e_k) = \delta_{jk} f_i \tag{17.60}$$

avec δ le symbole de Kronecker. Montrons que la famille Φ est une base de $\mathcal{L}\,(E,F)$. On le montre en deux temps :

1. Montrons que Φ est libre. Soit $(\lambda_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \in \mathbb{K}^{np}$ telle que

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \lambda_{ij} \varphi_{ij} = 0. \tag{17.61}$$

C'est-à-dire que pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$ on a

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{ij}\varphi_{ij}(e_k) = 0 \tag{17.62}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{ij}\delta_{jk}f_i = 0 \tag{17.63}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ik}f_i = 0. \tag{17.64}$$

Or $\mathcal{B}' = (f_1, \ldots, f_n)$ est une base de F donc a fortiori libre. Ainsi pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$ et pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_{ik} = 0$. Alors Φ est libre.

2. Montrons que Φ est génératrice de $\mathcal{L}(E, F)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, on a $f(e_k) \in F$. $\mathcal{B}'$ est une base de F donc il existe une famille de scalaires $(\lambda_{ik})_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{K}^n$ telle que

$$f(e_k) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ik}f_i. \tag{17.65}$$

Comme $\sum_{j=1}^{p}\delta_{jk} = 1$ on peut l'introduire

$$f(e_k) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_{ik}\sum_{j=1}^{p}\delta_{jk}f_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{ik}\delta_{jk}f_i \tag{17.66}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{ij}\delta_{jk}f_i \tag{17.67}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{ij}\varphi_{ij}(e_k) \tag{17.68}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{ij}\varphi_{ij}\right)(e_k) \tag{17.69}$$

Donc $f = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_{ij}\varphi_{ij} \in \mathrm{Vect}(\Phi)$. Alors Φ est génératrice de $\mathcal{L}(E, F)$.

Donc Φ est une base de E de cardinal np donc $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à $\dim_{\mathbb{K}} E \times \dim_{\mathbb{K}} F$. □

Remarque : il existe une démonstration avec les matrices.

Corollaire 17.12.1. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie alors $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie égale à $(\dim_{\mathbb{K}} E)^2$. Le dual E^* est de dimension finie égale à celle de E.*

Remarque : Notion de la base duale. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p et soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$ soit e_j^* l'unique forme linéaire telle que pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, on ait $e_j^*(e_i) = \delta_{ij}$.

Proposition 17.12. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, soit e_j^* l'unique forme linéaire telle que pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, on ait $e_j * (e_i) = \delta_{ij}$. Alors la famille $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_p^*)$ est une base de E^* appelée base duale de la base $\mathcal{B}$.

Démonstration. On sait déjà que E^* est de dimension finie égale à p. Il suffit de montrer que $\mathcal{B}^*$ est génératrice ou qu'elle est libre. Soit $\varphi \in E^*$. Pour tout $k \in [\![1, p]\!]$ on a :

$$\varphi(e_k) = \varphi(e_k) \sum_{i=1}^{p} \delta_{ik} \tag{17.70}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} e_i^*(e_k)\varphi(e_k) \tag{17.71}$$

$$= \sum_{i=1}^{p} \varphi(e_i)e_i^*(e_k) \tag{17.72}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{p} \varphi(e_i)e_i^* \right)(e_k) \tag{17.73}$$

donc $\varphi = \sum_{i=1}^{p} \varphi(e_i)e_i^*$ et alors $\mathcal{B}^*$ est génératrice. Alors c'est une base. □

Coordonnées d'un vecteur de $\mathcal{B}$: Si $x \in E$ il existe un unique p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i$ (coordonnées de x dans $\mathcal{B}$). Pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, l'application e_j^* est telle que

$$e_j^*(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i e_j^*(e_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i \delta_{ij} = x_j. \tag{17.74}$$

La famille $\mathcal{B}^*$ est la famille des applications coordonnées de la base $\mathcal{B}$.

17.3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

17.3.1 Sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de dimension finie

Théorème 17.13. *Tout sous-espace vcetoriel E_1 d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est de dimension finie et*

$$\dim_{\mathbb{K}} E_1 \leq \dim_{\mathbb{K}} E \tag{17.75}$$

de plus $\dim_{\mathbb{K}} E_1 = \dim_{\mathbb{K}} E \iff E_1 = E$.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. On définit

$$\mathcal{C} = \{\operatorname{Card} \mathcal{L} \mid \mathcal{L} \text{ est une famille libre de } E_1\}\,. \tag{17.76}$$

Déjà $\mathcal{C}$ est une partie non vide ($0 \in \mathcal{C}$, $\mathcal{L} = \emptyset$) de $\mathbb{N}$ et elle est majorée par $\dim_{\mathbb{K}} E$. Alors elle admet un plus grand élément noté p. Soit $\mathbb{L}$ une famille libre de E_1 de cardinal p.

Montrons qu'elle est génératrice. Soit $x \in E_1$, si $x \in \mathcal{L}$ alors on a directement $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$. Sinon on pose $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{x\}$. La famille $\mathcal{L}'$ est dans E_1 et admet $p+1$ vecteurs. Comme $p+1 > \max \mathcal{C}$, elle ne peut pas être libre. Alors comme $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup \{x\}$ est liée et que $\mathcal{L}$ est libre, on sait que $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$. Alors $\mathcal{L}$ est génératrice de E_1.

Finalement $\mathcal{L}$ est une base de E_1. Alors E_1 est est de dimension finie égale à p. □

Démonstration de l'équivalence. S'ils sont égaux alors ils ont la même dimension (trivial). Supposons qu'ils aient la même dimension et soit $\mathcal{B}$ une base de E_1. Elle est libre dans E_1 donc dans E et $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 = \dim_{\mathbb{K}} E$ alors $\mathcal{B}$ est une base de E. Alors a fortiori $\mathcal{B}$ est génératrice de E. $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}) = E_1$. □

Vocabulaire : Soit E_1 un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Si $\dim_{\mathbb{K}} E_1 = 1$ alors E_1 est une droite vectorielle, si $\dim_{\mathbb{K}} E_1 = 2$ alors E_1 est un plan vectoriel et si $\dim_{\mathbb{K}} E_1 = \dim_{\mathbb{K}} E - 1$ alors E_1 est un hyperplan de E.

Définition 17.7. Soit W_1 un sous-espace affine d'un espace vectoriel réel E de dimension finie. On appelle dimension de W_1 la dimension de sa direction E_1. Si $\dim_{\mathbb{R}} E_1 = 1$ alors W_1 est une droite affine, si $\dim_{\mathbb{R}} E_1 = 2$ alors W_1 est un plan affine et si $\dim_{\mathbb{R}} E_1 = \dim_{\mathbb{R}} E - 1$ alors W_1 est un hyperplan affine.

Remarque : Le corps $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel sur lui-même de dimension 1. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}$ sont de dimension 0 ou 1. $\mathbb{K}$ admet deux sous-espaces vectoriels : $\mathbb{K}$ et $\{0\}$.

17.3.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition 17.8. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E et soit $\mathcal{X}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{X}$ est de rang fini si le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\mathcal{X})$ est de dimension finie, auquel cas on définit le rang de la famille de vecteurs $\mathcal{X}$ par

$$\mathrm{rang}(\mathcal{X}) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Vect}(\mathcal{X}). \tag{17.77}$$

Sinon on dit que $\mathcal{X}$ est de rang infini.

Proposition 17.13. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Alors toute famille $\mathcal{X}$ de vecteurs de E est de rang fini et vérifie

$$\mathrm{rang}(\mathcal{X}) \leq \dim_{\mathbb{K}} E. \tag{17.78}$$

De plus $\mathrm{rang}(\mathcal{X}) = \dim_{\mathbb{K}} E$ si et seulement si $\mathcal{X}$ est génératrice de E.

Démonstration. Soit $E_1 = \mathrm{Vect}(\mathcal{X})$. E_1 est un sous-espace vectoriel de E, donc il est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}} E_1 \leq \dim_{\mathbb{K}} E$. De plus

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}(\mathcal{X}) = \dim_{\mathbb{K}} E &\iff \dim_{\mathbb{K}} E_1 = \dim_{\mathbb{K}} E && (17.79)\\ &\iff E_1 = \mathrm{Vect}(\mathcal{X}) = E, && (17.80) \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à ce que $\mathcal{X}$ est génératrice de E. □

Proposition 17.14. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soit $\mathcal{X}$ une famille génératrice finie de vecteurs de E. Alors $\mathcal{X}$ est de rang fini et $\mathrm{rang}(\mathcal{X}) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{X})$. De plus $\mathrm{rang}(\mathcal{X}) = \mathrm{Card}(\mathcal{X})$ si et seulement si $\mathcal{X}$ est libre.

Démonstration. Soit $E_1 = \text{Vect}(\mathcal{X})$. Comme $\mathcal{X}$ est une famille génératrice finie de E_1, E_1 est de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}} E_1 \leq \text{Card}(\mathcal{X})$ et donc $\text{rang}(\mathcal{X}) \leq \text{Card}(\mathcal{X})$. De plus

$$\begin{aligned}
\text{rang}(\mathcal{X}) = \text{Card}(\mathcal{X}) &\iff \dim_{\mathbb{K}} E_1 = \text{Card}(\mathcal{X}) && (17.81)\\
&\iff \mathcal{X} \text{ est une base de } E_1 && (17.82)\\
&\iff \mathcal{X} \text{ est libre dans } E_1 && (17.83)\\
&\iff \mathcal{X} \text{ est libre dans } E && (17.84)\\
& && (17.85)
\end{aligned}$$

□

Théorème 17.14 (Caractérisation du rang)**.** *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{X}$ une famille de vecteurs de E de rang fini. Alors le rang de $\mathcal{X}$ est égal au plus grand nombre de vecteurs linéairement indépendant que l'on peut extraire de $\mathcal{X}$, ou encore au cardinal de la plus grande famille libre que l'on peut extraire de $\mathcal{X}$.*

Démonstration. Soit l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{\text{Card}\,\mathcal{L} \mid \mathcal{L} \text{ famille libre }, \mathcal{L} \subset \mathcal{X}\}, \tag{17.86}$$

si $\mathcal{L}$ est une famille libre telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$, alors $\mathbb{L}$ est une famille libre de $\text{Vect}(\mathcal{X})$. Par hypothèse, $\text{Vect}(\mathcal{X})$ est de dimension finie donc $\text{Card}\,\mathcal{L} \leq \dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}(\mathcal{X}) = \text{rang}(\mathcal{X})$. Alors $\mathcal{C}$ est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (puisque $0 \in \mathcal{C}$) et majorée. Alors elle admet un plus grand élément noté p.

On a $p \leq \text{rang}(\mathcal{X})$, puisque c'est un majorant, et il existe une famille $\mathcal{L} \subset \mathcal{X}$ telle que $\text{Card}\,\mathcal{L} = p$. Comme $\mathcal{X}$ est génératrice de $\text{Vect}(\mathcal{X})$ et que $\mathcal{L}$ est libre incluse dans $\mathcal{X}$ il existe une base $\mathcal{B}$ de $\text{Vect}(\mathcal{X})$ telle que $\mathcal{L} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{X}$. Comme la base $\mathcal{B}$ est une famille libre on a $\text{Card}\,\mathcal{B} \in \mathcal{C}$. Comme c'est aussi une base $\text{Card}\,\mathcal{B} = \dim_{\mathbb{K}} \text{Vect}(\mathcal{X}) = \text{rang}(\mathcal{X})$. D'où $\text{rang}(\mathcal{X}) \leq p = \max \mathcal{C}$.

On a alors les deux inégalité

$$\begin{cases} \text{rang}(\mathcal{X}) \leq p \\ \text{rang}(\mathcal{X}) \geq p, \end{cases} \tag{17.87}$$

d'où l'égalité $\text{rang}(\mathcal{X}) = p = \max \mathcal{C}$. □

17.3.3 Bases et sous-espaces vectoriels supplémentaires

Théorème 17.15. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I}$ (I fini) une base de E. Soit (I_1, I_2) une partition de I, c'est à dire que $I_1 \subset I$, $I_2 \subset I$, $I_1 \cup I_2 = I$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. On note $E_1 = \text{Vect}((e_i)_{i\in I_1})$ et $E_2 = \text{Vect}((e_i)_{i\in I_2})$. Alors*

$$E = E_1 \oplus E_2. \tag{17.88}$$

Démonstration. E_1 et E_2 sont des sous-espace vectoriel de E donc $E_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de E. Soit $x \in E$. Comme $\mathcal{E}$ est une base de E il existe $(x_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$. Comme (I_1, I_2) est une partition de I, on a aussi $x = \sum_{i\in I_1} x_i e_i + \sum_{i\in I_2} x_i e_i$ donc $x \in E_1 + E_2$. On a montré $E \subset E_1 + E_2$. Comme l'autre inclusion est établie, on a l'égalité $E = E_1 + E_2$.

Il reste à démontrer que la somme est directe. Montrons que le vecteur nul s'écrit de manière unique sous la forme $0 = x_1 + x_2$ avec $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. Soit $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $0 = x_1 + x_2$. Il existe alors deux familles $(\alpha_i)_{i\in I_1} \in \mathbb{K}^{I_1}$ et $(\alpha_i)_{i\in I_1} \in \mathbb{K}^{I_2}$ telles que $x_1 = \sum_{i\in I_1} x_i e_i$ et $x_2 = \sum_{i\in I_2} x_i e_i$. Comme (I_1, I_2) est une partition de I, leur somme vaut $0 = \sum_{i\in I} x_i e_i$. Comme $\mathcal{E}$ est une base de E, elle est libre et donc la famille $(\alpha_i)_{i\in I}$ est nulle. Donc x_1 et x_2 sont tous les deux nuls.

La somme est donc directe $E = E_1 \oplus E_2$. □

Théorème 17.16. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soient $\mathcal{E}_1$ une base de E_1 et $\mathcal{E}_2$ une base de E_2 alors la famille $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ est une base de E, dite adaptée à la somme directe $E = E_1 \oplus E_2$.*

Démonstration. Notons $\mathcal{E}_1 = (e_i)_{i\in I_1}$, $\mathcal{E}_2 = (e_i)_{i\in I_2}$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ et $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in I}$ avec $I = I_1 \cup I_2$.

$\mathcal{E}$ est une famille de vecteurs de E. Soit $x \in E$. Comme $E = E_1 \oplus E_2$, il existe un unique couplet $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. $\mathcal{E}_1$ est une base de E_1 donc il existe une famille de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I_1}$ telle que $x_1 = \sum_{i\in I_1} \alpha_i e_i$. De la même manière il existe une famille de scalaires $(\alpha_i)_{i\in I_2}$ telle que $x_1 = \sum_{i\in I_2} \alpha_i e_i$ (puisque $I_1 \cap I_2 = \emptyset$). Comme (I_1, I_2) est une partition de I, on a $x = x_1 + x_2 = \sum_{i\in I_1} \alpha_i e_i + \sum_{i\in I_2} \alpha_i e_i = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i$. Ainsi $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{E})$. La famille $\mathcal{E}$ est génératrice.

Soit $(\alpha_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I$ telle que $\sum_{i\in I} \alpha_i e_i = 0$. Alors $\sum_{i\in I_1} \alpha_i e_i = -\sum_{i\in I_2} \alpha_i e_i \in E_1 \cap E_2 = \{0\}$. Alors $\sum_{i\in I_1} \alpha_i e_i = 0$ et $\sum_{i\in I_2} \alpha_i e_i$. Les familles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont des bases donc elles sont libres alors $\forall i \in I = I_1 \cup I_2$ $\alpha_i = 0$. La famille $\mathcal{E}$ est donc libre.

$\mathcal{E}$ est libre et génératrice donc c'est une base de E. □

Corollaire 17.16.1. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Alors*

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2. \tag{17.89}$$

Démonstration. Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ des bases respectives de E, E_1 et E_2 alors comme on peut établir une partition $I = (I_1, I_2)$ on a

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \mathrm{Card}\,\mathcal{E} = \mathrm{Card}\,\mathcal{E}_1 + \mathrm{Card}\,\mathcal{E}_2 = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2. \tag{17.90}$$

□

17.3.4 Existence de supplémentaire

Théorème 17.17. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E admet au moins un supplémentaire dans E.*

Démonstration. Soit E_1 un sous-espace vectoriel de E. Il est de dimension finie puisque E est de dimension finie. Soit $\mathcal{E}_1$ une base de E_1. La famille $\mathcal{E}_1$ est une famille libre de E. Le théorème de la base incomplète permet de la compléter en une base de E. Alors il existe une famille de vecteur $\mathcal{E}_2$ de E telle que

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \quad \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2 = \emptyset. \tag{17.91}$$

Soit $S = \text{Vect}(\mathcal{E}_2)$. D'après le théorème **??**, E_1 et S sont supplémentaires dans E :

$$E = E_1 \oplus S. \tag{17.92}$$

$\square$

Remarque : Il n'y a pas unicité du supplémentaire. On retrouve facilement, dans le cas de la dimension finie, le résultat “Les supplémentaires d'un même espace vectoriel sont isomorphes” vu au chapitre précédent. Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient trois sous-espaces vectoriels tels que $E = E_1 \oplus S_1$ et $E = E_1 \oplus S_2$ alors $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} S_1 = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} S_2$. Alors $\dim_{\mathbb{K}} S_1 = \dim_{\mathbb{K}} S_2$. S_1 et S_2 sont isomorphes.

17.3.5 Formule de Grassmann

Théorème 17.18. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors le sous-espace vectoriel $E_1 + E_2$ est de dimension finie et*

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_1 + E_2) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2 - \dim_{\mathbb{K}}(E_1 \cap E_2). \tag{17.93}$$

Démonstration. $E_1 \cap E_2$ est un sous-espace vectoriel de E_1 et E_1 est de dimension finie. Alors d'après la sous section précédente, il existe un sous-espace vectoriel S_1 de E_1 tel que $E_1 = (E_1 \cap E_2) \oplus S_1$.

Montrons que $E_1 + E_2 = S_1 \oplus E_2$.

Déjà $S_1 \subset E_1 \subset E_1 + E_2$. Puis $E_2 \subset E_1 + E_2$. Alors $S_1 + E_2$ est un sous-espace vectoriel de $E_1 + E_2$: $S_1 + E_2 \subset E_1 + E_2$.

Soit $x \in E_1 + E_2$, il existe un couple $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Comme $E_1 = (E_1 \cap E_2) \oplus S_1$ il existe un couple $(a_1, b_1) \in (E_1 \cap E_2) \times S_1$ tel que $x_1 = a_1 + b_1$. Alors finalement $x = a_1 + b_1 + x_2$ avec $b_1 \in S_1$, $a_1 \in E_1 \cap E_2 \subset E_2$ et $x_2 \in E_2$. Comme E_2 est un sous-espace vectoriel on a $a_1 + x_2 \in E_2$ et donc $x \in S_1 + E_2$. Alors $E_1 + E_2 \subset S_1 + E_2$.

Comme on a les deux inclusions, on a l'égalité $E_1 + E_2 = S_1 + E_2$.

Montrons que l'intersection est nulle.

$$S_1 \cap E_1 = (S_1 \cap E_1) \cap E_2 \tag{17.94}$$
$$= S_1 \cap (E_1 \cap E_2) \tag{17.95}$$
$$= \{0\}, \tag{17.96}$$

car S_1 est un supplémentaire de $(E_1 \cap E_2)$ dans E_1.

Les sous-espaces vectoriels E_2 et S_1 sont de dimension finies donc $S_1 \oplus E_2$ est de dimension finie égale à

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_1 + E_2) = \dim_{\mathbb{K}}(S_1 \oplus E_2) = \dim_{\mathbb{K}} S_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2 \tag{17.97}$$

On a aussi $E_1 = (E_1 \cap E_2) \oplus S_1$ et comme E_1 est aussi de dimension finie on a

$$\dim_{\mathbb{K}} E_1 = \dim_{\mathbb{K}}(E_1 \cap E_2) + \dim_{\mathbb{K}} S_1 \tag{17.98}$$

alors au final

$$\dim_{\mathbb{K}}(E_1 + E_2) = \dim_{\mathbb{K}} E_1 + \dim_{\mathbb{K}} E_2 - \dim_{\mathbb{K}}(E_1 \cap E_2). \tag{17.99}$$

$\square$

17.4 Applications linéaires en dimension finie

17.4.1 Théorème du rang

Théorème 17.19. *Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension quelconque, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors le sous-espace vectoriel* $\mathrm{Im}(u)$ *de F est de dimension finie et on a*

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(u) + \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(u). \tag{17.100}$$

Le théorème du rang fait intervenir la dimension de l'espace vectoriel de départ, l'espace darrivée n'est pas supposé de dimension finie. Le théorème du rang ne signifie pas que l'image et le noyau de u sont supplémentaires. Ce qui n'aurait aucun sens puisqu'ils ne sont pas dans le même espace vectoriel. C'est faux même si $E = F$.

Démonstration. E est de dimension finie, le noyau $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E donc il existe un supplémentaire S du noyau dans E : $E = S \oplus \mathrm{Ker}(u)$.

D'après le théorème de préparation au théorème du rang (chapitre précédent) : S est isomorphe à $\mathrm{Im}(u)$. Comme E est de dimension finie, S est aussi de dimension finie comme étant un sous-espace vectoriel de E. Alors $\mathrm{Im}(u)$ est aussi de dimension finie et

$$\dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(u) = \dim_{\mathbb{K}} S = \dim_{\mathbb{K}} E - \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(u). \tag{17.101}$$

□

17.4.2 Rang d'une application linéaire

Définition 17.9. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini lorsque $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, auquel cas le rang est défini par

$$\mathrm{rang}(u) = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Im}(u). \tag{17.102}$$

Si $\mathrm{Im}(u)$ est de dimension infinie, on dit que le rang de u est infini.

Théorème 17.20. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que E est de dimension finie. Alors u est de rang fini et*

$$\mathrm{rang}(u) \leq \dim_{\mathbb{K}} E. \tag{17.103}$$

De plus $\mathrm{rang}(u) = \dim_{\mathbb{K}} E$ *si et seulement si u est injective.*

Démonstration. Les hypothèses du théorème du rang sont satisfaites donc $\mathrm{rang}(u)$ est fini et

$$\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{rang}(u), \tag{17.104}$$

alors l'inégalité est vraie : $\mathrm{rang}(u) \leq \dim_{\mathbb{K}} E$ et

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}(u) = \dim_{\mathbb{K}} E &\iff \dim_{\mathbb{K}} \mathrm{Ker}(u) = 0 & (17.105)\\ &\iff \mathrm{Ker}(u) = \{0\}. & (17.106) \end{aligned}$$

Ce qui est équivalent à u est injective. □

Théorème 17.21. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que F est de dimension finie. Alors u est de rang fini et*

$$\operatorname{rang}(u) \leq \dim_{\mathbb{K}} F. \tag{17.107}$$

De plus $\operatorname{rang}(u) = \dim_{\mathbb{K}} F$ *si et seulement si u est surjective.*

Démonstration. $\operatorname{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F, or F est de dimension finie donc $\operatorname{Im}(u)$ aussi. Alors

$$\operatorname{rang}(u) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(u) \leq \dim_{\mathbb{K}} F. \tag{17.108}$$

De plus $\operatorname{rang}(u) = \dim_{\mathbb{K}} F$ si et seulement si $\operatorname{Im}(u) = F$ c'est à dire si et seulement u est surjective. □

Proposition 17.15. Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose qu'il existe une famille génératrice finie $\mathcal{G}$ de E (donc E est de dimension finie). Alors

$$\operatorname{Im}(u) = \operatorname{Vect}(u(\mathcal{G})) \tag{17.109}$$

$$\operatorname{rang}(u) = \operatorname{rang}(u(\mathcal{G})). \tag{17.110}$$

Démonstration. E est un espace vectoriel de dimension finie donc $\operatorname{rang}(u)$ est fini. La première égalité est une conséquence de la proposition **??**. La deuxième éaglité découle de la définition du rang d'une application linéaire et du rang d'une famille de vecteurs :

$$\operatorname{rang}(u) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(u) \qquad \operatorname{rang}(u(\mathcal{G})) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Vect}(u(\mathcal{G})), \tag{17.111}$$

et comme les deux espaces vectoriels sont égaux, on a l'égalité $\operatorname{rang}(u) = \operatorname{rang}(u(\mathcal{G}))$. □

Proposition 17.16. Soient deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{X}$ une famille de vecteurs de E supposée de rang fini. Alors la famille $u(\mathcal{X})$ est de rang fini et

$$\operatorname{rang}(\mathcal{X}) = \operatorname{rang}(u(\mathcal{X})) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Vect}(\mathcal{X})). \tag{17.112}$$

Démonstration. Soit $E_1 = \operatorname{Vect}(\mathcal{X})$. C'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $\dim_{\mathbb{K}} E_1 = \operatorname{rang}(\mathcal{X})$. Soit $u_1 = u_{|E_1} \in \mathcal{L}(E_1, F)$. Comme E_1 est de dimension finie, on peut appliquer le théorème du rang à u_1 et

$$\dim_{\mathbb{K}} E_1 = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(u) + \operatorname{rang}(u_1), \tag{17.113}$$

avec :

— $\dim_{\mathbb{K}} E_1 = \operatorname{rang}(\mathcal{X})$;

— Comme $u_1 = u_{|E_1}$ on a $\operatorname{Ker}(u_1) = \operatorname{Ker}(u) \cap E_1$ et alors

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Ker}(u_1) = \dim_{\mathbb{K}}(E_1 \cap \operatorname{Ker}(u)) = \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Vect}(\mathcal{X})) \tag{17.114}$$

— Par définition du rang on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(u_1) &= \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(u_1) && (17.115)\\
&= \dim_{\mathbb{K}} u(E_1) && (17.116)\\
&= \dim_{\mathbb{K}} u(\operatorname{Vect}(\mathcal{X})) && (17.117)\\
&= \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Vect}(u(\mathcal{X})) \quad u \in \mathcal{L}(E, F) && (17.118)\\
&= \operatorname{rang} u(\mathcal{X}) && (17.119)
\end{aligned}$$

Alors finalement en remplaçant tous les membres dans la formule du théorème du rang

$$\operatorname{rang}(\mathcal{X}) = \operatorname{rang}(u(\mathcal{X})) + \dim_{\mathbb{K}}(\operatorname{Ker}(u) \cap \operatorname{Vect}(\mathcal{X})). \tag{17.120}$$

□

Théorème 17.22. *La composition par un isomoprhisme ne change pas le rang. Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On suppose que u et v sont de rang finis. Alors*

$$u \in \mathbf{Isom}(E, F) \implies \operatorname{rang}(v \circ u) = \operatorname{rang}(v) \tag{17.121}$$

$$v \in \mathbf{Isom}(F, G) \implies \operatorname{rang}(v \circ u) = \operatorname{rang}(u) \tag{17.122}$$

Démonstration. $\operatorname{Im}(v \circ u) \subset \operatorname{Im}(v)$ et $\operatorname{Im}(v \circ u)$ est de dimension finie (car v est de rang gini).

$$\operatorname{Im}(v \circ u) = \{y \in \mathcal{G}, \exists x \in E\ y = v \circ u(x)\} \tag{17.123}$$

$$= \{y \in \mathcal{G}, \exists z \in \operatorname{Im}(u)\ y = v(z)\} \tag{17.124}$$

$$= v(\operatorname{Im}(u)) \tag{17.125}$$

Supposons que $u \in \mathbf{Isom}(E, F)$, alors $\operatorname{Im}(u) = F$ (puisque u est bijective). L'application u est aussi de rang fini, donc F est de dimension finie et donc E est aussi de dimension finie (puisque $\dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F$). Alors

$$\operatorname{Im}(v \circ u) = v(\operatorname{Im}(u)) \tag{17.126}$$

$$= v(F) \tag{17.127}$$

$$= \operatorname{Im}(v) \quad \text{par définition} \tag{17.128}$$

Alors en passant aux dimensions dans l'égalité $\operatorname{rang}(v \circ u) = \operatorname{rang}(v)$.

Supposons maintenant que ce soit $v \in \mathbf{Isom}(F, G)$, alors $\operatorname{Im}(u) = G$ (pusique v est bijective). L'application v est aussi de rang fini, donc G est de dimension finie et donc F est aussi de dimension finie (puisque $\dim_{\mathbb{K}} F = \dim_{\mathbb{K}} G$). L'application v est bijective, donc sa restriction $v_{|\operatorname{Im}(u)}^{|v(\operatorname{Im}(u))}$ est aussi bijective. Alors $\operatorname{Im}(u)$ et $v(\operatorname{Im}(u))$ ont la même dimension alors $\operatorname{rang}(v \circ u) = \dim_{\mathbb{K}} v(\operatorname{Im}(u)) = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Im}(u) = \operatorname{rang}(u)$ □

17.4.3 Caractérisation des applications linéaires bijectives entre deux espaces vectoriels de même dimension finie

Théorème 17.23. *Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels* de même dimension finie *et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *u est bijective ;*
2. *u est injective ;*
3. *u est surjective ;*
4. $\operatorname{rang}(u) = \dim_{\mathbb{K}} E = \dim_{\mathbb{K}} F$ *;*
5. *il existe $v \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $v \circ u = \operatorname{Id}$;*

6. *il existe* $v \in \mathcal{L}(F, E)$ *telle que* $u \circ v = \mathrm{Id}$.

Démonstration. $1 \implies 2$: C'est évident

$2 \implies 3$: E est de dimension finie et en appliquant le théorème du rang à u on obtient

$$\mathrm{rang}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u) = \dim E \tag{17.129}$$

Or u est injective donc $\mathrm{Ker}(u) = \{0\}$ et sa dimension est nulle donc $\mathrm{rang}(u) = \dim F$. Ce qui est équivalent (par théorème) à u est surjective.

$3 \implies 4$: Comme $\dim E = \dim F$ alors si u est surjective alors $\mathrm{rang}(u) = \dim E$.

$4 \implies 1$: Déjà $\mathrm{rang}(u) = \dim E = \dim F$ alors u est surjective. De plus par théorème du rang $\dim E = \dim \mathrm{Ker}(u) + \mathrm{rang}(u)$. Donc $\dim \mathrm{Ker}(u) = 0$ ce qui implique que u est injective. Au final u est bijective.

On a montré que les quatre premières assertions sont équivalentes.

Ensuite La première implique la cinquième et la sixième par caractérisation des bijections.

$5 \implies 2$ puisque $v \circ u = \mathrm{Id}$ implique que $v \circ u$ est injective ce qui implique que u est injective.

Enfin $6 \implies 3$ puisque $u \circ v = \mathrm{Id}$ implique que $u \circ v$ est surjective ce qui implique que u est surjective. □

Corollaire 17.23.1. *Soient un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(E)$. *Alors*

$$u \text{ bijective} \iff u \text{ injective} \iff u \text{ surjective.} \tag{17.130}$$

C'est faux en dimension infinie.

17.4.4 Formes linéaires et hyperplans

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E quelconque. On ne suppose pas pour l'instant qu'il est de dimension finie.

17.4.4.1 Rang d'une forme linéaire

Proposition 17.17. Soit $f \in E^*$ alors :
— soit f est la forme linéaire nulle et elle est de rang nul ;
— soit f est non nulle et $\mathrm{rang}(f) = 1$.

Démonstration. On avait déjà vu qu'une forme linéaire non null est surjective. On peut aussi utiliser la dimension : $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}$ donc $\mathrm{Im}(f) = \{0\}$ ou $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}$ alors en passant à la dimension on a le résultat voulu. □

17.4.4.2 Hyperplan vectoriel

Proposition 17.18. Soit H un sous-espace vectoriel de E. Il y a équivalence entre :

1. H est le noyau d'une forme linéaire non nulle ;
2. Il existe une droite vectorielle qui est le supplémentaire de H dans E

$$\exists a \in E \setminus \{0\} \quad H \oplus \mathrm{Vect}(a) = E \tag{17.131}$$

Si l'une des deux assertions est vérifiée, on dit que H est un hyperplan vectoriel de E.

Démonstration. $1 \implies 2$: il existe une forme linéaire f non nulle telle que $H = \mathrm{Ker}(f)$. Comme f est non nulle il existe un vecteur a de E tel que $f(a) \neq 0$ et comme f est linéaire $a \neq 0$. Montrons que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

H et $\mathrm{Vect}(a)$ sont tous les deux des sous-espaces vectoriels de E donc $H + \mathrm{Vect}(a) \subset E$.

Soit $x \in H \cap \mathrm{Vect}(a)$ alors

$$\begin{aligned} x \in H &\iff x \in \mathrm{Ker}(f) && (17.132) \\ &\iff f(x) = 0 && (17.133) \end{aligned}$$

$$x \in \mathrm{Vect}(a) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}\ x = \lambda a \qquad (17.134)$$

Donc $0 = f(x) = f(\lambda a) = \lambda f(a)$. Comme $f(a) \neq 0$ et que $\mathbb{K}$ est intègre on a $\lambda = 0$, et donc $x = 0$.

On a montré $H \cap \mathrm{Vect}(a) \subset \{0\}$. Comme ce sont des sous-espaces vectoriel, leur intersection est un sous-espace vectoriel et on a l'autre inclusion donc au fnal l'égalité : $H \cap \mathrm{Vect}(a) = \{0\}$.

Analyse : Soit $x \in E$. Supposons qu'il existe $x_H \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $x = x_H + \lambda a$. Alors

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_H) + \lambda f(a) && (17.135) \\ &= \lambda f(a) && (17.136) \end{aligned}$$

comme $f(a) \neq 0$, son inverse existe et donc $\lambda = f(x)f(a)^{-1}$ (unique) et donc $x_h = x - f(x)f(a)^{-1}$ (unique).

Synthèse : Soit $x \in E$, $x = (x - f(x)f(a)^{-1}a) + f(x)f(a)^{-1}a$. De plus

$$f(x - f(x)f(a)^{-1}a) = f(x) - f(x)f(a)f(a)^{-1} = 0 \qquad (17.137)$$

donc $x - f(x)f(a)^{-1}a \in \mathrm{Ker}(f) = H$. Ainsi $E \subset H + \mathrm{Vect}(a)$.

Finalement la somme est directe et ils sont supplémentaires : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

$2 \implies 1$: Soit $a \in E \setminus \{0\}$ tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$. Soit $f \in E^*$ définie par ses restrictions sur H et sur $\mathrm{Vect}(a)$:

— $\forall x \in H \quad f(x) = 0$;

— $\forall x \in \mathrm{Vect}(a)\ \exists! \lambda \in \mathbb{K} \quad x = \lambda a\ f(x) = \lambda$.

Sur $\mathrm{Vect}(a)$, on associe à x sa coordonnée dans la base (a) et c'est bien linéaire.

De plus f est non nulle ($f(a) = 1$) et pour tout pour tout $x \in E$ il existe un unique couple $(x_H, \lambda) \in H \times K$ tel que $x = x_H + \lambda a$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f(x) = f(x_H) + \lambda f(a) = 0 && (17.138) \\ &\iff \lambda f(a) = 0 && (17.139) \\ &\iff \lambda = 0 && (17.140) \\ &\iff x = x_H && (17.141) \\ &\iff x \in H && (17.142) \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Ker}(f) = H$. □

Soient H un hyperplan vectoriel de E, $f \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \mathrm{Ker}(f)$ et $a \in E \setminus H$ tel que $E = H \oplus \mathrm{Vect}(a)$.

Proposition 17.19. Pour tout D' sous-espace vectoriel de E, D' est un supplémentaire de H dans E si et seulement s'il existe $a' \in E \setminus H$ tel que $D' = \mathrm{Vect}(a')$.

Démonstration. S'il existe $a' \in E \setminus H$ tel que $D' = \mathrm{Vect}(a')$, on a déjà montrer qu'alors D' est un supplémentaire de H dans E (démontré au $1 \implies 2$ de la proposition précédente et on avait choisi a quelconque dans $E \setminus H$).

Si D' est un supplémentaire de H dans E alors on a

$$E = D' \oplus H = \mathrm{Vect}(a) \oplus H \tag{17.143}$$

alors D' et $\mathrm{Vect}(a)$ sont isomorphes et donc D' est de dimension finie égale à 1. Il existe alors un vecteur non nul a' de E tel que $D' = \mathrm{Vect}(a')$. De plus $a' \notin H$ car sinon $D' \cap H \supset \{a'\} \neq \{0\}$ ce qui est impossible. □

Proposition 17.20. Pour toute forme linéaire $g \in E^*$,

$$H = \mathrm{Ker}(g) \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\ g = \lambda f. \tag{17.144}$$

Démonstration. $\Longleftarrow$: Pour tout $x \in E$, on a

$$x \in \mathrm{Ker}(g) \iff (\lambda f)(x) = 0 \tag{17.145}$$
$$\iff \lambda f(x) = 0 \tag{17.146}$$
$$\iff f(x) = 0 \qquad (\lambda \neq 0) \tag{17.147}$$
$$\iff x \in \mathrm{Ker}(f) \tag{17.148}$$

Alors $\mathrm{Ker}(f) = H = \mathrm{Ker}(g)$.

$\implies$: Si $H = \mathrm{Ker}(g)$ comme $a \notin H$ on pose $\lambda = g(a)f(a)^{-1}$. Pour tout $x \in E$ il existe un unique couple $(x_H, \lambda) \in H \times \mathbb{K}$ tel que $x = x_H + \mu a$. On calcule $f(x)$ et $g(x)$

$$f(x) = f(x_H) + \mu f(a) = \mu f(a) \tag{17.149}$$
$$g(x) = g(x_H) + \mu g(a) = \mu(\lambda f(a)) = \lambda(\mu f(a)) = \lambda f(x) \tag{17.150}$$

Alors comme c'est vrai pour tout $x \in E$, on a $g = \lambda f$. Le scalaire λ est non nul sinon on aurait g constante nulle et on aurait aussi $H = \mathrm{Ker}(g) = E$. Ainsi $H \neq E$ car H est un hyperplan. □

Équations linéaires d'un hyperplan

Soit H un hyperplan. Soit $f \in E^* \setminus \{0\}$ et $H = \mathrm{Ker}(f)$. Pour tout $x \in E$, $x \in H$ si et seulement si $f(x) = 0$. L'écriture "$f(x) = 0$" est une équation linéaire de l'hyperplan H. Les autres équations de H sont $\lambda f(x) = 0$ avec λ un scalaire non nul.

Hyperplan affine

Soit un scalaire b et $\mathcal{H} = \{x \in E, f(x) = b\}$. La forme linéaire f est non nulle, alors elle est surjective, donc il existe $x_0 \in E$ tel que $f(x_0) = b$. On sait que $\mathcal{H} = x_0 + H$. $\mathcal{H}$ est un hyperplan affine passant par x_0 et dirigé par l'hyperplan vectoriel H.

17.4.4.3 Hyperplans en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cadre on avait définit les hyperplans vectoriels par :

1. H est un hyperplan de E si et seulement si c'est le noyau d'une forme linéaire non nulle ;
2. H est un hyperplan si et seulement si c'est le supplémentaire d'une droite vectorielle dans E ;
3. H est un hyperplan si et seulement si sa dimension vaut $n-1$.

Vérifions que ces définitions sont équivalentes.

$1 \implies 3$: $H = \operatorname{Ker}(f)$ avec $f \in E^* \setminus \{0\}$. f est non nulle donc son rang vaut 1 et E est de dimension finie alors en appliquant le théorème du rang on a

$$\dim E = \dim \operatorname{Ker}(f) + \operatorname{rang}(f)n = \dim H + 1 \tag{17.151}$$

alors $\dim H = n-1$.

$3 \implies 1$: Il existe $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ une base de H. On complète cette famille libre de E en posant une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E. On définit $f \in E^*$ par son action sur cette base :

$$\begin{cases} i \in [\![1, n-1]\!] & f(e_i) = 0 \\ i = n & f(e_n) = 1 \end{cases} \tag{17.152}$$

alors f est non nulle et $\operatorname{Ker}(f) = H$ ($\forall x \in E\ \exists!(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n\ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, alors $f(x) = 0 \iff \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = 0 \iff x_n = 0 \iff x \in H$).

On peut également montrer que $2 \iff 3$, mais on n'y est pas forcé ($1 \iff 2$ et $1 \iff 3$).

$2 \implies 3$: Il existe un vecteur a de E non nul tel que $E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)$. Comme E est de dimension finie on a

$$\dim E = \dim H + \dim \operatorname{Vect}(a) \tag{17.153}$$

$$n = \dim H + 1 \tag{17.154}$$

soit alors $\dim H = n-1$.

$3 \implies 2$: On travaille en dimension finie donc H admet un supplémentaire S et $\dim H = \dim E - 1$ donc $\dim S = 1$ et alors S est une droite.

Équations d'un hyperplan dans une base

Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit H un hyperplan vectoriel de E et $f \in E^* \setminus \{0\}$ telle que $H = \operatorname{Ker}(f)$. Pour tout vecteur $x \in E$ il existe un unique n-uplet de scalaires $(x_1, \ldots, x_n)$ tel que $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Alors

$$x \in H \iff f(x) = 0 \tag{17.155}$$

$$\iff \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = 0 \tag{17.156}$$

Si on note pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ $a_i = f(e_i) \in K$. Comme f est non nulle il existe un naturel $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{i_0} \neq 0$ et donc

$$x \in H \iff \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0 \\ \exists i_0 \in [\![1\,; n]\!] \quad a_{i_0} \neq 0 \end{cases} \tag{17.157}$$

Alors $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$ est une équation de l'hyperplan H dans la base $\mathcal{E}$. Les autres équations de H dans cette base sont $\lambda\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i\right) = 0$ avec λ un scalaire non nul.

Réciproquement, soit $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ tel qu'il existe $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $b_{i_0} \neq 0$. Soit

$$K = \left\{ x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \;\middle|\; \sum_{i=1}^n b_i x_i = 0 \right\}, \tag{17.158}$$

alors K est un hyperplan vectoriel.

Démonstration. Soit $f \in E^*$ définie par : $\forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad f(e_i) = b_i$. La forme linéaire f est non nulle puisqu'il existe $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $b_{i_0} \neq 0$. Soit $x \in E$, alors

$$x \in K \iff \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = 0 \tag{17.159}$$

$$\iff f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = 0 \tag{17.160}$$

$$\iff f(x) = 0 \tag{17.161}$$

$$\iff x \in \mathrm{Ker}(f). \tag{17.162}$$

Donc $K = \mathrm{Ker}(f)$ et c'est un hyperplan. □

17.5 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$ tel que $ac \neq 0$ et $d \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On sepropose de résoudre dans $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'équation linéaire de récurrence d'ordre 2 à coefficients constants :

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d_n, \tag{$\mathcal{L}$}$$

c'est-à-dire de déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^N$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d_n. \tag{17.163}$$

Dans le cas où $d = 0$, l'équation sera dite homogène et noté (**??**) :

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = 0 \tag{$\mathcal{H}$}$$

17.5.1 Résolution de l'équation homogène

Proposition 17.21. L'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ des solutions de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Démonstration. $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ est une partie de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ non vide, puisqu'elle contient la suite nulle et stable par combinaison linéaire : soient $(u, v) \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda u + v \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et pour tout entier n

$$a(\lambda u+v)_{n+2}+b(\lambda u+v)_{n+1}+c(\lambda u+v)_n = \lambda(au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n)+(au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n) = 0 \tag{17.164}$$

La suite $\lambda u + v$ est bien dans $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$. Par théorème de caractérisation des sous-espaces vectoriel, $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. □

Proposition 17.22. Le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ est en fait un plan vectoriel, c'està-dire qu'il est de dimension 2.

Démonstration. Soit l'application f de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{K}^2$ définie par $f(u) = (u_0, u_1)$. Prouvons que f est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ sur $\mathbb{K}^2$.

— La fonction f est bijective puisque pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, il existe une seule suite $u \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ telle que $f(u) = (u_0, u_1) = (\alpha, \beta)$. En effet, on prouve par récurrence sur n que le terme u_n est défini sans ambiguïté par la donnée de u_0, u_1 et de la relation de récurrence $au_{n+2}+bu_{n+1}+cu_n = 0$ avec $\alpha \neq 0$.

— La fonction f est linéaire car, pour tout $(u, v) \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$f(\lambda u + v) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1) \tag{17.165}$$
$$= \lambda(u_0, u_1) + (v_0, v_1) \tag{17.166}$$
$$= \lambda f(u) + f(v) \tag{17.167}$$

On a démontré que $f \in \mathbf{Isom}\big(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}), \mathbb{K}^2\big)$. Le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ est donc, comme le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^2$, de dimension 2. □

On cherche alors une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$. Par analogie avec les équations de récurrences d'ordre 1 (de la forme $au_{n+1} + bu_n = 0$ avec $ab \neq 0$ qui peuvent se mettre sous la forme $u_{n+1} = qu_n$), on cherche les suites géométriques, de premier terme égal à 1, qui sont des éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$.

Proposition 17.23. Pour tout élément r pris dans $\mathbb{K}$, la suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une solution de (**??**) si, et seulement si, r est racine de l'équation de degré 2 suivante, dite équation caractéristique de (**??**).

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{E.C.}$$

Démonstration.

$$(r^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) \iff \forall n \in \mathbb{N}\ ar^{n+2} + br^{n+1} + cr^n = 0 \tag{17.168}$$
$$\iff \forall n \in \mathbb{N}\ r^n(ar^2 + br + c) = 0 \tag{17.169}$$
$$\iff ar^2 + br + c = 0 \text{ car } r^0 = 1 \neq 0 \tag{17.170}$$

□

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique

17.5.1.1 Premier cas : l'équation caractéristique admet deux racines distinctes sur le corps $\mathbb{K}$

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta \neq 0$, soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ avec $\Delta > 0$.

Notons r_1 et r_2 avec $r_1 \neq r_2$, les deux racines distinctes de (**??**) sur $\mathbb{K}$. Alors $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$. Démontrons qu'ils forment une famille libre de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$,

$$\lambda(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{K}^\mathbb{N}} \implies \forall n \in \mathbb{N}\ \lambda r_1^n + \mu r_2^n = 0 \tag{17.171}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda + \mu = 0 & (n = 0) \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 0 & (n = 1) \end{cases} \tag{17.172}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \lambda(r_1 - r_2) = 0 \end{cases} \tag{17.173}$$

$$\implies \lambda = \mu = 0 \text{ car } r_1 - r_2 \neq 0 \tag{17.174}$$

Comme la dimension de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ est de deux, on en déduit que $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$.

Théorème 17.24. *Si l'équation caractéristique de* (**??**) *admet deux racines distinctes sur* $\mathbb{K}$*,* r_1 *et* r_2*, alors le plan vectoriel* $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ *admet* $((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ *comme base. Autrement dit, pour toute suite* $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$*,*

$$u \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) \iff \exists!(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n \tag{17.175}$$

La donnée des conditions initiales $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$ permet de trouver l'unique suite u solution de (**??**) vérifiant ces conditions. Le couple (λ, μ) est l'unique solution du système de Cramer $\begin{cases} \lambda + \mu = \alpha \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = \beta \end{cases}$.

17.5.1.2 Deuxième cas : l'équation caractéristique admet une racine double dans $\mathbb{K}$

C'est le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec $\Delta = 0$. Notons r_0 la racine double de (**??**) dans $\mathbb{K}$: $r_0 = -b/2a$. Alors $(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$. Il faut en trouver un second non colinéaire au premier pour obtenir une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$.

Vérifions que c'est le cas de la suite $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout naturel n,

$$a(n+2)r_0^{n+2} + b(n+1)r_0^{n+1} + cnr_0^n = nr_0^n(ar_0^2 + br_0 + c) + r_0^{n+1}(2ar_0 + b) \tag{17.176}$$

$$= nr_0^n \times 0 + r_0^{n+1} \times 0 = 0. \tag{17.177}$$

La suite $(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien un élément de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$.

La famille $((r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une famille libre de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$. En effet, pour tout couple de scalaires (λ, μ),

$$\lambda(r_0^n)_{n\in\mathbb{N}} + \mu(nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}}) = 0_{\mathbb{K}^\mathbb{N}} \implies \forall n \in \mathbb{N}\ \lambda r_0^n + \mu n r_0^n = 0 \tag{17.178}$$

$$\implies \begin{cases} \lambda = 0 & (n = 0) \\ \lambda r_0 + \mu r_0 = 0 & (n = 1) \end{cases} \tag{17.179}$$

$$\implies \lambda = \mu = 0 \ \text{ car } r_0 \neq 0. \tag{17.180}$$

En effet, puisque $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ alors $b^2 = 4ac \neq 0$. Comme $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})) = 2$, alors $((r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$.

Théorème 17.25. *Si l'équation caractéristique de (**??**) admet une racine double r_0 dans K alors le plan vectoriel $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ admet $((r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}, (nr_0^n)_{n\in\mathbb{N}})$ pour base. Autrement dit pour toute suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,*

$$u \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) \iff \exists!(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_0^n + \mu n r_0^n. \tag{17.181}$$

La donnée des conditions initiales $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$ permet de trouver l'unique suite u solution de (**??**) vérifiant ces conditions. Le couple (λ, μ) est l'unique solution du système de Cramer $\begin{cases} \lambda = \alpha \\ (\lambda+\mu)r_2 = \beta \end{cases}$.

17.5.1.3 Troisième cas : l'équation caractéristique n'admet pas de racine dans $\mathbb{K}$

Il s'agit du cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$. Il n'y a donc pas ici de suite géométrique $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec r réel qui soit solution de (**??**). Il faut trouver un autre moyen de déterminer une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$. Par contre, la résolution de (**??**) avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, c'est à dire dans l'ensemble $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ des suites complexes, conduirait à l'ensemble $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$ qui relève du premier cas.

Notons r_1 et r_2 avec $r_1 \neq r_2$, les racines complexes distinctes de (**??**). Comme a, b et c sont des réels et $\Delta < 0$, on sait que r_1 et r_2 sont des complexes non réels et conjugués. Notons ρ le module de r_1 et θ un argument de r_1, alors $r_1 = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $r_2 = \rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$. Comme ils ne sont pas réels $\sin\theta \neq 0$.

On a vu que les suites $(r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$. Comme $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$ est un espace vectoriel, la suite $\frac{1}{2}((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est également dans $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$. Or, pour tout naturel n,

$$\frac{1}{2}r_1^n + \frac{1}{2}r_2^n = \frac{1}{2}\rho^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta} + \frac{1}{2}\rho^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\theta} \tag{17.182}$$
$$= \rho^n\cos(n\theta). \tag{17.183}$$

Cette suite est donc à valeurs réelles et par conséquent c'est un élément de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$. De même, la suite $\frac{1}{2\,\mathrm{i}}((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} - (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}})$ est également dans $\mathcal{S}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H})$. Or, pour tout naturel n,

$$\frac{1}{2\,\mathrm{i}}r_1^n - \frac{1}{2\,\mathrm{i}}r_2^n = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\rho^n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\theta} - \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\rho^n\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\theta} \tag{17.184}$$
$$= \rho^n\sin(n\theta). \tag{17.185}$$

Cette suite est donc à valeurs réelles et par conséquent c'est un élément de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$.

On a trouvé deux éléments de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$, les suites réelles $(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}$. Montrons qu'elles constituent une famille libre du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ et on aura trouvé une base de $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ (car sa dimension est de deux). Pour tout couple de scalaires (λ, μ),

$$\lambda(\rho^n\cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}} + \mu(\rho^n\sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}} = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \tag{17.186}$$
$$\implies \forall n \in \mathbb{N}\ \lambda\rho^n\cos(n\theta) + \mu\rho^n\sin(n\theta) = 0 \tag{17.187}$$
$$\implies \begin{cases} \lambda = 0 & (n=0) \\ \lambda\rho\cos\theta + \mu\rho\sin\theta = 0 & (n=1) \end{cases} \tag{17.188}$$
$$\implies \lambda = \mu = 0 \text{ car } \rho\sin\theta \neq 0 (r_1 \notin \mathbb{R}). \tag{17.189}$$

Théorème 17.26. *Si $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $ac \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$, l'équation caractéristique de (**??**) a deux racines complexes non réelles et conjuguées $\rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $\rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\sin\theta \neq 0$.*

Alors $S_{\mathbb{R}}(\mathcal{H})$ admet pour base $((\rho^n \sin(n\theta))_{n\in\mathbb{N}}, (\rho^n \cos(n\theta))_{n\in\mathbb{N}})$. Autrement dit pour toute suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,

$$u \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) \iff \exists!(A, B) \in \mathbb{R}^2\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \rho^n(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)). \tag{17.190}$$

La donnée des conditions initiales $u_0 = \alpha$ et $u_1 = \beta$ permet de trouver l'unique suite u solution de (**??**) vérifiant ces conditions. Le couple (A, B) est l'unique solution du système de Cramer $\begin{cases} A = \alpha \\ \rho(A\cos\theta + B\sin\theta) = \beta \end{cases}$.

17.5.2 Résolution de l'équation complète

Soit f l'application de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ dans lui-même qui à toute suite u lui associe la suite $(au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On vérifie facilement que f est linéaire, d'où $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}\right)$.

Pour toute suite $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$,

$$u \in \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) \iff f(u) = (d_n)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{17.191}$$

On sait alors que :

Proposition 17.24. Si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \notin \mathrm{Im}(f)$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L}) = \emptyset$. Si $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{Im}(f)$ alors $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$ est le sous-espace affine de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ de direction $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H})$ passant par n'importe laquelle des solutions de (**??**).

17.5.2.1 Recherche d'une solution particulière pour $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite constante de valeur d

Soit un scalaire d. Il reste donc à trouver une solution particulière de

$$au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n = d. \tag{$\mathcal{L}$}$$

On commence par chercher s'il existe des suites constantes dans $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$. Soit un scalaire α. La suite constante de valeur α est solution de (**??**) si, et seulement si, $(a + b + c)\alpha = d$.

Cas 1 : si $a + b + c \neq 0$, alors une solution de (**??**) est la suite constante de valeur $\frac{d}{a+b+c}$ et

$$\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) = \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) + \frac{d}{a+b+c} \tag{17.192}$$

Cas 2 : si $a + b + c = 0$, cherchos s'il existe des suites du type $(\alpha + \beta n)_{n\in\mathbb{N}}$ solutions de (**??**). Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$, $(\alpha + \beta n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathbb{L})$ si, et seulement si,

$$\forall n \in \mathbb{N}\ a(\alpha + (n+2)\beta) + b(\alpha + (n+1)\beta) + c(\alpha + n\beta) = d \tag{17.193}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ (a + b + c)\alpha + (a + b + c)n\beta + (2a + b)\beta = d \tag{17.194}$$

$$(2a + b)\beta = d \tag{17.195}$$

On observe que α est quelconque. En effet, lorsque $a+b+c=0$, toutes les suites constantes u sont solutions de l'équation homogène donc vérifient $f(u)=0$. On ne change donc pas la valeur de $f(v)$ en ajoutant une suite constante u à la suite v. Il suffit ainsi de chercher des solutions de (**??**) sous la forme $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cas 2-1 : si $a+b+c=0$ et $2a+b\neq 0$, une solution de (**??**) est la suite $\left(\frac{d}{2a+b}n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Donc :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) = \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) + \left(\frac{d}{2a+b}n\right)_{n\in\mathbb{N}} \tag{17.196}$$

Cas 2-2 : si $a+b+c=0$ et $2a+b=0$. On a alors $b=-2a$ et $c=-a-b=a$, d'oùm $\Delta=0$ et $r_0=-b/2a=1$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est alors :

$$\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) = \left\{u\in\mathbb{K}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2\ \forall n\in\mathbb{N}\quad u_n=\lambda_1+\lambda_2 n\right\}. \tag{17.197}$$

Cherchons une solution de (**??**) du type $(\alpha+\beta n+\gamma n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. On peut choisir α et β quelconques puisque les suites $(\alpha+\beta n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont solutions de l'équation homogène. Pour tout scalaire γ, la suite $(\gamma n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L})$ si et seulement si :

$$\forall n\in\mathbb{N} a\gamma(n+2)^2+b\gamma(n+1)^2+c\gamma n^2=d \tag{17.198}$$
$$\forall n\in\mathbb{N}(a+b+c)\gamma n^2+2(2a+b)\gamma n+(4a+b)\gamma=d \tag{17.199}$$
$$(4a+b)\gamma=d. \tag{17.200}$$

Or $4a+b=4a-2a=2a\neq 0$ par hypothèse, donc la suite $\left(\frac{d}{2a}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est solution de (**??**). D'où

$$\mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}) = \mathcal{S}_{\mathbb{K}}(\mathcal{H}) + \left(\frac{d}{2a}n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}. \tag{17.201}$$

Chapitre 18

Polynômes

Sommaire

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps, en général $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

18.1 Ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$

18.1.1 Notion de polynôme

Définition 18.1. On appelle polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute suite d'éléments de $\mathbb{K}$ nulle à partir d'un certain rang.

Si $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour tout naturel n, $n > k$ alors $a_n = 0$. On note

$$A = (a_0, a_1, \ldots, a_k, 0, \ldots). \tag{18.1}$$

Les éléments $a_0, \ldots, a_k$ sont appelés les coefficients du polynôme A. La suite constante nulle est un polynôme appelé le polynôme nul.

On appelle polynôme constants les suites de la forme

$$(\lambda, 0, 0, \ldots) \quad (\lambda \in \mathbb{K}). \tag{18.2}$$

Autrement dit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme constant si, et seulement si, pour tout entier $n > 1$ $a_n = 0$.

On appelle monômes, les polynômes $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tels qu'il existe un naturel n_0 tel que pour tout n, si $n \neq n_0$ alors $a_n = 0$. C'est-à-dire que A est de la forme : $A = (0, 0, \ldots, 0, \lambda, 0, \ldots, 0)$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Soit un polynôme $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on dit que A est pair (resp. impair) si et seulement si ses coefficients d'indice impairs (resp. pairs) sont nuls.

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$.

18.1.2 Degré d'un polynôme

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme non nul. Soit $\mathcal{C} = \{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$. C'est une partie de $\mathbb{N}$ non vide (puisque A est non nul) et majorée (les termes s'annulent à partir d'un certain rang). Alors $\mathcal{C}$ admet un plus grand élément. On en déduit la définition suivante.

Définition 18.2. Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme. On définit le degré de A noté $\deg(A)$ par :
— si A est le polynôme nul, $\deg(A) = -\infty$;
— sinon, $\deg(A) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$.

Vocabulaire : si A est un polynôme non nul de degré n, le coefficient a_n est le coefficient dominant. Si $a_n = 1$, le polynôme est dit normalisé, ou unitaire.

Remarque : de même si A est non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$ admet un plus petit élément. On peut de la même manière définir :

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un polynôme. On définit la valuation de A notée $\mathrm{val}(A)$ par :

— si A est nul, $\mathrm{val}(A) = +\infty$;

— sinon, $\mathrm{val}(A) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$.

18.1.3 Structure de $\mathbb{K}[X]$

18.1.3.1 Espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$

Lemme 18.1. *Soient $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et un scalaire λ. Alors la suite $C = \lambda A + B$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Déjà comme A et B sont des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et comme c'est un espace vectoriel (il est stable par combinaison linéaire) donc $C \in \mathbb{K}^N$. Il existe deux entiers p et q tels que la suite A est nulle à partir du rang p et la suite B est nulle à partir du rang Q (puisque ce sont des polynômes). Posons $r = \max(p, q)$. Alors la suite C est nulle à partir du rang r, c'est donc un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors $\mathbb{K}[X]$ est stable par combinaison linéaire. ☐

Ainsi $\mathbb{K}[X]$ est stable par combinaison linéaire. De plus il est non vide ($0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \in \mathbb{K}[X]$) et il est inclus dans l'espace vectoriel des suites à coefficients dans $\mathbb{K}$. C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, d'où le théorème suivant.

Théorème 18.1. $(\mathbb{K}[X], +, \perp)$ *est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Proposition 18.1. Soient deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ et un scalaire λ. Alors

1. $\deg(A + B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$, si $\deg(A) = \deg(B)$ il y a égalité ;
2. $\deg(\lambda A) = \begin{cases} \deg(A) & \lambda \neq 0 \\ -\infty & \lambda = 0 \end{cases}$

Démonstration. 1. Si A et B sont nuls alors $\max(\deg(A), \deg(B)) = 0$ et leur somme est nulle et donc son degré vaut $\deg(A+B) = -\infty$ on a bien $\deg(A + B) \leq \max(\deg(A), \deg(B))$.

Si A ou B est non nul, on pose $n = \max(\deg(A), \deg(B))$. On peut écrire

$$A = (a_0, \dots, a_n, 0 \dots, 0) \tag{18.3}$$
$$B = (b_0, \dots, b_n, 0 \dots, 0), \tag{18.4}$$

avec a_n ou b_n non nul. Ainsi

$$A + B = (a_0 + b_0, \dots, a_n + b_n, 0, \dots, 0). \tag{18.5}$$

Déjà $\deg(A + B) \leq n = \max(\deg(A), \deg(B))$. Deux cas se présentent

(a) Si $\deg(A) \neq \deg(B)$, un terme parmi a_n et b_n est nul et l'autre est non nul alors $\deg(A + B) = n$;

(b) Si $\deg(A) = \deg(B)$, a_n et b_n sont tous les deux différents de zéro et on peut avoir $a_n + b_n = 0$ ou $a_n + b_n \neq 0$ donc on ne peut rien dire de plus.

2. (a) Si A est non nul alors $\deg(A) = n$. Si $\lambda = 0$ alors $\lambda A = 0$ et le degré vaut $-\infty$. Si $\lambda \neq 0$ alors $\lambda a_n \neq 0$ et $\deg(\lambda A) = \deg(A)$.

   (b) Si A est nul alors $\deg(\lambda A) = \deg(0) = -\infty = \deg(A)$.

□

18.1.3.2 Anneau $\mathbb{K}[X]$

Lemme 18.2. *Soient $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et un scalaire λ. Alors la suite $C = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$.*

Démonstration. Déjà C est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. Comme A (resp. B) est un polynôme il existe un entier p (resp. q) à partir duquel A (resp. B) est nul. Soit $r = p + q$. Alors

$$\forall n > r \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{p} a_k b_{n-k} + \sum_{k=p+1}^{n} a_k b_{n-k}. \tag{18.6}$$

Or $\forall k > p$ $a_k = 0$ et $\forall k \leq p$ on a $q = r - p < n - p \leq n - k \leq n$ donc $n - k > q$ et $b_{n-k} = 0$. Ainsi

$$\forall n > r \quad c_n = 0. \tag{18.7}$$

C est donc un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. □

Définition 18.3. Étant données deux polynômes $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, le polynôme C défini par $C = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelé produit des polynômes A et B et noté AB. On définit une loi de composition interne sur $\mathbb{K}[X]$ appelée multiplication

$$\cdot : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{array} \right. . \tag{18.8}$$

Théorème 18.2. $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ *est un anneau commutatif.*

Démonstration. Déjà $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien puisque $(\mathbb{K}[X], +, \perp)$ est un espace vectoriel.

La loi $\cdot$ est une loi de composition interne d'après le lemme. Montrons qu'elle est associative. Soient $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois éléments de $\mathbb{K}[X]$. Soient $D = A(BC)$ et $E = (AB)C$. Montrons qu'ils sont égaux. Soit un entier naturel n, alors

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (BC)_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{n-k} b_j c_{n-k-j} \tag{18.9}$$

$$= \sum_{\substack{(i,j,k)\in[\![0;n]\!]^3 \\ i+j+k=n}} a_k b_j c_i \tag{18.10}$$

$$e_n = \sum_{k=0}^{n} (AB)_k c_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j} c_{n-k} \tag{18.11}$$

$$= \sum_{\substack{(i,j,l)\in[\![0;n]\!]^3 \\ i+j+k=l}} a_i b_j c_l \tag{18.12}$$

$$\tag{18.13}$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad e_n = d_n$ donc $E = D$ et ainsi $\cdot$ est associative.

La loi $\cdot$ est commutative. Soient $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $C = AB$ et $D = BA$. Alors pour tout naturel n,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} b_j = d_n, \tag{18.14}$$

on a fait un changement de variable $j = n - k$. Alors $C = D$ et donc $AB = BA$.

La loi $\cdot$ est distributive sur la loi $+$. Soient $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $C = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois éléments de $\mathbb{K}[X]$. On pose $D = A(B + C)$ et $E = AB + AC$. Alors pour tout naturel n,

$$d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k (B + C)_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} + \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} \tag{18.15}$$

$$= (AB)_n + (AC)_n \tag{18.16}$$

$$= e_n. \tag{18.17}$$

Donc $A(B + C) = AB + AC$. On a montré qu'elle est distributive à gauche et comme elle est commutative, alors elle est distributive à droite.

Soit $1 = (1, 0, \dots, 0)$ le polynôme constant égal à 1. Si on pos que $A = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = \delta_{0n}$. Montrons que 1 est l'élément neutre pour $\cdot$. Pour tout polynôme B on pose le polynôme $C = B \times 1$ et montrons que $C = B$. Pour tout naturel n,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} b_n a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} b_n \delta_{0,n-k} = b_n \times 1 = b_n. \tag{18.18}$$

Donc $B \times 1 = B$. Comme $\cdot$ est commutative on a aussi $1 \times B = B$ donc 1 est l'élément neutre pour $\cdot$. □

Proposition 18.2. Soient $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $B = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors

$$\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B) \tag{18.19}$$

Démonstration. Deux cas se présentent :

1. Si A ou B est nul alors AB est nul et donc son dégré vaut $-\infty$ c'est à dire égal à $\deg(A) + \deg(B)$.
2. Si A et B sont non nuls alors on note respectivements p et q leurs degrés et le degré de $C = AB$ est $p + q$ alors

$$\begin{aligned} c_{p+q} &= \sum_{k=0}^{p+q} a_k b_{p+q-k} && (18.20)\\ &= \sum_{k=0}^{p-1} a_k b_{p+q-k} + a_p b_q + \sum_{k=p+1}^{p+q} a_k b_{p+q-k} && (18.21) \end{aligned}$$

Divisons l'étude en trois parties :
— Si $k \in [\![0\,;p-1]\!]$ alors $1-p \leq -k \leq 0$ et donc $q+1 \leq p+q-k \leq p+q$. Le polynôme B est de degré q donc $b_{p+q-k} = 0$ et alors $\sum_{k=0}^{p-1} a_k b_{p+q-k} = 0$.
— Si $k \in [\![p+1\,;p+q]\!]$, $a_k = 0$ puisque A est de degré p, donc $\sum_{k=p+1}^{p+q} a_k b_{p+q-k} = 0$
— Alors $c_{p+q} = a_p b_q \neq 0$ (puisque $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$ et que $\mathbb{K}$ est intègre).
Finalement $\deg(C) = p + q$ et $\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B)$.

□

Corollaire 18.2.1. $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ *est un anneau intègre.*

Démonstration. Pour tout polynôme A et B, s'ils sont tous les deux non nuls alors

$$\deg(AB) = \deg(A) + \deg(B) \in \mathbb{N}, \tag{18.22}$$

alors $AB \neq 0$. On vient de montrer

$$A \neq 0 \text{ et } A \neq 0 \implies AB \neq 0. \tag{18.23}$$

Alors par contraposée

$$AB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0. \tag{18.24}$$

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif qui n'admet pas de diviseur de zéro : il est intègre. □

Proposition 18.3. Les éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ sont les polynômes de degré 0.

Démonstration. Soit un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$. Si P est inversible dans $\mathbb{K}[X]$, il existe un autre polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ = QP = 1$. Alors

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) = 0. \tag{18.25}$$

Comme les degrés sont des naturels et leur somme est nulle, alors les degrés sont nuls.

Si $\deg(P) = 0$ alors il existe un scalaire λ non nul tel que $P = (\lambda, 0, \ldots, 0)$ et soit $Q = (1/\lambda, 0, \ldots, 0)$. Alors $PQ = 1$ □

18.1.3.3 Notation définitive des polynômes

On note $X = (0, 1, 0, \dots, 0)$ et il est appelé l'"indeterminé". On pose $X^0 = (1, 0, \dots, 0) = 1$. On définit par récurrence

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad X^{k+1} = X \cdot X^k. \tag{18.26}$$

Lemme 18.3.

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad X^k = (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}} \tag{18.27}$$

Démonstration. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(k)$ "$X^k = (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$".

Initialisation : Par définition $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(k)$. Alors $X^k = (\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$. On note $X^{k+1} = X \cdot X^k = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et pour tout naturel n

$$c_n = \sum_{j=0}^{n} \delta_{1j}\delta_{n-j,k} \tag{18.28}$$

si $n = 0$ alors $c_n = 0$, si $n \geq 1$ alors $c_n = \delta_{n-1,k}$ donc $c_n = 1$ si $n = k+1$ et zéro sinon. Finalement $c_n = \delta_{n,k+1}$. $\mathcal{P}(k = 1)$ est vraie.

Conclusion : Par théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel n. $\square$

On identifiera le scalaire λ avec le polynome $\lambda \in \mathbb{K}[X]$.

Soit $A = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}[X]$ et $N \geq \deg(A)$. Alors

$$A = (a_0, \dots, a_N, 0, \dots, 0) = \sum_{k=1}^{N} a_k(\delta_{n,k})_{n\in\mathbb{N}} = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k. \tag{18.29}$$

Nous adopterons la notation

$$A = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k, \tag{18.30}$$

avec $N \geq \deg(A)$ pour le polynôme A. On pourra écrire

$$A = \sum_{n>0} a_n X^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n. \tag{18.31}$$

Ce sont des sommes finies car A est un polynôme donc la suite a est nulle à partir d'un certain rang. L'intérêt de ces deux écritures est de ne pas avoir besoin de connaître le degré de A. Avec ces notations :

- le polynôme $A = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ est nul si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = 0$;
- deux polynômes A et B sont égaux si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = b_n$;
- les monômes sont les polynômes de la formes $A = \lambda X^n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$;
- La somme des polynômes $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ vaut

$$P + Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (a_k + b_k) X^k. \tag{18.32}$$

— Le produit des mêmes polynômes est

$$PQ = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k \quad \forall k \in \mathbb{N}\ c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}. \tag{18.33}$$

18.1.4 Composition de polynômes

Définition 18.4. Soient $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$ deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit un polynôme noté $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{n\geq 0} a_n Q^n. \tag{18.34}$$

Remarque : Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) = P \circ X = P$. P et $P(X)$ représentent le même polynôme et on écrira indifféremment P ou $P(X)$. *Attention à ne pas écrire $f = f(x)$ puisque f est une fonction et $f(x)$ un réel.*

Exemple : On pose $P = X^2 - X$ et $Q = 3X + 4$ alors

$$P \circ Q = (3X+4)^2 - (3X+4) = 9X^2 + 21X + 12 \tag{18.35}$$

$$Q \circ P = 3(X^2 - X) + 4 = 3X^2 - 3X + 4. \tag{18.36}$$

Proposition 18.4. Soient deux éléments P et Q de $\mathbb{K}[X]$ tous les deux non nuls. Alors

$$\deg(P \circ Q) = \deg(P) \cdot \deg(Q). \tag{18.37}$$

Démonstration. On suppose que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $n = \deg(P)$ et $a_n \neq 0$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ avec $m = \deg(Q)$ et $b_m \neq 0$. Alors

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \left(\sum_{j=0}^{m} b_j X^j \right)^k, \tag{18.38}$$

et donc $\deg(P \circ Q) \leq mn$. Le coefficient devant X^{mn} vaut $a_n b_m^n \neq 0$ car $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$. Donc $\deg(P \circ Q) = mn = \deg(P) \cdot \deg(Q)$. □

Proposition 18.5. Soient $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

— $(\lambda P + Q) \circ R = \lambda P \circ R + Q \circ R$, distributivité à droite mais pas à gauche ;
— $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$, associativité ;
— $(PQ) \circ R = (P \circ R)(Q \circ R)$;
— $P \circ X = X \circ P = P$.

Démonstration. Notons $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, $Q = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$, $P = \sum_{n\geq 0} c_n X^n$. Alors

— $(\lambda P + Q) \circ R = \sum_{n\geq 0} (\lambda a_n + b_n) R^n = \lambda \sum_{n\geq 0} a_n R^n + \sum_{n\geq 0} b_n R^n$, soit alors $(\lambda P + Q) \circ R = \lambda P \circ R + Q \circ R$;
— $P \circ (Q \circ R) = \sum_{n\geq 0} a_n (Q \circ R)^n$ et $Q \circ R = \sum_{k\geq 0} b_k R^k$ alors

$$P \circ (Q \circ R) = \left(\sum_{n\geq 0} a_n Q^n \right) \circ R = \sum_{n\geq 0} (Q^n \circ R) \tag{18.39}$$

$$= \sum_{n\geq 0} a_n Q(R)^n \tag{18.40}$$

$$= P \circ (Q \circ R); \tag{18.41}$$

— on note pour tout naturel n, $d_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ et on a

$$\begin{aligned}
(PQ)\circ R &= \sum_{n\geq 0} d_n R^n && (18.42)\\
&= \sum_{n\geq 0}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} R^{n-k} R^k && (18.43)\\
&= \sum_{k\geq 0} a_k R^k \sum_{n\geq k} b_{n-k} R^{n-k} && (18.44)\\
&= \sum_{k\geq 0} a_k R^k \sum_{j\geq 0} b_j R^j && (18.45)\\
&= P(R)\cdot Q(R). && (18.46)
\end{aligned}$$

□

Polynômes pairs et impairs

Proposition 18.6. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$, on a

1. P est pair si et seulement si $P(X) = P(-X)$;
2. P est impair si et seulement si $P(X) = -P(-X)$.

⚠Ici il n'y a pas d'ensemble de définition ni de quantificateur, il s'agit d'égalités entre deux polynômes. *Cependant* si $f \in \mathbb{R}^I$ est paire c'est équivalent à ce que I soit centré en zéro et pour tout réel x $f(-x) = f(x)$.

Démonstration. On le démontre pour P pair (la démonstration est analogue pour le cas impair). On note $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$, alors

$$\begin{aligned}
P(X) = P(-X) &\iff \sum_{n\geq 0} a_n X^n = \sum_{n\geq 0} a_n (-1)^n X^n && (18.47)\\
&\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n = a_n(-1)^n && (18.48)\\
&\iff \forall n \in \mathbb{N} \quad n \text{ est impair et } a_n = -a_n && (18.49)\\
&\iff \forall p \in \mathbb{N} \quad a_{2p+1} = 0 && (18.50)\\
&\iff P \text{ est impair} && (18.51)
\end{aligned}$$

□

18.1.5 $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$

On note $\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg(P) \leq n\}$.

Proposition 18.7. L'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$.

Démonstration. Par définition $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$. Ensuite $\mathbb{K}_n[X]$ est non vide puisque le polynôme nul est dedans. Montrons qu'il est stable par combinaison linéaire. Soit deux polynômes P et Q de $\mathbb{K}_n[X]$ et un scalaire λ, alors

$$\lambda P + Q \in \mathbb{K}[X] \tag{18.52}$$

et

$$\deg(\lambda P + Q) \leq \max(\deg(\lambda P), \deg(Q)) \tag{18.53}$$
$$\leq \max(\deg(P), \deg(Q)) \tag{18.54}$$
$$\leq n \tag{18.55}$$

et donc $\lambda P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

Finalement $\mathbb{K}_n[X]$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$. $\square$

Cependant ce n'est pas un sous anneau dès que $n \geq 1$. Puisque $X^n \in \mathbb{K}_n[X]$ mais $X^n \cdot X^n = x^{2n} \notin \mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 18.8. Pour tout naturel n, la famille $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et donc $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = n + 1$.

Démonstration. Déjà $\mathcal{B} \subset \mathbb{K}_n[X]$. Par définition, si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ alors il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. alors $\mathcal{B}$ est génératrice.

Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k = 0$ alors pour tout k tel que $0 \leq k \leq n$ on a $a_k = 0$ (un polynôme est nul si et seulement si ses coefficients sont nuls). La famille $\mathcal{B}$ est donc libre.

Alors au final $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et on a $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_n[X] = \operatorname{Card} \mathcal{B} = n + 1$. $\square$

Vocabulaire : La base $\mathcal{B}$ sera appelée la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition 18.9. Soit $(P_i)_{i \in I}$ un famille de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ (I fini ou infini). On suppose que pour tout couple $(i, j) \in I^2$ on a

$$i \neq j \implies \deg(P_i) \neq \deg(P_j). \tag{18.56}$$

Alors toute sous-famille finie $(P_i)_{i \in J}$, avec $J \subset I$ fini, est libre.

Démonstration. Soit $J = \{i_1, \ldots, i_k\} \subset I$. Quitte à réindexer, on peut supposer que $\deg(P_{i_1}) \leq \ldots \leq \deg(P_{i_k})$. Soit k scalaires $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$. On suppose que $\sum_{i \in J} \alpha_i P_i = 0$. Supposons que cette famille est liée, c'est-à-dire qu'il existe $l \in J$ tel que $\alpha_l \neq 0$. Soit la partie $\{j \in J, \alpha_{ij} \neq 0\}$. Elle est incluse dans $\mathbb{N}$ et elle est non vide et elle est finie (parce que J est fini). Alors elle admet un plus grand élément j_0. Ainsi $\alpha_{ij_0} \neq 0$.

$$\forall j > j_0 \quad \alpha_{ij} = 0 \tag{18.57}$$

$$0 = \sum_{i \in J} \alpha_i P_i = \sum_{j=1}^{j_0 - 1} \alpha_{ij} P_{ij} + \alpha_{ij_0} P_{ij_0} \tag{18.58}$$

$$P_{ij_0} = -\sum_{j=1}^{j_0 - 1} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij_0}} P_{ij}. \tag{18.59}$$

En passant au degré on a donc

$$\deg(P_{ij_0}) \leq \max_{1 \leq j \leq j_0 - 1} (\deg(P_{ij})) < \deg(P_{ij_0}). \tag{18.60}$$

Ce qui est complétement absurde. Alors $(P_i)_{i \in J}$ est libre. $\square$

Conséquences : l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ est de dimension infinie, car il existe dans $\mathbb{K}[X]$ des familles libres de cardinal aussi grand qu'on le souhaite. Supposons qu'il est de dimension finie, soit alors p sa dimension. On note $\mathcal{L} = (1, \dots, X^p)$ une famille libre. Son cardinal vaut $p + 1 \geq \dim \mathbb{K}[X]$, ce qui est absurde.

18.1.6 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème 18.3. *Soient deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$ avec B non nul. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que*

$$A = BQ + R \quad \deg(R) < \deg(B). \tag{18.61}$$

Unicité. Soient $(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ et $(Q_2, R_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que

$$\begin{cases} A = BQ_1 + R_1 \\ \deg(R_1) < \deg(B_1) \end{cases} \tag{18.62}$$

$$\begin{cases} A = BQ_2 + R_2 \\ \deg(R_2) < \deg(B_2) \end{cases} \tag{18.63}$$

donc $BQ_2 + R_2 = BQ_1 + R_1$ et donc $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$.

Si $Q_1 - Q_2 \neq 0$ alors $\deg(Q_1 - Q_2) \in \mathbb{N}$ et alors $\deg(B(Q_1 - Q_2)) = \deg(B) + \deg(Q_1 - Q_2) \geq \deg(B)$. Or $\deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) < \deg(B)$. Ce qui est absurde.

Donc $Q_1 = Q_2$ et ainsi $R_1 = R_2$. □

Existence. On fixe B non nul de degré m : $B = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'assertion suivante $\mathcal{P}(n)$ "Pour tout polynôme A de degré strictement inférieur à n, il existe un couple (Q, R) de polynômes tel que $\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$".

Initialisation : $n = m$ (degré de B). Soit un polynôme A de degré strictement inférieur à m. On peut écrire $\begin{cases} A = 0 \cdot B + A \\ \deg(A) < \deg(B) = m \end{cases}$. Alors le couple $(Q, R) = (0, A)$ vérifient l'assertion. $\mathcal{P}(m)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq m$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$, déduisons en $\mathcal{P}(n+1)$. Soit A un polynôme de degré strictement inférieur à $n + 1$. Alors $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}_n[X]$. Soit $A_2 = A - a_n b_m^{-1} X^{n-m} B$ (possible puisque $b_m \neq 0$ et $n \geq m$. A et $a_n b_m^{-1} X^{n-m} B$ sont de degré au plus n tous les deux. De plus le coefficient devant X^n vaut :

— a_n dans A ;

— $a_n b_m^{-1} b_m = a_n$ dans $a_n b_m^{-1} X^{n-m} B$.

Donc A_2 est de degré au plus $n - 1$. D'après $\mathcal{P}(n)$ il existe un couple $(Q_2, R_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $\begin{cases} A = BQ_2 + R_2 \\ \deg(R_2) < \deg(B) \end{cases}$. D'où

$$\begin{aligned} A &= A_2 + a_n b_m^{-1} X^{n-m} B && (18.64) \\ &= BQ_2 + R_2 + a_n b_m^{-1} X^{n-m} B && (18.65) \\ &= BQ + R && (18.66) \end{aligned}$$

avec $Q = Q_2 + a_n b_m^{-1} X^{n-m}$ et $R = R_2$ et donc $\deg(R) < \deg(B)$. Alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

Conclusion : Par théorème de récurrence $\forall n \geq m\ \mathcal{P}(n)$. □

18.1.7 Diviseurs et multiples

Définition 18.5. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que A divise B ou bien que B multiplie A dans $\mathbb{K}[X]$ et on note $A \mid B$ s'il existe un polynôme Q tel que $B = AQ$.

Remarque : Le polynôme nul est multiple de tous les polynômes puisque

$$\forall A \in \mathbb{K}[X] \quad 0_{\mathbb{K}[X]} = 0_{\mathbb{K}[X]} \cdot A \tag{18.67}$$

mais il n'est diviseur que de lui-même

$$\forall A \in \mathbb{K}[X] \quad 0_{\mathbb{K}[X]} \mid A \implies A = 0_{\mathbb{K}[X]} \tag{18.68}$$

Si B est non nul et si $A \mid B$, alors $\deg(B) \geq \deg(A)$. En effet, il existe un polynôme non nul tel que $B = AQ$ et en passant au degré

$$\deg(B) = \deg(A) + \deg(Q) \tag{18.69}$$

donc $\deg(B) \geq \deg(A)$, car $\deg(Q) \in \mathbb{N}$.

Proposition 18.10. Pour tous polynômes A, B, C on a

$$A \mid A \tag{18.70}$$

$$A \mid B \text{ et } B \mid C \implies A \mid C \tag{18.71}$$

C'est à dire que la relation de divisibilité est réflexive et transitive.

Démonstration. Comme $A = 1A$ on a bien $A \mid A$. Ensuite si $A \mid B$ et $B \mid C$ alors il existe deux polynomes Q_1 et Q_2 tels que $B = AQ_1$ et $C = BQ_2$ alors $C = A(Q_1Q_2)$ donc $A \mid C$. □

Proposition 18.11. Pour tous polynômes A, B, C et D on a

$$A \mid B \implies A \mid BC; \tag{18.72}$$

$$A \mid B \text{ et } C \mid D \implies AC \mid BD; \tag{18.73}$$

$$A \mid B \text{ et } A \mid C \implies A \mid B + C. \tag{18.74}$$

Démonstration. Soient quatres polynômes A, B, C et D, alors :

1. si $A \mid B$ alors il existe un polynôme Q tel que $B = AQ$ et alors $BC = A(QC)$ donc $A \mid BC$;
2. si $A \mid B$ et $C \mid D$ alors il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que $B = AQ_1$ et $D = CQ_2$ et alors $BD = (AQ_1)(CQ_2) = (AC)(Q_1Q_2$ donc $AC \mid BD$.
3. si $A \mid B$ et $A \mid C$ alors il existe deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que $B = AQ_1$ et $C = AQ_2$ et alors $B + C = A(Q_1 + Q_2)$ donc $A \mid B + C$.

□

Proposition 18.12. Soit un couple de polynômes (A, B) avec B non nul. Alors B divise A dans $\mathbb{K}[X]$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{K}[X]$ est nul.

Démonstration. Supposons que B divise A. Alors il existe un polynôme Q tel que $A = BQ = BQ + 0$. Le reste est nul et son degré vaut $-\infty < \deg(B)$. Par unicité de la division euclidienne, Q est le quotient et 0 le reste.

La divison euclidienne nous indique su'il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tels que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) \leq \deg(B) \end{cases} \tag{18.75}$$

Si on fait l'hypothèse que le reste de la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{K}[X]$ est nul ($\deg(R) = -\infty < \deg(B)$) alors $A = BQ$ et donc B divise A. □

18.1.8 Polynômes associés

Proposition 18.13. Soient deux polynômes A et B. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

1. $A \mid B$ et $B \mid A$
2. Il existe un scalaire λ non nul tel que $A = \lambda B$.

On dit alors que les polynômes a et B sont associés.

Démonstration. Supposons que A divise B et que B divise A, alors il existe deux polynômes P et Q tels que $B = PA$ et $A = QB$ alors $B = P(QB)$ donc par associativité et distributivité on a $B(1 - PQ) = 0$. Deux cas se présentent :
- Si B est nul alors comme B doivise A, A est nul aussi. On peut prendre $\lambda = 1$ et la relation est vraie ;
- Sinon, comme $\mathbb{K}[X]$ est un anneau intègre, on a $1 - PQ = 0$ et donc $PQ = 1$. Le polynôme Q_2 es donc inversible dans $\mathbb{K}[X]$ alors il est de degré nul, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire non nul λ tel que $Q_2 = \lambda$. Alors $A = \lambda B$.

Supposons qu'il existe un scalaire λ non nul tel que $A = \lambda B$. Alors B divise A. Le scalaire λ est inversible donc $B = \lambda^{-1} A$ et donc A divise B. □

18.2 Fonctions polynomiales

18.2.1 Fonction polynomiale associée à un polynôme

Définition 18.6. Soit un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$. On définit une application $\widetilde{P} \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{K} \quad \widetilde{P}(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \quad (\forall N \geq \deg(P)). \tag{18.76}$$

$\widetilde{P}$ est appelée fonction polynomiale associée au polynôme P.

18.2.2 Valeur d'un polynôme en un point

Définition 18.7. Soit un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et un scalaire α. On appelle valeur du polynôme P en α et on note $P(\alpha)$, la valeur prise en α par la fonction polynomiale $\widetilde{P}$ associée à P : $\widetilde{P}(\alpha)$.

Proposition 18.14. Pour tous polynômes P et Q et tous scalaire λ et α on a :

1. $(P + \lambda Q)(\alpha) = P(\alpha) + \lambda Q(\alpha)$;
2. $(PQ(\alpha)) = P(\alpha) \cdot Q(\alpha)$;
3. $(P \circ Q)(\alpha) = P(Q(\alpha))$.

Démonstration. 1. La linéarité est claire ;

2. On note $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$, $Q = \sum_{n \geq 0} b_n X^n$ et $QP = \sum_{n \geq 0} c_n X^n$ avec pour tout naturel n $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Alors

$$\begin{aligned}
(PQ)(\alpha) &= \sum_{n \geq 0} c_n \alpha^n && (18.77)\\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \alpha^n && (18.78)\\
&= \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq k} a_k b_{n-k} \alpha^k \alpha^{n-k} && (18.79)\\
&= \sum_{k \geq 0} a_k \alpha^k \sum_{j \geq 0} b_j \alpha^j \quad (j = n - k) && (18.80)\\
&= P(\alpha) Q(\alpha) && (18.81)
\end{aligned}$$

3. On note $P = \sum_{n \geq 0} a_n X^n$ et on a

$$\begin{aligned}
(P \circ Q)(\alpha) &= \left(\sum_{n \geq 0} a_n Q^n \right)(\alpha) && (18.82)\\
&= \sum_{n \geq 0} a_n Q^n(\alpha) \quad \text{d'après(1)} && (18.83)\\
&= \sum_{n \geq 0} a_n Q^n(\alpha) \quad \text{d'après(2)} && (18.84)\\
&= P(Q(\alpha)) && (18.85)
\end{aligned}$$

□

18.2.3 Racines d'un polynôme

Définition 18.8. Soit un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et un scalaire α. On dit que α est racine du polynôme P (c'est un zéro de P) si la valeur en α de P est nulle. C'est-à-dire $P(\alpha) = 0$.

Proposition 18.15. Soit un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et un scalaire α. Le scalaire α est racine de P si et seulement si $X - \alpha$ divise P.

Démonstration. Si $X-\alpha$ divise P, alors il existe un polynôme Q tel que $P = (X-\alpha)Q$ et donc $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) = 0$.

On effectue la division euclidienne de P par $X-\alpha$. Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $P = (X-\alpha)Q + R$ avec $\deg(R) < \deg(X-\alpha) = 1$. Alors le degré du reste vaut 0 ou $-\infty$. Ainsi R est un polynôme constant. Il existe alors un scalaire λ tel que $R = \lambda$ et $P = (X-\alpha)Q + \lambda$. Si on prend comme hypothèse que α est racine de P alors

$$0 = P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(\alpha) + \lambda \tag{18.86}$$

alors $\lambda = 0$. Le reste est nul par conséquent $X-\alpha$ divise P. □

Proposition 18.16. Soient un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$, n un naturel $n > 1$ et n racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ du polynôme P. Alors $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ divise P.

Démonstration. On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion suivante : $\mathcal{P}(n)$ "$\forall P \in \mathbb{K}[X]$ $\forall(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ racines de P, $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ divise P."

Initialisation : $n = 1$, déjà faite avec la proposition précédente.

Hérédité : Soit $n > 1$ et supposons $\mathcal{P}(n)$, montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soient un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $n+1$ racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ du polynôme P. L'hypothèse de récurrence nous dit donc que $\prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)$ divise P. Il existe donc un polynôme Q à coefficients dans $\mathbb{K}$ tel que $P = \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)Q$.

Comme α_{n+1} est une racine on a

$$0 = P(\alpha_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_{n+1}-\alpha_i)Q(\alpha_{n+1}) \tag{18.87}$$

Comme les racines sont distinctes on a $\prod_{i=1}^{n}(\alpha_{n+1}-\alpha_i) \neq 0$ d'où $Q(\alpha_{n+1}) = 0$. On en déduit d'après la proposition précédente que $X-\alpha_{n+1}$ divise Q. Alors il existe un autre polynôme Q_1 tel que $Q = (X-\alpha_{n+1})Q_1$.

Finalement

$$P = \prod_{i=1}^{n}(X-\alpha_i)Q = \prod_{i=1}^{n+1}(X-\alpha_i)Q_1 \tag{18.88}$$

Donc $\prod_{i=1}^{n+1}(X-\alpha_i)$ divise P. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a montré $\mathcal{P}(1)$ et $\forall n > 1 \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ donc par théorème de récurrence pour tout naturel n $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

Corollaire 18.16.1 (Important)**.** *Pour tout naturel n, tout polynôme non nul de degré inférieur ou égal à n admet au plus n racines distinctes.*

Démonstration. Soit un un polynôme P non nul à coefficients dans $\mathbb{K}$. On prouve cette propriété par contraposée. Si P admet au moins $n+1$ racines distinctes $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$. Alors $\prod_{i=1}^{n+1}(X-\alpha_i)$ divise P. Comme P est non nul en passant au degré on a

$$\deg(P) \geq \deg\left(\prod_{i=1}^{n+1}(X-\alpha_i)\right) = n+1 \tag{18.89}$$

et donc on a le résultat en passant par la contraposée. □

Intérêt : Si on veut montrer qu'un polynôme P est nul, il suffit de montrer qu'il a un nombre de racines strictement supérieur à son degré, voire même à prouver qu'il admet une infinité de racines.

18.2.4 Ordre de multiplicité d'un racine

Définition 18.9. Soient un un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$, un scalaire α et un naturel non nul n.

1. On dit que α est une racine de P d'ordre au moins égal à n si $(X-\alpha)^n$ divise P.
2. On dit que α est une racine de P d'ordre strictement égal à n si $(X-\alpha)^n$ divise P mais $(X-\alpha)^{n+1}$ ne divise pas P.

Si $\alpha \in \mathbb{K}$ est racine du polynôme P, alors $X-\alpha$ divise P et donc α est racine d'ordre au moins égal à 1. Soit la partie

$$\mathcal{C} = \{n \in \mathbb{N}^*, (X-\alpha)^n \mid P\} \tag{18.90}$$

alors c'est une partie de $\mathbb{N}^*$ non vide (puisque $1 \in \mathcal{C}$) et majorée par le degré de P. En effet si $n \in \mathcal{C}$ alors $(X-\alpha)^n \mid P$ et en passant au degré on a $\deg(X-\alpha)^n \leq \deg P$ et donc $n \leq \deg(P)$. Ainsi $\mathcal{C}$ admet un plus grand élément. D'où la définition

Définition 18.10. Soient un un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{K}$ et un scalaire α. On suppose que α est racine de P. Alors il existe un unique naturel $r \neq 0$ tel que α soit racine de P d'ordre strictement égal à r, ($r = \max \mathcal{C}$).

L'entier r est appelé l'ordre de multiplicité de la racine α du polynôme P.

Ainsi pour tout naturel non nul r, α est racine d'ordre r de P si et seulement si $(X-\alpha)^r \mid P$ et $(X-\alpha)^{r+1} \not| P$. Par extension

$$\begin{aligned}
\alpha \text{ est racine d'ordre zéro de } P &\iff 1 \mid P \text{ et } (X-\alpha) \not| P && (18.91)\\
&\iff (X-\alpha) \not| P && (18.92)\\
&\iff \alpha \text{ n'est pas racine de } P && (18.93)
\end{aligned}$$

Proposition 18.17. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^n Q$. Alors α est racine de P d'ordre de multiplicité égal à n si et seulement si $Q(\alpha) \neq 0$.

Démonstration. Montrons la contraposée, c'est-à-dire que α admet un ordre de multiplmicité plus grand que $n+1$ si et seulement si $Q(\alpha) = 0$.

Si $Q(\alpha) = 0$ alors $X-\alpha$ divise Q donc il existe $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = (X-\alpha)Q_1$. Alors $P = (X-\alpha)^{n+1}Q_1$. Ainsi l'ordre de multiplicité de α est supérieur ou égal à $n+1$.

Si l'ordre de multiplicité de α est supérieur ou égal à $n+1$, alors $(X-\alpha)^{n+1}$ divise P. Il existe $Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^{n+1}Q_2$. Or $P = (X-\alpha)^n Q$. Donc

$$\begin{aligned}
(X-\alpha)^{n+1}Q_2 &= (X-\alpha)^n Q && (18.94)\\
(X-\alpha)^n[(X-\alpha)Q_2 - Q] &= 0 && (18.95)\\
& && (18.96)
\end{aligned}$$

Comme l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre on a $(X-\alpha)Q_2 - Q = 0$ et donc $Q = (X-\alpha)Q_2$. Finalement α est racine de Q, $Q(\alpha) = 0$. □

Proposition 18.18. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, alors l'assertion suivante est vraie : $\mathcal{P}(n)$ "Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ n racines distinctes de P d'ordres de multiplicité respectif $r_1, \ldots, r_n$. Alors $\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)^{r_i}$ divise P."

Démonstration par récurrence. Initialisation : Pour $n = 1$, c'est la définition de l'ordre de multiplicité.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ n racines distinctes de P d'ordres de multiplicité respectif $r_1, \ldots, r_{n+1}$.

Les n premières racines de P sont distinctes donc l'hypothèse de récurrence nous dit que $\prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)^{r_i}$ divise P. Il existe donc $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)^{r_i} Q$.

On calcule $P(\alpha_{n+1})$. D'une part $P(\alpha_{n+1}) = 0$ puisque c'est une racine. D'autre part $P(\alpha_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_{n+1} - \alpha_i)^{r_i} Q(\alpha_{n+1})$. Les racines sont distinctes donc le produit est non nul et donc $Q(\alpha_{n+1}) = 0$. Ainsi α_{n+1} est racine de Q.

Soit r l'ordre de multiplicité de α_{n+1} (en tant que racine de Q). Montrons que $r = r_{n+1}$ (r_{n+1} multiplicité pour P). Il existe $Q_1 \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = (X - \alpha_{n+1})^r Q_1$ et $Q_1(\alpha_{n+1}) \neq 0$.

On sait que

$$P = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)^{r_i} Q \tag{18.97}$$

$$= \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)^{r_i}(X - \alpha_{n+1})^r Q_1 \tag{18.98}$$

$$= (X - \alpha_{n+1})^r Q_2 \tag{18.99}$$

avec $Q_2 = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)^{r_i} Q_1$. Ainsi

$$Q_2(\alpha_{n+1}) = \prod_{i=1}^{n}(\alpha_{n+1} - \alpha_i)^{r_i} Q_1(\alpha_{n+1}) \neq 0 \tag{18.100}$$

Donc r est aussi l'ordre de la racine α_{n+1} pour le polynôme P. Alors par définition de r_{n+1} : $r = r_{n+1}$. Finalement

$$P = \prod_{i=1}^{n+1}(X - \alpha_i)^{r_i} Q_1 \tag{18.101}$$

L'assertion $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a montré que $\mathcal{P}(1)$ est vraie et que pour tout naturel $n > 1$ on a $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$. Alors par thèorème de récurrence $\mathcal{P}$ est vraie. □

Il y a deux manière de compter les racines d'un polynôme :

— Soit on compte les racines distinctes ;

— Soit on compte les racines avec leurs oordres de multiplicité, c'est-à-dire qu'une racine α d'ordre r comptera comme r racines.

Exemple : $P = (X-1)^2(X-3)^3$. Alors P à deux racines distinctes, 1 et 3. En tenant compte des ordres de multiplicité, P a "5" racines comptées avec leur ordre de multiplicité.

Corollaire 18.18.1. *Soit un naturel n. Un polynôme de degré n admet au plus n racines comptées avec leurs ordres de multiplicité.*

Démonstration. S'il y a $n+1$ racines de P comptées avec leur ordres de multiplicité, on note :

— $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les p racines distinctes ;
— $r_1, \ldots, r_p$ leurs ordres de multiplicité.

D'après le corollaire **??**, en comptant les racines avec leurs ordres de multiplicité

$$\sum_{i=1}^{p} r_i \geq n+1 \tag{18.102}$$

On a montré que $\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{r_i}$ divise P donc en passant au degré

$$\deg(P) \geq \deg\left(\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{r_i}\right) = \sum_{i=1}^{p} r_i \geq n+1 \tag{18.103}$$

□

18.2.5 Isomorphisme entre polynômes et fonctions polynomiales

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini. Soit aussi l'application $\varphi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{\mathbb{K}} \\ P & \longmapsto & \widetilde{P} \end{array}\right.$.

Proposition 18.19. L'application φ est une application linéaire et injective. Son image est l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{K}$ dans lui-même, noté $\mathcal{P}(\mathbb{K},\mathbb{K})$.

L'application $\psi = \varphi^{|\mathcal{P}(\mathbb{K},\mathbb{K})}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, qui permettra d'identifier P et $\widetilde{P}$.

Démonstration. L'application φ est linéaire clairement. Déterminons son noyau. Soit $P \in \operatorname{Ker}(\varphi)$, c'est à dire que $\varphi(P) = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{K}}}$, c'est-à-dire que pour tout scalaire x, $\widetilde{P}(x) = 0_{\mathbb{K}}$. Comme le corps $\mathbb{K}$ est infini, cela signifie que le polynôme P admet une infinité de racines. On a vu qu'un polynôme admettant une infinité de racines est nul. Ainsi $\operatorname{Ker}(\varphi) \subset \{0\}$. Comme le noyau est un sous-espace vectoriel, l'autre inclusion est vraie aussi. Donc le noyau est nul et ainsi l'application φ est injective.

Comme $\mathcal{P}(\mathbb{K},\mathbb{K}) = \operatorname{Im}(\varphi)$, $\psi = \varphi^{|\operatorname{Im}(\varphi)}$ est surjective. Comme elle est aussi injective et linéaire (grâce à l'injectivité et la linéarité de φ), c'est un isomorphisme. □

18.3 Polynôme dérivé

Dans cette section $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

18.3.1 Notion de polynôme dérivé

Définition 18.11. Soit $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. On définit le polynôme dérivée, noté P', par

$$\begin{aligned} P' &= \sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1} && (18.104)\\ &= \sum_{n=1}^{N} n a_n X^{n-1} \qquad \forall N \geq \deg(P) && (18.105)\\ &= \sum_{p=0}^{N-1} (p+1) a_{p+1} X^p \qquad \forall N \geq \deg(P) && (18.106)\\ & && (18.107)\end{aligned}$$

Remarque : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'identification entre P et sa fonction polynomiale $\widetilde{P}$ permet de transposer à la dérivation des polynômes réels les propriétés vues sur la dérivations des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Cependant si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on ne sait rien faire.

Proposition 18.20. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, alors

$$\begin{cases} \deg(P') = \deg(P) - 1 & \deg(P) > 0\\ \deg(P') = -\infty & \deg(P) \in \{0, -\infty\} \end{cases} \qquad (18.108)$$

Démonstration. Si $\deg(P) > 0$ on écrit P sous la forme $P = \sum_{n=0}^{N} a_n X^n$ avec $N = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$ et tel que $a_N \neq 0$. Alors $P' = \sum_{p=0}^{N-1}(p+1)a_{p+1}X^p$ et de plus $\deg(P') \leq N - 1$ $(N - 1 + 1)a_{N-1+1} = N a_N \neq 0$. Le degré vaut donc $\deg(P') = N - 1 = \deg(P) - 1$.

Si $\deg(P) \leq 0$, alors P est un polynôme constant et son polynôme dérivée est nul. Alors son degré vaut $\deg(P') = -\infty$. □

Proposition 18.21 (Linéarité)**.** Pour tous $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :

$$(\lambda P + Q) = \lambda P' + Q'. \qquad (18.109)$$

Démonstration. On note $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et $Q = \sum_{n\geq 0} b_n X^n$. Alors $\lambda P + Q = \sum_{n\geq 0}(\lambda a_n + b_n)X^n$. Par définition du polynôme dérivé, on a

$$(\lambda P + Q)' = \sum_{n\geq 1} n(\lambda a_n + b_n)X^{n-1} \qquad (18.110)$$

D'où

$$\begin{aligned} (\lambda P + Q)' &= \lambda \sum_{n\geq 1} n a_n X^{n-1} + \sum_{n\geq 1} n b_n X^{n-1} && (18.111)\\ &= \lambda P' + Q' && (18.112)\end{aligned}$$

□

Proposition 18.22. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ alors

$$(PQ)' = P'Q + PQ'. \qquad (18.113)$$

Démonstration. On note $P = \sum_{n\geq 0} a_n X^n$ et $Q = \sum_{k\geq 0} b_k X^k$. Alors

$$PQ = \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right)\left(\sum_{k\geq 0} b_k X^k\right) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_n b_k X^{n+k} \tag{18.114}$$

La dérivation est linéaire donc :

$$(PQ)' = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_n b_k (X^{n+k})' \tag{18.115}$$

avec pour tous naturel k et n

$$(X^{n+k})' = (n+k)X^{n+k-1} = nX^{n-1}X^k + kX^{k-1}X^n \tag{18.116}$$
$$= (X^n)'X^k + (X^k)'X^n \tag{18.117}$$

Alors

$$(PQ)' = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} a_n b_k ((X^n)'X^k + (X^k)'X^n) \tag{18.118}$$
$$= \sum_{n\geq 0} a_n (X^n)' \cdot \sum_{k\geq 0} b_k X^k + \sum_{n\geq 0} a_n X^n \cdot \sum_{k\geq 0} b_k (X^k)' \tag{18.119}$$
$$= \left(\sum_{n\geq 0} a_n X^n\right)' Q + P\left(\sum_{k\geq 0} b_k X^k\right)' \tag{18.120}$$
$$= P'Q + PQ' \tag{18.121}$$

□

18.3.2 Polynômes dérivées successifs et formule de Leibniz

Définition 18.12. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence les polynômes dérivés de P d'ordre k, $P^{(k)}$, par

$$P^{(0)} = P \tag{18.122}$$
$$P^{(1)} = P' \tag{18.123}$$
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P^{(k+1)} = (P^{(k)})' \tag{18.124}$$

Proposition 18.23. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\deg(P) \leq n \iff P^{(n+1)} = 0 \tag{18.125}$$

Démonstration. Si $\deg(P) = k \in \mathbb{N}^*$, on montre par récurrence "immédiate" que

$$\deg(P^{(k)}) = \deg(P) - k = 0 \tag{18.126}$$

Ainsi $P^{(k+1)}$ est le polynôme nul. Alors si on dérivent encore plus, c'est-à-dire si $\deg(P) \leq n$ alors $P^{(n+1)} = 0$.

Montrons la deuxième implication par contraposée : si maintenant $\deg(P) \geq n+1$ alors par récurrence "immédiate"

$$\deg(P^{(n)}) \geq n + 1 - n = 1 \tag{18.127}$$
$$\deg(P^{(n+1)}) \geq 0 \tag{18.128}$$

Alors $P^{(n+1)}$ n'est pas le polynôme nul. □

Théorème 18.4 (Théorème de Leibniz)**.**

$$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \ \forall n \in \mathbb{N} \quad (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)} \tag{18.129}$$

Démonstration. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'assertion suivante : $\mathcal{P}(n)$ "$\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \ \forall n \in \mathbb{N} \ (PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}$".

Initialisation : $n = 0$ Par définition $(PQ)^{(0)} = PQ$. Ensuite

$$\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} P^{(k)} Q^{(0-k)} = P^{(0)} Q^{(0)} = PQ \tag{18.130}$$

Alors $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit un nturel n et supposons $\mathcal{P}(n)$. Alors par définition

$$\begin{aligned}
(PQ)^{(n+1)} &= \left((PQ)^{(n)}\right)' &(18.131)\\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}\right)' &(18.132)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (P^{(k)} Q^{(n-k)})' &(18.133)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (P^{(k+1)} Q^{(n-k)} + P^{(k)} Q^{(n-k+1)}) &(18.134)\\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k+1)} Q^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k+1)} &(18.135)
\end{aligned}$$

en faisant le changement de variable $j = k + 1$, on a

$$\begin{aligned}
(PQ)^{(n+1)} &= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} P^{(j)} Q^{(n+1-j)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k+1)} &(18.136)\\
&= \binom{n}{n} P^{(n+1)} Q^{(0)} \sum_{j=1}^{n} \left[\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}\right] P^{(j)} Q^{(n+1-j)} + \binom{n}{0} P^{(0)} Q^{(n+1)} &(18.137)\\
&= \binom{n+1}{n+1} P^{(n+1)} Q^{(0)} \sum_{j=1}^{n} \binom{n+1}{j} P^{(j)} Q^{(n+1-j)} + \binom{n+1}{0} P^{(0)} Q^{(n+1)} &(18.138)\\
&= \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} P^{(j)} Q^{(n+1-j)} &(18.139)
\end{aligned}$$

Alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a montré $\mathcal{P}(0)$ et que pour tout naturel n, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$. Le théorème de récurrence nous dit que que pour tout naturel n l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

18.3.3 Formule de Taylor

Lemme 18.4.

$$\begin{aligned}\forall (n,k)\in\mathbb{N}^2 \quad (X^n)^{(k)} &= n(n-1)\dots(n-k+1)X^{n-k} &(18.140)\\ &= \begin{cases}\frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k} & k\leq n\\ 0 & k>n\end{cases} &(18.141)\end{aligned}$$

Démonstration. Pour un nturel n fixé, on prouve pour tout $k\in\mathbb{K}$ l'assertion $\mathcal{P}_n(k)$ "$(X^n)^{(k)} = n(n-1)\dots(n-k+1)X^{n-k} = \begin{cases}\frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k} & k\leq n\\ 0 & k>n\end{cases}$ "

Initialisation : $\mathcal{P}_n(0)$ est vraie puisque $(X^n)^{(0)} = X^n$.

Hérédité : Soit un naturel k, supposons $\mathcal{P}_n(k)$. Si $k\leq n$ alors

$$\begin{aligned}(X^n)^{(k)} &= \frac{n!}{(n-k)!}X^{n-k} &(18.142)\\ (X^n)^{(k+1)} &= \frac{n!}{(n-k)!}(n-k)X^{n-k-1} &(18.143)\\ &= \begin{cases}0 & n=k\\ \frac{n!}{(n-k-1)!}X^{n-k-1} & k\leq n-1\end{cases} &(18.144)\end{aligned}$$

Si $k>n$ alors $(X^n)^{(k)}$ donc $(X^n)^{(k+1)} = 0$

Finalement $\mathcal{P}_n(k+1)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout naturel n, on a montré que $\mathcal{P}_n(0)$ est vraie et que pour tout naturel k, $\mathcal{P}_n(k) \implies \mathcal{P}_n(k+1)$. Alors par théorème de récurrence pour tous naturels n et k, l'assertion $\mathcal{P}_n(k)$ est vraie. □

Théorème 18.5 (Formule de Taylor pour les polynômes)**.** *Soit* $P\in\mathbb{K}[X]$ *et* $a\in\mathbb{K}$*, alors*

$$P = \sum_{n=0}^{N}\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n \quad \forall N\geq \deg(P) \tag{18.145}$$

Démonstration. Soit l'application φ: $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X]\\ P & \longmapsto & \sum_{n=0}^{N}\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n\end{array}\right.$.

L'application φ est linéaire : Soient $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$ et $\lambda\in\mathbb{K}$ alors

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda P+Q) &= \sum_{n\geq 0}\frac{(\lambda P+Q)^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n &(18.146)\\ &= \sum_{n\geq 0}\frac{\lambda P^{(n)}(a)+Q^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n &(18.147)\\ &= \lambda\sum_{n\geq 0}\frac{P^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n + \sum_{n\geq 0}\frac{Q^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n &(18.148)\\ &= \lambda\varphi(P)+\varphi(Q) &(18.149)\end{aligned}$$

Calculons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(X^n)$. D'après le lemme

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi(X^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} a^{n-k} \frac{1}{k!} (X-a)^k \tag{18.150}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (X-a)^k a^{n-k} \tag{18.151}$$

en appliquant la formule du binôme de Newton (puisque $\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif) on obtient que pour tout naturel n

$$\varphi(X^n) = (a + X - a)^n = X^n \tag{18.152}$$

Comme l'application φ est linéaire, on en déduit que pour tout polynôme P, $\varphi(P) = P$. □

18.3.4 Application de la formule de Taylor à la détermination de l'ordre de multiplicité d'une racine

Proposition 18.24. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On suppose que α est racine de P d'ordre de multiplicité égal à r. Alors α est racine de P' d'ordre de multiplicité égal à $r - 1$.

Si α est racine de P d'ordre 1 alors ce n'est pas une racine de P'.

Démonstration. Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose que α est racine d'ordre r. Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^r Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$. Alors

$$P' = r(X-\alpha)^{r-1} Q + (X-\alpha) Q' \tag{18.153}$$

$$P'(\alpha) = r(\alpha-\alpha)^{r-1} Q(\alpha) + (\alpha-\alpha) Q'(\alpha) \tag{18.154}$$

$$\tag{18.155}$$

— Si $r = 1$, alors $P'(\alpha) = Q(\alpha) \neq 0$ donc α n'est pas racine de P' ;
— Si $r \geq 2$ alors $P'(\alpha) = 0$ et donc α est racine de P'. De plus

$$P' = (X-\alpha)^{r-1}(rQ + (X-\alpha)Q') \tag{18.156}$$

$$= (X-\alpha)^{r-1} Q_2 \tag{18.157}$$

avec $Q_2(\alpha) = rQ(\alpha) + (\alpha - \alpha)Q'(\alpha) = rQ(\alpha) \neq 0$.
Donc α est racine de P' d'ordre égal à $r - 1$.

□

Proposition 18.25. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. α est racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si

$$\begin{cases} P(\alpha) = \ldots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(r)}(\alpha) \neq 0 \end{cases} \tag{18.158}$$

Démonstration. Si α est racine de P d'ordre de multiplicité r, alors pour tout $k \in k \in [\![0\,; r-1]\!]$, α est racine de $P^{(k)}$ d'ordre $r - k$ (Il suffit de le montrer par récurrence à partir de la proposition précédente). En particulier α est racine d'ordre $r - (r - 1) = 1$ de $P^{(r-1)}$ donc n'est pas racine de $P^{(r)}$ $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

Supposons que $\begin{cases} P(\alpha) = \ldots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(r)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$ alors la formule de Taylor pour P en α nous donne pour tout naturel $N \geq \deg(P)$:

$$P = \sum_{n=0}^{N} \frac{P^{(n)}}{n!}(X-\alpha)^n \tag{18.159}$$

$$= \sum_{n=r}^{N} \frac{P^{(n)}}{n!}(X-\alpha)^n \tag{18.160}$$

$$= (X-\alpha)^r \sum_{n=r}^{N} \frac{P^{(n)}}{n!}(X-\alpha)^{n-r} \tag{18.161}$$

$$= (X-\alpha)^r Q \tag{18.162}$$

avec $Q = \frac{P^{(r)}(\alpha)}{r!} \sum_{n=r+1}^{N} \frac{P^{(n)}}{n!}(X-\alpha)^{n-r}$. Alors $Q(\alpha) \neq 0$. α est racine de P d'ordre égal r. □

18.4 Polynôme scindé

18.4.1 Notion de polynôme scindé sur un corps $\mathbb{K}$

Définition 18.13. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul. On dit que P est scindé sur le corps $\mathbb{K}$ s'il existe $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - x_i) \tag{18.163}$$

Remarques :

1. Si n est non nul, P est de de degré n. Si P admet n racines distinctes $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{K}$ alors P est scindé sur $\mathbb{K}$.

   En effet, on a vu qu'alors $\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ divise P. Il existe alors un polynôme Q tel que $P = Q\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ et par argumlent de degré Q est constant non nul ($\deg(Q) = 0$).

2. Si P est scindé avec λ non nul et $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $P = \lambda\prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$. Les x_i sont les racines du polynôme P mais elles ne sont pas forcèment distinctes. Si on compte les racines avec leurs ordres de multiplicité, P admet n racines.

3. Il faut préciser sur quel corps le polynôme P est scindé (ou pas) car un polynôme peut être scindé sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. Comme par exemple $X^2 + 1 = (X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})$.

18.4.2 Fonctions symétriques élémentaires

Définition 18.14. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On définit les fonctions symétriques élémentaires de $x_1, \ldots, x_n$ notées $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ par :

$$\sigma_1 = \sum_{1 \leq i_1 \leq n} x_{i_1} \tag{18.164}$$

$$\sigma_2 = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \tag{18.165}$$

$$\ldots \tag{18.166}$$

$$\sigma_p = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_p \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} \tag{18.167}$$

$$\sigma_n = \prod_{1 \leq i_1 \leq n} x_{i_1} \tag{18.168}$$

Exemples : Pour $n = 2$, on a

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 \tag{18.169}$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 \tag{18.170}$$

pour $n = 3$,

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 \tag{18.171}$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \tag{18.172}$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 \tag{18.173}$$

pour $n = 4$,

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3 \tag{18.174}$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \tag{18.175}$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_3 + x_2 x_3 x_4 \tag{18.176}$$

$$\sigma_4 = x_1 x_2 x_3 x_4 \tag{18.177}$$

et ainsi de suite pour les $n > 4$.

18.4.3 Relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme scindé

Proposition 18.26. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ ($n = \deg(P)$). On suppose que P est scindé sur $\mathbb{K}$: il existe un scalaire non nul λ et un n-uplet de scalaire $(x_1, \ldots, x_n)$ tels que

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - x_i). \tag{18.178}$$

Alors on peut écrire les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ des racines $x_1, \dots, x_n$ du polynôme P en fonction des coefficients du polynôme P :

$$\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \tag{18.179}$$
$$\dots \tag{18.180}$$
$$\sigma_p = (-1)^p \frac{a_{n-p}}{a_n} \tag{18.181}$$
$$\dots \tag{18.182}$$
$$\sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \tag{18.183}$$
$$\tag{18.184}$$

Démonstration. On sait que

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n}(X - x_i) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \tag{18.185}$$

Alors si on développe le produit, on a

$$P = \lambda X^n + \lambda \left[\sum_{k=0}^{n-1} X^k (-1)^{n-k} \sigma_{n-k}\right] \tag{18.186}$$

Comme $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}[X]$, on peut identifier les coefficients et donc

$$\lambda = a_n \tag{18.187}$$
$$\forall k \in [\![0\,; n-1]\!] \lambda(-1)^{n-k}\sigma_{n-k} = a_k \tag{18.188}$$

Soit alors

$$\forall p \in [\![1\,; n]\!] \quad \sigma_p = \frac{a_{n-p}}{a_n}(-1)^{n-k} \tag{18.189}$$

□

Par exemple avec les polynômes de degré 2 : $P = aX^2 + bX + c = \lambda(X - x_1)(X - x_2)$ alors $\lambda = a$, $-\lambda(x_1 + x_2) = b$ et $c = \lambda x_1 x_2$.

Conséquence importante : Toute expression symétrique e, les racines d'un polynôme peut s'écrire à l'aide des fonctions symétriques élémentaires des racines de P et par conséquent des coefficients de P.

Exemple : Soit $P = X^3 + rX^2 + pX + q$ et soit (x, y, z) un système de racines de P. On peut exprimer $x + y + z$, $x^2 + y^2 + z^2$ et $x^3 + y^3 + z^3$ en fonction de r, p et q. En effet, la proposition précédente permet d'écrire que

$$\sigma_1 = x + y + z = -r \tag{18.190}$$
$$\sigma_2 = xy + xz + yz = p \tag{18.191}$$
$$\sigma_3 = xyz = -q \tag{18.192}$$

C'est-à-dire

$$x + y + z = -r \tag{18.193}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 = r^2 - 2p \tag{18.194}$$
$$x^3 + y^3 + z^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3 = -r^3 + 3rp - 3q \tag{18.195}$$

18.4.4 Factorisation sur $\mathbb{C}$ d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$

Théorème 18.6 (Théorème d'Alembert-Gauß)**.** *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$*

Théorème admis. □

Corollaire 18.26.1. *Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors P admet au moins une racine, d'après le théorème. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ les racines distinctes de P et $r_1, \dots, r_n$ leurs ordres de multiplicité respectifs.

Alors $\prod_{i=1}^n (X - x_i)^{r_i}$ divise P. Il existe alors $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$P = Q \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^{r_i} \tag{18.196}$$

Si on fait l'hypothèse que le polynôme Q n'est pas constant, alors il admet une racine $\alpha \in \mathbb{C}$ (d'après le théorème). C'est aussi une racine de P (puisque Q divise P) alors il existe un entier $i_0 \in [\![1\,; n]\!]$ tel que $\alpha = x_{i_0}$. Le polynôme $X - x_{i_0}$ divise Q donc il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q = R(X - x_{i_0})$ et ainsi

$$P = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)^{r_i} (X - x_{i_0}) R \tag{18.197}$$

et donc $(X - x_{i_0})^{r_{i_0}+1}$ divise P. Ce qui contredit la définition de r_{i_0} comme l'ordre de multiplicité de x_{i_0} dans P. Ainsi l'hypothèse qu'on avait fait sur Q est fausse, il est donc constant.

Il existe donc un scalaire λ non nul tel que $P = \lambda \prod_{i=1}^n (X - x_i)^{r_i}$. Alors P est scindé. □

⚠⚠Ces résultats sont faux dans $\mathbb{R}$, comme par exemple $X^2 + 3$.

18.4.5 Polynôme conjugué

Définition 18.15. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que $P = \sum_{n=0}^N a_n X^n$. On définit un polynôme de $\mathbb{C}[X]$, noté $\overline{P}$, appelé polynôme conjugué de P par

$$\overline{P} = \sum_{n=0}^{N} \overline{a_n} X^n \tag{18.198}$$

Proposition 18.27. Pour tout couple $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]$ et tout complexe α on a

$$\overline{P + Q} = \overline{P} + \overline{Q} \quad \overline{PQ} = \overline{PQ} \quad \overline{P(\alpha)} = \overline{P}(\overline{\alpha}) \quad \overline{P'} = \overline{P}' \tag{18.199}$$

Démonstration évidente à partir de la conjugaison sur $\mathbb{C}$. □

Proposition 18.28. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{N}^*$. α est racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine de $\overline{P}$ d'ordre de multiplicité r

Démonstration.

$$\alpha \text{ est racine de } P \text{ d'ordre } r \iff \begin{cases} P(\alpha) = \ldots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(r)}(\alpha) \neq 0 \end{cases} \tag{18.200}$$

$$\iff \begin{cases} \overline{P(\alpha)} = \ldots = \overline{P^{(r-1)}(\alpha)} = 0 \\ \overline{P^{(r)}(\alpha)} \neq 0 \end{cases} \tag{18.201}$$

$$\iff \begin{cases} \overline{P}(\overline{\alpha}) = \ldots = \overline{P^{(r-1)}}(\overline{\alpha}) = 0 \\ \overline{P^{(r)}}(\overline{\alpha}) \neq 0 \end{cases} \tag{18.202}$$

$$\iff \overline{\alpha} \text{ est racine de } \overline{P} \text{ d'ordre } r \tag{18.203}$$

□

Proposition 18.29. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{N}^*$, alors α est racine de P d'ordre r siu et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine de P d'ordre r.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente.

□

18.4.6 Factorisation sur $\mathbb{R}$ d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$

Théorème 18.7. *Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p$, $(r_1, \ldots, r_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$, $(\delta_1, \ldots, \delta_q) \in (\mathbb{N}^*)^q$, $(\beta_1, \ldots, \beta_q) \in \mathbb{R}^q$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_q) \in \mathbb{R}^q$ tels que*

$$\forall k \in [\![1\,;q]\!] \quad \beta_k^2 - 4\gamma_k < 0 \tag{18.204}$$

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{i=1}^{q} (X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^{\delta_i}. \tag{18.205}$$

Démonstration. On sait que P est scindé sur $\mathbb{C}$. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ les racines réelles de P et $r_1, \ldots, r_p$ leurs ordres respectifs. On sait que si $\omega \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$ est racine de P d'ordre r alors $\overline{\omega}$ est racine de $\overline{P}$ du même ordre r. Soient $\omega_1, \overline{\omega_1}, \ldots, \omega_q, \overline{\omega_q}$ les racines complexes non réelles de P. Notons $s_1, \ldots, s_q$ les ordres respectifs de $\omega_1, \ldots, \omega_q$et aussi de $\overline{\omega_1}, \ldots, \overline{\omega_q}$. Dans $\mathbb{C}[X]$, on peut écrire que

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{l=1}^{q} (X - \omega_l)^{s_l} \prod_{m=1}^{q} (X - \overline{\omega_m})^{s_m} \tag{18.206}$$

λ est le coefficient dominant de P donc $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{l=1}^{q} [(X - \omega_l)(X - \overline{\omega_l})]^{s_l} \tag{18.207}$$

et

$$\forall l \in [\![1\,;q]\!] \quad (X - \omega_l)(X - \overline{\omega_l}) = X^2 - 2\Re(\omega_l) X + |\omega_l|^2. \tag{18.208}$$

En posant $\forall l \in [\![1\,;q]\!]$ $\beta_l = 2\Re(\omega_l)$ et $\gamma_l = |\omega_l|^2$. Alors

$$\forall l \in [\![1\,;q]\!] \quad \beta_l^2 - 4\gamma_l = -4\Im(\omega_l)^2 < 0. \tag{18.209}$$

Finalement

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{p} (X - \alpha_k)^{r_k} \prod_{i=1}^{q} (X^2 + \beta_i X + \gamma_i)^{\delta_i}. \tag{18.210}$$

□

18.4.7 Exemples de factorisation sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$

18.4.7.1 Factoriser $P = X^n - 1$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$

Soit pour tout $k \in [\![0 \,; n-1]\!]$, $\omega_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{2\,\mathrm{i}\,\pi k}{n}\right)}$. Ce sont les racines distinctes de P (cf. chapitre 2) dans $\mathbb{C}$: $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - \omega_k)$.

Sur $\mathbb{R}$, on doit déterminer parmi les racines complexes de P celles qui sont réelles, ce qui oblige à différencier le cas n pair et le cas n impair.

Si n est pair, il existe un naturel p non nul tel que $n = 2p$. P admet deux racines réelles $\omega_0 = 1$ et $\omega_p = -1$.

$$\forall k \in [\![1 \,; p-1]\!] \quad \overline{\omega_k} = \omega_{2p-k} \tag{18.211}$$

Donc

$$X^n - 1 = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}(X - \omega_k)\prod_{k=p+1}^{2p-1}(X - \omega_k) \tag{18.212}$$

$$= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}(X - \omega_k)\prod_{k=p+1}^{2p-1}(X - \overline{\omega_{2p-k}}) \tag{18.213}$$

$$= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}(X - \omega_k)\prod_{j=1}^{p-1}(X - \overline{\omega_j}) \tag{18.214}$$

$$= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}(X - \omega_k)(X - \overline{\omega_k}) \tag{18.215}$$

$$= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}(X^2 - (\omega_k + \overline{\omega_k})X + \omega_k\overline{\omega_k}) \tag{18.216}$$

$$= (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right) \tag{18.217}$$

Si n est impair, il existe un naturel p non nul tel que $n = 2p+1$. P admet une racines réelles $\omega_0 = 1$.

$$\forall k \in [\![1 \,; p-1]\!] \quad \overline{\omega_k} = \omega_{2p+1-k} \tag{18.218}$$

et de la même manière on trouve que

$$P = (X-1)\prod_{k=1}^{p}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)X + 1\right) \tag{18.219}$$

18.4.7.2 Factoriser $P = X^4 + X^2 + 1$

On cherche les racines complexes. Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \iff z^2 \text{ est racine de } X^2 + X + 1 \tag{18.220}$$

$$\iff z^{\text{”}} \in \{\jmath ; \jmath^2\} \tag{18.221}$$

avec $\jmath = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{i}\,\pi/3} = \frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et donc $\jmath^2 = \overline{\jmath} = \mathrm{e}^{-2\,\mathrm{i}\,\pi/3} = \frac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Alors

$$z^4 + z^2 + 1 = 0 \iff z \in \{\jmath, -\jmath, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/3}, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi/3}\} \tag{18.222}$$

P posséde donc quatre racines complexes distinbctes et donc dans $\mathbb{C}$ il s'écrit :

$$X^4 + X^2 + 1 = (X - \jmath)(X + \jmath)\left(X - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/3}\right)\left(X - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\pi/3}\right) \tag{18.223}$$

Dans $\mathbb{R}$, il faut remarque que $\bar{\jmath} = -\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/3}$ et $-\bar{\jmath} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi/3}$, donc

$$X^4 + X^2 + 1 = (X^2 - 2\Re(\jmath)X + |\jmath|^2)(X^2 - 2\Re(-\jmath)X + |-\jmath|^2) \tag{18.224}$$

$$= (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1) \tag{18.225}$$

18.5 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

18.5.1 Diviseurs communs de deux polynômes

Définition 18.16. Soient A, B et C trois polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On dit que C est un diviseur commun à A et B lorsque $C \mid A$ et $C \mid B$.

Proposition 18.30. Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec $B \neq 0$ et R le reste de la division euclidienne de A par B. Les diviseurs communs de A et B sont exactements les diviseurs communs de B et R.

Démonstration. Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} . \tag{18.226}$$

Pour tout $C \in \mathbb{K}[X]$, si $C \mid B$ alors $C \mid BQ$, et si en plus $C \mid A$ alors on a $C \mid R$.

Si $C \mid B$ alors $C \mid BQ$ et si en plus $C \mid R$ alors $C \mid A = BQ + R$. □

18.5.2 PGCD de deux polynômes

Proposition 18.31. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. Il existe un unique polynôme $D \in \mathbb{K}[X]$, nul ou unitiaire, dont les diviseurs sont exactement les diviseurs communs de A et de B, c'est-à-dire :

$$\forall C \in \mathbb{K}[X] \quad C \mid D \iff C \mid A \text{ et } C \mid B. \tag{18.227}$$

De plus, il existe un couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = D$.

D est appelé le PGCD (plus grand commun diviseur) de A et de B noté $A \wedge B$. Le couple (U, V) est un couple de coefficients de Bezouy de A et B.

Unicité. Soit D_1 et $D_2 \in \mathbb{K}[X]$ tous les deux nuls ou unitaires tels que

$$\forall C \in \mathbb{K}[X] \quad C \mid D_1 \iff C \mid A \text{ et } C \mid B; \tag{18.228}$$

$$\forall C \in \mathbb{K}[X] \quad C \mid D_2 \iff C \mid A \text{ et } C \mid B. \tag{18.229}$$

Comme $D_1 \mid D_1$, la première équivalence implique que $D_1 \mid A$ et $D_2 \mid B$. La deuxième équivalence implique que $D_1 \mid D_2$. Par symétrie des rôles, on a aussi $D_2 \mid D_1$. Alors les polynômes D_1 et D_2 sont associés. Il existe alors un sclaire λ non nul tel que $D_1 = \lambda D_2$. Comme ils sont nuls ou unitaires ($\lambda = 1$ si non nul) alors ils sont égaux. □

Existence. Démontrons par récurrence sur $\mathbb{N}$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ "Pour tous polynômes A et B à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que $\deg(B) < n$, il existe un polynôme $D \in \mathbb{K}[X]$ nul ou unitiaire, dont les diviseurs sont exactement les diviseurs communs de A et de B, c'est-à-dire :

$$\forall C \in \mathbb{K}[X] \quad C \mid D \iff C \mid A \text{ et } C \mid B \tag{18.230}$$

De plus, il existe un couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $AU + BV = D$."

Initialisation : Pour $n = 0$, soient deux polynômes A et B à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que $\deg(B) < n = 0$, alors $\deg(B) = -\infty$ et $B = 0$. Tous les polynômes divisent le polynôme nul donc les diviseurs communs de A et de B sont les diviseurs de A. On pose $D = A$ et on prend $U = 1$ et $V = 0$ $AU+BV = A = D$. L'assertion $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Montrons que cela implique $\mathcal{P}(n+1)$. Soient deux polynômes A et B à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que $\deg(B) < n + 1$. Deux cas sont possibles :

1. Si $\deg(B) < n$ alors on applmique l'hypothèse de récurrence au couple (A, B) ;
2. si $\deg(B) = n$, alors B est non nul et on peut effectuer la division euclidienne de A par B, alors il existe un unique couple de polynôme $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(R) \leq \deg(B) = n$.

   On applique l'hypothèse de récurrence au couple (B, R) et il existe un polynôme D à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont les diviseurs sont exactement les divisurs communs de B et R (c'est-à-dire les diviseurs communs de A et B). Il existe un couple $(U_1, V_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

   $$D = BU_1 + RV_1 = BU_1 + (A - BQ)V_1 = B(U_1 - QV_1) + AV_1 \tag{18.231}$$

   On pose $U = V_1$ et $V = U_1 - V_1Q$ et on a montré $\mathcal{P}(n + 1)$.

Conclusion : On a montré que $\mathcal{P}(0)$ était vrai et que pour tout naturel n, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n + 1)$ donc l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n.

On en déduit le théorème en divisant D, U et V par le coefficient dominant de D si D n'est pas nul.Ainsi on remarque que $QPD_1 \mid PA_1$ et $QPD_1 \mid PB_1$ et comme P est non nul et que $\mathbb{K}[X]$ est intègre on a $QD_1 \mid A_1$ et $QD_1 \mid B_1$. QD_1 est un divisseur de A_1 et de B_1 alors $QD_1 \mid D_1$. Comme D_1 est non nul, $Q \mid 1$ et donc Q est constant non nul, c'est-à-dire qu'il existe un scalaire λ non nul tel que $Q = \lambda$.

Alors $D = \lambda(PD_1)$, les polynômes D et PD_1 sont associés et commes ils sont tous les deux nuls ou unitaires ils sont égaux. □

Proposition 18.32 (Associativité)**.** Pour tous polynômes A, B et C de $\mathbb{K}[X]$, on a

$$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C. \tag{18.232}$$

Démonstration. On note $D = A \wedge (B \wedge C)$ et $E = (A \wedge B) \wedge C$. Alors :

- $D \mid A$ et $D \mid B \wedge C$ donc $D \mid A$ et $D \mid B$ et $D \mid C$. Ainsi $D \mid A \wedge B$ et $D \mid C$. Finalement $D \mid (A \wedge B) \wedge C = E$
- De la même manière on montre que $E \mid D$

Les polynômes E et D sont associés, nuls ou unitaires, donc égaux. □

18.5.3 Algorithme d'Euclide

Dans la démonstration de l'éexistence du PGCD apparaît un algorithme qui permet de calculer le PGCD de deux polynômes A et B. On pose $R_0 = A$, $R_1 = B$ et pour tout $n \geq 2$ si $R_n \neq 0$ on définit R_{n+1} comme le reste de la division euclidienne de R_{n-1} par R_n. Le PGCD de A et de B est égal au dernier reste non nul, normalisé.

18.5.4 PPCM de deux polynômes

Proposition 18.33. Soient deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$. Il existe un unique $M \in \mathbb{K}[X]$, nul ou unitaire, dont les multiples sont exactement les multiples de A et de B

$$\forall C \in \mathbb{K}[X] \quad M \mid C \iff (A \mid C \text{ et } B \mid C). \tag{18.233}$$

M est appelé le PPCM (plus petit commun multiple) de A et de B, noté $M = A \vee B$

Unicité. Soient M_1 et M_2 deux PPCM éventuels de A et de B. Comme M_1 est un PPCM de A et de B, on a que $A \mid M_1$ et $B \mid M_1$ et comme M_2 est aussi un pPPCM on a $M_2 \mid M_1$. Par symétrie on a aussi $M_1 \mid M_2$, alors M_1 sont associées, nuls ou unitaires, donc ils sont égaux. □

Existence. Si A est nul ou B est nul, le seul multiple commun de A et B est le polynôme nul, donc $M = 0$.

Si A et B sont tous les deux non nuls on pose

$$\mathcal{E} = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists C \in \mathbb{K}[X] \ \deg(C) = k \ A \mid C \text{ et } B \mid C\}, \tag{18.234}$$

alors $\mathcal{E}$ est une partie de $\mathbb{N}$. Puisque $A \mid AB$ et $B \mid AB$ et que $AB \neq 0$ on a $\deg(AB) \in \mathcal{E}$, alors $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Ainsi $\mathcal{E}$ admet un plut petit élément $k_0 \in \mathcal{E}$. Il existe un polynôme $M \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(M) = k_0$, $A \mid M$ et $B \mid M$.

Soit un polynôme $C \in \mathbb{K}[X]$. Deux cas se présentent :

— Si C est un multiple de M, $M \mid C$ et par transitivité de la distributivité, $A \mid C$ et $B \mid C$;

— si C est un multiple commun de A et B. Comme $M \neq 0$ (puisque $\deg(M) = k_0 \in \mathbb{N}$) on effectue la division euclidienne de C par M :

$$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \begin{cases} C = MQ + R \\ \deg(R) < \deg(M) = k_0 \end{cases} \tag{18.235}$$

et

$$(A \mid C \text{ et } A \mid M) \text{ et } (B \mid C \text{ et } B \mid M) \implies A \mid R \text{ et } B \mid R. \tag{18.236}$$

Si le reste était non nul, son degré serait un élément de $\mathcal{E}$, or $\deg(R) < k_0 = \min(\mathcal{E})$, c'est absurde. Donc le reste est nul. Ce qui signifie que $M \mid C$. Ensuite on divise M par son coefficient dominant pour avec le PPCM.

□

Remarque : Pour tous polynômes, leur PPCM est nul si et seulement si l'un des deux polynômes est nul.

Proposition 18.34. Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$. Supposons qu'il existe trois polynômes A_1, B_1 et P tels que P soit unitaire et que $A = PA_1$ et $B = PB_1$. Alors $A \vee B = P(A_1 \vee B_1)$.

Démonstration. On note $M = A \vee B$ et $M_1 = A_1 \vee B_1$. Par définition, $A_1 \mid M_1$ et $B_1 \mid M_1$. Alors $A \mid PM_1$ et $B \mid PM_1$ et Pm_1 est donc un multiple de A et de B et par défintion de M, on a $M \mid MP_1$.

On sait que $A \mid M$ donc il existe un polynôme Q tel que $M = AQ = PA_1Q$. On sait qussi que $B \mid M$, c'est-à-dire que $PB_1 \mid PA_1Q$ et comme P est non nul on a $B_1 \mid A_1Q$. On sait alors que $A_1 \mid A_1Q$ et que $B_1 \mid A_1Q$ alors $M_1 \mid A_1Q$ et en multipliant $PM_1 \mid M$.

Au final $M \mid MP_1$ et $PM_1 \mid M$ donc PM_1 et M sont associées, de plus ils sont nuls ou unitaires, donc $M = M_1P$. □

Proposition 18.35 (Associativité)**.** Pour tous polynômes A, B et C de $\mathbb{K}[X]$, on a
$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C. \tag{18.237}$$

Démonstration. On note $D = A \wedge (B \vee C)$ et $E = (A \vee B) \vee C$. Alors :

— $A \mid D$ et $B \vee C \mid D$ donc $A \mid D$ et $B \mid D$ et $C \mid D$. Ainsi $A \vee B \mid D$ et $C \mid D$. Finalement $E = (A \vee B) \vee C \mid D$

— De la même manière on montre que $D \mid E$

Les polynômes E et D sont associés, nuls ou unitaires, donc égaux. □

18.5.5 Polynômes premiers entre eux, théorème de Bezout ...

18.5.5.1 Polynômes premiers entre eux

Définition 18.17. Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que A et B sont premiers entre eux si et seulement si $A \wedge B = 1$.

Cela signifie que les divisuers communs de A et B sont exactements les polynômes de degré 0.

Proposition 18.36. Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$ et $D = A \wedge B$. Alors il existe deux polynômes A_1, B_1 de $\mathbb{K}[X]$ tels que
$$A = A_1D, \text{ et } B = B_1D, \text{ et } A_1 \wedge B_1 = 1. \tag{18.238}$$

Démonstration. Deux case se présentent :

1. Si $A = B = 0$ alors $D = 0$ et on peut choisir $A_1 = B_1 = 1$;
2. Si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ alors $D \neq 0$. Comme par définition $D \mid A$ et $D \mid B$ alors il existe deux polynômes A_1 et B_1 dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $A = A_1D$ et $B = B_1D$. Alors
$$A \wedge B = (A_1D) \wedge (B_1D) = D(A_1 \wedge B_1) \tag{18.239}$$
(puisque D est unitaire), alors
$$D(1 - A_1 \wedge B_1) = 0, \tag{18.240}$$
et comme D est non nul donc $A_1 \wedge B_1 = 1$.

□

18.5.5.2 Théorème de Bezout

Théorème 18.8. *Soient deux polynômes A et B de $\mathbb{K}[X]$, alors ils sont premier entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes U et V tels que $AU+BV=1$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Déjà vu dans la définition du PGCD.

$\Longleftarrow$ S'il existe deux polynômes U et V tels que $AU+BV=1$. Soit un polynôme C tel que $C \mid A$ et $C \mid B$ alors $C \mid AU+BV=1$ donc C est de degré zéro et donc $A \wedge B = 1$. □

Démonstration. Pour tous polynômes A, B et C de $\mathbb{K}[X]$,

$$A \wedge B = 1 \text{ et } A \wedge C = 1 \iff A \wedge (BC) = 1. \tag{18.241}$$

□

Démonstration. $\Longrightarrow$ D'après le théorème de Bezout, il existe quatres polynômes U_1, V_1, U_2 et V_2 tels que $AU_1+BV_1=1$et $AU_2+CV_2=1$. D'où

$$(AU_1+BV_1)(AU_2+BV_2)=1 \tag{18.242}$$

$$A(U_1U_2A+U_1CV_2+U_2BV_1)+BC(V_1V_2)=1. \tag{18.243}$$

Si on pose $U=U_1U_2A+U_1CV_2+U_2BV_1$ et $V=V_1V_2$ alors c'est bon. On a montré qu'il existe deux polynômes U et V tels que $AU+(BC)V=1$. Alors $A \wedge BC = 1$.

$\Longleftarrow$ Il existe deux polynômes U et V tels que $AU+(BC)V=1$. Donc $AU+B(CV)=1$ et $AU+C(BV)=1$ alors $A \wedge B = 1$ et $A \wedge C = 1$. □

Proposition 18.37. Pour tous polynômes A, B et C de $\mathbb{K}[X]$ et pour tous naturels non nuls k et l, on a

$$A \wedge B = 1 \iff A^k \wedge B^l = 1. \tag{18.244}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ On montre par récurrence immédiate à partir de la dernière proposition que

$$\forall l \in \mathbb{N}^* \quad A \wedge B^l = 1, \tag{18.245}$$

et par une deuxième récurrence immédiate que

$$\forall l \in \mathbb{N}^* \forall k \in \mathbb{N}^* \quad A^k \wedge B^l = 1. \tag{18.246}$$

$\Longleftarrow$ De même, se déduit de la proposition précédente par récurrence descendante. □

18.5.5.3 Théorème de Gauß

Théorème 18.9. *Pour tous polynômes A, B et C de $\mathbb{K}[X]$,*

$$A \mid BC \text{ et } A \wedge B = 1 \implies A \mid C. \tag{18.247}$$

Démonstration. Comme $A \wedge B = 1$, il existe deux polynômes U et V de $\mathbb{K}[X]$ tels que $AU+BV=1$ et donc $AUC+BVC=C$. Or $A \mid BC$, donc $A \mid BVC$. Ainsi $A \mid BVC+AUC$ et finalement $A \mid C$. □

Proposition 18.38. Étant donnés trois polynômes$A$, B et C à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$$A \mid C \text{ et } B \mid C \text{ et } A \wedge B = 1 \implies AB \mid C \tag{18.248}$$

Démonstration. Comme $B \mid C$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $C = BQ$. Comme $A \mid BQ$ et que $A \wedge B = 1$ le théorème de Gaußdonne donc que $A \mid Q$. Il existe donc un polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = AR$. Ainsi $C = BQ = BAR$ et donc $AB \mid C$. □

Proposition 18.39. Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Les polynômes AB et $A \vee B$ sont associées.

Démonstration. Le polynôme AB est un multiple commun à A et B donc $A \vee B \mid AB$. On sait que $A \mid A \vee B$ et $B \mid A \vee B$ et que $A \wedge B = 1$, alors la proposition précédente nous donne que $AB \mid A \vee B$. Alors les polynômes AB et $A \vee B$ sont associées. □

Proposition 18.40. Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$. Les polynômes AB et $(A \wedge B)(A \vee B)$ sont associés.

Démonstration. Si $A = B = 0$ alors $AB = 0 = (A \wedge B)(A \vee B)$.

Si $A \neq 0$ ou $B \neq 0$, alors $D = A \wedge B \neq 0$. Il existe deux polynômes A_1 et B_1 de $\mathbb{K}[X]$ tels que $A = DA_1$ et $B = DB_1$ avec $A_1 \wedge B_1 = 1$.

Les polynômes A_1B_1 et $A_1 \vee B_1$ sont donc associés (prop précédente). Il existe un scalaire λ non nul tel que$A_1B_1 = \lambda A_1 \vee B_1$. Ainsi

$$AB = (DA_1)(DB_1) = D^2 \lambda A_1 \vee B_2 \tag{18.249}$$
$$= \lambda(A \wedge B)[(DA_1) \vee (DB_1)] \tag{18.250}$$
$$= \lambda(A \wedge B)(A \vee B). \tag{18.251}$$

alors AB et $(A \wedge B)(A \vee B)$ sont associés. □

18.5.5.4 Coefficients de Bezout

Proposition 18.41. Soient A et B dans $\mathbb{K}[X]$ non constants tels que $A \wedge B = 1$. Alors il existe un unique couple $(U_0, V_0) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$AU_0 + BV_0 = 1 \quad \deg(U_0) \leq \deg(B) \quad \deg(V_0) \leq \deg(A). \tag{18.252}$$

Démonstration. En TD, fiche 30 exercice 6. □

Présentation sur un exemple de la méthode de recherche d'un couple de Bezout. On pose $A = X^3 + X + 1 = R_0$ et $B = X^2 + X + 1 = R_1$. Alors

$$A = B(X - 1) + X + 2 \tag{18.253}$$

en notant $R_2 = X + 2$, on a

$$B = R_2(X - 1) + 3 \tag{18.254}$$

en notant $R_3 = 3$, on sait que $_3$ est le dernier reste non nul donc $A \wedge B = 1$. Ainsi on peut trouver les coefficients en "remontant" l'algorithme :

$$1 = \frac{R_3}{3} = \frac{1}{3}(B - R_2(X - 1)) = \frac{1}{3}(B - (A - B(X - 1))(X - 1)) \tag{18.255}$$

c'est-à-dire

$$1 = -\frac{1}{3}A(X-1) + \frac{1}{3}(1-(X-1)^2)B \tag{18.256}$$

On pose alors $U = -\frac{1}{3}(X-1)$ et $B = \frac{1}{3}(1-(X-1)^2)$ avec $\deg(U) = 1 < \deg(B) = 2$ et $\deg(V) = 2 < \deg(A) = 3$.

18.5.6 Polynômes irréductibles et théorème de factorisation

18.5.6.1 Définition

Définition 18.18. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Le polynôme P est dit irréductible sur le corps $\mathbb{K}$ si :
- $\deg(P) \geq 1$
- les diviseurs de P sont exactements les polynômes constants non nul et les associés de P.

Autrement dit, P est dit irréductible sur le corps $\mathbb{K}$ si et seulement si
- $\deg(P) \geq 1$
- $\forall A, B \in \mathbb{K}[X] \quad P = AB \implies \deg(A) = 0 \text{ ou } \deg(B) = 0$

Remarque :

1. Les polynômes de degré 1 sont toujours irréductibles, quelque soit le corps $\mathbb{K}$.
2. Il est important de préciser sur quel corps on travaile : un polynôme peut être irréductible dans un corps mais pas dans un autre. Comme par exemple X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}$ mais pas dans $\mathbb{C}$ $X - \mathrm{i} \mid X^2+1$.

18.5.6.2 Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$et de $\mathbb{R}[X]$

Proposition 18.42. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Démonstration. Les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Si $P \in \mathbb{C}[X]$ admet un degré supérieur à 2, on sait que P peut être factorisé en produit de polynômes de degré 1 (théorème de factorisation dans $\mathbb{C}$). Il admet donc des diviseurs non constants et non associés à lui-même : il n'est pas irréductible. □

Proposition 18.43. Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont :
- les polynômes de degré 1 ;
- les polynômes de degré 2 dont le discriminant est négatif.

Démonstration. Les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Soit P un polynôme de degré 2 et soit Δ son discriminant.
- Si $\Delta > 0$ alors P admet deux racines réelles x_1 et x_2 et $X - x_1 \mid P$, P n'est pas irréductible.
- Si $\Delta = 0$ alors P admet une racine double x_0 et $X - x_0 \mid P$, P n'est pas irréductible.
- Si $\Delta < 0$ alors P n'admet pas de racines réelles. S'il existait deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = AB$ avec $\deg(A) = \deg(B) = 1$, alors A admettrait une racine réelle et donc P aussi (Absurde), donc P est irréductible.

Si $P ßn \mathbb{R}[X]$ tel que $deg(P) \geq 3$ alors d'après le théorème de factorisation, on pourrait écrire P comme un produit de polynômes de degré 1 ou 2 : P admet des diviseurs non constants et non associés à lui-même. Alors P n'est pas irréductible. □

18.5.6.3 Propriétés des polynômes irréductibles

Proposition 18.44. Soient A et P dans $\mathbb{K}[X]$. On suppose que P est irréductible dans $\mathbb{K}$. Alors $P \mid A$ ou $P \wedge A = 1$.

Démonstration. Soit $C \in \mathbb{K}[X]$ un diviseur commun de A et de P. Alors C est soit constant, soit associé à P.

— Si $P \mid A$ alors $A \wedge P$ est associé à P.

— Sinon, C est constant non nul donc $A \wedge P = 1$.

□

Proposition 18.45. Soient trois polynômes A, B et P de $\mathbb{K}[X]$ avec P irréductible. Alors

$$P \mid AB \iff P \mid A \text{ ou } P \mid B \tag{18.257}$$

Démonstration. $\Longleftarrow$ C'est clair

$\Longrightarrow$ Si $P \mid A$, c'est ok et sinon alors $P \wedge A = 1$ et donc le théorème de Gaußdonne donc que $P \mid B$. □

18.5.6.4 Décomposition d'un polynôme en produits de facteurs irréductibles

Théorème 18.10. *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme non constant. Alors il existe un scalaire λ non nul, un nturel $n \in \mathbb{N}^*$, des polynômes $P_1, \ldots, P_n$ irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux distincts et des entiers tous non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que*

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i} \tag{18.258}$$

Démonstration. Voir celles des entiers, chapitre **??**. □

Corollaire 18.45.1. *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $A = \lambda \prod_{i=1}^{n} P_i^{\alpha_i}$ et $B = \mu \prod_{i=1}^{n} P_i^{\beta_i}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, \ldots, P_n$ sont irréductibles, unitaires et deux à deux distincts ; $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, $\beta_1, \ldots \beta_n \in \mathbb{N}$. Alors*

$$A \mid B \iff \forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad \alpha_i \leq \beta_i \tag{18.259}$$

$$A \wedge B = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)} \tag{18.260}$$

$$A \vee B = \prod_{i=1}^{n} P_i^{\max(\alpha_i, \beta_i)} \tag{18.261}$$

Démonstration. Voir celles des entiers, chapitre **??**. □

Chapitre 19

Fractions rationelles

Sommaire

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps.

19.1 Corps des fractions rationnelles à une inéterminée

19.1.1 Notion de fraction rationelle

On dispose de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à une indéterminée dans le corps $\mathbb{K}$. On admet qu'on peut définir sons corps des fractions, noté $\mathbb{K}(X)$, comme le plus petit corps dont $\mathbb{K}[X]$ est un sous-anneau (définition avec unicité à isomorphisme près).

Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés fractions ratiionnelles à une indétrerminée à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ils sont de la forme $F = \frac{A}{B}$ avec $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ et B non nul.

Si $F \in \mathbb{K}(X)$, un couple $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $F = \frac{A}{B}$ est appelé un représentant de F. Il n'y a pas unicité de (A, B).

Pour tous $(A_1, B_1, A_2, B_2) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec B_1 et B_2 non nuls on a

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \iff A_1B_2 - A_2B_1 = 0. \tag{19.1}$$

19.1.1.1 Lois de compositions internes

— On définit l'addition par

$$\forall \left(\frac{A}{B}, \frac{C}{D}\right) \in \mathbb{K}(X)^2 \quad \frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AD + BC}{BD}; \tag{19.2}$$

— on définit le produit par

$$\forall \left(\frac{A}{B}, \frac{C}{D}\right) \in \mathbb{K}(X)^2 \quad \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}. \tag{19.3}$$

Ces définitions sont légitimes puisque AC et BD sont des polynômes (donc $AC + BD$ en est un aussi). De plus $BD \neq 0$. Vérifions que ces définitions ne dépendent pas du représentant choisi. Si $\frac{A}{B} = \frac{A^*}{B^*}$ et $\frac{C}{D} = \frac{C^*}{D^*}$ alors

$$(A^*D^* + B^*C^*)BD - (AD + BC)B^*D^* \tag{19.4}$$
$$= A^*BDD^* + BB^*C^*D - AB^*DD^* - BB^*CD^* \tag{19.5}$$
$$= (A^*B - AB^*)DD^* - BB^*(C^*D - CD^*) = 0. \tag{19.6}$$

Alors la définition de l'addition ne dépend pas du représentant. Vérifions-le aussi pour le produit. Si $\frac{A}{B} = \frac{A^*}{B^*}$ et $\frac{C}{D} = \frac{C^*}{D^*}$ alors

$$A^*C^*BD - ACB^*D^* \tag{19.7}$$
$$= AB^*(C^*D - CD^*) \quad (A^*B = B^*A) \tag{19.8}$$
$$= 0 \quad (C^*D = CD^*). \tag{19.9}$$

Alors la définition du produit ne dépend pas du représentant.

Éléments neutres : Pour l'addition, l'élément neutre est $0_{\mathbb{K}(X)} = \frac{0_{\mathbb{K}[X]}}{1_{\mathbb{K}[X]}}$ avec

$$\forall \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X) \quad \frac{A}{B} = 0_{\mathbb{K}(X)} \iff A = 0_{\mathbb{K}[X]}. \tag{19.10}$$

Pour le produit, l'élément neutre est $1_{\mathbb{K}(X)} = \frac{1_{\mathbb{K}[X]}}{1_{\mathbb{K}[X]}}$ avec

$$\forall \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X) \quad \frac{A}{B} = 1_{\mathbb{K}(X)} \iff A = B. \tag{19.11}$$

Symétriques : Pour l'addition, le symétrique de $\frac{A}{B}$ et $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B} = \frac{A}{-B}$. Pour la multiplication, si $F = \frac{A}{B}$ est non nul alors c'est $F^{-1} = \frac{B}{A}$.

19.1.1.2 Immersion de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$

L'application $\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \frac{P}{1_{\mathbb{K}[X]}} \end{array} \right.$ est un morphisme injectif d'anneaux. L'image de φ, $\mathrm{Im}(\varphi)$, est un sous anneau de $\mathbb{K}(X)$. Ainsi, φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathrm{Im}(\varphi)$, ce qui permet d'identifier P et $\varphi(P)$. On peut alors considérer $\mathbb{K}[X]$ comme un sous anneau de $\mathbb{K}(X)$. En identifiant également les polynômes constants à des éléments de $\mathbb{K}$, on a aussi : $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{K}(X)$.

Remarque : La fraction rationelle nulle, $0_{\mathbb{K}(X)}$, est identifiée au scalaire nul, $0_{\mathbb{K}}$. Idem pour l'unité.

Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec B non nul. Si B divise A dans $\mathbb{K}[X]$, il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$ et alors $A \cdot 1 - BQ = 0$ donc $\frac{A}{B} = \frac{Q}{1} = Q$.

"Le quotient" de deux polynômes au sens de la divisibilité des polynômes, lorsqu'il existe, est égal à la fraction rationnelle $\frac{A}{B}$.

19.1.1.3 Conjuguée d'une fraction rationelle à coefficients complexes

Définition 19.1. Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{C}(X)$. On définit la fraction rationelle $\overline{F}$, la fraction rationelle conjuguée, par $\overline{F} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$.

C'est légitime puisque :

1. Les polynômes $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont dans $\mathbb{C}[X]$ et comme $B \neq 0$ alors $\overline{B} \neq 0$.
2. Soient deux représentants $F = \frac{A}{B} = \frac{A^*}{B^*}$ alors $AB^* = A^*B$ d'où dans $\mathbb{K}[X]$ on a $\overline{AB^*} = \overline{BA^*}$ et ainsi $\overline{F} = \frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{\overline{A^*}}{\overline{B^*}}$. La définition du conjugué ne dépend pas du représentant choisi. En utilisant les propriétés de conjugaison sur $\mathbb{C}[X]$ on montre que :

$$\forall (F, G) \in \mathbb{C}(X)^2 \qquad \overline{F+G} = \overline{F} + \overline{G} \quad \overline{FG} = \overline{F} \cdot \overline{G}. \tag{19.12}$$

19.1.2 Fraction rationelle dérivée

Définition 19.2. Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On définit la fraction rationelle dérivée de F, notée F' par :

$$F' = \frac{A'B - B'A}{B^2}. \tag{19.13}$$

C'est légitime puisque :

1. $A'B - B'A \in \mathbb{K}[X]$, $B^2 \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ donc c'est bien une fraction rationelle.
2. Soient deux représentants $F = \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}$ alors on sait que

$$AB_1 - A_1B = 0 \tag{19.14}$$
$$A'B_1 + AB_1' - A_1'B - A_1B' = 0 \tag{19.15}$$

on a dérivé la première égalité. Ensuite

$$(A'B - AB')B_1^2 - (A_1'B_1 - A_1B_1')B^2 \tag{19.16}$$
$$= A'BB_1^2 - AB'B_1^2 - A_1'B_1B^2 - A_1B_1'B^2 \tag{19.17}$$
$$= (A'B - A_1'B)BB_1 - (AB_1)B'B_1 + (A_1B)B_1'B \tag{19.18}$$
$$= (A_1B' - AB_1')BB_1 - (A_1B)B'B_1 + (AB_1)B_1'B \tag{19.19}$$
$$= 0. \tag{19.20}$$

d'après les équations (**??**) et (**??**). Donc

$$\frac{A'B - AB'}{B^2} = \frac{A_1'B_1 - A_1B_1'}{B_1^2}. \tag{19.21}$$

La définition de la dérivée ne dépend pas du représentant choisi.

3. Vérifions que c'est compatible avec la définition de la dérivée sur $\mathbb{K}[X]$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors on identifie P à la fraction rationelle $F = \frac{P}{1}$ et $F' = \frac{P'1-P1'}{1^2} = \frac{P'}{1}$ identifié à P. La dérivée de P en tant que fraction rationelle est égale (ou identifiée) à sa dérivé en tant que polynôme.

Théorème 19.1. *Pour toutes fractions rationelle F et G de $\mathbb{K}(X)$ on a*

$$(F+G)' = F' + G' \tag{19.22}$$
$$(FG) = F'G + FG'. \tag{19.23}$$

Démonstration. On note $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$ avec A, B, C et D quatre polynômes et B et D tous les deux non nuls. Alors $F+G = \frac{AD+BC}{BD}$ et $FG = \frac{AC}{BD}$. Lorsqu'on dérive on a :

$$(F+G)' = \frac{(AD+BC)'BD - (AD+BC)(BD)'}{(BD)^2} \tag{19.24}$$
$$= \frac{A'BD^2 + ABDD' + BB'CD + B^2C'D}{B^2D^2} \tag{19.25}$$
$$- \frac{AD^2B' + ABDD' + BB'CD + B^2CD'}{B^2D^2} \tag{19.26}$$
$$= \frac{(A'B - AB')D^2}{B^2D^2} + \frac{B^2(C'D - CD')}{B^2D^2} \tag{19.27}$$
$$= \frac{A'B - AB'}{B^2} + \frac{C'D - CD'}{D^2} \tag{19.28}$$
$$= F' + G'. \tag{19.29}$$

Pour le produit

$$(FG)' = \frac{(AC)'BD - (AC)(BD)'}{(BD)^2} \tag{19.30}$$
$$= \frac{A'BCD + ABC'D - AB'CD - ABCD'}{B^2D^2} \tag{19.31}$$
$$= \frac{(A'B - AB')CD}{B^2D^2} + \frac{AB(C'D - CD')}{B^2D^2} \tag{19.32}$$
$$= F'G + FG'. \tag{19.33}$$

□

19.1.3 Degré d'une fonction rationelle

Définition 19.3. Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On définit le degré de F par

$$\deg(F) = \deg(A) - \deg(B). \tag{19.34}$$

Déjà $\deg(B) \in \mathbb{N}$ puisqu'il est non nul et $\deg(A) \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. On peut montrer que $\deg(F) = -\infty$ si et seulement si $F = 0$.

C'est légitime puisque :

1. Si $F = \frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}$ alors $AB_1 = A_1B$ et $\deg(AB_1) = \deg(A_1B)$ et donc $\deg(A) - \deg(B) = \deg(A_1) - \deg(B_1)$. La définition de $\deg(F)$ ne dépend pas du représentant choisi pour F.

2. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on identifie P à la fraction rationelle $\frac{P}{1}$. Son degré en tant que fraction rationelle vaut $\deg(P) - \deg(1) = \deg(P)$ est égal à son degré en tant que polynôme.

Proposition 19.1. Soient F et G dans $\mathbb{K}(X)$, alors

$$\deg(F+G) \leq \max(\deg(F), \deg(G)) \tag{19.35}$$
$$\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G). \tag{19.36}$$

Démonstration. Soient (A, B) et (C, D) deux représentants respectifs de F et G. Alors $F + G = \frac{AD+BC}{BD}$ et $FG = \frac{AC}{BD}$. Leurs degrés valent :

$$\begin{aligned}
\deg(F+G) &= \deg(AD+BC) - \deg(BD) && (19.37)\\
&\leq \max(\deg(AB), \deg(BC)) - \deg(B) - \deg(D) && (19.38)\\
&\leq \max(\deg(A) + \deg(D), \deg(B) + \deg(C)) - \deg(B) - \deg(D) && (19.39)\\
&\leq \max(\deg(A) - \deg(B), \deg(C) - \deg(D)) && (19.40)\\
&\leq \max(\deg(F), \deg(G)); && (19.41)
\end{aligned}$$

et pour le produit

$$\begin{aligned}
\deg(FG) &= \deg(AC) - \deg(BD) && (19.42)\\
&= \deg(A) + \deg(C) - \deg(B) - \deg(D) && (19.43)\\
&= \deg(F) + \deg(G). && (19.44)
\end{aligned}$$

□

19.1.4 Représentants irréductibles d'une fraction rationelle

Définition 19.4. Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle représentant irréductible de F tout couple $(A_1, B_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $B_1 \neq 0$ et $A_1 \wedge B_1 = 1$ et $F = \frac{A_1}{B_1}$.

On dira qu'un représentant est irréductible est unitaire si, de plus, B_1 est unitaire.

Théorème 19.2. *Toute fraction rationelle admet au moins un représentant irréductible.*

Démonstration. Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. Soit $D = A \wedge B \neq 0$ (car $B \neq 0$). Il existe un couple $(A_1, B_1) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $A = DA_1$, $B = DB_1$ et $A_1 \wedge B_1 = 1$ avec $B_1 \neq 0$ (car $B_1 \mid B$ et $B \neq 0$). Alors $AB_1 = DA_1B_1 = A_1B$ donc $\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}$. □

Théorème 19.3. *Soient quatre polynômes A, B, A_1 et B_1 tels que B et B_1 tous les deux non nuls et A_1 et B_1 sont premiers entre eux. Alors*

$$\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1} \iff \exists D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \begin{cases} A = DA_1 \\ B = DB_1 \end{cases}. \tag{19.45}$$

Auquel cas D est associé à $A \wedge B$.

Démonstration. $\Longleftarrow$ S'il existe $D \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $\begin{cases} A = DA_1 \\ B = DB_1 \end{cases}$ alors on a $AB_1 = DA_1B_1 = A_1B$ et donc $\frac{A}{B} = \frac{A_1}{B_1}$.

$\Longrightarrow$ Si $AB_1 = A_1B$ alors $B_1 \mid A_1B$ et $A_1 \wedge B_1 = 1$ donc le théorème de Gauß affirme que $B_1 \mid B$. Il existe alors un polynôme $D \in \mathbb{K}[X]$ non nul (puisque B est non nul) tel que $B = B_1D$. Alors

$$AB_1 = A_1B = A_1B_1D \tag{19.46}$$
$$B_1(A - A_1D) = 0 \tag{19.47}$$

comme B_1 et non nul et que l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre on a $A = A_1D$. Puisque D est non nul soit son coefficient dominant $\alpha \neq 0$. On pose $\widetilde{D} = \frac{D}{\alpha}$ ($\widetilde{D}$ est unitaire). Alors

$$A \wedge B = (A_1D) \wedge (B_1D) \tag{19.48}$$
$$= (\alpha A_1\widetilde{D}) \wedge (\alpha B_1\widetilde{D}) \tag{19.49}$$
$$= \widetilde{D}(\alpha A_1) \wedge (\alpha B_1) \qquad \widetilde{D} \text{ unitaire} \tag{19.50}$$
$$= \widetilde{D} = \frac{D}{\alpha}. \tag{19.51}$$

Ainsi $A \wedge B$ et D sont associés. □

Théorème 19.4. *Soient quatre polynômes A_1, B_1, A_2 et B_2 tels que B_1 et B_2 tous les deux non nuls, A_1 et B_1 premiers entre eux et A_2 et B_2 premiers entre eux. Alors*

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\} \begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \end{cases}. \tag{19.52}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ D'après le théorème précédent, il existe un polynôme D non nul tel que $A_2 = DA_1$ et $B_2 = DB_1$ et D est associé à $A_2 \wedge B_2 = 1$. Donc D est un polynôme constant non nul. Autrment dit, il exist un scalaire λ non nul tel que $D = \lambda$.

$\Longleftarrow$ S'il existe un scalaire λ non nul tel que $\begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \end{cases}$ alors $A_1B_2 = \lambda A_1B_1 = A_2B_1$ et donc $\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$. □

Proposition 19.2.

$$\forall F \in \mathbb{C}(X) \quad F \in \mathbb{R}(X) \iff \overline{F} = F. \tag{19.53}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ C'est clair.

$\Longleftarrow$ Soit $F = \frac{P}{Q}$ avec (P, Q) un représentant irréductible unitaire. Alors $\overline{F} = \frac{\overline{P}}{\overline{Q}} = \frac{P}{Q} = F$ avec $\overline{P} \wedge \overline{Q} = 1$. Il existe donc un complexe λ non nul tel que $\overline{Q} = \lambda Q$ et $\overline{P} = \lambda P$. Comme Q et $\overline{Q}$ sont unitaires on a $\lambda = 1$ et donc $\overline{Q} = Q$ et $\overline{P} = P$ et ainsi $F \in \mathbb{R}(X)$. □

19.1.5 Racines et pôles d'une fraction rationelle

Définition 19.5. Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. On suppose que (A, B) est un représentant irréductible de F. Soit un scalaire α et un naturel non nul r. On dit que :

— α est racine de F d'ordre r si et seulement si α est racine de A d'ordre r ;

— α est pôle de F d'ordre r si et seulement si α est racine de B d'ordre r.

C'est légitime, puisque

1. si (A, B) et (A_1, B_1) sont deux représentants irréductibles de F, d'après le théorème **??**, il existe un scalaire λ non nul tel que $\begin{cases} A = \lambda A_1 \\ B = \lambda B_1 \end{cases}$.

   Pour tout scalaire α et tout naturel non nul r, α est racine de A (resp. B) d'ordre r si et seulement si α est racine de A_1 (resp. B_1) d'ordre r.

   La définition ne dépend pas du représentant irréductible choisi, mais il doit être irréductible.

2. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, pour tout couple $(A_1, B_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, (A_1, B_1) est un représentant irréductible de $\frac{P}{1}$ si et seulement s'il existe un scalaire λ non nul tel que $A_1 = \lambda P$ et $B_1 = \lambda$.

   Les racines de P en tant que polynôme sont les mêmes que les racines de P en tant que fraction rationelle avec les mêmes ordres.

Il faut faire attention au corps, les racines et les pôles en dépendent. Par exemple $F = \frac{X^2+1}{X^2+2}$.

Remarque : Soit $F = \frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X) \setminus \{0\}$, on note $\mathcal{Z}_F$ l'ensemble des racines de F et $\mathcal{P}_F$ l'ensemble de ses pôles. Alors : $\mathcal{Z}_F$ est fini, $\mathcal{P}_F$ est fini et $\mathcal{Z}_F \cap \mathcal{P}_F = \emptyset$.

Démonstration. On suppose que $\frac{A}{B}$ est un représentant irréductible de F. F est non nul donc A est non nul. Ainsi $\mathcal{Z}_F$ est l'ensemble des racines de A et comme A est non nul alors $\mathcal{Z}_F$ est fini. De la même manière, le polynôme B est non nul donc l'ensemble de ses racines, c.-à.-d. $\mathcal{P}_F$, est fini.

S'il existe $\alpha \in \mathcal{Z}_F \cap \mathcal{P}_F$ alors $X - \alpha \mid A$ et $X - \alpha \mid B$ mais comme A et B sont premiers entre eux, c'est absurde. Donc il n'existe aucun élément dans $\mathcal{Z}_F \cap \mathcal{P}_F$. □

19.1.6 Fonction rationelle associée à une fraction rationelle

Définition 19.6. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, (A_1, B_1) un représentant irréductiblede F et $\mathcal{P}_F$ l'ensemble des pôles de F. On définit l'application $\widetilde{F}$, fonction rationelle associée à la fraction rationelle F, par

$$\widetilde{F} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} \setminus \mathcal{P}_F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \frac{\widetilde{A_1}(x)}{\widetilde{B_1}(x)} \end{array} \right. . \tag{19.54}$$

C'est légitime, puisque :

— Pour tout scalaire $x \in \mathbb{K} \setminus \mathcal{P}_F$, $\widetilde{B_1}(x) \neq 0$, donc $\frac{\widetilde{A_1}(x)}{\widetilde{B_1}(x)}$ est bien défini dans $\mathbb{K}$.

— si $\frac{A_2}{b_2}$ est un autre représentant irréductible de F, il existe un scalaire non nul λ tel que $\begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \end{cases}$, donc pour tout $x \in \mathbb{K} \setminus \mathcal{P}_F$ on a $\frac{\widetilde{A_2}(x)}{\widetilde{B_2}(x)} = \frac{\lambda \widetilde{A_1}(x)}{\lambda \widetilde{B_1}(x)} = \frac{\widetilde{A_1}(x)}{\widetilde{B_1}(x)}$.

— Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on dispose de la fonction polynomiale associée $\widetilde{P}$. Le polynôme P est identifié à $F = \frac{P}{1}$. Vérifions que $\widetilde{F} = \widetilde{P}$. On sait que $\mathcal{P}_F = \emptyset$ donc $\widetilde{F}$: $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \frac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{1}(x)} = \widetilde{P}(x) \end{array} \right.$. Donc $\widetilde{F} = \widetilde{P}$.

Proposition 19.3. Soient F et G dans $\mathbb{K}(X)$, $\mathcal{P}_F$ (resp $\mathcal{P}_G$) l'ensemble des pôles de F (resp de G). Pour tout scalaire λ et tout $x \in \mathbb{K} \setminus (\mathcal{P}_F \cup \mathcal{P}_G)$ on a

$$\widetilde{F+G}(x) = \widetilde{F}(x) + \widetilde{G}(x) \tag{19.55}$$

$$(\widetilde{FG})(x) = \widetilde{F}(x) \cdot \widetilde{G}(x) \tag{19.56}$$

$$(\widetilde{\lambda F})(x) = \lambda \widetilde{F}(x) \tag{19.57}$$

Démonstration. Évident d'après la définition. □

Proposition 19.4. Soient $(F, G) \in \mathbb{K}[X]^2$. On suppose que les fractions rationelles associées $\widetilde{F}$ et $\widetilde{G}$ coïncident en un nombre infini de valeurs de $\mathbb{K}$. Alors $F = G$.

Démonstration. Soir $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$ deux représentants irréductibles. Alors

$$\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{K}, \widetilde{F}(x) = \widetilde{G}(x)\} \tag{19.58}$$

$$= \{x \in \mathbb{K}, \frac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{B}(x)} = \frac{\widetilde{C}(x)}{\widetilde{D}(x)}\} \tag{19.59}$$

$$= \{x \in \mathbb{K}, \widetilde{AD - BC}(x) = 0\} \tag{19.60}$$

$$\tag{19.61}$$

Comme $\mathcal{C}$ est infini, on en déduit par la dernière égalité que le polynôme $AD - BC$ est nul et par conséquent $F = G$. □

19.1.7 Composition

Définition 19.7. Soit $F = \frac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. Soit R un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$. On définit la fraction rationelle de F et de R par $F \circ F = F(R) = \frac{P \circ R}{Q \circ R}$.

C'est légitime, puisque :

1. $P \circ R$ et $Q \circ R$ sont dans $\mathbb{K}[X]$ et $Q \circ R$ est non nul car Q et P sont non nuls ;
2. Si $F = \frac{P}{Q} = \frac{P_1}{Q_1}$ alors

$$PQ_1 = P_1 Q \tag{19.62}$$

$$(PQ_1) \circ R = (P_1 Q) \circ R \tag{19.63}$$

$$(P \circ R)(Q_1 \circ R) = (P_1 \circ R)(Q \circ R) \tag{19.64}$$

donc $\frac{P \circ R}{Q \circ R} = \frac{P_1 \circ R}{Q_1 \circ R}$. La définition ne dépend pas du représentant choisi ;

3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $F = \frac{P}{1}$ est identifiée à P et

$$\forall R \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \quad F \circ R = \frac{P \circ R}{1 \circ R} = \frac{P \circ R}{1} \tag{19.65}$$

identifiée à $P \circ R$. La définition est compatible avec celle sur $\mathbb{K}[X]$.

Proposition 19.5.

$$\forall (F, R) \in \mathbb{K}(X) \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\} \quad \deg(F \circ R) = \deg(F) \cdot \deg(R). \tag{19.66}$$

Démonstration. Soit $F = \frac{P}{Q}$, alors

$$\deg(F \circ R) = \deg\left(\frac{P \circ R}{Q \circ R}\right) = \deg(P \circ R) - \deg(Q \circ R) \tag{19.67}$$

$$= \deg(P)\deg(R) - \deg(Q)\deg(R) \tag{19.68}$$

$$= \deg(R)(\deg(P) - \deg(Q)) \tag{19.69}$$

$$= \deg(R)\deg(F). \tag{19.70}$$

□

Remarque : De la même manière que pour les polynômes, on note indiféremment pour toute fraction rationelle $F \in \mathbb{K}(X)$ F ou $F(X)$.

Définition 19.8. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. F est paire si et seulement si $F(X) = F(-X)$ et F est impaire si et seulement si $F(X) = -F(-X)$.

19.2 Étude locale d'une fraction rationelle

19.2.1 Partie entière d'une fraction rationelle

Théorème 19.5. *Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que $F = E + G$ et $\deg(G) < 0$.*

Autrement dit, il existe un unique polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(F - E) < 0$. Ce polynôme E est appelé la partie entière de la fracton rationelle F.

Unicité. Soient deux couples $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ et $(E_1, G_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tels que

$$F = E + G = E_1 + G_1 \qquad \deg(G) < 0 \;\; \deg(G_1) < 0. \tag{19.71}$$

Alors $E - E_1 = G_1 - G \in \mathbb{K}(X)$ et $\deg(G_1 - G) \leq \max(\deg(G_1), \deg(G)) < 0$, donc $\deg(E - E_1) < 0$. De plus $E - E_1 \in \mathbb{K}[X]$ alors $\deg(E - E_1) = -\infty$ et donc $E - E_1$ est nul. Finalement $E = E_1$ et $G = G_1$. □

Existence. Soit $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ avec B non nul, un représentant quelcuonque de la fraction rationelle F. Le polynôme B est non nul, on peut donc effectuer la division euclidienne de A par B :

$$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \begin{cases} A = BQ + R \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases} \tag{19.72}$$

Alors $F = \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$, avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\frac{R}{B} \in \mathbb{K}(X)$ et $\deg\left(\frac{R}{B}\right) = \deg(R) - \deg(B) < 0$. Le couple $(Q, \frac{R}{B})$ convient. □

Retenir que la partie entière de la fraction rationelle $\frac{A}{B}$ est égale au quotient de la division euclidienne de A par B.

En particulier, si E désigne la partie entière de la fonction rationelle $\frac{A}{B} = F$.

$$E = 0 \iff \deg(F) < 0. \tag{19.73}$$

Remarque : $\mathbb{K}(X)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel car $\mathbb{K}$ est un sous corps de $\mathbb{K}(X)$.

Proposition 19.6. L'application

$$\psi\colon \begin{cases} \mathbb{K}(X) & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ F & \longmapsto & \text{partie entière de } F \end{cases} \tag{19.74}$$

est une application linéaire de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Démonstration. Soit $(F, G) \in \mathbb{K}(X)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On note $H = \lambda F + G$. Soient $A; B, C$ et D dans $\mathbb{K}[X]$ tels que B et D sont tous les deux non nuls et tels que $F = \frac{A}{B}$ et $G = \frac{C}{D}$.

Effectuons les divisions euclidiennes de A par B et de C par D :

$$\exists!(Q_1, R_1) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \begin{cases} A = BQ_1 + R_1 \\ \deg(R_1) < \deg(B) \end{cases} \tag{19.75}$$

$$\exists!(Q_2, R_2) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \begin{cases} C = DQ_2 + R_2 \\ \deg(R_2) < \deg(D) \end{cases} \tag{19.76}$$

alors $\psi(F) = Q_1$ et $\psi(G) = Q_2$. On calcule H :

$$H = \lambda F + G = \lambda\left(Q_1 + \frac{R_1}{B}\right) + \left(Q_2 + \frac{R_2}{D}\right) \tag{19.77}$$

$$= (\lambda Q_1 + Q_2) + \left(\lambda\frac{R_1}{B} + \frac{R_2}{D}\right). \tag{19.78}$$

De plus

$$\deg\left(\lambda\frac{R_1}{B} + \frac{R_2}{D}\right) \leq \max\left(\deg\left(\lambda\frac{R_1}{B}\right), \deg\left(\lambda\frac{R_2}{D}\right)\right) < 0. \tag{19.79}$$

Ainsi,

$$\psi(H) = \lambda Q_1 + Q_2 = \lambda\psi(F) + \psi(G). \tag{19.80}$$

alors ψ est linéaire. $\square$

19.2.2 Partie polaire d'une fraction rationelle

19.2.2.1 Défintion de la partie polaire

Lemme 19.1. *Soient $F \in \mathbb{K}(X)$, $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a est un pôle de F d'ordre n. Alors il existe un unique couple $(R, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que*

$$\begin{cases} F = \frac{R}{(X-a)^n} + G \\ a \notin \mathcal{P}_G \\ \deg(R) < n \end{cases}. \tag{19.81}$$

Unicité. Soient $(R, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ et $(R_1, G_1) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tels que

$$\begin{cases} F = \frac{R}{(X-a)^n} + G = \frac{R_1}{(X-a)^n} + G_1 \\ a \notin \mathcal{P}_G \cup \mathcal{P}_{G_1} \\ \deg(R) < n \\ \deg(R_1) < n \end{cases}. \tag{19.82}$$

Alors

$$\frac{R - R_1}{(X-a)^n} = G_1 - G \tag{19.83}$$

Comme a n'est pas un pole de G ni de G_1, alors ce n'est pas un pôle de $G_1 - G$. Par l'absurde, supposons que $R - R_1 \neq 0$, alors a est une racine de $R - R_1$ d'ordre p ($p \in [\![0\,; n-1]\!]$, a n'est pas forcèment racine, on peut prendre $p = 0$, $p \leq n-1$ car $\deg(R - R_1) \leq n-1$). Alors il existe un polynôme Q tel que

$$R - R_1 = (X-a)^p \quad \text{et} \quad Q(a) \neq 0. \tag{19.84}$$

Ainsi

$$\frac{R - R_1}{(X-a)^n} = \frac{(X-a)^p Q}{(X-a)^n} = \frac{Q}{(X-a)^{n-p}}. \tag{19.85}$$

Comme $Q(a) \neq 0$, a est un pôle d'ordre $n - p \geq n - (n-1) = 1$. Alors a est "vraiment" un pôle. Cependant $\frac{R-R_1}{(X-a)^n} = G_1 - G$ et on avait pris comme hypothèse que a n'est pas un pôle de $G_1 - G$. (Contradiction). □

Existence. Soit (A, B) un représentant irréductible de F. Comme a est un pôle de F d'ordre n, il existe un polynôme $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\begin{cases} B = (X-a)^n C \\ C(a) \neq 0 \end{cases}. \tag{19.86}$$

alors $F = \frac{A}{(X-a)^n C}$. Comme $C(a) \neq 0$, C et $X - a$ sont premiers entre eux. On en déduit que $(X-a)^n$ et C sont premiers entre eux. Le théorème de Bezout affirme qu'il existe un couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que

$$(X-a)^n U + CV = 1, \tag{19.87}$$

alors

$$F = \frac{A(X-a)^n U + ACV}{(X-a)^n C} = \frac{AU}{C} + \frac{AV}{(X-a)^n}. \tag{19.88}$$

Comme $(X-a)^n$ est non nul, on peut effectuer la division euclidienne de AV par $(X-a)^n$:

$$\exists!(Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \begin{cases} AV = (X-a)^n Q + R \\ \deg(R) < n \end{cases}. \tag{19.89}$$

On reporte cette équation dans l'expression de F :

$$F = \frac{AU}{C} + \frac{(X-a)^n Q + R}{(X-a)^n} \tag{19.90}$$

$$= \frac{R}{(X-a)^n} + \left(\frac{AU}{C} + Q\right) \tag{19.91}$$

avec $R \in \mathbb{K}[X]$ ($\deg(R) < n$) et $\frac{AU}{C} + Q \in \mathbb{K}(X)$. Comme $C(a) \neq 0$, le couple $(R, \frac{AU}{C} + Q)$ convient. □

Théorème 19.6. *Soient $F \in \mathbb{K}(X)$, $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que a est un pôle de F d'ordre n. Alors il existe un unique n-uplet $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et une unique $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que*

$$\begin{cases} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(X-a)^i} + G \\ a \notin \mathcal{P}_G \end{cases} \tag{19.92}$$

Définition 19.9. La quantité $\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(X-a)^i}$ du théorème est appelée partie polaire de la fraction rationnelle F relative au pôle a.

Unicité. S'il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et $G_1 \in \mathbb{K}(X)$ tels que $F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(X-a)^i} + G_1$ et a n'est pas un pôle de G_1 alors

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i (X-a)^{n-i}}{(X-a)^n} + G_1 \tag{19.93}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X-a)^{n-i}}{(X-a)^n} + G_1 \tag{19.94}$$

avec $\deg\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X-a)^{n-i}\right) \leq n - 1 < n$. D'après l'unicité du lemme, on a forcèment

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X-a)^{n-i}, G_1\right) = (R, G)_{\text{lemme}} \tag{19.95}$$

De plus $(1, X-a, \ldots, (X-a)^{n-1})$ est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. L'unicité de R entraîne l'unicité de ses coordonnées $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ dans cette base. □

Existence. D'après le lemme, il existe $(R, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que

$$\begin{cases} F = \frac{R}{(X-a)^n} + G \\ \deg(R) < n \\ a \notin \mathcal{P}_G \end{cases} \tag{19.96}$$

Comme $R \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ et que $(1, X-a, \ldots, (X-a)^{n-1})$ en ait une base, il existe $(\beta_0, \ldots, \beta_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$R = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k (X-a)^k. \tag{19.97}$$

Ainsi, la fraction rationnelle s'écrit

$$F = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \beta_k (X-a)^k}{(X-a)^n} + G \tag{19.98}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\beta_k}{(X-a)^{n-k}} + G \tag{19.99}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_{n-i}}{(X-a)^i} + G. \tag{19.100}$$

Posons pour tout naturel $i \in [\![1\,;n]\!]$ $\alpha_i = \beta_{n-i}$ donc

$$F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(X-a)^i} + G \tag{19.101}$$

□

19.2.2.2 Détermination pratique de la partie polaire

Cas d'un pôle simple (d'ordre 1) Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $a \in \mathcal{P}_F$ d'ordre 1. Le théorème affirme que

$$\exists!(\alpha, G) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}(X) \quad \begin{cases} F = \frac{\alpha}{X-a} + G \\ a \notin \mathcal{P}_G \end{cases}. \tag{19.102}$$

Alors

$$(X-a)F = \alpha + (X-a)G \tag{19.103}$$

et comme a n'est pas un pôle de G alors ce n'est pas un pôle de $(X-a)G$. a est un pôle de F d'ordre 1 alors ce n'est pas un pôle de $(X-a)F$. On peut prendre la valeur en a de la dernière équation :

$$\widetilde{(X-a)F}(a) = \alpha \tag{19.104}$$

Autres expressions de α : Posons $F = \frac{A}{B}$ irréductible. Alors il existe un polynôme $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = (X-a)C$ avec $C(a) \neq 0$. D'après l'équation (**??**), on a $\alpha = \widetilde{(X-a)F}(a) = \widetilde{\left(\frac{A}{C}\right)}(a)$. C'est-à-dire

$$\alpha = \frac{A(a)}{C(a)}. \tag{19.105}$$

On peut dériver l'expression de B : $B' = C + (X-a)C'$ et trouver que $B'(a) = C(a)$, alors :

$$\alpha = \frac{A(a)}{B'(a)}. \tag{19.106}$$

Calcul de α_n pour un pôle d'ordre n Soient $F \in \mathbb{K}(X)$, $a \in \mathbb{K}$ un pôle de F d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 19.7. *Il existe un unique n-uplet de scalaires $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et une unique fraction rationelle $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que*

$$\begin{cases} F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{(X-a)^i} + G \\ a \notin \mathcal{P}_G \end{cases} \tag{19.107}$$

Auquel cas,

$$(X-a)^n F = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (X-a)^{n-i} + (X-a)^n G. \tag{19.108}$$

Comme a est un pôle de F d'ordre n, alors ce n'est pas un pôle de $(X-a)^n F$. Ce n'est pas non plus un pôle de G, alors ce n'est pas un pôle de $(X-a)^n G$. On prend la valeur en a de la dernière équation :

$$\widetilde{(X-a)^n F}(a) = \alpha_n. \tag{19.109}$$

Autres expressions de α_n : Notons $F = \frac{A}{B}$ irréductible. Il existe alors un polynôme $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = (X-a)^n C$ avec $C(a) \neq 0$. Alors $F = \frac{A}{B} = \frac{A}{(X-a)^n C}$, $\alpha_n = \widetilde{(X-a)^n F}(a) = \widetilde{\left(\frac{A}{C}\right)}(a)$. C'est-à-dire

$$\alpha_n = \frac{A(a)}{C(a)} \tag{19.110}$$

On peut dériver B n fois et d'après la formule de Leibniz on a

$$B^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!}(X-a)^{n-k}C^{(n-k)} \tag{19.111}$$

La valeur en a vaut donc $B^{(n)}(a) = n!C(a)$, et ainsi

$$\alpha_n = \frac{n!A(a)}{B^{(n)}(a)} \tag{19.112}$$

Cas d'un pôle double Soient $F \in \mathbb{K}(X)$, $a \in \mathbb{K}$ un pôle de F d'ordre 2. Il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ et une unique fraction rationelle $G \in \mathbb{K}(X)$ tels que

$$\begin{cases} F = \frac{\alpha}{(X-a)^2} + \frac{\beta}{X-a} + G \\ a \notin \mathcal{P}_G \end{cases} . \tag{19.113}$$

D'après le paragraphe précédent, on cnnaît $\alpha = \widetilde{(X-a)^2F}(a)$. Déterminons β.

Première méthode : Posons $H = F - \frac{\alpha}{(X-a)^2} = \frac{\beta}{X-a} + G$. Alors d'après le premier paragraphe, comme a est un pôle simple de H, $\beta = \widetilde{(X-a)H}(a)$.

Deuxième méthode : On sait que

$$(X-a)^2F = \alpha + \beta(X-a) + (X-a)^2G \tag{19.114}$$

En dérivant, on obtient

$$[(X-a)^2F]' = \beta + 2(X-a)G + (X-a)^2G'. \tag{19.115}$$

Le scalaire a n'est pas un poôle de G, donc se n'est pas un pôle de G'. Alors en appliquant cette formule en a, on obtient

$$\beta = [\widetilde{(X-a)^2F}]'(a) \tag{19.116}$$

Alors en synthétisant

$$\alpha = \widetilde{(X-a)^2F}(a) \quad \beta = [\widetilde{(X-a)^2F}]'(a) \tag{19.117}$$

Autres expressions de β :

Posons $F = \frac{A}{B} = \frac{A}{C(X-a)^2}$ irréductible et tel que $C(a) \neq 0$. On a déjà vu que $\alpha = \frac{A(a)}{C(a)} = \frac{2A(a)}{B''(a)}$. On a

$$(X-a)^2F = \frac{A}{C} \tag{19.118}$$

$$[(X-a)^2F]' = \frac{A'C - C'A}{C^2} \tag{19.119}$$

d'où $\beta = \frac{A'(a)C(a) - C'(a)A(a)}{C(a)^2}$ et en dérivant trois fois :

$$B = (X-a)^2C \tag{19.120}$$

$$B' = 2(X-a)C + (X-a)^2C' \tag{19.121}$$

$$B'' = 2C + 4(X-a)C' + (X-a)^2C'' \tag{19.122}$$

$$B^{(3)} = 6C' + 6(X-a)C'' + (X-a)^2C^{(3)} \tag{19.123}$$

et en prenant la valeur en a : $C(a) = \frac{B''(a)}{2}$ et $C'(a) = \frac{B^{(3)}}{6}$. Ainsi

$$\beta = \frac{A'(a)\frac{B''(a)}{2} - A(a)\frac{B^{(3)}(a)}{6}}{\frac{B''(a)^2}{4}} \tag{19.124}$$

$$= \frac{2A'(a)B''(a) - \frac{2}{3}A(a)B^{(3)}(a)}{B''(a)^2} \tag{19.125}$$

19.2.3 Décomposition en éléments simples d'une fraction rationelle

Définition 19.10. On appelle élément simple sur le corps $\mathbb{K}$ toute fonction fraction rationelle de la forme :

$$F = \frac{R}{P^j} \quad (R, P, j) \in \mathbb{K}[X]^2 \times \mathbb{N}^* \tag{19.126}$$

tels que P est irréductible sur le corps $\mathbb{K}$, $\deg(R) < \deg(P)$. Si $\deg(P) = m$ alors F est di de m^{e}espèce.

Exemples :

1. Sur $\mathbb{C}$, les polynômes irréductibles sont les polynôme de degré 1. Les éléments simples sont tous de première espèce. Ce sont les

$$\frac{\alpha}{(X-a)^j} \quad (\alpha, a, j) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}^* \tag{19.127}$$

2. Sur $\mathbb{R}$, les polynômes irréductibles sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif. On dispose donc :
   — des éléments simples de 1^{re}espèce $\frac{\alpha}{(X-a)^j}$ où $(\alpha, a, j) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^*$;
   — des éléments simples de 2^{e}espèce $\frac{\alpha X+\beta}{(X^2+pX+q)^j}$ où $(\alpha, \beta, p, q, j) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{N}^*$ et $p^2 < 4q$.

Théorème 19.8 (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$)**.** *Toute fraction rationelle F de $\mathbb{C}(X)$ se décompose de façon unique en la somme d'un polynôme et d'éléments simples.*

Plus précisèment, si $F = \frac{A}{\prod_{i=1}^n (X-a_i)^{k_i}}$ avec $A \in \mathbb{K}[X]$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ deux à deux distincts et $(k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$ alors il existe de façon unique des complexes $\alpha_{i,j}$ et un polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X-a_i)^j}. \tag{19.128}$$

Remarque : On ne suppose pas que F est sous forme irréductible. Si a_i n'est pas un pôle, alors les $a_{i,j}$ correspondants sont nuls.

Unicité. E est nécessairement la partie entière de la fraction rationelle F. Si on note, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$

$$P_i = \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X-a_i)^j} \tag{19.129}$$

alors $F - P_i$ n'admet pas a_i pour pôle. Deux cas se présentent :

1. Si a_i est un pôle de F, $F = P_i + (F - P_i)$. Alors P_i est forcèment la partie polaire de F relative au pôle a_i. D'où l'unicité des $\alpha_{i,j}$;
2. Si a_i n'est pas un pôle de F, alors tous les $\alpha_{i,j}$ doivent être nuls car sinon a_i serait un pôle.

Dans les deux cas, les $\alpha_{i,j}$ sont uniquement déterminés. □

Existence. Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. Si a_i est un pôle de F, on pose $P_i = \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X-a_i)^j}$ la partie polaire de F relative à a_i, (k_i est l'ordre du pôle a_i). Si a_i n'est pas un pôle on pose $P_i = 0 = \sum_{j=1}^{k_i} \frac{0}{(X-a_i)^j}$.

$E = F - \sum_{i=1}^{n} P_i$ est une fraction rationelle et elle n'admet pour pôle aucun des a_i. Donc E n'admet aucun pôle. Soit (P, Q) une forme irréductible de E, alors Q n'admet pas de racines. C'est donc un polynôme constant non nul ($Q \in \mathbb{C}[X]$). Alors E est un polynôme. □

Cette décomposition s'appelle la Décomposition en Éléments Simples (DES) de la fraction rationelle F.

19.2.4 Pratique de la DES dans $\mathbb{C}[X]$

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ tel que $F = \frac{A}{B}$ avec $(A, B) \in \mathbb{C}[X]^2$ et B non nul.

1. Trouver la partie entière de F
2. Factoriser B sous la forme
$$B = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{k_i} \quad \lambda \in \mathbb{C}^* \tag{19.130}$$
$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts et $k_1, \dots, k_n$ des naturels tous non nuls
3. Écrire la DES a priori, il existe de façon unique des complexes $\alpha_{i,j}$ tels que
$$F = E + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - a_i)^j} \tag{19.131}$$
4. Il reste à calculer tous les coefficents $\alpha_{i,j}$:
   — On a vu des formules pour les pôles simples, pôles doubles, ...
   — On peut aussi utiliser les particularités de F. Par exemple si F est paire ou impaire, on obtient des relations entre les coefficients en utilisant $F(-X) = \pm F(X)$ et l'unicité de la DES.

   Exemple :
$$F = \frac{1}{X^2 + 1} = \frac{1}{(X - \mathrm{i})(X + \mathrm{i})} \tag{19.132}$$
   Il existe un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ tel que $F = \frac{\alpha}{X-\mathrm{i}} + \frac{\beta}{X+\mathrm{i}}$.
   F est paire : $F(-X) = F(X) = \frac{-\beta}{X-\mathrm{i}} + \frac{-\alpha}{X+\mathrm{i}}$. alors par unicité de la DES : $\beta = -\alpha$. On a qu'un seul coefficient à trouver :
$$\alpha = \widetilde{(X - \mathrm{i})F}(\mathrm{i}) = \frac{1}{2\,\mathrm{i}} = -\frac{\mathrm{i}}{2} \tag{19.133}$$

donc $\beta = \frac{i}{2}$. Finalement

$$F = \frac{-\mathrm{i}/2}{X-i} + \frac{\mathrm{i}/2}{X+\mathrm{i}} \tag{19.134}$$

Cette méthode fonctionne aussi avec des relations du genre $F(\mathrm{i}\,X) = F(X)$ ou autre.

5. S'il reste peu de coefficients à calculer on peut prendre des valeurs de la fonction rationelle associée à F pour obtenir des équations
6. On peut également utiliser des limites de la fonction rationelle associée à F en $\pm\infty$, lorsqu'elles existent.

Fraction rationelle à coefficients réels

Si $F \in \mathbb{R}(X)$, on utilise que $\overline{F} = F$ pour obtenir des relations entre les coefficients. Si $a \in \mathbb{C}$ est un pôle de F, alors $\overline{A}$ est aussi un pôle du même ordre.

Exemple : $F = \frac{1}{(X-3)(X^2+1)^2}$, alors la partie entière est nulle et

$$F = \frac{1}{(X-3)(X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2} \tag{19.135}$$

Il existe alors de façon unique cinq complexes $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et ϵ tels que

$$F = \frac{\alpha}{X-3} + \frac{\beta}{X-\mathrm{i}} + \frac{\gamma}{(X-\mathrm{i})^2} + \frac{\delta}{X+\mathrm{i}} + \frac{\epsilon}{(X+\mathrm{i})^2} \tag{19.136}$$

Alors

$$\alpha = \widetilde{(X-3)F}(3) = \frac{1}{(1+3^2)^2} = \frac{1}{100} \tag{19.137}$$

$$\gamma = \widetilde{(X-\mathrm{i})^2F}(\mathrm{i}) = \frac{1}{(\mathrm{i}-3)(\mathrm{i}+\mathrm{i})^2} = \frac{3+\mathrm{i}}{40}. \tag{19.138}$$

Comme $F \in \mathbb{R}[X]$ alors $\overline{F} = F$ et donc

$$\overline{F} = \frac{\overline{\alpha}}{X-3} + \frac{\overline{\beta}}{X+\mathrm{i}} + + \frac{\overline{\gamma}}{(X+\mathrm{i})^2} + \frac{\overline{\delta}}{X-\mathrm{i}} + \frac{\overline{\epsilon}}{(X-\mathrm{i})^2} \tag{19.139}$$

et par unicité

$$\alpha = \overline{\alpha} \tag{19.140}$$

$$\overline{\beta} = \delta \tag{19.141}$$

$$\overline{\gamma} = \epsilon \tag{19.142}$$

d'où $\epsilon = \frac{3-\mathrm{i}}{40}$. Il ne reste qu'un coefficient à trouver.

Valeur en zéro

$$F(0) = -\frac{1}{3} \tag{19.143}$$

$$-\frac{99}{300} = \mathrm{i}(\beta - \overline{\beta}) - \frac{3}{20} \tag{19.144}$$

$$\beta - \overline{\beta} = \frac{9}{50}\,\mathrm{i} \tag{19.145}$$

Limite

$$0 = \lim_{+\infty} \widetilde{XF(X)} = \alpha + \beta + \delta \tag{19.146}$$

d'où $\beta + \overline{\beta} = -\frac{1}{100}$. Alors $\beta = \frac{-1}{200} + \frac{9}{100}\,\mathrm{i}$. Finalement :

$$\begin{aligned}F =& \frac{-1}{100(X-3)} + \left(\frac{-1}{200} + \frac{9}{100}\,\mathrm{i}\right)\frac{1}{X-\mathrm{i}} + \left(\frac{3+\mathrm{i}}{40}\right)\frac{1}{(X-\mathrm{i})^2} && (19.147)\\ &+ \left(\frac{-1}{200} - \frac{9}{100}\,\mathrm{i}\right)\frac{1}{X+\mathrm{i}} + \left(\frac{3-\mathrm{i}}{40}\right)\frac{1}{(X+\mathrm{i})^2} && (19.148)\end{aligned}$$

DES sur $\mathbb{R}[X]$

$$F = \frac{1}{(X-3)(X-\mathrm{i})^2(X+\mathrm{i})^2} \tag{19.149}$$

Il existe alors de façon unique cinq réels a, b, c, d et e tels que

$$F = \frac{a}{X-3} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{cX+e}{(X^2+1)^2} \tag{19.150}$$

De la même manière, on trouve $a = \frac{1}{100}$. On a

$$\frac{1}{X-3} = (X^2+1)^2 F = \frac{a(X^2+1)^2}{X-3} + (bX+c)(X^2+1) + dX + e \tag{19.151}$$

en prenant les valeurs en i et en $-\mathrm{i}$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{i}-3} &= di + e && (19.152)\\ \frac{1}{-\mathrm{i}-3} &= -di + e && (19.153)\end{aligned}$$

alors $2e = -\frac{6}{10}$ et donc $e = -\frac{3}{10}$. Ensuite

$$\begin{aligned}d =& \frac{1}{\mathrm{i}}\left(\frac{1}{\mathrm{i}-3} - e\right) && (19.154)\\ =& -\frac{1}{10} && (19.155)\end{aligned}$$

en zéro on a

$$F(0) = -\frac{1}{3} = -\frac{1}{300} + c + e \tag{19.156}$$

alors $c = -\frac{3}{100}$. En l'infini on a

$$\lim_{+\infty} \widetilde{XF(X)} = 0 = a + b \tag{19.157}$$

d'où $b = -\frac{1}{100}$.

19.2.5 Exemple classique DES de $\frac{P'}{P}$ lorsque $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$

Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}$, $\deg(P) \geq 1$. Le polynôme P est scindé donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des complexes deux à deux distincts, $k_1, \ldots, k_n$ des entiers naturels non nuls et un complexe non nul λ tels que

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{k_i} \tag{19.158}$$

Comme $\deg(P) \geq 1$, on a $\deg(P') = \deg(P) - 1$. Alors $\deg\left(\frac{P'}{P}\right) = -1 < 0$. La partie entière de $fracP'P$ est nulle. Il existe de façon unique des complexes $\alpha_{i,j}$ tels que

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{\alpha_{i,j}}{(X - a_i)^j}. \tag{19.159}$$

Dérivons P :

$$P' = \lambda \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)^{k_j} (X - a_i)^{k_i - 1} k_i \tag{19.160}$$

Alors

$$\frac{P'}{P} = \frac{\lambda \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)^{k_j} (X - a_i)^{k_i - 1} k_i}{\lambda \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{k_i}} \tag{19.161}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\prod_{j \in [\![1;n]\!] \setminus \{i\}} (X - a_j)^{k_j} (X - a_i)^{k_i - 1} k_i}{\prod_{i=1}^{n} (X - a_i)^{k_i}} \right) \tag{19.162}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i (X - a_i)^{k_i - 1}}{(X - a_i)^{k_i}} \tag{19.163}$$

$$\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{X - a_i} \tag{19.164}$$

Chapitre 20

Intégration sur un segment des fonctions à valeur réelles

Sommaire

20.1 Fonctions en escalier, continues par morceaux

Soient deux réels a et b tel que $a < b$ et deux naturels n et m tous les deux non nuls. On travaille dans cette section sur le segment $[a\,;b]$.

20.1.1 Subdivision d'un segment

Définition 20.1. On appelle subdivision du segment $[a\,;b]$ toute famille finie $(a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ de $n+1$ points de $[a\,;b]$ telle que :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = b \\ \forall i \in [\![0\,;n]\!] \quad a_i < a_{i+1} \end{cases}. \tag{20.1}$$

Le réels a_i sont appelés les points de la subdivision. Les intervalles ouverts $]a_i\,;a_{i+1}[$ sont appelés les intervalles ouverts de la subdivision.

Définition 20.2. Soit $\sigma = (a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ une subdivision du segment $[a\,;b]$. on définit un réel appelé le pas de la subdivision, noté $\delta(\sigma)$ par :

$$\delta(\sigma) = \max_{0\leq i\leq n-1}(a_{i+1} - a_i) \tag{20.2}$$

Exemple fondamental : Soit une subdivison $\sigma = (a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ de $[a\,;b]$ à $n+1$ points telle que :

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!] \quad a_k = a + k\frac{b-a}{n}. \tag{20.3}$$

σ est une subdivion régulière de $[a\,;b]$. Tous les intervalles de la subdivision ont la même longueur. Le pas de cette subdivision vaut $\delta(\sigma) = \frac{b-a}{n}$.

Définition 20.3. Soient $\sigma = (a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ et $\sigma' = (b_i)_{i\in[\![0;m]\!]}$ deux subdivisions de $[a\,;b]$. On dit que σ' est plus fine que σ si et seulement si

$$[\![a_0\,;a_n]\!] \subset [\![b_0\,;b_m]\!]. \tag{20.4}$$

On peut montrer que la relation “être plus fine que” est une relation d'ordre sur l'ensemble des subdivisions de $[a\,;b]$. Ce n'est pas un ordre total.

La subdivision (a, b) est la moins fine de toutes les subdivisions. Mais il n'y a pas pas de subdivision plus fine que toutes les autres.

Si σ' est plus fine que σ, alors le pas $\delta(\sigma')$ est inférieur ou égal au pas $\delta(\sigma)$. La réciproque est fausse.

Supposons qu'on ait $\sigma = (0, 1/2, 1)$ et $\sigma' = (0, 1/3, 2/3, 1)$ alors $\delta(\sigma') < \delta(\sigma)$ mais comme $1/2 \notin \sigma'$ on ne peut pas dire que σ' est plus fine que σ.

20.1.2 Fonctions en escalier

20.1.2.1 Définitions

Définition 20.4. Soit $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$. On dit que f est en escalier sur $[a\,;b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ telle que f soit constante sur tous les intervalles ouverts de la subdivision. On note $\mathcal{E}([a\,;b])$ l'ensemble des fonction en escalier sur $[a\,;b]$.

Il est à noter que la fonction f est définie en tout point a_i de la subdivision, mais qu'elle n'est pas forcèment continue en ces points.

Définition 20.5. Soit $f \in \mathcal{E}([a\,;b])$. Toute subdivision du segment $\sigma = (a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$, telle que f soit constante sur tous les intervalles ouverts de σ, est appelée une subdivision adaptée à la fonction f.

Remarque :

1. Si $f \in \mathcal{E}([a\,;b])$ et si σ est une subdivision adaptée à f, alors toute subdivision σ' de $[a\,;b]$ plus fine que σ est encore adaptée à f ;
2. les fonctions constantes sur $[a\,;b]$ sont en escalier et toutes les subdivisions de $[a\,;b]$ leurs sont adaptées.

20.1.2.2 Premières propriétés

On peut avoir besoin de construire une subdivision adaptée à la fois à deux fonctions f et g.

Soient $\sigma = (a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ et $\sigma' = (b_i)_{i\in[\![0;m]\!]}$ deux subdivisions de $[a\,;b]$. On note $A(\sigma)$ (resp. $A(\sigma')$) l'ensemble des points de σ (resp. σ'). Il existe une unique subdivision s de $[a\,;b]$ telle que $A(s) = A(\sigma)\cup A(\sigma')$. La subdivision s est appelée la réunion de σ et σ'. Elle st plus fine que σ et σ'. Si $(f, g) \in \mathcal{E}([a\,;b])^2$ sont telles que :

— σ est adpatée à f ;

— σ' est adpatée à g ;

alors s est adaptée à f et à g.

Proposition 20.1. L'ensemble $\mathcal{E}([a\,;b])$ est un sous espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{[a\,;b]}$.

Démonstration. Par définition, $\mathcal{E}([a\,;b]) \subset \mathbb{R}^{[a\,;b]}$. Ensuite il est non vide puisqu'il contient les fonctions constantes. Soient f et g dans $\mathcal{E}([a\,;b])$ et un réel λ. Soient σ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f et σ' une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à g. Notons s la réunion de ces dex subdivisions. On pose $s = (a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$, elle est adaptée à f et à g donc f et g sont constantes sur tous les intervalles $]a_i\,; a_{i+1}[$. Par conséquent, $\lambda f + g$ est constante sur tous les intervalles $]a_i\,; a_{i+1}[$. Donc $\lambda f + g$ est une fonction en escalier et s est une subdivision adaptée à $\lambda f + g$. □

Proposition 20.2. Si $f \in \mathcal{E}([a\,;b])$ alors $|f| \in \mathcal{E}([a\,;b])$.

Démonstration. Soit $\sigma = (a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ une subdivision adpaptée à f. Alors pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$ f est constante sur $]a_i\,; a_{i+1}[$. Donc $|f|$ est constante sur sur $]a_i\,; a_{i+1}[$. Alors $|f|$ est une fonction en escalier. □

20.1.3 Fonctions continues par morceaux

20.1.3.1 Définitions

Définition 20.6. Soit $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$, on dit que f est continue par morceaux sur $[a\,;b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ telle que :

— $\forall i \in [\![0\,;n-1]\!]$ f est continue sur l'intervalle ouvert $]a_i\,;a_{i+1}[$
— $\forall i \in [\![0\,;n-1]\!]$ la restriction de f à l'intervalle ouvert $]a_i\,;a_{i+1}[$ admet une limite finie à gauche en a_{i+1} et à droite en a_i.

Une telle subdivision sera dite adaptée à f.

Il est à noter que f est définie en tous les a_i mais n'est pas a priori continue en les a_i. On note $\mathcal{CM}([a\,;b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b]$.

Les fonctions continues sur $[a\,;b]$ sont continues par morceaux sur $[a\,;b]$ et toute subdivision du segment $[a\,;b]$ leur est adaptée. Toute subdivision plus fine est encore adaptée.

20.1.3.2 Premières propriétés

Proposition 20.3. Les fonctions en escalier sur $[a\,;b]$ sont continues par morceaux sur $[a\,;b]$. C'est-à-dire $\mathcal{E}([a\,;b]) \subset \mathcal{CM}([a\,;b])$.

Démonstration. C'est clair. Soit f une fonction en escalier. Alors il existe une subdivison $(a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ telle que f soit constante donc continue sur tous les intervalles ouverts $]a_i\,;a_{i+1}[$. □

Proposition 20.4. Les fonctions continues par morceaux sur $[a\,;b]$ sont bornées sur $[a\,;b]$. C'est-à-dire $\mathcal{CM}([a\,;b]) \subset \mathcal{B}([a\,;b])$.

Démonstration. Soit une fonction $f \in \mathcal{CM}([a\,;b])$ et $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f. Alors pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $f_{|]a_i\,;a_{i+1}[}$ est continue et admet des limites finies à droite en a_i et à gauche en a_{i+1}. On définit le prolongement par contniuité g_i de $f_{|]a_i\,;a_{i+1}[}$ à l'intervalle fermé $[a_i\,;a_{i+1}]$. Alors g_i est continue sur le segment $[a_i\,;a_{i+1}]$ donc bornée (d'après le théorème des bornes). Il existe alors $M_i \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in [a_i\,;a_{i+1}]$ on ait $|g_i(x)| \leq M_i$. D'où

$$\forall x \in\,]a_i\,;a_{i+1}[\quad |f(x)| = |g_i(x)| \leq M_i. \tag{20.5}$$

Soit $M = \max\limits_{0\leq i\leq n-1} M_i$ et $N = \max\limits_{0\leq i\leq n-1} |f(a_i)|$. Alors $\max(M, N)$ est un majorant de $|f|$.

La fonction f est alors bornée. □

Proposition 20.5. $\mathcal{CM}([a\,;b])$ est un sous espace du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^{[a\,;b]}$.

Démonstration. Par définition, $\mathcal{CM}([a\,;b]) \subset \mathbb{R}^{[a\,;b]}$. Ensuite $\mathcal{CM}([a\,;b])$ est non vide puisqu'il contient $\mathcal{C}([a\,;b])$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux et un réel λ. Soient σ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f et σ' une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à g. Soit s la réunion de σ et de σ'. Elle est plus fine que σ et que σ' donc elle est adaptée à f et à g. On note $s = (a_i)_{0\leq i\leq n}$. Pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ f et g sont continues sur $]a_i\,;a_{i+1}[$ donc $\lambda f + g$ l'est aussi. De plus pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ $f_{|]a_i\,;a_{i+1}[}$ et $g_{|]a_i\,;a_{i+1}[}$ admettent des limites finies à droite en a_i et à gauche en a_{i+1} alors $(\lambda f + g)_{|]a_i\,;a_{i+1}[}$ admet des limites finies à droite en a_i et à gauche en a_{i+1}.

La fonction $\lambda f + g$ est donc continue par morceaux et s est une subdivision adpatée. Par caractérisation, $\mathcal{CM}([a\,;b])$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^{[a\,;b]}$. □

Proposition 20.6.

$$\forall f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]} \quad f \in \mathcal{CM}([a\,;b]) \implies |f| \in \mathcal{CM}([a\,;b]) \tag{20.6}$$

20.1.4 Approximation d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier

Théorème 20.1. *Soit $f \in \mathcal{CM}([a\,;b])$, alors*

$$\forall \epsilon \geq 0\ \exists (\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a\,;b])^2 \quad \begin{cases} \varphi \leq f \leq \psi \\ \psi - \varphi \leq \tilde{\epsilon} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} [a\,;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \epsilon \end{array} \right. \end{cases}. \tag{20.7}$$

Démonstration : Première étape. On démontre le théorème dans le cas où f est continue. D'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a\,;b]$. C'est-à-dire

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall (x, x') \in [a\,;b]^2 \quad |x - x'| \leq \eta \implies |f(x) - f(x')| \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{20.8}$$

Soit un naturel n non nul tel que $\frac{b-a}{n} \leq \eta$ et pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$ on pose $a_k = a_0 + k\frac{b-a}{n}$. La subdivision $\sigma = (a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est régulière de $[a\,;b]$ à $n+1$ points. On définit g en escalier sur $[a\,;b]$ par :

$$\forall k \in [\![0\,;n]\!]\ \forall x \in [a_k\,;a_{k+1}[\quad g(x) = f(a_k), \tag{20.9}$$

et $g(b) = f(a_n) = f(b)$. La fonction g est bien en escalier. De plus pour tout $x \in [a\,;b[$ il existe un unique $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $x \in [a_k\,;a_{k+1}[$. Alors

$$|g(x) - f(x)| = |f(a_k) - f(x)|, \tag{20.10}$$

or $|x - a_k| \leq |a_{k+1} - a_k| \leq \frac{b-a}{n} \leq \eta$. D'où

$$|g(x) - f(x)| = |f(a_k) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{20.11}$$

et $|g(b) - f(b)| = 0 \leq \frac{\epsilon}{2}$. Alors

$$\forall x \in [a\,;b] \quad |g(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{20.12}$$

Soient les fonctions $\psi = g + \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$ et $\varphi = g - \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$. Comme g est en escalier et les fonctions constantes aussi alors ψ et φ sont en escalier ($\mathcal{E}([a\,;b])$ est un espace vectoriel). On a bien

$$\begin{cases} \varphi \leq f \leq \psi \\ \psi - \varphi = \tilde{\epsilon} \end{cases}. \tag{20.13}$$

On a démontré le théorème dans le cas où f est continue. □

Démonstration : Deuxième étape. On revient au cas général. On suppose que f est continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Soit $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq m}$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f. Soit $i \in [\![0\,;m-1]\!]$, alors :

— $f_{|]\alpha_i\,;\alpha_{i+1}[}$ est continue
— f admet une limite finie à droite en chacun des a_i
— f admet une limite finie à gauche en chacun des a_{i+1}

On peut alors définir le prolongement par continuité de $f_{|]a_i\,;a_{i+1}[}$ à $[a_i\,;a_{i+1}]$ noté f_i.

La fonction f_i est continue sur $[a_i\,;a_{i+1}]$ donc il existe une fonction en escalier g_i sur $[a_i\,;a_{i+1}]$ telle que :

$$\forall x \in [a_i\,;a_{i+1}] \quad |f_i(x) - g_i(x)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{20.14}$$

On définit la fonction g par : $g(a_i) = f(a_i)$ et

$$\forall x \in \left]a_i\,;a_{i+1}\right[\quad g(x) = g_i(x). \tag{20.15}$$

Alors g est en escalier. De plus

$$\forall x \in [a\,;b] \quad |g(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} \tag{20.16}$$

Soient les fonctions $\psi = g + \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$ et $\varphi = g - \frac{\tilde{\epsilon}}{2}$. Comme g est en escalier et les fonctions constantes aussi alors ψ et φ sont en escalier ($\mathcal{E}([a\,;b])$ est un espace vectoriel). On a bien

$$\begin{cases} \varphi \leq f \leq \psi \\ \psi - \varphi = \tilde{\epsilon} \end{cases}. \tag{20.17}$$

□

20.2 Intégrale d'une fonction en escalier

20.2.1 Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier

Théorème 20.2. *Soit $f \in \mathcal{E}([a\,;b])$ et soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f. Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ une famille de fonctions constantes de f sur les intervalles ouverts $]a_{i-1}\,;a_i[$. Alors le réel*

$$I(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (a_i - a_{i-1})\lambda_i \tag{20.18}$$

est indépendant du choix de la subdivision σ adaptée à f.

Définition 20.7. Soit $f \in \mathcal{E}([a\,;b])$. On définit un réel appelé intégrale de f sur $[a\,;b]$ et noté $\int_{[a\,;b]} f$ ou $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ par

$$\int_a^b f = I(f,\sigma) \tag{20.19}$$

pour toute subdivision σ adaptée à f.

Démonstration. Soient σ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f et $c \in [a\,;b]$. Soit $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$. Il existe $i_0 \in [\![0\,;n]\!]$ tel que $c \in [a_{i_0}\,;a_{i_0+1}]$.

— Si $c = a_{i_0}$ ou $c = a_{i_0+1}$ alors $\sigma = \sigma'$ et donc $I(f,\sigma') = I(f,\sigma)$;

— sinon alors $c \in]a_{i_0}\,;a_{i_0+1}[$. la subdivision σ' est plus fine que σ et alors

$$\sigma = (a_0, \ldots, a_n) \tag{20.20}$$

$$\sigma' = (a_0, \ldots, a_{i_0}, c, a_{i_0+1}, \ldots, a_n), \tag{20.21}$$

donc

$$I(f,\sigma') = \sum_{i=1}^{i_0}(a_i - a_{i-1})\lambda_i + (c - a_{i_0})\lambda_{i_0+1} + (a_{i_0+1} - c)\lambda_{i_0+1} + \sum_{i=i_0+1}^{n}(a_i - a_{i-1})\lambda_i, \tag{20.22}$$

et finalement en retranchant

$$I(f,\sigma') - I(f,\sigma) = (a_{i_0+1} - a_{i_0})\lambda_{i_0+1} - (c - a_{i_0})\lambda_{i_0+1} - (a_{i_0+1} - c)\lambda_{i_0+1} \tag{20.23}$$

$$= 0. \tag{20.24}$$

On en déduit alors par récurrence "immédiate" que si on rajoute un nombre fini de points à σ pour former une subdivision σ' alors $I(f,\sigma') = I(f,\sigma)$. Toute subdivision σ' plus fine que σ vérifie $I(f,\sigma') = I(f,\sigma)$.

Soient σ et σ' deux subdivisions quelconque adaptées à f. Soit s la réunion de σ et de σ'. Alors s est adaptée à f et est plus fine que σ : $I(f,s) = I(f,\sigma)$. La subdivision s est adaptée à f et est plus fine que σ' : $I(f,s) = I(f,\sigma')$. Par conséquent $I(f,\sigma') = I(f,\sigma)$. □

Remarque : La valeur de $I(f,\sigma)$ ne dépend pas de la valeur de f en les points de la subdivision. En particulier si $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$ est nulle sauf en un nombre fini de points alors f est en escalier sur $[a\,;b]$ et $\int_a^b f = 0$.

Proposition 20.7. Soit $f \in \mathcal{E}([a\,;b])$ et $g \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$ telles que f et g ne différent qu'un un nombre fini de points. Alors g est également en escalier sur $[a\,;b]$ et

$$\int_a^b f = \int_a^b g. \tag{20.25}$$

En particulier, une fonction constante égale à $k \in \mathbb{R}$ sur $[a\,;b]$ suauf en un nombre fini de points est en escalier sur $[a\,;b]$ et

$$\int_a^b f = k(b-a). \tag{20.26}$$

Démonstration. Soit σ une subdivision adaptée à f. On rajoute à σ les points de $[a\,;b]$ où f et g différents. On obtient alors une subdivision σ' plus fine que σ et donc adaptée à f.

On note $\sigma' = (a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ et sur chaque intervalle $]a_i\,;a_{i+1}[$ g est égale à f, donc elle est constante. Ainsi g est en escalier et σ' est adaptée à g.

$$\int_a^b f = I(f,\sigma') = I(g,\sigma') = \int_a^b g \tag{20.27}$$

□

20.2.2 Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier

20.2.2.1 Additivité par rapport aux intervalles

Proposition 20.8. Soit $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$ et $c \in [a\,;b]$, alors

$$f \in \mathcal{E}([a\,;b]) \iff f_{|[a\,;c]} \in \mathcal{E}([a\,;c]) \text{ et } f_{|[c\,;b]} \in \mathcal{E}([c\,;b]). \tag{20.28}$$

Auquel cas

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{20.29}$$

Démonstration. Supposons que $f \in \mathcal{E}([a\,;b])$. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f. soit σ' la subdivision obtenue en ajoutant c à σ. Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ la famille des valeurs constantes de f sur σ'. On note σ'_1 (resp. σ'_2) les restrictions de σ' à $[a\,;c]$ (resp. $[c\,;b]$). La fonction $f_{|[a\,;c]}$ (resp. $f_{|intervalleffcb}$) est constante sur les intervalles ouverts de σ'_1 (resp. σ'_2). Alors ces deux fonctions sont en escaliers.

$$\int_a^c f_{|[a\,;c]} + \int_c^b f_{|[c\,;b]} = I(f_{|[a\,;c]}, \sigma'_1) + I(f_{|[c\,;b]}, \sigma'_2) \tag{20.30}$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0-1}(a_i - a_{i-1})\lambda_i + (c - a_{i_0-1})\lambda_{i_0} + (a_{i_0} - c)\lambda_{i_0} + \sum_{i=i_0+1}^{n}(a_i - a_{i-1})\lambda_i \tag{20.31}$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0-1}(a_i - a_{i-1})\lambda_i + \lambda_{i_0}(a_{i_0} - a_{i_0-1}) + \sum_{i=i_0+1}^{n}(a_i - a_{i-1})\lambda_i \tag{20.32}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\lambda_i \tag{20.33}$$

$$= I(f, \sigma) = \int_a^b f \tag{20.34}$$

Supposons désormais que $f_{|[a\,;c]} \in \mathcal{E}([a\,;c])$ et $f_{|[c\,;b]} \in \mathcal{E}([c\,;b])$. Soient $\sigma = (a_i)_{i\in[\![0;n]\!]}$ et $\sigma' = (a_i)_{i\in[\![m;n]\!]}$ deux subdivisions respectives de $[a\,;c]$ et $[c\,;b]$ respectivement adaptées à $f_{|[a\,;c]}$ et $f_{|[c\,;b]}$. Soit s la réunion de σ et σ'. La fonction f est constante sur tous les intervalles ouverts de s donc f est en escalier sur $[a\,;b]$. De la même manière on montre que $\int_a^c f_{|[a\,;c]} + \int_c^b f_{|[c\,;b]} = \int_a^b f$. □

20.2.2.2 Linéarité par rapport aux fonctions

On a vu que $\mathcal{E}([a\,;b])$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Théorème 20.3. *L'application* $\varphi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{E}([a\,;b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}\right.$ *est une forme linéaire. Autrement dit*

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall (f,g) \in \mathcal{E}([a\,;b])^2 \quad \int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g \tag{20.35}$$

Démonstration. Soient $(f,g) \in \mathcal{E}([a\,;b])^2$ et un réel λ. Soient σ et σ' deux subdivisions respectives de $[a\,;b]$ respectivement adaptées à f et à g. On considère la réunion $s = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ de σ et σ'. Alors s est adaptée à f et à g. Soient $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n}$ (resp. $(\beta_i)_{0\leq i\leq n}$) la famille des valeurs de f (resp. g) sur les intervalles ouverts $]a_{i-1}\,;a_i[$.

Alors $\lambda f + g$ est constante sur chaque intervalle ouvert $]a_{i-1}\,;a_i[$ égale à $\lambda\alpha_i + \beta_i$. Ainsi

$$I(\lambda f + g, s) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})(\lambda\alpha_i + \beta_i) \tag{20.36}$$

$$= \lambda\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\alpha_i + \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\beta_i \tag{20.37}$$

$$= \lambda I(f, s) + I(g, s) \tag{20.38}$$

d'où la linéarité de φ. □

20.2.2.3 Croissance

Proposition 20.9. Soient f et g en escalier sur $[a\,;b]$ telles que $f \leq g$. Alors

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g. \tag{20.39}$$

En particulier si $f \geq \tilde{0}$ alors $\int_a^b f \geq 0$.

Cependant on peut avoir $\int_a^b f \geq 0$ sans que $f \geq \tilde{0}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{E}([a\,;b])$ telle que $f \geq \tilde{0}$. Soit aussi $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f. Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ la la famille des valeurs de f sur les intervalles ouverts $]a_{i-1}\,;a_i[$. Puisque $f \geq 0$ alors pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$ on a $\lambda_i \geq 0$. Ainsi

$$\int_a^b f = I(f, \sigma) = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\lambda_i \geq 0 \tag{20.40}$$

Soit $(f, g) \in \mathcal{E}([a\,;b])^2$ telles que $f \leq g$. Comme $g - f$ est en escalaier et que $g - f \geq \tilde{0}$ d'après la première partie on a $\int_a^b g - f \geq 0$. Par linéarité de l'intégrale on a $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. □

20.2.2.4 Majoration

Proposition 20.10. Soit f en escalier sur $[a\,;b]$, alors $|f|$ est aussi en escalier sur $[a\,;b]$ et

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \tag{20.41}$$

Démonstration. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f. Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ la la famille des valeurs de f sur les intervalles ouverts $]a_{i-1}\,;a_i[$. Pour tout pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$ $|f|$ est constante égale à $|\lambda_i|$ sur $]a_{i-1}\,;a_i[$. Donc σ est adpatée à $|f|$ et

$$\int_a^b |f| = \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\,|\lambda_i|\,. \tag{20.42}$$

De plus

$$\left|\int_a^b f\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\lambda_i\right| \tag{20.43}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1})\,|\lambda_i| \tag{20.44}$$

puisque $a_{i-1} < a_i$. Donc on a bien la majoration

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,. \tag{20.45}$$

□

Corollaire 20.3.1.

$$\forall f \in \mathcal{E}([a\,;b]) \qquad \left|\int_a^b f\right| \leq (b-a)\sup_{[a\,;b]}|f|\,. \tag{20.46}$$

Démonstration. On a montré que les fonctions en escalier sur $[a\,;b]$, sont bornée. Alors la borne supérieure de $|f|$ (notée M) existe et grâce à la majoration

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b \tilde{M} = M(b-a). \tag{20.47}$$

□

20.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

20.3.1 Définition de l'intégrale

Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a\,;b]$. On définitles ensembles $\mathcal{E}^-(f) = \{\varphi \in \mathcal{E}([a\,;b]), \varphi \leq f\}$ et $\mathcal{E}^+(f) = \{\psi \in \mathcal{E}([a\,;b]), \psi \geq f\}$. La fonction f est bornée, donc il existe deux réels m et M tels que

$$\tilde{m} \leq f \leq \tilde{M}, \tag{20.48}$$

et comme ces fonctions sont en escalier, on a bien $\tilde{m} \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\tilde{M} \in \mathcal{E}^+(f)$. Les ensembles $\mathcal{E}^-(f)$ et $\mathcal{E}^+(f)$ sont non vides. On définit

$$I^-(f) = \left\{\int_a^b \varphi \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{E}^-(f)\right\}, \tag{20.49}$$

$$I^+(f) = \left\{\int_a^b \varphi \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{E}^+(f)\right\}. \tag{20.50}$$

Ces deux ensembles sont non vides puisque $\mathcal{E}^-(f)$ et $\mathcal{E}^+(f)$ sont non vides. Comme la fonction $\tilde{M}$ majore l'ensemble $\mathcal{E}^-(f)$, $I^-(f)$ est majoré par $M(b-a)$.

De la même manière comme la fonction $\tilde{m}$ minore l'ensemble $\mathcal{E}^-(f)$, $I^+(f)$ est minoré par $m(b-a)$. Finalement, $I^-(f)$ admet une borne supérieure notée S et $I^+(f)$ admet une borne inférieure notée I. Pour toutes fonctions $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$ on a

$$\varphi \leq f \leq \psi, \tag{20.51}$$

donc

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi. \tag{20.52}$$

Alors $\int_a^b \psi$ est un majorant de $I^-(f)$ alors$\int_a^b \psi \geq S$. De plus $\int_a^b \psi$ est un minorant de $I^-(f)$ d'où

$$S \leq I \tag{20.53}$$

Théorème 20.4. *En reprenant les notations, pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a\,;b]$, on a $S = I$.*

Démonstration. Supposons (par l'absurde) le contraire, c'est à dire que $S < I$. Soit alors $\epsilon = \frac{I-S}{2(b-a)} > 0$. Il existe un couple $(\varphi, \psi) \in \mathcal{E}([a\,;b])^2$ tel que

$$\begin{cases} \varphi \leq f \leq \psi \\ \psi - \varphi \leq \tilde{\epsilon}. \end{cases} \tag{20.54}$$

Alors $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ et $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$. D'où

$$\int_a^b \varphi \leq S \quad \int_a^b \psi \geq I. \tag{20.55}$$

D'une part on a

$$\int_a^b \psi - \varphi \leq \int_a^b \tilde{\epsilon} = \epsilon(a-b) = \frac{I-S}{2} \tag{20.56}$$

et d'autre part

$$\int_a^b \psi - \varphi = \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \geq I - S \tag{20.57}$$

Finalement on a $I - S \geq \frac{I-S}{2}$ et comme $I > S$ on a $1 \leq \frac{1}{2}$. Ce qui est absurde. Donc $I = S$. □

Définition 20.8. Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Alors avec les notations précédentes, le réel $I = S$ est appelé intégrale de f sur $[a\,;b]$ et il est noté $\int_a^b f$, $\int_{[a\,;b]} f$ ou encore $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Remarque : Cette définition est légitime car elle prolonge la définition de l'intégrale des fonctions en escalier.

Si $f \in \mathcal{E}([a\,;b])$, alors $f \in \mathcal{E}^-([a\,;b])$ et $f \in \mathcal{E}^+([a\,;b])$ donc $\int_a^b f$ appartient (au sens des fonctions en escalier) à $I^+(f)$ et $I^-(f)$. De plus $\int_a^b f$ est le minimum de $I^+(f)$ et le maximum de $I^-(f)$. Donc $S = I = \int_a^b f$ au sens de la fonction en escalier.

Ce qu'on a appelé $\int_a^b f$ au sens des fonctions continues par morceaux est donc la même intégrale.

Interprétation graphique : Si f est continue par morceaux sur $[a\,;b]$, et si elle est positive, alors $\int_a^b f$ représente l'aire entre l'axe des abcisses et la courbe représentative de f.

20.3.2 Linéarité de l'intégrale

Théorème 20.5. *L'application* $\int_a^b : \begin{cases} \mathcal{CM}([a\,;b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{cases}$ *est une forme linéaire. C'est-à-dire que*

$$\forall (f,g) \in \mathcal{CM}([a\,;b])^2 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}^2 \quad \int_a^b (\lambda f + g) = \lambda \int_a^b f + \int_a^b g. \tag{20.58}$$

Démonstration. La démonstration se déroule en trois étapes. Soient d'abord deux fonctions f et g continues par morceaux sur $[a\,;b]$ et un réel λ. On montre d'abord que $\int_a^b(-f) = -\int_a^b f$, ensuite que $\int_a^b(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et enfin que $\int_a^b(\lambda f) = \lambda \int_a^b f$.

Montrons le premier point. Par définition,

$$\int_a^b (-f) = \sup_{\varphi \leq -f \in \mathcal{E}([a\,;b])} \int_a^b \varphi, \tag{20.59}$$

$$= \sup_{\psi \geq f \in \mathcal{E}([a\,;b])} \int_a^b -\psi, \tag{20.60}$$

$$= \sup_{\psi \geq f \in \mathcal{E}([a\,;b])} \int_a^b -\psi \tag{20.61}$$

car ψ est une fonction en escalier et on a montré la linéarité. Ensuite

$$\int_a^b (-f) = - \inf_{\psi \geq f \in \mathcal{E}([a\,;b])} \int_a^b \psi, \tag{20.62}$$

d'après les propriétés de la borne inférieure et supérieures. Alors

$$\int_a^b (-f) = -\int_a^b f, \tag{20.63}$$

par définition.

Soit ensuites $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{E}^-(f) \times \mathcal{E}^-(g)$ alors $\varphi + \varphi_2$ est en escalier et $\varphi_1 + \varphi_2 \leq f + g$, donc $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathcal{E}^-(f+g)$. Ainsi

$$\int_a^b (\varphi_1 + \varphi_2) \leq \int_a^b (f+g), \tag{20.64}$$

par linéarité de l'intégrale pour les fonction en escalier, $\int_a^b(\varphi_1 + \varphi_2) = \int_a^b \varphi_1 + \int_a^b \varphi_2$. D'où

$$\int_a^b \varphi_1 \leq \int_a^b (f+g) - \int_a^b \varphi_2, \tag{20.65}$$

et cette égalité est vraie pour toute fonction $\varphi_1 \in \mathcal{E}^-(f)$ donc $\int_a^b(f+g) - \int_a^b \varphi_2$ est un majorant de $I^-(f)$. Alors

$$\int_a^b (f+g) - \int_a^b \varphi_2 \geq \sup I^-(f) = \int_a^b f. \tag{20.66}$$

De la même manière
$$\int_a^b \varphi_2 \leq \int_a^b (f+g) - \int_a^b f, \tag{20.67}$$
est vraie pour toute fonction $\varphi_2 \in \mathcal{E}^-(g)$, alors $\int_a^b (f+g) - \int_a^b f$ est un majorant de $I^-(g)$. D'où
$$\int_a^b g = \sup I^-(g) \leq \int_a^b (f+g) - \int_a^b f. \tag{20.68}$$

On vient de montrer que
$$\int_a^b f + \int_a^b g \leq \int_a^b (f+g), \tag{20.69}$$
on a aussi
$$\int_a^b (-f) + \int_a^b (-g) \leq \int_a^b (-f-g). \tag{20.70}$$
Soit alors
$$-\int_a^b f - \int_a^b g \leq -\int_a^b (f+g), \tag{20.71}$$
et en passant à l'opposé on change le sens de l'inégalité
$$\int_a^b f + \int_a^b g \geq \int_a^b (f+g). \tag{20.72}$$
Finalement, il y a égalité
$$\int_a^b f + \int_a^b g = \int_a^b (f+g). \tag{20.73}$$

Si $\lambda > 0$ on a
$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f) &= \sup_{\varphi \leq \lambda f \in \mathcal{E}([a\,;b])} \int_a^b \varphi && (20.74)\\
&= \sup_{\psi \leq f \in \mathcal{E}([a\,;b])} \int_a^b \lambda\psi && (20.75)\\
&= \sup_{\psi \leq f \in \mathcal{E}([a\,;b])} \lambda \int_a^b \psi && (20.76)\\
&= \lambda \sup_{\psi \leq f \in \mathcal{E}([a\,;b])} \int_a^b \psi && (20.77)\\
&= \lambda \int_a^b f. && (20.78)
\end{aligned}$$
Si $\lambda = 0$, alors l'égalité est vérifié. Si $\lambda < 0$ alors
$$\int_a^b (\lambda f) = \int_a^b (-\lambda)(-f) = -\lambda \int_a^b (-f) = \lambda \int_a^b f. \tag{20.79}$$

□

20.3.3 Positivité et croissance – Majoration de la valeur absolue de l'intégrale

20.3.3.1 Fonctions continues par morceaux

Théorème 20.6. *Pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a\,;b]$, on a*

$$f \geq \tilde{0} \implies \int_a^b f \geq 0. \tag{20.80}$$

⚠ *Ce sont des inégalités larges.*

Démonstration. La fonction nulle est en escalier. Si en plus $f \geq \tilde{0}$ alors $\tilde{0} \in \mathcal{E}^-(f)$ et alors par définition $\int_a^b f \geq \int_a^b \tilde{0} = 0$. □

Théorème 20.7. *Pour toute fonctions f et g continues par morceaux sur $[a\,;b]$, on a*

$$f \geq g \implies \int_a^b f \geq \int_a^b g. \tag{20.81}$$

⚠ *Ce sont des inégalités larges.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $f - g$. □

Théorème 20.8. *Pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a\,;b]$, on a*

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|, \tag{20.82}$$

et en particulier

$$\left| \int_a^b f \right| \leq (b-a) \sup_{[a\,;b]} |f|. \tag{20.83}$$

Démonstration. Pour toute fonction f continue par morceaux sur $[a\,;b]$, on a

$$-|f| \leq f \leq |f|, \tag{20.84}$$

alors

$$\int_a^b -|f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|, \tag{20.85}$$

par linéarité on obtient

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|, \tag{20.86}$$

D'où

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|. \tag{20.87}$$

Les fonctions continues par morceaux sont bornées. Soit donc g la fonction constante égale à $\sup_{[a\,;b]} |f|$ sur $[a\,;b]$, alors

$$|f| \leq g \tag{20.88}$$

et ainsi

$$\int_a^b |f| \leq \int_a^b g = (b-a) \sup_{[a\,;b]} |f| \tag{20.89}$$

□

20.3.3.2 Cas des fonctions continues

⚠ *Ce qui suit ne s'applique pas aux fonctions continues par morceaux.*

Théorème 20.9. *Pour toute fonction continue f sur $[a\,;b]$, si f est non nulle et $f \geq 0$ alors $\int_a^b f > 0$.*

Démonstration. Comme f est positive et non nulle, il existe un $x_0 \in [a\,;b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Comme f est continue, il existe un couple $(\alpha, \beta) \in [a\,;b]^2$ $(\alpha < \beta)$ tel que

$$\forall x \in [a\,;b] \quad \frac{f(x_0)}{2}. \tag{20.90}$$

Soit $\varphi \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$ définie par

$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{f(x_0)}{2} & x \in [\alpha\,;\beta] \\ \varphi(x) = 0 & x \in [a\,;b] \setminus [\alpha\,;\beta] \end{cases}. \tag{20.91}$$

La fonction φ est donc en escalier sur $[a\,;b]$ et $\varphi \leq f$. Par conséquent

$$\int_a^b f \geq \int_a^b \varphi, \tag{20.92}$$

et par définition

$$\int_a^b \varphi = (\beta - \alpha)\frac{f(x_0)}{2} > 0. \tag{20.93}$$

donc $\int_a^b f > 0$. □

Corollaire 20.9.1. *Soit une fonction f continue sur $[a\,;b]$. Si f est positive et si son intégrale est nulle alors f est nulle.*

Théorème 20.10. *Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a\,;b]$, on a*

$$f \geq g \text{ et } f \neq g \implies \int_a^b f > \int_a^b g. \tag{20.94}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème précédent à $f - g$. □

Corollaire 20.10.1. *Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a\,;b]$, on a*

$$f \geq g \text{ et } \int_a^b f = \int_a^b g \implies f = g. \tag{20.95}$$

Théorème 20.11. *Pour toute fonctions f continue sur $[a\,;b]$, on a*

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f| \iff f \text{ est de signe constant sur } [a\,;b]. \tag{20.96}$$

Démonstration. $\Longleftarrow$ Si f est de signe constant, alors si $f \geq \tilde{0}$ alors $\int_a^b f \geq 0$ et donc

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b f = \int_a^b |f|\,; \tag{20.97}$$

sinon $f \leq \tilde{0}$ et alors $\int_a^b f \leq 0$ et donc

$$\left|\int_a^b f\right| = -\int_a^b f = \int_a^b (-f) = \int_a^b |f|\,. \tag{20.98}$$

$\Longrightarrow$ Deux cas se présentent selon le signe de l'intégrale.

— Si $\int_a^b f \geq 0$ alors l'hypothèse s'écrit :

$$\int_a^b f = \int_a^b |f| \tag{20.99}$$

avec $f \leq |f|$. Donc $f = |f|$ et alors $f \geq \tilde{0}$.

— Si $\int_a^b f \leq 0$ alors $-\int_a^b f = \int_a^b |f|$ et par linéarité

$$\int_a^b -f = \int_a^b |f| \tag{20.100}$$

avec $-f \leq |f|$ donc $-f = |f|$ et alors $f \leq \tilde{0}$.

□

20.3.4 Additivité par rapport au segment d'intégration

20.3.4.1 Relation de Chasles

Théorème 20.12. *Soient trois réels a, b et c tels que $a \leq b < c$ et soit une fonction $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$. La fonction f est continue par morceaux si et seulement si sa restriction à $[a\,;c]$ et sa restriction à $[c\,;b]$ sont continues par morceaux. Auquel cas,*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{20.101}$$

Démonstration. L'équivalence se prouve comme pour les fonctions en escaliers, c'est-à-dire en travaillant sur les subdivisions.

Soit une fonction $f \in \mathcal{CM}([a\,;b])$, alors $f_{|[a\,;c]} \in \mathcal{CM}([a\,;c])$ et $f_{|[c\,;b]} \in \mathcal{CM}([c\,;b])$. Soit $\epsilon > 0$, alors

$$\exists(\varphi_1, \psi_1) \in \mathcal{E}([a\,;c])^2 \begin{cases} \varphi_1 \leq f_{|[a\,;c]} \\ \psi_1 - \varphi_1 \leq \tilde{\epsilon} \end{cases} \tag{20.102}$$

$$\exists(\varphi_2, \psi_2) \in \mathcal{E}([c\,;b])^2 \begin{cases} \varphi_2 \leq f_{|[c\,;b]} \\ \psi_2 - \varphi_2 \leq \tilde{\epsilon} \end{cases} \tag{20.103}$$

Soient deux fonctions ψ et φ de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in [a\,;c[\quad \varphi(x) = \varphi_1(x) \text{ et } \psi(x) = \psi_1(x) \tag{20.104}$$
$$\varphi(c) = \psi(c) = f(c) \tag{20.105}$$
$$\forall x \in]c\,;b] \quad \varphi(x) = \varphi_2(x) \text{ et } \psi(x) = \psi_2(x). \tag{20.106}$$

Les fonction ψ et φ sont en escalier sur $[a\,;b]$ et vérifient $\varphi \leq f \leq \psi$. De plus $\psi - \varphi \leq \tilde{\epsilon}$.

On peut appliquer la relations de Chasles pour les fonctions en escalier :

$$\int_a^b f \leq \int_a^b \psi = \int_a^c \psi + \int_c^b \psi = \int_a^c \psi_1 + \int_c^b \psi_2, \tag{20.107}$$

par croissance de l'intégrale on a

$$\int_a^b f \leq \int_a^c (\psi_1 + \tilde{\epsilon}) + \int_c^b (\psi_2 + \tilde{\epsilon}) \tag{20.108}$$

$$\leq \int_a^c f + \int_c^b f + \epsilon(b-a) \tag{20.109}$$

et comme c'est vrai pour tout $\epsilon > 0$, lorsqu'on fait tendre ϵ vers zéro, on obtient :

$$\int_a^b f \leq \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{20.110}$$

Si on applique ce résultat à $-f$ on obtient l'inégalité inverse. □

Proposition 20.11. Soient un intervalle réel I et une fonction $f \in \mathcal{CM}(I)$. Pour tous réels a et b de I on a

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \tag{20.111}$$

Théorème 20.13. *Soient un intervalle réel I et une fonction $f \in \mathcal{CM}(I)$. Pour tous réels a et b de I on a :*

1. *Si $f \geq 0$, si $a \leq b$ alors $\int_a^b f \geq 0$ et si $a \geq b$ $\int_a^b f \leq 0$;*
2. $\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$ *si $a < b$ et* $\left|\int_a^b f\right| \geq \int_b^a |f|$ *si $a \geq b$;*
3. $\left|\int_a^b f\ \right| \leq |b-a| \sup_{[a\,;b]} |f|$

20.3.5 Invariance par translation

Théorème 20.14. *Soient deux réels a et b ($a < b$), $f \in \mathcal{CM}([a\,;b])$ et un autre réel $T \in \mathbb{R}$. On dispose alors de l'application translatée*

$$f_T\colon \left\{ \begin{array}{ccc} [a+T\,;b+T] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x-T) \end{array} \right. \tag{20.112}$$

alors $f_T \in \mathcal{CM}([a+T\,;b+T])$ et

$$\int_{a+T}^{b+T} f_T = \int_a^b f \tag{20.113}$$

Démonstration. Si f est en escalier sur $[a\,;b]$, soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f. Soit $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ la famille des valeurs constantes de f sur $[a\,;b]$. Soit $\sigma_T = (a_i+T)_{0\leq i\leq n}$ et c'est une subdivision de $[a+T\,;b+T]$ adaptée à f_T. La fonction f_T est en escalier et

$$\int_{a+T}^{b+T} f_T = \sum_{i=1}^{n}((a_i+T)-(a_{i-1}+T))\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})\lambda_i = \int_a^b f \tag{20.114}$$

On suppose maintenant que f est continue par morceaux sur $[a\,;b]$. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ adaptée à f. Soit $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$, on dispose alors de la fonction $\varphi_T \in \mathcal{E}([a+T\,;b+T])$ telle que $\int_{a+T}^{b+T}\varphi_T = \int_a^b \varphi$. Alors

$$\varphi_T \leq f_T \tag{20.115}$$

donc $\varphi_T \in \mathcal{E}^-(f)$ et alors

$$\int_a^b \varphi = \int_{a+T}^{b+T} \varphi_T \leq \int_{a+T}^{b+T} f_T. \tag{20.116}$$

C'est vrai pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{E}^-(f)$ donc $\int_{a+T}^{b+T} f_T$ est un majorant de $I^-(f)$ d'où

$$\int_{a+T}^{b+T} f_T \geq \sup I^-(f) = \int_a^b f. \tag{20.117}$$

On applique ce résultat à f_T et $-T$ pour obtenir l'autre inégalité, ou on refait le même raisonnement avec $\psi \in \mathcal{E}^+(f)$. □

20.3.5.1 Applications aux fonctions périodiques

Soient $f \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ et $T > 0$ tel que f soit T-périodique. Supposons que f est continue par morceaux sur tous les segments de $\mathbb{R}$. Alors

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^2 \quad \int_{a+T}^{b+T} f = \int_a^b f \tag{20.118}$$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^2 \quad \int_a^{a+T} f = \int_b^{b+T} f \tag{20.119}$$

Démonstration. Pour la première égalité, on applique directement le résultat de la sous-sous-section précédente, $f_T = f$ puisque f est T-périodique.

Pour la deuxième égalité, on applique la relation de Chasles et la première égalité. □

20.3.6 Inégalité de la moyenne

Théorème 20.15. *Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}([a\,;b])^2$ et $(m, M) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\tilde{m} \leq f \leq \tilde{M}$. Si $g \geq \tilde{0}$ alors*

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g \tag{20.120}$$

Remarque : Puisque f est continue par morceaux, elle est bornée alors on pourra toujours trouver m et M.

Démonstration. Pour tout réel $x \in [a\,;b]$, on a $\begin{cases} m \leq f(x) \leq M \\ 0 \leq g(x) \end{cases}$. Donc

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x), \tag{20.121}$$

par croissance de l'intégrale on a

$$\int_a^b mg \leq \int_a^b fg \leq \int_a^b Mg, \tag{20.122}$$

et par linéarité

$$m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g. \tag{20.123}$$

□

Corollaire 20.15.1. *Soient une fonction f continue par morceaux sur $[a\,;b]$ et $(m,M)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\tilde{m}\leq f\leq \tilde{M}$, alors*

$$m\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f\leq M. \tag{20.124}$$

Démonstration. On applique le théorème avec $g=\tilde{1}$. □

Définition 20.9. Pour toute fonction f continue par morceaux, le réel $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$ est appelée la valeur moyenne de f sur le segment $[a\,;b]$.

Remarque : Supposons que f est continue sur $[a\,;b]$. Le théorème des bornes permet de choisir $m=\min\limits_{[a\,;b]} f$ et $M=\max\limits_{[a\,;b]} f$. Alors la valeur moyenne $\mu\in[m\,;M]$. La fonction f est continue donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe un réel $c\in[a\,;b]$ tel que $f(c)=\mu$.

Théorème 20.16. *Pour toutes fonction f et g continues par morceaux sur $[a\,;b]$,*

$$\left|\int_a^b fg\,\right| \leq \sup_{[a\,;b]}|f|\int_a^b |g| \tag{20.125}$$

Démonstration. La fonction f est continue par morceaux docn bornée, alors $M=\sup_{[a\,;b]}|f|\geq 0$ existe. Alors

$$\left|\int_a^b fg\,\right| \leq \int_a^b |fg| \tag{20.126}$$

et comme $|fg|\leq M\,|g|$ alors par croissance et par linéarité on a

$$\left|\int_a^b fg\,\right| \leq M\int_a^b |g|\,. \tag{20.127}$$

□

Remarque : Avec $g=\tilde{1}$ on retrouve $\left|\int_a^b fg\,\right|\leq |b-a|\sup_{[a\,;b]}|f|$.

20.3.7 Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité de Minkowski

20.3.7.1 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 20.17. *Pour toutes fonctions f et g continues par morceaux sur $[a\,;b]$, on a*

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2\int_a^b g^2} \tag{20.128}$$

Remarque : Si les fonctions sont continues, on note $\langle f, g\rangle = \int_a^b fg$, c'est un produit scalaire et on note $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2}$ c'est la norme euclidienne associée au produit scalaire. L'inégalité devient $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\|_2 \, \|g\|_2$.

Démonstration. Soit la fonction

$$P\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \int_a^b (f+\lambda g)^2 \end{cases} \tag{20.129}$$

Alors pour tout réel λ, $P(\lambda) > 0$ et

$$P(\lambda) = \lambda^2 \int_a^b g^2 + 2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b f^2. \tag{20.130}$$

Deux cas se présentent :

1. Si $\int_a^b g^2 = 0$ alors on a $2\lambda \int_a^b fg + \int_a^b f^2 \geq 0$ pour tout λ alors $\int_a^b fg = 0$ et l'inégalité est vraie $0 \leq 0$;
2. Sinon alors P est polynomiale de degré 2 et $P \geq \tilde{0}$. Alors le dsicriminant est négatif :

$$4\left(\int_a^b fg\right)^2 - 4\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq 0 \tag{20.131}$$

et ainsi on a bien l'inégalité

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \tag{20.132}$$

et comme $\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \geq 0$, par positivité de l'intégrale on a bien l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2 \int_a^b g^2}. \tag{20.133}$$

□

Proposition 20.12. Pour toutes fonctions f et g continues sur $[a\,;b]$, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si la famille (f, g) est liée.

Démonstration. Deux cas se présentent :

1. Si $\int_a^b g^2 = 0$ alors $g^2 = \tilde{0}$ donc $g = \tilde{0}$. Alors

$$\left|\int_a^b fg\right| = 0 = \sqrt{\int_a^b f^2 \int_a^b g^2} \tag{20.134}$$

2. Sinon, alors le discriminant du polynôme P (cf demonstration précédente) est nul et il existe une racine double λ_0 tel que

$$\begin{cases} \int_a^b (f+\lambda_0 g)^2 = 0 \\ (f+\lambda_0 g)^2 \geq 0 \end{cases} \tag{20.135}$$

comme $f+\lambda_0 g$ est continue, on a alors d'après l'intégrale nulle $f = -\lambda_0 g$. Réciproquement s'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $f = \mu g$ alors

$$\left| \int_a^b fg \right| = \left| \int_a^b \mu g^2 \right| = |\mu| \int_a^b g^2 \tag{20.136}$$

et alors

$$\sqrt{\int_a^b f^2 \int_a^b g^2} = \sqrt{\mu^2 \left(\int_a^b g^2 \right)^2} = |\mu| \int_a^b g^2. \tag{20.137}$$

□

20.3.7.2 Inégalité de Minkowski

Théorème 20.18. *Pour toutes fonctions f et g continues par morceaux sur $[a\,;b]$, on a*

$$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2} \leq \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2} \tag{20.138}$$

C'est l'inégalité triangulaire $||f+g||_2 \leq ||f||_2 + ||g||_2$.

Démonstration. Pour toutes fonctions f et g continues par morceaux sur $[a\,;b]$, on a

$$\int_a^b (f+g)^2 = \int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 + 2 \int_a^b fg \tag{20.139}$$

$$\leq \int_a^b f^2 + \int_a^b g^2 + 2\sqrt{\int_a^b f^2 \int_a^b g^2} \tag{20.140}$$

$$\leq \left(\sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2} \right)^2. \tag{20.141}$$

La première inégalité est issue de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cependant $\sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2} \geq 0$ et $\int_a^b (f+g)^2 \geq 0$ alors en passant à la racine on a bien l'inégalité de Minkowski :

$$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2} \leq \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2}. \tag{20.142}$$

□

Proposition 20.13. Pour toutes fonctions f et g continues par morceaux sur $[a\,;b]$, il y a égalité dans l'inégalité de Minkowski si et seulement si (f, g) est liée.

Démonstration. Commece cas d'égalité dépend du cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est évident. □

20.4 Sommes de Riemann

20.4.1 Définition

Définition 20.10. Soient deux réels a, b ($a < b$), $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ ed $n+1$ points, une fonction $f \in \mathbb{R}^{[a\,;b]}$ et $\alpha = (\alpha_i)_{0\leq i\leq n-1}$ une famille de n points de $[a\,;b]$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, $\alpha_i \in [a_i\,;a_{i+1}]$. On définit

$$R(f,\sigma,\alpha) = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\alpha_i) \tag{20.143}$$

la somme de Riemann associée à f, à σ et à la famille de points α.

Cas particulier important : Si la subdivision σ est régulière, c'est-à-dire que pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ alors la somme de Riemann s'écrit

$$R(f,\sigma,\alpha) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i). \tag{20.144}$$

20.4.2 Théorème de convergence des sommes de Riemman pour les fonctions continues

Théorème 20.19. *Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction f continue sur $[a\,;b]$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que si pour toute subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n-1}$ de $[a\,;b]$ de pas $\delta(\sigma) \leq \eta$ alors pour toute famille de points $\alpha = (\alpha_i)_{0\leq i\leq n-1}$ de $[a\,;b]$ (telle que pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ on a $\alpha_i \in [a_i\,;a_{i+1}]$) on a*

$$\left| R(f,\sigma,\alpha) - \int_a^b f \right| \leq \epsilon \tag{20.145}$$

Démonstration. Pour toute subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n-1}$ de $[a\,;b]$ et pour toute famille de points $\alpha = (\alpha_i)_{0\leq i\leq n-1}$ de $[a\,;b]$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ on a $\alpha_i \in [a_i\,;a_{i+1}]$, on a

$$R(f,\sigma,\alpha) - \int_a^b f = \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)f(\alpha_i) - \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}} f \tag{20.146}$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1}\int_{a_i}^{a_{i+1}}(f(\alpha_i)-f). \tag{20.147}$$

Comme f est continue sur $[a\,;b]$, grâce au théorème de Heine, elle est uniformément continue :

$$\forall\epsilon > 0\ \exists\eta > 0\ \forall x, x' \in [a\,;b] \quad |x-x'| \leq \eta \implies |f(x)-f(x')| \leq \frac{\epsilon}{b-a} \tag{20.148}$$

Si σ vérifie $\delta(\sigma) \leq \eta$ alors pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ et tout $x \in [a_i\,;a_{i+1}]$ on a

$$|x-\alpha_i| \leq |a_{i+1}-a_i| \leq \delta(\sigma) \leq \eta \tag{20.149}$$

d'où $|f(x)-f(\alpha_i)| \leq \frac{\epsilon}{b-a}$. Par croissance de l'intégrale et pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ on a

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(\alpha_i)-f| \leq \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\epsilon}{b-a}. \tag{20.150}$$

Alors

$$\left|R(f,\sigma,\alpha) - \int_a^b f\ \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(\alpha_i) - f| \tag{20.151}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\epsilon}{b-a} = \int_a^b \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon. \tag{20.152}$$

□

Corollaire 20.13.1. *Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction f continue sur $[a\,;b]$. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour toute famille $\alpha = (\alpha_i)_{0\leq i\leq n-1}$ une famille de n points de $[a\,;b]$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, $\alpha_i \in \left[a + i\frac{b-a}{n}\,; a + (i+1)\frac{b-a}{n}\right]$ alors*

$$\left|\frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i) - \int_a^b f\right| \leq \epsilon \tag{20.153}$$

Cas particulier pour le choix de la famille α :

1. *Si pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ $\alpha_i = a_i = a + i\frac{b-a}{n}$ alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f \tag{20.154}$$

2. *Si pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ $\alpha_i = a_{i+1} = a + (i+1)\frac{b-a}{n}$ alors*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(a + j\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f. \tag{20.155}$$

20.4.3 Cas des fonctions lipschitziennes

Dans le cas où f est lipschitzienne, on peut majorer la différence entre les sommes de Riemann et $\int_a^b f$.

Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et $k > 0$ tel que f soit k-lipschitzienne sur $[a\,;b]$. Soit $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision de $[a\,;b]$ de pas $\delta(\sigma)$. Soit $(\alpha_i)_{0\leq i\leq n-1}$ une famille de points de $[a\,;b]$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ on a $\alpha_i \in [a_i\,;a_{i+1}]$. Alors

$$\left|R(f,\sigma,\alpha) - \int_a^b f\ \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |f(\alpha_i) - f(x)|\ \mathrm{d}x \tag{20.156}$$

$$\leq k\sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} |\alpha_i - x|\ \mathrm{d}x \tag{20.157}$$

Soit $i \in [\![0\,;n-1]\!]$, alors

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} |\alpha_i - x| \, \mathrm{d}x = \int_{a_i}^{\alpha_i} |\alpha_i - x| \, \mathrm{d}x + \int_{\alpha_i}^{a_{i+1}} |\alpha_i - x| \, \mathrm{d}x \tag{20.158}$$

$$= \left[-\frac{(\alpha_i - x)^2}{2}\right]_{a_i}^{\alpha_i} + \left[\frac{(x-\alpha_i)^2}{2}\right]_{\alpha_i}^{a_{i+1}} \tag{20.159}$$

$$= \frac{(\alpha_i - a_i)^2}{2} + \frac{(a_{i+1} - \alpha_i)^2}{2} \tag{20.160}$$

$$\leq \frac{(a_{i+1} - a_i)^2}{2} + \frac{(a_{i+1} - \alpha_i)^2}{2} \tag{20.161}$$

$$\leq \delta(\sigma)^2 \tag{20.162}$$

Alors

$$\left| R(f,\sigma,\alpha) - \int_a^b f \right| \leq kn\delta(\sigma)^2. \tag{20.163}$$

En particulier si $\sigma = \left(a + i\frac{b-a}{n}\right)_{0\leq i\leq n}$ alors $\delta(\sigma) = \frac{b-a}{n}$ et donc

$$\left| R(f,\sigma,\alpha) - \int_a^b f \right| \leq k\frac{(b-a)^2}{n}. \tag{20.164}$$

20.5 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. On s'intéresse aux fonction de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{C}$.

20.5.1 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 20.11. Soit $f \in \mathbb{C}^{[a\,;b]}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a\,;b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ de $[a\,;b]$ telle que :

1. pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ f est continue sur $]a_{i-1}\,;a_i[$
2. pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ $f_{|]a_{i-1}\,;a_i[}$ admet des limites finies à gauche en a_i et à droite en a_{i-1}.

D'après les résultats sur les limites et la continuité des fonctions à valeur complexes, on a :

Proposition 20.14. Pour toute fonction $f \in \mathbb{C}^{[a\,;b]}$, f est continue par morceaux si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont continues par morceaux.

On note $\mathcal{CM}([a\,;b]\,,\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{C}^{[a\,;b]}$ qui sont continues par morceaux.

Définition 20.12. Pour toute fonction $f \in \mathcal{CM}([a\,;b]\,,\mathbb{C})$, on appelle intégrale de f sur $[a\,;b]$ et on note $\int_{[a\,;b]}$, $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ le complexe

$$\int_a^b f = \int_a^b \Re(f) + \mathrm{i}\int_a^b \Im(f) \tag{20.165}$$

Proposition 20.15.

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a\,;b]\,,\mathbb{C}) \quad \int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f} \tag{20.166}$$

20.5.2 Propriétés de l'intégrale

20.5.2.1 Linéarité

L'application

$$\int_a^b : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{CM}([a\,;b]\,,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array} \right. \tag{20.167}$$

est une forme linéaire sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{CM}([a\,;b]\,,\mathbb{C})$.

Démonstration. Soient $(f, g) \in \mathcal{CM}([a\,;b]\,,\mathbb{C})^2$ et un complexe λ. On note

$$f_1 = \Re(f) \quad f_2 = \Im(f) \tag{20.168}$$
$$g_1 = \Re(g) \quad g_2 = \Im(g) \tag{20.169}$$
$$u = \Re(\lambda) \quad v = \Im(\lambda) \tag{20.170}$$

alors :

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b (f_1 + g_1) + \mathrm{i} \int_a^b (f_2 + g_2) \tag{20.171}$$
$$= \int_a^b f_1 + \mathrm{i} \int_a^b f_2 + \int_a^b g_1 + \mathrm{i} \int_a^b g_2 \tag{20.172}$$
$$= \int_a^b f + \int_a^b g \tag{20.173}$$

et comme

$$\lambda f = (u f_1 - v f_2) + \mathrm{i}(v f_1 + u f_2) \tag{20.174}$$

alors on a

$$\int_a^b (\lambda f) = \int_a^b (u f_1 - v f_2) + \mathrm{i} \int_a^b (c f_1 + u f_2) \tag{20.175}$$
$$= (u + \mathrm{i}\, v) \int_a^b f_1 + (\mathrm{i}\, u - v) \int_a f_2 \tag{20.176}$$
$$= \lambda \int_a^b f_1 + \mathrm{i}\, \lambda \int_a^b f_2 = \lambda \int_a^b f \tag{20.177}$$

□

20.5.2.2 Relation de Chasles

Théorème 20.20. *Soient trois réels $a \leq c \leq b$ et $f \in \mathbb{C}^{[a\,;b]}$. Alors*

$$f \in \mathcal{CM}([a\,;b]\,,\mathbb{C}) \iff f_{|[a\,;c]} \in \mathcal{CM}([a\,;c]\,,\mathbb{C}) \text{ et } f_{|[c\,;b]} \in \mathcal{CM}([c\,;b]\,,\mathbb{C}). \tag{20.178}$$

Auquel cas

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{20.179}$$

Démonstration. L'équivalence est la conséquence immédiate de la propriété analogue avec les fonctions à valeur réelles. La relation de Chasles est aussi la conséquence immédiate de la relation de Chasles avec les fonctions à valeur réelles. □

20.5.2.3 Inégalité de la moyenne

Théorème 20.21. *Pour toute fonction* $f \in \mathcal{CM}([a\,;b]\,,\mathbb{C})$, $|f| \in \mathcal{CM}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$ *et*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \tag{20.180}$$

Démonstration. On distingue deux cas, selon que $\int_a^b f \in \mathbb{R}+$ ou non.

1. Supposons que $\int_a^b f \in \mathbb{R}+$. Alors $\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b f$ et donc $\int_a^b \Im(f) = 0$ et alors $\int_a^b f = \int_a^b \Re(f)$. On a

$$\Re(f) \leq |f| \tag{20.181}$$

   et par croissance de l'intégrale

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b \Re(f) \leq \int_a^b |f| \tag{20.182}$$

2. Supposons maintenant que $\int_a^b f \notin \mathbb{R}+$ et en particulier $\int_a^b f \neq 0$. Alors il existe un réel $\rho > 0$ et un réel θ tels que

$$\int_a^b f = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} \tag{20.183}$$

   et alors par linéarité

$$\rho = \int_a^b \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta} f \tag{20.184}$$

   Soit $g = \int_a^b \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta} f$ alors $\int_a^b g = \rho \in \mathbb{R}+$. Donc on peut lui ppliquer le premier point :

$$\left|\int_a^b g\right| \leq \int_a^b |g| \tag{20.185}$$

$$\left|\int_a^b \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta} f\right| \leq \int_a^b \left|\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta} f\right| \tag{20.186}$$

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| \tag{20.187}$$

$$\tag{20.188}$$

□

⚠*La positivité et la croissance n'ont pas de sens pour* $f \in \mathbb{C}^{[a\,;b]}$.

Chapitre 21

Intégration et dérivation

Sommaire

Tableaux

Dans tout le chapitre, I est un intervalle réel contenant au moins deux points.

21.1 Primitives et intégrales

21.1.1 Notion de primitive

21.1.1.1 Définition

Définition 21.1. Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On appelle primitive de f toute application $F \in \mathbb{R}^I$ telle que :

1. F est dérivable sur I ;
2. $F' = f$.

21.1.1.2 Détermination des primitives d'une fonction f si on en connaît une

Théorème 21.1. *Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose qu'il existe $F \in \mathbb{R}^I$ une primitive de f. Alors l'ensemble des primitives de f est $\{F + \tilde{c} \mid c \in \mathbb{R}\}$.*

Démonstration. Soit une fonction $G \in \mathbb{R}^I$. Alors

$$G \text{ est une primitive de } f \iff \begin{cases} G \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \\ G' = f \end{cases} \tag{21.1}$$

$$\iff \begin{cases} G \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \\ G' = F' \end{cases} \tag{21.2}$$

$$\iff \begin{cases} G \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \\ \exists c \in \mathbb{R} \quad G = F + \tilde{c} \end{cases} \tag{21.3}$$

$$\iff \exists c \in \mathbb{R} \quad G = F + \tilde{c}. \tag{21.4}$$

La première équivalence est la définition d'une primitive. La deuxième est claire par définition de F. La troisième est due à l'intégration. Enfin la quatrième est vraie puisque pour toute constante c, $F + \tilde{c}$ est dérivable. □

Corollaire 21.1.1. *Soit $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose qu'il existe une primitive $F \in \mathbb{R}^I$ de f. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Alors il existe une et une seule primitive G de f telle que $G(x_0) = y_0$. C'est l'application G:* $\begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & F(x) + y_0 - F(x_0) \end{cases}$.

21.1.2 Étude des applications $x \longmapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$

Soit une fonction $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose que f est continue par morceaux sur tout segement contenu dans I. Soit $a \in I$. Pour tout $x \in I$, $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ a bien un sens (cf chapitre **??**).

On peut définir l'application $\Phi_f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{array} \right.$.

Proposition 21.1. Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$. Si on suppose que $f \geq 0$ alors l'application Φ_f définie comme ci-dessus est croissante.

Démonstration. Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ tel que $x_1 < x_2$. Alors

$$\Phi_f(x_2) - \Phi_f(x_1) = \int_a^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t \tag{21.5}$$

$$= \int_a^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t + \int_{x_1}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t \tag{21.6}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t \tag{21.7}$$

et comme f est positive alors $\Phi_f(x_2) - \Phi_f(x_1) \geq 0$ par positivité de l'intagrale. Finalement Φ_f est croissante. □

Proposition 21.2. Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$. Si on suppose que f est bornée alors l'application Φ_f définie comme ci-dessus est lipschitzienne.

Démonstration. Comme f est bornée, il existe un réel k positif tel que pour tout $x \in I$, $|f(x)| \leq k$. Soient $(x_1, x_2) \in I^2$, alors

$$|\Phi_f(x_2) - \Phi_f(x_1)| = \left| \int_{x_1}^{x_2} f(t)\ \mathrm{d}t \right| \leq |x_2 - x_1|\, \|f\|_\infty \leq k\, |x_2 - x_1|\,. \tag{21.8}$$

Ce qui montre que Φ est lipschitzienne. □

Proposition 21.3. Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$. L'application Φ_f défini comme ci-avant est continue.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Deux cas de figures se présentent :

— Soit $x_0 \in \mathring{I}$ (ce qui signifie qu'il est dans l'intérieur et que ce n'est pas une borne, ou plus formellement qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que $]x_0 - \eta\,; x_0 + \eta[\, \subset I$). On peut alors choisir $(\alpha, \beta) \in I^2$ tel que $\alpha < x_0 < \beta$ et on pose $J = [\alpha\,; \beta]$.

— Soit $x_0 \in I \setminus \mathring{I}$ (ce qui signifie que c'est une borne) alors deux sous-cas se présentent :

  — soit $x_0 = \min I$ alors il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\beta > x_0$ et donc on pose $J = [x_0\,; \beta] \subset I$;

  — soit $x_0 = \max I$ alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < x_0$ et donc on pose $J = [\alpha\,; x_0] \subset I$;

Dans tous les cas et sous-cas, J est un segment inclus dans I. Alors f est continue par morceaux sur J. Par conséquent f est bornée sur J donc l'application $\Phi_{f_{|J}}$ est lipschitzienne et donc continue.

Or $x_0 \in J$, donc Φ_f est continue en x_0 pour tout $x_0 \in I$. Donc Φ est continue sur I. □

Proposition 21.4. Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ et $x_0 \in I$. Si on suppose que f est continue en x_0 alors Φ_f est dérivable en x_0 et $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Démonstration. Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$. Alors le taux d'accroissement de Φ_f est

$$\frac{\Phi_f(x) - \Phi_f(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t. \tag{21.9}$$

L'application f est continue en x_0 alors il existe une application $\epsilon \in \mathbb{R}^I$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in I \quad f(x) = f(x_0) + \epsilon(x) \\ \lim\limits_{x_0} \epsilon = 0 \end{cases}. \tag{21.10}$$

Alors pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_f(x) - \Phi_f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} (f(x_0) + \epsilon(t))\ \mathrm{d}t & (21.11) \\ &= \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} f(x_0)\ \mathrm{d}t + \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \epsilon(t)\ \mathrm{d}t. & (21.12) \end{aligned}$$

Comme la fonction f est continue en x_0, on a par définition

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in I \quad |x - x_0| \leq \eta \implies |f(x) - f(x_0)| = |\epsilon(x)| \leq \epsilon. \tag{21.13}$$

Or pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ si $|x - x_0| \leq \eta$, pour tout $t \in [(x_0; x)]$, on a $|t - x_0| \leq \eta$ et par conséquent $|\epsilon(t)| \leq \epsilon$.

Ainsi pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$, si $|x - x_0| \leq \eta$ alors on a $\left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \epsilon(t)\ \mathrm{d}t \right| \leq \frac{|x - x_0|}{|x - x_0|} \epsilon = \epsilon$. Donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^{x} \epsilon(t)\ \mathrm{d}t = 0 \tag{21.14}$$

et donc

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\Phi_f(x) - \Phi_f(x_0)}{x - x_0} = f(x_0). \tag{21.15}$$

On vient de démontrer que Φ est dérivable en x_0 et que $\Phi'(x_0) = f(x_0)$. □

21.1.3 Primitive d'une fonction continue sur un intervalle

Théorème 21.2 (Théorème fondamental). *Soit $f \in \mathbb{R}^I$* continue *sur I. Alors f admet des primitives. De plus :*

1. *pour tout $x_0 \in I$, l'unique primitive de f qui s'annule en x_0 est l'application*

$$F\colon \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}; \tag{21.16}$$

2. *toutes les primitives de f sont de classe $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration. Soit $a \in I$ et soit l'application $\Phi_f\colon \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{a}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$. La fonction f est continue sur I, alors pour tout $x_0 \in I$, Φ_f est dérivable en x_0

avec $\Phi'_f(x_0) = f(x_0)$. Alors comme c'est pour tout x_0, Φ est dérivable sur I et $\Phi'_f = f$. Comme f est continue, l'application Φ_f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Les autres primitives de f différent de Φ_f d'une constantes, donc elles sont aussi de classe $\mathcal{C}^1$.

Enfin, on a déjà vu l'unicité de la primitive de f qui s'annule en x_0. □

Proposition 21.5. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$. Pour tout couple $(a, b) \in I^2$ et toute primitive F de f, on a :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a) \tag{21.17}$$

Démonstration. Soit l'application $\Phi_f \colon \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$. C'est la primitive de f qui s'annule en a et $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \Phi(b) - \Phi(a)$. Soit F un autre primitive de f, alors il existe un réel c tel que $F = \Phi_f + \tilde{c}$ et dans ce cas $F(b) - F(a) = \Phi_f(b) + c - \Phi_f(a) - c = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$. □

Notation : Dans un calcul d'intégrale, si f est une fonction continue, et si F une primitive de F sur l'intervalle I, alors on écrira $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = [F(t)]_a^b$.

Corollaire 21.2.1. *Soient une application $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et $(a, b) \in I^2$, alors*

$$\int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t = f(b) - f(a) \tag{21.18}$$

Proposition 21.6. Soient I et J deux intervalles réels, et deux applications $u, v \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $v(J) \subset I$ et $u(J) \subset I$. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, alors l'application

$$\Phi \colon \begin{cases} J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t \end{cases} \tag{21.19}$$

est dérivable sur J.

Démonstration. Soit une primitive F de f sur I. Pour tout $x \in I$, $u(x) \in I$ et $v(x) \in I$ alors

$$\Phi(x) = F(v(x)) - F(u(x)). \tag{21.20}$$

Les applications u et v sont dérivables sur I, et F est dérivable sur I. Alors, par composition et différence d'applications dérivables, Φ est dérivable sur J. Ainsi pour tout $x \in J$,

$$\Phi'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)). \tag{21.21}$$

L'application f est continue et les applications u' et v' aussi. Alors Φ' est continue. Alors Φ est de classe $\mathcal{C}^1$. □

21.1.4 Intégration par parties

Théorème 21.3. *Soient I un intervalle réel, et deux applications u et v de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$. ALors pour tout couple $(a, b) \in I^2$ on a*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t. \tag{21.22}$$

Démonstration. Comme les applications u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, l'application uv est de classe $\mathcal{C}^1$. Alors

$$[u(t)v(t)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a) = \int_a^b (uv)'(t)\ \mathrm{d}t \tag{21.23}$$

$$= \int_a^b [u'(t)v(t)u(t)v'(t)]\ \mathrm{d}t \tag{21.24}$$

$$= \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t. \tag{21.25}$$

□

En pratique, on utilise l'intégration par parties pour :

1. se ramener à des fonctions plus simples. Comme par exemple pour calculer pour tout $x > 0$, l'intégrale $\int_1^x \ln(t)\ \mathrm{d}t$.
2. calculer des intégrales par récurrence, comme par exemple les intégrales de Wallis.

21.1.5 Changement de variable

Théorème 21.4. *Soient I et J deux intervalles réels, $f \in \mathcal{C}(I,\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$ tels que $\varphi(J) \subset I$. Alors pour tous réels $a, b \in J$ on a*

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\ \mathrm{d}u. \tag{21.26}$$

Démonstration. L'application f est continue sur I alors il existe une primitive F de f sur l'intervalle I. Pour tout $(a, b) \in J^2$, on a $(\varphi(a), \varphi(b)) \in I^2$. Donc

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\ \mathrm{d}u = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)). \tag{21.27}$$

Comme $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ et $F \in \mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$, alors $F \circ \varphi$ est dans $\mathcal{C}^1(J,\mathbb{R})$ et $(F \circ \varphi)' = \varphi' \cdot f \circ \varphi$. Alors

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b (F \circ \varphi)'\ \mathrm{d}t \tag{21.28}$$

$$= F \circ \varphi(b) - F \circ \varphi(a) \tag{21.29}$$

$$= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\ \mathrm{d}u. \tag{21.30}$$

□

⚠*Il ne faut pas oublier les hypothèses, c-à-d φ est $\mathcal{C}^1$.*
⚠*Ne pas oublier de changer les bornes de l'intégrale.*
⚠*Ne pas oublier le '$\varphi'(t)$'.*
Exemple : Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t\ \mathrm{d}t$.

Soit l'application φ: $\left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;\pi/2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \cos t \end{array} \right.$. Alors φ est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \sin t \ \mathrm{d}t = -\int_0^{\pi/2} \varphi(t)^2 \varphi'(t) \ \mathrm{d}t = -\int_1^0 u^2 \ \mathrm{d}u = \frac{1}{3}. \tag{21.31}$$

Cas particulier : Changement de variable affine. C'est-à-dire que l'application φ est de la forme $\varphi : x \longmapsto ax + b$ avec a et b deux réels. Ces applications sont toujours de classe $\mathcal{C}^1$.

Applications : Notons trois applications singulières

1. Les fonctions paires et les fonctions impaires. Soit un réel a positif strictement et une application $f : [-a\,;a] \longmapsto \mathbb{R}$ continue. Alors

$$\int_{-a}^{a} f(t) \ \mathrm{d}t = \int_{-a}^{0} f(t) \ \mathrm{d}t + \int_0^a f(t) \ \mathrm{d}t \tag{21.32}$$
$$= \int_a^0 f(-s)(-\,\mathrm{d}s) + \int_0^a f(t) \ \mathrm{d}t \tag{21.33}$$
$$= \int_0^a f(-s) \ \mathrm{d}s + \int_0^a f(t) \ \mathrm{d}t \tag{21.34}$$
$$\tag{21.35}$$

Si f est pair alors $\int_{-a}^{a} f(t) \ \mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t) \ \mathrm{d}t$. Si f est impaire alors l'intégrale est nulle.

2. Les fonctions périodiques. Soit $T > 0$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ continue est T-périodique. Pour tout réel a et b, on a

$$\int_{a+T}^{b+T} f(t) \ \mathrm{d}t = \int_a^b f(x+T) \ \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \ \mathrm{d}x \tag{21.36}$$

3. Passage de $[a\,;b]$ à $[0\,;1]$. Soient deux réels a et b tels que $b > a$ et $f : [a\,;b] \longmapsto \mathbb{R}$ une application continue. Soit l'application φ telle que

$$[a\,;b] : \left\{ \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longrightarrow & t \\ \frac{t-a}{b-a} & \longmapsto & . \end{array} \right. \tag{21.37}$$

Pour tout $t \in [a\,;b]$, on a $\varphi'(t) = \frac{1}{b-a}$, $\varphi(a) = 0$ et $\varphi(b) = 1$.

$$\forall u \in [0\,;1] \ \ \forall t \in [a\,;b] \quad u = \varphi(t) \iff t = (b-a)u + a = bu + (1-u)a \tag{21.38}$$

et alors

$$\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t = \int_0^1 f(bu+(1-u)a)(b-a) \ \mathrm{d}u = (b-a)\int_0^1 f(bu+(1-u))a \ \mathrm{d}u. \tag{21.39}$$

De façon générale, les changements de variables affines servent à exploiter des symétries de la fonctions à intégrer.

21.2 Formules de Taylor

21.2.1 Notion de développement de Taylor

Définition 21.2. Soit I un intervalle réel, $a \in I$, $f \in \mathbb{R}^I$ et $n \in \mathbb{N}$. Supposons que f est dérivable au moins n fois en a.

On appelle développement de Taylor de f au point a à l'ordre n, l'application polynomiale

$$T_{n,f,a} : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{cases} \tag{21.40}$$

Pour tout réel x,

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \tag{21.41}$$

Si $0 \in I$ et si $a = 0$ on parle de développement de Mac-Laurin.

Remarque : Pour tout naturel k non nul, on a $f^{(k)} = (f')^{(k-1)}$, donc pour tout réel x

$$T'_{n,f,a}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{kf^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j+1)}(a)}{j!}(x-a)^j = T_{n-1,f',a}(x) \tag{21.42}$$

Développements de Mac-Laurin des fonctions usuelles

Soit un naturel n. On pose $n' = E\left(\frac{n}{2}\right)$ et $n'' = E\left(\frac{n-1}{2}\right)$. C'est-à-dire que ce sont les entiers tels que

$$2n' \leq n \leq 2n' + 2 \tag{21.43}$$
$$2n'' + 1 \leq n \leq 2n'' + 3 \tag{21.44}$$

$2n'$ est le plus grand entier pair inférieur à n et $2n'' + 1$ est le plus grand entier impair inférieur à n. Alors la table **??** donne les développements.

$f(x)$	$f^{(k)}(0), k \geq 1$	$T_n(x)$	I
e^x	1	$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	1 si k pair 0 si k impair	$\sum_{k=0}^{n'} \frac{1}{(2k)!}x^{2k}$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	0 si k pair 1 si k impair	$\sum_{k=0}^{n''} \frac{1}{(2k+1)!}x^{2k+1}$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^{n'} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$	$\sum_{k=0}^{n''} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$	$\mathbb{R}$
$\ln(1+x)$	$(-1)^{k-1}(k-1)\,!$	$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$	$]-1\,;+\infty[$
$(1+x)^\alpha$	$\prod_{p=0}^{k-1}(\alpha-p)$	$\sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{p=0}^{k-1}(\alpha-p)}{k!}x^k$	$]-1\,;+\infty[$

Tableau 21.1 – Développements de Mac-Laurin usuels

21.2.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 21.5. *Soient I un intervalle réel, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathbb{R}^I$. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. Alors pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{21.45}$$

C'est la formule de Taylor avec reste intégral de f à l'ordre n au point a.

Démonstration. Posons pour tout x$\in I$,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{21.46}$$

et montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ "si $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$ alors $\mathbb{R}_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$."

Initialisation : $n = 0$, suppsons que f soit $\mathcal{C}^1$, alors pour tout $x \in I$, on a

$$R_0(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f^{(0+1)}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{21.47}$$

Alors $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposon $\mathcal{P}(n)$. Si f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$ alors pour tout $x \in I$, on a

$$R_{n+1}(x) = f(x) - \sum_{k=0} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(x) - T_n(x) - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{21.48}$$

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$, donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et l'hypothèse de récurrence nous donne que pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) - T_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \tag{21.49}$$

et alors

$$R_{n+1}(x) = int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \tag{21.50}$$

Soit les applications $u\colon \left\{\begin{array}{lcc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f^{(n+1)}(t) \end{array}\right.$ et $v\colon \left\{\begin{array}{lcc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & -\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} \end{array}\right.$.

La fonction v est de classe $\mathcal{C}^1$ puisqu'elle est polynomiale, et u est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ car f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$. De plus, pour $t \in I$, on a

$$u'(t) = f^{(n+2)}(t) \quad v'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}, \tag{21.51}$$

alors pour tout $x \in I$, en intégrant par parties on a

$$R_{n+1}(x) = \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\right]_a^x - \int_a^x f^{(n+2)}(t)\left(-\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right) \mathrm{d}t \tag{21.52}$$

$$- \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

$$= \int_a^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{d}t \tag{21.53}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a montré $\mathcal{P}(0)$ et pour tout naturel n, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Alors par théorème de récurrence, pour tout naturel n, $\mathcal{P}(n)$. □

21.2.3 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 21.6. *Soient un intervalle I, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{R})$. La fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur un segment donc bornée. Pour tout réel $x \in I$ alors*

$$|f(x) - T_{n,f,a}(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup \left|f^{(n+1)}\right|. \tag{21.54}$$

C'est l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à f au point a.

Démonstration. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+2}$, alors d'après la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral, on a pour tout $x \in I$

$$f(x) - T_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, \mathrm{d}t \tag{21.55}$$

Deux cas se présentent :

1. Si $x \geq a$ alors

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq \int_a^x \frac{|x-t|^n}{n!} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \, \mathrm{d}t && (21.56)\\
&\leq \sup_{[a\,;x]} \left|f^{(n+1)}\right| \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t && (21.57)\\
&\leq \sup_{[a\,;x]} \left|f^{(n+1)}\right| \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}; && (21.58)
\end{aligned}$$

2. Si $x \leq a$ alors

$$\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leq \int_x^a \frac{|x-t|^n}{n!} \left|f^{(n+1)}(t)\right| \, \mathrm{d}t && (21.59)\\
&\leq \sup_{[a\,;x]} \left|f^{(n+1)}\right| \int_a^x \frac{(t-x)^n}{n!} \, \mathrm{d}t && (21.60)\\
&\leq \sup_{[a\,;x]} \left|f^{(n+1)}\right| \frac{(a-x)^{n+1}}{(n+1)!}. && (21.61)
\end{aligned}$$

Dans les deux cas,

$$|R_n(x)| \sup_{[(a,x)]} \left|f^{(n+1)}\right| \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}. \tag{21.62}$$

□

21.3 Retour sur les développements limités

21.3.1 Développement limité d'une primitive

Théorème 21.7. *Soient un intervalle réel I, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathbb{R}^I$. Supposons que :*

1. *f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a ;*
2. *f admet une primitive F sur I.*

Alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de a. De plus la partie régulière $P_{n+1}(F)$ de ce développement limité est la primitive de $P_n(f)$ qui vaut $F(a)$ en a.

Si au voisinage de a on a

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \tag{21.63}$$

alors au voisinage de a, on a aussi

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + F(a) + o((x-a)^n) \tag{21.64}$$

Démonstration. Soit pour tout naturel n, l'application $A_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k$. Soit B_{n+1} une primitive de A_n qui vaut $F(a)$ en a. Il existe une application $\epsilon : x \longmapsto \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in I$ on a

$$\begin{cases} f(x) = A_n(x) + (x-a)^n \epsilon(x) \\ \lim\limits_{0} \epsilon = 0 \end{cases}. \tag{21.65}$$

Alors

$$F(x) - B_{n+1}(x) = [F(x) - B_{n+1}(x)] - [F(a) - B_{n+1}(a)] \tag{21.66}$$

$F - B_{n+1}$ est continue sur $[(a,x)]$ et dérivable sur $](a,x)[$ alors d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c_x \in [(a,x)]$ tel que

$$\begin{aligned} F(x) - B_{n+1}(x) &= (F - B_{n+1})'(c_x)(x-a) && (21.67)\\ &= (f(c_x) - A_n(c_x))(x-a) && (21.68)\\ &= (c_x - a)^n \epsilon(c_x)(x-a) && (21.69)\\ &= (x-a)^{n+1} \left(\frac{c_x - a}{x-a}\right)^n \epsilon(c_x). && (21.70) \end{aligned}$$

On note $\epsilon_1(x) = \left(\frac{c_x-a}{x-a}\right)^n \epsilon(c_x)$. Puisque $c_x \in [(a,x)]$, le théorème des gendarmes nous dit que $\lim\limits_{x\to a} c_x = a$. De plus on sait que $\lim\limits_{x\to a} \epsilon(x) = 0$. Alors par composition de limites, $\lim\limits_{x\to a} \epsilon(c_x) = 0$.

De plus pour tout $x \in [(a,x)]$, $\left|\frac{c_x-a}{x-a}\right| \leq 1$ alors finalement $F(x) - B_{n+1}(x) = o\big((x-a)^{n+1}\big)$. □

Corollaire 21.7.1. *Soient I un intervalle réel, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^I$ et F une primitive de f sur I. Si au voisinage de a on a $f(x) = o((x-a)^n)$ alors $F(x) - F(a) = o((x-a)^n)$ au voisinage de a.*

En particulier si f est continue, et si au voisinage de a on a $f(x) = o((x-a)^n)$ alors $\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = o((x-a)^n)$ au voisinage de a.

Corollaire 21.7.2. *Soient I un intervalle réel, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^I$ et F une primitive de f sur I. Soit aussi $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Alors*

$$f(x) \sim_a \alpha(x-a)^n \Rightarrow F(x) - F(a) \sim_a \alpha \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \tag{21.71}$$

En particulier si f est continue alors

$$f(x) \sim_a \alpha(x-a)^n \Rightarrow \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t \sim_a \alpha \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} \tag{21.72}$$

Proposition 21.7. Soient I un intervalle réel, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathbb{R}^I$. On suppose que :

1. f admet un $DL_n(a)$;
2. f est dérivable sur I ;
3. f' admet un $DL_{n-1}(a)$.

Alors si on note P les parties régulières on a

$$P_{n-1}(f') = (P_n(f))'. \tag{21.73}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème sur les primitives de f'. □

21.3.2 Développement limité d'une fonction $\mathcal{C}^n$, Taylor-Young

Théorème 21.8. *Soient I un intervalle réel, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$. Alors la fonction f admet le $DL_n(a)$ suivant :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) = T_{n,f,a}(x) + o((x-a)^n)\,. \tag{21.74}$$

C'est la formule de Taylor-Young à l'ordre n appliquée à f en a.

Démonstration. On montre cette assertion, qu'on note $\mathcal{P}(n)$ pour tout naturel n, par récurrence sur n.

Initialisation : $n = 0$. Si f est continue alors on a déjà vue que $f(x) = f(a) + o(1)$. Alors $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons $\mathcal{P}(n)$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^n$, on peut lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n-1$ en a, c'est-à-dire que

$$\forall x \in I \quad f(x) = T_{n-1,f,a}(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{21.75}$$

La fonction $f^{(n)}$ est continue donc il existe une application $\epsilon : I \longmapsto \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} \forall t \in I \quad f^{(n)}(t) = f^{(n)}(a) + \epsilon(t) \\ \lim\limits_{t \to 0} \epsilon(t) = 0 \end{cases} \tag{21.76}$$

Alors pour tout $x \in I$, on a

$$f(x) = T_{n-1,f,a}(x) + f^{(n)}(a) \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\ \mathrm{d}t + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\epsilon(t)\ \mathrm{d}t \tag{21.77}$$

$$= T_{n-1,f,a}(x) + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\epsilon(t)\ \mathrm{d}t \tag{21.78}$$

$$= T_{n,f,a}(x) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\epsilon(t)\ \mathrm{d}t. \tag{21.79}$$

Du coup pour tout $x \in I \setminus \{a\}$ on a

$$f(x) - T_{n,f,a}(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\epsilon(t)\ \mathrm{d}t \tag{21.80}$$

$$= (x-a)^{n-1} \int_a^x \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}\epsilon(t)\ \mathrm{d}t. \tag{21.81}$$

Au voisinage de a, on a $\left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}\epsilon(t) = o(1)$. Donc au voisinage de a,

$$\int_a^x \left(\frac{x-t}{x-a}\right)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}\epsilon(t)\ \mathrm{d}t = o(x-a). \tag{21.82}$$

Par conséquent $f(x) - T_{n,f,a}(x) = o((x-a)^n))$. $\square$

Remarque : Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ et admet un $DL_n(a)$ qui est

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k (x-a)^k + o((x-a)^n) \tag{21.83}$$

alors par unicité du $DL_n(a)$, on peut identifier les coefficients, c'est-à-dire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\alpha_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

21.3.3 Retour sur les courbes paramétrées

21.3.3.1 Étude locale

Soient $R = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal direct du plan, (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$). On note $M(t)(x(t), y(t))$le point courant et Γ la trajectoire de ce point.

Rappel : Si $t_0 \in I$, on dit que le point $M(t_0)$ est régulier, ou que l'arc (I, f) est régulier en t_0, si $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} \neq \overrightarrow{0}$.

Proposition 21.8. Soit $t_0 \in I$. Supposons que $M(t_0)$ est régulier. Alors Γ admet une tangente en $M(t_0)$ dirigée par $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$.

Démonstration. On note $M_0 = M(t_0)$. Ainsi pour tout $t \in I \setminus \{t_0\}$ on a

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = (x(t) - x_0)\overrightarrow{i} + (y(t) - y_0)\overrightarrow{j} \tag{21.84}$$

$$= (x'(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0))\overrightarrow{i} + (y'(t_0)(t-t_0) + o(t-t_0))\overrightarrow{j} \tag{21.85}$$

$$= (t-t_0)\overrightarrow{f'(t_0)} + (t-t_0)o(1)(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}) \tag{21.86}$$

Ainsi

$$\frac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{||\overrightarrow{M_0M(t)}||} = \pm\frac{\overrightarrow{f'(t_0)} + o(1)(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})}{||\overrightarrow{f'(t_0)} + o(1)(\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j})||} \to \frac{\overrightarrow{f'(t_0)}}{||\overrightarrow{f'(t_0)}||}. \tag{21.87}$$

Donc Γ admet une tangente en M_0 dirigée par $\overrightarrow{f'(t_0)}$. $\square$

Les fonctions x et y sont de classe $\mathcal{C}^n$ et admettent les $DL_n(t_0)$ suivants :

$$x(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{x^{(i)}(t_0)}{i!}(t-t_0)^i + o((t-t_0)^n) \tag{21.88}$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y^{(i)}(t_0)}{i!}(t-t_0)^i + o((t-t_0)^n) \tag{21.89}$$

Si on note pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ $x_i = \frac{x^{(i)}(t_0)}{i!}$ et $y = \frac{y^{(i)}(t_0)}{i!}$, et $\overrightarrow{A_i}(x_i, y_i)$.

Alors pour tout t au voisinage de t_0 on a

$$\overrightarrow{M_0M(t)} = (t-t_0)\overrightarrow{A_i} + \overrightarrow{o}((t-t_0)^n) \tag{21.90}$$

Supposons qu'il existe au moins deux vecteurs non colinéaires parmi les $\overrightarrow{A_i}$. Cela permet de définir

$$p = \min\{i \in [\![1,n]\!] \overrightarrow{A_i} \neq \overrightarrow{0}\} \tag{21.91}$$

$$q = \min\{i \in [\![p+1,n]\!] (\overrightarrow{A_i}, \overrightarrow{A_p}) \text{ est libre}\} \tag{21.92}$$

Ainsi : pour tout $i \in [\![1,p-1]\!]$, $\overrightarrow{A_i} = \overrightarrow{0}$ et pour tout $i \in [\![p+1,q-1]\!]$ il existe un réel α_i tel que $\overrightarrow{A_i} = \alpha_i\overrightarrow{A_p}$.

Le couple $(\overrightarrow{Ap}, \overrightarrow{A_q})$ est libre, c'est donc une base du plan. Alors

$$\overrightarrow{M_0M}(t) = (t-t_0)^p\overrightarrow{A_p} + \sum_{i=p+1}^{q-1}(t-t_0)^i\alpha_i\overrightarrow{A_p} + (t-t_0)^q\overrightarrow{A_q} + \overrightarrow{o}((t-t_0)^q) \tag{21.93}$$

$$= [(t-t_0)^q + \sum_{i=p+1}^{q-1}(t-t_0)^i\alpha_i]\overrightarrow{A_p} + (t-t_0)^q\overrightarrow{A_q} + \overrightarrow{o}((t-t_0)^q) \tag{21.94}$$

Soit $(X(t), Y(t))$ les coordonnées de $M(t)$ le repère $(M_0, \overrightarrow{A_p}, \overrightarrow{A_q})$. Alors

$$X(t) = (t-t_0)^p + \sum_{i=p+1}^{q-1}(t-t_0)^i\alpha_i + o((t-t_0)^q) = (t-t_0)^p + o((t-t_0)^p) \tag{21.95}$$

et alors $X(t) \sim_{t_0} (t-t_0)^p$ et de la même manière $Y(t) \sim_{t_0} (t-t_0)^q$.

Au voisinage de t_0, $X(t)$ a le signe de $(t-t_0)^p$ et $Y(t)$ a le signe de $(t-t_0)^q$. L'allure de la corube dépend de la parité des entiers p et q.

Tangente : Pour tout réel $t \in I \setminus \{t_0\}$ alors

$$\frac{\overrightarrow{M_0M(t)}}{||\overrightarrow{M_0M(t)}||} = \pm\frac{\overrightarrow{A_p} + \overrightarrow{o}(1)}{||\overrightarrow{A_p} + \overrightarrow{o}(1)|} \to \pm\frac{\overrightarrow{A_p}}{||\overrightarrow{A_p}||}. \tag{21.96}$$

La tangente est dirigée par $\overrightarrow{A_p}$.

Allure en fonction de la parité de p et de q :

— si p est impair et si q est pair alors M_0 est un point birrégulier ;
— si p est impair et si q est impair alors M_0 est un point d'inflexion ;
— si p est pair et si q est impair alors M_0 est un point de rebroussement de première espèce ;
— si p est pair et si q est pair alors M_0 est un point de rebroussement de deuxième espèce ;

21.3.3.2 Asymptotes

Soit α une borne de I, $(\alpha \notin I)$ avec $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que $\lim_{t\to\alpha} \frac{Y(t)}{X(t)} = p \in \mathbb{R}$.

Alors la courbe admet une direction asymptotique de pente p. Deux cas se présentent selon que $\alpha \in \mathbb{R}$ ou pas.

— Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on suppose que l'on peut faire un développement limité de $y(t) - px(t)$ au voisinage de α. Si on montre que

$$y(t) = px(t) + m + c(t-\alpha)^q + o((t-\alpha)^q) \tag{21.97}$$

alors la droite d'équation $y = px + m$ est asympote à la courbe. On peut connaître la position de l'asymptote par rapport à la courbe à l'aide du signe de $c(t-\alpha)^q$.

— Si $\alpha = \pm\infty$, on pose $u = \frac{1}{t}$ qui tend vers zéro. On fait un développement limité au voisinage de zéro de $y(t) - px(t) = y\left(\frac{1}{u}\right) - px\left(\frac{1}{u}\right)$. Si on montre que

$$y\left(\frac{1}{u}\right) = px\left(\frac{1}{u}\right) + m + c(u)^q + o(u^q) \tag{21.98}$$

alors la droite d'équation $y = px + m$ est asymptote à la courbe et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de cu^q.

21.4 Calcul approché par la méthode des trapèzes

21.4.1 Principe de la méthode

Soient deux réels a et b tels que $a < b$, une fonction continue de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{R}$. On dispose alors de $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ qu'on ne sait pas forcèment calculer. On va approcher I par $\int_a^b g(x)\,\text{x̣}$ où g sera une fonction continue “plus simple” que f.

En un pas, $(n = 1)$. On choisit pour g la fonction affine qui prend les mêmes valeurs que f en a et en b, c'est-à-dire

$$\forall x \in [a\,;b] \quad g(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a). \tag{21.99}$$

On approche I par $T_1 = \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$. Lorsqu'on calcule on a

$$T_1 = \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x = (b-a)f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\ \mathrm{d}x \tag{21.100}$$

$$= (b-a)f(a) + (f(b)-f(a))\left(\frac{b-a}{2}\right) \tag{21.101}$$

$$= (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{21.102}$$

En n pas, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. On considère la subdivision régulière σ de $[a\,;b]$ à $n+1$ points.

$$\sigma = (a_k)_{0\le k\le n}\ \forall k \in [\![0,n]\!] \quad a_k = a + k\frac{b-a}{n} \tag{21.103}$$

Sur chaque intervalle $[a_k\,;a_{k+1}]$ on définit la fonction affine g_k qui prend les mêmes valeurs que f en a_k et a_{k+1}. C'est-à-dire

$$\forall x \in [a_k\,;a_{k+1}] \quad g_k(x) = f(a_k) + \frac{f(a_{k+1})-f(a_k)}{a_{k+1}-a_k}(x-a_k). \tag{21.104}$$

On approche I par le réel

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(x)\ \mathrm{d}x \tag{21.105}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{k+1}-a_k}{2}(f(a_k)+f(a_{k+1})) \tag{21.106}$$

$$= \frac{b-a}{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(f(a_k)+f(a_{k+1})) \tag{21.107}$$

$$= \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}(f(a_k)+f(a_{k+1}))\right). \tag{21.108}$$

21.4.2 Majoration de l'erreur lorsque f est $\mathcal{C}^2$

On cherche à majorer la quantité $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - T_n$. Lorsque $n=1$, il s'agit de majorer $\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}$

Lemme 21.1. *Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^2([a\,;b],\mathbb{R})$. La fonction f'' est continue sur $[a\,;b]$ et donc bornée. Alors*

$$\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\right| \le \frac{|b-a|^3}{12}\sup_{[a\,;b]}|f''|. \tag{21.109}$$

Démonstration. Soit $M_2 = \sup\limits_{[a\,;b]}|f''|$ et soit l'application

$$g\colon \left\{\begin{array}{ccc} [a\,;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \end{array}\right. . \tag{21.110}$$

Soit aussi $x_0 \in \,]a\,;b[$ et la fonctionφ: $\left\{ \begin{array}{ccc} [a\,;b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x)-g(x)-k(x-a)(x-b) \end{array} \right.$.
On choisit la constante k de sorte que $\varphi(x_0)=0$. Alors $k=\frac{f(x_0)-g(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors φ aussi est de classe $\mathcal{C}^2$. De plus $\varphi(a)=\varphi(x_0)=\varphi(b)=0$.

La fonction φ est continue sur $[a\,;x_0]$, dérivable sur $]a\,;x_0[$ et $\varphi(a)=\varphi(x_0)$ alors le théorème de Rolle nous dit qu'il existe un point $d \in \,]a\,;x_0[$ tel que $\varphi'(d)=0$. De la même manière φ est continue sur $[x_0\,;b]$, dérivable sur $]x_0\,;b[$ et $\varphi(x_0)=\varphi(b)$ alors le théorème de Rolle nous dit qu'il existe un point $e \in \,]x_0\,;b[$ tel que $\varphi'(e)=0$.

La fonction φ' est continue sur $[d\,;e]$, dérivable su $]d\,;e[$ et $\varphi'(d)=\varphi'(e)$ alors le théorème de Rolle nous dit qu'il existe un poinbt $c_{x_0} \in \,]d\,;e[\, \subset]a,b[$ tel que $\varphi''(c_{x_0})=0$.

Or pour tout $x \in [a\,;b]$, $\varphi''(x)=f''(x)-2k$.

On vient de montrer que pour tout $x_0 \in]a,b[$ il existe $c_{x_0} \in \,]a\,;b[$ tel que $f''(c_{x_0})=2\frac{f(x_0)-g(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$. C'est-à-dire

$$f(x_0)-g(x_0)=\frac{1}{2}f''(c_{x_0})(x_0-a)(x_0-b). \tag{21.111}$$

Donc

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{2}f''(c_x)(x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x. \tag{21.112}$$

Alors

$$\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M_2}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)\,\mathrm{d}x. \tag{21.113}$$

L'intégrale vaut $\frac{(b-a)^3}{6}$ donc

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))\right| = \left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{M_2}{12}(b-a)^3. \tag{21.114}$$

□

Pour démontrer plus génralement cette majoration, supposons que $n \in \mathbb{N} \setminus$

$\{0,1\}$. Alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} g_k(x)\,\mathrm{d}x\right| \tag{21.115}$$

$$= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x)-g_k(x))\,\mathrm{d}x\right| \tag{21.116}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(x)-g_k(x))\,\mathrm{d}x\right| \tag{21.117}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M_2}{12}(a_{k+1}-a_k)^3 \tag{21.118}$$

$$\leq \frac{M_2}{12}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\right)^3 \tag{21.119}$$

$$\leq \frac{M_2}{12}\frac{(b-a)^3}{n^2}. \tag{21.120}$$

On a ainsi montré que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a\,;b]$ alors

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_n\right| = O\left(\frac{1}{n^2}\right), \tag{21.121}$$

où $n+1$ est le nombre de points de la subdivision. On admet que ce résultat est encore valable lorsque f est seulement de classe $\mathcal{C}^1$.

21.4.3 Intérêt du procédé de dichotomie

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, alors $T_n = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k)\right)$. Pour calculer T_n, on a besoin de calculer la valeur de f en $n+1 = 2+(n-1)$ points. Pour passer de T_n à T_{n+1}, on a besoin de calculer f en n nouveaux points.

$$T_{2n} = \frac{b-a}{2n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{2n-1} f(a+k\frac{b-a}{2n}\right) \tag{21.122}$$

$$= \frac{T_n}{2} + \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+(2k+1)\frac{b-a}{2n}\right). \tag{21.123}$$

Donc pour passer de T_n à T_{2n}, il suffit de calculer la valeur de f en n nouveaux points. C'est donc plus intéressant de considérer des subdivisions dichotomiques, c'est-à-dire en divisant l'intervalle en deux parties égales à chaque étape.

21.5 Calcul de primitives

21.5.1 Primitives des fonctions usuelles

On commence par donner une table, la table **??**, de primitives des fonctions usuelles.

$f(x)$	$F(x)$	I
$x^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$]0, +\infty$
$\ln\lvert x\rvert$	$x \ln x - x$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\lvert x + \sqrt{x^2+a}\rvert$	$\begin{cases} a > 0 & \mathbb{R} \\ a < 0 &]-\infty\,; -\sqrt{-a}[\text{ ou }]-\sqrt{-a}\,; +\infty[\end{cases}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sinh x$	$\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\cosh x$	$\sinh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$]-\pi/2 + k\pi\,; \pi/2 + k\pi[\,, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{cotan} x$	$]k\pi\,; (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\frac{1}{\tanh x}$	$\mathbb{R}_-^*$ ou $\mathbb{R}_+^*$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert$	$]-\pi/2 + k\pi\,; \pi/2 + k\pi[\,, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotan} x$	$\ln\lvert\sin x\rvert$	$]k\pi\,; (k+1)\pi[\,, k \in \mathbb{Z}$
$\tanh x$	$\ln\cosh x$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{1+x}{1-x}\right\rvert$	$]-\infty\,; -1[$, ou $]-1\,; 1[$ ou alors $]1\,; +\infty[$

TABLEAU 21.2 – Primitives de fonctions usuelles

21.5.2 Exponentielle polynôme

Proposition 21.9. Soient $a \in R^*$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P)$ et tel que $x \longmapsto Q(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ soit une primitive de $x \longmapsto P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$.

Démonstration. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ “Pour tout polynôme P de $R_n[X]$ il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(Q) = \deg(P)$ et tel que $x \longmapsto Q(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ soit une primitive de $x \longmapsto P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$.”

Initialisation : $n = 0$ Pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}_0[X]$, il existe un réel α tel que $P = \alpha$. Alors $Q = \frac{\alpha}{a}$ à le même degré que P. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Soit $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$. En intégrant par parties, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^x P(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \left[P(t)\frac{\mathrm{e}^{at}}{a}\right]_0^x - \int_0^x \frac{P'(t)\,\mathrm{e}^{at}}{a}\,\mathrm{d}t \tag{21.124}$$

$$= \frac{1}{a}(P(x)\,\mathrm{e}^{ax} - P(0) - \int_0^x P'(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t). \tag{21.125}$$

Comme $P' \in \mathbb{R}_n[X]$, d'après l'hypothèse de récurrence, il existe un polynôme $Q_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\deg(Q_0) = \deg(P)$ et tel que $x \longmapsto Q_0(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ est une primitive de $P'(x)\,\mathrm{e}^{ax}$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$, on a donc

$$\int_a^x P(t)\,\mathrm{e}^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}(P(x)\,\mathrm{e}^{ax} - P(0) - (Q_0(x)\,\mathrm{e}^{ax} - Q_0(0)) \tag{21.126}$$

$$= (P(x) - Q_0(x))\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a} - \frac{P(0) - Q_0(0)}{a}. \tag{21.127}$$

On pose $Q = \frac{P-Q_0}{a}$ et on a $\deg(Q) = \deg(P)$ et $x \longmapsto Q(x)\,\mathrm{e}^{ax}$ est une primitive de $x \longmapsto P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a montré que $\mathcal{P}(0)$ était vraie et que pour tout naturel n, $\mathcal{P}(n)$ entraîne $\mathcal{P}(n+1)$. Alors par théorème de récurrence pour tout naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. □

En pratique, on peut :
- soit chercher Q par une méthode de coefficients indéterminés ;
- soit faire des intégrations par parties successives, cependant à éviter si $\deg(P) > 2$.

Remarque : Cette méthode permet également de trouver des primitives pour des applications de la formes :
- polynôme $\times$ sinh ou cosh, par passage à l'exponentielle ;
- polynôme $\times$ sin ou cos, par passage à l'exponentielle complexe.

21.5.3 Fractions rationelles

Toute fraction rationelle peut être décomposée en éléments simples et il est possible de trouver des primitives des éléments simples à l'aide des fonctions usuelles. On utilise le logarithme népérien et l'arctangente.

21.5.4 Fonctions polynomiale en $\cos$ ou $\sin$

On veut déterminer des primitives de fonctions qui sont somme de termes de la forme $t \longmapsto \cos^p t \sin^q t$ avec p et q des naturels.

Si p est impair alors il esite $k \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2k+1$. On note $\int \cos^p x \sin^q x \,\mathrm{d}x$ une primitive quelconque de la fonction $t \longmapsto \cos^p t \sin^q t$ et alors

$$\int \cos^{2k} x \sin^q x \cos x \,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 x)^k \sin^q x (\cos x \,\mathrm{d}x). \tag{21.128}$$

En effectuant le changement de variable $\mathcal{C}^1$: $u = \sin x$ alors

$$\int \cos^p x \sin^q x \,\mathrm{d}x = \int (1-u^2)^k u^q \,\mathrm{d}u. \tag{21.129}$$

On s'est ramené à une intégrale de fonction polynomiale que l'on sait calculer.

Si q est impair, alors il existe un naturel k tel que $q = 2k+1$ et de la même manière on a

$$\int \cos^p x \sin^q x \,\mathrm{d}x = -\int u^p (1-u^2)^k \,\mathrm{d}u. \tag{21.130}$$

en faisant le changement de variable $\mathcal{C}^1$: $u = \cos x$.

Si p et q sont pairs, ces méthodes ne fonctionnent pas. On doit linéariser les expressions.

21.5.5 Fractions rationelles en $\cos$ et $\sin$

Soit $F(X, Y)$ une fraction rationelle à deux indéterminées. On veut calculer des primitives de la fonction $x \longmapsto F(\cos x, \sin x)$. On doit faire un changement de variable, ce changement de variable est indiqué par les *régles de Bioche*.

Soit pour "tout" x, $w(x) = F(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$. Alors les régles sont données par la table **??**.

Si $w(x)$ est invariant par un changement de x en	on fait le changement de variable
$-x$	$t \to \cos x$
$\pi - x$	$t \to \sin x$
$\pi + x$	$t \to \tan x$

Tableau 21.3 – Régles de Bioche

Dans tous les cas, on peut utiliser le changement de variable universel $t \to \tan\left(\frac{t}{2}\right)$. Cependant, il conduit bien souvent à des calculs compliqués. On essaye d'abord les régles de Bioche.

⚠Ne pas oublier de mettre l'élément différentiel "dx" lorsqu'on vérifie l'invariance.

⚠Avec la tangete, il faut faire attention aux intervalles sur lesquels on se place pour que le changement de variable soit $\mathcal{C}^1$, voire même bien défini.

21.5.6 Fractions rationelles en exponentielles, . . .

Soit $F(X)$ une fraction rationelle. Soit $G(X, Y)$ une fraction rationelle à deux indéterminées. On veut calculer des primitives des fractions $x \longmapsto F(\mathrm{e}^x)$ et $x \longmapsto G(\sinh x, \cosh x)$.

Il existe deux méthodes :

1. On fait le changement de variable $t = \mathrm{e}^x$ pour se ramener à une fraction rationelle ;
2. On utilise la "cousine trigonométrique". On applique les régles de Bioche avec $\int G(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$. On pose $w(x) = G(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$ et les régles sont données par la table **??**

Si $w(x)$ est invariant par un changement de x en	on fait le changement de variable
$-x$	$t \to \cosh x$
$\pi - x$	$t \to \sinh x$
$\pi + x$	$t \to \tanh x$

Tableau 21.4 – Cousine trigonométrique

Dans tous les cas, on peut prendre $t = \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$ mais les claculs sont souvent plus compliqués. Alors on essaie les régles avant.

21.6 Extension aux fonctions à valeur complexe

On considère des fonctions définies sur un intervalle réel I à valeur dans $\mathbb{C}$.

21.6.1 Primitives

Définition 21.3. Soit $f \in \mathbb{C}^I$. Une application $F \in \mathbb{C}^I$ est appelée primitive de f si et seulement si :

1. F est dérivable ;

2. $F' = f$.

De l'étude de la dérivation des fonctions à valeurs complexes, il vient :

Proposition 21.10. Soient deux applications f et F de I vers $\mathbb{C}$, alors
— F est une primitive de f si et seulement si $\Re(F)$ et $\Im(F)$ sont des primitives respectives de $\Re(f)$ et $\Im(f)$.
— Si F est une primitive de f, alors l'ensemble des primitives de f est $\{F + \tilde{c}, c \in \mathbb{C}\}$.

Théorème 21.9 (Théorème fondamental)**.** *Soit f une fonction continue de I vers $\mathbb{C}$. Alors f admet des primitives, de plus*

1. *pour tout $t_0 \in I$, il existe une seule primitve Φ_0 de f qui s'annule en t_0 ;*
2. *toutes les primitives de f sont de classe $\mathcal{C}^1$.*

Démonstration. La fonction f est continue de I vers $\mathbb{C}$ donc $\Im(f)$ et $\Re(f)$ sont aussi continues de I vers $\mathbb{R}$. Elles admettent des primitives donc f admet des primitives.

1. l'application $t \longmapsto \int_{t_0}^{t} \Re(f)$ est une primitive de $\Re(f)$ quiu s"annule en t_0, idem pour $t \longmapsto \int_{t_0}^{t} \Im(f)$. Alors $t \longmapsto \int_{t_0}^{t} f$ est une primitive de f qui s'annule en t_0. L'unicité découle du fait que les primitives ne différent que d'une constante.
2. Les primitives de f sont de classe $\mathcal{C}^1$ car leurs parties imaginaires et réelles sont de classe $\mathcal{C}^1$ en tant que primitives de fonctions continues réelles $\Re(f)$ et $\Im(f)$.

□

Proposition 21.11. Soient $(a, b) \in I^2$ et $f \in \mathcal{C}([a\,;b], \mathbb{C})$. Si F est une primitive de f, alors

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = F(b) - F(a) \tag{21.131}$$

Corollaire 21.11.1. *Soient $(a, b) \in I^2$ et $f \in \mathcal{C}^1([a\,;b], \mathbb{C})$, alors*

$$\int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t = f(b) - f(a) \tag{21.132}$$

21.6.2 Théorème du relévement

Théorème 21.10. *Soient un intervalle réel I et $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ avec $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour tout $t \in I$, $|f(t)| = 1$ alors il existe une application $\theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout $t \in I$ on ait $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(t)}$.*

Analyse. Supposons qu'il existe une telle application θ. Alors comme les applications f et $t \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(t)}$ sont dérivables. Alors pour tout $t \in I$ on a

$$f'(t) = \mathrm{i}\,\theta'(t) f(t), \tag{21.133}$$

et puisque f est de module 1, c'est équivalent à

$$\theta'(t) = \frac{f'(t)}{\mathrm{i}\,f(t)}. \tag{21.134}$$

L'application θ est donc une primitive de l'application $t \longmapsto \frac{f'(t)}{\mathrm{i}\,f(t)}$ sur I. □

Synthèse. Soit l'application $g\colon \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & \frac{f'(t)}{\mathrm{i}\, f(t)} \end{array}\right.$. Cette application est définie et elle est continue.

Soit $t_0 \in I$ et θ_0 un argument de $f(t_0)$. On peut alors définir la primitive θ de g qui vaut θ_0 en t_0, c'est à dire

$$\forall t \in I \quad \theta(t) = \int_{t_0}^{t} g(u)\ \mathrm{d}u + \theta_0. \tag{21.135}$$

Cette application est de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $\psi\colon \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \longmapsto & f(t)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta(t)} \end{array}\right.$. Par produit et composée, ψ est de classe $\mathcal{C}^k$ et donc au moins de classe $\mathcal{C}^1$. Alors pour tout $t \in I$, on a

$$\psi'(t) = f'(t)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta(t)} - \mathrm{i}\,\theta'(t) f(t)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta(t)} \tag{21.136}$$

$$= \left(f'(t) - \mathrm{i}\, f(t)\frac{f'(t)}{\mathrm{i}\, f(t)}\right)\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta(t)} = 0. \tag{21.137}$$

Donc ψ est constante sur I et comme $\psi(t_0) = f(t_0)\,\mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,\theta_0} = 1$ (puisque $f(t_0) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta_0}$. Donc pour tout $t \in I$, $\psi(t) = 1$, c'est-à-dire que $f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(t)}$. □

Remarque : Si $f \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ et si elle ne s'annule pas, alors on peut appliquer le théorème du relévement à $t \longmapsto \frac{f(t)}{|f(t)|}$. Il existe alors une application $\theta \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{C})$ telle que pour tout $t \in I$, on a $f(t) = |f(t)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(t)}$.

21.6.3 Inégalité des accroissements finis

⚠Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis ne s'applique pas aux fonctions à valeurs complexes.

Proposition 21.12. Soit $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et deux réels $a < b$. Alors f' est bornée sur $[a\,;b]$ et

$$|f(b) - f(a)| \leq \sup_{[a\,;b]} |f'|(b-a) \tag{21.138}$$

Démonstration.

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f'(t)\ \mathrm{d}t| \leq (b-a) \sup_{[a\,;b]} |f'|. \tag{21.139}$$

□

21.6.4 Formules de Taylor

21.6.4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 21.11. *Soient un intervalle réel I, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$. Alors*

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t \tag{21.140}$$

C'est la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n appliquée à f au point a.

Démonstration. Il suffit de prendre $\Re(f)$ et $\Im(f)$. □

21.6.4.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 21.12. *Soient un intervalle I, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I, \mathbb{C})$. La fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur un segment donc bornée. Pour tout réel $x \in I$ alors*

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup \left| f^{(n+1)} \right| . \tag{21.141}$$

C'est l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre n appliquée à f au point a.

Démonstration. Idem. □

21.6.4.3 Formule de Taylor-Young et développements limités

Théorème 21.13. *Soient I un intervalle réel, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{C})$. Alors la fonction f admet le $DL_n(a)$ suivant :*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n) . \tag{21.142}$$

C'est la formule de Taylor-Young à l'ordre n appliquée à f en a.

Démonstration. Idem. □

Définition 21.4. Soient I un intervalle réel, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{C}^I$. La fonction f admet un $DL_n(a)$ si et seulement s'il existe une famille $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{C}^{n+1}$ et une application $\epsilon \in \mathbb{R}^I$ telles que

$$\forall x \in I \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-a)^k + \epsilon(x)(x-a)^n. \tag{21.143}$$

On vérifie facilement que $f \in \mathbb{C}^I$ admet un $DL_n(a)$ si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ admettent des $DL_n(a)$ et auquel cas :

$$P_n(f) = P_n(\Re(f)) + \mathrm{i}\, P_n(\Im(f)). \tag{21.144}$$

Chapitre 22

Matrices

Sommaire

22.1 Opérations sur les matrices

22.1.1 $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

22.1.1.1 Définition

Définition 22.1. On appelle matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ toute application A: $\left\{\begin{array}{ccc} [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array}\right.$.

Notation : Au lieu d'écrire $A\colon \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array} \right.$, on note $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$. On note aussi la matrice A par un "tableau" rectangulaire de n lignes et p colonnes

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}. \tag{22.1}$$

Vocabulaire :
— Si $n = p$, on parle de matrice carrée. La diagonale de A est le vecteur $(a_{ii})_{i\in[\![1;n]\!]}$;
— si $n = 1$, on parle de matrice ligne ;
— si $p = 1$, on parle de matrice colonne ;
— pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, le vecteur $(a_{ij})_{j\in[\![1;p]\!]}$ est le le i^{e} vecteur ligne ;
— pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, le vecteur $(a_{ij})_{i\in[\![1;n]\!]}$ est le le j^{e} vecteur colonne.

On appelle sous matrice de la matrice $A\colon \left\{ \begin{array}{ccc} [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,j) & \longmapsto & a_{ij} \end{array} \right.$ toute restriction de l'application A à $I_1 \times J_1$ avec $I_1 \neq \emptyset \subset [\![1\,;n]\!]$ et $J_1 \neq \emptyset \subset [\![1\,;p]\!]$.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

$$\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \{A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}, \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!] \quad a_{ij} \in \mathbb{K}\} \tag{22.2}$$

Pour tout couple $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on définit la matrice nulle à n lignes et p colonnes par $0_{n,p} = (0)_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$.

Si $n = p$, on définit la matrice identité, notée I_n par $I_n = (\delta_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$.

Définition 22.2 (Égalité de deux matrices)**.** Soit quatre entiers naturels non nuls n, p, n' et p'. Soient deux matrices $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $N \in Mnpn'p'\mathbb{K}$. Alors

$$M = N \iff n = n',\ p = p' \text{ et } \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!] \ \ a_{ij} = b_{ij}. \tag{22.3}$$

22.1.1.2 Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel

On munit l'ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de deux lois :
— une addition, notée $+$, définie par :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2 \quad S = A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \tag{22.4}$$

avec

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!] \quad s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}. \tag{22.5}$$

— une multiplication externe, notée $\cdot$, définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \ \ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad B = \lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \tag{22.6}$$

avec

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!] \quad b_{ij} = \lambda a_{ij} \tag{22.7}$$

Théorème 22.1. *L'ensemble $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, \perp)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à np.*

La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ où pour tout $(i_0, j_0) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$ on a $E_{i_0j_0} = (e_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ et

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!] \quad e_{ij} = \delta_{ii_0}\delta_{jj_0}. \tag{22.8}$$

Démonstration. Toute matrice $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit comme

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}E_{ij}. \tag{22.9}$$

Tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ s'écrit comme une combinaison linéaire de la famille $(E_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$. Le cardinal de $(E_{i,j})$ vaut np donc cette famille est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. □

22.1.1.3 Matrice d'application linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle p et $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Soit F un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle n et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 22.3. On appelle matrice de l'application linéaire u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ la matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!] \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i. \tag{22.10}$$

Si $E = F$, $\mathcal{E} = \mathcal{F}$ et on parle de matrice dans la base $\mathcal{E}$ de l'endomorphisme linéaire u de E. La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ est alors carrée.

Exemples : Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie non nulle p.

— Homothéties : Soit un scalaire α et l'homothétie $h_\alpha\colon \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & \alpha x \end{cases}$.
  Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E. Pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$ on a $h(e_j) = \alpha e_j$. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(h_\alpha) = \alpha I_p$. Si $\alpha = 1$, on voit que I_p est la matrice de l'identité.

— Projecteurs et symétries : Soient E_1 et E_2 deux sous espaces vectoriels supplémentaires de E de dimension non nulles.

$$E = E_1 \oplus E_2 \quad \dim(E_1) = r \in [\![1\,;p-1]\!]. \tag{22.11}$$

  Soit p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et s la symétrie associée, $s = 2p - \mathrm{Id}$. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base adpatée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_2$, puisqu'ils sont supplémentaires dans E. Soient

$$P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(p) \quad S = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(s) \tag{22.12}$$

  et

$$\begin{cases} p(e_i) = e_i, s(e_i) = e_i & i \in [\![1\,;r]\!] \\ p(e_i) = 0, s(e_i) = -e_i & i \in [\![r+1\,;p]\!]. \end{cases} \tag{22.13}$$

22.1.1.4 Isomorphisme canonique entre $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soient $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{F}_c$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Soit l'application $\Phi\colon \begin{cases} \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_c,\mathcal{F}_c}(u) \end{cases}$.

Proposition 22.1. L'application Φ est linéaire.

Démonstration. Soient u et v deux applications de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et un scalaire λ.

Pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$, le j^{e} vecteur colonne de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{E}_c,\mathcal{F}_c}(\lambda u + v)$ est le vecteur des coordonnées de $(\lambda u + v)(e_j)$ dans la base $\mathcal{F}_c$. De plus

$$(\lambda u + v)(e_j) = \lambda u(e_j) + v(e_j). \tag{22.14}$$

Ensuite, on applique les définitions de la somme de matrice et de la multiplication par un scalaire pour obtenir le résultat. □

Proposition 22.2. L'application Φ est bijective.

Démonstration. Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $\Phi(u) = M$ car : une application linéaire est entiérement déternminée par l'image d'une base. Ainsi, u est entiérement déterminée par la donnée de $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$. Les vecteurs $u(e_1), \ldots, u(e_p)$ sont complétement déterminés par leurs coordonnées dans la base $\mathcal{F}_c$. □

Grâce à ces propositions, il découle le théorème suivant.

Théorème 22.2. Φ *est un isomorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de* $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ *sur* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*. Nous disposons alors de* Φ^{-1}*. Pour toute matrice* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, l'application* $u = \Phi^{-1}(A)$ *est appelée application linéaire canoniquement associée à la matrice* A*.*

Exemple : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Soit u l'application linéaire canoniquement associée à A. Alors

$$u((1,0,0)) = (1,4) \quad u((0,1,0)) = (2,5) \quad u((0,0,1)) = (3,6) \tag{22.15}$$

Pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ on a

$$u(x) = x_1(1,4) + x_2(2,5) + x_3(3,6) = (x_1 + 2x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 + 6x_3) \tag{22.16}$$

22.1.1.5 Identification d'un vecteur de $\mathbb{K}^n$ et une matrice colonne

Soit l'application $\Psi\colon \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{cases}$.

Théorème 22.3. *L'application* Ψ *est un ismorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de* $\mathbb{K}^n$ *sur* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ *qui permet d'identifier les vecteurs de* $\mathbb{K}^n$ *avec les matrices colonnes de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*.*

22.1.1.6 Identification d'un vecteur de $\mathbb{K}^p$ et une matrice ligne

Soit l'application $\gamma\colon \begin{cases} (\mathbb{K}^p)^* & \longrightarrow & \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \begin{pmatrix} f(e_1) & \ldots & f(e_p) \end{pmatrix} \end{cases}$.

Théorème 22.4. *L'application* γ *est un ismorphisme de* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels de* $(\mathbb{K}^p)^* = \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K})$ *sur* $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ *qui permet d'identifier les formes linéaires de* $(\mathbb{K}^p)^*$ *avec les matrices lignes de* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$*.*

22.1.2 Produits de matrices

22.1.2.1 Définition

Soient trois naturels non nuls n, p et m.

Définition 22.4. Soient deux matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. On définit le produit BA par

$$BA = (c_{ij})_{(i,j)\in[\![1;m]\!]\times[\![1;p]\!]} \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}) \tag{22.17}$$

avec

$$\forall i \in [\![1\,;m]\!]\ \forall j \in [\![1\,;p]\!] \quad c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}. \tag{22.18}$$

En pratique,

$$\begin{pmatrix} b_{i1} & \dots & b_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{i1}a_{1j} & \dots & b_{in}a_{nj} \end{pmatrix}. \tag{22.19}$$

⚠Pour donner un sens à BA, il faut que le nombre de colonne de B soit égal au nombre de lignes de A.

⚠Le produit BA peut être défini sans que AB existe.

⚠Même si les deux produits sont définis, ils ne sont en général pas de même dimension.

⚠Même si les deux produits sont définis et s'ils sont de même dimension, ils ne sont pas égaux en général. En effet si on note $A = E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors

$$BA = E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad AB = E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{22.20}$$

Exemple : Produit de matrices de bases canoniques. Soient n, m et p trois naturels non nuls. Notons (E_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, (E'_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et (E''_{ij}) la base canonique de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$. Pour tous $i \in [\![1\,;m]\!]$, $j \in [\![1\,;n]\!]$, $k \in [\![1\,;n]\!]$ et $l \in [\![1\,;p]\!]$ on a

$$E'_{ij}E_{kl} = (e_{\alpha\beta}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}). \tag{22.21}$$

Alors

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \sum_{\gamma=1}^{n} (E'_{ij})_{\alpha\gamma}(E_{kl})_{\gamma\beta} && (22.22)\\ &= \sum_{\gamma=1}^{n} \delta_{i\alpha}\delta_{j\gamma}\delta_{k\gamma}\delta_{l\beta} && (22.23)\\ &= \delta_{i\alpha}\delta_{jk}\delta_{l\beta} && (22.24)\\ &= \delta_{jk}(\delta_{i\alpha}\delta_{l\beta}) && (22.25)\\ &= \delta_{jk}(E''_{il})_{\alpha\beta}. && (22.26) \end{aligned}$$

Donc

$$E'_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E''_{il}. \tag{22.27}$$

22.1.2.2 Produit matriciel et composé d'applications linéaires

Soient trois naturels non nuls m, n et p. Soient $\mathcal{E}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{F}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^m$, $\mathcal{G}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$.

Proposition 22.3. Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Alors $v \circ u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^m)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}_c,\mathcal{F}_c}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_c,\mathcal{F}_c}(v)\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}_c,\mathcal{E}_c}(u) \tag{22.28}$$

Démonstration. Soient $A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}_c,\mathcal{E}_c}(u)$ et $B = (b_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_c,\mathcal{F}_c}(v)$. On note $C = BA$. Soit un naturel $j \in [\![1\,;p]\!]$ et alors

$$\begin{aligned}
v \circ u(g_j) &= v\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i\right) && (22.29)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v(e_i) && (22.30)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \sum_{k=1}^{m} b_{ki} f_k && (22.31)\\
&= \sum_{k=1}^{m} c_{kj} f_k && (22.32)
\end{aligned}$$

D'où $BA = C = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}_c,\mathcal{F}_c}(v \circ u)$. □

22.1.2.3 Écriture matricielle de l'effet d'une application linéaire sur un vecteur

Proposition 22.4. Soient $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$, A la matrice de u dans les bases canoniques $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{F}_c$ respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Soit $x \in \mathbb{K}^p$ et $y = u(x)$. X est le vecteur colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{E}_c$. Y est le vecteur colonne des coordonnées de $u(x)$ dans $\mathcal{F}_c$. Alors

$$Y = AX. \tag{22.33}$$

Démonstration. Notons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Pour tout

$i \in [\![1\,;n]\!]$ on a $(AX)_i = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}x_k$. Alors

$$y = u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\right) \tag{22.34}$$
$$= \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \tag{22.35}$$
$$= \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \tag{22.36}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} x_j a_{ij}\right) f_i \tag{22.37}$$
$$= \sum_{j=1}^{p} (AX)_i f_i \tag{22.38}$$

Donc $Y = AX$. □

22.1.2.4 Propriétés du produit matriciel

Théorème 22.5. *Soient quatres naturels non nuls m, n, p et k. Soit un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. Soient cinq matrices $(B, B') \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})^2$, $(C, C') \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $C \in \mathcal{M}_{k,m}(\mathbb{K})$. Alors*

1. *pseudo associativité $C(BA) = (CB)A$;*
2. *pseudo distributivité $B(A + A') = BA + BA'$;*
3. *pseudo distributivité $(B + B')A = BA + B'A$;*
4. *pseudo associativité $(\lambda B)A = \lambda(BA) = B(\lambda A)$;*
5. *élément neutre $I_n A = A$;*
6. *élément neutre $AI_p = A$.*

Démonstration. Démontrons par exemple le deuxième point. Soient u, u' et v les applications linéaires canoniquement respectiviements associées à A, A' et B. Alors

$$B(A + A') = \mathrm{Mat}(v) \cdot (\mathrm{Mat}(u) + \mathrm{Mat}(u')) \tag{22.39}$$
$$= \mathrm{Mat}(v \circ (u + u')) \tag{22.40}$$
$$= \mathrm{Mat}(v \circ u) + \mathrm{Mat}(v \circ u') \tag{22.41}$$
$$= BA + BA'. \tag{22.42}$$

Les autres se démontrent de manière analogue. □

Remarque : L'application $F\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K}) \\ (B, A) & \longmapsto & BA \end{array} \right.$ est linéaire par rapport à chacun de ses arguments mais elle n'est pas linéaire. On dira que F est bilinéaire.

22.1.3 Anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit un naturel non nul n. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

22.1.3.1 Structure

On a déjà vu que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \perp)$ était un espace vectoriel. Alors $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe commutatif. De plus la multiplication des matrices est une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Elle est associative et distributive par rapport à l'addition. De plus I_n est l'élément neutre de la multiplication.

Ainsi, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot)$ est un anneau.

Remarque : $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. C'est un anneau non-commutatif et non intègre dès que $n \geq 2$.

$$E_{11}E_{1n} = \delta_{11}E_{1n} \qquad E_{1n}E_{11} = \delta_{n1}E_{11} = 0\,(n \geq 2) \tag{22.43}$$

22.1.3.2 Isomorphisme canonique entre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$

Soit $\mathcal{E}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Soit l'application

$$\Phi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(\mathbb{K}^p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_c}(u) \end{array} \right. . \tag{22.44}$$

On sait que Φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels et de plus

$$\forall (u,v) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p)^2 \qquad \Phi(v \circ u) = \Phi(v)\Phi(u) \quad \Phi(\mathrm{Id}) = I_n \tag{22.45}$$

Alors c'est un isomorphisme d'anneaux.

22.1.4 Matrices carrées inversibles, groupe linéaire $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$

On définit le groupe linéaire $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ comme étant l'ensemble des matrices carrées inversibles. C'est-à-dire

$$\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \;\; AB = BA = I_n\} = \mathfrak{U}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K})) \tag{22.46}$$

On en déduit

Théorème 22.6. *$(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \cdot)$ est un groupe, le groupe linéaire des matrices carrées.*

Théorème 22.7. *Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$;*
2. *$u \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}^n)$;*
3. *$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \;\; AB = I_n$;*
4. *$\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \;\; BA = I_n$.*

Démonstration. Par définition $1 \implies 3$ et $1 \implies 4$.

$1 \implies 2$: A est inversible alors par définition il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$. Soit v l'endomorphisme canoniquement associée à B. Ainsi $\mathrm{Mat}(u \circ v) = \mathrm{Mat}(v \circ u) = AB = BA = I_n$. Donc $v \circ u = u \circ v = \mathrm{Id}$. Alors $u \in \mathcal{GL}(\mathbb{K}^n)$.

$2 \implies 1$: Comme u est inversible, il existe un endomorphisme $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $u \circ v = v \circ u = \mathrm{Id}$. Soit alors B la matrice de v dans la base canonique. Alors

$$AB = \mathrm{Mat}(u)\mathrm{Mat}(v) = \mathrm{Mat}(u \circ v) = \mathrm{Mat}(\mathrm{Id}) \tag{22.47}$$

alors $AB = I_n$ et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

3 $\implies$ 2 : Soit v l'endomorphisme canoniquement associé à B alors $u \circ v = \mathrm{Id}$ est bijectif donc surjectif. Alors u est surjectif. Or u est un endormorphisme en dimension finie. Donc u est bijectif.

4 $\implies$ 2 : Soit v l'endomorphisme canoniquement associé à B alors $v \circ u = \mathrm{Id}$ est bijectif donc injectif. Alors u est injectif. Or u est un endormorphisme en dimension finie. Donc u est bijectif. □

Théorème 22.8. *L'application*

$$\tilde{\Phi} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{GL}(\mathbb{K}^n) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_c}(u) \end{array} \right. \tag{22.48}$$

est un isomorphisme de groupes. Particulièrement pour toute isomorphisme $u \in \mathcal{GL}(\mathbb{K}^n)$ on a $\tilde{\Phi}(u^{-1}) = \tilde{\Phi}(u)^{-1}$.

Démonstration. L'application $\tilde{\Phi}$ est bien définie. Elle est injective puisque c'est une restriction de Φ. Elle est surjective car pour tout $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'endomorphisme canoniquement associée à A est dans $\mathcal{GL}(\mathbb{K}^n)$. De plus pour tous isomorphismes u et v de $\mathcal{GL}(\mathbb{K}^n)$ on a

$$\tilde{\Phi}(v \circ u) = \tilde{\Phi}(v) \cdot \tilde{\Phi}(u). \tag{22.49}$$

$\tilde{\Phi}$ est un isomorphisme de groupes. □

Moyen pratique pour déterminer si une matrice est inversible

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,k}(\mathbb{K})$ et u l'endomorphisme canoniquement associé. D'après ce qui précéde,

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) &\iff u \text{ est surjectif} && (22.50) \\ &\iff \forall y \in \mathbb{K}^n \ \exists x \in \mathbb{K}^n \quad y = u(x) && (22.51) \\ &\iff \forall Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \ \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad Y = AX. && (22.52) \end{aligned}$$

C'est un système d'équations linéaires à n équations et n inconnues.

$$Y = AX \iff \begin{cases} y_1 = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} x_k \\ \dots \\ y_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_k \end{cases}. \tag{22.53}$$

22.1.5 Sous anneau des matrices diagonales et triangulaires

22.1.5.1 Définition

Soient un naturel n et $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :

1. A est diagonale si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a $i \neq j \implies a_{ij} = 0$. On note $A = \mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.
2. A est triangulaire supérieure si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a $i > j \implies a_{ij} = 0$. L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $T_n^s(\mathbb{K})$.
3. A est triangulaire inférieure si et seulement si pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a $i < j \implies a_{ij} = 0$. L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $T_n^i(\mathbb{K})$.

22.1.5.2 Propriétés

Proposition 22.5.

$$T_n^s(\mathbb{K}) \bigcap T_n^i(\mathbb{K}) = \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \tag{22.54}$$

Proposition 22.6. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $T_n^s(\mathbb{K})$ et $T_n^i(\mathbb{K})$ sont des sous espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De plus

$$\dim(\mathcal{D}_n(\mathbb{K})) = n \quad \dim(T_n^s(\mathbb{K})) = \dim(T_n^i(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2} \tag{22.55}$$

Démonstration. Soit une matrice diagonale $A = \operatorname{diag}(a_{11}, \ldots, a_{nn})$, alors $A = \sum_{i=1}^n a_{ii} E_{ii}$. Ainsi $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}(E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ et la famille $(E_{ii})_{1 \leq i \leq n}$ est libre (puisque c'est une sous famille de la base canonique). Cette famille est donc une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et alors on a bien la dimension $\dim(\mathcal{D}_n(\mathbb{K})) = \operatorname{Card}((E_{ii})_{1 \leq i \leq n}) = n$.

De la même manière, on a $T_n^s(\mathbb{K}) = \operatorname{Vect}(E_{ij})_{1 \leq i \leq j \leq n}$. De la même manière la famille génératrice est une sous famille de la base canonique. Donc elle est libre. Finalement c'est une base. Le cardinal de cette famille vaut $\frac{n(n-1)}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Idem pour $T_n^s(\mathbb{K})$. □

Proposition 22.7. $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $T_n^s(\mathbb{K})$ et $T_n^i(\mathbb{K})$ sont des sous anneaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De plus $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est commutatif, $T_n^s(\mathbb{K})$ et $T_n^i(\mathbb{K})$ ne sont ni commutatifs ni intègre (si $n \geq 2$).

Démonstration. Ce sont déjà des sous espaces vectoriels, alors il s'agit de vérifier s'ils sont stables par la multiplication et si l'élémentneutre I_n leurs appartient.

Clairement, I_n est diagonale donc triangulaire supérieure et inférieure.

Soient ensuite deux matrices A et B diagonales et on note $C = AB$. Pour tous i et j dans $[\![1\,;n]\!]$ on a

$$\begin{cases} i \neq j & c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = a_{ii} b_{ij} = 0 \\ i = j & c_{ii} = a_{ii} b_{ii} \end{cases} \tag{22.56}$$

Alors C est diagonale. De plus pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ on a $c_{ii} = b_{ii} a_{ii}$ donc $AB = C = BA$.

Soient ensuite deux matrices A et B triangulaire supérieures et on note $C = AB$. Pour tous i et j dans $[\![1\,;n]\!]$ on a si $i > j$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=i}^n a_{ik} b_{kj} \tag{22.57}$$

Si $k \in [\![1\,;i-1]\!]$ alors $a_{ik} = 0$ et si $k \in [\![i\,;n]\!]$ alors $b_{ik} = 0$. D'où $c_{ij} = 0$. Alors C est triangulaire supérieure.

La preuve est analogue pour la stabilité des matrices triangulaires inférieures. □

Proposition 22.8. Soit une matrice $A \in \mathcal{A}$ où $\mathcal{A} = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ ou $T_n^s(\mathbb{K})$ ou $T_n^i(\mathbb{K})$. Ainsi, A est inversible dans $\mathcal{A}$ si et seulement si pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ $a_{ii} \neq 0$.

Démonstration. Dans le premier cas, on suppose que $\mathcal{A} = \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{aligned}
A \text{ est inversible dans } \mathcal{D}_n(\mathbb{K}) &\iff \exists B \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})\ AB = BA = I_n && (22.58)\\
&\iff \exists B = \operatorname{diag}(b_{11}, \ldots, b_{nn})\ \forall i \in [\![1\,;n]\!]\ a_{ii}b_{ii} = 1 && (22.59)\\
&\iff \forall i \in [\![1\,;n]\!]\ a_{ii} \in \mathfrak{U}(\mathbb{K}) && (22.60)\\
&\iff \forall i \in [\![1\,;n]\!]\ a_{ii} \neq 0. && (22.61)
\end{aligned}$$

Dans un deuxième cas, on suppose que $\mathcal{A} = T_n^s(\mathbb{K})$. Alors si on suppose que A est inversible dans $T_n^s(\mathbb{K})$ alors il existe une matrice triangulaire supérieure B telle que $AB = BA = I_n$. Alors pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$

$$\begin{aligned}
1 = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}b_{ki} + a_{ii}b_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}b_{ki} && (22.62)\\
&= a_{ii}b_{ii} && (22.63)
\end{aligned}$$

Alors $a_{ii} \in \mathfrak{U}(\mathbb{K})$ et donc $a_{ii} \neq 0$.

Supposons maintenant que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, a_{ii} est non nul. Il s'agit de montrer que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et que A^{-1} est triangulaire supérieure. Soient $\mathcal{E}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Alors pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, on a $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$. C'est-à-dire

$$\begin{aligned}
u(e_1) &= a_{11}e_1 && (22.64)\\
u(e_2) &= a_{11}e_1 + a_{22}e_2 && (22.65)\\
&\ldots && (22.66)\\
u(e_n) &= a_{1n}e_1 + \cdots + a_{nn}e_n. && (22.67)
\end{aligned}$$

Alors comme les a_{ii} sont non nuls, on peut inverser le système d'équation et trouver les e_i en fonction des $u(e_i)$. Alors pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$ on a $e_j \in \operatorname{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_j))$. La famille $u(\mathcal{E}_c)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$ et elle est de cardinal n, c'est donc une base de $\mathbb{K}^n$. Ainsi u est une application bijective. Alors au final A est inversible.

$$A^{-1} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}_c}(u^{-1}) \quad \forall j \in [\![1\,;n]\!]\ u^{-1}(e_j) \in \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_j). \tag{22.68}$$

Alors A^{-1} est triangulaire supérieure.

La démonstration est similaire pour la stabilité des matrices triangualires inférieures. □

22.1.6 Transposition

Soient deux naturel non nuls n et p.

Définition 22.5. Soit une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit une matrice appelée transposée de A, notée $A^\top \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, par $A^\top = (\alpha_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que pour tout couple $(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;n]\!]$ on ait $\alpha_{ij} = a_{ji}$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Proposition 22.9. Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et tout scalaire λ on a :

1. $(A^\top)^\top = A$;
2. $(\lambda A)^\top = \lambda A^\top$;
3. $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$;
4. pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et B de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ $(BA)^\top = A^\top B^\top$.

Démonstration. On démontre le dernier point. On note $A = (a_{ij})$, $A^\top = (\alpha_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $B^\top = (\beta_{ij})$. On définit $C = A^\top B^\top = (c_{ij})$ et $D = BA = (d_{ij})$. Alors pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$ et tout $j \in [\![1\,;m]\!]$ on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{ik}\beta_{kj} = \sum_{k=1}^{m} a_{ki}b_{jk} = d_{ji} \tag{22.69}$$

Alors $C = D^\top$. □

Proposition 22.10. Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^\top \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et

$$(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top. \tag{22.70}$$

Démonstration. Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors A^{-1} existe et $AA^{-1} = I_n$ et en prenant la transposée, on a $(A^{-1})^\top A^\top = I_n$. Alors $A^\top$ est inversible et $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$. □

22.1.7 Matrices symétriques et antisymétriques

Soit un naturel non nul n et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est dite
— symétrique si et seulement si $A^\top = A$;
— antisymétrique si et seulement si $A^\top = -A$.

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ symétriques est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et celui des matrices antisymétriques $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Théorème 22.9. *Les ensembles $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}). \tag{22.71}$$

De plus toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ se décompose comme

$$A = \frac{1}{2}(A + A^\top) + \frac{1}{2}(A - A^\top) \tag{22.72}$$

avec $\frac{1}{2}(A + A^\top) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\frac{1}{2}(A - A^\top) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Démonstration. L'application $s\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\top \end{array}\right.$ est un endomrophisme involutif. C'est donc une symétrie. On voit $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Inv} s$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \operatorname{Opp} s$. Alors ce sont des sous espaces vectoriels supplémentaires. Soit p le projecteur associé à s. On a $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id})$ et $q = \mathrm{Id} - p$. Alors $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Im}(p)$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathrm{Ker}(p) = Image(q)$.

Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

$$A = p(A) + (A - p(A)) \tag{22.73}$$
$$= p(A) + q(A) \tag{22.74}$$

La famille $p(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est génératrice de $\mathrm{Im}(p)$ et pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a $p(E_{ij}) = p(E_{ji})$. Alors $p(E_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$ est génératrice de $\mathrm{Im}(p) = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Donc $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) \leq \frac{n(n+1)}{2}$. De même $q(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est génératrice de $\mathrm{Im}(q)$ et pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a $q(E_{ij}) = -q(E_{ji})$, en particulier $Q(E_{ii}) = 0$. Alors $q(E_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$ est génératrice de $\mathrm{Im}(q) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Donc $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) \leq \frac{n(n-1)}{2}$. Or puisqu'ils sont supplémentaires, on a l'égalité dans les dimensions. $\square$

Exemple pertinent : Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, les matrices $MM^\top$ et $M^\top M$ sont symétriques. C'est la base de la décomposition en valeurs singulières.

22.2 Matrice d'une application linéaire

Soient deux entiers non nuls n et p. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie égale à p et $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension finie égale à n et $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.

22.2.1 Matrice d'une application linéaire, étant données deux bases

22.2.1.1 Définitions (Rappel)

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle matrice de u dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ (de E et F). On note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(p)\,\mathbb{K}$ la matrice dont la j^{e} colonne représente les coordonnées de $u(e_j)$ dans $\mathcal{F}$. C'est-à-dire

$$\forall j \in [\![1\,;p]\!] \quad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i. \tag{22.75}$$

Proposition 22.11. Soient $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $x \in E$ et $y = u(x)$. Soient $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$, X le vecteur colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{E}$ et Y le vecteur colonne des coordonnées de y dans $\mathcal{F}$. Alors $Y = AX$.

Remarque : Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, on note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(u) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

22.2.1.2 Propriétés

Ces propriétés se démontrent de manière similaire que dans le cas "base canonique".

1. L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ il existe une unique application $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$.

2. Soit un troisième espace vectoriel G de dimension finie non nulle m. Soit $\mathcal{G} = (g_a, \ldots, g_m)$ une base de $\mathcal{G}$. Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{G}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{G}}(v)\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u). \tag{22.76}$$

3. L'application $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \end{array} \right.$ est un isomorphismes d'espaces vectoriels et d'anneaux.

4. L'application $\mathcal{GL}(\mathrm{Mat})_{\mathcal{E}} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{GL}(E) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \end{array} \right.$ est un isomorphismes de groupes et en particulier

$$\forall u \in \mathcal{GL}(E) \quad \mathcal{GL}(\mathrm{Mat})_{\mathcal{E}}(u^{-1}) = \mathcal{GL}(\mathrm{Mat})_{\mathcal{E}}(u)^{-1}. \tag{22.77}$$

22.2.1.3 Théorème de caractérisation des endomorphismes d'espaces vectoriels par les matrices

Théorème 22.10. *On suppose que E et F ont la même dimension n non nulle. Soit $u\mathcal{L}(E, F)$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *u est un isomorphisme de E dans F ;*
2. *pour toute base $\mathcal{E}$ de E et toute base $\mathcal{F}$ de F,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\,; \tag{22.78}$$

3. *il existe une base $\mathcal{E}$ de E et une base $\mathcal{F}$ de F,*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})\,. \tag{22.79}$$

Démonstration. $1 \implies 2$ On dispose de l'application $u^{-1} \in \mathcal{GL}(()\,F)$. On sait que $u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}$. Pour toutes bases de $\mathcal{E}$ de E et $\mathcal{F}$ de F, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(u^{-1} \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(u^{-1})\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = I_n. \tag{22.80}$$

Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.

$2 \implies 3$ Comme E et F sont de dimension finie, ils admettent des bases.

$3 \implies 1$ Soit $B = (\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u))^{-1}$ et soit v l'unique application linéaire de F dans E telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(v)$. Alors

$$I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) \cdot B = B \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u), \tag{22.81}$$

et comme $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{E}}(v)$, on a

$$I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F},\mathcal{F}}(u \circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(v \circ u) \tag{22.82}$$

Alors $u \circ v = \mathrm{Id}_F$ et $v \circ u = \mathrm{Id}_E$. L'application u est bijective. □

22.2.2 Matrice dans une base des coordonnées d'une famille finie de vecteurs

22.2.2.1 Définitions

Définition 22.6. Soit un naturel q non nul et $\mathcal{X} = (x_i)_{1 \leq i \leq q} \in E^q$. On définit la matrice de $\mathcal{X}$ dans la base $\mathcal{E}$ de E, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})$ par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1q} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{p1} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix} \tag{22.83}$$

La j^{e} colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})$ est composée de coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$. Pour tout $j \in [\![1\,;q]\!]$ on a

$$x_j = \sum_{i=1}^{p} a_{ij} e_i. \tag{22.84}$$

$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Particulièrement qi $q = 1$, $\mathcal{X} = (x)$ avec $x \in E$, et alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})$ est la matrice colonne des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathcal{E}$.

22.2.2.2 Caractérisation des bases parmi les matrice

Théorème 22.11. *Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{1 \leq i \leq p}$ une famille de p vecteurs de E ($p = \dim E$). Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *$\mathcal{X}$ est une base de E ;*
2. *pour toute base $\mathcal{E}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$;*
3. *Il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$.*

Démonstration. $1 \implies 2$: Soit E une base de E. On définit u l'unique application linéaire de E dans E telle que $u(\mathcal{E}) = \mathcal{X}$. Comme $\mathcal{E}$ et $\mathcal{X}$ sont deux bases de E, u est bijective et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$.

$2 \implies 3$: L'espace vect$E$ est de dimension finie, donc il admet au moins une base.

$3 \implies 1$: Supposons qu'il existe une base $\mathcal{E}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$. Soit u l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})$. Cette matrice est inversible donc u est aussi inversible. Puisque $u(\mathcal{E}) = \mathcal{X}$, $u \in \mathcal{GL}(E)$, et $\mathcal{E}$ est une base de E alors $\mathcal{X}$ est une base de E. □

22.2.3 Matrice dans une base d'une famille finie de formes linéaires

Soient un naturel q non nul et $\mathcal{F} = (f_1, \dots f_q) \in (E^*)^q$. On définit la matrice de la famille des formes linéaires $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{E} =' e_1, \dots, e_p)$ par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) = (f_i(e_j)) \in M_{q,p}(\mathbb{K}). \tag{22.85}$$

22.2.4 Matrices de passage, formule de changement de base

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et deux bases de E $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ $\mathcal{E}' = (e'_1, \dots, e'_n)$.

22.2.4.1 Matrices de passages

Définition 22.7. On appelle matrice de passage de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{E}'$ et on note $\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$, la matrice

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}') \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}). \tag{22.86}$$

C'est la matrice carrée dont les colonnes représentent les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{E}'$ dans la base $\mathcal{E}$.

Proposition 22.12.

1. $\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ est inversible car $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont inversibles.
2. $\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E)$ puisque pour tout j, j^{e} vecteur colonne de la matrice est le vecteur des coordonnées de $e'_j = \mathrm{Id}_E(e'_j)$ dans la base E.
3. Si $\mathcal{E}''$ est une troisième base de E,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}''} = \mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}''}. \tag{22.87}$$

Démonstration. On sait que $\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}''} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E)$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}''} &= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E)\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'',\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}_E) && (22.88)\\
&= \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E) && (22.89)\\
&= \mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}''} && (22.90)
\end{aligned}$$

□

4. $(\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'})^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}$.

Démonstration. D'après le troisième point, on a $\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}\mathcal{P}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}} = \mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = I_n$. □

22.2.4.2 Effet d'un changement de base sur la matrice colonne d'un vecteur

Théorème 22.12. *Soient $\mathcal{E}$ une base de E ("l'ancienne") et $\mathcal{E}'$ une autre base de E ("la nouvelle").*

Soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}$ la matrice de passage de l'ancienne à la nouvelle base. Soit un vecteur $x \in E$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(x)$.

Alors $X = PX'$, ⚠ les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles.

Démonstration. Pour tout vecteur $x \in E$, on a $\mathrm{Id}_E(x) = x$. On a $\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}_E)$ alors $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'}(\mathrm{Id}_E)X'$ c'est-à-dire $X = PX'$. □

22.2.4.3 Effet d'un changement de base sur la matrice d'une application linéaire

Théorème 22.13. *Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie p non nulle et un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension finie n non nulle. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des bases de E, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ des bases de F. Soient les matrices de passages $P = \mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}'} \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u)$. Alors*

$$A' = Q^{-1}AP. \tag{22.91}$$

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $u \circ \mathrm{Id}_E = u = \mathrm{Id}_F \circ u$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}}(u \circ \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_F \circ u)$ Alors en développant $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{E}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}',\mathcal{F}}(\mathrm{Id}_F)\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u)$. Donc au final $AP = QA'$ et comme Q est inversible on a $A' = Q^{-1}AP$. □

Théorème 22.14. *Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie p non nulle, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ des bases de E, et u un endomorphisme de E tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}'}(u)$ alors $A' = P^{-1}AP$.*

Démonstration. C'est un cas particulier du théorème précédent. □

22.3 Rang d'une matrice

Soient deux naturel non nuls n et p, et une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

22.3.1 Rang du système des vecteurs colonnes

On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ et pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$ le vecteur colonne j est $c_j = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n$. La famille des vecteurs colonnes de la matrice A est $\mathcal{C}_A = (c_j)_{1 \leq j \leq p} \in (\mathbb{K}^n)^p$.

Définition 22.8. On appelle rang de la matrice A et on note $\mathrm{rang}(A)$ le rang de la famille de vecteur $\mathcal{C}_A$ des colonnes de A.

On en déduit que $\mathrm{rang}(A) \leq \min(n, p)$ car $\mathcal{C}_A$ est une famille de p vecteurs de $\mathbb{K}^n$. De plus,

$$\mathrm{rang}(A) = 0 \iff \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{C}_A) = 0 \tag{22.92}$$
$$\iff \forall j \in [\![1\,;p]\!] c_j = 0_{\mathbb{K}^n} \tag{22.93}$$
$$\iff A = 0 \tag{22.94}$$

Proposition 22.13. Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie p non nulle, $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{X} = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteur de E. Alors

$$\mathrm{rang}(\mathcal{X}) = \mathrm{rang}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})). \tag{22.95}$$

Démonstration. Soit $u : E \to \mathbb{K}^p$ qui à $x \in E$ associe ses coordonnées dans la base $\mathcal{E}$. C'est donc un isomorphisme de E sur $\mathbb{K}^p$. Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$ on a $u(x_j) = c_j$ où les c_j sont les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})$. On a

$$\mathrm{rang}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})) = \mathrm{rang}(c_1, \ldots, c_n) = \mathrm{rang}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \mathrm{rang}(X), \tag{22.96}$$

puisque u est bijective. □

Corollaire 22.14.1 (Première interprétation)**.** *Le rang d'une matrice est égal au rang de toute famille de vecteurs représentée dans une base par cette matrice.*

22.3.2 Rang de l'application linéaire associée

Théorème 22.15. *Soient un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie p non nulle et un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel F de dimension finie n non nulle. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux bases respectives de E et F. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors*

$$\mathrm{rang}(u) = \mathrm{rang}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)) \tag{22.97}$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(u) = \dim \operatorname{Im}(u) &= \dim \operatorname{Vect} u(\mathcal{E}) && (22.98)\\
&= \operatorname{rang}(u(\mathcal{E})) && (22.99)\\
&= \operatorname{rang}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{F}}(u(\mathcal{E}))) && (22.100)\\
&= \operatorname{rang}(\operatorname{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)). && (22.101)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 22.15.1 (Deuxième interprétation)**.** *Le rang d'une matrice est le rang de toute application linéaire représentés par cette matrice dans des bases.*

Corollaire 22.15.2. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si* $\operatorname{rang}(A) = n$.

Démonstration. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors

$$\begin{aligned}
A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) &\iff u \text{ bijectif} && (22.102)\\
&\iff u \text{ surjectif} && (22.103)\\
&\iff \operatorname{Im}(u) = E && (22.104)\\
&\iff \operatorname{rang}(u) = n && (22.105)\\
&\iff \operatorname{rang}(A) = n. && (22.106)
\end{aligned}$$

□

22.3.3 Matrice J_r

Soient deux naturel non nuls n et p. Soit un troisième naturel non nul r tel que $r \leq \min(n,p)$. Posons

$$J_{n,p,r} = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-p,p-r} \end{pmatrix}. \tag{22.107}$$

Proposition 22.14.

$$\operatorname{rang}(J_{n,p,r}) = r. \tag{22.108}$$

Théorème 22.16. *Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et un un naturel r non nul tel que $r \leq \min(n,p)$. Alors $r = \operatorname{rang}(A)$ si et seulement s'il existe deux matrices $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = UJ_{n,p,r}V$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit l'application linéaire u de $\mathbb{K}^p$ vers $\mathbb{K}^n$ canoniquement associée à A. Nous allons construire des bases de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ dans lesquelles la matrice de u sera $J_{n,p,r}$.

Comme $\operatorname{rang}(u) = \operatorname{rang}(A) = r$, d'après le théorème du rang, on a

$$\dim \mathbb{K}^p = \operatorname{rang}(u) + \dim \operatorname{Ker}(u), \tag{22.109}$$

alors $\dim \operatorname{Ker}(u) = p - r$. Soit $(e_{r+1}, \dots, e_p)$ une base de $\operatorname{Ker}(u)$. Par théorème de la base incomplète, on peut compléter cette famille libre de $\mathbb{K}^p$ en base de $\mathbb{K}^p$: $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$. Pour tout $i \in [\![1\,;r]\!]$, on pose $f_i = u(e_i)$. Alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(f_i)_{1\leq i\leq r} &= \operatorname{rang}(u(e_i))_{1\leq i\leq r} && (22.110)\\
&= \operatorname{rang}(u(e_i))_{1\leq i\leq p} && (22.111)\\
&= \operatorname{rang}(u(\mathcal{E})) && (22.112)\\
&= \operatorname{rang}(u) = r. && (22.113)
\end{aligned}$$

Donc $(f_i)_{1\leq i\leq r}$ est une famille libre de $\mathbb{K}^p$ (voir proposition **??**). On peut donc compléter cette famille en une base $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_n)$. Alors pour tout $i \in [\![1\,;r]\!]$ $u(e_i) = f_i$, et pour tout $i \in [\![r{+}1\,;p]\!]$ $u(e_i) = 0$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = J_{n,p,r}$.

On a $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_c,\mathcal{F}_c}(u)$. Soient $P = \mathcal{P}_{\mathcal{E}_c,\mathcal{E}} \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q = \mathcal{P}_{\mathcal{F}_c,\mathcal{F}} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors $J_{n,p,r} = Q^{-1}AP$, c'est-à-dire $A = QJ_{n,p,r}P^{-1}$. En posant $U = Q$, $V = P^{-1}$ on a bien $A = UJ_{n,p,r}V$.

$\Longleftarrow$ On définit les famille $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ de vecteurs respectives de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ par :

$$U = \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}_c}(\mathcal{F}) = \mathcal{P}_{\mathcal{F}_c,\mathcal{F}} \quad V^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_c}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}_{\mathcal{E}_c,\mathcal{E}}. \tag{22.114}$$

Comme U et V^{-1} sont inversibles, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont des bases respectives de E et F.

Soit u l'unique application linéaire de E vers F telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) = J_{n,p,r}$. On voit déjà que $\mathrm{rang}(u) = r$. Ensuite on a

$$\begin{aligned} A = UJ_{n,p,r}V &= \mathcal{P}_{\mathcal{F}_c,\mathcal{F}}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)(\mathcal{P}_{\mathcal{E}_c,\mathcal{E}})^{-1} & (22.115)\\ &= (\mathcal{P}_{\mathcal{F},\mathcal{F}_c})^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u)\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{E}_c}. & (22.116)\end{aligned}$$

La matrice A est donc représentative de l'application u. Donc d'après la deuxième interprétation du rang on a $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(u) = r$. □

On a montré que toute application linéaire $u : E \to F$ de rang r avec $\dim E = p$ et $\dim F = n$ peut être représentée dans des bases de E et F par la matrice $J_{n,p,r}$.

22.3.4 Rang de la transposée

Théorème 22.17. *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a*

$$\mathrm{rang}(A^\top) = \mathrm{rang}(A). \tag{22.117}$$

Démonstration. Soit $r = \mathrm{rang}(A)$, il existe deux matrices $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $A = UJ_{n,p,r}V$. Alors

$$A^\top = V^\top J_{n,p,r}^\top U^\top = V^\top J_{p,n,r} U^\top. \tag{22.118}$$

Alors $\mathrm{rang}(A^\top) = \mathrm{rang}(A)$. □

22.3.5 Rang d'un système de vecteurs lignes

On note pour tout toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $L_i = (a_{i1}, \ldots, a_{ip}) \in \mathbb{K}^p$ ety $\mathbb{L}_A = (L_i)_{1\leq i\leq n}$.

Proposition 22.15. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a

$$\mathrm{rang}(\mathbb{L}_A) = \mathrm{rang}(A). \tag{22.119}$$

Démonstration.

$$\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A^\top) = \mathrm{rang}(\mathcal{C}_{A^\top}) = \mathrm{rang}(\mathbb{L}_A). \tag{22.120}$$

□

Chapitre 23

Opérations élémentaires sur les matrices

Sommaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ est un corps, sous-corps de $\mathbb{C}$.

23.1 Opérations élémentaires sur les matrices

23.1.1 Opérations élémentaires sur les lignes

Soient deux naturels non nuls n et p, et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note a_{ij} les coefficients de A. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{L}_i$ est la i^{e} ligne de A, $\mathbb{L}_i = (a_{i1}, \dots, a_{ip}) \in \mathbb{K}^p$. On va décrire trois types d'opérations élémentaires sur leslignes et on va voir que chacune d'elle est équivalente à la multiplication à gauche de A par une matrice inversible.

23.1.1.1 Préliminaire : multiplication de A par les matrices de la base canonique

Soit $(j_0, h_0) \in [\![1\,;n]\!]^2$. Notons $E_{i_0h_0} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne i_0 et la colonne h_0 qui vaut 1.

Notons $(E'_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors

$$\begin{aligned}
E_{i_0h_0}A &= E_{i_0h_0}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}E'_{ij} && (23.1)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}(E_{i_0h_0}E'_{ij}) && (23.2)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij}\delta_{h_0i}E'_{i_0j} && (23.3)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{h_0j}E'_{i_0j}. && (23.4)
\end{aligned}$$

$E_{i_0h_0}A$ est la matrice à n lignes et p colonnes dans laquelle la ligne i_0 est égale à la ligne h_0 de A. Toutes les autres lignes sont nulle.

$$E_{i_0h_0}A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ a_{h_01} & \dots & a_{h_0p} \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{23.5}$$

23.1.1.2 Addition d'un multiple d'une ligne à une autre

Soient i et h deux entiers différents de $[\![1\,;n]\!]$ et un scalaire λ. Il s'agit de remplacer la ligne L_i par la ligne $L_i + \lambda L_h$. Cette opération élémentaire est notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_h$.

Définition 23.1. Pour tout scalaire λ et tous entiers i et h différents de $[\![1\,;n]\!]$, on définit la matrice de transvection $T_{i,h}(\lambda)$ par

$$\begin{aligned}
T_{i,h}(\lambda) &= I_n + \lambda E_{ih} && (23.6)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & \lambda & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. && (23.7)
\end{aligned}$$

Proposition 23.1. Pour tout scalaire λ et tous entiers i et h différents de $[\![1\,;n]\!]$, la matrice $T_{i,h}(\lambda)$ est inversible et $T_{i,h}(\lambda)^{-1} = T_{i,h}(-\lambda)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
T_{i,h}(-\lambda)\cdot T_{i,h}(\lambda) &= (I_n + \lambda E_{ih})(I_n - \lambda E_{ih}) && (23.8)\\
&= I_n - \lambda E_{ih} + \lambda E_{ih} - \lambda^2 E_{ih}E_{ih}. && (23.9)
\end{aligned}$$

Comme $i \neq h$ alors $E_{ih}E_{ih} = 0$. Finalement $T_{i,h}(-\lambda)\cdot T_{i,h}(\lambda) = I_n$. □

Proposition 23.2. Pour tout scalaire λ et tous entiers i et h différents de $[\![1\,;n]\!]$,

$$L_i \leftarrow L_i + \lambda L_h \iff A \leftarrow T_{i,h}(\lambda)A. \tag{23.10}$$

Démonstration. On sait que

$$T_{i,h}(\lambda)A = (I_n + \lambda E_{ih})A = A + \lambda E_{ih}A. \tag{23.11}$$

La matrice $\lambda E_{ih}A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf éventuellement la ligne qui contient λ fois la ligne h de A. Ajouter cette matrice à A revient à ajouter λL_h à la ligne L_i de A. □

23.1.1.3 Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul

Soient un réel μ non nul et un entier i de $[\![1\,;n]\!]$. Il s'agit de remplacer la ligne L_i par la ligne μL_i. Cette opération élémentaire est notée $L_i \leftarrow \mu L_i$.

Définition 23.2. Pour tout réel non nul μ et tout naturel i de $[\![1\,;n]\!]$, on définit la matrice de dilatation $D_i(\mu)$ par

$$D_i(\mu) = I_n + (\mu - 1)E_{ii} \tag{23.12}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \mu & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}. \tag{23.13}$$

Proposition 23.3. Pour tout réel non nul μ et tout naturel i de $[\![1\,;n]\!]$, la matrice de dilatation $D_i(\mu)$ est inversible et

$$D_i(\mu)^{-1} = D_i(\mu^{-1}). \tag{23.14}$$

Démonstration. Pour tout réel non nul μ et tout naturel i de $[\![1\,;n]\!]$, la matrice de dilatation $D_i(\mu)$ est diagonale à coefficients tous non nuls. Alors elle s'inverse facilement. □

Proposition 23.4. Pour tout réel non nul μ et tout naturel i de $[\![1\,;n]\!]$, on a

$$L_i \leftarrow \mu L_i \iff A \leftarrow D_i(\mu)A. \tag{23.15}$$

Démonstration. On sait que

$$D_i(\mu)A = (I_n + (\mu - 1)E_{ii})A = A + (\mu - 1)E_{ii}A. \tag{23.16}$$

La matrice $(\mu - 1)E_{ii}A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la matrice dont toutes les lignes sont nulles sauf éventuellement la i^{e} ligne qui contient $(\mu - 1)L_i$ (où L_i est la i^{e} ligne de A). Quand on l'ajoute à A, on remplace la ligne L_i de A par $L_i + (\mu - 1)L_i = \mu L_i$. □

23.1.1.4 Échange de deux lignes

Soient deux entiers i et h différents dans $[\![1\,;n]\!]$. On veut échanger, dans la matrice A, les lignes L_i et L_h. Cette opération est notée $L_i \leftrightarrow L_h$.

Définition 23.3. Pour tout entiers i et h différents dans $[\![1\,;n]\!]$, on définit la matrice de permutation P_{ih} telle que

$$P_{ih} = I_n - E_{ii} - E_{hh} + E_{ih} + E_{hi} \tag{23.17}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 &&&&&&&&& \\ & \ddots &&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&& \\ &&& 0 && \dots & 1 &&& \\ &&&& 1 &&&&& \\ &&& \vdots && \ddots & \vdots &&& \\ &&&&&& 1 &&& \\ &&& 1 && \dots & 0 &&& \\ &&&&&&& 1 && \\ &&&&&&&& \ddots & \\ &&&&&&&&& 1 \end{pmatrix}. \tag{23.18}$$

Proposition 23.5. Pour tout entiers i et h différents dans $[\![1\,;n]\!]$, la matrice P_{ih} est inversible et

$$(P_{ih})^{-1} = P_{ih}. \tag{23.19}$$

Démonstration.

$$P_{ih} \cdot P_{ih} = (I_n - E_{ii} - E_{hh} + E_{ih} + E_{hi}) \cdot (I_n - E_{ii} - E_{hh} + E_{ih} + E_{hi}) \tag{23.20}$$

$$= I_n. \tag{23.21}$$

□

Proposition 23.6. Pour tout entiers i et h différents dans $[\![1\,;n]\!]$, on a

$$L_i \leftrightarrow L_h \iff A \leftarrow P_{ih}A. \tag{23.22}$$

Démonstration. En effet, le calcul donne

$$P_{ih}A = A - E_{ii}A - E_{hh}A + E_{ih}A + E_{hi}A. \tag{23.23}$$

Les matrices $E_{ii}A$ et $E_{hh}A$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ contiennent respectivement la ligne L_i en i^e ligne et la ligne L_h en h^e ligne et des zéros partout ailleurs. La matrice $A - E_{ii}A - E_{hh}A$ est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant L_i et L_h par des lignes nulles. On lui ajoute ensuite $E_{ih}A + E_{hi}A$, c'est-à-dire les matrices qui contiennent L_h et L_i en position i et h. On a donc mis L_i à la place de L_h et vice-versa. □

23.1.2 Manipulations élémentaires sur les colonnes

Voir la fiche complémentaire. Les propositions et définitions sont équivalentes à celles de la première sous-section.

23.2 Système d'équations linéaires

23.2.1 Vocabualires et interprétations

23.2.1.1 Définition

Définition 23.4. Soient deux naturels non nuls n et p. Le nombre n est le nombre d'équations du système (L) et le nombre p est le nombre d'inconnues de (L). Soit (a_{ij}) une famille d'éléments de $\mathbb{K}$, appelée famille de coefficients du système (L). Soit $(b_i) \in \mathbb{K}^n$ la famille des seconds membres de (L). On appelle solution du système

$$(L) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}, \tag{23.24}$$

tout p-uplet $(x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$ qui vérifi les n équations de (L). On note $E(L)$ l'ensemble des solutions de (L). C'est un sous-ensemble éventuellement vide de $\mathbb{K}^p$.

Définition 23.5. Si la famille des seconds membres est la famille nulle, on dit que le système linéaire est homogéne.

À tout système linéaire (L), on associe le système homogène (H) appelé système homogène associé à (L).

$$(H) \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{np}x_p = 0 \end{cases}. \tag{23.25}$$

23.2.1.2 Traduction matricielle

Soient une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et un vecteur $B = (b_i) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour tout vecteur $X = (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$, on a

$$X \in E(L) \iff AX = B, \tag{23.26}$$

$$X \in E(H) \iff AX = 0. \tag{23.27}$$

23.2.1.3 Traduction fonctionelle

Soit u l'application linéaire canoniquement associée à A, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$. On note $b \in \mathbb{K}^p$ le vecteur de coordonnées $(b_1, \ldots, b_n)$ dans la base canonique. Pour tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{K}^p$, on a

$$x \in E(L) \iff u(x) = B, \tag{23.28}$$

$$x \in E(H) \iff x \in \mathrm{Ker}(u). \tag{23.29}$$

23.2.1.4 Traduction vectorielle

Soit pour tout $j \in [\![1\,;p]\!]$ C_j la j^{e} colonne de A. Pour tout vecteur $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$, on a

$$(x_1, \dots, x_p) \in E(L) \iff x_1C_1 + \cdots + x_pC_p = B, \tag{23.30}$$

$$(x_1, \dots, x_p) \in E(H) \iff x_1C_1 + \cdots + x_pC_p = 0. \tag{23.31}$$

Cela signifie que $(x_1, \dots, x_p)$ est une relation de dépendance linéaire de la famille des colonnes.

23.2.1.5 Traduction duale

Pour tout entier i de $[\![1\,;n]\!]$, on définit la forme linéaire

$$\varphi_i \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p \end{array} \right. . \tag{23.32}$$

Pour tout vecteur $x \in \mathbb{K}^p$, on a

$$x \in E(L) \iff \forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad \varphi_i(x) = b_i, \tag{23.33}$$

$$x \in E(H) \iff x \in \bigcap_{i=1}^{n} \ker \varphi_i. \tag{23.34}$$

23.2.2 Rang d'un système linéaire

Définition 23.6. On appelle rang du système linéaire (L) le rang de la matrice A associée au système linéaire (L).

Proposition 23.7. Avec les notations de la sous-section précédente,

$$\operatorname{rang}(L) = \operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(u) = \operatorname{rang}(C_1, \dots, C_p) = \operatorname{rang}(H). \tag{23.35}$$

Le rang d'un système linéaire (L) est à la fois inférieur ou égal au nombre d'inconnues p et au nombre d'équations n.

23.2.3 Description de l'ensemble des solutions

Soit (L) un système linéaire à n équations, p inconnues et de rang r.

23.2.3.1 Description de $E(H)$

Théorème 23.1. *$E(H)$ est un sous-espace vectoriel de dimension $p - r$.*

Démonstration. Avec les notations ci-avant et par définition, $E(H) = \operatorname{Ker} u$, alors c'est un sous-espace vectoriel. L'application u est linéaire et $\operatorname{rang} u = r$ alors le théorème du rang donne $\operatorname{rang} u + \dim \ker u = \dim \mathbb{K}^p$. C'est-à-dire $\dim \ker u = p - r$. $\square$

Corollaire 23.1.1. *Le système (H) admet une solution non nulle si et seulement si $p > r$.*

23.2.3.2 Description de $E(L)$

Théorème 23.2. *Soit $E(L)$ est vide, soit il est non vide et dans ce cas c'est un sous-espace affine de direction $E(H) = \ker u$, de dimension $p - r$.*

Si $a \in E(L)$ alors $E(L) = a + E(H)$.

Définition 23.7. Lorsque $E(L)$ est non vide, on dit que le système (L) est compatible.

Un système homogène est toujours compatible.

23.2.4 Cas particulier d'un système de Cramer

Définition 23.8. Le système linéaire (L) est dit de Cramer si et seulement si

1. $n = p$, il y a autant d'inconnues que d'équations ;
2. $\operatorname{rang}(L) = n = p$.

Il en résulte

Théorème 23.3. *(L) est un système de Cramer si et seulement si la matrice associée à (L) est inversible.*

Théorème 23.4. *Tout système de Cramer admet une et une seule solution. En pratique, pour un système de Cramer homogéne, la solution unique est nulle.*

Démonstration. La matrice A associée à (L) est inversible, donc l'application u associée est bijective alors

$$u(x) = b \iff x = u^{-1}(b) \tag{23.36}$$
$$u(x) = 0 \iff x = 0. \tag{23.37}$$

□

23.3 Applications des opérations élémentaires

23.3.1 Recherche du rang

Lemme 23.1. *Soit une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On suppose que $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est obtenue à partir de A par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A. Alors* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(B)$.

Démonstration. Les matrices A et B représentent la même application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ mais dans deux bases différentes. Alors $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(u) = \operatorname{rang}(B)$. □

Application : Lorsqu'on veut déterminer le rang d'une matrice A, on peut effectuer des opérations élémentaires sur cette matrice jusqu'à obtenir une matrice dont le rang est facilement calculable (comme par exemple la matrice $J_{n,p,r}$).

23.3.2 Pivot de Gauss

Lemme 23.2. *Soit une matrice* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *telle que*

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{23.38}$$

où $\alpha \neq 0$ *et* $A' \in \mathcal{M}_{n-1,p-1}(\mathbb{K})$*. Alors* $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A') + 1$.

Démonstration. Soit $(L'_2, \dots, L'_n)$ les lignes de A'. Alors les lignes de A sont :

— $L_1 = (\alpha, *, \dots, *)$

— pour tout $i \in [\![2\,;n]\!]$, $L_i = (0, L'_i)$.

Ainsi

$$\operatorname{Vect}(L_1) \cap \operatorname{Vect}(L_2, \dots, L_n) = \{0\}, \tag{23.39}$$

d'où

$$\dim \operatorname{Vect}(L_2, \dots, L_n) = \dim \operatorname{Vect}(L_1) + \dim \operatorname{Vect}(L_2, \dots, L_n). \tag{23.40}$$

La ligne L_1 est non nulle donc $\dim \operatorname{Vect}(L_1) = 1$. De plus $\dim \operatorname{Vect}(L_2, \dots, L_n) = \operatorname{rang}(A')$. Alors finalement $\operatorname{rang}(A) = \operatorname{rang}(A') + 1$. □

Proposition 23.8 (Méthode du pivot de Gauss)**.** Soit une matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Il existe une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui permet de transformer A en une matrice triangualire supérieure T à coefficients diagonaux tous non nuls.

Démonstration. On démontre par réccurence sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ "Pour toute matrice $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, il existe une matrice T triangualire supérieure obtenue à partir de A à l'aide d'une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A."

Initialisation : $n = 1$ A est un scalaire alors elle est triangulaire supérieure.

Hérédité : Soit un naturel non nul n. On suppose $\mathcal{P}(n)$. Soit une matrice $A \in \mathcal{GL}_{n+1}(\mathbb{K})$. La première colonne de A est donc non nulle. Quitte à échanger deux lignes, on suppose que $a_{11} \neq 0$. En effectuant, pour tout $i \in [\![2\,;n]\!]$, l'opération $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i1}}{a_{11}} L_1$ on obtient

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \dots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \tag{23.41}$$

avec $a_{11} \neq 0$. D'après le lemme, $\operatorname{rang}(B') = \operatorname{rang}(B) - 1 = n$. Alors B' est inversible et en lui appliquant $\mathcal{P}(n)$ on écrit qu'il existe une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes de B' (par consquent su les lignes de B) qui permet de passer de B' à une matrice triangulaire T'. Autrement dit de B à T. Alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a montré que $\mathcal{P}(1)$ est vraie et que pour tout naturel n non nul $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$. Alors par théorème de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel n non nul. □

Remarque : Dans l'hérédité, on utilise $a_{11} \neq 0$ comme "pivot" pour annuler tous les autres coefficients de la première colonne. On peut appliquer cette méthode que la matrice soit inversible ou non. Dans tous les cas, on arrive à une matrice triangulaire supérieure T de même rang que la matrice de départ. Si A est non invesible, il y aura des coefficients nuls dans la diagonale de T.

23.3.3 Inverser une matrice

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. D'après la sous-section précédente, il existe une matrice $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et une matrice $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls telles que $T = PA$.

Comme t_{nn} est non nul, on peut l'uiliser comme pivot pour annuler tous les autres coefficients de la dernière colonne :

$$\forall i \in [\![1\,;n-1]\!] \quad L_i \leftarrow L_i - \frac{t_{in}}{t_{nn}} L_n. \tag{23.42}$$

On prend comme pivots successifs $t_{n-1n-1}, \ldots, t_{22}$ pour arriver à la matrice diagonale des coefficients t_{ii}. Il suffit ensuite de faire l'opération $L_i \leftarrow L_i \frac{1}{t_{ii}}$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ pour arriver à I_n.

On a donc montré l'existence de $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $I_n = PA$. Ce n'est pas surprenant puisque A es inversible. Mais P est le produit des matrices correspondants à chacune des opérations élémentaires effectuées.

En pratique, on écrit côte à côte la matrice A (à inverser) et la matrice identité I_n. On effectue en parallèle les opérations élémentaires sur les lignes qui permettent de passer de A à I_n.

Exemple : Il s'agit d'inverser $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{23.43}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \tag{23.44}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \tag{23.45}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \tag{23.46}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \tag{23.47}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad L_2 \leftarrow -L_2 \tag{23.48}$$

On vient de montrer que A est inversible et que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

23.3.4 Résoudre un système d'équations linéaire

La méthode du pivot de Gauss permet de résoudre un système de Cramer d'écriture matricielle $AX = B$. C'est un système de Cramer donc A est inversible. Par des opérations élémentaires sur les lignes, on peut se ramener à un système équivalent dont la matrice est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous non nuls que l'on sait résoudre de proche en proche :

$$\exists P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \ \exists T \in T_n^s(\mathbb{K}) \cap \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \ T = PA \quad AX = B \iff TX = PB. \tag{23.49}$$

Si le système n'est pas de Cramer, deux cas se présentent :

Premier cas : Si $r = n < p$. En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on arrive au système de la forme :

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_{i_1} + \cdots + \alpha_{1p}x_{i_p} & = \beta_1 \\ \alpha_{22}x_{i_2} + \cdots + \alpha_{1p}x_{i_p} & = \beta_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{rr}x_{i_r} + \cdots & = \beta_r \end{cases}. \tag{23.50}$$

Ce système admet des solutions (il n'est pas compatible). On peut choir librement les $p - r$ inconnues $x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_p}$ et exprimer toutes les autres en fonction de celles-ci en remontant le système.

Deuxième cas : Si $r < n$, la méthode du pivot de Gauss conduit à un système équivalent de la forme :

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_{i_1} + \cdots + \alpha_{1p}x_{i_p} & = \beta_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_{rr}x_{i_r} + \cdots & = \beta_r \\ 0 & = \beta_{r+1} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & = \beta_n \end{cases}. \tag{23.51}$$

Soit $\beta_{r+1} = \ldots = \beta_n = 0$ est vraie et on est ramené au cas précédent, soit ce n'est pas vérifié et le système est incompatible.

Exemple : On veut résoudre le système linéaire suivant

$$\begin{cases} 2x - y + 3z - t & = 1 \\ x + y + z + t & = 0 \\ x - 4y - z - 4t & = 3 \end{cases}, \tag{23.52}$$

en inversant L_1 et L_2 on a

$$\begin{cases} x + y + z + t & = 0 \\ 2x - y + 3z - t & = 1 \\ x - 4y - z - 4t & = 3 \end{cases}, \tag{23.53}$$

ensuite en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ on obtient

$$\begin{cases} x + y + z + t & = 0 \\ -3y + z - 3t & = 1 \\ -5y - 2z - 5t & = 3 \end{cases}, \tag{23.54}$$

en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ on obtient

$$\begin{cases} x + y + z + t & = 0 \\ -3y + z - 3t & = 1 \\ -11y - 11t & = 5 \end{cases}. \tag{23.55}$$

En “remontant” le système on arrive à

$$\begin{cases} x & = \frac{9}{11} \\ z & = -\frac{4}{11} \\ y & = -t - \frac{5}{11} \end{cases}, \tag{23.56}$$

et l’ensemble des solutions de ce système est

$$S = \left(\frac{9}{11}, -\frac{5}{11}, -\frac{4}{11}, 0\right) + \text{Vect}(0, -1, 0, 1). \tag{23.57}$$

Chapitre 24

Groupe symétrique

Sommaire

24.1 Groupe $(\sigma_n, \circ)$ où $n \in \mathbb{N}^*$

24.1.1 Groupes $(\mathcal{S}(E), \circ)$

Rappel : Soit un ensemble fini E. On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des permutations de E. Nous avons vu que $(\mathcal{S}(E), \circ)$ était un groupe.

Soient deux ensembles finis E et F de même cardinal. Il existe alors une bijection $f : E \to F$. Montrons que $(\mathcal{S}(E), \circ)$ et $(\mathcal{S}(F), \circ)$ sont isomorphes. Soit $\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{S}(E) & \longrightarrow & \mathcal{S}(F) \\ \sigma & \longmapsto & f \circ \sigma \circ f^{-1} \end{cases}$. Pour toute permutation σ de $\mathcal{S}(E)$, comme f, f^{-1} sont bijective alors $\varphi(\sigma)$ est bijective. L'application φ est bien définie.

Pour toutes permutations $\sigma \in \mathcal{S}(E)$ et $\sigma' \in \mathcal{S}(F)$ on a

$$\varphi(\sigma) = \sigma' \iff f \circ \sigma \circ f^{-1} = \sigma' \tag{24.1}$$

$$\iff \sigma = f^{-1} \circ \sigma' \circ f. \tag{24.2}$$

Tout élément de $\mathcal{S}(F)$ admet un et un seul antécédent par φ : φ est bijective.

Pour toutes permutations σ, ζ de E, on a

$$\varphi(\sigma) \circ \varphi(\zeta) = (f \circ \sigma \circ f^{-1}) \circ (f \circ \zeta \circ f^{-1}) \tag{24.3}$$
$$= f \circ \sigma \circ (f^{-1} \circ f) \circ \zeta \circ f^{-1} \tag{24.4}$$
$$= \varphi(\sigma \circ \zeta). \tag{24.5}$$

Alors φ est un isomorphisme du groupe $(\mathcal{S}(E), \circ)$ sur $(\mathcal{S}(F), \circ)$.

Conséquence : Pour tout naturel non nul n, si E est fini de cardinal n alors $(\mathcal{S}(E), \circ)$ est isomorphe à $(\mathcal{S}([\![1\,;n]\!]), \circ)$.

24.1.2 Définition de σ_n

Définition 24.1. Pour tout naturel non nul n, on appelle groupe symétrique de type n, noté σ_n, le groupe des permutations de l'ensemble $[\![1\,;n]\!]$. Son cardinal vaut $n\,!$.

Vocabulaire : Si σ et ζ sont deux éléments de σ_n, on parlera du “produit” de σ par ζ pour désigner la composée $\sigma \circ \zeta$.

⚠σ_n n'est pas commutatif.

24.1.3 Exemples fondamentaux de permutations

24.1.3.1 Transpositions ($n \geq 2$)

Définition 24.2. On appelle transposition de $[\![1\,;n]\!]$ toute permutation $t \in \sigma_n$ telle qu'il existe un couple $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i \neq j$ vérifiant

$$t(i) = j \quad t(j) = i \quad \forall k \in [\![1\,;n]\!] \setminus \{i, j\}\ t(k) = k. \tag{24.6}$$

Notation : Une telle transposition t est notée $t = (i, j)$ $i < j$.

24.1.3.2 Cycles

Définition 24.3. Soit un entier p tel que $2 \leq p \leq n$. On appelle cycle de longueur p tout $c \in \sigma_n$ vérifiant : il existe $a_1, \ldots, a_p$ dans $[\![1\,;n]\!]$, deux à deux distincts, tels que

$$\begin{cases} \forall i \in [\![1\,;p-1]\!] \quad c(a_i) = a_{i+1} \\ c(a_p) = a_1 \\ \forall k \in [\![1\,;n]\!] \setminus \{a_1, \ldots, a_p\} \quad c(k) = k \end{cases}. \tag{24.7}$$

Notation : Un tel cycle c est noté $c = (a_1, \ldots, a_p)$.

Remarque : Un cycle de longueur 2 est une transposition et un cycle de longueur n est une permutation circulaire.

24.1.3.3 Conséquences

Si $n \geq 3$, le groupe σ_n n'est pas commutatif. Soit $t_1 = (1, 2)$ et $t_2 = (1, 3)$. Alors $t_1 \circ t_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c'est une permutation circulaire) et $t_2 \circ t_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (c'est une autre permutation circulaire) et $t_1 \circ t_2 \neq t_2 \circ t_1$.

Exemples :

1. si $n = 1$ alors $\sigma_1 = \{\mathrm{Id}\}$;
2. si $n = 2$ alors $\sigma_2 = \{\mathrm{Id}, (1,2)\}$;
3. si $n = 3$ alors $\sigma_2 = \{\mathrm{Id}, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\}$.

24.2 Signature d'une permutation

24.2.1 Première définition

Définition 24.4. Soit $n \geq 2$ et $\sigma \in \sigma_n$. Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i < j$. On dit que le couple (i,j) présente une *inversion* pour σ si et seulement si $\sigma(i) > \sigma(j)$.

On note $I(\sigma)$ le nombre d'inversion de la permutation σ et on pose que la signature de σ vaut
$$\epsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}. \tag{24.8}$$

Exemple : Soit la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors :
— $(1,2)$ est une inversion puisque $3 > 1$;
— $(1,3)$ est une inversion puisque $3 > 2$;
— $(2,3)$ n'est pas une inversion puisque $1 < 2$.
Ainsi la signature de σ vaut 1.

Définition 24.5. Soit $\sigma \in \sigma_n$. On dit que σ est paire si sa signature vaut 1 et impaire si elle vaut -1.

⚠Ne pas confondre la parité d'une permutation avec la parité d'une application. D'ailleurs ça n'a aucun sens puisque $[\![1\,;n]\!]$ n'est pas centré en zéro.

Théorème 24.1. *Les transpositions sont des permutations impaires.*

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i < j$, alors
$$t = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i-1 & i & i+1 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & n \\ 1 & \ldots & i-1 & j & i+1 & \ldots & j-1 & i & j+1 & \ldots & n \end{pmatrix} \tag{24.9}$$

Inversions :
— $(i, i+1) \ldots (i,j)$;
— $(i+1, j) \ldots (j-1, j)$.
Alors au final on a $I(\sigma) = [j - (i+1) + 1] + [(j-1) - (i+1) + 1] = 2(j-i) - 1$ qui est un nombre impair donc la signature vaut $\epsilon(\sigma) = -1$ et donc t est une permutation impaire. $\square$

24.2.2 Deuxième définition

La signature d'une permutation peut également être définie de la façon suivante :

Définition 24.6. Soit $\sigma \in \sigma_n$, la signature de σ est
$$\epsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}. \tag{24.10}$$

Montrons que cette définition est équivalente à la première.

Démonstration. Notons $A = \left\{(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \;\middle|\; i < j\right\}$, $N = \prod_{i<j} \sigma(j) - \sigma(i)$ et $D = \prod_{i<j} j - i$. Soit $(i,j) \in A$ et posons $h = \min(\sigma(i), \sigma(j)) \in A$ et $k = \max(\sigma(i), \sigma(j)) \in A$. L'application $\psi \colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ (i,j) & \longmapsto & (h,k) \end{array}\right.$ est une bijection. On a

$$\sigma(j) - \sigma(i) = \epsilon_{ij}(k - h), \tag{24.11}$$

avec $\epsilon_{ij} = 1$ si (i,j) n'est pas une inversion pour σ et -1 si c'est une inversion pour σ. Ainsi

$$\frac{N}{D} = \frac{\prod_{(i,j)\in A} \epsilon_{ij} \prod_{(i,j)\in A}(k-h)}{\prod_{(i,j)\in A}(j-i)} \tag{24.12}$$

$$= \prod_{(i,j)\in A} \epsilon_{ij} \tag{24.13}$$

$$= (-1)^{I(\sigma)}. \tag{24.14}$$

□

24.2.3 Morphisme ϵ

Théorème 24.2. *Soit $n \geq 2$. L'application $\epsilon \colon \left\{\begin{array}{ccc} (\sigma_n, \circ) & \longrightarrow & (\{-1, 1\}, \times) \\ \sigma & \longmapsto & \epsilon(\sigma) \end{array}\right.$ est un morphisme de groupes surjectif.*

Démonstration. L'application ϵ est bien définie. Ensuite :
- $\epsilon(\mathrm{Id}) = 1$ (l'identité n'a aucune inversion) ;
- $\epsilon((1,2)) = -1$ (possible puisque $n \geq 2$).

Donc ϵ est surjective.

Soient σ et s deux éléments de σ_n. Alors

$$\epsilon(\sigma \circ s) = \prod_{(i,j)\in A} \frac{\sigma \circ s(j) - \sigma \circ s(i)}{j - i} \tag{24.15}$$

$$= \prod_{(i,j)\in A} \frac{\sigma \circ s(j) - \sigma \circ s(i)}{s(j) - s(i)} \prod_{(i,j)\in A} \frac{s(j) - s(i)}{j - i} \tag{24.16}$$

$$= \prod_{(i,j)\in A} \frac{\sigma \circ s(j) - \sigma \circ s(i)}{s(j) - s(i)} \epsilon(s). \tag{24.17}$$

On note $h = \min(s(i), s(j))$ et $k = \max(s(i), s(j))$, l'application

$$\psi \colon \left\{\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ (i,j) & \longmapsto & (h,k) \end{array}\right. \tag{24.18}$$

est une bijection. D'où

$$\epsilon(\sigma \circ s) = \prod_{(i,j)\in A} \frac{\sigma(k) - \sigma(h)}{k - h} \epsilon(s) = \epsilon(\sigma)\epsilon(s). \tag{24.19}$$

L'application ϵ est bien un morphisme. □

Remarque : L'hypothèse $n \geq 2$ ne sert à démontrer que la surjectivité.

Corollaire 24.2.1. *Pour tout $\sigma \in \sigma_n$, $\epsilon(\sigma^{-1}) = \epsilon(\sigma)^{-1} = \epsilon(\sigma)$.*

Le produit de deux permutations de même parité est paire et le produit de deux permutations de parités différentes est impaire.

24.2.4 Groupe alterné $\mathcal{A}_n$

Définition 24.7. On appelle groupe alterné de type n l'ensemble des permutations paires de $[\![1\,;n]\!]$,

$$\mathcal{A}_n = \{\sigma \in \sigma_n \mid \epsilon(\sigma) = 1\}\,. \tag{24.20}$$

Proposition 24.1. $(\mathcal{A}_n, \circ)$ est un sous-groupe de $(\sigma_n, \circ)$.

Démonstration. Il suffit de voir que $\mathcal{A}_n = \ker \sigma$. Le noyau d'un morphisme est un sous-groupe. □

Par contre l'ensemble des permutations impaires n'est pas stable. On ne peut donc pas définir de groupe des permutations impaires.

Proposition 24.2. Soit $n \geq 2$. Soit τ_0 une permutation impaire fixée. Alors

$$\sigma_n \setminus \mathcal{A}_n = \{\sigma \circ \tau_0 \mid \sigma \in \mathcal{A}_n\}\,. \tag{24.21}$$

Par conséquent $\mathcal{A}_n$ et $\sigma_n \setminus \mathcal{A}_n$ ont le même cardinal

$$\operatorname{Card} \mathcal{A}_n = \operatorname{Card} \sigma_n \setminus \mathcal{A}_n = \frac{n!}{2}. \tag{24.22}$$

Démonstration. Soit l'application $\varphi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_n & \longrightarrow & \sigma_n \setminus \mathcal{A}_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \tau_0 \end{array}\right.$. Elle est bien définie puisque pour toute $\sigma \in \mathcal{A}_n$ on a$\epsilon(\sigma \circ \tau_0) = -1$. Soit aussi l'application $\varphi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \sigma_n \setminus \mathcal{A}_n & \longrightarrow & \mathcal{A}_n \\ \sigma & \longmapsto & \sigma \circ \tau_0^{-1} \end{array}\right.$ (qui est aussi bien défini puisque le produit de deux permutations impaires est paire).

Pour toute $\sigma \in \mathcal{A}_n$, on a

$$\psi \circ \varphi(\sigma) = \psi(\sigma \circ \tau_0) = \sigma. \tag{24.23}$$

De même pour toute $\sigma \in \sigma_n \setminus \mathcal{A}_n$, on a

$$\varphi \circ \psi(\varphi) = \varphi(\sigma \circ \tau_0^{-1}) = \sigma. \tag{24.24}$$

Par caractérisation des bijections, l'application φ est bijective.

$\mathcal{A}_n$ et $\sigma_n \setminus \mathcal{A}_n$ sont des ensembles finis et il existe une bijection de $\mathcal{A}_n$ sur $\sigma_n \setminus \mathcal{A}_n$. Donc ils ont le même cardinal et comme ils forment une partition de σ_n on a bien

$$\operatorname{Card} \mathcal{A}_n = \operatorname{Card} \sigma_n \setminus \mathcal{A}_n = \frac{n!}{2}. \tag{24.25}$$

□

24.3 Décomposition d'une permutation en produits de transpositions

Théorème 24.3. *Soit $n \geq 2$. Toute permutation $\sigma \in \sigma_n$ peut s'écrire comme un produit fini de transpositions. Cette décomposition n'est pas unique*

Démonstration. On montre par réccurence sur $n \geq 2$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ "Toute $\sigma \in \sigma_n$ peut s'écrire comme un produit fini de transpositions".

Initialisation : $n = 2$. Déja $\sigma_n = \{\mathrm{Id}, (1,2)\}$ et $\mathrm{Id} = (1,2) \circ (1,2)$. $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 2$ et on suppose $\mathcal{P}(n)$. Soit $\sigma \in \sigma_{n+1}$. On distingue deux cas.

Premier cas : Si $\sigma(n+1) = n+1$, alors $\sigma(\llbracket 1\,;n \rrbracket) = \llbracket 1\,;n \rrbracket$. On peut définir τ comme la restriction au départ et à l'arrivée à $\llbracket 1\,;n \rrbracket$, $\tau \in \sigma_n$. En lui appliquant $\mathcal{P}(n)$, on trouve qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$, $\tau_1, \ldots, \tau_p$ des transpositions de σ_n telles que $\tau = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_p$. On prolonge les τ_i en $n+1$ en posant $\tau_i(n+1) = n+1$. Alors $\tau(n+1) = n+1$. Finalement $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_p$.

Deuxième cas : Si $\sigma(n+1) \neq n+1$ on pose $t_0 = (\sigma(n+1), n+1)$ et $s = t_0 \circ \sigma$ et on applique le premier cas à s.

Finalement $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : On a montré que $\mathcal{P}(2)$ est vraie et que pour tout $n \geq 2$ $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$. Alors le théorème de récurrence nous dit que $\mathcal{P}$ est vraie pour tout $n \geq 2$. □

Exemple : On considère un cycle $c = (a_1, \ldots, a_p)$ alors $c = (a_1, a_2) \circ (a_2, a_3) \circ \ldots \circ (a_{p-1}, a_p)$. Ainsi

$$\epsilon(c) = \epsilon(t_1) \ldots \epsilon(t_{p-1}) = (-1)^{p-1}. \tag{24.26}$$

Chapitre 25

Déterminant

Sommaire

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps, sous-corps de $\mathbb{C}$.

25.1 Applications multilinéaires

25.1.1 Notion d'application p-linéaire

Soient un naturel n non nul et deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.

Définition 25.1. On appelle application p-linéaire sur E dans F toute application $f : E^p \to F$ telle que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$ et pour tout $a = (a_1, \ldots, a_p) \in E^p$ l'application

$$f_i\colon \left\{ \begin{array}{lcc} E & \longrightarrow & F \\ x_i & \longmapsto & f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_p) \end{array} \right. \tag{25.1}$$

est linéaire. C'est la i^{e} application partielle de f au point a.

On dira que f est linéaire par rapport à son i^{e} argument pour signifier que la i^{e} application partielle de f est linéaire.

Remarque : Si $p = 2$ alors l'application est dite bilinéaire et si $p = 3$ alors elle est trilinéaire.

Définition 25.2. On appelle forme p-linéaire toute application p-linéaire sur E à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple de calcul : Supposons que $p = 2$ et soit $f : E^2 \to F$ une application bilinéaire. Pour tout quadruplet $(x, x', y, y') \in E^4$, on a

$$\begin{aligned} f(x + x', y + y') &= f(x, y + y') + f(x', y + y') && (25.2) \\ &= f(x, y) + f(x, y') + f(x', y) + f(x', y'). && (25.3) \end{aligned}$$

Ne pas confondre avec l'application linéaire $g : E^2 \to F$, parce que pour tout $(x, x', y, y') \in E^4$, on a

$$g(x + x', y + y') = g(x, y) + g(x', y'). \tag{25.4}$$

Notation : Notons $\mathcal{L}_p(E, F)$ l'ensemble des applications p-linéaires de E sur F et $\mathcal{L}_p(E)$ l'ensemble des formes p-linéaires sur E.

Proposition 25.1. $\mathcal{L}_p(E, F)$ et $\mathcal{L}_p(E)$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

25.1.2 Qualités éventuelles d'une application p-linéaire

Supposons que $p \geq 2$. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}_p(E, F)$.

Définition 25.3. On dira que

1. f est symétrique si et seulement si pour tout couple $(i, j) \in [\![1\,; p]\!]^2$ tel que $i < j$ et pour tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ on a

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p); \tag{25.5}$$

2. f est antisymétrique si et seulement si pour tout couple $(i, j) \in [\![1\,; p]\!]^2$ tel que $i < j$ et pour tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$ on a

$$f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = -f(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p); \tag{25.6}$$

3. f est alternée si et seulement si pour tout couple $(i, j) \in [\![1\,; p]\!]^2$ tel que $i < j$ et pour tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ on a

$$x_i = x_j \implies f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = 0. \tag{25.7}$$

Remarque : Soit $p = 2$ et $f : E^2 \to F$ une application bilinéaire. ALors :

1. f est symétrique si et seulement si pour tout couple $(x, y) \in E^2$ on a $f(x, y) = f(y, x)$;
2. f est antisymétrique si et seulement si pour tout couple $(x, y) \in E^2$ on a $f(x, y) = -f(y, x)$;
3. f est alternée si et seulement si pour tout vecteur $x \in E$ on a $f(x, x) = 0$.

Proposition 25.2. Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, F)$. Alors :

1. f est symétrique si et seulement si pour toute permutation $\sigma \in \sigma_p$ et tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ on a

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = f(x_1, \dots, x_p); \tag{25.8}$$

2. f est antisymétrique si et seulement si pour toute permutation $\sigma \in \sigma_p$ et tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ on a

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \epsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p). \tag{25.9}$$

Démonstration. 1. $\implies$ Supposons que f soit symétrique, alors
— si σ est une transposition alors c'est la définition ;
— sinon, σ est un produit de n transpositions, et on applique n fois la définition
$\impliedby$ On l'applique pour tout $(i, j) \in [\![1\,; p]\!]^2$ avec σ la transposition (i, j).

2. $\implies$ Supposons que f soit antisymétrique, alors
— si σ est une transposition alors pour tout p-uplet $(x_1, \dots, x_p)$ on a

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = -f(x_1, \dots, x_p) = \epsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p) \tag{25.10}$$

— sinon, σ est un produit de n transpositions, et on applique n fois la définition $(-1)^n = \epsilon(\sigma)$;

3. $\impliedby$ On l'applique avec $\sigma = (i, j)$.

□

Proposition 25.3. Soit $f \in \mathcal{L}_p(E, F)$, alors f est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.

Démonstration. Supposons que f soit antisymétrique. Soient $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, $(i, j) \in [\![1\,; p]\!]^2$ tel que $i < j$ et $x_i = x_j$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) &= f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) && (25.11)\\ &= -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p). && (25.12) \end{aligned}$$

Alors $2f(x_1, \dots, x_p) = 0$, c'est-à-dire $f(x_1, \dots, x_p) = 0$. f est alternée.

Supposons que f soit alternée. Soient $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, $(i, j) \in [\![1\,; p]\!]^2$ tel que $i < j$. Alors comme f est alternée on a

$$0 = f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_p) \quad = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_i, \dots, x_p) \tag{25.13}$$

$$+ f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) \tag{25.14}$$

$$+ f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) \tag{25.15}$$

$$+ f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_j, \dots, x_p). \tag{25.16}$$

Le premier et le dernier terme sont nuls, parce que f est alternée. Donc

$$f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p). \tag{25.17}$$

f est antisymétrique. □

25.1.3 Exemples d'applications multilinéaires

La fonction $f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & xy \end{array} \right.$ est une forme bilinéaire symétrique. L'application $g\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((x, y), (x', y')) & \longmapsto & xx' + yy' \end{array} \right.$ est une forme bilinéaire symétrique (analogue au produit scalaire). L'application $h\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (z, z') & \longmapsto & \Re(\overline{z}z' \end{array} \right.$ est une forme bilinéaire symétrique sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. L'application $k\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (z, z') & \longmapsto & \Im(\overline{z}z' \end{array} \right.$ est une forme bilinéaire antisymétrique sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. La fonction $l\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB - BA \end{array} \right.$ est antisymétrique et alternée.

25.2 Déterminant dans une base de vecteurs

25.2.1 Formes linéaires alternées

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Notons $\mathcal{A}_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E. $\mathcal{A}_n(E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 25.1.

1. *Pour toute base $\mathcal{E}$ de E, il existe une unique forme $f_0 \in \mathcal{A}_n(E)$ telle que $f_0(\mathcal{E}) = 1$. On dit que f_0 est le déterminant de la base $\mathcal{E}$, et $f_0 = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}}$.*
2. *Pour toute $f \in \mathcal{A}_n(E)$, on a $f = f(\mathcal{E})Det_{\mathcal{E}}$.*
3. *$\mathcal{A}_n(E)$ est une droite vectorielle et pour toute base $\mathcal{E}$ de E, $\mathrm{Det}_{\mathcal{E}}$ est une base de $\mathcal{A}_n(E)$.*

En d'autre termes, pour toute base $\mathcal{E}$ de E, $\mathrm{Det}_{\mathcal{E}}$ est une forme n-linéaire alternée non nulle et toute les autre formes n-linéaires alternées lui sont proportionelles.

Démonstration. VOir poly. On y montre que $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et que pour tout n-uplet $(x_1, \dots, x_n)$ et tout $j \in [\![1\,;n]\!]$

$$x_j = \sum_i^n a_{ij} e_i \quad a_{ij} \in \mathbb{K}, \tag{25.18}$$

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}. \tag{25.19}$$

□

25.2.2 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

25.2.2.1 Définition

Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{E}$ une base de E.

Définition 25.4. Pour toute famille $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ de n vecteurs de E, on définit le déterminant de $\mathcal{X}$ dans la base $\mathcal{E}$, noté $\mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})$, par

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}, \tag{25.20}$$

où pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $x_j = \sum_i^n a_{ij} e_i$.

On note

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{25.21}$$

Proposition 25.4. Avec les mêmes notations,

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)}. \tag{25.22}$$

Démonstration. On sait que

$$Det_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j)j}. \tag{25.23}$$

Alors en notant $s = \sigma^{-1}$, on a

$$Det_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = \sum_{s \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{s^{-1}(j)j}, \tag{25.24}$$

et en posant $i = s^{-1}(j)$, on a bien

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = \sum_{s \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{is(i)}. \tag{25.25}$$

□

Remarque : On peut étendre la définition du déterminant pour $n = 1$, $\mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = |a_{11}|$ (⚠différent de la valeur absolue).

25.2.2.2 Effet d'un changement de base

Proposition 25.5. Soit u $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ deux bases de E. Alors

$$\operatorname{Det}_{\mathcal{E}} = \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}. \tag{25.26}$$

Démonstration. Comme $\mathcal{E}$ et $\mathcal{B}$ sont deux bases de E, le théorème **??** affirme que les formes linéaires $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}}$ et $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}$ de $\mathcal{A}_n(E)$ sont proportionelles. Il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}} = \lambda \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}$, et en particulier

$$\operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) = \lambda \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda. \tag{25.27}$$

Donc $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}} = \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{B}) \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}$. □

25.2.2.3 Caractérisation des bases

Théorème 25.2. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{X}$ une famille de n vecteurs de E. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *$\mathcal{X}$ est une famille libre dans E ;*
2. *$\mathcal{X}$ est une base de E ;*
3. *Il existe une base $\mathcal{E}_0$ de E telle que $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0}(\mathcal{X}) \neq 0$;*
4. *Pour toute base $\mathcal{E}$ de E, on a $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) \neq 0$.*

Démonstration. $1 \iff 2$ C'est logique car $\operatorname{Card}(\mathcal{X}) = n = \dim(E)$.

$2 \implies 3$ On choisit $\mathcal{E}_0 = \mathcal{X}$, alors par définition $\operatorname{Det}_{\mathcal{X}}(\mathcal{X}) = 1 \neq 0$.

$3 \implies 4$ Il existe une base $\mathcal{E}_0$ de E telle que $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0}(\mathcal{X}) \neq 0$. Soit $\mathcal{E}$ une base quelconque de E, alors

$$\operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0} = \operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0}(\mathcal{E}) \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) \neq 0. \tag{25.28}$$

Donc $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) \neq 0$.

$4 \implies 1$ (par contraposée) Supposons que $\mathcal{X}$ est liée alors il existe $j_0 \in [\![1\,;n]\!]$ et il existe une famille de scalaire $(\lambda_j)_{j \in [\![1;n]\!] \setminus \{j_0\}}$ tels que

$$x_{j_0} = \sum_{j \in [\![1;n]\!] \setminus \{j_0\}} \lambda_j x_j. \tag{25.29}$$

Soit $\mathcal{E}$ une base de E. Alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) &= \operatorname{Det}(x_1, \ldots, x_{j_0 - 1}, \sum_{j \in [\![1;n]\!] \setminus \{j_0\}} \lambda_j x_j, x_{j_0+1}, \ldots, x_n) && (25.30)\\
&= \sum_{j \in [\![1;n]\!] \setminus \{j_0\}} \lambda_j \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_{j_0-1}, x_j, x_{j_0+1}, \ldots, x_n) && (25.31)\\
&= 0. && (25.32)
\end{aligned}$$

On vient de montrer que si $\mathcal{X}$ est liée alors dans toute base $\mathcal{E}$ de E on a $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = 0$. Par contraposée, si pour toute base $\mathcal{E}$ de E $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) \neq 0$ alors $\mathcal{X}$ est libre. □

25.3 Déterminant d'un endomorphisme

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

25.3.1 Défintion

Théorème 25.3. *Soit un endomorphisme u de E. Il existe un unique scalaire λ tel que pour toute base $\mathcal{E}$ de E et toute famille $\mathcal{X}$ de n vecteurs de E on ait*

$$\operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(u(\mathcal{X})) = \lambda \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}). \tag{25.33}$$

Le scalaire λ est appellé le déterminant de u et il est noté $\operatorname{Det}(u)$.

Cette définition ne dépend pas de la base : $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(u(\mathcal{E})) = \operatorname{Det}(u)$.

Preuve de l'unicité. Si λ existe, alors particulièrement $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(u(\mathcal{E})) = \operatorname{Det}(u) = \lambda$. Donc, sous réserve d'existence, λ est unique. □

Preuve de l'existence. Soit $\mathcal{E}_0$ une base quelconque de E. Soit $\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \mathcal{X} & \longmapsto & \operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0}(u(\mathcal{X})) \end{array} \right.$. C'est une forme n-linéaire (car u et $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0}$ le sont) alterné (car $\operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0}$ l'est). Il existe donc un scalaire λ tel que $\varphi = \lambda \operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0}$. Pour toute famille $\mathcal{X}$ de n vecteurs de E, on a

$$\varphi(\mathcal{X}) = \lambda \operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0}(\mathcal{X}) \tag{25.34}$$
$$\operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0}(u(\mathcal{X})) = \lambda \operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0}(\mathcal{X}). \tag{25.35}$$

Soit $\mathcal{E}$ une autre base de E, alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(u(\mathcal{X})) &= \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}_0) \operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0} u(\mathcal{X}) && (25.36) \\ &= \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}_0) \lambda \operatorname{Det}_{\mathcal{E}_0}(\mathcal{X}) && (25.37) \\ &= \lambda \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}). && (25.38) \end{aligned}$$

□

25.3.2 Propriétés

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie n.

Proposition 25.6.

$$\operatorname{Det}(\mathrm{Id}_E) = 1. \tag{25.39}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ une base de E, alors $\operatorname{Det}(\mathrm{Id}_E) = \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = 1$. □

Proposition 25.7. Soient un scalaire λ et un endomorphisme u de E, alors

$$\operatorname{Det}(\lambda u) = \lambda^n \operatorname{Det}(u). \tag{25.40}$$

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ une base de E, alors

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(\lambda u) &= \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(\lambda u(e_1), \ldots, \lambda u(e_n)) && (25.41) \\ &= \lambda^n \operatorname{Det}_{\mathcal{E}}(u(e_1), \ldots, u(e_n)) && (25.42) \\ &= \lambda^n \operatorname{Det}(u). && (25.43) \end{aligned}$$

□

Proposition 25.8. Pour tout couple d'endomorphisme $(u, v) \in \mathcal{L}(E)^2$, on a

$$\mathrm{Det}(v \circ u) = \mathrm{Det}(v)\,\mathrm{Det}(u) = \mathrm{Det}(u \circ v). \tag{25.44}$$

Proposition 25.9. Soit $\mathcal{E}$ une base de E, alors

$$\mathrm{Det}(v \circ u) = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(v(u(\mathcal{E}))) = \mathrm{Det}(v)\,\mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(u(\mathcal{E})) = \mathrm{Det}(v)\,\mathrm{Det}(u). \tag{25.45}$$

25.4 Caractérisation des automorphismes parmi les endomorphismes

Théorème 25.4. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de* dimension finie *et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors*

$$u \in \mathbf{Aut}(E) \iff \mathrm{Det}(u) \neq 0. \tag{25.46}$$

Auquel cas, $\mathrm{Det}(u^{-1}) = \mathrm{Det}(u)^{-1}$.

Démonstration. Soit une bas $\mathcal{E}$ de E, alors

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{GL}(E) &\iff u(\mathcal{E}) \text{ est une base de } E && (25.47)\\ &\iff \mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(u(\mathcal{E})) \neq 0 && (25.48)\\ &\iff \mathrm{Det}(u) \neq 0. && (25.49) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} u \circ u^{-1} &= \mathrm{Id}_E && (25.50)\\ \mathrm{Det}(u \circ u^{-1}) &= 1 && (25.51)\\ \mathrm{Det}(u)\,\mathrm{Det}(u^{-1}) &= 1, && (25.52) \end{aligned}$$

donc $\mathrm{Det}(u^{-1}) = \mathrm{Det}(u)^{-1}$. □

⚠*Il n'y a pas de déterminant en dimension infinie. Ne pas essayer de calculer des déterminants, en dimension infinie, pour prouver qu'un endomorphisme est bijectif.*

25.5 Déterminant d'une matrice carrée

Soit un naturel n.

25.5.1 Définition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $(a_{ij})_{(i,j)\in[\![1;n]\!]^2}$.

Définition 25.5. On définit le déterminant de la matrice A, noté $\mathrm{Det}(A)$, par

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j}. \tag{25.53}$$

On le note $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Exemple : Soit $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}) \in \mathbb{K}^4$ et $t = (1, 2)$ alors

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \epsilon(\mathrm{Id})a_{11}a_{22} + \epsilon(t)a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{25.54}$$

Proposition 25.10.

$$\mathrm{Det}(A) = sum_{\sigma\in\sigma_n}\epsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \tag{25.55}$$

Démonstration. La preuve est la même que pour le déterminant d'une famille de vecteurs. □

Corollaire 25.4.1.

$$\mathrm{Det}(A^\top) = \det(A). \tag{25.56}$$

Proposition 25.11. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathcal{E}$ une base de E et $\mathcal{X}$ une famille de n vecteurs de E. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})$ alors $\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X})$.

Autrement dit : $\mathrm{Det}(A)$ est le déterminant de toute famille de vecteur $\mathcal{X}$, dans une base $\mathcal{E}$, représentée dans cette base par A. On note $\mathcal{E}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{L}_A$ et $\mathcal{C}_A$ les familles de vecteurs lignes et les familles de vecteurs colonnes de A

$$\mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}_c}(\mathcal{C}_A) = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}_c}(\mathcal{L}_A). \tag{25.57}$$

Démonstration. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(A)$, $A = (a_{ij})$, $\mathcal{X} = (x_i)$ et $\mathcal{E} = (e_i)$. Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, on a $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_j$. Donc

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(\mathcal{X}) = \sum_{\sigma\in\sigma_n}\epsilon(\sigma)\prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} = \mathrm{Det}(A). \tag{25.58}$$

De la même façon on a :

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{E}_c}(\mathcal{C}_A) = \mathrm{Det}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}_c}(\mathcal{C}_A)) = \mathrm{Det}(A), \tag{25.59}$$

et

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{E}_c}(\mathcal{L}_A) = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}_c}(\mathcal{C}_{A^\top}) = \mathrm{Det}(A^\top) = \mathrm{Det}(A). \tag{25.60}$$

□

Proposition 25.12. Pour toute base $\mathcal{E}$ d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, et pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u) = A$ on a $\mathrm{Det}(u) = \mathrm{Det}(A)$.

$\mathrm{Det}(A)$ est égal au déterminant de tout endormorphisme représenté dans une base par A.

Démonstration. Par défintion, on a

$$\mathrm{Det}(u) = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}}(u(\mathcal{E})), \tag{25.61}$$

et d'après la proposition précédente, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(u) &= \mathrm{Det}(\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(u)) && (25.62)\\ &= \mathrm{Det}(A). && (25.63) \end{aligned}$$

□

25.5.2 Propriétés

On déduit sur les endomorphismes les propriétés suivantes :

Proposition 25.13.

$$\mathrm{Det}(I_n) = 1. \tag{25.64}$$

Proposition 25.14. Pour tout scalaire λ et toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

$$\mathrm{Det}(\lambda A) = \lambda^n \mathrm{Det}(A). \tag{25.65}$$

Proposition 25.15. Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a

$$\mathrm{Det}(AB) = \mathrm{Det}(A)\,\mathrm{Det}(B) = \mathrm{Det}(BA). \tag{25.66}$$

a priori $AB \neq BA$.

25.5.3 Caractérisation des matrices inversibles

Théorème 25.5. *Pour toute matrice* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*, on a*

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \mathrm{Det}(A) \neq 0. \tag{25.67}$$

Auquel cas, $\mathrm{Det}(A^{-1}) = \mathrm{Det}(A)^{-1}$.

Démonstration. La preuve est similaire à celle avec les applications linéaires. □

25.6 Calculs de déterminants

25.6.1 "Petits" déterminants

Dans le cas où $n = 2$, on a pour quatre scalaires a, b, c et d : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$.

Dans le cas où $n = 3$, on a

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \{\mathrm{Id}, (1,2), (1,3), (2,3), (1,2,3), (1,3,2)\} \tag{25.68}$$

et alors

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} \tag{25.69}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}. \end{aligned} \tag{25.70}$$

Remarque : Il existe aussi la régle de Sarrus (Déconseillé).

25.6.2 Déterminant d'une matrice triangulaire

Proposition 25.16. Soient $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} & & & * \\ & A' & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+1n+1} \end{pmatrix}. \tag{25.71}$$

Alors $\mathrm{Det}(A) = a_{n+1n+1}\,\mathrm{Det}(A')$.

Démonstration. On sait que

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n+1} a_{\sigma(j)j}, \tag{25.72}$$

or $a_{n+1j} = 0$ si $j \neq n+1$. Donc $a_{n+1\sigma(n+1)} = 0$ si $\sigma(n+1) \neq n+1$. On peut décomposer le déterminant

$$\mathrm{Det}(A) = \sum_{\substack{\sigma \in \sigma_n \\ \sigma(n+1)=n+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} a_{n+1\sigma(n+1)} + \sum_{\substack{\sigma \in \sigma_n \\ \sigma(n+1)\neq n+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} a_{n+1\sigma(n+1)}. \tag{25.73}$$

Le deuxième terme de cette somme est nul. Si bien qu'on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Det}(A) &= a_{n+1\sigma(n+1)} \sum_{\substack{\sigma \in \sigma_n \\ \sigma(n+1)=n+1}} \epsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma(j)j} &(25.74)\\ &= a_{n+1\sigma(n+1)} \sum_{\substack{s \in \sigma_n \\ s=\sigma_{[\![1;n]\!]}^{[\![1;n]\!]}}} \epsilon(s) \prod_{i=1}^{n} a_{is(i)}. &(25.75) \end{aligned}$$

Les permutations s et σ se décomposent en le même nombre de transpositions et donc $\epsilon(s) = \epsilon(\sigma)$. Alors $\mathrm{Det}(A) = a_{n+1\sigma(n+1)}\,\mathrm{Det}(A')$. □

Corollaire 25.5.1. *Soit une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangualire (supérieure ou inférieure). Alors $\mathrm{Det}(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$.*

Démonstration. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ "$\forall A \in \mathcal{T}_n^s(\mathbb{K}), \mathrm{Det}(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$".

Initialement, en prenant $n = 1$, on a bien $\mathrm{Det}(A) = a_{11}$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et alors démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Soit $A \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, on peut l'écrire comme

$$A = \begin{pmatrix} & & & * \\ & A' & & \vdots \\ & & & * \\ 0 & \dots & 0 & a_{n+1n+1} \end{pmatrix}, \tag{25.76}$$

avec A' triangulaire supérieure de taille n. Si on applique l'hypothèse de récurrence à A', on trouve que $\mathrm{Det}(A') = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. D'après la proposition précédente, on a $\mathrm{Det}(A) = a_{n+1n+1}\,\mathrm{Det}(A')$. Donc au final $\mathrm{Det}(A) = \prod_{i=1}^{n+1} a_{ii}$, et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Le théorème de récurrence nous permet de conclure en écrivant que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel n non nul. $\square$

Remarque : Si la matrice est triangulaire inférieure, ça ne change rien puisque sa transposée est triangulaire supérieure et $\mathrm{Det}(A^\top) = \mathrm{Det}(A)$.

25.6.3 Manipulations sur les lignes et les colonnes

Soient $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, D un déterminant d'ordre $n \geq 2$ de coefficients les a_{ij}, $\mathcal{C}_A$ la famille des colonnes de A et $\mathcal{L}_A$ la famille des lignes de A. $\mathcal{E}_c$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

En théorie on utilise :

— $D = \mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{C}_A)$ pour les opérations sur les colonnes ;
— $D = \mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}_C}(\mathcal{L}_A)$ pour les opérations sur les lignes ;
— $\mathrm{Det}_{\mathcal{E}_C}$ est une forme n-lin'éaire alternée (et antisymétrique).

EN pratique on utilise plutôt :

1. d est linéaire par rapport à chaque colonne de A :
   — si on multiplie une colonne par λ, alors d est changé en λD ;
   — si on multiplie toutes les colonnes par λ, alors d est changé en $\lambda^n D$;
   — si une colonne est nulle, alors le déterminant est nul.
2. Ajouter à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes ne change pas le déterminant ;

   Démonstration. Soit $k \in [\![1\,;n]\!] \setminus \{j\}$ et soit $\lambda_k \in \mathbb{R}$ alors

$$\mathrm{Det}(C_1, \dots, C_{j-1}, \sum_{k \in [\![1;n]\!] \setminus \{j\}} \lambda_k C_k, C_{j+1}, \dots, C_n) \tag{25.77}$$

$$= D + \sum_{k \in [\![1;n]\!] \setminus \{j\}} \lambda_k \,\mathrm{Det}(C_1, \dots, C_{j-1}, C_k, C_{j+1}, \dots, C_n) \tag{25.78}$$

$$= D. \tag{25.79}$$

   La somme est nulle puisque le déterminant est alterné. $\square$

3. Effectuer une permutation σ sur les colonnes de A change D en $\epsilon(\sigma)D$. Particuliérement, en échangeant deux colonnes, on cange D en $-D$;
4. S'il y a deux colonnes identiques alors D est nul ;
5. S'il y a deux colonnes proportionelles alors D est nul.

Les résultats sont analogues pour les lignes.

Exemple : Le déterminant de Van der Monde d'ordre 4

Soient quatres scalaires a, b, c et d. On cherche à calculer $D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$.

En retranchant la première ligne aux autres lignes, on obtient

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 & c^3-a^3 \\ 0 & d-a & d^2-a^2 & d^3-a^3 \end{vmatrix} \tag{25.80}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 1 & c+a & c^2+ac+a^2 \\ 0 & 1 & d+a & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix} \tag{25.81}$$

En retranchant la deuxième ligne à la troisième ligne et à la quatrième ligne nous obtenons

$$D = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 0 & c-b & c^2-b^2+a(c-b) \\ 0 & 0 & d-b & d^2-b^2+a(d-b) \end{vmatrix} \tag{25.82}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 0 & 1 & c+b+a \\ 0 & 0 & 1 & d+b+a \end{vmatrix} \tag{25.83}$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & b+a & b^2+ab+a^2 \\ 0 & 0 & 1 & c+b+a \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c). \tag{25.84}$$

25.6.4 Développement par rapport à une ligne et développement par rapport à une colonne

Soit D un déterminant d'ordre $n \geq 2$. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $D = \mathrm{Det}(A)$. On note $\mathcal{E}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{C}_A$ la famille des colonnes de A, $\mathcal{L}_A$ la famille des lignes de A. Soit $j_0 \in [\![1\,;n]\!]$.

Pour tout couple $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on note $A_{ij} = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}_c}(C_1, \ldots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n)$.

On a $D = \mathrm{Det}(A) = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}_c}(C_1, \ldots, C_n)$, $C_{j_0} = \sum_{i=1}^n a_{ij_0} e_i$. Par n-linéarité du déterminant

$$D = \mathrm{Det}_{\mathcal{E}_c}(C_1, \ldots, C_{j_0-1}, \sum_{i=1}^n a_{ij_0} e_i, C_{j_0+1}, \ldots, C_n) \tag{25.85}$$

$$D = \sum_{i=1}^n a_{ij_0} \mathrm{Det}_{\mathcal{E}_c}(C_1, \ldots, C_{j_0-1}, e_i, C_{j_0+1}, \ldots, C_n) \tag{25.86}$$

$$D = \sum_{i=1}^n a_{ij_0} A_{ij_0}. \tag{25.87}$$

Calculons A_{ij} :

$$A_{ij} = \operatorname{Det}_{\mathcal{E}_c}(C_1, \ldots, C_{j-1}, e_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) \tag{25.88}$$

$$= \begin{vmatrix} & & & 0 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ C_1 & \ldots & C_{j-1} & 0 & C_{j+1} & \ldots & C_n \\ & & & \vdots & & & \\ & & & 0 & & & \end{vmatrix}. \tag{25.89}$$

Il suffit de faire $j-1$ échanges successifs de colonnes pour ramener la colonne j en première :

$$A_{ij} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 1 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & C_1 & \ldots & C_{j-1} & C_{j+1} & \ldots & C_n \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{vmatrix}. \tag{25.90}$$

De la même manière il suffit de faire $i-1$ échanges successifs de lignes pour ramener la ligne i en première :

$$A_{ij} = (-1)^{j-1}(-1)^{i-1} \begin{vmatrix} 1 & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & C_1 & \ldots & C_{j-1} & C_{j+1} & \ldots & C_n \\ 0 & & & & & & \end{vmatrix} \tag{25.91}$$

$$= (-1)^{i+j-2} \operatorname{Det}(M_{ij}), \tag{25.92}$$

où M_{ij} est la matric obtenue à partir de A en enlevant la i^{e} ligne et la j^{e} colone.

Définition 25.6. Pour tout entiers i et j de $[\![1\,;n]\!]$, la matrice M_{ij} est appelée sous-matrice de A et $\operatorname{Det}(M_{ij})$ est appelé le mineur, et A_{ij} est appelé le cofacteur.

Théorème 25.6. *Soient i_0 et j_0 des entiers de $[\![1\,;n]\!]$. Le développement du déterminant par rapport à la colonne j_0 est*

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} A_{ij_0} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij_0} (-1)^{i+j_0-2} \operatorname{Det}(M_{ij_0}). \tag{25.93}$$

Le développement du déterminant par rapport à la ligne i_0 est

$$\operatorname{Det}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} A_{i_0 j} = \sum_{j=1}^{n} a_{i_0 j} (-1)^{i_0+j-2} \operatorname{Det}(M_{i_0 j}). \tag{25.94}$$

En pratique c'est intéressant de développer par rapport à une ligne (ou une colonne) presque nulle.

25.6.5 Exemple classique : Le déterminant de Van der Monde

Soit un naturel $n \geq 2$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{25.95}$$

On le calcule de deux manières différentes :

25.6.5.1 Méthode 1

On fait les opérations $C_j \leftarrow C_j - a_1 C_{j-1}$ pour j allant de n à 2 (dans cet ordre) et on obtient

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & a_2 - a_1 & \ldots & (a_2 - a_1)a_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n - a_1 & \ldots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix} \tag{25.96}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} a_2 - a_1 & \ldots & (a_2 - a_1)a_2^{n-2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_n - a_1 & \ldots & (a_n - a_1)a_n^{n-2} \end{vmatrix} \tag{25.97}$$

$$= \prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-2} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} \tag{25.98}$$

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1) V_{n-1}(a_1, \ldots, a_n) \tag{25.99}$$

$$= \prod_{i=2}^{n}(a_i - a_1) \prod_{j=3}^{n}(a_j - a_2) V_{n-2}(a_1, \ldots, a_n). \tag{25.100}$$

En itérant le processus on obtient

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(a_j - a_i), \tag{25.101}$$

sachant que $V_2(a_{n-1}, a_n) = a_n - a_{n-1}$.

25.6.5.2 Méthode 2

$\mathbb{K}$ est un sous-corps du corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationelles. On peut considérer que les déterminants sont à coefficients dans $\mathbb{K}(X)$. On pose

$$P = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_{n-1} & \ldots & a_{n-1}^{n-1} \\ 1 & X & \ldots & X^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{25.102}$$

On développe par rapport à la dernière ligne et on a :

$$P = \sum_{j=1}^{n} A_{nj} X^{j-1} = \sum_{k=0}^{n-1} A_{nk+1} X^k, \tag{25.103}$$

avec A les cofacteurs. P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$. P s'annule en tous les a_k (pour $k \in [\![1\,;n-1]\!]$) parce qu'il y a deux fois la même ligne. Deux cas se présentent :

1. s'il existe un couple $(j,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $j \neq k$ et $a_j = a_k$ alors P est le polynôme nul ;
2. si les a_k (pour $k \in [\![1\,;n]\!]$) sont deux à deux distincts, alors P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ qui admet $n-1$ racines. Alors P est scindé :
$$P = A_{nn} \prod_{k=1}^{n-1} (X - a_k), \tag{25.104}$$
avec $A_{nn} = V_{n-1}(a_1, \ldots, a_n)$. En appliquant P en a_n on obtient
$$\begin{aligned} V_n(a_1, \ldots, a_n) &= P(a_n) & (25.105)\\ &= V_{n-1}(a_1, \ldots, a_n) \prod_{k=1}^{n-1} (a_n - a_k). & (25.106)\end{aligned}$$
En itérant ce calcul, on a
$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i), \tag{25.107}$$
sachant que $V_2(a_{n-1}, a_n) = a_n - a_{n-1}$.

La formul est valable dans les deux cas.

25.7 Applications

25.7.1 Comatrice. Calcul de l'inverse d'une matrice

Définition 25.7. Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de A, noté $\operatorname{Com} A$, la matrice dont les coefficients sont les cofacteurs de A :

$$\operatorname{Com} A = (A_{ij})_{1 \le i,j \le n} \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} \operatorname{Det} M_{ij} \tag{25.108}$$

où M_{ij} est la sous-matrice de A obtenue en enlevant la colonne j et la ligne i.

Proposition 25.17. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\operatorname{Com} A^\top A = A \operatorname{Com} A^\top = \operatorname{Det}(A) I_n. \tag{25.109}$$

Démonstration. Soit $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $\operatorname{Com} A^\top = (b_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ (c.-à-d. $\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \quad b_{ij} = A_{ji}$) et $C = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n} = \operatorname{Com} A^\top A$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki} a_{kj}. \tag{25.110}$$

Deux cas se présentent à nous :

1. Si $i = j$ alors $c_{jj} = \sum_{k=1}^{n} A_{kj} a_{kj} = \text{Det}(A)$, c'est le développement par rapport à la j^{e} colonne ;
2. sinon alors $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{ki}$. Les A_{ki} ne dépendent pas de la i^{e} colonne de A. Soit A' la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i^{e} colonne par la j^{e}. Alors pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$ $A'_{ki} = A_{ki}$. Développons par rapport à la i^{e} colonne :

$$\text{Det}(A') = \sum_{k=1}^{n} a'_{ki} A'_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{ki} = c_{ij}. \tag{25.111}$$

   Or A' contient deux fois la colonne j, donc $\text{Det}(A') = 0$. Alors $c_{ij} = 0$.

Ce qui permet de montrer que $\text{Com}\, A^{\top} A = C = \text{Det}(A) I_n$. □

Corollaire 25.6.1. *Si A est inversible alors $A^{-1} = \frac{\text{Com}\, A^{\top}}{\text{Det}(A)}$.*

Cas particuliers importants :
Si $n = 2$ alors $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, et $\text{Det}(A) = ad - bc$.

$$\text{Com}\, A = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{Com}\, A^{\top} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{25.112}$$

A est inversible si et seulement si $ad \neq bc$ et dans ce cas $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

25.7.2 Expression de la solution d'un système de Cramer

Soit $(\mathcal{L})$ un système linéaire qui a pour représentation matricielle

$$AX = B \quad (A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})). \tag{25.113}$$

On suppose que le nombre d'inconnues est le même que le nombre d'équations. Soit $(\mathcal{H})$ le système homogéne associé, de représentation matricielle

$$AX = 0. \tag{25.114}$$

On appelle déterminant de $(\mathcal{L})$ ou de $(\mathcal{H})$ le déterminant de la matrice A.

$$\text{Det}(\mathcal{L}) = \text{Det}(\mathcal{H}) = \text{Det}(A). \tag{25.115}$$

Proposition 25.18. 1. $(\mathcal{L})$ est de Cramer si et seulement si $\text{Det}(\mathcal{L}) \neq 0$;

2. $(\mathcal{H})$ admet des solutions non nulles si et seulement si $\text{Det}(\mathcal{H}) \neq 0$.

Théorème 25.7. *Supposons que $(\mathcal{L})$ est de Cramer. La solution unique $(x_1, \ldots, x_n)$ de $(\mathcal{L})$ est donnée par :*

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!] \quad x_j = \frac{\text{Det}(A_j)}{\text{Det}(A)} = \frac{\text{Det}(A_j)}{\text{Det}(\mathcal{L})}, \tag{25.116}$$

où A_j est la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa j^{e} colonne par celle de B.

Démonstration. Déjà $(\mathcal{L})$ est de Cramer donc on sait qu'il admet une unique solution $(x_1, \ldots, x_n)$. Notons $C_1, \ldots, C_n$ les colonnes de A. On sait que $B = \sum_{k=1}^{n} x_i C_i$. Alors

$$\operatorname{Det}(A_j) = \operatorname{Det}(C_1, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n) \tag{25.117}$$

$$= \operatorname{Det}(C_1, \ldots, C_{j-1}, \sum_{k=1}^{n} x_i C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) \tag{25.118}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_i \operatorname{Det}(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n). \tag{25.119}$$

Deux cas se présentent :

1. Si $i = j$ alors $\operatorname{Det}(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) = \operatorname{Det}(A)$;
2. sinon $\operatorname{Det}(C_1, \ldots, C_{j-1}, C_i, C_{j+1}, \ldots, C_n) = 0$ car le déterminant est alterné.

Finalement $\operatorname{Det}(A_j) = x_j \operatorname{Det}(A)$. C'est-à-dire $x_j = \frac{\operatorname{Det}(A_j)}{\operatorname{Det}(A)}$. □

25.7.3 Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors

$$\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \operatorname{Det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1 \tag{25.120}$$

Alors $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ et $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ sont soit tous les deux strictements négatifs ou soit strictement positifs. Soit B_0 une autre base de E. On définit

$$O' = \{\mathcal{B} \text{ base de } E \mid \operatorname{Det}_{\mathcal{B}_0}(B) > 0\}, \tag{25.121}$$

$$O'' = \{\mathcal{B} \text{ base de } E \mid \operatorname{Det}_{\mathcal{B}_0}(B) < 0\}. \tag{25.122}$$

(O', O'') forment une partition de l'ensemble des bases. En effet on a :

— $O' \cup O'' = F$ (le déterminant d'une base et soit négatif ou positif) ;

— $O' \cap O'' = \emptyset$ (le déterminant d'ue base n'est pas à la fois négatif et positif) ;

— $O' \neq \emptyset$ car $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B}_0) = 1$ donc $\mathcal{B}_0 \in O'$;

— $O'' \neq \emptyset$ car si on note $B_0 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et si on crée $B_1 = (-e_1, e_2, \ldots, e_n)$ alors $\operatorname{Det}_{B_0}(\mathcal{B}_1) = -1$; et donc $B_1 \in O''$.

Définition 25.8. Orienter l'espace vectoriel E, c'est choisir un ou des ensembles O' et O'' et décider d'appeler leurs éléments des bases directes et les autres indirectes.

Chapitre 26

Espaces vectoriels euclidiens

Sommaire

26.1 Produits scalaire

26.1.1 Notion de produit scalaire

Soit un espace vectoriel E.

Définition 26.1. On appelle produit scalaire sur E toute application

$$\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \langle x, y\rangle \end{array} \right. , \tag{26.1}$$

telle que :

1. pour tous vecteurs x et y de E, on a $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
2. pour tous vecteurs x, x' et y de E, et tout réels λ, on a $\langle \lambda x + x', y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle$;
3. pour tout vecteur x non nul de E, $\langle x, x\rangle > 0$.

Remarque :
- La linéarité à droite est aussi vraie grâce à la symétrie, et alors le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique ;
- on peut aussi remarquer que $\langle x, x\rangle = 0$ si et seulement si $x = 0$; alors dans ce cas le produit scalaire est défini.

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $x \in E$, si $x \neq 0$ alors $\langle x, x\rangle > 0$ et $\langle x, x\rangle \geq 0$. Sinon, alors $x = 0$ et $\langle x, x\rangle = 0$.
$\Longleftarrow$ Si $x \neq 0$ alors avec $\langle x, x\rangle \geq 0$, on a $\langle x, x\rangle \neq 0$. Donc $\langle x, x\rangle > 0$. ☐

Finalement, un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique et définie-positive.

Proposition 26.1. Soit (E, φ) un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire. Pour tout vecteur $x \in E$, on a

$$(\forall y \in E \quad \langle x, y\rangle = 0) \iff x = 0. \tag{26.2}$$

Démonstration. $\Longleftarrow$ Déjà vu.
$\Longrightarrow$ On applique l'égalité en $y = x$ et on a $\langle x, x\rangle = 0$, qui est vrai si et seulement si $x = 0$. ☐

26.1.2 Norme euclidienne associée à un produit scalaire

Soit (E, φ) un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

26.1.2.1 Définition

Définition 26.2. Pour tout vecteur $x \in E$, on définit sa norme euclidienne par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Qui est légitime puisque $\langle x, x\rangle \geq 0$.

⚠La norme dépend du produit scalaire choisi.

Relation entre le produit scalaire et la norme Soient x et y deux vecteurs de E et λ et μ deux réels, alors

$$\|\lambda x + \mu y\| = \lambda^2 \|x\|^2 + \mu^2 \|y\|^2 + 2\lambda\mu \langle x, y\rangle\,; \tag{26.3}$$

$$\|x + y\| = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle\,; \tag{26.4}$$

$$\|x - y\| = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y\rangle\,; \tag{26.5}$$

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2\right); \tag{26.6}$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{26.7}$$

Démonstration. On démontre la première égalité grâce à la bilinéarité du produit scalaire et grâce à la définition de la norme. Les autres points se démontre facilement. □

26.1.2.2 Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 26.1 (Théorème de Cauchy-Schwarz)**.** *Pour tous vecteurs x et y de E, on a*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\,. \tag{26.8}$$

Démonstration. Soient x et y deux vecteurs de E, on définit l'application

$$P\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & \|x + \lambda y\| \end{array}\right. . \tag{26.9}$$

Elle vérifie :

1. pour tout réel λ, $P(\lambda) \geq 0$;
2. pour tout réel λ, $P(\lambda) = \|x\|^2 + \lambda^2 \|y\|^2 + 2\lambda \langle x, y\rangle$.

P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Dans le cas où $\|y\| = 0$, alors $y = 0$ et l'inégalité $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$ est vraie.

Dans le cas où $\|y\| \neq 0$, alors P est de degré 2 et soit δ le discriminant réduit de P. Comme P ne change pas de signe ce discriminant est négatif et $\delta = \langle x, y\rangle^2 - \|x\|^2\,\|y\|^2 \leq 0$. D'où l'inégalité $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$. □

Proposition 26.2. Pour tous vecteurs x et y de E,

$$|\langle x, y\rangle| = \|x\|\,\|y\| \iff (x, y) \text{ est liée.} \tag{26.10}$$

Démonstration.

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\| \iff \begin{cases} |\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\| \text{ et } x = 0 \\ \text{ou} \\ |\langle x,y\rangle| = \|x\|\,\|y\| \text{ et } x \neq 0 \end{cases} \tag{26.11}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x \neq 0 \text{ et } \delta = 0 \end{cases} \tag{26.12}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \quad P(\lambda_0) = 0 \end{cases} \tag{26.13}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} \quad x = -\lambda_0 y \end{cases} \tag{26.14}$$

$$\iff (x,y) \text{ est liée.} \tag{26.15}$$

□

26.1.2.3 Inégalité de Minkowski

Théorème 26.2. *Pour tout couple de vecteurs $(x,y) \in E$ on a*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\,. \tag{26.16}$$

Démonstration. Soit un couple de vecteurs $(x,y) \in E$, alors en appliquant le théorème de Cauchy-Schwarz on a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\langle x,y\rangle \tag{26.17}$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,|\langle x,y\rangle| \tag{26.18}$$

$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \tag{26.19}$$

Comme $\|x+y\| \geq 0$, $\|x\| \geq 0$ et $\|y\| \geq 0$, le sens de l'inégalité est conservé en passant à la racine carrée et on a bien

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|\,. \tag{26.20}$$

□

Proposition 26.3. Pour tout couple de vecteurs $(x,y) \in E$ on a

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff x = 0 \text{ ou } (x \neq 0 \text{ et } \exists \mu \geq 0 \quad y = \mu x) \tag{26.21}$$

Démonstration. Soit un couple de vecteurs $(x, y) \in E$, alors

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \iff \begin{cases} \langle x, y\rangle = |\langle x, y\rangle| \\ \text{et} \\ |\langle x, y\rangle| = \|x\| \, \|y\| \end{cases} \tag{26.22}$$

$$\iff \begin{cases} \langle x, y\rangle \geq 0 \\ \text{et} \\ \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad y = \lambda x \end{cases} \end{cases} \tag{26.23}$$

$$\iff \begin{cases} \langle x, y\rangle \geq 0 \text{ et } x = 0 \\ \text{ou} \\ \langle x, y\rangle \geq 0 \text{ et } x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad y = \lambda x \end{cases} \tag{26.24}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad y = \lambda x \text{ et } \lambda \, \|x\|^2 \geq 0 \end{cases} \tag{26.25}$$

$$\iff \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{R}+ \quad y = \lambda x \end{cases} \tag{26.26}$$

□

Conséquences : Soit un couple de vecteurs $(x, y) \in E$, alors

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| \tag{26.27}$$
$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\| \,. \tag{26.28}$$

Démonstration. On a

$$\|x\| = \|x+y-y\| \leq \|x+y\| + \|y\| \tag{26.29}$$

alors

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x+y\| \tag{26.30}$$

et en passant à la valeur absolue on a bien

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x+y\| \,. \tag{26.31}$$

On applique cette inégalité à $-y$ pour avoir la deuxième. □

26.1.2.4 Application norme euclidienne

Soit un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle ., . \rangle$, et soit $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

Proposition 26.4. L'application $\|.\| : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array} \right.$ est une norme, c'est-à-dire qu'elle vérifie

1. la positivité : pour tout vecteur $x \in E$, $\|x\| \geq 0$;
2. la séparation : pour tout vecteur $x \in E$, $\|x\| = 0 \implies x = 0$;
3. l'homogénéité : pour tout réel λ et tout vecteur $x \in E$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;
4. l'inégalité triangulaire (ou de Minkowski) : pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in E^2$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Démonstration. La démonstration repose sur les propriété du produit scalaire, parce que pour tout vecteur $x \in E$, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. □

26.1.2.5 Distance associée à la norme euclidienne

Avec les mêmes notations, on définit l'application distance

$$d\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \|x - y\| \end{array} \right. . \tag{26.32}$$

Proposition 26.5. L'application distance d vérifie les propriétés suivantes : Pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$ on a

1. $d(x, y) \in \mathbb{R}+$;
2. $d(y, x) = d(x, y)$;
3. $d(x, y) = 0 \implies x = y$;
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + (y, z)$.

26.1.3 Exemples de produits scalaires

26.1.3.1 Produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

Soit $E = \mathbb{R}^n$, $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$. On pose $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Alors : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x, y\rangle \end{array} \right.$ est un produit scalaire. C'est le produit scalaire canonique. La norme euclidienne associée est telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}. \tag{26.33}$$

La distance associée est telle que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}. \tag{26.34}$$

L'inégalité de Cauchy-Scharwz s'écrit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}. \tag{26.35}$$

L'inégalité de Minkowski s'écrit

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}. \tag{26.36}$$

26.1.3.2 Produit scalaire sur $\mathcal{C}([a\,;b]\,,\mathbb{R})$

Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et l'application

$$\varphi\colon \begin{cases} \mathcal{C}([a\,;b]\,,\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \int_{[a,b]} fg \end{cases}. \tag{26.37}$$

L'application φ est bilinéaire, symétrique, et définie-positive. C'est-à-dire que c'est un produit scalaire. En effet pour toute fonction f continue sur $[a,b]$ on a bien

1. $\int_{[a,b]} f^2 \geq 0$;
2. $\int_{[a,b]} f^2 = 0 \iff f^2 = \tilde{0} \iff f = \tilde{0}$.

Remarque : Sur l'ensemble des fonctions continues par morceaux, φ n'est pas un produit scalaire car φ n'est pas définie positive. On dispose qand même de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

La norme euclidienne associée à φ est telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}([a\,;b]\,,\mathbb{R}) \quad \|f\| = \sqrt{\int_{[a,b]} f^2}. \tag{26.38}$$

La distance euclidienne associée est

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}([a\,;b]\,,\mathbb{R})^2 \quad d(f,g) = \sqrt{\int_{[a,b]} (f-g)^2}. \tag{26.39}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}([a\,;b]\,,\mathbb{R})^2 \quad \left|\int_{[a,b]} fg\right| \leq \sqrt{\int_{[a,b]} f^2}\sqrt{\int_{[a,b]} g^2}. \tag{26.40}$$

L'inégalité de Minkowski s'écrit

$$\forall (f,g) \in \mathcal{C}([a\,;b]\,,\mathbb{R})^2 \quad \sqrt{\int_{[a,b]} (f+g)^2} \leq \sqrt{\int_{[a,b]} f^2} + \sqrt{\int_{[a,b]} g^2}. \tag{26.41}$$

Remarque : Soit E l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application $\varphi\colon \begin{cases} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longmapsto & \frac{1}{2\pi}\int_{[0\,;2\pi]} fg \end{cases}$. C'est un produit scalaire.

26.1.4 Familles de vecteurs orthogonales et familles de vecteurs orthonormales

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ.

26.1.4.1 Vecteur unitaire

Définition 26.3. Soit $x \in E$. On dit que x est unitaire si et seulement $\|x\| = 1$. *C'est une caractéristique qui dépend du produit scalaire φ.*

Remarque : Si x est non nul, alors $\frac{x}{\|x\|}$ est un vecteur unitaire colinaire à x et de même sens.

26.1.4.2 Vecteurs orthogonaux

Définition 26.4. Soient deux vecteurs x et y de E. On dit que x et y sont orthogonaux, on note $x \perp y$ si et seulement si $\langle x, y \rangle = 0$.

⚠C'est une notion qui dépend du produit scalaire choisi.

Proposition 26.6.

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad x \perp y \iff y \perp x; \tag{26.42}$$

$$\forall x \in E \quad x \perp 0; \tag{26.43}$$

$$\forall x \in E \quad x \perp x \iff x = 0; \tag{26.44}$$

$$\forall x \in E \quad [(\forall y \in E \quad x \perp y) \iff x = 0]. \tag{26.45}$$

Le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de l'espace est le vecteur nul.

Démonstration. Il suffit de réécrire les propriétés déjà vues. □

Théorème 26.3 (Théorème de Pythagore)**.** *Pour tout couple de vecteurs* $(x, y) \in E^2$*, on a*

$$x \perp y \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 . \tag{26.46}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} x \perp y &\iff \langle x, y \rangle = 0 && (26.47)\\ &\iff \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) = 0 && (26.48)\\ &\iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 . && (26.49) \end{aligned}$$

□

26.1.4.3 Familles orthogonales, familles orthonormales

Définition 26.5. Soit un ensemble fini I ayant au moins deux éléments. Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E indéxée par I.

— On dit que $\mathcal{X}$ est une famille orthogonale de E (FOG) si et seulement si

$$\forall (i,j) \in I^2 \quad i \neq j \implies x_i \perp x_j . \tag{26.50}$$

Les vecteurs sont deux à deux orthogonaux.

— On dit qe $\mathcal{X}$ est une famille orthonormale de E (FON) si et seulement si $\mathcal{X}$ est une famille orthogonale de E et si pour tout $i \in I$, $\|x_i\| = 1$.

Proposition 26.7. Une famille orthogonale finie de vecteurs de E dont aucun n'est nul est libre.

Démonstration. Soit $\mathcal{X} = (x_i)_{i \in I}$ une famille orthogonale finie de E et $(\alpha_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^I$ telle que $\sum_{i \in I} \alpha_i x_i = 0$. Soit $i_0 \in I$, alors $\langle x_{i_0}, 0 \rangle = 0$. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{i \in I} \alpha_i x_i, x_{i_0} \right\rangle && (26.51)\\ &= \sum_{i \in I} \alpha_i \langle x_i, x_{i_0} \rangle && \text{linéarité à gauche} \quad (26.52)\\ &= \alpha_{i_0} \|x_{i_0}\|^2 . && \text{famille orthogonale} \quad (26.53) \end{aligned}$$

Comme tous les vecteurs sont non nuls on a $x_{i_0} \neq 0$ et donc $\|x_{i_0}\| \neq 0$. Si bien que $\alpha_{i_0} = 0$, qui est vrai pour tout i_0, alors la famille $\mathcal{X}$ est libre. □

Théorème 26.4 (Théorème de Pythagore pour une famille orthogonale finie)**.** *Soit un naturel $n \geq 2$ et une famille orthogonale $(x_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in E^n$. Alors*

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 . \tag{26.54}$$

Démonstration par récurrence. Initialement on prend $n = 2$ et c'est le théorème de Pythagore classique énoncé ci-avant. Soit un naturel $n \geq 2$ et supposons l'assertion vraie au rang n, montrons qu'elle est encore vraie au rang $n+1$. Soit famille orthogonale $(x_i)_{i\in[\![1;n+1]\!]} \in E^{n+1}$, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right\|^2 = \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} \right\|^2 . \tag{26.55}$$

Or

$$\begin{aligned} \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i, x_{n+1} \right\rangle &= \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, x_{n+1}\rangle && \text{linéarité} && (26.56)\\ &= 0 && \text{famille orthogonale.} && (26.57) \end{aligned}$$

Alors $x_{n+1} \perp \sum_{i=1}^{n} x_i$. Donc

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{n+1} x_i \right\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i + x_{n+1} \right\|^2 && && (26.58)\\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 + \|x_{n+1}\|^2 && x_{n+1} \perp \sum_{i=1}^{n} x_i && (26.59)\\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \|x_i\|^2 && \text{Hypothèse de récurrence.} && (26.60) \end{aligned}$$

L'assertion au rang $n + 1$ est vraie. Par théorème de récurrence, le résultat est vraie pour tout naturel $n \geq 2$. □

26.1.5 Orthogonalité de sous-espaces vectoriels

26.1.5.1 Orthogonal

Soit (E, φ) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire φ.

Définition 26.6. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Posons

$$F^{\perp} = \{x \in E \mid \forall y \in F \quad x \perp y\} . \tag{26.61}$$

C'est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de F. $F^{\perp}$ est appelé l'orthogonal de F.

Exemples :

— Si $F = E$ alors $F^\perp = \{0\}$;
— Si $F = \{0\}$ alors $F^\perp = E$.

Proposition 26.8. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Par définition $F^\perp \subset E$. Comme $0 \in F^\perp$, il est non vide. Soient deux vecteurs x et x' de $F^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour tout $y \in F$ on a

$$\langle \lambda x + x', y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle + \langle x', y\rangle = 0. \tag{26.62}$$

alors $\lambda x + x' \perp y$ et donc $\lambda x + x' \in F^\perp$.

Par caractérisation $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Comme $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel, on peut définir son orthogonal $(F^\perp)^\perp$.

Proposition 26.9. Pour tout sous-espace vectoriel F de E, on a

$$F \subset (F^\perp)^\perp. \tag{26.63}$$

⚠En général ce n'est pas une égalité.

Démonstration. On note $G = F^\perp$. Soit $x \in F$, alors

$$\forall y \in G \quad x \perp y. \tag{26.64}$$

Alors $x \in G^\perp$. Du coup $F \subset G^\perp = (F^\perp)^\perp$. □

26.1.5.2 Sous-espaces vectoriels othogonaux

Définition 26.7. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont orthogonaux et on note $F \perp G$, si et seulement si

$$\forall x \in F\ \forall y \in G \quad x \perp y. \tag{26.65}$$

Proposition 26.10. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors

1. $F \perp F^\perp$;
2. pour tout sous-espace vectoriel G de E,

$$G \perp F \iff G \subset F^\perp. \tag{26.66}$$

$F^\perp$ est le plus grand sous-espace vectoriel (au sens de l'inclusion) qui est orthogonal à F.

Démonstration.

1. Évident par définitin de $F^\perp$;
2. Si $G \perp F^\perp$ soit alors $x \in G$. Pour tout $y \in F$, on a $x \perp y$ (car $G \perp F$) donc $x \in F^\perp$, par définition de $F^\perp$.

□

Proposition 26.11. Soient F_1 et F_2 deux sous-espace vectoriels de E, alors

$$F_1 \subset F_2 \implies F_2^\perp \subset F_1^\perp. \tag{26.67}$$

Démonstration. Soit $x \in F_2^\perp$, alors pour tout $y \in F_1$, $y \in F_2$ donc $x \perp y$. Alors $x \in F_1^\perp$. □

Proposition 26.12. Pour tous sous-espaces vectoriels F et G de E, on a

$$F \perp G \implies F \cap G = \{0\}. \tag{26.68}$$

Démonstration. Si $x \in F \cap G$, alors $x(\in F) \perp x(\in G)$ donc $x = 0$. $F \cap G \subset \{0\}$. L'autre inclusion est triviale puisque $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel. □

Corollaire 26.12.1. *Pour tout sous-espace vectoriel F de E, $F \cap F^\perp = \{0\}$.*

26.1.5.3 Orthogonalité et supplémentaire

Soit F un sous-espace vectoriel de E. On sait que :
— F et $F^\perp$ sont en somme directe mais à priori $F \oplus F^\perp \subset E$;
— $F \subset (F^\perp)^\perp$.

Théorème 26.5. *Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose qu'ils sont supplémentaires dans E. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1. $F \perp G$;
2. $G = F^\perp$;
3. $F = G^\perp$.

Auquel cas $E = F \oplus G = F \oplus F^\perp$.

Démonstration. $1 \implies 2$ D'après la proposition précédente, on a déjà $G \subset F^\perp$, montrons l'autre inclusion : soit $x \in F^\perp$. Comme $E = F \oplus G$ alors il existe un unique couple $(x_1, x_2) \in F \times G$ tel que $x = x_1 + x_2$. Alors $0 = \langle x, x_1\rangle = \langle x_1 + x_2, x_1\rangle$. Comme $x_2 \in G$ et $x_1 \in F$, et $F \perp G$ on a $\langle x_1, x_2\rangle = 0$. Du coup $\|x_1\|^2 = 0$ donc $x_1 = 0$. Finalement $x = x_2 \in G$. Alors $F^\perp \subset G$. Par double inclusion on a $G = F^\perp$.

$1 \implies 3$ C'est la même démonstration en échangeant F et G.

$2 \implies 1$ et $3 \implies 1$ C'est clair. □

Corollaire 26.5.1 (Supplémentaire orthogonal)**.** *Pour tout sous-espace vectoriel F de E, il existe* au plus *un sous-espace vectoriel G tel que* $\begin{cases} E = F \oplus G \\ F \perp G \end{cases}$. *S'il existe alors $G = F^\perp$. On parle de supplémentaire orthogonal.*

Corollaire 26.5.2. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Si $E = F \oplus F^\perp$ alors $F = (F^\perp)^\perp$.*

Démonstration. On applique le théorème avec $G = F^\perp$: $F = G^\perp = (F^\perp)^\perp$. □

26.2 Espace vectoriel euclidien

26.2.1 Définition d'un espace vectoriel euclidien

Définition 26.8. On appelle espace vectoriel euclidien tout couple (E, φ) où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle, et φ un produit scalaire sur E.

Remarque : Si F est un sous-espace vectoriel non nul de E, on peut montrer que $\varphi_F = \varphi_{|F\times F}$ est un produit scalaire sur F. Alors (F, φ_F) est un espace vectoriel euclidien.

26.2.2 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel euclidien

Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien.

Théorème 26.6. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors :*
- $E = F \oplus F^\perp$ *;*
- $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ *;*
- $F = (F^\perp)^\perp$.

On dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de F (l'unicité a été prouvé à la sous-section **??***).*

Ne pas confondre l'unicité du supplémentaire orthogonal avec l'unicité du supplémentaire en général. En général un sous-espace vectoriel admet une infinité de supplémentaire.

Démonstration. Cas 1 : C'est le cas facile où $F = \{0\}$, alors $F^\perp = E$ et alors les trois points sont vérifiés.

Cas 2 : On note $\dim F = p \in [\![1\,;n]\!]$ avec $n = \dim E$. Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. On a montré que $F \oplus F^\perp \subset E$, alors $\dim F^\perp \leq n-p$. Soit l'application

$$u\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^p \\ x & \longmapsto & (\langle x, f_1\rangle, \ldots, \langle x, f_p\rangle) \end{array} \right. . \tag{26.69}$$

L'application u est linéaire, grâce à la linéarité à gauche du produit scalaire. Montrons que $\mathrm{Ker}(u) = F^\perp$:
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, on a $\langle x, f_i\rangle = 0$. Pour tout $y \in F$, il existe un unique p-uplet de scalaire $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ tel que $y = \sum_{k=1} \alpha_k f_k$. Alors

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle &= \sum_{k=1} \alpha_k \langle x, f_k\rangle && \text{linéarité} && (26.70) \\ &= \sum_{k=1} \alpha_k 0 && x \in \mathrm{Ker}(u) && (26.71) \\ &= 0, && && (26.72) \end{aligned}$$

  alors $x \in F^\perp$. Alors $\mathrm{Ker}(u) \subset F^\perp$.
- Soit $x \in F^\perp$. Pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, on a $x \perp f_i$. Donc $\langle x, f_i\rangle = 0$, et alors $u(x) = 0$. Finalement $x \in \mathrm{Ker}(u)$. $F^\perp \subset \mathrm{Ker}(u)$.

Par double inclusion $F^\perp = \mathrm{Ker}(u)$.

En appliquant le théorème du rang à l'application u, on obtient

$$\dim E = \mathrm{rang}(u) + \dim \mathrm{Ker}(u), \tag{26.73}$$

c'est-à-dire

$$\dim F^\perp = n - \mathrm{rang}(u). \tag{26.74}$$

Comme $\mathrm{Im}(u) \subset \mathbb{R}^p$, on a bien $\mathrm{rang}(u) \leq p$ et donc $\dim F^\perp \geq n - p$. Avec l'inégalité inverse vue plus haut on obtient bien $\dim F^\perp = n - p$.

Finalement $F \oplus F^{\perp} \subset E$ et

$$\dim F \oplus F^{\perp} = \dim F + \dim F^{\perp} = p + n - p = n = \dim E \tag{26.75}$$

nous donne que $F \oplus F^{\perp} = E$. □

26.2.3 Bases orthogonales et bases orthonormales d'un espace vectoriel euclidien

26.2.3.1 Définition

Soient (E, φ) un espace vectoriel euclidien et $\mathcal{B}$ une famille finie de vecteurs de E.

Définition 26.9. $\mathcal{B}$ est une base orthogonale (BOG) de E si et seulemet si $\mathcal{B}$ est une base de E et si $\mathcal{B}$ est une famille orthogonale de E.

$\mathcal{B}$ est une base orthonormale (BON) de E si et seulemet si $\mathcal{B}$ est une base de E et si $\mathcal{B}$ est une famille orthonormale de E.

Remarque : Si E est une droite vectorielle, alors $\mathcal{B} = (x)$ est une BOG si et seulement si x est non nul et c'est une BON si et seulement si $\|x\| = 1$.

26.2.3.2 Caractérisation

Soient (E, φ) un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \in E^n$.

Proposition 26.13. $\mathcal{B}$ est une base orthogonale de E si et seulement si :
- pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $e_i \neq 0$;
- pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ on a $e_i \perp e_j$.

Démonstration. $\Longrightarrow$ C'est évident : le fait que $\mathcal{B}$ est une base implique que tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont non nuls, et le fait que la famille soit orthogonale implique trivialement l'orthogonalité des vecteurs deux à deux.

$\Longleftarrow$ Le deuxième point implique que la famille $\mathcal{B}$ est orthogonale. De plus c'est une famille orthogonale dont aucun des vecteurs n'est nul donc $\mathcal{B}$ est une famille libre. C'est une famille libre de cardinal $n = \dim E$ donc c'est une base. □

Proposition 26.14. $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E si et seulement si :
- pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\|e_i\| = 1$;
- pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ on a $e_i \perp e_j$.

C'est-à-dire

$$\mathcal{B} \text{ est une BON} \iff \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{26.76}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ C'est la définition de la BON.

$\Longleftarrow$ D'après la proposition précédente, $\mathcal{B}$ est une BOG. De plus tous ces vecteurs sont unitaires, donc c'est une BON. □

Proposition 26.15. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une BOG de E. Alors $\mathcal{B}' = \left(\frac{e_i}{\|e_i\|}\right)_{i \in [\![1;n]\!]} = (b_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est une BON de E.

Démonstration. Déjà $\mathcal{B}' \subset E$ et $\operatorname{Card} \mathcal{B}' = n = \dim E$. De plus

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \quad \langle b_i, b_j \rangle = \frac{\langle e_i, e_j \rangle}{\|e_i\|\,\|e_j\|} = \delta_{ij}. \tag{26.77}$$

Par caractérisation, $\mathcal{B}$ est une BON de E. □

Exemple : La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une BON de $\mathbb{R}^n$ munique du produit scalaire canonique.

26.2.4 Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien

Théorème 26.7. *Tout espace vectoriel euclidien admet au moins une base orthonormale.*

Démonstration. On prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ l'assertion $\mathcal{P}(n)$ "Si E est un espace vectoriel euclidien de dimension n, alors E admet une base orthonormale."

Initialisation : Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 1. Soit $x \in E \setminus \{0\}$, alors $\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ est une bas orthonormale de E. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit un naturel n non nul. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$. Soit $x \in E \setminus \{0\}$ et posons $F = \operatorname{Vect}(x)$.

$F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension n. Muni du produit scalaire induit par celui de E, $F^\perp$ est un sous espace vectoriel euclidien de dimension n. Appliquons-lui l'hypothèse de récurrence : Il existe une base orthonormale $\mathcal{B}' = (b_1, \ldots, b_n)$ de $F^\perp$. Soit $\mathcal{B} = \mathcal{B}' \cup \{b_{n+1}\}$ avec $b_{n+1} = \left(\frac{x}{\|x\|}\right)$. On vérifie que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E :

— $\operatorname{Card}(\mathcal{B}) = n+1 = \dim(E)$;
— Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n+1]\!]^2$ on a :

$$\langle b_i, b_j \rangle = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } i \leq n \text{ et } j \leq n \\ & \quad \text{car } \mathcal{B}' \text{ est une BON} \\ 0 = \delta_{ij} & \text{si } (i \leq n,\ j = n+1) \text{ ou } (j \leq n,\ i = n+1) \\ & \quad \text{car } F \perp F^\perp \\ 1 = \delta_{ij} & \text{si } i = j = n+1 \text{ car } \langle b_{n+1}, b_{n+1} \rangle = 1 \end{cases} \tag{26.78}$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

Conclusion : Le théorème de récurrence permet de conclure que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel n non nul. □

Théorème 26.8. *Toute famille orthonormale d'un espace vectoriel euclidien E peut être complétée en une base orthonormale de E.*

Démonstration. Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{F}$ une famille orthonormale de E. $\mathcal{F}$ est donc une famille libre de E. Soit $p \leq n$ le cardinal de $\mathcal{F}$, et notons $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$. Deux cas se présentent : Si $p = n$ alors $\mathcal{F}$ est déjà une base orthonormale.

Sinon, on note $F = \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$, et $\dim F^\perp = n - p \geq 1$. Muni du produit scalaire induit par celui de E, $F^\perp$ est un espace vectoriel euclidien. D'après le théorème précédent, $F^\perp$ admet une base orthonormale notée $\mathcal{F}' = (f_{p+1}, \ldots, f_n)$. Soit $\mathcal{B} = \mathcal{F} \cup \mathcal{F}'$. Montrons que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E :

— $\mathrm{Card}(\mathcal{B}) = n = \dim(E)$;

— Pour tout $(i, j) \in [\![1\,; n]\!]^2$ on a

$$\langle f_i, f_j \rangle = \begin{cases} \delta_{ij} & \text{si } (i \leq p,\ j \leq p) \text{ ou } (i \geq p+1,\ j \geq p+1) \\ & \text{car } \mathcal{F}, \mathcal{F}' \text{ sont des } BON \\ 0 = \delta_{ij} & \text{si } (i \leq p,\ j \leq p) \text{ ou } (i \geq p+1,\ j \geq p+1) \\ & \text{car } F \perp F^\perp \end{cases} \tag{26.79}$$

Donc $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E.

□

Théorème 26.9. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base orthonormale de E. Soit $p \in [\![0\,; n]\!]$. On note $\mathcal{B}_1 = (b_i)_{1 \leq i \leq p}$ ($\mathcal{B}_1 = \emptyset$ si $p = 0$) et $\mathcal{B}_2 = (b_i)_{p+1 \leq i \leq n}$ ($\mathcal{B}_2 = \emptyset$ si $p = n$). Soient $F_1 = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1)$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_2)$. Alors*

$$\begin{cases} E = F_1 \oplus F_2 \\ F_2 = F_1^\perp \end{cases} . \tag{26.80}$$

De plus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases orthonormales respectives de F_1 et F_2.

Démonstration. On a déjà vu au chapitre **??** (théorème **??**) que F_1 et F_2 sont supplémentaires dans E. Montrons l'orthogonalité :

Soit $x \in F_1$ et $y \in F_2$. Il existe $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq p} \in \mathbb{R}^p$ et $(\beta_i)_{p+1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n-p}$ telles que $x = \sum_{i=1}^p \alpha_i b_i$ et $y = \sum_{i=p+1}^n \beta_i b_i$. Leur produit scalaire vaut

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^p \alpha_i b_i, \sum_{j=p+1}^n \beta_j b_j \right\rangle \tag{26.81}$$

$$= \sum_{i=1}^p \alpha_i \sum_{j=p+1}^n \beta_j \underbrace{\langle b_i, b_j \rangle}_{=0 \text{ car } i \neq j} \tag{26.82}$$

$$= 0. \tag{26.83}$$

Donc $F_1 \perp F_2$, et puisque $E = F_1 \oplus F_2$, alors $F_2 = F_1^\perp$, d'après le corollaire **??**.

$\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ vérifient toutes les deux :

$$\forall (i, j) \in [\![1\,; n]\!]^2 \quad \langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij}. \tag{26.84}$$

De plus $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases de F_1 et F_2 (libres car extraites de $\mathcal{B}$ et génératrices par définition de F_1 etF_2). Alors $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bases orthonormales respectives de F_1 et F_2. □

26.2.5 Construction d'une base orthonormale par le procédé de Gram-Schmidt

Théorème 26.10. *Soit (E, φ) un espace vecoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base quelconque de E. Alors il existe de façon unique* *une famille de réels* $(\alpha_{ij})_{1\leq i<j\leq n}$ *telle que la famille* $(b_j)_{1\leq j\leq n} \in E^n$ *vérifiant*

$$\Sigma \begin{cases} b_1 &= e_1 \\ b_2 &= \alpha_{12}b_1 + e_2 \\ \vdots & \\ b_j &= \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{ij}b_i + e_j \\ \vdots & \\ b_n &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{in}b_i + e_n \end{cases} \tag{26.85}$$

soit une base orthogonale de E*. De plus*

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \; 1 \leq i < j \leq n \quad \alpha_{ij} = -\frac{\langle b_i, e_j\rangle}{\|b_i\|^2}. \tag{26.86}$$

Il reste à normaliser cette base : la famille $\left(\frac{b_j}{\|b_j\|}\right)_{1\leq j\leq n}$ *est une base orthonormale de* E*.*

Démonstration par récurrence. Pour tout naturel n non nul on pose $\mathcal{P}(n)$ “pour tout espace vectoriel euclidien de dimension n, toute base $\mathcal{E}$, ... ”

Initialisation : Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 1. Soit $\mathcal{E} = (e_1)$ une base de E, et elle est orthogonale. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et supposons $\mathcal{P}(n)$. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n+1$, $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_{n+1})$ une base de $\mathcal{E}$. Soient $\mathcal{E}' = \mathcal{E} \setminus \{e_{n+1}\}$ et $E' = \mathrm{Vect}(\mathcal{E}')$ muni du produit scalaire induit. E' est un espace vectoriel euclidien de dimension n. Par hypothèse de récurrence, il existe, de façon unique, une famille de réels $(\alpha_{ij})_{1\leq i<j\leq n}$ telle que la famille $(b_j)_{1\leq j\leq n} \in E^n$ vérifiant Σ formant une base orthogonale de E'.

Il reste à prouver l'existence et l'unicité de $(\alpha_{in+1})_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ telle que si $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in+1}b_i + e_{n+1}$ alors $(b_j)_{1\leq j\leq n+1}$ est une base orthogonale de E.

Unicité (Analyse) : Si les α_{in+1} existent alors pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, on a

$$0 = \langle b_{n+1}, b_j\rangle \tag{26.87}$$

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in+1}b_i + e_{n+1}, b_j \right\rangle \tag{26.88}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in+1} \langle b_i, b_j\rangle + \langle e_{n+1}, b_j\rangle \quad \text{linéarité à gauche} \tag{26.89}$$

$$0 = \alpha_{jn+1} \langle b_j, b_j\rangle + \langle e_{n+1}, b_j\rangle \quad (b_j)_{1\leq j\leq n} \text{ est orthogonale} \tag{26.90}$$

$$\alpha_{jn+1} = -\frac{\langle e_{n+1}, b_j\rangle}{\|b_j\|^2}. \quad b_j \neq 0 \tag{26.91}$$

On a montré l'unicité sous réserve d'existence et on a trouvé la seule valeur possible des α_{in+1}.

Existence (Synthèse) : Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, on pose $\alpha_{in+1} = -\frac{\langle e_{n+1}, b_i\rangle}{\|b_i\|^2}$ et $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in+1}b_i + e_{n+1}$.

Montrons que $(b_j)_{1\leq j\leq n+1}$ est une base orthogonale de E :

— Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ si $i \neq j$ alors $\langle b_i, b_j\rangle = 0$ car $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base orthogonale de E. Ensuite

$$\begin{aligned}
\langle b_i, b_{n+1}\rangle &= \left\langle b_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in+1} b_i + e_{n+1} \right\rangle && (26.92)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{in+1} \langle b_i, b_j\rangle + \langle b_i, e_{n+1}\rangle && (26.93)\\
&= \alpha_{in+1} \|b_i\|^2 + \langle b_i, e_{n+1}\rangle && (26.94)\\
&= 0. && (26.95)
\end{aligned}$$

Alors $(b_j)_{1\leq j\leq n+1}$ est une famille orthogonale. Montrons que c'est une base :

— Si $i \leq n$, alors $b_i \neq 0$ car $(b_j)_{1\leq j\leq n}$ est une base orthogonale de E' ;

— Si on avait $b_{n+1} = 0$, on aurait $e_{n+1} = -\sum_{i=1}^{n} \alpha_{in+1} b_i$. C'est-à-dire $e_{n+1} \in \mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_n) = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. Or c'est impossible car $(e_1, \dots, e_{n+1})$ est une base. Donc $b_{n+1} \neq 0$.

$(b_j)_{1\leq j\leq n+1}$ est une famille orthogonale dont tous les vecteurs sont non nuls, elle est donc libre. Finalement c'est une base car $\mathrm{Card}(b_j)_{1\leq j\leq n+1} = n+1 = \dim E$.

Alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Le théorème de récurrence nous permet de conclure en écrivant que l'assertion $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout naturel n non nul. □

Remarques :

1. La démonstration par récurrence fournit un procédé pour déterminer la base $(b_1, \dots, b_n)$, appelé procédé d'orthogonalisation ou procédé de Gram Schmidt ;
2. La matrice de passage $\mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}$ de la base $\mathcal{E}$ à la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure avec que des 1 sur la diagonale, idem pour $\mathcal{P}_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{E}}^{-1}$;
3. Pour tout naturel $p \in [\![1\,;n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = \mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_p)$.

26.2.6 Expressions analytiques dans une base orthonormée donnée

Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base orthonormée de E.

26.2.6.1 Coordonnées d'un vecteur

Soit $x \in E$, $\mathcal{B}$ une base de E. Il existe un unitque n-uplet $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$. Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
\langle x, b_j\rangle &= \sum_{i=1}^{n} x_i \langle b_i, b_j\rangle && \text{linéarité} && (26.96)\\
&= x_j. && \mathcal{B} \text{ est une BON} && (26.97)
\end{aligned}$$

Alors pour tout $x \in E$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle\, b_i$.

26.2.6.2 Produit scalaire

Soient x et y des vecteurs de E. Il existe deux uniques familles de scalaire $(x_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$ telles que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \tag{26.98}$$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i. \tag{26.99}$$

Ainsi le produit scalaire s'écrit

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \right\rangle \tag{26.100}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle b_i, b_j\rangle \qquad \text{bilinéarité} \tag{26.101}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \qquad \mathcal{B} \text{ est une BON} \tag{26.102}$$

Finalement pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle \langle y, b_i\rangle$.

Remarque : Si on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $\langle x, y\rangle = X^\top Y$.

26.2.6.3 Norme euclidienne

Soit $x \in E$, il existe un unique n-uplet de scalaires $(\lambda_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$. Alors

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i\rangle^2} \tag{26.103}$$

$$\|x\|^2 = X^\top X \tag{26.104}$$

26.2.7 Isomorphisme entre un espace euclidien et $\mathbb{R}^n$

Théorème 26.11. *Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidiende dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. On note $\mathcal{E}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canconique.*

*Il existe un unique isomorphisme $u \in$ **Isom** $(E, \mathbb{R}^n)$ tel que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{E}_c$. De plus u conserve le produit scalaire :*

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x), u(y)\rangle = \varphi(x, y) = \langle x, y\rangle . \tag{26.105}$$

Démonstration. $\mathcal{B}$ est une base de E et $\dim(E) = n$, alors il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n)$ tel que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{E}_c$. De plus $\mathcal{E}_c$ est une base de $\mathbb{R}^n$, donc u est bijective, c'est un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}^n$.

Pour tout couple $(x,y) \in E^2$, il existe deux uniques n-uplets $(x_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ et $(y_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \quad y = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i. \tag{26.106}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\langle u(x), u(y)\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i u(b_i), \sum_{j=1}^{n} y_j u(b_j) \right\rangle && u \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}^n) && (26.107)\\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \right\rangle && \text{définition de } u && (26.108)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j\rangle && \text{bilinéarité} && (26.109)\\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i && \mathcal{E}_c \text{ est une BOG} && (26.110)\\
&= \varphi(x,y) = \langle x, y\rangle . && && (26.111)
\end{aligned}$$

□

Théorème 26.12. *Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Il existe un unique produit scalaire φ sur E tel que la base $\mathcal{B}$ soit une base orthonormale de E pour le produit scalaire φ.*

Analyse & Unicité. Supposons avoir construit le produit scalaire φ.

On peut lui appliquer le théorème précédent, alors pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\varphi(x,y) = \langle u(x), u(y)\rangle$. De plus u ne dépend que de la base $\mathcal{B}$ et pas du produit scalaire φ.

Alors φ est défini en fonction unique de u, et donc de $\mathcal{B}$. □

Synthèse & Existence. On sait grâce au htéorème précédent qu'il existe un unique isomorphisme $u \in \mathbf{Isom}(E, \mathbb{R}^n)$ tel que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{E}_c$. On définit l'application

$$\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle u(x), u(y)\rangle \end{array} \right. . \tag{26.112}$$

L'application φ est symétrique puisque $\langle .,.\rangle$ l'est. Pour tout réel λ et tout triplet $(x,x',y) \in E^3$ on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda x + x', y) &= \langle u(\lambda x + x'), u(y)\rangle && (26.113)\\
&= \lambda \langle u(x), u(y)\rangle + \langle u(x'), u(y)\rangle \quad \text{linéarité de } u \text{ et } \langle .,.\rangle && (26.114)\\
&= \lambda\varphi(x,y) + \varphi(x,y'). && (26.115)
\end{aligned}$$

φ est linéaire à gauche. Elle est aussi linéaire à droite et symétrique.

Soit $x \in E$, $\varphi(x,x) = \|u(x)\|^2 \geq 0$ et $\varphi(x,x) = 0 \iff u(x) = 0 \iff x = 0$ car u est bijective (donc injective). L'application φ est définie positive.

Au final, φ est un produit scalaire.

Il reste à vérifier que $\mathcal{B}$ est une base orthonormale pour φ. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on a

$$\begin{aligned} \varphi(b_i, b_j) &= \langle u(b_i), u(b_j) \rangle && (26.116)\\ &= \langle e_i, e_j \rangle && u(\mathcal{B}) = \mathcal{E}_c \quad (26.117)\\ &= \delta_{ij}. && \mathcal{E}_c \text{ est une BON} \quad (26.118) \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{B}$ est une base orthonormale. □

26.3 Projecteurs orthogonaux

Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien.

26.3.1 Notion de projecteur orthogonal

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. Alors $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$. D'après le théorème **??**, il y a équivalence entre

1. $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$;
2. $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p)^{\perp}$;
3. $\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$.

Lorsqu'une de ces conditions est vérifiée, on dit que p est un projecteur orthogonal.

Vocabulaire : Soit F un sous-espace vectoriel de E, $E = F \oplus F^{\perp}$. Le projecteur sur F parallélement à $F^{\perp}$ et noté p_F est appelé projecteur orthogonal de E sur F.

Théorème 26.13. *Soit p ine application de E dans E. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *p est un projecteur orthognal de E ;*
2. *$p \in \mathcal{L}(E)$, $p \circ p = p$, et pour tout $(x,y) \in E^2$ on a $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle$.*

Démonstration. 1 $\implies$ 2. Comme p est un projecteur, alors $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$. Soient $(x,y) \in E^2$ alors

$$\begin{aligned} \langle p(x), y \rangle &= \langle p(x), y - p(y) + p(y) \rangle && (26.119)\\ &= \left\langle \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}(p)}, \underbrace{y - p(y)}_{\in \mathrm{Ker}(p)} \right\rangle + \langle p(x), p(y) \rangle && (26.120)\\ &= \langle p(x), p(y) \rangle && \mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p) \quad (26.121) \end{aligned}$$

De la même manière, par symétrie des rôles de x et y on a $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), p(y) \rangle$. Donc $\langle x, p(y) \rangle = \langle p(x), y \rangle$.

2 $\implies$ 1. $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p \circ p = p$ impliquent que p est un projecteur de E.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(p)$ et $y \in \mathrm{Im}(p)$. Alors

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \langle x, p(y) \rangle && (26.122)\\ &= \langle p(x), y \rangle && (26.123)\\ &= \langle 0, y \rangle = 0. && (26.124) \end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$. Alors le projecteur p est orthogonal. □

26.3.2 Expression du projeté orthogonal

Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit p_F le projecteur orthogonal sur F. On se donne une *base orthogonale* $(f_1, \ldots, f_p)$ de F. On veut obtenir une expression de $p_F(x)$ pour tout vecteur x de E.

Soit $x \in E$, alors $p_F(x) \in F$ et

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle p_F(x), f_k\rangle f_k \tag{26.125}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \langle x, p_F(f_k)\rangle f_k \tag{26.126}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \langle x, f_k\rangle f_k. \qquad f_k \in F = \mathrm{Im}(p_F) \tag{26.127}$$

Remarque : Pour tout $x \in E$, $x = p_F(x) + (x - p_F(x)) = p_F(x) + p_{F^\perp}(x)$. Parfois c'est plus intéressant de calculer $p_{F^\perp}$, soit parce qu'il est de dimension plus petite, soit parce qu'on connait une de ses bases orthonormales.

Matrice d'un projecteur orthogonal Soit F un sous-espace vectoriel de dimension $p \geq 1$. Soit p_F un projecteur orthogonal sur F. Soit $\mathcal{F} = (f_1, \ldots, f_p)$ une base orthonormale de F et $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base orthonormale de E.

Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F)$. Calculons pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$ $p_F(b_i)$: Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, on a

$$p_F(b_j) = \sum_{k=1}^{p} \langle b_j, f_k\rangle f_k. \tag{26.128}$$

Il faut les coordonnées de $p_F(b_j)$ dans la base $\mathcal{B}$: ce sont les $\langle p_F(b_j), b_i\rangle$.

$$a_{ij} = \langle p_F(b_j), b_i\rangle \tag{26.129}$$
$$= \left\langle \sum_{k=1}^{p} \langle b_j, f_k\rangle f_k, b_i \right\rangle \tag{26.130}$$
$$= \sum_{k=1}^{p} \langle b_j, f_k\rangle \langle b_i, f_k\rangle . \tag{26.131}$$

La matrice A est symétrique.

26.3.3 Distance d'un point à un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geq 1$. Soit $x \in E$, la partie $\{d(x,y) \mid y \in F\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car F est non vide) et est minorée par 0.

Elle admet donc une borne inférieure noté $d(x,F) = \inf\{d(x,y) \mid y \in F\}$. C'est la distance du point x au sous-esapce vectoriel F.

Théorème 26.14. *1. Cette borne inférieure est en fait un minimum ;*

2. pour tout vecteur $y \in F$, on a

$$d(x,F) = d(x, p_F(x)) = \|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\| ; \tag{26.132}$$

3. pour tout vecteur $y \in F$, on a

$$d(x,F) = d(x,y) \implies y = p_F(x). \tag{26.133}$$

Le minimum est atteint en $p_F(x)$ seulement.

Démonstration. Soit $y \in F$, alors

$$\|x-y\|^2 = \left\| \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F} \right\| \tag{26.134}$$

$$= \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2. \qquad \text{Pythagore} \tag{26.135}$$

Donc $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$, et

$$\|x-y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 \iff \|p_F(x) - y\| = 0. \tag{26.136}$$

Cela signifie que $d(x,F)$ est un minimum et qu'il est atteint en $p_F(x)$: $d(x,F) = \|x - p_F(x)\|$ □

Expressions de $d(x,F)$

—

$$d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\| \tag{26.137}$$

$$\|x\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)\|^2 \tag{26.138}$$

$$d(x,F) = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2} \tag{26.139}$$

— Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base orthonormale de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ une base orthonormale de F, alors

$$d(x,F) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \langle x, b_i \rangle^2 - \sum_{k=1}^{p} \langle x, f_k \rangle^2}. \tag{26.140}$$

— Il est parfois utile de calculer $p_{F^\perp}(x)$ plutôt que $p_{F^\perp}(x)$.

26.3.4 Formes linéaires et hyperplans d'un espace euclidien

26.3.4.1 Vecteur normal et forme linéaire

Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien. On note $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ son dual, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires de E. Pour tout $x \in E$, on pose

$$\varphi_x \colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{array} \right. . \tag{26.141}$$

Le produit scalaire est linéaire à droite donc $\varphi_x \in E^*$. Soit l'application

$$\psi \colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \varphi_x \end{array} \right. . \tag{26.142}$$

L'application ψ est bien définie car pour tout vecteur $x \in E$, $\varphi_x \in E^*$. Montrons que ψ est linéaire : Soit $(x, x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\psi(\lambda x + x') = \varphi_{\lambda x + x'}$. Soit $y \in E$, alors

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda x + x')(y) &= \varphi_{\lambda x + x'}(y) && (26.143)\\
&= \langle \lambda x + x', y \rangle && (26.144)\\
&= \lambda \langle x, y \rangle + \langle x', y \rangle \qquad \text{linéarité à gauche} && (26.145)\\
&= \lambda \varphi_x(y) + \varphi_{x'}(y) && (26.146)\\
&= \lambda \psi(x)(y) + \psi(x')(y) && (26.147)\\
&= [\lambda \psi(x) + \psi(x')](y). && (26.148)
\end{aligned}$$

Comme l'égalité est vraie pour tout $y \in E$, on a $\psi(\lambda x + x') = \lambda \psi(x) + \psi(x')$, donc $\psi \in \mathcal{L}(E, E^*)$.

Trouvons le noyau de ψ.

Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned}
x \in \operatorname{Ker}(\psi) &\iff \psi(x) = 0_{E^*} && (26.149)\\
&\iff \forall y \in E \quad \psi(x)(y) = 0_{\mathbb{R}} && (26.150)\\
&\iff \forall y \in E \quad \varphi_x(y) = 0_{\mathbb{R}} && (26.151)\\
&\iff \forall y \in E \quad \langle x, y \rangle = 0_{\mathbb{R}} && (26.152)\\
&\iff x = 0_E. && (26.153)
\end{aligned}$$

Donc $\operatorname{Ker} \psi = \{0_E\}$. L'application ψ est injective et $\dim E = \dim E^*$ donc ψ est bijective. On en déduit le théorème suivant

Théorème 26.15. *L'application*

$$\psi \colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^* \\ x & \longmapsto & \varphi_x \colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \langle x, y \rangle \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad (26.154)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}$*-espace vectoriels de* E *dans* E^*.

Corollaire 26.15.1.

$$\forall f \in E^* \ \exists! a \in E \quad f = \varphi_a \qquad (26.155)$$

$$\forall f \in E^* \ \exists! a \in E \ \forall x \in E \quad f(x) = \langle a, x \rangle . \qquad (26.156)$$

Vocabulaire : Le vecteur a est le *vecteur normal* de la forme linéaire f.

26.3.4.2 Applications aux hyperplans d'unespace vectoriel euclidien

Soit H un hyperplan de E. Il existe une forme linéaire f non nulle telle que $H = \operatorname{Ker}(f)$.

Pour toute forme linéaire g,

$$H = \operatorname{Ker}(g) \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}^* \quad g = \lambda f. \qquad (26.157)$$

Soit a le vecteur normal de f. a est non nul parce que f est non nulle. Soit un vecteur $x \in E$, alors

$$f(x) = \langle a, x \rangle , \qquad (26.158)$$

donc pour tout $x \in E$, $(\lambda f)(x) = \langle \lambda a, x \rangle$. Le vecteur normal de λf est λa.

Définition 26.10. Soit H un un hyperplan de E et une forme linéaire f non nulle telle que $H = \operatorname{Ker}(f)$. Soit a le vecteur normal de f. a est appelé *un* vecteur normal de H. Les autres sont les λa, avec $(\lambda \neq 0)$.

Propriétés des vecteurs normaux Soit H un hyperplan de E. Il existe une forme linéaire f non nulle telle que $H = \operatorname{Ker}(f)$. Soit un vecteur $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in H &\iff f(x) = 0 && (26.159)\\ &\iff \langle x, a\rangle = 0 && (26.160)\\ &\iff a \in H^{\perp}. && (26.161)\end{aligned}$$

De plus $\dim H^{\perp} = 1$ et a est non nul, donc c'est une base de $H^{\perp}$. Ainsi $\left(\frac{a}{\|a\|}\right)$ est une base orthonormée de $H^{\perp}$.

Conséquences Soit un vecteur $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned} p_{H^{\perp}}(x) &= \left\langle x, \frac{a}{\|a\|}\right\rangle \frac{a}{\|a\|} = \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a && (26.162)\\ p_H(x) &= x - \frac{\langle x, a\rangle}{\langle a, a\rangle}a. && (26.163)\end{aligned}$$

La distance de x à l'hyperplan H vaut

$$d(x, H) = \|p_{H^{\perp}}(x)\| = \frac{|\langle x, a\rangle|}{\|a\|}. \tag{26.164}$$

26.3.5 Orientation d'un hyperplan

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle n, supposée orienté. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels orthogonaux et supplémentaires de E :

$$E = F \oplus G \quad F \perp G. \tag{26.165}$$

Soient $\mathcal{E}_F = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F, $\mathcal{E}_G = (e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base de G et $\mathcal{E} = \mathcal{E}_G \cup \mathcal{E}_F$ une base de E. On suppose que G est orienté par $\mathcal{E}_G$, et que $\mathcal{E}_G$ est une base directe de G. On veut orienter F. Deux possibilités se présentent :

— Si $\mathcal{E}$ est une base directe de E, on décide d'orienter F par $\mathcal{E}_F$ ($\mathcal{E}_F$ est une base directe de F) ;

— Si $\mathcal{E}$ est une base indirecte de E, on décide que $\mathcal{E}_F$ est une base indirecte de F. On dit que l'on a induit une orientation de F par l'orientation de G.

En particulier si $F = H$, et un hyperplan $G = \operatorname{Vect}(a)$ avce a un vecteur normal de H. Le choix d'un vecteur normal donne une orientation pour G qui induit une orientation de l'hyperplan.

26.4 Produit mixte – produit vectoriel

Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien orienté de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

26.4.1 Produit mixte

26.4.1.1 Définition

Lemme 26.1. *Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormales de E, alors* $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \in \{-1; 1\}$. *De plus*
— *si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation alors* $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$ *;*
— *sinon* $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = -1$.

Démonstration. Notons $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$, $\mathcal{B}' = (b'_1, \dots, b'_n)$, $A = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Alors pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, on a

$$b'_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i. \tag{26.166}$$

Comme ce sont des bases orthonormées, on a pour tout $(j,k) \in [\![1\,;n]\!]^2$

$$\langle b_j, b_k \rangle = \delta_{jk} \tag{26.167}$$
$$\langle b'_j, b'_k \rangle = \delta_{jk}. \tag{26.168}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\delta_{jk} &= \langle b'_j, b'_k \rangle && \text{BON} && (26.169)\\
&= \left\langle \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i, \sum_{l=1}^{n} a_{lk} b_l \right\rangle && \text{eq.(??)} && (26.170)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ij} a_{kl} \langle b_i, b_l \rangle && \text{bilinéarité} && (26.171)\\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{il} && \text{BON} && (26.172)\\
&= \sum_{i=1}^{n} (A^\top)_{ji} A_{ik} && && (26.173)\\
&= (A^\top A)_{jk}. && && (26.174)
\end{aligned}$$

Alors $A^\top A = I_n$. Lorsqu'on passe au déterminant $\mathrm{Det}(A) \in \{-1; 1\}$. De plus $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation si et seulement si $\mathrm{Det}(A) > 0$ c'est-à-dire $\mathrm{Det}(A) = 1$. □

Lemme 26.2. *Soit $\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors le réel* $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})$ *est indépendant du choix de la base $\mathcal{B}$ dans l'ensemble des bases orthonormées directes de E.*

Démonstration. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées directes de E. Alors

$$\mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{X}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}). \tag{26.175}$$

Or $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$ puisqu'elles sont de même orientations. Alors $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{X}) = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})$. □

Définition 26.11. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle produit mixte de $\mathcal{X}$, et on note $\mathrm{Det}(x_1, \dots, x_n)$ le réel $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})$, $\mathcal{B}$ étant une base orthonormée directe quelconque de E.

Proposition 26.16. L'application produit mixte

$$\operatorname{Det}\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \operatorname{Det}(x) \end{array} \right. \tag{26.176}$$

est une forme n-linéaire alternée et antisymétrique.

Démonstration. Ce sont des propriétés de l'application $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ étant une base orthonormée directe de E. □

Proposition 26.17. Soit $\mathcal{X}$ une famille de n vecteurs de E, alors

1. $\operatorname{Det}(\mathcal{X}) = 0$ si et seulement si $\mathcal{X}$ est liée ;
2. $\operatorname{Det}(\mathcal{X}) > 0$ si et seulement si $\mathcal{X}$ est une base directe ;
3. $\operatorname{Det}(\mathcal{X}) < 0$ si et seulement si $\mathcal{X}$ est une base indirecte.

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée directe de E. Alors $\operatorname{Det}(\mathcal{X}) = \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X})$. Donc $\mathcal{X}$ est liée si et seulement si $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = 0$. Si $\mathcal{X}$ est libre alors $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \neq 0$. $\operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) > 0$ signifie que $\mathcal{X}$ et $\mathcal{B}$ ont la même orientation et comme $\mathcal{B}$ est directe alors $\mathcal{X}$ est directe. Idem pour indirecte. □

Proposition 26.18. Si on change l'orientation de E, le produit mixte est changé en son opposé.

Démonstration. Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases orthonormées d'orientation contraires. On note Det_1 le déterminant dans $\mathcal{B}_1$ et Det_2 le déterminant dans $\mathcal{B}_2$. Pour toute famille $\mathcal{X}$ de n vecteurs de E, on a

$$\operatorname{Det}_1(\mathcal{X}) = \operatorname{Det}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{X}) \tag{26.177}$$
$$\operatorname{Det}_2(\mathcal{X}) = \operatorname{Det}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{X}). \tag{26.178}$$

Donc

$$\operatorname{Det}_1(\mathcal{X}) = \operatorname{Det}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{X}) = \operatorname{Det}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)\operatorname{Det}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{X}) = -\operatorname{Det}_2(\mathcal{X}). \tag{26.179}$$

□

26.4.1.2 Interprétation géométrique

Cas où $n = 2$ Soit (x, y) une famille libre de E (c.-à-d. une base car $\dim E = n = 2$). $\mathcal{D} = \operatorname{Vect}(x)$ et $\mathcal{D}^\perp$ sont deux droites vectorielles car $x \neq 0$ et $\dim(E) = 2$. Alors $E = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$.

Il existe un unique couple $(y_{\mathcal{D}}, y_{\mathcal{D}^\perp}) \in \mathcal{D} \times \mathcal{D}^\perp$ tel que $y = y_{\mathcal{D}} + y_{\mathcal{D}^\perp}$. Le vecteur x est non nul, alors on peut poser $i = \frac{x}{\|x\|}$. On compléte i en une base orthonormale directe (i, j) de E.

$$\begin{aligned} \operatorname{Det}(x, y) &= \operatorname{Det}(x, y_{\mathcal{D}} + y_{\mathcal{D}^\perp}) && && (26.180)\\ &= \operatorname{Det}(x, y_{\mathcal{D}}) + \operatorname{Det}(x, y_{\mathcal{D}^\perp}) && \text{linéarité à droite} && (26.181)\\ &= \operatorname{Det}(x, y_{\mathcal{D}^\perp}). && (y_{\mathcal{D}}, x) \text{ est liée} && (26.182) \end{aligned}$$

On a $x = \|x\|\, i$ et il existe $\epsilon \in \{-1;1\}$ tel que $y_{\mathcal{D}^\perp} = \epsilon \, \|y_{\mathcal{D}^\perp}\|\, j$. Alors

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det}(x,y) &= \operatorname{Det}(\|x\|\, i, \epsilon\, \|y_{\mathcal{D}^\perp}\|\, j) && (26.183)\\
&= \|x\|\, \epsilon\, \|y_{\mathcal{D}^\perp}\| \operatorname{Det}(i,j) \qquad \text{bilinéarité} && (26.184)\\
&= \|x\|\, \epsilon\, \|y_{\mathcal{D}^\perp}\|\,. && (26.185)
\end{aligned}$$

Donc $|\operatorname{Det}(x,y)| = \|x\|\, \|y_{\mathcal{D}^\perp}\|$ et c'est l'aire du parallélogramme formé par x et y. D'où la proposition suivante.

Proposition 26.19. Pour tout couple $(x,y) \in E^2$, si (x,y) est une famille libre alors $|\operatorname{Det}(x,y)|$ est égal à l'aire du parallèlogramme bâti sur (x,y).

Cas où $n = 3$ E est un espace vectorel de dimension 3. Soit (x,y,z) une famille libre de E (donc une base). $\mathcal{P} = \operatorname{Vect}(x,y)$ est un plan vectoriel et $\mathcal{P}^\perp$ est une droite vectoriel (car $\dim E = 3$). Alors $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp$.

Alors il existe un unique couple $(z_{\mathcal{P}}, z_{\mathcal{P}^\perp}) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}^\perp$ tel que $z = z_{\mathcal{P}} + z_{\mathcal{P}^\perp}$. Ainsi

$$\operatorname{Det}(x,y,z) = \operatorname{Det}(x,y,z_{\mathcal{P}}) + \operatorname{Det}(x,y,z_{\mathcal{P}^\perp})) = \operatorname{Det}(x,y,z_{\mathcal{P}^\perp})), \tag{26.186}$$

car $z_{\mathcal{P}} \in \mathcal{P}$.

La famille (x,y,z) est libre donc $z \notin \mathcal{P}$ et donc $z_{\mathcal{P}^\perp} \neq 0$. On pose $k = \frac{z_{\mathcal{P}^\perp}}{\|z_{\mathcal{P}^\perp}\|}$. On compléte k en une base orthonormale (i,j,k) de E. (i,j) est une base orthonormale de $\mathcal{P}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
\operatorname{Det}(x,y,z) &= \operatorname{Det}(x,y,k\, \|z_{\mathcal{P}^\perp}\|) && (26.187)\\
&= \|z_{\mathcal{P}^\perp}\| \operatorname{Det}(x,y,k) \qquad \text{trilinéarité} && (26.188)\\
&= \|z_{\mathcal{P}^\perp}\| \operatorname{Det}_{(i,j,k)}(x,y,k) && (26.189)\\
&= \|z_{\mathcal{P}^\perp}\| \operatorname{Det}_{(i,j)}(x,y) \qquad \|k\| = 1 && (26.190)\\
&= \|z_{\mathcal{P}^\perp}\| \operatorname{Det}(x,y). && (26.191)
\end{aligned}$$

Alors

$$|\operatorname{Det}(x,y,z)| = \|z_{\mathcal{P}^\perp}\|\, |\operatorname{Det}(x,y)|\,. \tag{26.192}$$

D'où la proposition suivante

Proposition 26.20. Pour tout couple $(x,y,z) \in E^3$, si (x,y,z) est une famille libre alors $|\operatorname{Det}(x,y,z)|$ est égal au volume du parallélépipéde bâti sur (x,y,z).

26.4.2 Produit vectoriel, en dimension 3

Soit (E,φ) un espace euclidien orienté de dimension 3.

26.4.2.1 Définition

Définition 26.12. Soit $(x,y) \in E^2$. On appelle produit vectoriel de x et y, dans cet ordre, et on note $x \wedge y$ le vecteur normal de la forme linéaire

$$f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \longmapsto & \operatorname{Det}(x,y,z) \end{array} \right. . \tag{26.193}$$

Et c'est légitime, car :

— le produit vectoriel est défini, car E est orienté ;
— f est une forme linéaire, car Det est trilinéaire ;
— f admet un unique vecteur normal.

Ainsi $x \wedge y$ est l'unique vecteur $p \in E$ tel que pour tout $z \in E$ on ait $f(z) = \text{Det}(x, y, z) = \langle p, z \rangle$.

Proposition 26.21. Pour triplet de vecteurs $(x, y, z) \in E^3$ on a

$$\text{Det}(x, y, z) = \langle x \wedge y, z \rangle\,; \tag{26.194}$$

$$\langle y \wedge x, z \rangle = -\langle x \wedge y, z \rangle\,; \tag{26.195}$$

$$\langle y \wedge z, x \rangle = \langle z \wedge x, y \rangle = \langle x \wedge y, z \rangle\,. \tag{26.196}$$

Démonstration. La première égalit" est due à la définition du produit vectoriel. On montre la deuxième :

$$\begin{aligned}
\langle y \wedge x, z \rangle &= \text{Det}(y, x, z) && (26.197)\\
&= -\text{Det}(x, y, z) \qquad \text{antisymétrie} && (26.198)\\
&= -\langle x \wedge y, z \rangle\,. && (26.199)
\end{aligned}$$

La deuxième :

$$\begin{aligned}
\langle y \wedge z, x \rangle &= \text{Det}(y, z, x) && (26.200)\\
&= \text{Det}(x, y, z) && (26.201)\\
&= \langle x \wedge y, z \rangle\,. && (26.202)
\end{aligned}$$

Idem pour le reste. □

Proposition 26.22 (Effet d'un changement d'orientation de E)**.** Soit $(x, y) \in E^2$. Si on change l'orientation de E, $x \wedge y$ est changé en son opposé.

Démonstration. Si on change l'orientation de E, l'application produit mixte Det est changée en son opposée. Donc la forme linéaire f est changée en son opposée. Par conséquent le vecteur normal de f est aussi changé en son opposé. □

26.4.2.2 Propriétés du vecteur $x \wedge y$

Théorème 26.16. *Soit* $(x, y) \in E^2$*. Alors*

1. $x \wedge y \perp x$ *et* $x \wedge y \perp y$ *;*
2. $x \wedge y = 0$ *si et seulement si* (x, y) *est liée ;*
3. *Si* (x, y) *est libre, alors* $(x, y, x \wedge y)$ *est une base directe de* E*.*

Démonstration.

1. En effet, on a $\langle x \wedge y, x \rangle = \text{Det}(x, y, x) = 0$ donc $x \wedge y \perp x$. Idem pour y.
2. $\Longleftarrow$. Si (x, y) est liée, alors $(x, y, x \wedge y)$ est liée aussi et donc

$$\text{Det}(x, y, x \wedge y) = 0 \tag{26.203}$$

$$\langle x \wedge y, x \wedge y \rangle = 0 \tag{26.204}$$

$$\|x \wedge y\|^2 = 0, \tag{26.205}$$

et donc $x \wedge y = 0$.

$\Longrightarrow$. Par contraposée. Supposons que $'x, y)$ est libre. Alors il existe $z \in E$ tel que (x, y, z) est une base de E. Ainsi $\text{Det}(x, y, z) = \langle x \wedge y, z \rangle \neq 0$. Par conséquent $x \wedge y \neq 0$.

3. Si (x, y) est libre, $\mathrm{Det}(x, y, x \wedge y) = \|x \wedge y\|^2 > 0$ (car $x \wedge y \neq 0$). Donc $(x, y, x \wedge y)$ est une base directe de E.

$\square$

26.4.2.3 Propriétés du produit vectoriel

Théorème 26.17. *L'application* $\wedge\colon \begin{cases} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x \wedge y \end{cases}$ *est bilinéaire et alterné (donc antisymétrique).*

Démonstration. Soient $(x, x', y) \in E^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $p_1 = (\lambda x + x') \wedge y$ et $p_2 = \lambda x \wedge y + x' \wedge y$. Pour tout vecteur $z \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\langle p_1, z\rangle &= \langle (\lambda x + x') \wedge y, z\rangle && (26.206)\\
&= \mathrm{Det}(\lambda x + x', y, z) \quad \text{définition} && (26.207)\\
&= \lambda \,\mathrm{Det}(x, y, z) + \mathrm{Det}(x', y, z) \quad \text{trilinéarité} && (26.208)\\
&= \lambda \langle x \wedge y, z\rangle + \langle x' \wedge y, z\rangle && (26.209)\\
&= \langle \lambda x \wedge y + x' \wedge y, z\rangle && (26.210)\\
&= \langle p_2, z\rangle . && (26.211)
\end{aligned}$$

Alors $\langle p_1 - p_2, z\rangle = 0$ et comme c'est vrai pour tout z alors $p_1 = p_2$. C'est la linéarité à gauche.

Soient $(x, y) \in E^2$. Pour tout $z \in E$, on a

$$\begin{aligned}
\langle y \wedge x, z\rangle &= \mathrm{Det}(y, x, z) && (26.212)\\
&= -\mathrm{Det}(x, y, z) \quad \text{antisymétrie} && (26.213)\\
&= -\langle x \wedge y, z\rangle && (26.214)\\
&= \langle -x \wedge y, z\rangle . && (26.215)
\end{aligned}$$

Alors $\langle y \wedge x + x \wedge y, z\rangle = 0$ et comme c'est vrai pour tout $z \in E$ on a bien $x \wedge y = -y \wedge x$. C'est l'antisymétrie.

La linéarité à gauche et l'antisymétrie nous donne la linéarité à droite. $\square$

26.4.2.4 Coordonnées de $x \wedge y$ dans une base orthonormale directe

Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ une base orthonormée directe de E. Soient x et y dans E de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3) et (y_1, y_2, y_3) dans la base $\mathcal{B}$. Alors

$$x \wedge y = \sum_{i=1}^{3} \langle x \wedge y, b_i\rangle\, b_i. \tag{26.216}$$

Car $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. Alors on a

$$\begin{aligned}
\langle x \wedge y, b_1\rangle &= \mathrm{Det}(x, y, b_1) && (26.217)\\
&= \mathrm{Det}_{b_1,b_2,b_3}(x, y, b_1) && (26.218)\\
&= \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}. && (26.219)
\end{aligned}$$

De la même manière on trouve

$$\langle x \wedge y, b_2\rangle = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \qquad \langle x \wedge y, b_3\rangle = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \tag{26.220}$$

D'où la proposition suivante

Proposition 26.23. Avec les notations précédentes, les coordonnées de $x \wedge y$ dans la base orthonormée directe $\mathcal{B}$ sont $\left(\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$.

26.4.2.5 Propriétés relatives aux bases orthonormées directes

Proposition 26.24. Soit (i, j, k) une base orthonormée directe. Alors $i \wedge j = k$, $j \wedge k = i$, et $k \wedge i = j$.

Démonstration. La base (i, j, k) est orthonormée donc

$$\begin{aligned} i \wedge j &= \langle i \wedge j, i\rangle\, i + \langle i \wedge j, j\rangle\, j + \langle i \wedge j, k\rangle\, k && (26.221)\\ &= \langle i \wedge j, k\rangle\, k && (26.222)\\ &= \operatorname{Det}(i, j, k)k && (26.223)\\ &= \operatorname{Det}_{(i,j,k)}(i, j, k)k && (26.224)\\ &= k. && (26.225) \end{aligned}$$

Idem pour les autres. □

Proposition 26.25. Soient x et y deux vecteurs de E unitaires et orthogonaux. Alors $(x, y, x \wedge y)$ est ue base orthonormée directe.

Démonstration. La famille (x, y) est orthogonale et x et y sont non nuls. Donc Elle est libre. On sait déjà que $(x, y, x \wedge y)$ est une base directe de E. Par hypothèse $x \perp y$ et d'après les propriétés on a $x \perp x \wedge y$ et $y \perp x \wedge y$. Alors $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthogonale. Ainsi $\left(x, y, \frac{x \wedge y}{\|x \wedge y\|}\right)$ est une base orthonormée directe. □

Proposition 26.26. Soit $(x, y) \in E^2$. Si $x \perp y$ alors $\|x \wedge y\| = \|x\| \cdot \|y\|$.

Démonstration. Deux cas se présentent. Si x est nul ou si y est nul alors $x \wedge y$ est nul. L'égalité est vraie.

Sinon, c'est-à-dire si x est non nul et si y est non nul, alors $\frac{x}{\|x\|}$ et $\frac{y}{\|y\|}$ sont unitaires et orthogonaux. En appliquant la proposition précédente $\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}, \frac{x}{\|x\|} \wedge \frac{y}{\|y\|}\right)$ est une base orthonormée directe de E. En particulier $\frac{x}{\|x\|} \wedge \frac{y}{\|y\|}$ est unitaire et donc

$$1 = \frac{\|x \wedge y\|}{\|x\|\,\|y\|}. \tag{26.226}$$

Alors $\|x \wedge y\| = \|x\| \cdot \|y\|$. □

26.4.2.6 Double produit vectoriel

Théorème 26.18. *Pour tout triplet* $(x, y, z) \in E^3$ *on a*

$$(x \wedge y) \wedge z = \langle x, z\rangle\, y - \langle y, z\rangle\, x. \tag{26.227}$$

Démonstration. Voir le chapitre **??**. □

Remarque : Pour tout triplet $(x, y, z) \in E^3$ on a

$$x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z\rangle\, y - \langle x, y\rangle\, z. \tag{26.228}$$

Chapitre 27

Automorphismes orthogonaux

Sommaire

Tableaux

27.1 Automorphismes orthogonaux, groupes $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{SO}(E)$

27.1.1 Conservation du produit scalaire et de la norme euclidienne

Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 27.1. Soit $u \in E^E$.

1. On dit que u conserve le produit scalaire si et seulement si pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in E^2$ on a
$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle . \tag{27.1}$$
2. On dit que u conserve la norme euclidienne si et seulement si pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in E^2$ on a
$$\|u(x)\| = \|x\| . \tag{27.2}$$

Théorème 27.1. *Soit $u \in E^E$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

1. *$u \in \mathcal{L}(E)$ et u conserve la norme euclidienne ;*
2. *$u \in \mathcal{L}(E)$ et u conserve le produit scalaire ;*
3. *u conserve le produit scalaire.*

Démonstration. 1 $\implies$ 2. L'application est déjà linéaire. Montrons qu'elle conserve le produit scalaire. Soit $(x, y) \in E^2$, alors

$$\begin{aligned}
\langle u(x), u(y) \rangle &= \frac{1}{2}\left(\|u(x) + u(y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) && \text{Polarisation} \quad (27.3)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|u(x + y)\|^2 - \|u(x)\|^2 - \|u(y)\|^2\right) && u \in \mathcal{L}(E) \quad (27.4)\\
&= \frac{1}{2}\left(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) && u \text{ conserve la norme} \quad (27.5)\\
&= \langle x, y \rangle . && (27.6)
\end{aligned}$$

Ainsi u conserve le produit scalaire.

2 $\implies$ 3. Trivial

3 $\implies$ 1. Soit $x \in E$. On a

$$\begin{aligned}
\|u(x)\| &= \sqrt{\langle u(x), u(x) \rangle} && (27.7)\\
&= \sqrt{\langle x, x \rangle} && u \text{ conserve le produit scalaire} \quad (27.8)\\
&= \|x\| . && (27.9)
\end{aligned}$$

Alors u conserve la norme.

Montrons qu'elle est linéaire. Soient $(x,x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer que

$$u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x'). \tag{27.10}$$

Posons $p = \|u(\lambda x + x') - \lambda u(x) - u(x')\|$. Il faut montrer que p est nul.

En effet,

$$\begin{aligned} p^2 &= \langle u(\lambda x + x') - \lambda u(x) - u(x'), u(\lambda x + x') - \lambda u(x) - u(x')\rangle && (27.11)\\ &= \langle u(\lambda x + x'), u(\lambda x + x')\rangle - \lambda \langle u(\lambda x + x'), u(x)\rangle - \langle u(\lambda x + x'), u(x')\rangle \\ &- \lambda \langle u(x), u(\lambda x + x')\rangle + \lambda^2 \langle u(x), u(x)\rangle + \lambda \langle u(x), u(x')\rangle \\ &- \langle u(x'), u(\lambda x + x')\rangle + \lambda \langle u(x), u(x)\rangle + \langle u(x'), u(x')\rangle . && (27.12) \end{aligned}$$

L'application u conserve le produit scalaire, alors

$$\begin{aligned} p^2 &= \langle \lambda x + x', \lambda x + x'\rangle - \lambda \langle \lambda x + x', x\rangle - \langle \lambda x + x', x'\rangle \\ &- \lambda \langle x, \lambda x + x'\rangle + \lambda^2 \langle x, x\rangle + \lambda \langle x, x'\rangle \\ &- \langle x', \lambda x + x'\rangle + \lambda \langle x, x\rangle + \langle x', x'\rangle && (27.13)\\ &= \langle \lambda x + x', \lambda x + x' - \lambda x - x'\rangle + \lambda \langle x, -(\lambda x + x') + \lambda x + x'\rangle \\ &+ \langle x', -(\lambda x + x') + \lambda x + x'\rangle && (27.14)\\ &= 0. && (27.15) \end{aligned}$$

Donc $p = 0$, alors $u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x')$. L'application u est linéaire. $\square$

27.1.2 Automorphismes orthogonaux d'un espace vectoriel euclidien

Définition 27.2. Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien de dimension n. On appelle automorphisme orthogonal de E toute automorphisme linéaire de E qui conserve le produit scalaire.

On note $\mathcal{O}(E)$ l'ensemble des authomorphismes orthogonaux de E.

$$\forall u \in E^E \quad u \in \mathcal{O}(E) \iff u \in \mathcal{GL}(E) \text{ et } u \text{ conserve le produit scalaire.} \tag{O_0}$$

Théorème 27.2. *Soit $u \in E^E$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

- O_0 *u est un automorphisme orthogonal ;*
- O_1 *u est linéaire et conserve le produit scalaire ;*
- O_2 *u est linéaire et conserve la norme euclidienne ;*
- O_3 *u conserve le produit scalaire ;*
- O_4 *u est un automorphisme de E et conserve la norme.*

Démonstration. D'après le premier paragraphe, on a déjà $O_1 \iff O_2 \iff O_3$ et $O_0 \iff O_4$. De plus $O_0 \implies O_1$ est évident.

Il nous reste à montrer que $O_1 \implies O_0$: Déjà u est linéaire et conserve le produit scalaire, donc la norme. Comme E est de dimension finie (car euclidien), il suffit de montrer que u est injective pour démontrer qu'elle est bijective.

Soit $x \in E$, alors

$$x \in \operatorname{Ker}(u) \iff u(x) = 0 \tag{27.16}$$
$$\iff \|u(x)\| = 0 \tag{27.17}$$
$$\iff \|x\| = 0 \tag{27.18}$$
$$\iff x = 0. \tag{27.19}$$

Donc le noyau est nul, l'application u est donc injective. Comme E est de dimension finie, u est bijective.

Finalement $O_1 \iff O_0$. Toutes les équivalences sont démontrées. □

Théorème 27.3. *Soit $u \in E^E$. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :*

- O_0 *u est un automorphisme orthogonal ;*
- O_5 *u est linéaire et pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E ;*
- O_6 *u est linéaire et il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ de E telle que $u(\mathcal{B}_0)$ est une base orthonormée de E.*

Démonstration. On peut démontrer ces équivalences de manières circulaire.

$O_0 \implies O_5$. Soit $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ une base orthonormée de E. D'une part $\operatorname{Card} u(\mathcal{B}) = \operatorname{Card} \mathcal{B} = \dim E$. D'autre part pour tout $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on a

$$\langle u(b_i), u(b_j)\rangle = \langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}. \tag{27.20}$$

Donc $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E.

$O_5 \implies O_6$. On a montré qu chapitre précédent qu'il existait des base orthonormées de E. Il suffit d'en choisir une : $\mathcal{B}_0$ et de lui appliquer O_5.

$O_6 \implies O_0$. On va plutôt montrer O_2 [1]. Déjà on sait que u est linéaire. Soit $\mathcal{B}_0 = (b_1, \dots, b_n)$ une base orthonormée de E. Soit $x \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans $\mathcal{B}_0$. Alors

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}, \tag{27.21}$$

car $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormée. Ensuite

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i u(b_i), \tag{27.22}$$

car u est linéaire. Enfin

$$\|u(x)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \|x\|\,, \tag{27.23}$$

car $u(\mathcal{B}_0)$ est une base orthonormée. Finalement u est linéaire et conserve la norme. □

1. car $O_2 \iff O_0$

Proposition 27.1. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u [2]. Alors l'orthogonal de F, $F^{\perp}$, est aussi stable par u.

Démonstration. On sait que $u(F) \subset F$, et de plus $\dim(u(F)) = \dim F$ (car u est un isomorphisme) donc $u(F) = F$.

Soit $x \in F^{\perp}$, montrons que $u(x) \in F^{\perp}$. Soit $y \in F$, il existe $z \in F$ tel que $y = u(z)$ (car $u(F) = F$). Alors

$$\begin{aligned}
\langle u(x), y\rangle &= \langle u(x), u(z)\rangle && (27.24)\\
&= \langle x, z\rangle && u \in \mathcal{O}(E) \quad (27.25)\\
&= 0. && x \in F^{\perp}\ z \in F \quad (27.26)
\end{aligned}$$

Donc $u(x) \perp y$ et $y \in F$, alors $u(x) \in F^{\perp}$. □

27.1.3 Exemple d'automorphisme orthogonal : les symétries orthogonlaes

27.1.3.1 Symétries orthogonales

Définition 27.3. Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien. On appelle symétrie orthogonale de E toute symétrie de E dont le projecteur associé est un projecteur orthogonal.

Soit $s \in E^E$. L'application s est une symétrie orthogonale si et seulement si $s \in \mathcal{L}(E)$, $s \circ s = \mathrm{Id}$ et si on note $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id})$ le projecteur associé on a $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$. Ce qui est équivalent à dire que $s \in \mathcal{L}(E)$, $s \circ s = \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Inv}(s) \perp \mathrm{Opp}(s)$ (S_0).

Vocabulaire : Si F est un sous-espace vectoriel de E, la symétrie orthogonale dont le projecteur associé est p_F [3] sera notée s_F et appelée symétrie orthogonlae par rapport à F.

Théorème 27.4. *Soit $s \in E^E$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- S_0 *s est une symétrie orthogonale de E ;*
- S_1 *$s \in \mathcal{L}(E)$, $s \circ s = \mathrm{Id}$ et quelque soit $(x, y) \in E^2$, on a $\langle s(x), y\rangle = \langle x, s(y)\rangle$;*
- S_2 *$s \in \mathcal{L}(E)$, $s \circ s = \mathrm{Id}$ et quelque soit $x \in E^2$, on a $\|s(x)\| = \|x\|$;*
- S_3 *$s \in \mathcal{L}(E)$, $s \circ s = \mathrm{Id}$ et quelque soit $(x, y) \in E^2$, on a $\langle s(x), s(y)\rangle = \langle x, y\rangle$;*
- S_4 *$s \in \mathcal{O}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{Id}$.*

Démonstration. $S_0 \implies S_1$. Par définition, $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{Id}$. Posons $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id})$. Pour tout couple $(x, y) \in E^2$ on a

$$\begin{aligned}
\langle s(x), y\rangle = \langle 2p(x) - x, y\rangle &= 2\langle p(x), y\rangle - \langle x, y\rangle && \text{bilinéarité} \quad (27.27)\\
&= 2\langle x, p(y)\rangle - \langle x, y\rangle && p \text{ est un projecteur orthogonal} \quad (27.28)\\
&= \langle x, 2p(y) - y\rangle && \text{bilinéarité} \quad (27.29)\\
&= \langle x, s(y)\rangle. && (27.30)
\end{aligned}$$

2. c'est-à-dire que $u(F) \subset F$
3. un projecteur orthogonal sur F est un projecteur sur F parallélement à $F^{\perp}$

$S_1 \implies S_2$. On a déjà $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{Id}$. Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned}
\|s(x)\|^2 &= \langle s(x), s(x)\rangle && (27.31)\\
&= \langle x, s \circ s(x)\rangle && \text{d'après } S_1 \quad (27.32)\\
&= \langle x, x\rangle && s \circ s = \mathrm{Id} \quad (27.33)\\
&\|x\|^2 . && (27.34)
\end{aligned}$$

Comme les normes sont positives, on a bien $\|s(x)\| = \|x\|$.

$S_2 \implies S_3$. On a déjà $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{Id}$. Comme s conserve la norme, alors elle conserve le produit scalaire.

$S_3 \implies S_0$. On a déjà $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s \circ s = \mathrm{Id}$. Montrons que $\mathrm{Inv}(s) \perp \mathrm{Opp}(s)$. Soit $(x, y) \in \mathrm{Opp}(s) \times \mathrm{Inv}(s)$. Alors

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \langle s(x), -s(y)\rangle && (x, y) \in \mathrm{Opp}(s) \times \mathrm{Inv}(s) \quad (27.35)\\
&= -\langle s(x), -s(y)\rangle && \text{bilinéarité} \quad (27.36)\\
&= -\langle x, y\rangle . && S_3 \quad (27.37)
\end{aligned}$$

Donc $\langle x, y\rangle = 0$. Finalement $\mathrm{Inv}(s) \perp \mathrm{Opp}(s)$, s est une symétrie orthogonale.

$S_3 \iff S_4$. On a déja $s \circ s = \mathrm{Id}$ et par caractérisation $s \in \mathcal{O}(E)$. □

27.1.3.2 Réflexions

Définition 27.4. On appelle réflexion de l'espace vectoriel euclidien (E, φ) toute symétrie orthogonale de E par rapport à un hyperplan de E.

Proposition 27.2 (Expression de la réflexion)**.** Soient H un hyperplan de E, s_H la réflexion par rapport à $H^\perp$, a un vecteur normal à H, $k = \frac{a}{\|a\|}$. Pour tout $x \in E$, on a

$$s_H(x) = x - 2\frac{\langle x, a\rangle}{\|a\|^2} a = x - 2\langle x, k\rangle k. \tag{27.38}$$

Démonstration. On a $H^\perp = \mathrm{Vect}(k)$, et on a vu que $p_{H^\perp}(x) = \langle x, k\rangle k$, alors

$$\begin{aligned}
s_H(x) &= 2p_H(x) - x && (27.39)\\
&= 2(x - p_{H^\perp}(x)) - x && (27.40)\\
&= x - 2p_{H^\perp}(x) && (27.41)\\
&= x - 2\langle x, k\rangle k. && (27.42)
\end{aligned}$$

□

Théorème 27.5. *Soient a et b différents dans E tels que $\|a\| = \|b\|$. Il existe une unique réflexion s de E qui échange a et b*[4]*. De plus s est la réflexion par rapport à $H = \mathrm{Vect}(b - a)^\perp$.*

Analyse & unicité. On suppose l'existence d'un hyperplan H de E tel que la réflexion s par rapport à H vérifi $s(a) = b$ et $s(b) = a$. Soit c un vecteur normal unitaire à H. Alors pour tout $x \in E$, $s(x) = x - 2\langle x, c\rangle c$. Alors

$$s(a) = b \iff b = a - 2\langle a, c\rangle c \iff b - a = -2\langle a, c\rangle c. \tag{27.43}$$

Comme :

4. c'est-à-dire $s(b) = a$ et $s(a) = b$

— $b-a$ est non nul ;
— $b-a$ est colinéaire à c ;
— $H^\perp = \mathrm{Vect}(c)$;

on a $H^\perp = \mathrm{Vect}(b-a)$. Comme E est de dimension finie, en passant à l'orthogonal il vient que $H = (H^\perp)^\perp = (\mathrm{Vect}(b-a))^\perp$. □

Synthèse & Existence. Soit $H = (\mathrm{Vect}(b-a))^\perp$. Ce qui est légitime car $b \neq a$, et H est un hyperplan.

Soit s la réflexion par rapport à H, et $b-a$ est un vecteur normal à H, on a

$$\forall x \in E \quad s(x) = x - 2\frac{\langle x, b-a\rangle}{\|b-a\|^2}(b-a). \tag{27.44}$$

Calculons $s(a)$: $s(a) = a - 2\frac{\langle a,b-a\rangle}{\|b-a\|^2}(b-a)$. Alors

$$\begin{aligned}
s(a) - b &= (a-b)\left(1 + 2\frac{\langle a, b-a\rangle}{\|b-a\|^2}\right) && (27.45)\\
&= \frac{a-b}{\|b-a\|^2}(\|b\|^2 + \|a\|^2 - 2\langle b,a\rangle + 2\langle a,b\rangle - 2\langle a,a\rangle) && (27.46)\\
&= \frac{a-b}{\|b-a\|^2}(2\|a\|^2 - 2\|a\|^2) && (27.47)\\
&= 0. && (27.48)
\end{aligned}$$

Donc $s(a) = b$. D'où $a = s \circ s(a) = s(b)$. L'application s convient. □

Définition 27.5. Soient a et b deux vecteurs distincts de E tels que $\|a\| = \|b\|$. $H = \mathrm{Vect}(b-a)^\perp$ est appelé hyperplan médiateur de a et b

$$H = \{x \in E \mid d(x,a) = d(x,b)\}. \tag{27.49}$$

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned}
d(x,a) = d(x,b) &\iff \|x-a\| = \|x-b\| && (27.50)\\
&\iff \|x-a\|^2 = \|x-b\|^2 && (27.51)\\
&\iff \|x\| + \|a\|^2 - 2\langle x,a\rangle = \|x\| + \|b\|^2 - 2\langle x,b\rangle && (27.52)\\
&\iff \langle x, b-a\rangle = 0 && (27.53)\\
&\iff x \in H = \mathrm{Vect}(b-a)^\perp. && (27.54)
\end{aligned}$$

□

27.1.4 Groupes $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{SO}(E)$

Soit (E,φ) un espace vectoriel euclidien. On rappelle que $\mathcal{O}(E)$ est l'ensemble des automorphismes de E qui conservent le produit scalaire.

Théorème 27.6. $(\mathcal{O}(E), \circ)$ *est un sous-groupe du groupe linéaire* $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.

Démonstration. Par définition $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$. $\mathcal{O}(E)$ est non vide puisque $\mathrm{Id} \in \mathcal{O}(E)$. Soient u et v dans $\mathcal{O}(E)$, alors on peut définir $u \circ v$ et $u \circ v \in \mathcal{GL}(E)$. Montrons que $u \circ v$ conserve le produit scalaire : Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\langle u \circ v(x), u \circ v(y) \rangle = \langle u(v(x)), u(v(y)) \rangle \tag{27.55}$$

$$= \langle v(x), v(y) \rangle \qquad u \in \mathcal{O}(E) \quad = \langle x, y \rangle \,. \quad v \in \mathcal{O}(E) \tag{27.56}$$

Donc $u \circ v \in \mathcal{O}(E)$. Soit $u \in \mathcal{O}(E)$, alors u est inversible et $u^{-1} \in \mathcal{GL}(E)$. Montrons que u^{-1} conserve le produit scalaire : Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a

$$\left\langle u^{-1}(x), u^{-1}(y) \right\rangle = \left\langle u(u^{-1}(x)), u(u^{-1}(y)) \right\rangle \qquad u \in \mathcal{O}(E) \tag{27.57}$$

$$= \langle x, y \rangle \,. \tag{27.58}$$

Donc $u^{-1} \in \mathcal{O}(E)$.

Par caractérisation, $(\mathcal{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{GL}(E), \circ)$. □

Définition 27.6. On appelle rotation de E toute application $u \in \mathcal{O}(E)$ tel que $\mathrm{Det}\, u = 1$. On note $\mathcal{SO}(E)$ leurs ensemble :

$$\mathcal{SO}(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \mathrm{Det}\, u = 1\} \,. \tag{27.59}$$

Démonstration. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(E) & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ u & \longmapsto & \mathrm{Det}\, u \end{array} \right.$. L'application f est bien définie car $\mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$, f est un morphisme de $(\mathcal{O}(E), \circ)$ sur $(\mathbb{R}^*, \times)$ car

$$\forall (u, v) \in \mathcal{O}(E)^2 \quad \mathrm{Det}(u \circ v) = \mathrm{Det}\, u \times \mathrm{Det}\, v. \tag{27.60}$$

Par définition, $\mathcal{SO}(E) = \mathrm{Ker}(f)$ donc $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{O}(E), \circ)$. □

Remarque : Soient H un hyperplan de E, s la réflexion par rapport à H. Soient $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E adaptée à $H \oplus H^\perp$:

$$\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_{n-1}, b_n). \tag{27.61}$$

Si pour $j \in [\![1\,; n-1]\!]$ on a $s(b_j) = b_j$ et $s(b_n) = -b_n$ alors $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(s) = -1$.

27.2 Matrices orthogonales, groupes $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{SO}(n)$

27.2.1 Notion de matrice orthogonal

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A = (a_{ij})_{(i,j) \in [\![1;n]\!]^2} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{L}_A$ la famille des lignes de A et $\mathcal{C}_A$ la famille des colonnes de A. Soit u l'endomorphisme canoniquement associé.

Calcul de $A^\top A$ et $AA^\top$

On note $A^\top = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n}$, $A^\top A = (c_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et $AA^\top = (d_{ij})_{1 \le i,j \le n}$. Alors pour tout $(i, j) \in [\![1\,; n]\!]^2$ on a

$$\alpha_{ij} = a_{ji}; \tag{27.62}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \langle \mathcal{C}_i, \mathcal{C}_j \rangle \,; \tag{27.63}$$

$$d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \alpha_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{jk} = \langle \mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j \rangle \,. \tag{27.64}$$

Théorème 27.7. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} = A^\top$;*
2. *$A^\top A = I_n$;*
3. *$AA^\top = I_n$;*
4. *$\mathcal{L}_A$ est une base orthonormées de $(\mathbb{R}^n, \varphi_c)$;*
5. *$\mathcal{C}_A$ est une base orthonormées de $(\mathbb{R}^n, \varphi_c)$;*
6. *$u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. De manière évidente, on voit que 1 $\iff$ 2 $\iff$ 3. Ensuite :

2 $\iff$ 5. En effet, on a

$$AA^\top = I_n \iff \forall (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2 \quad \langle \mathcal{L}_i, \mathcal{L}_j \rangle = \delta_{ij} \tag{27.65}$$

$$\iff \mathcal{L}_A \text{ BON de } \mathbb{R}^n. \tag{27.66}$$

5 $\implies$ 6. Soit $\mathcal{E}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. L'application u est canoniquement associée à A, donc $u(\mathcal{E}_c) = \mathcal{C}_A$. Les bases $\mathcal{E}_c$ et $u(\mathcal{E}_c) = \mathcal{C}_A$ sont orthonormées, donc u (par l'assertion O_6) est un automorphisme orthogonal : $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$.

6 $\implies$ 5. Soit $u \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ et $\mathcal{E}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors (par l'assertion O_5) $\mathcal{C}_A = u(\mathcal{E}_c)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$. □

Définition 27.7. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifie l'une des assertions du théorème précédent est appelée matrice orthogonale. On note $\mathcal{O}(n)$ leur ensemble.

$$\mathcal{O}(n) = \left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^\top A = I_n \right\}. \tag{27.67}$$

Proposition 27.3. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, A est orthogonale si et seulement si $A^\top$ est orthogonale.

Démonstration.

$$A \in \mathcal{O}(n) \iff A^\top A = I_n \tag{27.68}$$

$$\iff A^\top (A^\top)^\top = I_n^\top = I_n \tag{27.69}$$

$$\iff A^\top \in \mathcal{O}(n). \tag{27.70}$$

□

Proposition 27.4.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad A \in \mathcal{O}(n) \implies \mathrm{Det}(A) \in \{-1, 1\}. \tag{27.71}$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{O}(n)$, alors

$$1 = \mathrm{Det}(I_n) = \mathrm{Det}(A^\top A) = \mathrm{Det}(A)^2, \tag{27.72}$$

donc $\mathrm{Det}(A) \in \{-1, 1\}$. □

La réciproque est fausse, par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a bien $\mathrm{Det}(A) = 1$ mais on a $\langle \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2 \rangle = 1 \neq 0$ donc $A \notin \mathcal{O}(2)$.

Définition 27.8. On définit les ensembles suivants :

$$\mathcal{SO}(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \mathrm{Det}(A) = 1\}\,; \tag{27.73}$$

$$\mathcal{O}^-(n) = \{A \in \mathcal{O}(n) \mid \mathrm{Det}(A) = -1\}\,; \tag{27.74}$$

$$\mathcal{O}^-(E) = \{u \in \mathcal{O}(E) \mid \mathrm{Det}(u) = -1\}\,. \tag{27.75}$$

27.2.2 Nouvelles caractérisations des automorphismes orthogonaux

Théorème 27.8. *Soit E un espace vectoriel euclidien, et $u \in E^E$. Alors il y a équivalence entre les assertions suivantes :*
- O_0 $u \in \mathcal{O}(E)$;
- O_7 $u \in \mathcal{L}(E)$, *et* $\forall \mathcal{B}$ *base orthonormale de* E *on a* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}(n)$;
- O_8 $u \in \mathcal{L}(E)$, *et* $\exists \mathcal{B}_0$ *base orthonormale de* E *on a* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) \in \mathcal{O}(n)$.

Démonstration. $O_0 \implies O_7$. Déjà $u \in \mathcal{L}(E)$ et pour tout $(x, y) \in E^2$ on a $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ er $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$. Alors $\langle x, y\rangle = \mathcal{X}^\top Y$ et $\langle u(x), u(y)\rangle = (AX)^\top AY = X^\top A^\top AY$. Alors

$$X^\top Y = X^\top A^\top AY \tag{27.76}$$
$$X^\top (I_n - A^\top A)Y = 0. \tag{27.77}$$

Cette égalité est vrai pour tout couple $(x, y) \in E^2$ donc $A^\top A = I_n$, alors $A \in \mathcal{O}(n)$.

$O_7 \implies O_8$. Vrai car E admet au moins une base orthonormée.

$O_8 \implies O_0$. Déjà $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrons que $u(\mathcal{B}_0)$ est une base orthonormée. On a $\mathrm{Card}(u(\mathcal{B}_0)) = \mathrm{Card}(\mathcal{B}_0) = \dim E$, car la matrice est carrée. On sait que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u)$ est orthogonale. On pose que $\mathcal{B}_0 = (b_1, \ldots, b_n)$ et pour tout $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ on a

$$\begin{aligned}
\langle u(b_i), u(b_j)\rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki} b_k, \sum_{l=1}^n a_{lj} b_l \right\rangle && (27.78)\\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{ki} a_{lj} \langle b_k, b_l\rangle \qquad \text{bilinéarité} && (27.79)\\
&= \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} \qquad \mathcal{B}_0 \text{ est une BON} && (27.80)\\
&= (A^\top A)_{ij} && (27.81)\\
&= \delta_{ij}. \qquad A \in \mathcal{O}(n) && (27.82)
\end{aligned}$$

La base $u(\mathcal{B}_0)$ est orthonormée, donc $u \in \mathcal{O}(E)$. □

27.2.3 Caractérisation des rotations

Soit (E, φ) un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 27.9. *Soit $r \in E^E$, alors il y a équivalence entre les assertions suivantes :*
- R_0 $r \in \mathcal{SO}(E)$;
- R_1 $r \in \mathcal{L}(E)$ *et pour toute base orthonormée directe* $\mathcal{B}$, $r(\mathcal{B})$ *est aussi orthonormée directe ;*
- R_2 $r \in \mathcal{L}(E)$ *et il existe une base orthonormée directe* $\mathcal{B}_0$ *telle que* $r(\mathcal{B}_0)$ *est aussi orthonormée directe ;*
- R_3 $r \in \mathcal{L}(E)$ *et pour toute base orthonormée* $\mathcal{B}$, $r(\mathcal{B})$ *est aussi orthonormée ;*

- R_4 *$r \in \mathcal{L}(E)$ et il existe une base orthonormée $\mathcal{B}_0$ telle que $r(\mathcal{B}_0)$ est aussi orthonormée.*

Démonstration. $R_0 \implies R_1$. L'application $r \in \mathcal{O}(E)$, donc pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E, $r(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E. De plus $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(r(\mathcal{B})) = \mathrm{Det}(r) = 1$, alors $\mathcal{B}$ et $r(\mathcal{B})$ on la même orientation. Ainsi $r(\mathcal{B})$ est une base orthonormée directe.

$R_1 \implies R_2$. En dimension finie (E est euclidien) il existe des bases orthonormées directes.

$R_2 \implies R_0$. D'après l'assertion O_6, l'hypothèse R_2 implique que $r \in \mathcal{O}(E)$. De plus $\mathcal{B}_0$ et $r(\mathcal{B}_0)$ ont la même orientation donc $\mathrm{Det}(r) > 0$. Or on a $\mathrm{Det}\, r = \mathrm{Det}_{\mathcal{B}_0} r(\mathcal{B}_0) \in \{-1; 1\}$, alors finalement $\mathrm{Det}\, r = 1$ et ainsi $r \in \mathcal{SO}(E)$ (r est une rotation).

$R_0 \implies R_3$. L'application $r \in \mathcal{SO}(E) \subset \mathcal{O}(E)$, alors $r \in \mathcal{L}(E)$ et pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E on a $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) \in \mathcal{O}(n)$. De plus $\mathrm{Det}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = \mathrm{Det}\, r = 1$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r) \in \mathcal{SO}(n)$.

$R_3 \implies R_4$. En dimension finie (E est euclidien) il existe des bases orthonormées.

$R_4 \implies R_0$. D'après l'assertion O_8, on sait que $r \in \mathcal{O}(E)$ et $\mathrm{Det}\, r = \mathrm{Det}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(r) = 1$ donc $r \in \mathcal{SO}(E)$. □

27.2.4 Changement de base orthonormée

Soit (E, φ) un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E.

Proposition 27.5. Soit $\mathcal{X}$ une famille de n vecteurs de E. $\mathcal{X}$ est une base orthonormée de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \in \mathcal{O}(n)$.

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ l'unique endomorphisme de E tel que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{X}$[5]. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u). \tag{27.83}$$

$\mathcal{X} = u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E si et seulement si u est orthogonale, et donc si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{X}) \in \mathcal{O}(n)$. □

Proposition 27.6. Soit $\mathcal{X}$ une base de E. $\mathcal{X}$ est une base orthonormée de E si et seulement si $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\mathcal{X}} \in \mathcal{O}(n)$.

Démonstration. Idem. □

Proposition 27.7. Supposons que (E, φ) est un espace vectoriel euclidien orienté et que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe de E. Soit $\mathcal{E}$ une base de E, alors $\mathcal{E}$ est directe si et seulement si $\mathcal{P}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \in \mathcal{SO}(n)$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \text{ est directe} &\iff \mathcal{E} \text{ est une base de } E \text{ et } \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) > 0 && (27.84)\\
&\iff \mathcal{P}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \in \mathcal{O}(n) \text{ et } \mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(\mathcal{E}) > 0 && (27.85)\\
&\iff \mathcal{P}_{\mathcal{B}\mathcal{E}} \in \mathcal{SO}(n)\,. && (27.86)
\end{aligned}$$

□

5. possible car $\mathcal{B}$ est une base de E et $\mathcal{X}$ une famille de n vecteurs de E.

27.2.5 Groupes $\mathcal{O}(n)$ et $\mathcal{SO}(n)$

On rappelle que :

$$\mathcal{O}(n) = \left\{ A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \;\middle|\; A^\top = A^{-1} \right\}, \tag{27.87}$$

$$\mathcal{SO}(n) = \{ A \in \mathcal{O}(n) \mid \operatorname{Det} A = 1 \}. \tag{27.88}$$

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de l'espace vectoriel euclidien (E, φ). On dispose de l'isomorphisme de groupes $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{GL}(E) & \longrightarrow & \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \\ u & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$.

Lemme 27.1.

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{O}(E)) = \mathcal{O}(n). \tag{27.89}$$

Démonstration. Si $u \in \mathcal{O}(E)$, alors comme $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \mathcal{O}(n)$.

Si $A \in \mathcal{O}(n)$, alors $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ donc il existe un isomorphisme $u \in \mathcal{GL}(E)$ tel que $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. La base $\mathcal{B}$ est orthonormée et la matrice A est orthogonale donc $u \in \mathcal{O}(E)$ et donc $A \in \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{O}(E))$. □

Conséquence : $\mathcal{O}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$ et l'application $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}$ est un morphisme de groupe donc $\mathcal{O}(n)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$. Ainsi $(\mathcal{O}(n), \cdot)$ est un groupe.

On dispose de $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(E) & \longrightarrow & \mathcal{O}(n) \\ u & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$, c'est un isomorphisme de groupes [6].

Lemme 27.2.

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{SO}(E)) = \mathcal{SO}(n). \tag{27.90}$$

Démonstration. Soit $r \in \mathcal{SO}(E)$, alors $r \in \mathcal{O}(E)$ et donc $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(r) \in \mathcal{O}(n)$ (d'après le lemme précédent). Or $A = \operatorname{Det} r = \operatorname{Det} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(r)$. Ainsi $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(r) \in \mathcal{SO}(n)$.

Soit $A \in \mathcal{SO}(n)$, alors $A \in \mathcal{O}(n)$ et donc il existe $u \in \mathcal{O}(E)$ telle que $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ (d'après le lemme précédent). Alors $1 = \operatorname{Det}_{\mathcal{B}}(A) = \operatorname{Det} u$ et donc $u \in \mathcal{SO}(E)$, c'est-à-dire que $A \in \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{SO}(E))$. □

Conséquence : $\mathcal{SO}(n)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(n)$.

Démonstration. $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$. L'image directe d'un sous-groupe par un morphisme de groupes est un sous-groupe. □

Remarque : On aurait pu utiliser l'application $\operatorname{Det} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{O}(n) & \longrightarrow & \{-1; 1\} \\ A & \longmapsto & \operatorname{Det} A \end{array} \right.$ et $\mathcal{SO}(n) = \operatorname{Ker}(\operatorname{Det})$. De même que pour $\mathcal{O}(E)$ et $\mathcal{SO}(E)$, la restriction

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{SO}(E) & \longrightarrow & \mathcal{SO}(n) \\ u & \longmapsto & \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right. \tag{27.91}$$

est un isomorphisme de groupes.

6. injectif car c'est la restriction d'un isomorphisme et surjectif d'après le lemme.

27.3 Automorphismes orthogonaux du plan euclidien

27.3.1 Matrices de $\mathcal{O}(2)$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $\mathcal{C}_A$ la famille des colonnes de A.

Théorème 27.10.

$$\mathcal{O}(2) = \left\{ A_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\epsilon\sin\alpha \\ \sin\alpha & \epsilon\cos\alpha \end{pmatrix} \;\middle|\; (\alpha,\epsilon) \in \mathbb{R} \times \{-1;1\} \right\}. \tag{27.92}$$

$\mathcal{O}(2)$ est un sous-groupe non-abélien. De plus pour tout $(\alpha,\epsilon) \in \mathbb{R} \times \{-1;1\}$, $\operatorname{Det} A_{\alpha,\epsilon} = \epsilon$.

Démonstration. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Alors

$$A \in \mathcal{O}(2) \iff \mathcal{C}_A \text{ est une BON} \tag{27.93}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \tag{27.94}$$

$$\iff \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} a = \cos\alpha,\ c = \sin\alpha \\ b = \sin\beta,\ d = \cos\beta \\ \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) = 0 \end{cases} \tag{27.95}$$

$$\iff \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \begin{cases} a = \cos\alpha,\ c = \sin\alpha \\ b = \sin\beta,\ d = \cos\beta \\ \beta \equiv -\alpha \pmod{2\pi} \\ \ \text{ou } \beta \equiv \pi - \alpha \pmod{2\pi} \end{cases} \tag{27.96}$$

$$\iff \exists\alpha \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} a = \cos\alpha,\ c = \sin\alpha \\ b = -\sin\alpha,\ d = \cos\alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a = \cos\alpha,\ c = \sin\alpha \\ b = \sin\alpha,\ d = -\cos\alpha \end{cases} \tag{27.97}$$

$$\iff \exists(\alpha,\epsilon) \in \mathbb{R} \times \{-1;1\} \quad \begin{cases} a = \cos\alpha,\ c = \sin\alpha \\ b = -\epsilon\sin\alpha,\ d = \epsilon\cos\alpha \end{cases} \tag{27.98}$$

$$\iff \exists(\alpha,\epsilon) \in \mathbb{R} \times \{-1;1\} \quad A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\epsilon\sin\alpha \\ \sin\alpha & \epsilon\cos\alpha \end{pmatrix} \tag{27.99}$$

□

Théorème 27.11.

$$\mathcal{SO}(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}, \tag{27.100}$$

qui est abélien, et

$$\mathcal{O}^-(2) = \left\{ S_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \;\middle|\; \varphi \in \mathbb{R} \right\}, \tag{27.101}$$

qui n'est pas stable par multiplication.

Théorème 27.12. *Pour tout quadruplet* $(\theta, \theta', \varphi, \varphi') \in \mathbb{R}^4$*, on a*

$$R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}; \tag{27.102}$$
$$S_\varphi S_{\varphi'} = S_{\varphi-\varphi'}; \tag{27.103}$$
$$R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi'}; \tag{27.104}$$
$$S_\varphi R_\theta = S_{\varphi-\theta}. \tag{27.105}$$

Démonstration. La démonstration découle des formules d'addition trigonométriques. □

Corollaire 27.12.1. *L'application* $\varphi\colon \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{SO}(2) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{cases}$ *est un morphisme de groupes du groupe* $(\mathbb{R}, +)$ *sur le groupe* $(\mathcal{SO}(2)\,, \cdot)$*.*

Pour tout réel θ, on a

$$\varphi(\theta) = I_2 \iff \begin{cases} \cos\theta = 1 \\ \sin\theta = 0 \end{cases} \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z} \tag{27.106}$$

Le morphisme φ est surjectif mais n'est pas injectif. Pour tout réel θ, $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Corollaire 27.12.2. *Pour tout réel* φ*,* $S_\varphi^2 = I_2$ *donc* $S_\varphi^{-1} = S_\varphi^\top = S_\varphi$*. La matrice* S_φ *est orthogonale, symétrique et involutive.*

27.3.2 Classification des éléments de $\mathcal{O}(E_2)$

Soit (E, φ) le plan vectoriel euclidien.

27.3.2.1 Éléments de $\mathcal{O}^-(E_2)$, les symétries vectorielles

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E_2 et $u \in \mathcal{O}^-(E_2)$. Alors $\operatorname{Det} u = -1$ et $\operatorname{Mat}_\mathcal{B}(u) \in \mathcal{O}^-(2)$. Il existe un réel φ tel que $\operatorname{Mat}_\mathcal{B}(u) = S_\varphi$ ($u \circ u = \mathrm{Id}$). De plus $u \in \mathcal{O}(E_2)$, donc c'est une symétrie orthogonale.

Dans le cas général, on classe les symétries vectorielles u de E_2 en fonction de $\dim \operatorname{Inv}(u)$ comme dans le tableau **??**.

$\dim \operatorname{Inv}(u)$	Nature de u	$\operatorname{Det} u$
0	$-\mathrm{Id}$	$(-1)^2 = 1$
1	symétrie / droite	
2	Id	1

Tableau 27.1 – Classification des symétries vectorielles u selon $\dim \operatorname{Inv}(u)$

Comme $u \in \mathcal{O}^-(E_2)$, alors u est une symétrie orthogonale par rapport à une droite. Donc c'est une réflexion (dans $E82$ les hyperplans sont des droites). Alors $\mathcal{O}^-(E_2)$ est inclus dans l'ensemble des réflexions de E_2.

Théorème 27.13. $\mathcal{O}^-(E_2)$ *est l'ensemble des réflexions du plan* E_2*.*

Démonstration. Précisons la réflexion u dont la matrice dans la base orthonormée $\mathcal{B}$ est S_φ. On cherche $\operatorname{Inv}(u) = \{x \in E_2 \mid (u - \operatorname{Id})(x) = 0\}$. On travaille matriciellement : soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$.

$$x \in \operatorname{Inv}(u) \iff (S_\varphi - I_2)x = 0 \tag{27.107}$$

$$\iff \begin{cases} (\cos\varphi - 1)x_1 + \sin\varphi x_2 = 0 \\ \sin\varphi x_1 - (\cos\varphi + 1)x_2 = 0 \end{cases} \tag{27.108}$$

$$\iff \begin{cases} -2\sin^2\frac{\varphi}{2}x_1 + 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}x_2 = 0 \\ 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}x_1 - 2\cos^2\frac{\varphi}{2}x_2 = 0 \end{cases} \tag{27.109}$$

$$\iff \begin{cases} \sin\frac{\varphi}{2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}x_2 - \sin\frac{\varphi}{2}x_1\right) = 0 \\ \cos\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{\varphi}{2}x_1 - \cos\frac{\varphi}{2}x_2\right) = 0 \end{cases} \tag{27.110}$$

$$\iff \cos\frac{\varphi}{2}x_2 = \sin\frac{\varphi}{2}x_1. \tag{27.111}$$

□

Proposition 27.8. La réflexion u traduite par la matrice S_φ dans la base $\mathcal{B}$ est la réflexion par rapport à la droite $\mathcal{D}$ d'équation : $\cos\frac{\varphi}{2}x_2 = \sin\frac{\varphi}{2}x_1$ dans $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{D} = \operatorname{Vect}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\imath + \sin\frac{\varphi}{2}\jmath\right). \tag{27.112}$$

27.3.2.2 Éléments de $\mathcal{SO}(E_2)$, les rotations de E_2

Soit une rotation $r \in \mathcal{SO}(E_2)$, pour toute réflexion $s \in \mathcal{O}^-(E_2)$ on a $r \circ s \in \mathcal{O}(E_2)$. De plus $\operatorname{Det}(r \circ s) = \operatorname{Det}(r)\operatorname{Det}(s) = -1$. donc $r \circ s \in \mathcal{O}^-(E_2)$.

Il existe une réflexion s' de E_2 telle que $r \circ s = s'$, donc $r = r \circ s \circ s = s' \circ s$.

Théorème 27.14. *Toute rotation de E_2 peut s'écrire d'une infinité de façons, comme le produit de deux réflexions, la première étant choisie de manière quelconque.*

Remarque : Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée, $r \in \mathcal{O}(E_2)$ et $(s, s') \in \mathcal{O}^-(E_2)$ telles que $r = s' \circ s$. Il existe trois réels θ, φ et φ' tels que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R_\theta$, $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = S_\varphi$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(s') = S_{\varphi'}$. Ainsi

$$r = s' \circ s \iff R_\theta = S_\varphi S_{\varphi'} = R_{\varphi' - \varphi} \tag{27.113}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\theta = \cos(\varphi' - \varphi) \\ \sin\theta = \sin(\varphi' - \varphi) \end{cases} \tag{27.114}$$

$$\iff \theta \equiv \varphi' - \varphi \pmod{2\pi}. \tag{27.115}$$

Si on connait φ et θ, il suffit de prendre $\varphi' = \theta + \varphi$.

Autrement dit, la rotation r (représentée par R_θ dans $\mathcal{B}$) peut s'écrire $s' \circ s$ avec :

— s la réflexion par rapport à $\mathcal{D} = \operatorname{Vect}\left(\cos\frac{\varphi}{2}\imath + \sin\frac{\varphi}{2}\jmath\right)$;

— s' la réflexion par rapport à $\mathcal{D}' = \operatorname{Vect}\left(\cos\frac{\varphi+\theta}{2}\imath + \sin\frac{\varphi+\theta}{2}\jmath\right)$.

27.3.2.3 Synthèse

Théorème 27.15. *Tout automorphisme orthogonal du plan euclidien E_2 peut s'écrire comme le produit d'au plus deux réflexions.*

$\dim \operatorname{Inv}(u)$	Nature de u	$\mathcal{O}^-(E_2) \setminus \mathcal{SO}(E_2)$	Produit de
0	rotation	$\mathcal{SO}(E_2)$	2 réflexions
1	réflexion	$\mathcal{O}^-(E_2)$	1 réflexion
2	Id	$\mathcal{SO}(E_2)$	0 réflexion

Tableau 27.2 – Classification des automorphismes orthogonaux du plan euclidien

Il reste à montrer que que si u est une rotation distincte de l'identité on a $\operatorname{Inv} u = \{0\}$.

On note $R_\theta = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ avec $\mathcal{B}$ une base orthonormée. On sait que

$$u \neq \mathrm{Id} \iff \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}. \tag{27.116}$$

De plus pour tout $x \in E_2$, on note $X = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Alors

$$x \in \operatorname{Inv}(u) \iff (R_\theta - I_2)X = 0 \tag{27.117}$$

$$\iff \begin{cases} (\cos\theta - 1)x_1 - \sin\theta x_2 = 0 \\ \sin\theta x_1 + (\cos\theta - 1)x_2 = 0 \end{cases}. \tag{27.118}$$

Le déterminant du système vaut $\begin{vmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{vmatrix} = 2(1 - \cos\theta) \neq 0$. Alors c'est un système de Cramer homogène : il n'y a qu'une solution, c'est la solution nulle.

$$x \in \operatorname{Inv}(u) \iff x = 0. \tag{27.119}$$

27.3.3 Mesure de l'angle d'une rotation dans le plan euclidien orienté

27.3.3.1 Définition

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées du plan euclidien orienté E_2. Soit $r \in \mathcal{SO}(E_2)$, il existe $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ tels ques $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(r) = R_\theta$ et $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}'}(r) = R_{\theta'}$. Soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $R_{\theta'} = P^{-1} R_\theta P$. Or P est orthogonale donc $R_{\theta'} = P^\top R_\theta P$. On distingue deux cas :

— $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ ont la même orientation et alors $P \in \mathcal{SO}(2)$. Il existe un réel α tel que $P = R_\alpha$. Alors

$$R_{\theta'} = P^{-1} R_\theta P \iff R_{\theta'} = R_{-\alpha} R_\theta R_\alpha \tag{27.120}$$

$$\iff R_{\theta'} = R_{-\alpha+\theta+\alpha} \tag{27.121}$$

$$\iff R_{\theta'} = R_\theta \tag{27.122}$$

$$\iff \theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}. \tag{27.123}$$

— $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ n'ont pas la même orientation et alors $P \in \mathcal{O}^-(2)$. Il existe un réel φ tel que $P = S_\varphi$. Alors

$$\begin{aligned} R_{\theta'} = P^{-1}R_\theta P &\iff R_{\theta'} = S_\varphi R_\theta S_\varphi && (27.124)\\ &\iff R_{\theta'} = S_\varphi S_{\varphi+\theta} && (27.125)\\ &\iff R_{\theta'} = R_{\varphi-\varphi-\theta} && (27.126)\\ &\iff R_{\theta'} = R_{-\theta} && (27.127)\\ &\iff \theta \equiv -\theta' \pmod{2\pi}. && (27.128)\end{aligned}$$

On en déduit le théorème suivant :

Théorème 27.16. *Pour toute rotation r du plan vectoriel euclidien E_2 orienté, il existe un unique réel θ modulo 2π tel que pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E_2, on a $\operatorname{Mat}_\mathcal{B}(r) = R_\theta$.*

Ce réel est appelé mesure de l'angle de la rotation r.

Remarque : Si on change l'orientation de E_2, la mesure de l'angle d'une rotation est changé en son opposé. Elle ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$ mais elle dépend quand même de l'orientation de l'espace.

27.3.3.2 Détermination de l'angle d'une rotation

Soient E_2 le plan euclidien orienté, $r \in \mathcal{SO}(E_2)$ et θ l'angle de la rotation r. Pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E_2, $\operatorname{Mat}_\mathcal{B}(r) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$. Soit a un vecteur unitaire quelconque. On peut compléter a en une base orthonormée directe (a, b). Comme on a

$$\operatorname{Mat}_{(a,b)}(r) = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix} \tag{27.129}$$

$$\operatorname{Det}(a, r(a)) = \operatorname{Det}_{(a,b)}(a, r(a)) = \begin{vmatrix}1 & \cos\theta\\ 0 & \sin\theta\end{vmatrix} = \sin\theta, \tag{27.130}$$

alors

$$\cos\theta = \langle r(a), a\rangle \tag{27.131}$$

$$\sin\theta = \operatorname{Det}(a, r(a)). \tag{27.132}$$

27.3.3.3 Angles orientés de vecteurs

Proposition 27.9. Soient a et b deux vecteurs unitaires du plan euclidien E_2 orienté. Il existe une unique rotation r de E_2 telle que $r(a) = b$.

Démonstration. Comme dans la sous-sous-section précédente, le vecteur a est unitaire ; alors il existe un vecteur $c \in E_2$ tel que (a, c) soit une base orthonormée directe de E_2. Alors il existe un unique couple $(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $b = b_1a+b_2c$. $1 = \|b\|^2 = b_1^2 + b_2^2$. Il existe donc un réel α tel que $\begin{cases} b_1 = \cos\alpha\\ b_2 = \sin\alpha\end{cases}$.

Soit $r \in \mathcal{SO}(E_2)$ d'angle $\theta \in \mathbb{R}$. Comme (a, c) est une base orthonormée directe, on a $\mathrm{Mat}_{(a,c)}(r) = R_\theta$. Et

$$\mathrm{Mat}_{(a,c)}(a) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{27.133}$$

$$\mathrm{Mat}_{(a,c)}(b) = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}. \tag{27.134}$$

Alors

$$\begin{aligned}
r(a) = b &\iff R_\theta \mathrm{Mat}_{(a,c)}(a) = \mathrm{Mat}_{(a,c)}(b) && (27.135)\\
&\iff R_\theta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} && (27.136)\\
&\iff \begin{cases} \cos\theta = \cos\alpha \\ \sin\theta = \sin\alpha \end{cases} && (27.137)\\
&\iff \theta \equiv \alpha \pmod{2\pi} && (27.138)\\
&\iff R_\theta = R_\alpha. && (27.139)
\end{aligned}$$

Il existe donc une unique rotation r telle que $r(a) = b$, c'est la rotation d'angle α. □

On peut alors donner la définition suivante.

Définition 27.9. Soient u et v deux vecteurs non nuls du plan euclidien E_2 orienté. On appelle angle orienté des vecteurs u et v, noté $\widehat{(u, v)}$, l'angle de l'unique rotation r de E_2 telle que $r\left(\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{v}{\|v\|}$.

Conséquence : Soient u et v deux vecteurs unitaires, alors

$$\cos\widehat{(u, v)} = \langle u, v\rangle \tag{27.140}$$

$$\sin\widehat{(u, v)} = \mathrm{Det}(u, v). \tag{27.141}$$

27.4 Automorphismes orthogonaux de l'espace euclidien

Soit E_3 l'espace euclidien supposé orienté.

27.4.1 Décomposition en produits de réflexions

Rappel : Si a et b sont deux vecteurs unitaires différents de E_3, il existe une unique réflexion s telle que $s(a) = b$ et $s(b) = a$. C'est la réflexion par rapport à l'hyperplan médiateur H de a et b :

$$\begin{aligned}
H &= \mathrm{Vect}(b - a)^\perp && (27.142)\\
&= \{x \in E_3 \mid \|a - x\| = \|b - x\|\}. && (27.143)
\end{aligned}$$

Théorème 27.17. *Tout automorphisme orthogonal de l'espace euclidien E_3 peut s'écrire comme le produit d'au plus trois réflexions.*

Démonstration. Soit $u \in \mathcal{O}(E_3)$. On pose

$$F = \operatorname{Inv} u = \ker(u - \mathrm{Id}). \tag{27.144}$$

Alors $\dim F \in \{0, 1, 2, 3\}$. On distingue les cas selon la dimension de F :

— Cas 1 : $\dim F = 3$, alors $u = \mathrm{Id}$ est le produit de 0 réflexion.

— Cas 2 : $\dim F = 2$, alors F est un hyperplan de E_3. Soit a un vecteur normal à F. Alors $F = \mathrm{Vect}(a)^\perp$ avec $a \neq 0$. On a $u_{|F} = \mathrm{Id}$. L'hyperplan F est stable par u donc $F^\perp$ aussi. Or $F^\perp = \mathrm{Vect}(a)$ donc il existe un réel λ tel que $u(a) = \lambda a$. en passant à la norme on a $|\lambda| = 1$.
Suppososons que $\lambda = 1$, alors $u(a) = a$ et donc $a \in F$. Finalement $a \in F \cap F^\perp = \{0\}$. Or $a \neq 0$ par hypothèse (Contradiction). Finalement $\lambda = -1$. L'application u est la symétrie orthogonale par rapport à F.

— Cas 3 : $\dim F = 1$, alors il existe un vecteur a non nul tel que $F = \mathrm{Vect}(a)$. Soit $b \notin F$ tel que $\|b\| = 1$ et posons $c = u(b)$[7]. Alors $\|c\| = \|b\| = 1$. Soit H l'hyperplan médiateur de c et b :

$$H = \mathrm{Vect}(b - c)^\perp. \tag{27.145}$$

Soit s la réflexion par rapport à H[8]. Alors

$$\begin{aligned}
\langle a, u(b) - b\rangle &= \langle a, u(b)\rangle - \langle a, b\rangle && (27.146)\\
&= \langle u(a), b\rangle - \langle a, b\rangle \qquad u \in \mathcal{O}(E_3) && (27.147)\\
&= \langle a, b\rangle - \langle a, b\rangle \qquad a \in \mathrm{Inv}(u) = F && (27.148)\\
&= 0. && (27.149)
\end{aligned}$$

Donc $a \in H$, $a = s(a)$. Soit $v = s \circ u$, alors $v(a) = s(u(a)) = s(a) = a$ et $v(b) = s(u(b)) = s(c) = b$. Comme $F = \mathrm{Vect}(a)$ et $b \notin F$ alors (a, b) est une famille libre. $\dim \mathrm{Vect}(a, b) = 2$ alors $\mathrm{Vect}(a, b) \subset \mathrm{Inv}(v)$ et donc $\dim \mathrm{Inv}(v) \in \{2, 3\}$. D'après les deux premiers cas, v est le produit d'au plus une réflexion.

$$\begin{aligned}
v &= s \circ u && (27.150)\\
u &= (s \circ s) \circ v = s \circ v. && (27.151)
\end{aligned}$$

Alors u est le produit d'au plus deux réflexions.

— Cas 4 : $\dim F = 0$, soit $a \in E_3 \setminus \{0\}$ tel que $\|a\| = 1$ et soit $b = u(a) \neq a$. Alors $\|b\| = 1$, car u est orthogonal. Soit s l'unique réflexion telle que $a = s(b)$ et $b = s(a)$. Soit $v = s \circ u$, alors $v(a) = s(b) = a$. Comme $a \neq 0$, on a $\mathrm{Vect}(a) \subset \mathrm{Inv}(v)$ et donc $\dim \mathrm{Inv}(v) \geq 1$. L'application v est le produit d'au plus deux réflexions, et alors $u = s \circ v$ est le produit d'au plus trois réflexions.

□

27.4.2 Éléments de $\mathcal{SO}(E_3)$: les rotations

Soit $r \in \mathcal{SO}(E_3)$. D'après la sous-section précédente, r est le produit de p réflexions, avec $p \in [\![0\,;3]\!]$. Le déterminant de r vaut $\operatorname{Det} r = 1 = (-1)^p$. Alors p est pair, $p \in \{0, 2\}$. Les rotations de E_3 sont :

7. alors $c \neq b$ car $b \notin F$
8. $s(b) = c$ et $s(c) = b$

— l'identité ;
— le produit de deux réflexions distinctes.

Définition 27.10. Soit $r \in \mathcal{SO}(E_3) \setminus \{\text{Id}\}$, alors $\text{Inv}(r)$ est une droite, appelée axe de la rotation.

Proposition 27.10. Soit $r \in \mathcal{SO}(E_3)$. Il existe une base orthonormale directe (i, j, k) de E_3 et il existe un réel θ tels que

$$\text{Mat}_{(i,j,k)}(r) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{27.152}$$

C'est la rotation d'axe $\text{Vect}\, k$ d'angle θ. Si $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$, alors r est appelée un retournement.

Démonstration. Si $r = \text{Id}$, alors le résultat est évident ($theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$). Sinon, il existe deux hyperplans distincts P et H tels que $r = s_P \circ s_H$ où $s_P(s_H)$ est la réflexion par rapport à $P(H)$. Soit $\mathcal{D} = P \cap H$.

Comme $p \neq H$ alors $\dim \mathcal{D} \leq 1$. $P + H$ est un sous-espace vectoriel de E_3, donc

$$3 \geq \dim(P + H) = \dim P + \dim H - \dim(Dr) \tag{27.153}$$

$$3 \geq 4 - \dim Dr \dim \mathcal{D} \qquad \geq 1. \tag{27.154}$$

Alors $\mathcal{D}$ est de dimension 1, c'est un droite. Soit $k \in E_3$ unitaire tel que $\mathcal{D} = \text{Vect}(k)$.

$$r(k) = s_P(s_H(k)) = s_P(k) = k. \tag{27.155}$$

alors $\mathcal{D} \subset \text{Inv}(r)$ et alors $\dim \text{Inv}(r) \geq 1$. Si $\dim \text{Inv}(r) = 2$ alors r est une réflexion (aburde) et si $\dim \text{Inv}(r) = 3$ alors $r = \text{Id}$ (absurde). Donc $\dim \text{Inv}(r) = 1$.

Finalement $\mathcal{D} = \text{Inv}(v)$. Soit $F = \mathcal{D}^\perp$. $\mathcal{D}$ est stable par r, donc F est stable par r. Soit $\varphi = r_{|F}^{|F} \in \mathcal{O}(F)$. On induit une orientation sur F à l'aide de l'orientation de $\mathcal{D}$ par k.

Si (i, j) est une base orthonormée directe de F, (i, j, k) est une base orthonormée directe de E_3. Donc $\text{Det}(\varphi) = \text{Det}(r) = 1$. Alors φ est une rotation. Il existe un réel θ tel que pour toute base orthonormée directe (i, j) on a $[\varphi]_{(i,j)} = R_\theta$. □

Théorème 27.18. *Soient* $r \in \mathcal{SO}(E_3) \subset \{\text{Id}\}$*,* k *un vecteur directeur unitaire tel que* $\text{Inv}(r) = \text{Vect}(k)$*. Soit* θ *l'angle de* r*. Pour tout vecteur* $x \in E_3$*, on a*

$$x \perp k \implies r(x) = \cos\theta x + \sin\theta k \wedge x \tag{27.156}$$

$$x \perp k \text{ et } \|x\| = 1 \implies \cos\theta = \langle x, r(x)\rangle \text{ et } \sin\theta = \text{Det}(x, r(x), k). \tag{27.157}$$

Démonstration. Par linéarité on peut supposer que x est unitaire, on note $F = \text{Vect}(k)^\perp$. Alors $x \in F$ et il existe un $y \in F$ tel que (x, y) soit une base orthonormée directe de F. Ainsi (x, y, k) est une base orthonormée directe de E_3 puisque $k \wedge x = y$. Alors

$$\text{Mat}_{(x,y)}(r_{|F}^{|F}) = R_\theta \tag{27.158}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{27.159}$$

$\dim \mathrm{Inv}(r)$	Nature	$\mathcal{O}^-(E_3) \setminus \mathcal{SO}(E_3)$	Produit de ... réflexions
0	composée rot. réf.	$\mathcal{O}^-(E_3)$	3
1	rotation	$\mathcal{SO}(E_3)$	2
2	réflexion	$\mathcal{O}^-(E_3)$	1
3	Id	$\mathcal{SO}(E_3)$	0

TABLEAU 27.3 – Classification des automorphismes orthogonaux de l'espace euclidien

alors on a bien $r(x) = \cos\theta x + \sin\theta y = \cos\theta x + \sin\theta k \wedge x$

D'après la première égalité :

$$\begin{aligned}
\langle x, r(x)\rangle &= \langle x, \cos\theta x + \sin\theta k \wedge x\rangle && (27.160)\\
&= \cos\theta \|x\|^2 + \sin\theta \langle x, k \wedge x\rangle && (27.161)\\
&= \cos\theta. && (27.162)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathrm{Det}(x, r(x), k) &= \mathrm{Det}_{(x,y,k)}(x, r(x), k) && (27.163)\\
&= \begin{vmatrix} 1 & \cos\theta & 0\\ 0 & \sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin\theta. && (27.164)
\end{aligned}$$

□

27.4.3 Classification des éléments de $\mathcal{O}(E_3)$

27.4.4 Exemples

Exemple 1 : $M = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1\\ 4 & 7 & 4\\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$. Soit $u \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ canoniquement associée à M. Déterminons la nature de u et ses caractéristiques.

Déjà $\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = \|C_3\|^2 = 1$ et $\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_2, C_3\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = 0$. (C_1, C_2, C_3) est une base orthonormale, $M \in \mathcal{O}(3)$. De plus $C_1 \wedge C_2 = C_3$ et $\mathrm{Det}\, M = 1$.

Cherchons $\mathrm{Inv}(u)$.

$$\begin{aligned}
X \in \mathrm{Inv}(u) &\iff MX = X && (27.165)\\
&\iff (M - \mathrm{Id})X = 0 && (27.166)\\
&\iff \begin{cases} -17x_1 + 4x_2 + x_3 = 0\\ 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0\\ x_1 + 4x_2 - 17x_3 = 0 \end{cases} && (27.167)\\
&\iff \begin{cases} x_1 = x_3\\ x_2 = 4x_3 \end{cases}. && (27.168)
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Vect}(1, 4, 1)$, $k = \frac{1}{3\sqrt{2}}(1, 4, 1)$.

Cherchons un vecteur normal, on prend par exemple $\overrightarrow{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$. Alors $u(v) = \frac{1}{9\sqrt{2}}(-9,0,9) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$. Ainsi

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = -1 \tag{27.169}$$

donc $\theta \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

r est la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(1,4,1)$ d'angle π. C'est un retournement.

Exemple 2 : $M = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 3 & -2\\ 2\sqrt{3} & -2 & 0\end{pmatrix}$. On a bien

$$\|C_1\|^2 = \|C_2\|^2 = \|C_3\|^3 = 1 \tag{27.170}$$

$$\langle C_1, C_2\rangle = \langle C_1, C_3\rangle = \langle C_3, C_2\rangle = 0 \tag{27.171}$$

$$C_1 \wedge C_2 = -C_3. \tag{27.172}$$

Alors $M \in \mathcal{O}^-(3)$. Trouvons $\mathrm{Inv}(M)$:

$$X \in \mathrm{Inv}(M) \iff MX = X \tag{27.173}$$

$$\iff (M - I_3)X = 0 \tag{27.174}$$

$$\iff \begin{pmatrix}-3 & \sqrt{3} & 2\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1 & -2\\ 2\sqrt{3} & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = 0 \tag{27.175}$$

$$\iff x_2 = \sqrt{3}x_1 - 2x_2 \tag{27.176}$$

$$\mathrm{Inv}(u) = \mathrm{Vect}((1,\sqrt{3},0),(0,-2,1)). \tag{27.177}$$

Chapitre 28

Transformations affines

Sommaire

Tableaux

28.1 Applications affines

28.1.1 Définitions

Soient E et F des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in E^F$. On dit que f est une application affine si et seulement s'il existe $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout couple $(A, B) \in E^2$ on ait $\overrightarrow{f(A)f(B)} = u(\overrightarrow{AB})$. Une telle application est alors unique et on la note $\overrightarrow{f}$ et on l'appelle application linéaire associée à l'application affine f.

$$f(A) = f(B) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) \tag{28.1}$$

Démonstration de l'unicité. Si u existe alors soit $\Omega \in E$ fixé. Pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, on a
$$u(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f(\Omega)f(\Omega + x)}. \tag{28.2}$$
Alors l'application u est complètement déterminée par f. □

28.1.2 Propriétés

Proposition 28.1. L'image par une application affine $f \in E^F$ d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de f.

Démonstration. Soit $f \in E^F$ affine. Soit W_1 un sous-espace affine de E. On a
$$W_1 = A_1 + E_1, \tag{28.3}$$
avec A_1 un point de W_1 et E_1 un sous-espace vectoriel de E. Ainsi
$$\begin{aligned} f(W_1) &= \{f(M) \mid M \in W_1\} &(28.4)\\ &= \{f(A_1 + \overrightarrow{x_1}) \mid \overrightarrow{x_1} \in E_1\} &(28.5)\\ &= \{f(A_1) + f(\overrightarrow{x_1}) \mid \overrightarrow{x_1} \in E_1\} &(28.6)\\ &= f(A_1) + \overrightarrow{f}(E_1). &(28.7)\end{aligned}$$
E_1 est un sous-espace vectoriel de E et $\overrightarrow{f}$ est linéaire donc $\overrightarrow{f}(E_1)$ est un sous-espace vectoriel de F. Par conséquent $f(W_1)$ est un sous-espace affine de F. □

Proposition 28.2. Une application affine conserve l'alignement et le parallèlisme.

Démonstration. Soit $f \in E^F$ une application affine.

Soient A, B et C trois points de E alignés. Il existe une droite affine $\mathcal{D}$ de E qui contient A, B et C.
$$\mathcal{D} = A + D \tag{28.8}$$
avec D une droite vectorielle. D'après la proposition précédente, on a $f(\mathcal{D}) = f(A) + \overrightarrow{f}(D)$. $\overrightarrow{f}(D)$ est un sous-espace vectoriel de F de dimension au plus 1. Donc $f(\mathcal{D})$ est inclus dans une droite affine de F. $f(A)$, $f(B)$ et $f(C)$ sont sur la même droite affine : ils sont alignés.

Soient W_1 et W_2 deux sous-espaces affines de E.
$$\begin{cases} W_1 &= A_1 + E_1\\ W_2 &= A_2 + E_2 \end{cases} \tag{28.9}$$
Alors W_1 est parallèle à W_2 si et seulement si $E_1 \subset E_2$. D'après la proposition précédente on a
$$\begin{cases} f(W_1) &= f(A_1) + \overrightarrow{f}(E_1)\\ f(W_2) &= f(A_2) + \overrightarrow{f}(E_2) \end{cases} \tag{28.10}$$
Si $E_1 \subset E_2$ alors $\overrightarrow{f}(E_1) \subset \overrightarrow{f}(E_2)$ ce qui équivaut à $f(W_1)$ est parallèle à $f(W_2)$. □

Proposition 28.3. Soient E, F et G trois $\mathbb{R}$-espace vectoriels. Soient $f \in F^E$ et $g \in G^F$ deux applications affines. Alors $g \circ f \in G^E$ est une application affine et de plus $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

Démonstration. Pour tous A et B de E, on a

$$\overrightarrow{g \circ f(A) g \circ f(B)} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f(A) f(B)}) \tag{28.11}$$
$$= \overrightarrow{g}(\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})) \tag{28.12}$$
$$= \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}). \tag{28.13}$$

Si $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{f}$ sont linéaires, alors $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$ est linéaire. On a montré que $g \circ f$ est affine et que sa partie linéaire vérifie $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. □

Proposition 28.4. Soient E et F deux $\mathbb{R}$ espaces vectoriels. et $f \in F^E$. L'application f est affine si et seulement s'il existe un point $A \in E$ et s'il existe une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que pour tout point $M \in E$ on a $f(M) = A + u(\overrightarrow{OM})$.

Démonstration. $\Longrightarrow$. On prend $u = \overrightarrow{f}$ et $A = f(0)$.
$\Longleftarrow$. Pour tout couple $(M, N) \in E^2$ on a

$$\overrightarrow{f(M) f(N)} = A + u(\overrightarrow{ON}) - (A + u(\overrightarrow{OM})) \tag{28.14}$$
$$= u(\overrightarrow{MN}). \tag{28.15}$$

Donc f est affine et $\overrightarrow{f} = u$. □

Conséquence importante :
— Les applications linéaires sont des application affines ;
— une application affine $f \in F^E$ est linéaire si et seulement si $f(0) = 0$.

Proposition 28.5. Une application affine conserve le barycentre.

Démonstration. Soient $f \in FE$, $(A_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ n points de E et $(\alpha_i)_{i \in [\![1;n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$. On note $G = \mathrm{Bar}((A_i, \alpha_i)_{i \in [\![1;n]\!]})$. Alors

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{f(G) f(A_i)} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{f}(\overrightarrow{GA_i}) \tag{28.16}$$
$$= \overrightarrow{f}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{GA_i}\right) \tag{28.17}$$
$$= \overrightarrow{f}(0) = 0. \tag{28.18}$$

Donc on a bien $f(G) = \mathrm{Bar}((f(A_i), \alpha_i)_{i \in [\![1;n]\!]})$. □

28.1.3 Transformations affines

Définition 28.1. On appelle transformation affine de E toute application affine bijective de E dans E.

Proposition 28.6. Soit $f \in E^E$ une application affine. f est une transformation affine si et seulement si $\overrightarrow{f}$ est un isomorphisme.

Démonstration. $\Longrightarrow$ Pour tout couple $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$ on a

$$\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) \iff f(0) + \overrightarrow{y} = f(0) + \overrightarrow{x} \tag{28.19}$$
$$\iff f(0) + \overrightarrow{y} = f(0 + \overrightarrow{x}) \tag{28.20}$$
$$\iff f^{-1}(f(0) + \overrightarrow{y}) = 0 + \overrightarrow{x}. \tag{28.21}$$

Il existe un unique $\overrightarrow{x} \in E$ tel que $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$, alors $\overrightarrow{f}$ est bijective.
$\Longleftarrow$ Soit $(M, N) \in E^2$ alors

$$N = f(M) \iff \overrightarrow{f(O)N} = \overrightarrow{f(O)f(M)} \tag{28.22}$$
$$\iff \overrightarrow{f(O)N} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \tag{28.23}$$
$$\iff \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{f(O)N}) = \overrightarrow{OM}. \qquad \overrightarrow{f} \in \mathcal{GL}(E) \tag{28.24}$$
$$\tag{28.25}$$

Il existe un unique point $M \in E$ tel que $f(M) = N$, donc f est bijective. $\square$

Définition 28.2. L'ensemble des transformations affines de E, noté $\mathbf{Ga}(E)$, est appelé le groupe affine de E.

Proposition 28.7. Le groupe affine $(\mathbf{Ga}(E), \circ)$ est un sous-groupe du groupe des permutations $(\mathcal{S}(E), \circ)$.

Démonstration. Par définition des transformations affines, $\mathbf{Ga}(E) \subset \mathcal{S}(E)$. Puisque l'identité est une transformation affine, $\mathbf{Ga}(E) \neq \emptyset$. Soient f et g deux transformations affines. Il s'agit de montrer que $f \circ g^{-1}$ est une transformation affine. Montrons d'abord que g^{-1} est affine. Soient deux points M et N de E. Alors

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{g \circ g^{-1}(M) g \circ g^{-1}(N)} \tag{28.26}$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{g^{-1}(M)g^{-1}(N)}) \qquad g \in \mathbf{Ga}(E) \tag{28.27}$$
$$\overrightarrow{g}^{-1}(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{g^{-1}(M)g^{-1}(N)}. \tag{28.28}$$

Donc g^{-1} est une transformation affine et $\overrightarrow{g^{-1}} = \overrightarrow{g}^{-1}$. Par composition $f \circ g^{-1}$ est une application affine et elle est bijective. Finalement $f \circ g^{-1} \in \mathbf{Ga}(E)$. $\square$

28.1.4 Exemples

28.1.4.1 Homothéties et translations

Proposition 28.8. Une application affine $f \in E^E$ est une translation si et seulement si sa partie linéaire est l'identité.

Démonstration.

$$f \text{ est une translation} \iff \forall (A, B) \in E^2 \quad \overrightarrow{Af(A)} = \overrightarrow{Bf(B)} \tag{28.29}$$
$$\iff \forall (A, B) \in E^2 \quad \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{AB} \tag{28.30}$$
$$\iff \forall (A, B) \in E^2 \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} \tag{28.31}$$
$$\iff f = \mathrm{Id}\,. \tag{28.32}$$

$\square$

Définition 28.3. On appelle homothétie de E toute application $f \in E^E$ telle qu'il existe un réel $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ tel que $\overrightarrow{f} = \alpha\,\mathrm{Id}$. Ce réel est unique et est appelé le rapport de l'homothétie f.

Proposition 28.9. Pour toute fonction $h \in E^E$ et tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, h est une homothétie de rapport α si et seulement si pour tout couple de points $(A,B) \in E^2$ on a $\overrightarrow{h(A)h(B)} = \alpha\overrightarrow{AB}$.

Démonstration. L'application h admet-elle un point fixe ? Vérifions-le :

$$\begin{aligned}
\forall M \in \quad h(M) = M &\iff \overrightarrow{h(O)h(M)} = \overrightarrow{h(O)M} && (28.33)\\
&\iff \alpha\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{h(O)O} + \overrightarrow{OM} && (28.34)\\
&\iff (1-\alpha)\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Oh(O)} && (28.35)\\
&\iff \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{Oh(O)}}{1-\alpha}. \qquad \alpha \neq 1 && (28.36)
\end{aligned}$$

L'application f admet un seul point fixe, c'est le centre de l'homothétie h. Cette application est l'homothétie de centre Ω et de rapport α. Et finalement

$$\begin{aligned}
\forall M \in E \quad h(M) &= h(\Omega) + \overrightarrow{h}(\overrightarrow{\Omega M}) && (28.37)\\
h(M) &= \Omega + \alpha\overrightarrow{\Omega M}. && (28.38)
\end{aligned}$$

□

Finalement les transformation affines dont les parties linéaires s'écrivent sous la forme $\alpha\,\mathrm{Id}$ ($\alpha \in \mathbb{R}^*$) sont :
— les translations si $\alpha = 1$;
— les homothéties sinon.

28.1.4.2 Projections affines

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives les sous-espaces vectoriels F et G. On suppose que $E = F \oplus G$.

Proposition 28.10. Pour tout point M de E, il existe un unique point N de E tel que $N \in \mathcal{F}$ et $\overrightarrow{MN} \in G$. L'application $p\colon \left\{\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & N \end{array}\right.$ est appelée projection affine sur $\mathcal{F}$ parallélement au sous-esape affine $\mathcal{G}$ [1].

Démonstration. Soient M et N des points de E. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{cases} N \in \mathcal{F} \\ \overrightarrow{MN} \in G \end{cases} \iff \begin{cases} N \in \mathcal{F} \\ N \in M + G \end{cases} \iff N \in \mathcal{F} \cap (M+G). \qquad (28.39)$$

Or $\mathcal{F}$ et $M+G$ sont supplémentaires dans E, de directions F et G respectivement, vérifiant $F \oplus G = E$. Leur intersection est un singleton. C'est-à-dire que N est unique. □

1. ou parallélement au sous-espace vectoriel G

Remarque : Si E est euclidien et si $G = F^{\perp}$, on parle de projection affine orthogonale sur le sous-espace affine $\mathcal{F}$[2].

Proposition 28.11. Avec les notations précédentes, p est une projection affine et $\overrightarrow{p}$ est la projection vectorielle de E sur F parallèlement à G.

Démonstration. Soient A et B des points de E. Alors

$$\overrightarrow{p(A)p(B)} = \overrightarrow{p(A)A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{Bp(B)}, \tag{28.40}$$

c'est-à-dire

$$\overrightarrow{AB} = \underbrace{\overrightarrow{p(A)p(B)}}_{\in F} + \underbrace{\overrightarrow{Ap(A)}}_{\in G} - \underbrace{\overrightarrow{Bp(B)}}_{\in G}. \tag{28.41}$$

Donc $\overrightarrow{p(A)p(B)}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AB}$ sur F parallèlement à G. Notons Π la projection de E sur F parallèlement à G. Elle est linéaire et on a montré que pour tout couple $(A, B) \in E^2$ on a $\overrightarrow{p(A)p(B)} = \Pi(\overrightarrow{AB})$. Donc p est affine et $\overrightarrow{p} = \Pi$. □

28.1.4.3 Symétries affines

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de E, de directions respectives les sous-espaces vectoriels F et G. On suppose que $E = F \oplus G$.

Définition 28.4. Soit p la projection affine sur le sous-espace affine $\mathcal{F}$ parallèlement à $\mathcal{G}$. La symétrie affine s par rapport à $\mathcal{F}$ parallélement à $\mathcal{G}$ est telle que pour tout point $M \in E$, $s(M)$ est l'unique point $N \in E$ qui vérifie l'une des conditions équivalentes suivantes :

1. $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{Mp(M)}$;
2. $N = 2p(M) - M$;
3. $\overrightarrow{P(M)N} = -\overrightarrow{p(M)M}$;
4. $\overrightarrow{MN} \in G$ et $\frac{1}{2}(M + N) \in \mathcal{F}$.

Démonstration des équivalences. 1 est équivalent à $N - M = 2p(M) - 2M$ qui est équivalent à 2. 3 est équivalent à $N - p(M) = p(M) - M$ qui équivaut à 2.

1 implique 4, par définition de p $\overrightarrow{Mp(M)} \in G$ et G est un sous-espace vectoriel de E donc $\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{Mp(M)} \in G$. Ainsi $\frac{1}{2}(N + M) = p(M) \in \mathcal{F}$, par définition de p.

4 implique 1, en posant $I = \frac{1}{2}(M + N)$. On a $I \in \mathcal{F}$ et $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN} \in G$ donc $I = p(M)$. Et finalement $2\overrightarrow{Mp(M)} = 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{MN}$. □

Proposition 28.12. Avec les deux notations précédentes, s est une application affine et $\overrightarrow{s} = 2\overrightarrow{p} - \mathrm{Id}$ est la symétrie vectorielle par rapport F parallèlement à G.

2. pas besoin de préciser parallélement à G, car G est déterminé par $\mathcal{F}$

Démonstration. Soient A et B deux points de E. Alors

$$\overrightarrow{s(A)s(B)} = s(B) - s(A) \tag{28.42}$$
$$= 2p(B) - B - 2p(A) + A \tag{28.43}$$
$$= 2\overrightarrow{p}(\overrightarrow{AB}) - \overrightarrow{AB} \tag{28.44}$$
$$= (2\overrightarrow{p} - \mathrm{Id})(\overrightarrow{AB}). \tag{28.45}$$

Donc s est affine, et $\overrightarrow{s} = 2\overrightarrow{p} - \mathrm{Id}$. Comme $\overrightarrow{p}$ est la projection sur F parallèlement à G, $\overrightarrow{s}$ est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. □

Remarque : Si l'espace E est euclidien et si $G = F^{\perp}$, on parlera de symétrie affine orthogonale par rapport à $\mathcal{F}$. Si de plus $\mathcal{F}$ est un hyperplan, on parle de réflexion affine.

Exemple : Si $\mathcal{F} = \{\Omega\}$, alors $F = \{0\}$, $G = E$ et $\mathcal{G} = E$, s est une symétrie centrale.

28.2 Isométries du plan et de l'espace

Soit E un espace vectoriel euclidien.

28.2.1 Notion d'isométrie

Définition 28.5. On appelle isométrie de E, toute application $f \in E^E$ qui conserve la distance. Autrement dit, c'est une application f telle que pour tout points A et B de E on a $\left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.

On note $\mathbf{Is}(E)$ leur ensemble.

Théorème 28.1. *Toute isométrie f de E se décompose de manière unique sous la forme $f = t \circ g$ où t est une translation et g une application orthogonale. De plus f est affine et $\overrightarrow{f} = g$.*

Unicité. Sous réserve d'existence, si $f = t \circ g$ avec t une translation et g une application orthogonale. Alors $f(0) = t(g(0)) = t(0)$ et l'application t est une translation de vecteur $\overrightarrow{0t(0)}$. Alors $g = t^{-1} \circ f$ où t^{-1} est la translation de vecteur $\overrightarrow{t(0)0}$. Ainsi t et g sont uniques. □

Existence. Soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0t(0)}$, $t = t_{\overrightarrow{u}}$ et $g = t^{-1} \circ f$. Il faut montrer que g est orthogonale. Soient $(x, y) \in E^2$, alors

$$\|g(x) - g(y)\| = \|f(x) - f(y)\| \qquad t \text{ est une translation} \tag{28.46}$$
$$= \|x - y\|. \qquad f \text{ est une isométrie} \tag{28.47}$$
$$\tag{28.48}$$

Avec $y = 0$, on a $g(0) = t^{-1}(f(0)) = 0$, donc $\|g(x)\| = \|x\|$. Montrons que g conserve le produit scalaire : pour tout $(x, y) \in E^2$ on a

$$\langle g(x), g(y)\rangle = -\frac{1}{2}\left(\|g(x) - g(y)\|^2 - \|g(x)\|^2 - \|g(y)\|^2\right) \tag{28.49}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\|x - y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) \tag{28.50}$$
$$= \langle x, y\rangle. \tag{28.51}$$

C'est donc un automorphisme orthogonal.

Il reste à montrer que f est affine : Soient A et B deux points de E, alors

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{t(g(A))t(g(B))} \tag{28.52}$$
$$= \overrightarrow{g(A)g(B)} \qquad t \text{ est une translation} \tag{28.53}$$
$$= g(\overrightarrow{AB}). \qquad g \in \mathcal{L}(E) \tag{28.54}$$

Dela signifie que f est affine avec $\overrightarrow{f} = g$. □

Proposition 28.13. Une application affine f est une isométrie si et seulement si $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$.

Démonstration. $\Longrightarrow$: Déjà vu

$\Longleftarrow$: Si $f^{-1} \in \mathcal{O}(E)$, alors pour tout couple $(A, B) \in E^2$, on a

$$\left\|\overrightarrow{f(A)f(B)}\right\| = \left\|\overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})\right\| \tag{28.55}$$
$$= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \qquad \overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)\,. \tag{28.56}$$

Donc f est une isométrie. □

Proposition 28.14. Les isométries sont des transformations affines.

Démonstration. Soit f une isométrie. On a vu que f est affine et qu'en plus $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E) \subset \mathcal{GL}(E)$. Alors d'après la proposition **??**, f est une isométrie. □

Proposition 28.15. Les automorphismes orthogonaux sont des isométries vectorielles.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{O}(E)$. f est linéaire donc affine et $\overrightarrow{f} = f \in \mathcal{O}(E)$. Donc f est une isométrie d'après la proposition **??**. □

Proposition 28.16. La composée de deux isométries est une isométrie. La bijection réciproque d'une isométrie est aussi une isométrie. $(\mathbf{Is}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Ga}(E), \circ)$.

Démonstration. Soient f et g deux isométries. Comme f et g sont aussi affines, alors $g \circ f$ est affine avec $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$. Les applications $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ sont dans $\mathcal{O}(E)$ d'après la proposition **??**. Alors $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$, ainsi (toujours d'après la proposition **??**, $g \circ f \in \mathbf{Is}(E)$.

Soit $f \in \mathbf{Is}(E)$. f est inversible donc f^{-1} existe. De plus $f^{-1} \in \mathbf{Ga}(E)$ et $\overrightarrow{f^{-1}} = \overrightarrow{f}^{-1}$. Or $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}(E)$, donc $\overrightarrow{f}^{-1} \in \mathcal{O}(E)$ et ainsi $f^{-1} \in \mathbf{Is}(E)$ (proposition **??**).

$(\mathbf{Is}(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Ga}(E), \circ)$, en effet :

— $\mathbf{Is}(E) \subset \mathbf{Ga}(E)$;

— $\mathbf{Is}(E) \neq \emptyset$;

— pour toutes application f et g dans $\mathbf{Is}(E)$, $g \circ f^{-1} \in \mathbf{Is}(E)$.

□

Définition 28.6. On appelle déplacement de E toute isométrie f de E telle que $\overrightarrow{f} \in \mathcal{SO}(E)$. On note $\mathbf{Is}^+(E)$ l'ensemble des déplacements de E.

On appelle anti-déplacement de E toute isométrie f de E telle que $\overrightarrow{f} \in \mathcal{O}^-(E)$. On note $\mathbf{Is}^-(E)$ l'ensemble des anti-déplacements de E.

Proposition 28.17. $(\mathbf{Is}^+(E), \circ)$ est un sous-groupe de $(\mathbf{Is}(E), \circ)$. $\mathbf{Is}^-(E)$ n'est pas stable par composition.

Démonstration. Par définition $\mathbf{Is}^+(E) \subset \mathbf{Is}(E)$. $\mathbf{Is}^+(E)$ est non vide, car l'identité est un déplacement. Soient deux déplacements f et g, et

$$\overrightarrow{g \circ f^{-1}} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}^{-1}. \tag{28.57}$$

Comme $\overrightarrow{f}$ et $\overrightarrow{g}$ sont dans $\mathcal{SO}(E)$ et que $\mathcal{SO}(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}(E)$, on a bien $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}^{-1} \in \mathcal{SO}(E)$. Donc $g \circ f^{-1} \in \mathbf{Is}^+(E)$. □

Proposition 28.18. Les isométries conservent l'alignement, le parallélisme et l'orthogonalité.

Démonstration. Elles conservent l'alignement et le parallélisme car ce sont des applications affines. Soient $f \in \mathbf{Is}(E)$, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espace affines orthogonaux tels que

$$\mathcal{F} = A + F, \tag{28.58}$$

$$\mathcal{G} = B + G, \tag{28.59}$$

$$F \perp G. \tag{28.60}$$

Alors

$$f(\mathcal{F}) = f(A) + \overrightarrow{f}(F) \tag{28.61}$$

$$f(\mathcal{G}) = f(B) + \overrightarrow{f}(G). \tag{28.62}$$

Si $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in \overrightarrow{f}(F) \times \overrightarrow{f}(G)$, il existe $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) \in F \times G$ tels que $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a})$ et $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{f}(\overrightarrow{b})$. Ainsi

$$\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle = \left\langle \overrightarrow{f}(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{f}(\overrightarrow{b}) \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \right\rangle = 0. \tag{28.63}$$

Donc $\overrightarrow{f}(F) \perp \overrightarrow{f}(G)$. Les sous-espaces affines $f(\mathcal{F})$ et $f(\mathcal{G})$ sont orthogonaux. □

28.2.2 Exemples d'isométries - Réflexions affines

28.2.2.1 Translations

Les translations sont des isométries, voire même des déplacements.

28.2.2.2 Automorphismes orthogonaux

Les automorphismes orthogonaux sont des isométries.

28.2.2.3 Réflexions affines

Il s'agit des symétries affines orthogonales par rapport à un hyperplan affine. La partie linéaire d'une réflexion est une symétrie vectorielle orthogonale par rapport à un hyperplan vectoriel. Donc c'est une réflexion vectorielle.

Proposition 28.19. Soient A et B deux points distincts de E. Il existe une et une seule réflexion affine s telle que $s(a) = b$ et $s(b) = a$. C'est la réflexion par rapport à l'hyperplan affine $\mathcal{H} = I + \operatorname{Vect} \overrightarrow{AB}^{\perp}$ où I est le milieu de $[AB]$. On a aussi

$$\mathcal{H} = \{M \in E \mid MA = MB\}\,. \tag{28.64}$$

Unicité. Si s existe, soit I le milieu de $[AB]$. Puisque s conserve le barycentre donc le milieu, $s(I)$ est le mileu de $[s(A)s(B)]$. De plus comme $s(A) = B$ et $s(B) = A$ on a $s(I) = I$.

Pour tout point M de E, on a

$$\overrightarrow{s}(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{s(I)s(M)} = \overrightarrow{Is(M)}. \tag{28.65}$$

En particulier $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{IA}) = \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{s}(\overrightarrow{IB}) = \overrightarrow{IA}$. Donc $\overrightarrow{s}$ est l'unique réflexion vectorielle qui échange $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ (cf. chapitre **??**. La réflexio $\overrightarrow{s}$ est l'unique réflexion par rapport à l'hyperplan vectoriel $H = \operatorname{Vect} \overrightarrow{AB}^{\perp}$.

Pour tout vecteur $\overrightarrow{x} \in E$, on a

$$\overrightarrow{s}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{x} - 2\left\langle \overrightarrow{x}, \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\right\rangle \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}. \tag{28.66}$$

Alors pour tout point $M \in E$ on a

$$s(M) = s(I) + s(\overrightarrow{IM}) = I + \overrightarrow{IM} - 2\left\langle \overrightarrow{IM}, \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}\right\rangle \frac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} \tag{28.67}$$

$$= M - \frac{2}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}\left\langle \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}\right\rangle \overrightarrow{AB}. \tag{28.68}$$

Ce qui montre l'unicité de s. □

Existence. On définit s par :

$$\forall M \in E \quad s(M) = M - \frac{2}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}\left\langle \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}\right\rangle \overrightarrow{AB}. \tag{28.69}$$

Vérifions que s est une réflexion affine. En effet, puisque $-2\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{AB}$, on a bien $s(A) = B$ et $s(B) = A$. Et pour tout point $M \in E$

$$s(M) = M \iff \frac{-2}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2}\left\langle \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}\right\rangle \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \tag{28.70}$$

$$\iff \left\langle \overrightarrow{IM}, \overrightarrow{AB}\right\rangle = 0 \tag{28.71}$$

$$\iff \overrightarrow{IM} \in \operatorname{Vect} \overrightarrow{AB}^{\perp} \tag{28.72}$$

$$\iff M \in I + \operatorname{Vect} \overrightarrow{AB}^{\perp}. \tag{28.73}$$

s est la réflexion par rapport à $\mathcal{H} = I + \mathrm{Vect}\,\overrightarrow{AB}^{\perp}$.

$$\begin{aligned}
\forall M \in E \quad AM = BM &\iff \left\|\overrightarrow{AM}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BM}\right\|^2 && (28.74)\\
&\iff \left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BM} \right\rangle && (28.75)\\
&\iff \left\langle \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{IM} \right\rangle = \left\langle \overrightarrow{BI}, \overrightarrow{IM} \right\rangle && (28.76)\\
&\iff \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IM} \right\rangle = 0 && (28.77)\\
&\iff M \in \mathcal{H}. && (28.78)
\end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{H} = \{M \in E \mid AM = BM\}$. □

28.2.3 Déplacements du plan

Soit E_2 le plan euclidien. Si f est un déplacement du plan alors $\overrightarrow{f} \in \mathcal{SO}(E_2)$. Deux cas se présentent :

— si $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}$, alors f est une translation ;

— sinon, alors f est une "vraie" rotation avec $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) = \{0\}$.

Théorème 28.2. *Tout déplacement du plan distinct d'une translation admet un unique point invariant.*

Démonstration. Soit $f \in \mathbf{Is}\,(E_2)$, alors $\overrightarrow{f} \in \mathcal{SO}(E_2)\backslash\{\mathrm{Id}\}$. Alors $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) = \{0\}$. Pour tout point M du plan, on a

$$\begin{aligned}
f(M) = M &\iff \overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{f(O)M} && (28.79)\\
&\iff \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{f(O)O} + \overrightarrow{OM} && (28.80)\\
&\iff (\overrightarrow{f} - \mathrm{Id})(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O}. && (28.81)
\end{aligned}$$

On pose $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f} - \mathrm{Id}$. Alors $\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f}) = \mathrm{Ker}(\overrightarrow{g})$. Du coup $\overrightarrow{g}$ est injective. De plus $g \in \mathcal{L}\,(E_2)$ avec $\dim E_2 = 2 < \infty$ donc $\overrightarrow{g}$ est bijective. Finalement

$$\begin{aligned}
f(M) = M &\iff \overrightarrow{g}(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)O} && (28.82)\\
&\iff \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{g}^{-1}(\overrightarrow{f(O)O}). && (28.83)
\end{aligned}$$

L'équation admet une unique solution. □

Définition 28.7. On appelle rotation de centre A et d'angle θ le déplacemet donc l'unique point invariant A et la partie linéaire est la rotation vectorielle d'angle θ.

Proposition 28.20 (Produit de deux réflexions)**.** Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites affines du plan E_2, s et s' les réflexions par rapport à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ respectivement. Deux cas se présentent :

1. Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ sont parallèles, soit $\overrightarrow{u}$ le vecteur tel que $t_{\overrightarrow{u}}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$. Alors $s' \circ s = t_{2\overrightarrow{u}}$;

$\text{Inv}(f)$	$\text{Inv}(\overrightarrow{f})$	Nature de f	Produit de ... réflexions
$\emptyset$	E_2	vraie translation	2
singleton	$\{0\}$	vraie rotation	2
E_2	E_2	Id	0 ou 2

Tableau 28.1 – Classification des déplacements du plan

2. sinon, elles sont sécantes en A. Soit θ l'angle entre les droites[3], alors $s' \circ s = r_{A,2\theta}$.

Démonstration. C'est la conséquence des résultats obtenus sur les produits de deux réflexions vectorielles. Avec les notations du chapitre **??** on avait $S_\varphi S_{\varphi'} = R_{\varphi-\varphi'}$. □

Application : Tout déplacement du plan peut s'écrire comme un produit de deux réflexions.

1. Toute translation peut s'écrire comme le produit de deux réflexions par rapport à des droites orthognales au vecteur de translation ;
2. Toute rotation peut s'écrire comme le produit de deux réflexions par rapport à des droites concourantes en le centre de rotation.

Dans le deuxiéme cas, la première droite est quelconque et la deuxième est imposée par la première.

Démonstration. Dans le premier cas, on note $t = t_{\overrightarrow{v}}$. Soit $\mathcal{D}$ quelconque telle que $\mathcal{D} \perp \overrightarrow{v}$ et $\mathcal{D}' = t_{\overrightarrow{v}/2}(\mathcal{D})$. Alors $s' \circ s = t$.

Dans le deuxième cas, on note $r = r_{A,\alpha}$. Soit $\mathcal{D}$ passant par A et $\mathcal{D}'$ l'image de $\mathcal{D}$ par $r_{A,\alpha/2}$. Alors $s' \circ s = r$. □

Corollaire 28.20.1. *Toute isométrie du plan peut s'écrire comme un produit de réflexions.*

Démonstration. Soit $f \in \mathbf{Is}(E_2)$. Il existe une translation t et un automorphisme orthogonal g tels que $f = t \circ g$. Comme f et g s'écrivent comme le produits de réflexions alors f aussi. □

28.2.4 Déplacements de l'espace

Soit E_3 l'espace vectoriel euclidien, et soit f un déplacement de E_3. Alors $\overrightarrow{f} \in \mathcal{SO}(E_3)$. Deux cas se présentent :

— si $\overrightarrow{f} = \text{Id}$ alors f est une translation ;
— sinon $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle à axe.

Définition 28.8. On appelle rotation de l'espace, tous les déplacements qui admettent au moins un point invariant.

Proposition 28.21. Soit f un déplacement de l'espace. On suppose que $\text{Inv}(f) \notin \{\emptyset, E_3\}$[4]. Alors $\text{Inv}(f)$ est une droite affine appelée axe de la rotation.

3. défini modulo π
4. c'est-à-dire que f est une rotation mais n'est pas l'identité

Démonstration. Soit $r = \overrightarrow{f} \in \mathcal{SO}(E_3)$, $\operatorname{Inv}(r) = \mathcal{D}$, et θ l'angle de la rotation r. Soit $I \in \operatorname{Inv}(r)$. Pour tout point M de l'espace on a

$$\begin{aligned} M \in \operatorname{Inv}(r) &\iff f(M) = M && (28.84)\\ &\iff \overrightarrow{f(I)f(M)} = \overrightarrow{f(I)M} && (28.85)\\ &\iff \overrightarrow{f}(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{IM} && (28.86)\\ &\iff \overrightarrow{IM} \in \operatorname{Inv}(r) && (28.87)\\ &\iff M \in I + \mathcal{D}. && (28.88) \end{aligned}$$

Alors $\operatorname{Inv}(f)$ est la droite affine $I + \mathcal{D}$. □

Vocabulaire : Si f est un déplacement vérifiant les conditions précédentes, on dit que f est la rotation d'axe $\operatorname{Inv}(f)$ et d'angle θ où θ est l'angle de la rotation vectorielle $\overrightarrow{f}$.

Définition 28.9. On appelle vissage, tout déplacment de l'espace de la forme $v = t \circ r$, où t est une translation de vecteur $\lambda \overrightarrow{k}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ et r une rotation d'axe dirigé par $\operatorname{Vect} \overrightarrow{k}$.

Proposition 28.22 (Propriétés)**.** Les rotations affines et les translations commutent : $t \circ r = r \circ t$. En effet

$$\begin{cases} \overrightarrow{t \circ r} = \overrightarrow{t} \circ \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r} \\ \overrightarrow{r \circ t} = \overrightarrow{r} \circ \overrightarrow{t} = \overrightarrow{r} \end{cases} \tag{28.89}$$

car $\overrightarrow{t} = \operatorname{Id}$. Soit $\mathcal{D} = \Omega + \operatorname{Vect} \overrightarrow{k}$ l'axe de la rotation. Alors

$$\begin{cases} t \circ r(\Omega) = t(\Omega) = \Omega + \lambda \overrightarrow{k} \\ r \circ t(\Omega) = r(\Omega + \lambda \overrightarrow{k}) = \Omega + \lambda \overrightarrow{k}. \end{cases} \tag{28.90}$$

Ainsi $t \circ r$ et $r \circ t$ on la même partie linéaire et coïncident en un point. Elles sont égales.

Une telle décomposition est unique. Si $f = t \circ r$ où r est une rotation d'axe $\operatorname{Vect}(\overrightarrow{k})$ et t une translation de vecteur $\lambda \overrightarrow{k}$ alors $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{r}$. Donc $\operatorname{Inv} \overrightarrow{r} = \operatorname{Inv} \overrightarrow{f} = \operatorname{Vect} \overrightarrow{k}$. Le vecteur $\overrightarrow{k}$ est connu à la multiplication par un scalaire près. Pour tout point M de l'espace, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Mf(M)} &= \overrightarrow{Mt(M)} + \overrightarrow{t(M)f(M)} && (28.91)\\ &= \lambda \overrightarrow{k} + \overrightarrow{t(M)t(r(M))}. && (28.92) \end{aligned}$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{k}$ dirige l'axe de la rotation, on a $\overrightarrow{k} \perp \overrightarrow{Mr(M)}$. Ainsi $\left\langle \overrightarrow{Mf(M)}, \overrightarrow{k} \right\rangle = \lambda \left\| \overrightarrow{k} \right\|^2$.

Le scalaire λ est unique, il est déterminé par $\overrightarrow{k}$, donc le vecteur de la translation est imposé par f. La translation est unique et $r = t^{-1} \circ f$ est aussi déterminée de façon unique.

Vocabulaire : L'application $r \circ t = t \circ r$ est un vissage où :

— r est une rotation d'axe $\mathcal{D}$ (dirigée par $\overrightarrow{k}$) d'angle θ ;
— t est une translation de vecteur $\lambda\overrightarrow{k}$;
— l'axe du vissage est $\mathcal{D}$;
— le vecteur du vissage est $\lambda\overrightarrow{k}$;
— l'angle du vissage est θ.

Cas particuliers : Si $\lambda = 0$, le vissage est une rotation ; et si $r = \mathrm{Id}$, le vissage est une translation.

Lemme 28.1. *Soit r une "vraie" rotation de l'espace d'axe $\mathcal{D}$ dirigé par D. Soit $t \neq \mathrm{Id}$ une translation de vecteur $\overrightarrow{a}$ où $\overrightarrow{a} \in D^{\perp}$. Alors $t \circ r$ est une rotation d'axe D' parallèle à D.*

Démonstration. Notons $\mathcal{D} = I + D$ l'axe de la rotation r, $\overrightarrow{a} \in D^{\perp}$ le vecteur de la translation t et $g = t \circ r$. Soit $J = g(I) = t(I)$, alors $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{t}$.

Trouvons $\mathrm{Inv}(g)$. Pour tout point $M \in E_3$,

$$
\begin{aligned}
M = g(M) &\iff \overrightarrow{g(I)M} = \overrightarrow{g(I)g(M)} && (28.93)\\
&\iff \overrightarrow{JM} = \overrightarrow{g}(\overrightarrow{IM}) && (28.94)\\
&\iff (\overrightarrow{g} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})(\overrightarrow{IM}) = \overrightarrow{JI} = -\overrightarrow{a}. && (28.95)
\end{aligned}
$$

Alors r est la rotation d'axe de D et D est invariante par r, donc stable par $\overrightarrow{r}$. $D^{\perp}$ est aussi stable par $\overrightarrow{r}$. Soit $\overrightarrow{r_0}$ la restriction de $\overrightarrow{r}$ à $D^{\perp}$. Alors $\overrightarrow{r_0}$ est une rotation du plan $D^{\perp}$. Alors

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Inv}(\overrightarrow{r_0}) &= \{0\} && (28.96)\\
\ker(\overrightarrow{r_0} - \mathrm{Id}_{D^{\perp}}) &= \{0\}. && (28.97)
\end{aligned}
$$

$\overrightarrow{r_0} - \mathrm{Id}_{D^{\perp}}$ est un endomorphisme injectif du plan $D^{\perp}$, donc $\overrightarrow{r_0} - \mathrm{Id}_{D^{\perp}}$ est bijectif. Alors, a fortiori, $\overrightarrow{r_0} - \mathrm{Id}_{D^{\perp}}$ est surjectif.

$-\overrightarrow{a} \in D^{\perp}$, alors il existe un vecteur $\overrightarrow{b} \in D^{\perp}$ tel que $(\overrightarrow{r_0} - \mathrm{Id}_{D^{\perp}})(\overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{a}$ [5]. De plus on a $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{g}$, alors $(\overrightarrow{r} - \mathrm{Id}_{E_3})(\overrightarrow{b}) = -\overrightarrow{a}$. Si on revient à $\mathrm{Inv}(g)$ alors on a

$$
\begin{aligned}
M = g(M) &\iff (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})(\overrightarrow{IM}) = (\overrightarrow{r} - \mathrm{Id})(\overrightarrow{b}) && (28.98)\\
&\iff (\overrightarrow{r} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0} && (28.99)\\
&\iff \overrightarrow{IM} - \overrightarrow{b} \in \mathrm{Ker}(\overrightarrow{r} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}) = \mathrm{Inv}(\overrightarrow{r}) = D && (28.100)\\
&\iff M \in I + D + \overrightarrow{b} = \mathcal{D}. && (28.101)
\end{aligned}
$$

De plus $\overrightarrow{b} \perp \mathcal{D}' = \mathcal{D} + \overrightarrow{b}$ [6], donc g est une rotation d'axe $\mathcal{D}'$. □

Théorème 28.3. *Les déplacements de l'espace sont des vissages.*

Démonstration. On sait déjà que les vissage sont des déplacements. Montrons que si f est un déplacement alors f est un vissage.

Soit f un déplacement de l'espace E_3. Alors $\overrightarrow{f} \in \mathcal{SO}(E_3)$.

— Soit $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}$ et alors f est une translation donc un vissage particulier ;

5. $\overrightarrow{r_0} - \mathrm{Id}_{D^{\perp}}$ est surjectif
6. droite affine parallèle à $\mathcal{D}$

$\mathrm{Inv}(f)$	$\mathrm{Inv}(\overrightarrow{f})$	Nature de f	Produit de ... réflexions
$\emptyset$	E_3	vraie translation	2
$\emptyset$	D	vraie vissage	4
$\mathcal{D}$	D	vraie rotation	2
E_3	E_3	Id	0

TABLEAU 28.2 – Classification des déplacements de l'espace

— soit f est une vraie rotation et alors $\overrightarrow{f}$ est la rotation vectorielle d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle θ.

Dans le deuxième cas, pour tout point $M \in E_3$, on a

$$f(M) = f(O) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}) \tag{28.102}$$

$$Of(\overrightarrow{M}) = Of(\overrightarrow{O}) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{OM}). \tag{28.103}$$

$f = t_{\overrightarrow{Of(O)}} \circ \overrightarrow{f}$ est bien une rotation composée avec une translation, mais ce n'est pa un vissage car le vecteur de la translation n'est pas colinéaire à l'axe de la rotation.

On sait que $E_3 = D \oplus D^{\perp}$, donc il existe un unique couple $(\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2) \in D \times D^{\perp}$ tel que $t_{\overrightarrow{Of(O)}} = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ t_{\overrightarrow{u}_2}$. C'est-à-dire que $f = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ (t_{\overrightarrow{u}_2} \circ \overrightarrow{f})$. Deux cas se présentent :

— si $\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{0}$ alors $f = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ \overrightarrow{f}$ avec $\overrightarrow{u}_1$ colinéaire à l'axe de $\overrightarrow{f}$;

— sinon, on applique le lemme à $t_{\overrightarrow{u}_1}$ et f ($\overrightarrow{u}_2$ est colinéaire à l'axe de $\overrightarrow{f}$) alors $g = t_{\overrightarrow{u}_2} \circ \overrightarrow{f}$ est une rotation d'axe parallèle à D et $f = t_{\overrightarrow{u}_1} \circ g$ esr un vissage.

□

Composée de réflexions : Soient Pr et Pr′ deux plans affines de l'espace, s et s' les réflexions respectives par rapport à Pr et Pr′. Deux cas se présentent à nous :

— si Pr et Pr′ sont parallèles alors il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $t_{\overrightarrow{u}}(\mathrm{Pr}) = \mathrm{Pr}'$ et donc $s' \circ s = t_{2\overrightarrow{u}}$;

— sinon ils sont sécant selon une droite $\mathcal{D}$ et alors il existe une rotation r telle que $\mathrm{Pr}' = r(\mathrm{Pr})$, c'est la rotation d'angle θ et d'axe $\mathcal{D}$ et donc $s' \circ s$ est la rotation d'axe $\mathcal{D}$ et d'angle 2θ.

Application : Tout déplacement de l'espace est composé de 0, 2 ou 4 réflexions.

Corollaire 28.22.1. *Toute isométrie f de l'espace est un produit de réflexions.*

Démonstration. Soit f une isométrie. On a vu qu'elle se décompose de manière unique en produit d'une translation t et d'une application orthogonale g (théorème **??**). Une translation est un produit de réflexions et g est aussi un produit de réflexions (théorème **??**). □

28.3 Similitudes directes du plan

Soit E_2 le plan vectoriel euclidien.

28.3.1 Notion de similitude affine

Définition 28.10. On appelle similitude affine de E_2 toute transformation affine de E_2 qui multiplie les distances par un rapport $\lambda \in]0\,;+\infty[$.

$\sigma \in E_2^{E_2}$ est une similitude affine de rapport λ si et seulement si $\sigma \in \mathbf{Ga}\,(E_2)$ et si pour tous points M et N de E_2 on a $\sigma(M)\sigma(N) = \lambda MN$.

Les homothéties sont un exemple pertinent de similitude affine du plan.

Définition 28.11. Soit v une similitude de E_2, alors $\overrightarrow{v} \in \mathcal{GL}\,(E_2)$ et on dit que v est directe si $\mathrm{Det}(\overrightarrow{v}) > 0$ et qu'elle est indirecte si $\mathrm{Det}(\overrightarrow{v}) < 0$.

On note $\mathbf{Sim}\,(E_2)$ l'ensemble des similitudes de E_2, $\mathbf{Sim}^+\,(E_2)$ l'ensemble des similitudes directes de E_2 et $\mathbf{Sim}^{-1}\,(E_2)$ l'ensemble des similitudes indirectes de E_2.

Proposition 28.23. $(\mathbf{Sim}\,(E_2)\,,\circ)$ et $(\mathbf{Sim}^+\,(E_2)\,,\circ)$ sont des sous-groupes de $(\mathbf{Ga}\,(E_2)\,,\circ)$. Par contre $\mathbf{Sim}^{-1}\,(E_2)$ n'est pas stable.

28.3.2 Décomposition des similitudes

Théorème 28.4. *Toute similitude (directe) du plan peut se décomposer d'une infinité de manière sous la forme : $\sigma = h \circ f = f' \circ h'$ où h et h' sont des homothéties de rapport positif. f et f' sont des isométries (déplacements) si λ est le rapport de la similitude : $\overrightarrow{\sigma} = \lambda \overrightarrow{f} = \lambda \overrightarrow{f'}$.*

Démonstration. Soit λ le rapport de σ. Soit h l'homothétie de rapport λ, alors $f = h^{-1} \circ \sigma$ est une isométrie. De même si h' est une homothétie de rapport λ, $f = \sigma \circ h'^{-1}$ est une isométrie.

Si de plus σ est une similitude directe, alors

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{f}) = \mathrm{Det}(h^{-1})\,\mathrm{Det}(\overrightarrow{\sigma}) \tag{28.104}$$

$$= \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 \mathrm{Det}(\sigma) > 0. \tag{28.105}$$

Donc $\overrightarrow{f} \in \mathcal{SO}(E_2)$ et donc f est un déplacement. On démontre de la même manière que f' est aussi un déplacement. ☐

28.3.3 Propriétés des similitudes directes

Proposition 28.24. Les similitudes directes conservent les angles orientés.

$$\forall \sigma \in \mathbf{Sim}^+\,(E_2)\;\; \forall (A,B,C,D) \in E_2^4 \quad (\overrightarrow{\sigma(A)\sigma(B)}, \overrightarrow{\sigma(C)\sigma(D)}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}). \tag{28.106}$$

Remarque : Les similitudes indirectes changent le signe des angles orientés.

Démonstration. Une similitude directe est composée d'une homothétie et d'un déplacement. Les homothéties et les déplacements conservent les angles orientés. Par conséquent les similitudes directes conservent aussi les angles orientés. ☐

Proposition 28.25. Les similitudes directes sont représentées par

$$\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b \end{array} \right. \qquad (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}. \tag{28.107}$$

Démonstration. $\Longleftarrow$: Si σ est représentée par $\varphi\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az+b \end{array}\right.$ avec $(a,b)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}$, alors σ est une transformation affine qui multiplie les distances par $|a|$. La partie linéaire de σ est représentée par

$$\overrightarrow{\sigma}(z) = az = \Re(a)\Re(z) - \Im(a)\Im(z) + \mathrm{i}(\Im(a)\Re(z) + \Re(a)\Im(z)). \qquad (28.108)$$

Alors on a $\mathrm{Mat}(\overrightarrow{\sigma}) = \begin{pmatrix} \Re(a) & -\Im(a) \\ \Im(a) & \Re(a) \end{pmatrix}$ et alors $\mathrm{Det}(\sigma) = |a|^2 > 0$. Finalement σ est directe.

$\Longrightarrow$: Soit σ une homothétie de rapport $\lambda > 0$. On peut écrire σ sous la forme $\sigma = h\circ f$ avec h une homothétie de rapport λ et f un déplacement du plan. Alors $\overrightarrow{\sigma} = \overrightarrow{h}\circ\overrightarrow{f}$, avec $\overrightarrow{f}\in\mathcal{SO}(E_2)$ donc :

— soit $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}$ et alors $\overrightarrow{\sigma} = \lambda\,\mathrm{Id}$ et alors σ est représenté par $az+b$;

— soit f est une vraie rotation et on peut représenter $\overrightarrow{\sigma}$ par $z\longmapsto z\exp\mathrm{i}\,\theta$, donc on peut représenter $\overrightarrow{\sigma}$ par $z\longmapsto az+b$.

Vérifons les invariants :

$$\forall M(z)\in E_2 \quad \sigma(M) = M \iff z(1-a) = b \qquad (28.109)$$
$$a=1, b=0 \quad \mathrm{Inv}(\sigma) = \emptyset \qquad (28.110)$$
$$a=1, b\neq 0 \quad \mathrm{Inv}(\sigma) = E_2 \qquad (28.111)$$
$$a\neq 1 \quad \mathrm{Inv}(\sigma) = \Omega\left(\frac{b}{1-a}\right). \qquad (28.112)$$

□

Soit σ une similitude directe qui n'est pas une translation. Le point Ω est son unique point fixe et λ est son rapport. Soit h l'homothétie de centre Ω de rapport λ. Il existe un déplacement f tel que $\sigma = h\circ f$. Deux cas se présentent :

— si $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}$ alors f est une translation et elle n'a pas de point fixe ;

— sinon, alors f est une vraie rotation et admet un point fixe Ω. en effet

$$f(\Omega) = h^{-1}\circ\sigma(\Omega) = h^{-1}(\Omega) = \Omega. \qquad (28.113)$$

Notons θ l'angle de f et Ω le centre de σ.

Proposition 28.26. Pour tous points A, B, A', B' tels que $A\neq B$ et $A'\neq B'$ il existe une unique similitude directe $\sigma\in\mathbf{Sim}^+(E_2)$ telle que $\sigma(A) = A'$ et $\sigma(B) = B'$.

Démonstration. σ est une similitude directe du plan si et seulement s'il existe un réel strictement positif λ, un réel θ et un complexe c tel que pour tout complexe z on a

$$\sigma(z) = \lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,z + c. \qquad (28.114)$$

Si on note a, a', b et b' les affixes respectives de A, A', B et B' on a

$$\begin{cases}\sigma(A) = A' \\ \sigma(B) = B'\end{cases} \iff \begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,a + c = a' \\ \lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}\,b + c = b'\end{cases} \qquad (28.115)$$

$$\iff \begin{cases}\lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta} = \frac{a'-b'}{a-b} \\ c = \frac{ba'-ab'}{b-a}\end{cases}. \qquad (28.116)$$

Le complexe c est unique, $\lambda = \left|\frac{a'-b'}{a-b}\right|$ est unique et $\theta = \arg\left(\frac{a'-b'}{a-b}\right)$ est unique. Donc la similitude est unique. □

Chapitre 29

Fonctions de deux variables réelles

Sommaire

29.1 Espace $\mathbb{R}^2$ – Normes

29.1.1 Normes

29.1.1.1 Définition

Définition 29.1. Soit E un espace vectoriel réel. On appelle norme sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les quatre points suivants :

1. Positivité : pour tout $x \in E$, $N(x) \geq 0$;
2. Séparation : pour tout $x \in E$, $N(x) = 0$ si et seulement $x = 0$;
3. Homogénéité : pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$;
4. Inégalité triangulaire : pour tout $(x, y) \in E^2$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$.

Exemples : La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$. L'application $N : f \longmapsto \sup_{[a\,;b]} |f|$ est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{C}(ab\,; , \mathbb{R},)$.

Définition 29.2. Si N est une norme sur l'espace vectoriel réel E, (E, N) est appelé espace vectoriel normé.

29.1.1.2 Norme usuelle sur $\mathbb{R}^2$

Proposition 29.1. Si pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on pose $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ et $\|x\|_\infty (x) = \max(|x_1|, |x_2|)$, alors $\|\|_2$ et $\|\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. On sait déjà que $\|\|_2$ est une norme, puisque c'est la norme euclidienne associée au produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$. Pour $\|\|_\infty$, la positivité, la séparation, l'homogénéité sont faciles à démontrer. Pour montrer l'inégalité triangulaire il suffit de remarquer :

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\,, \tag{29.1}$$

$$|y_1 + y_2| \leq |y_1| + |y_2| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty\,, \tag{29.2}$$

alors $\|x+y\|_\infty = \max(|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|) \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. □

29.1.1.3 Normes équivalentes

Définition 29.3. Soient N_1 et N_2 deux normes sur le même $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux réels α et β strictements positifs tels que pour tout $x \in E$ on a

$$\alpha N_1(x) \leq N_2(x) \neq \beta N_1(x). \tag{29.3}$$

La relation « être équivalente à » sur l'ensemble des normes de E est une relation réflexive, symétrique et transitive : c'est donc une véritable relation d'équivalence.

Proposition 29.2. Les normes $\|\|_2$ et $\|\|_\infty$ sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ sont équivalentes :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2 \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|x\|_\infty\,. \tag{29.4}$$

Démonstration. Soit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$0 \leq \|x\|_2^2 = x_1^2 + x_2^2 \leq 2\,\|x\|_\infty\,. \tag{29.5}$$

Alors

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{2}\,\|x\|_\infty\,, \tag{29.6}$$

et comme $|x_1| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $|x_2| \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ on a bien $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2$. □

Remarque : On peut montrer que toutes les normes d'un espace vectoriel *de dimension finie* sont équivalentes.

29.1.2 Parties bornées

Définition 29.4. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$ et $r \in]0\,;+\infty[$. On appelle

1. boule fermée de centre a et de rayon r l'ensemble
$$\overline{B}\left(a, r\right) = \{x \in E \mid N(x-a) \leq r\}\,; \tag{29.7}$$
2. boule ouverte de centre a et de rayon r l'ensemble
$$B(a, r) = \{x \in E \mid N(x-a) < r\}\,; \tag{29.8}$$
3. sphére de centre a et de rayon r l'ensemble
$$S(a, r) = \{x \in E \mid N(x-a) = r\}\,. \tag{29.9}$$

Théorème 29.1. *Soient N_1 et N_2 deux normes équivalentes sur un même $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. Il existe alors des réels strictement positif λ et μ tels que pour tout $x \in E$ on ait*
$$\lambda N_1(x) \leq \mathbb{N}_2(x) \leq \mu N_1(x). \tag{29.10}$$
Alors
$$\forall (a, r) \in E \times]0\,;+\infty[\quad \overline{B}_1\left(a, \frac{r}{\mu}\right) \leq \overline{B}_2\left(a, r\right) \leq \overline{B}_1\left(a, \frac{r}{\lambda}\right), \tag{29.11}$$
où $\overline{B_1}$ ($\overline{B_2}$) désigne la boule fermé au sens de N_1 (N_2).

Démonstration. Soit $x \in E$. Si $x \in \overline{B}_1\left(a, \frac{r}{\mu}\right)$, alors $N_1(x-a) \leq \frac{r}{\mu}$, d'où
$$N_2(x-a) \leq \mu N_1(x-a) \leq \mu \frac{r}{\mu} = r. \tag{29.12}$$
Donc $x \in \overline{B}_2\left(a, r\right)$.

Si $x \in \overline{B}_2\left(a, r\right)$ alors $N_2(x-a) \leq r$ et alors $N_1(x-a) \leq \frac{1}{\lambda} N_2(x-a) \leq \frac{r}{\lambda}$. Alors $x \in \overline{B}_1\left(a, \frac{r}{\lambda}\right)$. □

Cela signifie que si N_1 et N_2 sont équivalentes, alors toute boule pour N_2 est incluse dans une boule pour N_1, et contient une boule pour N_1.

Définition 29.5. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, on dit que A est une partie bornée de E (pour la norme N) lorsqu'il existe $M \in [0\,;+\infty[$ tel que pour tout $x \in A$ on a $N(x) \leq M$.

Définition 29.6 (Définition équivalente)**.** Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, alors
$$A \text{ est une partie bornée de } E \iff \exists a \in E\ \exists r \in]0\,;+\infty[\quad A \subset \overline{B}\left(a, r\right). \tag{29.13}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Pour tout $x \in A$, $N(x) \leq M$ donc $N(x-0) \leq M+1$. Ainsi $x \in \overline{B}\left(0, M+1\right)$.

$\Longleftarrow$ Pour tout $x \in A$, $N(x-a) \leq r$, alors $N(x) \leq N(x-a) + N(a) \leq r + N(a) = M$. □

Proposition 29.3. Si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel normée E, alors les parties bornées de (E, N_1) sont les parties bornées de (E, N_2).

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ une partie bornée au sens de N_1. Alors il existe une boule fermée pour N_1 qui contient A. Les normes N_1 et N_2 sont équivalentes, alors cette boule fermé pour N_1 est incluse dans une autre boule fermée pour N_2. Donc A est contenue dans une boule fermée pour N_2. Ainsi A est une partie bornée pour N_2. On peut interchanger les rôles de N_1 et N_2. ☐

Propriétés :
— L'intesection de deux parties bornées de E est une partie partie bornée de E ;
— l'union de deux parties bornées de E est une partie partie bornée de E.

29.1.3 Voisinages et parties ouvertes

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

29.1.3.1 Voisinages

Définition 29.7. Soit $a \in E$ et $\mathcal{V} \in \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{V}$ est un voisinage de a de E s'il existe un $r \in]0\,;+\infty[$ tel que $B(a, r) \subset \mathcal{V}$.

Propriétés :
— Toute partie de E contenant un voisinage de $a \in E$ est encore un voisinage de a ;
— l'ensemble des voisinages d'un point $a \in E$ est stable par intersection *finie* et réunion quelconque.

Soit pour tout naturel n, $I_n = \left]\frac{-1}{n+1}\,;\frac{1}{n+1}\right[$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{0\}$. Pour tout naturel n, I_n est un voisinage de zéro mais pas l'intersection.

Remarque : On peut montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes de E, alors les voisinages de a de (E, N_1) et les voisinages de a de (E, N_2) sont les mêmes.

29.1.3.2 Parties ouvertes

Définition 29.8. Soit $\mathfrak{O} \in \mathcal{P}(E)$. On dit que θ est une partie ouverte de E si et seulement s'il est voisinage de chacun de ses points.

Autrement dit : Soit $\mathfrak{O} \in \mathcal{P}(E)$,

$$\mathfrak{O} \text{ est ouvert } \iff \forall a \in \mathfrak{O}\ \exists r \in]0\,;+\infty[\quad B(a, r) \subset \mathfrak{O}. \tag{29.14}$$

On note $\mathfrak{O}(E)$ l'ensemble des ouverts de E.

Proposition 29.4.
1. $E \in \mathfrak{O}(E)$;
2. $\emptyset \in \mathfrak{O}(E)$;
3. $\mathfrak{O}(E)$ est stable par intersection finie ;
4. $\mathfrak{O}(E)$ est stable par union quelconque.

Proposition 29.5 (Admise)**.** Si N_1 et N_2 sont des normes équivalentes sur E, les ouverts de (E, N_1) sont les mêmes que (E, N_2).

Exemples usuels :

1. Dans $\mathbb{R}$, les intervalles $]a\,;b[$ sont des ouverts ;
2. dans $\mathbb{R}^2$, les rectangles $]a\,;b[\times]c\,;d[$ sont des ouverts ;
3. toute boule ouverte d'un espace vectoriel normé est un ouvert.

29.1.4 Parties fermées – Points adhérents

Définition 29.9. On appelle fermé ou partie fermée de l'espace vectoriel normé (E, N) toute partie F de E dont le complémentaire dans E est un ouvert.

On note $\mathcal{F}(E)$ l'ensemble des fermés de E. On a donc

$$\forall F \in \mathcal{P}(E) \quad F \in \mathcal{F}(E) \iff E \setminus F \in \mathfrak{O}(E). \tag{29.15}$$

Proposition 29.6.

1. $\emptyset \in \mathcal{F}(E)$;
2. $E \in \mathcal{F}(E)$;
3. $\mathcal{F}(E)$ est stable par intersection quelconque et par union finie.

Exemples : Les singletons et même toutes les parties finies de E sont des fermés.

Définition 29.10. Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $x \in E$. On dit que le point x est adhérent à la partie A si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists a \in A \quad N(x-a) \leq \epsilon. \tag{29.16}$$

Remarque : Soit $A \in \mathcal{P}(E)$, alors tous les points de A sont adhérents à A.

Définition 29.11 (Définition équivalente)**.** Soit $x \in E$. x est adhérant à A si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$, $A \cap B(x, \epsilon) \neq \emptyset$.

On note $\overline{A}$ l'ensemble des point adhérents à la partie A. On a toujours $A \subset \overline{A}$.

Proposition 29.7. Soit $F \in \mathcal{P}(E)$, F est fermé si et seulement si $F = \overline{F}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
F \notin \mathcal{F}(E) &\iff E \setminus F \notin \mathfrak{O}(E) && (29.17)\\
&\iff \exists a \in E \setminus F\ \forall r \in]0\,;+\infty[\quad B(a,r) \not\subset E \setminus F && (29.18)\\
&\iff \exists a \in E \setminus F\ \forall r \in]0\,;+\infty[\quad B(a,r) \cap F \neq \emptyset && (29.19)\\
&\iff \exists a \in E \setminus F\ a \text{ est adhérent à } F. && (29.20)
\end{aligned}$$

On a montré que F est non fermé si et seulement s'il existe un point adhérent à F qui n'est pas dans F, c'est-à-dire $\overline{F} \not\subset F$. Par contraposée,

$$\begin{aligned}
F \text{ est fermé} &\iff \overline{F} \subset F && (29.21)\\
&\iff \overline{F} = F. && (29.22)
\end{aligned}$$

□

29.2 Limites et continuité des fonctions de deux variables réelles

Soient $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|.\| = \|.\|_2$ et A une partie non vide de E. On s'intéresse à l'ensemble des aplications de A vers $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^A = \mathcal{F}(A,\mathbb{R})$. On sait que $(\mathcal{F}(A,\mathbb{R}),+,\perp)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $(\mathcal{F}(A,\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau commutatif non-intègre. On note $\mathfrak{U}(()\,A) = \{f \in \mathcal{F}(A,\mathbb{R}) \mid 0 \in f(A)\}$ l'ensemble des inversibles de A.

29.2.1 Applications partielles

Soit $a = (a_1, a_2) \in A$. Notons $A_{a,1} = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, a_2) \in A\}$ et $A_{a,2} = \{x_2 \in \mathbb{R} \mid (a_1, x_2) \in A\}$. Soit $f \in \mathbb{R}^A$, on définit :

$$\varphi_{a,1}\colon \left\{ \begin{array}{ccc} A_{a,1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x_1 & \longmapsto & f(x_1, a_2) \end{array} \right. , \tag{29.23}$$

$$\varphi_{a,2}\colon \left\{ \begin{array}{ccc} A_{a,2} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x_2 & \longmapsto & f(a_1, x_2) \end{array} \right. . \tag{29.24}$$

$\varphi_{a,1}$ ($\varphi_{a,2}$) est la première (deuxième) application partielle de f au point a.

29.2.2 Limites et continuité en un point

Soient A une partie no vide de E, a un point de adhérent à A et $f \in \mathbb{R}^A$.

29.2.2.1 Limites en un point

Définition 29.12. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f admet ℓ pour limite au point a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0\ \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \implies |f(x) - \ell| \leq \epsilon. \tag{29.25}$$

On note $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $\ell = \lim\limits_{a} f$.

Définition 29.13 (Définition équivalente avec les voisinages)**.**

$$\ell = \lim_a f \iff \forall V \in \mathcal{V}(\ell)\ \exists U \in \mathcal{V}(a)\ \forall x \in A \quad x \in U \implies f(x) \in V. \tag{29.26}$$

On montre l'unicité de la limite exactement comme pour les fonction d'une seule variable réelle : Par l'absurde supposons que f admet en a deux limites distinctes ℓ_1 et ℓ_2. Soit $\epsilon = \frac{|\ell_1 - \ell_2|}{3}$. Alors il existe η_1 et η_2 strictement positif tels que pour tout $x \in A$:

$$\|x - a\| \leq \eta_1 \implies |f(x) - \ell_1| \leq \epsilon, \tag{29.27}$$

$$\|x - a\| \leq \eta_2 \implies |f(x) - \ell_2| \leq \epsilon. \tag{29.28}$$

On définit $\eta_0 = \min(\eta_1, \eta_2)$ et soit $x \in A \cap B(a, \eta_0)$, alors

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2| \tag{29.29}$$

$$\leq 2\epsilon = \frac{2}{3} |\ell_1 - \ell_2| . \tag{29.30}$$

Ce qui est absurde. Donc $\ell_1 = \ell_2$.

Remarque : On peut montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes, alors f admet une limite en a dans (E, N_1) si et seulement si elle admet une limite en a dans (E, N_2), et ces limits sont égales.

Proposition 29.8. On suppose que f admet une limite ℓ en $a = (a_1, a_2)$. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ qui vérifient $\lim x_n = a_1$ et $\lim y_n = a_2$. Alors $\lim f(x_n, y_n) = \ell$.

Démonstration. La démonstration est identique à celle d'une fonction de la variable réelle. □

Ce résultat sert à nier "$f(x) \to \ell$" en exhibant une droite $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n, y_n) \not\to \ell$. Cela servira à montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point.

29.2.2.2 Continiuté en un point

Définition 29.14. Soient $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $f \in \mathbb{R}^A$ et $a \in A$. La fonction f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{a} f = f(a)$ existe.

Exemples :

1. Soient $p_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_1 \end{array} \right.$ et $p_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & x_2 \end{array} \right.$ les projecteurs canoniques de $\mathbb{R}^2$. Ces applications sont continues en tout point. En effet,
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \quad |p_1(x) - p_1(y)| = |x_1 - y_1| \leq \|x - y\| . \tag{29.31}$$
Il suffit de prendre $\eta = \epsilon$ dans la définition.
2. Les applications polynomiales de deux variables sont continues.

Proposition 29.9. Soient $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, $a \in A$ et $f \in \mathbb{R}^A$. Si f est continue au voisinage de A, alors elle est bornée au voisinage de a. Autrement dit
$$\exists M \in [0\,;+\infty[\ \exists r \in [0\,;+\infty[\ \forall a \in A \quad x \in B(a, r) \implies |f(x)| \leq M. \tag{29.32}$$

Démonstration. Écrivons la définition de la continuité en a avec $\epsilon = 1$:
$$\exists \eta \in]0\,;+\infty[\ \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq 1 \tag{29.33}$$
$$\exists \eta \in]0\,;+\infty[\ \forall x \in A \quad x \in B(a, \eta) \implies |f(x)| \leq 1 + |f(a)| . \tag{29.34}$$

En posant $M = f(a) + 1$, alors f est bornée par M. □

29.2.2.3 Continuité de f et continuité des applications partielles

Proposition 29.10. Soient $A \subset \mathbb{R}^2$, $a \in A$ et $f \in \mathbb{R}^A$. Si f est continue en $a = (a_1, a_2)$ et si les applications partielles $\varphi_{a,1}$ et $\varphi_{a,2}$ sont respectivement définies au voisinage de a_1 et a_2, alors elles sont respectivement continues en a_1 et a_2.

Démonstration. On démontre le résultat pour $\varphi_{a,1}$. Soit $A_{a,1} = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, a_2) \in A\}$. Soit

$$\varphi_{a,1} \colon \left\{ \begin{array}{ccc} A_{a,1} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x_1 & \longmapsto & f(x_1, a_2) \end{array} \right. . \tag{29.35}$$

La fonction f est continue en a :

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \implies |f(x) - f(a)| \leq \epsilon. \tag{29.36}$$

Soit $x_1 \in A_{a,1}$, $|x_1 - a_1| \leq \eta$. Alors

$$\|(x_1, a_2) - (a_1, a_2)\| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (a_2 - a_2)^2} = |x_1 - a_1| \leq \eta. \tag{29.37}$$

Donc $|f(x_1, a_2) - f(a_1, a_2)| \leq \epsilon$. C'est-à-dire $|\varphi_{a,1}(x_1) - \varphi_{a,1}(a_1)| \leq \epsilon$. Alors $\varphi_{a,1}$ est continue en a_1. De même pour $\varphi_{a,2}$. $\square$

La réciproque est fausse. En effet, soit $f \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array} \right.$.
Les application $\varphi_{0,1}$ et $\varphi_{0,2}$ sont constantes nulles donc continues. Cependant pour tout naturel n non nul $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}$ qui ne tend pas vers zéro. Alors f n'est pas continue en zéro.

Retenir que la continuité de f implique la continuité des applications partielles et que la réciproque est fausse*.*

29.2.2.4 Espace vectoriel et anneau $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$

Définition 29.15. Soient $A \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathbb{R}^A$. On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A. On note $\mathcal{C}(A, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de A vers $\mathbb{R}$ continues sur A.

Proposition 29.11. $(\mathcal{C}(A, \mathbb{R}), +, \perp)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $(\mathcal{C}(A, \mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau commutatif non intègre. L'ensemble des inversibles de cet anneau est $\mathfrak{U}(\mathcal{C}(A, \mathbb{R})) = \{f \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}) \mid 0 \notin f(A)\}$.

Démonstration. La démonstration est identique à celle pour les fonctions d'une variable réelle. $\square$

29.2.3 Généralisation aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Définition 29.16. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \longmapsto \mathbb{R}^2$. On appelle applications coordonnées de f les applications $f_1 : A \longmapsto \mathbb{R}$ et $f_2 : A \longmapsto \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in A \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x)). \tag{29.38}$$

Définition 29.17. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \longmapsto \mathbb{R}^2$ et $a \in A$. On dit que f est continue en a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x \in A \quad \|x - a\| \leq \eta \implies \|f(x) - f(a)\| \leq \epsilon. \tag{29.39}$$

Proposition 29.12. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$, $f : A \longmapsto \mathbb{R}^2$ et $a \in A$. La fonction f est continue en a si et seulement si les applications coordonnées de f sont continues en a.

Ne pas confondre applications partielles et applications coordonnées. La continuité de $f : A \to \mathbb{R}^2$ équivaut à la continuité de ses applications coorodonnées tandis qur $g : A \to \mathbb{R}$ peut avoir des applications partielles continues sans être continue.

29.2.4 Composée de fonctions continues

Théorème 29.2. *Soient $A \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$ et $p \in \{1, 2\}$. Soient $f : A \to B$ et $g : B \to \mathbb{R}^p$. Soeint $a \in A$ et $b = f(a) \in B$. Si f est continue en a et g continue en b alors $g \circ f$ est continue en a.*

Par conséquent, si f est continue sur A et g continue sur B alors $g \circ f$ est continue sur A.

29.3 Calcul différentiel

29.3.1 Dérivée en un point selon un vecteur

29.3.1.1 Définition de la dérivée en un point selon un vecteur

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in U$ et $f \in \mathbb{R}^U$. Pour tout $h > 0$, on s'intéresse à l'application $t \longmapsto f(a + th)$. U est un ouvert, $a \in U$ et f est définie sur U donc f est définie au voisinage de a.

Pour tout t au voisinage de 0, $a+th$ est au voisinage de a donc $t \longmapsto f(a+th)$ est définie au voisinage de zéro. Plus concrétement, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} \quad a + th \in B(a, r) &\iff \|(a + th) - a\| \leq r &(29.40)\\ &\iff |t|\,\|h\| \leq r. &(29.41)\end{aligned}$$

Si $h = (0, 0)$, alors $t \longmapsto f(a+th)$ est définie sur $\mathbb{R}$. Sinon, $a+th \in B(a, r) \iff |t| \leq \frac{r}{\|h\|}$. L'application $t \longmapsto f(a + th)$ est définie au moins sur $\left]\frac{-r}{\|h\|}\,;\frac{r}{\|h\|}\right[$. Dans tous les cas, il existe $\delta > 0$ tel que $\Psi_h : t \longmapsto f(a + th)$ soit définie au moins sur $]-\delta\,;\delta[$.

Il est légitime de se demander si $\Psi_h\colon \left\{\begin{array}{ccc}]-\delta\,;\delta[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(a+th)\end{array}\right.$ est dérivable en zéro.

Définition 29.18. Si Ψ_h est dérivable, on dit que f admet une dérivée en a selon le vecteur h et on note

$$D_h f(a) = \Psi'_h(0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}. \tag{29.42}$$

29.3.1.2 Dérivée partielle première

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in U$ et $f \in \mathbb{R}^U$. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Définition 29.19. Sous réserve d'existence de $D_h f(a)$ pou $h \in \{e_1, e_2\}$, on pose :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = D_{e_1} f(a); \tag{29.43}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = D_{e_2} f(a). \tag{29.44}$$

$$\tag{29.45}$$

Interprétation :

$$D_{e_1} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + te_1) - f(a)}{t} \tag{29.46}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1 + t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t} \tag{29.47}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_{a,1}(a_1 + t) - \varphi_{a,1}(a_1)}{t} \tag{29.48}$$

$$= \varphi'_{a,1}(a_1). \tag{29.49}$$

Alors $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$ existe si et seulement si l'application partielle $\varphi_{1,1}$ est dérivable en a_1. Auquel cas :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \varphi'_{a,1}(a_1). \tag{29.50}$$

Notation : Les dérivées partielles peuvent être notées $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = D_1 f(a)$.

Attention : f peut admettre des dérivées partielles en un point, et même être dérivable en un point selon tout vecteur, sans pour autant être continue en ce point.

On peut exhiber le cas de la fonction $f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \begin{cases} \frac{y^2}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$. En notant $a = (0, 0)$ on a

$$\forall t > 0 \ h_1 \neq 0 \quad \frac{f(a + th) - f(a)}{t} = \frac{f(th)}{t} = \frac{h_2^2}{h_1}. \tag{29.51}$$

Donc $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$ existe. Si $h_1 = 0$ alors pour tout $t > 0$ on a $\frac{f(a+th)-f(a)}{t} = 0$.

La fonction f admet une dérivée en $(0, 0)$ selon tout vecteur h. Par contre, pour tout naturel n non nul

$$f\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = 1, \tag{29.52}$$

et ne tend pas vers zéro, donc f n'est pas continue en zéro.

29.3.2 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathbb{R}^U$.

Définition 29.20. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U si et seulement si pour tout vecteur h l'application $g_h\colon \left\{\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a & \longmapsto & D_h f(a) \end{array}\right.$ est définie et continue sur U.

On note $\mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de U vers $\mathbb{R}$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition 29.13. Si $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$ alors f admet des dérivées partielles premières et elles sont continues sur U.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition en prenant $h = e_1$ et $h = e_2$. □

Théorème 29.3 (Théorème fondamental)**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathbb{R}^U$. Si les applications dérivées partielles d'ordre 1, $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ sont définies et continues sur l'ouvert U, alors :*

1. *pour tout $a \in U$, f admet un $DL_1(a)$: pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ au voisinage de $(0,0)$ on a*

$$f(a+h) = f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + o(\|h\|)\,; \tag{29.53}$$

2. *pour tout $a \in U$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, f admet une dérivée en a selon h et*

$$D_h f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \tag{29.54}$$

d'où pour h au voisinage de $(0,0)$

$$f(a+h) = f(a) + D_h f(a) + o(\|h\|)\,; \tag{29.55}$$

3. *$f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$;*
4. *pour tout $a \in U$, l'application $L\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & D_h f(a) \end{array}\right.$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ appelée différentielle de f en a et notée $\mathrm{d}f_a$.*

Notation différentielle : Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R}^2)$. Notons $p_1\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & x_1 \end{array}\right.$ et $p_2\colon \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & x_2 \end{array}\right.$. p_1 et p_2 sont de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout a et h de $\mathbb{R}^2$ on a

$$D_h p_1(a) = h_1 \frac{\partial p_1}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial p_1}{\partial x_2}(a) = h_1 \tag{29.56}$$

$$D_h p_2(a) = h_1 \frac{\partial p_2}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial p_2}{\partial x_2}(a) = h_2. \tag{29.57}$$

Ainsi

$$D_h f(a) = h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \tag{29.58}$$

$$= D_h p_1(a) \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + D_h p_2(a) \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \tag{29.59}$$

et comme c'est vrai pour tout vecteur h on a

$$Df(a) = Dp_1(a)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + Dp_2(a)\frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \tag{29.60}$$

et en passant en notation différentielle

$$\mathrm{d}f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\mathrm{d}x_2. \tag{29.61}$$

29.3.3 Gradient

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in U$, l'application $\mathrm{d}f_a \colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ h & \longmapsto & D_h f(a) \end{array} \right.$ est une forme linéaire.

Définition 29.21. Pour tout $a \in U$, le vecteur normal de cette forme linéaire est appelé gradient de f en a, et est noté $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, f(a)$. C'est l'unique vecteur $\overrightarrow{n}$ tel que pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\mathrm{d}f_a(\overrightarrow{u}) = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{n} \rangle . \tag{29.62}$$

D'après l'expression de $\mathrm{d}f_a$ on a

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \right) \tag{29.63}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\overrightarrow{e_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\overrightarrow{e_2}. \tag{29.64}$$

Remarque : L'application $\overrightarrow{\mathbf{grad}} : a \longmapsto \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, f(a)$ est appelée champ de vecteurs.

29.3.4 Espace vectoriel et anneau $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$

Lemme 29.1. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, alors fg est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus pour tout $a \in U$,*

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}(fg)(a) = f(a)\,\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, g(a) + g(a)\,\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, f(a). \tag{29.65}$$

De plus pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^2$ on a aussi

$$D_h(fg)(a) = f(a)D_h g(a) + g(a)D_h f(a). \tag{29.66}$$

Démonstration. On fixe $a \in U$. Notons α, β et γ les premières applications partielles respectives de f, g et fg en a. Alors α et β sont dérivable en a_1 :

$$\alpha'(a_1) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \tag{29.67}$$

$$\beta'(a_1) = \frac{\partial g}{\partial x_1}(a). \tag{29.68}$$

On a $\gamma = \alpha\beta$, donc γ est dérivable en a_1 et

$$\gamma'(a_1) = \alpha(a_1)\beta'(a_1) + \beta(a_1)\alpha'(a_1) \tag{29.69}$$
$$= \alpha(a_1)\frac{\partial g}{\partial x_1}(a) + \beta(a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1) \tag{29.70}$$
$$= f(a)\frac{\partial g}{\partial x_1}(a) + g(a)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a). \tag{29.71}$$

Alors $\frac{\partial fg}{\partial x_1}(a)$ existe et vaut $f(a)\frac{\partial g}{\partial x_1}(a)+g(a)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$. Ce qui est vrai pour tout $a \in U$, donc $\frac{\partial fg}{\partial x_1}$ est défini sur U et son expression montre qu'elle est continue. De la même manière on montre que $\frac{\partial fg}{\partial x_2}$ est définie et continue sur U. Alors, d'après le théorème fondamental, fg est de classe $\mathcal{C}^1$. □

Lemme 29.2. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in classe1(U, \mathbb{R})$ telle que $0 \notin f(U)$. Alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. De plus pour tout $a \in U$,*

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\left(\frac{1}{f}\right)(a) = \frac{-1}{f(a)^2}\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, f(a). \tag{29.72}$$

De plus pour tout vecteur $h \in \mathbb{R}^2$ on a aussi

$$D_h\left(\frac{1}{f}\right)(a) = \frac{-1}{f(a)^2}D_h f(a). \tag{29.73}$$

Démonstration. Soit φ la première application partielle de f en a. Comme $0 \notin f(U)$, $\frac{1}{f}$ est définie. Soit ψ la première application partielle de $\frac{1}{f}$ en a. Ainsi $\psi = \frac{1}{\varphi}$. L'applicatin f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc φ est dérivable en a_1 et $\psi'(a_1) = -\frac{\varphi'(a_1)}{\varphi(a_1)^2}$. Cela signifie que $\frac{\partial \frac{1}{f}}{\partial x_1}(a)$ existe et vaut $-\frac{\varphi'(a_1)}{\varphi(a_1)^2} = -\frac{1}{\varphi(a_1)^2}\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)$.

C'est vrai pour tout $a \in U$ donc $\frac{\partial \frac{1}{f}}{\partial x_1}$ est définie sur U. L'application f étant de classe $\mathcal{C}^1$, l'expression $\frac{\partial \frac{1}{f}}{\partial x_1}$ montre qu'elle est continue. De même, $\frac{\partial \frac{1}{f}}{\partial x_2}$ est définie et continue sur U.

Le théorème fondmental permet alors de conclure que $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. □

Lemme 29.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Pour toutes fonctions f et g de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et pour tout réel λ, la fonction $\lambda f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.*

De plus, pour tout $a \in U$ et pour tout $h \in \mathbb{R}^2$,

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\lambda f + g(a) = \lambda\,\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, f(a) + \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, g(a), \tag{29.74}$$
$$D_h(\lambda f + g)(a) = \lambda D_h(f)(a) + D_h(g)(a). \tag{29.75}$$

Théorème 29.4. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Alors $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel et un sous-anneau de $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$. De plus*

$$\mathfrak{U}\left(\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})\right) = \left\{f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}) \mid 0 \notin f(U)\right\}. \tag{29.76}$$

29.3.5 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 29.5. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Soit I un intervalle réel et $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^2)$ telle que $\varphi(I) \subset U$. On note φ_1 et φ_2 les applications coordonnées de φ. On dispose de $f \circ \varphi$.*

Alors $f \circ \varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ et pour tout $t \in I$ on a

$$(f \circ \varphi)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t))\varphi_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t))\varphi_2'(t). \tag{29.77}$$

Démonstration. Soit $t_0 \in I$. Montrons que $f \circ \varphi$ est dérivable en t_0 en prouvant qu'elle admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0.

D'abord f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc pour tout $a \in U$, on a

$$f(a+h) = f(a) + D_h f(a) + o(\|h\|)\,. \tag{29.78}$$

Pour t au voisinage de t_0, $\varphi(t)$ est au voisinage de $\varphi(t_0)$. On l'applique avec $a = \varphi(t_0)$ et $h = \varphi(t) - \varphi(t_0)$:

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(t) = f \circ \varphi(t_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t_0))(\varphi_1(t) - \varphi_1(t_0)) \\ + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t_0))(\varphi_2(t) - \varphi_2(t_0)) &+ \|\varphi(t) - \varphi(t_0)\|\, \epsilon(\|\varphi(t) - \varphi(t_0)\|), \end{aligned} \tag{29.79}$$

avec $\lim\limits_{0} \epsilon = 0$.

Les fonctions φ_1 et φ_2 sont donc de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de t_0.

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(t_0) + \varphi_1'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)o(1) \tag{29.80}$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_2(t_0) + \varphi_2'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)o(1)\,. \tag{29.81}$$

Au voisinage de t_0,

$$\begin{aligned} f \circ \varphi(t) = f \circ \varphi(t_0) &+ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t_0))\varphi_1'(t_0)(t - t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t_0))(t - t_0)o(1) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t_0))\varphi_2'(t_0)(t - t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t_0))(t - t_0)o(1) \\ &+ \|(\varphi_1'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)o(1) + \varphi_2'(t_0)(t - t_0) + (t - t_0)o(1))\|\, o(1) \end{aligned} \tag{29.82}$$

$$= f \circ \varphi(t_0) + (t - t_0)\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t_0))\varphi_1'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t_0))\varphi_2'(t_0)\right] + o(t - t_0)\,. \tag{29.83}$$

Alors $f \circ \varphi$ admet un développement limité à l'ordre 1 en t_0.

$$(f \circ \varphi)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(t_0))\varphi_1'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(t_0))\varphi_2'(t_0). \tag{29.84}$$

□

On peut généraliser au cas où φ est définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 29.6. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$. Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(V, \mathbb{R}^2)$ telles que $\varphi(V) \subset U$. On dispose donc de l'application $f \circ \varphi : V \to \mathbb{R}$.*

Alors l'application $f \circ \varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$, pour tout $a \in V$ et pour $i \in \{1, 2\}$ on a

$$\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi(a))\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i}(a) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\varphi(a))\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_i}(a). \tag{29.85}$$

Interprétation géométrique du gradient

Proposition 29.14. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. On appelle lignes de niveaux de f les ensembles suivants :

$$\Gamma_\alpha = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = \alpha \in \mathbb{R}\}. \tag{29.86}$$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et supposons que Γ_α est paramétrée par (I, g) (I un intervalle réel et $g \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^2)$) et que la courbe est régulière.

Alors pour tout $t \in I$, la courbe Γ_α admet au point $M(t)$ une tangente orthogonale à $\overrightarrow{\textbf{grad}}\, f(M(t))$.

Démonstration. Pour tout $t \in I$, $f(g(t)) = \alpha$ et f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$. On applique le théorème de dérivation d'une fonction composée :

$$(f \circ g)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(g(t))g_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(g(t))g_2'(t) = 0. \tag{29.87}$$

Ce qui est équivalent à écrire que le produit scalaire entre $\overrightarrow{\textbf{grad}}\, f(M(t))$ et le vecteur directeur dela tangente en M est nul. □

29.3.6 Extension locale d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert

29.3.6.1 Définition

Définition 29.22. Soient $A \subset \mathbb{R}^2$, $a \in A$ et $f \in \mathbb{R}^A$.

1. On dit que f présente un maximum (minimum) local en a si et seulement s'il existe un voisinage V de a tel que pour tout $x \in A \cap V$ on a $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) ;
2. on dit que f présente un extremum local en a si elle admet un maximum local ou un minimum local ;
3. on dit que l'extremum est global lorsque l'inégalité est vraie sur A tout entier ;
4. on dit que l'extremum est strict lorsque l'inégalité est stricte pour $x \neq a$.

29.3.6.2 Condition nécessaire d'existence

Définition 29.23. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soient $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ et $a \in U$. On dit que a est un point critique pour f lorsque $\overrightarrow{\textbf{grad}}\, f(a) = \overrightarrow{0}$.

Théorème 29.7. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in U$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f. La réciproque est fausse.*

Démonstration. Supposons que f admet un maximum local en a. Il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et pour tout $x \in B(a, r)$ on a $f(x) \leq f(a)$.

Soit, pour tout $h \in \mathbb{R}^2$, l'application $\psi_h : t \to f(a + th)$. On sait qu'il existe $\delta > 0$ tel que Ψ_h soit au moins définie sur $]-\delta\,; \delta[$. Si $\|th\| \leq r$ et $|t| \leq \delta$ alors $f(a + th)$ est définie et $f(a + th) \leq f(a)$.

Or ψ_h est dérivable en 0, ψ_h admet un maximum local en zéro, zéro est à l'intérieur de son intervalle de définition donc $\psi_h'(0) = 0$. On a montré que pour tout $h \in \mathbb{R}^2$ $D_h f(a) = 0$. L'application $\mathrm{d}f_a$ est une forme linéaire nulle donc son vecteur normal ($\overrightarrow{\textbf{grad}}\, f(a)$) est nul. □

La réciproque est fausse. En effet soit $f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & xy \end{array} \right.$, de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x, \tag{29.88}$$

donc $(0,0)$ est un point critique. Cependant, est-ce un extremum ?

f n'admet pas de maximum en $(0,0)$:

$$\forall r > 0 \ \exists (x,y) \in B((0,0),r) \quad f(x,y) > 0 \tag{29.89}$$

en prenant par exemple $x = y = \frac{r}{2}$ alors $f(x,y) = \frac{r^2}{4} > 0$

f n'admet pas de minimum en $(0,0)$:

$$\forall r > 0 \ \exists (x,y) \in B((0,0),r) \quad f(x,y) < 0 \tag{29.90}$$

en prenant par exemple $x = \frac{r}{2}$ et $y = -x$ alors $f(x,y) = -\frac{r^2}{4} < 0$.

Un tel point est appelé point col ou point selle.

Il faut absolument se placer sur un ouvert. Sinon on ne peut pas appliquer le théorème. C'est comme pour les fonctions d'une variable, on se place à l'intérieur d'un intervalle.

En pratique pour rechercher des extremums :
— si le domaine de départ n'est pas ouvert, on le sépare en “plusieurs morceaux” et on traite la frontière à part ;
— sur le ou les “morceaux” ouverts, on commence par déterminer les points critiques, et en chaque point critique trouvé on regarde s'il y a vraiment un extremum ou pas.

29.3.7 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, Théorème de Schwarz

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a \in U$ et $f \in \mathbb{R}^U$. Supposons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U. On dispose des applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ qui sont continues.

Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ admet une dérivée partielle première par rapport à x_1 (x_2), on la note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_1}^2}$ $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right)$. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$ admet une dérivée partielle première par rapport à x_1 (x_2), on la note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ $\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial {x_2}^2}\right)$. f admet au plus quatre dérivées partielles secondes.

Définition 29.24. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathbb{R}^U$. Si les quatre dérivées partielles secondes de f sont définies et *continues* sur U, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

Théorème 29.8 (Théorème de Schwarz (admis))**.** *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur U. Alors pour tout $a \in U$*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a). \tag{29.91}$$

29.3.8 Exemple d'équation au dérivées partielles

Les équations aux dérivée partielles sont la généralisation des équations différentielles aux fonctions à plusieurs variables.

Déterminez l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0 \tag{29.92}$$

Il existe une fonction $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = g(y)$. Puis il existe $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x, y) = g(y)x + h(y)$.

Réciproquement, s'il existe $(g, h) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ tel que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a $f(x, y) = g(y)x + h(y)$ alors $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0. \tag{29.93}$$

Chapitre 30

Étude métrique des courbes planes

Sommaire

On travaille dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique d'espace vectoriel orienté et de sa base canonique. Soit I un intervalle réel et $k \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

30.1 Modes de définitions des courbes planes

30.1.1 Représentation paramétrique et cartésiennes

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$. La courbe définie par l'équation cartésienne $y = \varphi(x)$ peut être représentée paramétriquement par $f\colon \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (t, \varphi(t)) \end{array} \right.$. L'arc (I, f)

ainsi défini est de classe $\mathcal{C}^k$. De plus, c'est un arc régulier car pour tout $t \in I$, $f'(t) = (1, \varphi'(t))$ qui n'est jamais nul.

De même, si $\psi \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$, la courbe Γ d'équation cartésienne $x = \psi(y)$ peut être paramétrée par $g\colon \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (\psi(t), t) \end{array}\right.$. La courbe est régulière parce que pour tout $t \in I$, $g'(t) \neq (0,0)$.

Toute représentation cartésienne admet une représentation paramétrique. Pourtant une courbe définie par une représentation paramétrique peut ne pas forcément s'écrire à l'aide d'une équation cartésienne de la forme $y = \varphi(x)$ ou $x = \psi(y)$ — un contre-exemple pertinent est le cercle. Sous certaines conditions, on peut trouver au moins localement une équation cartésienne de ce type pour certaines courbes paramétrées — théorème des fonctions implicites.

30.1.2 Représentation cartésiennes et polaires

Soient ρ et θ deux applications de I vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$. On peut définir un arc (I, f) par $f\colon \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \rho(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}} \end{array}\right.$.

Réciproquement, soit f de I vers $\mathbb{R}^2$ une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ qui ne s'annule pas sur I. On pose $\rho\colon \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sqrt{f_1^2(t) + f_2^2(t)} \end{array}\right.$, où $f = (f_1, f_2)$, et on voit qu'elle est de classe $\mathcal{C}^k$ (car f_1 et f_2 le sont) et demeure strictement positive.

On pose $g = f/\rho$, alors g est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\|g\| = 1$. En appliquant le théorème du relévement : il existe une fonction θ de I vers $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$ telle que $g = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$, donc $f = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}$.

30.1.3 Paramétrage admissible

Définition 30.1. Soient (I, f) et (J, g) deux arcs paramétrés de classe $\mathcal{C}^k$. On dit que (J, g) est un paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$ de l'arc (I, f) s'il existe une bijection φ de I vers J de classe $\mathcal{C}^k$ telle que φ^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^k$ vérifiant $f = g \circ \varphi$.

L'application φ est appelée changement de paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$.

Remarque : Une telle application φ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme.

Proposition 30.1. Soit φ de I vers J un changement de paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$, alors φ est strictement monotone.

Démonstration. φ et φ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$ donc φ est dérivable et φ' ne s'annule pas — car φ^{-1} est dérivable. De plus φ' est continue, et comme elle ne s'annule pas alors elle est de signe constant strictement. □

Conséquence : Les arcs (I, f) et (J, g) ont le même support. Lorsque l'application changement de paramétrage φ est strictement croissante, les courbes sont parcourues dans le même sens.

Définition 30.2. Orienter un arc paramétrer revient à choisir un des paramétrages et à ne travailler qu'avec des paramétrages de même sens, c'est-à-dire obtenus avec des changements de paramétrages admissibles strictement croissants.

Remarque : On peut montrer que les points singuliers, réguliers et biréguliers sont invariants par changement de paramétrage admissibles de classe $\mathcal{C}^k$.

30.2 Repére de Frenet

Soit (I, f) un arc paramétré régulier de classe $\mathcal{C}^k$ et orienté.

30.2.1 Vecteur unitaire tangent

Définition 30.3. Pour tout $t_0 \in I$, on pose $\overrightarrow{T}(t_0) = \frac{\overrightarrow{f'(t_0)}}{\left\|\overrightarrow{f'(t_0)}\right\|}$. C'est le vecteur unitaire tangent à l'arc (I, f) à la date t_0.

Remarque : $\overrightarrow{T}(t_0)$ est bien défini car f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc $\overrightarrow{f'(t_0)}$ existe. De plus l'arc est régulier donc $\overrightarrow{T}(t_0) \neq \overrightarrow{0}$.

On peut aussi écrire $\overrightarrow{T}(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{f(t_0)}}{\left\|\overrightarrow{f(t)} - \overrightarrow{f(t_0)}\right\|}$. Le vecteur $\overrightarrow{T}(t_0)$ est un vecteur unitaire qui dirige la tangente à la courbe en $M(t_0)$. Il est invariant par changement de paramétrage admissible de même orientation (φ strictement croissante) et changé en son opposé par un changement de paramétrage admissible d'orientation contraire (φ strictement décroissante). L'application $\overrightarrow{T} : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t_0 & \longmapsto & \overrightarrow{T}(t_0) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^k$, car f est de classe $\mathcal{C}^k$ et f' ne s'annule pas.

30.2.2 Vecteur normal unitaire

Définition 30.4. Pour tout $t_0 \in I$, on appelle vecteur normal à l'arc (I, f) à la date t_0 l'unique vecteur $\overrightarrow{N}t_0$ tel que $(\overrightarrow{T}(t_0), \overrightarrow{N}(t_0))$ soit une base orthonormale directe de $\mathbb{R}^2$. Autrement dit $\overrightarrow{N}(t_0)$ est l'image de $\overrightarrow{T}(t_0)$ par la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $M(t_0)$.

Remarque : $\overrightarrow{N}(t_0)$ est invariant par changement de paramétrage admissible de même orientation (φ strictement croissante) et changé en son opposé par un changement de paramétrage admissible d'orientation contraire (φ strictement décroissante).

30.2.3 Repère de Frenet

Définition 30.5. On appelle repère de Frenet à la date t_0 le repère orthonormal direct $(M(t_0), \overrightarrow{T}(t_0), \overrightarrow{N}(t_0))$. Par abus de notation on appelle parfois repére de Frenet la base orthonormale directe $(\overrightarrow{T}(t_0), \overrightarrow{N}(t_0))$.

30.3 Abcisse curviligne

30.3.1 Définition

Définition 30.6. Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ régulier. On appelle abcisse curviligne toute application $s \in \mathbb{R}^I$ telle quepour tout $t \in I$, on a

$s'(t) = \|f'(t)\|$.

Par hypothèse, l'application f' est continue et ne s'annule pas. Alors la fonction s' est continue strictement positive. Les abcisses curvilignes sont de la forme

$$s\colon \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & s_0 + \int_{t_0}^{t} \|f'(u)\| \,\mathrm{d}u \quad (s_0, t_0) \in \mathbb{R} \times I \end{cases}. \tag{30.1}$$

Si $s_0 = 0$, on dira que l'origine des dates est prise en t_0. Les abcisses curvilignes différent d'une constantes. On en déduit que pour toutes dates t_1 et t_2 on a

$$s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \|f'(t)\| \,\mathrm{d}t. \tag{30.2}$$

30.3.2 Propriétés

Théorème 30.1. *Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ régulier et orienté. Soit $s \in \mathbb{R}^I$ une abcisse curviligne de (I, f). Alors s induit un changement de paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$ strictement croissant.*

Démonstration. Soit $J = s(I)$. Par définition, s est dérivable et pour tout instant $t \in I$, on a $s'(t) = \|f'(t)\| > 0$. La fonction s est continue, strictement croissante et I sur J. Donc s induit une bijection de I sur J. La fonction s est de classe $\mathcal{C}^k$ et comme s' ne s'annule pas, s^{-1} est aussi de classe $\mathcal{C}^k$. Finalement s est un changement de paramétrage admissible strictement croissant. □

Corollaire 30.1.1. *Soit (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ régulier et orienté. Soit s une abcisse curviligne de l'arc (I, f). Alors $(s(I), f \circ s^{-1})$ définit un paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$ de (I, f) de même orientation.*

Ce paramétrage s'appelle paramétrage par l'abcisse curviligne.

30.3.3 Formulaire

On déduit des calculs d'abcisses curvilignes effectués précedemment les formules suivantes.

— Si l'arc est régulier et représenté paramétriquement par (I, f) avec $f = (x, y)$ où x et y sont des fonctions au moins de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tout a et b dans I, on a $\ell([a\,;b]\,, f) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \,\mathrm{d}t$.

— En particulier si la courbe est définie par une équation cartésienne de la forme $y = \varphi(x)$ avec φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (au moins), alors pour tout a et b dans I, on a $\ell([a\,;b]\,, f) = \int_a^b \sqrt{1 + \varphi'(t)^2} \,\mathrm{d}t$.

— Si la courbe est représentée paramétriquement par $\overrightarrow{f}(t) = \rho(t)\overrightarrow{u_{\theta(t)}}$ avec ρ et θ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (au moins), alors pour tout a et b dans I, on a $\ell([a\,;b]\,, f) = \int_a^b \sqrt{\rho'(t)^2 + \rho(t)^2\theta'(t)^2} \,\mathrm{d}t$.

— En particulier si la courbe est définie par une équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec ρ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (au moins), alors pour tout θ_1 et θ_2 dans I, on a $\ell([\theta_1\,;\theta_2]) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2} \,\mathrm{d}\theta$.

30.4 Courbure

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base orthonormée directe $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Soit I un intervalle réel et (I, f) un arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$ $(k > 1)$ supposé régulier et orienté.

On dispose d'une application abcisse curviligne s qui induit un changement de paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^k$ de I vers $J = s(I)$, dont on note φ la bijection réciproque.

L'arc (J, g) avec $g = f \circ \varphi$ est un paramétrage admissible de (I, f) qui à la même orientation et qui est normal.

30.4.1 Application angulaire α

Proposition 30.2. Il existe une application $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout réel $t \in I$, on a

$$\overrightarrow{T}(t) = \overrightarrow{u_{\alpha(t)}} = \cos(\alpha(t))\,\overrightarrow{i} + \sin(\alpha(t))\,\overrightarrow{j}, \tag{30.3}$$

où $\overrightarrow{T}(t)$ est le vecteur unitaire tangent à la courbe à l'instant t. L'application α est l'application angualaire.

Démonstration. Pour tout $t \in I$, on a $\left\| \overrightarrow{T}(t) \right\| = 1$. L'application $\overrightarrow{T} : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \overrightarrow{T}(t) \end{cases}$ est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et par application du théorème du relévement, il existe une application $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$ telle que pour tout réel $t \in I$, on a

$$\overrightarrow{T}(t) = \overrightarrow{u_{\alpha(t)}} = \cos(\alpha(t))\,\overrightarrow{i} + \sin(\alpha(t))\,\overrightarrow{j}. \tag{30.4}$$

□

L'application α représente une mesure d'angle de la rotation qui transforme $\overrightarrow{i}$ en $\overrightarrow{T}(t)$.

Conséquence : Pour tout réel $t \in I$, notons $\overrightarrow{N}(t)$ le vecteur normal unitaire tel que $(\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ soit une base orthonormée directe. Alors

$$\overrightarrow{T}(t) = \overrightarrow{v_{\alpha(t)}} = -\sin(\alpha(t))\,\overrightarrow{i} + \cos(\alpha(t))\,\overrightarrow{j}. \tag{30.5}$$

30.4.2 Formulaire

Si l'arc est défini paramétriquement par (I, f) avec $f = (x, y)$, x et y des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ alors pour tout $t \in I$, on a

$$\overrightarrow{T}(t) = \overrightarrow{f'(t)} s'(t) = \frac{x'(t)\,\overrightarrow{i} + y'(t)\,\overrightarrow{j}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \tag{30.6}$$

$$\overrightarrow{N}(t) = \frac{-y'(t)\,\overrightarrow{i} + x'(t)\,\overrightarrow{j}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}. \tag{30.7}$$

Ainsi

$$\cos(\alpha(t)) = \frac{x'(t)}{s'(t)} \quad \sin(\alpha(t)) = \frac{y'(t)}{s'(t)}. \tag{30.8}$$

Si l'arc, supposé réguleir, est défini par une équation polaire $r = \rho(\theta)$ avec ρ une application de classe $\mathcal{C}^1$ alors pour tout $\theta \in I$

$$\overrightarrow{T}(t) = \overrightarrow{f'(t)}s'(t) = \frac{\rho'(\theta)\overrightarrow{u}_\theta + \rho(\theta)\overrightarrow{v}_\theta}{\sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}} \tag{30.9}$$

$$\overrightarrow{N}(t) = \frac{-\rho(\theta)\overrightarrow{v}_\theta + \rho'(\theta)\overrightarrow{u}_\theta}{\sqrt{\rho'(\theta)^2 + \rho(\theta)^2}}. \tag{30.10}$$

En pratique, pour déterminer $\alpha(\theta)$ on commence par trouver l'angle entre $\overrightarrow{u}_\theta$ et $\overrightarrow{T}$.

30.4.3 Courbure

30.4.3.1 Définition

On appelle courbure de l'arc (I, f) l'application $\gamma : J = s(I) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$. Plusprécisément, on dispose de :

— $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$;

— $s\colon \left\{\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & J \\ t & \longmapsto & s \end{array}\right.$;

— $\varphi\colon \left\{\begin{array}{ccc} J & \longrightarrow & I \\ s & \longmapsto & t \end{array}\right.$.

Soit $t \in I$, alors $t = \varphi(s)$ et $\overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{g}(s)$. Ainsi $\alpha(t) = \alpha \circ \varphi(s)$. L'application $\alpha \circ \varphi$ est au moins de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

On définit $\gamma = (\alpha \circ \varphi)'$. Pour tout $s \in J$, on a

$$\begin{aligned}
\gamma(s) &= (\alpha \circ \varphi)'(s) && (30.11)\\
&= \varphi'(s)\alpha'(\varphi(s)) && (30.12)\\
&= \frac{1}{s'(\varphi(s))}\alpha'(\varphi(s)) && (30.13)\\
&= \frac{\alpha'(t)}{s'(t)}. && (30.14)
\end{aligned}$$

Pour tout $s \in J$, on a $t = \varphi(s)$ alors

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{g}(s) &= \overrightarrow{f}(t) = \overrightarrow{f \circ \varphi}(s) && (30.15)\\
\overrightarrow{g'}(s) &= \varphi'(s)\overrightarrow{f' \circ \varphi}(s) && (30.16)\\
&= \frac{1}{s'(t)}f'(t) = \overrightarrow{T}(t). && (30.17)
\end{aligned}$$

De plus $\overrightarrow{T}(t) = \overrightarrow{u}_{\alpha\circ\varphi(s)}$, donc $\overrightarrow{g''}(s) = \gamma(s)\overrightarrow{v}_{\alpha\circ\varphi(s)} = \gamma(s)\overrightarrow{v}_{\alpha(t)}$. Au final $\overrightarrow{g''}(s) = \gamma(s)\overrightarrow{N}(t)$.

On remarque que $\gamma(s) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{g'}(s), \overrightarrow{g''}(s))$.

30.4.3.2 Points biréguliers

Proposition 30.3. Le point $M(t)$ de l'axe $(I, \overrightarrow{f})$ est birrégulier si et seulement si $\gamma(s) \neq 0$ (avec $t = \varphi(s)$).

Démonstration.

$$\begin{aligned}
M(t) \text{ est birrégulier } &\iff (\overrightarrow{f'}(t), \overrightarrow{f''}(t)) \text{ est libre} && (30.18)\\
&\iff (\overrightarrow{g'}(s), \overrightarrow{g''}(s)) \text{ est libre} && (30.19)\\
&\iff \gamma(s) = \mathrm{Det}(\overrightarrow{g'}(s), \overrightarrow{g''}(s)) \neq 0. && (30.20)
\end{aligned}$$

□

Remarque : À quoi ressemble un arc dont la courbure est nulle ? C'est un arc inclus dans une droite.

Définition 30.7. Si l'arc (I, f) est birrégulier, on défini pour tout $t \in I$ le rayon de courbure à la date t par $R(t) = \frac{1}{\gamma(s)}$ avec $t = \varphi(s)$.

Remarque : La définition est légitime car en un point birrégulier la courbure est non nulle.

Définition 30.8. Si l'arc (I, f) est birrégulier, on définit le centre de courbure à la date t comme étant le point I tel que

$$\overrightarrow{M(t)I} = R\overrightarrow{N}(t). \tag{30.21}$$

L'ensemble des centres de courbures de l'arc (I, f) s'appelle la développée de l'arc (I, f).

30.4.3.3 Formules de Frenet

Soient $s \in J$ et $t \in I$ tels que $t = \varphi(s)$ et $f(t) = g(s)$. Alors

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma(s)\overrightarrow{N} \tag{30.22}$$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma(s)\overrightarrow{T} = -\frac{\overrightarrow{T}}{R}. \tag{30.23}$$

30.4.4 Application écart angulaire

On dispose de $\alpha \in \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{R})$. On a défini la courbure par

$$\forall s \in J \quad \gamma(s) = (\alpha \circ \varphi)'(s))\varphi'(s)\alpha'(t). \tag{30.24}$$

Si on suppose que l'arc est birrégulier, la courbure ne s'annule pas ; la dérivée de α ne s'annule pas. α' est donc de signe constant et continue. Ainsi α induit une bijection de I vers $K = \alpha(I)$. De plus α^{-1} est dérivable et est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Au final α induit un changement de paramétrages admissible de classe $\mathcal{C}^{k-1}$. Les formules de Frenet deviennent :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\alpha} = \overrightarrow{N} \qquad \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}\alpha} = -\overrightarrow{T}. \tag{30.25}$$

30.4.5 Accélération et vitesse dans le repère de Frenet

Si $\overrightarrow{OM}(t)$ représente la position d'un point mobile à l'instant t, alors (en notant$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$) la vitesse vaut

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = v\overrightarrow{T}, \tag{30.26}$$

et l'accélération vaut

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{N}. \tag{30.27}$$

Chapitre 31

Compléments d'analyse

Sommaire

31.1 Intégrales doubles

31.1.1 Intégrales doubles sur un segment

31.1.1.1 Théorème de Fubini – Définitions

Théorème 31.1 (Admis)**.** *Soient quatre réels a, b, c et d tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, f une fonction continue sur le rectangle $[a\,;b] \times [c\,;d]$. Alors*

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y. \tag{31.1}$$

Cette valeur commune est appelée intégrale double de f sur le rectangle $[a\,;b] \times [c\,;d]$ et notée

$$\iint_{[a\,;b]\times[c\,;d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{[a\,;b]\times[c\,;d]} f. \tag{31.2}$$

Interprétation :

1. Lorsque f est à valeurs positives, $\iint_{[a\,;b]\times[c\,;d]} f$ représente le volume de l'ensemble $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (x,y)\in[a\,;b]\times[c\,;d]\ \ 0\leq z\leq f(x,y)\}$.
2. Lorsque $f=\tilde{1}$ sur le rectangle $[a\,;b]\times[c\,;d]$,

$$\iint_{[a\,;b]\times[c\,;d]} \tilde{1} = (a-b)(c-d). \tag{31.3}$$

Corollaire 31.1.1. *Avec les hypothèses du théorème, on suppose en outre qu'il existe deux fonctions continues $u\in\mathbb{R}^{[a\,;b]}$ et $v\in\mathbb{R}^{[c\,;d]}$ telles que pour tout $(x,y)\in[a\,;b]\times[c\,;d]$ on a $f(x,y)=u(x)v(y)$, alors*

$$\iint_{[a\,;b]\times[c\,;d]} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \int_c^d v(y)\,\mathrm{d}y. \tag{31.4}$$

31.1.1.2 Propriétés

Proposition 31.1. Soient R un rectangle du plan, deux fonctions continues f et g, et un réel λ. Alors

$$\iint_R (\lambda f+g) = \lambda\iint_R f + \iint_R g. \tag{31.5}$$

Proposition 31.2. Soient R_1 et R_2 deux rectangles disjoints du plan, f une fontion continue sur $R_1\cup R_2$. Alors

$$\iint_{R_1\cup R_2} f = \iint_{R_1} f + \iint_{R_2} f. \tag{31.6}$$

Proposition 31.3. Soient R un rectangle du plan, deux fonctions continues f et g. Supposons que $f\leq g$, alors

$$\iint_R f \leq \iint_R g. \tag{31.7}$$

31.1.2 Intégrale double sur un domaine simple

31.1.2.1 Théorème de Fubini

Définition 31.1. On appelle domaine simple du plan toute partie $\mathfrak{D}$ de $\mathbb{R}^2$ telle :

- qu'il existe quatre réels a, b, c et d ($a\leq b$ et $c\leq d$) ;
- qu'il existe des fonctions continues φ_1 et φ_2 de $[a\,;b]$ vers $\mathbb{R}$; et ψ_1 et ψ_2 de $[c\,;d]$ vers $\mathbb{R}$;

telles que

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\leq x\leq b \quad \varphi_1(x)\leq y\leq\varphi_2(x)\} && (31.8)\\ &= \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid c\leq y\leq d \quad \psi_1(y)\leq x\leq\psi_2(y)\} && (31.9)\end{aligned}$$

Définition 31.2. Soient $\mathfrak{D}$ un domaine simple du plan (avec les notations de la définition) et f une fonction continue sur $\mathfrak{D}$. Alors

$$\int_a^b\left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y. \tag{31.10}$$

Cette valeur commune est appelée intégrale double de f dans le domaine $\mathfrak{D}$, et elle est notée $\iint_{\mathfrak{D}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathfrak{D}} f$.

Interprétation : On admet ce théorème, en particulier que l'aire de $\mathfrak{D}$ vaut $\iint_{\mathfrak{D}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

31.1.2.2 Propriétés

Proposition 31.4 (Linéarité)**.** Soient $\mathfrak{D}$ un domaine simple du plan, f et g deux fonctions continues sur $\mathfrak{D}$, et λ un réel. Alors

$$\iint_{\mathfrak{D}} (\lambda f + g) = \lambda \iint_{\mathfrak{D}} f + \iint_{\mathfrak{D}} g. \tag{31.11}$$

Proposition 31.5 (Additivité des domaines)**.** Soient $\mathfrak{D}_1$ et $\mathfrak{D}_2$ des domaines simples du plan, f une fonction continue sur $\mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$. Alors

$$\iint_{\mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2} f = \iint_{\mathfrak{D}_1} f + \iint_{\mathfrak{D}_2} f. \tag{31.12}$$

Proposition 31.6 (Croissance)**.** Soient $\mathfrak{D}$ un domaine simple du plan, f et g deux fonctions continues sur $\mathfrak{D}$. Alors

$$f \leq g \implies \iint_{\mathfrak{D}} f \leq \iint_{\mathfrak{D}} f. \tag{31.13}$$

En particulier si $f \geq \tilde{0}$ alors $\iint_{\mathfrak{D}} f \geq 0$.

31.1.3 Changements de variables

31.1.3.1 Notion de $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme

Définition 31.3. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et φ: $\left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y)) \end{array} \right.$.
On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et on définit pour tout $(x,y) \in U$ la matrice jacobienne de φ en (x,y) notée

$$J_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}. \tag{31.14}$$

On appelle le jacobien (ou le déterminant jacobien) de φ au point (x,y) le réel

$$\operatorname{Det} J_\varphi(x,y) = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}(x,y)\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(x,y)\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}(x,y). \tag{31.15}$$

Définition 31.4. On dit que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ sur un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ si et seulement si :

1. φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U ;
2. φ est bijective ;
3. φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V.

Proposition 31.7 (Admise)**.** Si φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorhisme de U sur V, alors pour tout $(x,y) \in U^2$ la matrice jacobienne $J_\varphi(x,y)$ est inversible et :

$$J_\varphi(x,y)^{-1} = J_{\varphi^{-1}}(x,y). \tag{31.16}$$

31.1.3.2 Théorème de changement de variable

Théorème 31.2. *Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$, φ un $\mathcal{C}^1$-difféormorphisme de U sur V. Soit $\mathfrak{D}$ un domaine simple de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathfrak{D} \subset U$ et $\Delta = \varphi(\mathfrak{D})$ soit un domaine simple inclus dans V.*

Soit f une fonction continue sur $\mathfrak{D}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathfrak{D}} f(\varphi(x,y))\,|\mathrm{Det}\,J_\varphi(x,y)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{31.17}$$

Valeur absolue.

31.1.3.3 Changement de variable affine

Théorème 31.3. *Soient quatre réels a, b, c et d tels que $ad \neq bc$. On adopte comme nouvelles variables u et v telles que $\begin{cases} x = au + bv \\ y = cu + dv \end{cases}$. Soit une bijection affine de classe $\mathcal{C}^1$: $\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & (au+bv, cu+dv) \end{array} \right.$. Ainsi que φ^{-1} (puisque $ad - bc \neq 0$.*

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine simple de $\mathbb{R}^2$, $\Delta = \varphi(\mathfrak{D})$ un domaine simple et f une fonction continue sur Δ. Alors

$$\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathfrak{D}} f(au+bv, cu+dv)\,|ad-bc|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v. \tag{31.18}$$

31.1.3.4 Changement de variables en polaire

Théorème 31.4. *On adopte comme nouvelles variables r et θ telles que $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$.*

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ tels que $\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & V \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right.$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine simple de $\mathbb{R}^2$ tel que $\mathfrak{D} \subset U$ et $\Delta = \varphi(\mathfrak{D})$ soit un domaine simple inclus dans V. Soit f une fonction continue sur $\mathfrak{D}$, alors

$$\iint_\Delta f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathfrak{D}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,|r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta. \tag{31.19}$$

En pratique :

— toujours dessiner les domaines $\mathfrak{D}$ et Δ pour éviter de se tromper ;

— essayer, pour des changements de variables en polaire, de choisir les domaines de sorte que $r > 0$.

Exemple – Aire d'un disque : Soit Δ le disque de centre O et de rayon $R > 0$, tels que

$$\mathrm{Aire}(\Delta) = \iint_\Delta \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq R^2\right\} \tag{31.20}$$

$$\varphi\colon \left\{ \begin{array}{ccc} \mathfrak{D} & \longrightarrow & \Delta \\ (r,\theta) & \longmapsto & (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{array} \right. \qquad \mathfrak{D} = \left\{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \leq r \leq R \;\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\} \tag{31.21}$$

Alors

$$\begin{aligned}\text{Aire}(\Delta) &= \iint_{\mathfrak{D}} |r| \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta && (31.22)\\ &= \iint_{\mathfrak{D}} r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta && (31.23)\\ &= \int_0^R r \, \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta && (31.24)\\ &= \pi R^2. && (31.25)\end{aligned}$$

31.2 Champs de vecteurs et champs de scalaires

On suppose que $n \in \{2, 3\}$ et on considére l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de sa structure canonique d'espace euclidien. On note $e = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ sa base canonique. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

31.2.1 Gradient d'un champ de scalaires

On appelle champ de scalaire sur U toute application $f \in \mathbb{R}^U$ de classe $\mathcal{C}^1$. On rappelle que le gradient de f au point $M \in U$ est défini par

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, f(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \overrightarrow{e_i}. \tag{31.26}$$

31.2.2 Champ de vecteur

On appelle champ de vecteurs sur U toute application de U dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple : Si f est un champ de scalaire sur U de classe $\mathcal{C}^1$, alors le gradient $\overrightarrow{\mathbf{grad}}\, f$ est un champ de vecteurs sur U.

31.2.3 Divergence

Soit $\overrightarrow{F} : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un champ de scalaires sur U de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $n = 2$, on note pour tout $M(x, y) \in U$ $\overrightarrow{F} = P(x, y)\overrightarrow{e_1} + Q(x, y)\overrightarrow{e_2}$.

Si $n = 3$, on note pour tout $M(x, y, z) \in U$ $\overrightarrow{F} = P(x, y, z)\overrightarrow{e_1} + Q(x, y, z)\overrightarrow{e_2} + R(x, y, z)\overrightarrow{e_3}$.

Définition 31.5. On appelle divergence du champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ au point $M \in U$, le réel noté $\operatorname{div} \overrightarrow{F}(M)$ défini par :

— si $n = 2$, $M = (x, y)$ $\operatorname{div} \overrightarrow{F}(M) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) + \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y)$;

— si $n = 3$, $M = (x, y, z)$ $\operatorname{div} \overrightarrow{F}(M) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y, z) + \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y, z) + \dfrac{\partial R}{\partial z}(x, y, z)$.

L'application div: $\left\{\begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \operatorname{div} \overrightarrow{F}(M) \end{array}\right.$ est un champ de scalaire

Proposition 31.8. Pour tout point M de U, l'application divergence notée div, div: $\left\{\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \overrightarrow{F} & \longmapsto & \operatorname{div} \overrightarrow{F}(M) \end{array}\right.$ est une forme linéaire. Autrement dit pour tous champs de vecteurs F et G dans $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ et pour tout réel λ, on a

$$\operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{F} + \overrightarrow{G})(M) = \lambda \operatorname{div} \overrightarrow{F}(M) + \operatorname{div} \overrightarrow{G}(M) \tag{31.27}$$

Démonstration. C'est une conséquence de la linéarité des dérivées partielles. □

Proposition 31.9. Soient $\overrightarrow{F} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteurs et $\varphi \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Alors pour tout point $M \in U$, on a

$$\operatorname{div}(\varphi \overrightarrow{F})(M) = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \varphi, \overrightarrow{F} \right\rangle (M) + (\varphi \operatorname{div} \overrightarrow{F})(M). \tag{31.28}$$

Démonstration. Dans le cas où $n = 2$ avec les notations précédentes, on a

$$(\varphi \overrightarrow{F})(M) = (\varphi(M)P(M), \varphi(M)Q(M)) \tag{31.29}$$

$$\operatorname{div}(\varphi \overrightarrow{F})(M) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(M)P(M) + \varphi(M)\frac{\partial P}{\partial x}(M) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(M)Q(M) + \varphi(M)\frac{\partial P}{\partial y}(M) \tag{31.30}$$

$$= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \varphi(M), \overrightarrow{F}(M) \right\rangle + \varphi(M) \operatorname{div} \overrightarrow{F}(M) \tag{31.31}$$

□

31.2.4 Rotationnel

Dans cette sous-section, $n = 3$.

Définition 31.6. Soit $\overrightarrow{F} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$ un champ de vecteur. Pour tout point $M \in U$, on définit un vecteur appelé rotationnel de $\overrightarrow{F}$ au point M, noté $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \overrightarrow{F}(M)$, défini par

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \overrightarrow{F}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y}(M) - \frac{\partial Q}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial P}{\partial z}(M) - \frac{\partial R}{\partial x}(M) \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(M) - \frac{\partial P}{\partial y}(M) \end{pmatrix}. \tag{31.32}$$

L'application $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \overrightarrow{F} : \left\{ \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ M & \longmapsto & \overrightarrow{\mathbf{rot}}\, \overrightarrow{F}(M) \end{array} \right.$ est un champ de vecteurs.

Proposition 31.10. Soient $\overrightarrow{F} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$ un champ de vecteurs et φ un champs de scalaire de classe $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Alors pour tout point $M \in U$, on a

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\varphi \overrightarrow{F})(M) = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, \varphi(M) \wedge \overrightarrow{F}(M) + \varphi(M)\, \overrightarrow{\mathbf{rot}}(\overrightarrow{F})(M). \tag{31.33}$$

Démonstration. Soit $M \in U$. On a

$$(\varphi \overrightarrow{F})(M) = \begin{pmatrix} \varphi(M)P(M) \\ \varphi(M)Q(M) \\ \varphi(M)R(M) \end{pmatrix}. \tag{31.34}$$

Alors

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\varphi\overrightarrow{F})(M)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M)R(M) + \varphi(M)\frac{\partial R}{\partial y}(M) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M)Q(M) - \frac{\partial Q}{\partial z}(M)\varphi(M) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M)P(M) + \varphi(M)\frac{\partial P}{\partial z}(M) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M)R(M) - \frac{\partial R}{\partial x}(M)\varphi(M) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M)Q(M) + \varphi(M)\frac{\partial Q}{\partial x}(M) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M)P(M) - \frac{\partial P}{\partial y}(M)\varphi(M) \end{pmatrix} \tag{31.35}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M)R(M) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M)Q(M) + \varphi(M)\left(\frac{\partial R}{\partial y}(M) - \frac{\partial Q}{\partial z}(M)\right) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z}(M)P(M) - \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M)R(M) + \varphi(M)\left(\frac{\partial P}{\partial z}(M) - \frac{\partial R}{\partial x}(M)\right) \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(M)Q(M) - \frac{\partial\varphi}{\partial y}(M)P(M) + \varphi(M)\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(M) - \frac{\partial P}{\partial y}(M)\right) \end{pmatrix} \tag{31.36}$$

$$= \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,\varphi(M) \wedge \overrightarrow{F}(M) + \varphi(M)\,\overrightarrow{\mathbf{rot}}(\overrightarrow{F})(M). \tag{31.37}$$

□

Proposition 31.11. Soit $\overrightarrow{F} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$ un champ de vecteurs et soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, alors

$$\operatorname{div}(\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{u})(M) = \left\langle \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{F}(M), \overrightarrow{u} \right\rangle. \tag{31.38}$$

Démonstration. Si on note $\overrightarrow{u} = (a, b, c)$ alors

$$\overrightarrow{F}(M) \wedge \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} cQ - bR \\ aR - cP \\ bP - aQ \end{pmatrix}(M). \tag{31.39}$$

En calculant la divergence :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\overrightarrow{F} \wedge \overrightarrow{u})(M) &= c\frac{\partial Q}{\partial x}(M) - b\frac{\partial R}{\partial x}(M) + a\frac{\partial R}{\partial y}(M) \\ &\quad - c\frac{\partial P}{\partial y}(M) + b\frac{\partial P}{\partial z}(M) - a\frac{\partial Q}{\partial z}(M) && (31.40) \\ &= \left\langle \overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{F}(M), \overrightarrow{u} \right\rangle. && (31.41) \end{aligned}$$

□

31.2.5 Potentiel scalaire

Définition 31.7. Soient $\overrightarrow{F} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^n)$ un champ de vecteurs. On dit que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire s'il existe un champ de scalaires $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ tel que $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,f$.

Proposition 31.12 (Dans le cas où $n = 3$)**.** Tout champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ qui dérive d'un potentiel scalaire admet un rotationnel nul.

Démonstration. Notons $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}\,f$ avec $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$. Pour tout $M \in U$, on a

$$\overrightarrow{F}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(M)\overrightarrow{e_1} + \frac{\partial f}{\partial y}(M)\overrightarrow{e_2} + \frac{\partial f}{\partial z}(M)\overrightarrow{e_3}. \tag{31.42}$$

Lorsqu'on calcule la première composante du rotationnel de $\overrightarrow{F}$, puisque f est de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(M) - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(M) = 0, \tag{31.43}$$

d'après le théorème de Schwarz.

Le calcul donne le même résultat pour la deuxième et troisème composante du vecteur, de telle sorte que $\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{F}(M) = \overrightarrow{0}$. □

Corollaire 31.12.1. *Pour tout champ scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ $f \in classe1(U, \mathbb{R})$, on a pour tout point $M \in U$*

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,f(M) = \overrightarrow{0}. \tag{31.44}$$

Définition 31.8. On appelle ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ pour lequel il existe $\Omega \in U$ tel que pour tout $M \in U$, $[\Omega M] \subset U$.

En particulier les convexes sont étoilés.

Théorème 31.5 (Admis)**.** *Soit U un ouvert étoilé de $\mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{F} \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R}^3)$ un champ de vecteurs dont le rotationnel est identiquement nul sur U. Alors $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire.*

31.2.6 Laplacien

Définition 31.9. Soit un champ de scalaires $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$, on appelle laplacien de f au point M, le réel noté $\Delta f(M)$, défini par :

$$\Delta f(M) = \operatorname{div}(\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,f)(M) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial {x_i}^2}(M). \tag{31.45}$$

Définition 31.10. Avec les mêmes hypothèse, on dit que f est harmonique si son laplacien est nul sur U.

31.2.7 Opérateur Nabla

D'un point de vue mnémotechnique, posons

$$\overrightarrow{\nabla} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \overrightarrow{e_i}. \tag{31.46}$$

Alors, formellement, on a

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,f = \overrightarrow{\nabla} f \tag{31.47}$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{F} = \left\langle \overrightarrow{\nabla}, \overrightarrow{F} \right\rangle \tag{31.48}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\overrightarrow{F} = \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F} \tag{31.49}$$

$$\Delta f = \overrightarrow{\nabla}^2 f. \tag{31.50}$$

31.3 Intégrale curviligne

Supposons que la notion de courbe paramétrée s'étend à l'espace ($n \in \{2,3\}$). Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma = ([a,b], f)$ un arc paramétré de $\mathbb{R}^n$, supposé de classe $\mathcal{C}^1$, régulier et orienté, dont le support est inclus dans l'ouvert U. Soit $\overrightarrow{F}$ un champ de vecteurs continu sur U.

Proposition 31.13. L'intégrale $\int_a^b \left\langle \overrightarrow{F}(f(t)), \overrightarrow{f'(t)} \right\rangle \mathrm{d}t$ ne dépend pas du paramétrage choisi de l'arc Γ.

Définition 31.11. Cette intégrale est appelée intégrale curviligne (ou circulation) de $\overrightarrow{F}$ sur Γ, elle est notée $\oint_\Gamma \overrightarrow{F}(M)\overrightarrow{\mathrm{d}M}$.

Démonstration. Soit $([\alpha,\beta], g)$ un paramétrage admissible de Γ. Il existe un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ strictement croissant tel que $f = g \circ \varphi$. Alors

$$\int_a^b \left\langle \overrightarrow{F}(f(t)), \overrightarrow{f'(t)} \right\rangle \mathrm{d}t = \int_a^b \left\langle \overrightarrow{F}(g\circ\varphi(t)), \varphi'(t)\overrightarrow{g'(\varphi(t))} \right\rangle \mathrm{d}t \tag{31.51}$$

$$= \int_a^b \left\langle \overrightarrow{F}(g\circ\varphi(t)), \overrightarrow{g'(\varphi(t))} \right\rangle \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{31.52}$$

$$= \int_\alpha^\beta \left\langle \overrightarrow{F}(g(u)), \overrightarrow{g'(u)} \right\rangle \mathrm{d}u. \tag{31.53}$$

□

Proposition 31.14. Sous les mêmes hypothèses, on suppose de plus que le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ déribe d'un potentiel scalaire h. Alors

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{F}(M)\overrightarrow{\mathrm{d}M} = h(B) - h(A), \tag{31.54}$$

où $A = f(a)$ et $B = f(B)$ sont les extrémités de la courbes.

Particulièrement la circulation d'un champ de vecteurs qui dérive d'un potentiel sur une courbe fermée est nulle.

Dans le cas où $n = 2$.

$$\oint_\Gamma \overrightarrow{F}(M)\overrightarrow{\mathrm{d}M} = \int_a^b \left\langle \overrightarrow{F}(f(t)), \overrightarrow{f'(t)} \right\rangle \mathrm{d}t \tag{31.55}$$

$$= \int_a^b \left\langle \overrightarrow{\mathbf{grad}}\, h(x(t),y(t)), (x'(t),y'(t)) \right\rangle \mathrm{d}t \tag{31.56}$$

$$= \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(x(t),y(t))x'(t) + \frac{\partial h}{\partial y}(x(t),y(t))y'(t)\,\mathrm{d}t \tag{31.57}$$

$$= \int_a^b (h\circ f)'(t)\,\mathrm{d}t \tag{31.58}$$

$$= h\circ f(b) - h\circ f(a) \tag{31.59}$$

$$= h(B) - h(A). \tag{31.60}$$

□

31.4 Formule de Green-Riemann

Théorème 31.6 (Admis)**.** *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine simple de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière Γ est supposée de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et orientée positivement.*

Soient P et Q deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U qui contient $\mathfrak{D}$. Alors

$$\oint_\Gamma P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{31.61}$$

Deuxième partie

Fiches complémentaires

Annexe A

Quelques symboles

A.1 Alphabet grec

α, A : alpha
β, B : beta
γ, Γ : gamma
δ, Δ : delta
ϵ, E : epsilon
ζ, Z : zêta
η, E : êta
θ, Θ : theta

ι, I : iota
κ, K : kappa
λ, Λ : lambda
μ, M : mu
ν, N : nu
ξ, Ξ : xi
o, O : omicron
π, Π : pi

ρ, R : rho
σ, Σ : sigma
τ, T : tau
υ, Υ : upsilon
φ, Φ : phi
χ, X : chi
ψ, Ψ : psi
ω, Ω : omega

A.2 Quantificateurs

Le quantificateur universel, noté $\forall$, veut dire “pour tout” ou “quelque soit”. Le quantificateur existentiel, noté $\exists$, signifie “il existe ... tel que”. Le quantificateur existentiel, noté $\exists!$, signifie “il existe un unique ... tel que”.

A.3 Symboles ensemblistes

Le symbole $\in$ signifie “appartient à” et exprime l’appartenance d’un élément à un ensemble. Sa négation est notée $\notin$. Par exemple $1 \in \mathbb{N}$, $2+\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$. Le symbole $\subset$ signifie “est contenu dans” et exprime l’inclusion d’un ensemble dans un autre. Sa négation est notée $\not\subset$. Par exemple $N \subset \mathbb{R}$ mais $\mathbb{C} \not\subset \mathbb{R}$. Le symbole $\subsetneq$ signifie “est contenu dans et est différent”. Par exemple l’ensemble des fonctions à valeurs réelles dérivables sur un intervalle I sont continues sur I, mais les fonctions continues ne sont pas toutes dérivables : $\mathcal{D}(I, \mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$. Le symbole $\emptyset$ est “l’ensemble vide”, il ne possède aucun élément.

$\cup$ “union”, c’est l’union de deux ensembles. Par exemple, soit deux ensembles A et B alors $A \cup B$ est l’ensemble des éléments appartenant à A *ou* à B.

$\cap$ “inter”, c’est l’intersection de deux ensembles. Par exemple, soit deux ensembles A et B alors $A \cap B$ est l’ensemble des éléments appartenant à A *et* à B.

$\setminus$ “privé de”, c’est la différence de deux ensembles. Par exemple, soit deux ensembles A et B alors $A \setminus B$ est l’ensemble des éléments appartenant à A *mais* *pas* à B.

Δ "différence symétrique", c'est la différence symétrique.

Annexe B

Formulaire de trigonométrie

B.1 Trigonométrie circulaire

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{1}{1+\mathrm{cotan}^2\, x} \tag{B.1}$$

B.1.1 Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b, \tag{B.2}$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b, \tag{B.3}$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b, \tag{B.4}$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b, \tag{B.5}$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}, \tag{B.6}$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} \tag{B.7}$$

B.1.2 Formules de linéarisation

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b) - \cos(a+b)}{2} \tag{B.8}$$
$$\sin a \cos b = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2} \tag{B.9}$$
$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a+b) + \cos(a-b)}{2} \tag{B.10}$$

B.1.3 Transformation de sommes en produits

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \tag{B.11}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}, \tag{B.12}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}, \tag{B.13}$$
$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2} \tag{B.14}$$

B.1.4 Arc double et arc moitié

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \tag{B.15}$$
$$\sin(2x) = 2\sin x\cos x \tag{B.16}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}, \sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2} \tag{B.17}$$

En notant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, on a :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \tan x = \frac{2t}{1-t^2} \tag{B.18}$$

B.2 Trigonométrie hyperbolique

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2 x}, \quad \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{\coth^2 x - 1} \tag{B.19}$$

B.2.1 Formules d'addition

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b, \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \tag{B.20}$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \cos b + \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b, \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b - \operatorname{ch} a \operatorname{sh} b \tag{B.21}$$
$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \operatorname{th} b}, \operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b} \tag{B.22}$$

B.2.2 Formules de linéarisation

$$\operatorname{sh} a \operatorname{sh} b = \frac{\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)}{2} \tag{B.23}$$
$$\operatorname{sh} a \operatorname{ch} b = \frac{\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)}{2} \tag{B.24}$$
$$\operatorname{ch} a \operatorname{ch} b = \frac{\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)}{2} \tag{B.25}$$

B.2.3 Transformation de sommes en produits

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{ch} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}, \tag{B.26}$$

$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{sh} \frac{p-q}{2}, \tag{B.27}$$

$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p+q}{2} \operatorname{ch} \frac{p-q}{2}, \tag{B.28}$$

$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2 \operatorname{sh} \frac{p-q}{2} \operatorname{ch} \frac{p+q}{2}, \tag{B.29}$$

B.2.4 Arc double et arc moitié

$$\operatorname{ch}(2x) = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x \tag{B.30}$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \tag{B.31}$$

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{1 + \operatorname{ch}(2x)}{2}, \operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch}(2x) - 1}{2} \tag{B.32}$$

Annexe C

Plan d'étude d'une fonction

Soient I un intervalle réel contenant au moins deux points (ou éventuellement une réunion d'intervalles) et $f : I \longmapsto \mathbb{R}$ une application. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan.

C.1 Domaine de définition

Si nécessaire, on étudie le domaine de définition de l'application f. On détermine ensuite les éventuelles symétries de la fonctions f (périodicité, parité). Si f est paire, impaire et/ou périodique, on peut se placer sur un sous-intervalle de I bien choisi pour la suite de l'étude.

C.2 Étude des variations

Si f est dérivable sur I, ce qu'on justifies succintement, on calcule la dérivée de f et on étudie son signe. Sinon, il faudra étudier les variations "à la main". C'est un cas rare, en général seuls quelques points posent d'éventuels problèmes.

On établit ensuite un tableau de variations sur l'intervalle considéré, où l'on précisera les valeurs exactes remarquables, les limites, les prolongements par continuité éventuels, pour lesquels on étudiera alors la dérivabilité de la fonction prolongée.

C.3 Étude aux bornes

Notons que si I est un segment, il n'y a rien à faire ici.

C.3.1 Étude en $+\infty$

On suppose que $I = [c, +\infty[$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Définition C.1. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) - [ax + b] = 0 \tag{C.1}$$

1. Si f admet une limite finie ℓ en $+\infty$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = \ell$;
2. Si f admet une limite infinie en $+\infty$, on recherche l'existence d'une direction asymptotique en étudiant la quantité $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$
   (a) Si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers $\pm\infty$ alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction verticale ;
   (b) Si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers une limite réelle a alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet la direction asymptotique d'équation $y = ax$. On détermine l'éventuelle existence d'une asymptote en étudiant la quantité $f(x) - ax$
      i. Si $f(x) - ax$ tend vers une limite b réelle alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $y = ax + b$;
      ii. Si $f(x) - ax$ tend vers une limite infinie alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite $y = ax$.

C.3.2 Étude à gauche d'un réel d

On suppose que $I = [c, d[$ avec $c, d \in \mathbb{R}$ tels que $c < d$.

1. Si f admet une limite en d finie ℓ, on peut prolonger f par continuité en d ;
2. Si f admet une limite en d infinie, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote la droite d'équation $x = d$.

C.4 Tracé

C.5 Placement de deux courbes l'une par rapport à l'autre

Si on doit tracer les courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de deux applications f et g définies sur le même intervalle I, il faut étudier le signe de la différence $f - g$. Dans le cas où f et g sont à valeurs strictement positives, on pourra également former le quotient $\frac{f}{g}$ et le comparer à 1.

Annexe D

Trois théorèmes généraux d'analyse pour aborder l'étude des fonctions usuelles

Les résultats énoncés ici seront démontrés plus tard dans l'année, mais servent pour létude des fonctions usuelles. Soient I un intervalle réel contenant au moins deux points et une application $f \in \mathbb{R}^I$.

D.1 Existence de primitives

Définition D.1. On appelle primitive de l'application f sur I une application $F \in \mathbb{R}^I$ dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x). \tag{D.1}$$

Théorème D.1. *Toute application continue sur l'intervalle I admet des primitives sur I. Plus précisèment, quelque soit $a \in I$, si f est continue sur I alors elle admet une unique primitive F qui s'annule en a et F est définie par*

$$\forall x \in I \quad F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t. \tag{D.2}$$

Les autres primitives de f sur I sont les applications $F + c$ avec c une application constante de I vers $\mathbb{R}$.

D.2 Monotonie et bijectivité

Définition D.2. L'application f est dite strictement monotone sur I si elle y est strictement croissante ou strictement décroissante

Définition D.3. Soit J une partie de $\mathbb{R}$. On dit que l'application f induit une bijection de I sur J si tout élément de J admet un unique antécédent par f dans

I. On définit alors l'application réciproque $f^{-1} \in I^J$ qui a tout élément $y \in J$ associe l'unique élément $x \in I$ tel que $y = f(x)$.

Théorème D.2. *Si f est une application continue est strictement monotone de I vers $\mathbb{R}$, alors*

— *$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ est un intervalle de $\mathbb{R}$;*

— *f induit une bijection de I vers $f(I)$;*

— *l'application réciproque f^{-1} est une application continue et strictement monotone de $f(I)$ vers $\mathbb{R}$ et de plus elle est de même monotonie que f.*

D.3 Dérivation de l'application réciproque

Théorème D.3. *Si l'application f est continue et strictement monotone sur l'intervalle I et si de plus elle est dérivable en tout point de I, alors pour tout $y \in f(I)$*

— *si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en y et*

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}; \tag{D.3}$$

— *si $f'(f^{-1}(y)) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en y. Graphiquement, la courbe représentative admet une tangente verticale au point de coordonnées $(y, f^{-1}(y))$.*

Annexe E

Construction du corps des complexes

On munit l'ensemble $\mathbb{R}^2$ de deux lois internes, une addition notée $+$ et une multiplication notée $\times$ définies pour tout $x, x', y, y' \in \mathbb{R}$par

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \tag{E.1}$$
$$(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y) \tag{E.2}$$

Proposition E.1. $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe abélien, c'est à dire

1. la loi $+$ est associative et commutative. Soient $x, x', x'', y, y', y'' \in \mathbb{R}$

$$[(x, y) + (x', y')] + (x'', y'') = (x, y) + [(x', y') + (x'', y'')] \tag{E.3}$$
$$(x, y) + (x', y') = (x', y') + (x, y); \tag{E.4}$$

2. $\mathbb{R}^2$ possède un élément neutre pour $+$: $(0, 0)$;

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x, y) + (0, 0) = (x, y) \tag{E.5}$$

3. Tout élément de $\mathbb{R}^2$ est inversible par $+$;

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (-x, -y) + (x, y) = (0, 0) \tag{E.6}$$

Proposition E.2. $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un anneau commutatif, c'est à dire

1. $(\mathbb{R}^2, +)$ est un groupe abélien ;
2. la loi $\times$ est associative et commutative, c'est à dire que pour tout $x, x', x'', y, y', y'' \in \mathbb{R}$

$$[(x, y) \times (x', y')] \times (x'', y'') = (x, y) \times [(x', y') \times (x'', y'')] \tag{E.7}$$
$$(x, y) \times (x', y') = (x', y') \times (x, y); \tag{E.8}$$

3. la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi $+$. Soient $x, x', x'', y, y', y'' \in \mathbb{R}$

$$(x, y) \times [(x', y') + (x, y)] = (x, y) \times (x', y') + (x, y) \times (x'', y''); \tag{E.9}$$

4. $\mathbb{R}^2$ possède un élément neutre pour la loi $\times$: $(1, 0)$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x, y) \times (1, 0) = (x, y); \tag{E.10}$$

Démonstration. 1. Déjà vu ;

2. La commutativité est triviale d'après la définition de $\times$. Montrons l'associativité. Soient $x, x', y', x'', y'' \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}
[(x,y)\times(x',y')]\times(x'',y'') &= (xx'-yy', xy'+x'y)\times(x'',y'') && \text{(E.11)}\\
&= (xx'x''-yy'x''-xy'y''-x'yy'',\\
&\quad xx'y''-yy'y''+xy'x''+x'yx'') && \text{(E.12)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(x,y)\times[(x',y')\times(x'',y'')] &= (x,y)\times(x'x''-y'y'', x'y''+x''y') && \text{(E.13)}\\
&= (xx'x''-xy'y''-yy'x''-x'yy'',\\
&\quad xx'y''+xy'x''+x'yx''-yy'y'') && \text{(E.14)}
\end{aligned}$$

d'où l'égalité.

3. Soient $x, x', y', x'', y'' \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}
(x,y)\times[(x',y')+(x'',y'')] &= (x,y)\times(x'+x'', y'+y'') && \text{(E.15)}\\
&= (xx'+xx''-yy'-yy'',\\
&\quad xy'+xy''+yx'+yx'') && \text{(E.16)}\\
&= (xx'-yy', xy'+yx')\\
&\quad +(xx'-yy'', xy''+yx'') && \text{(E.17)}\\
&= (x,y)\times(x',y')+(x,y)\times(x'',y'') && \text{(E.18)}
\end{aligned}$$

□

Proposition E.3. $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un corps commutatif, c'est à dire

1. $(\mathbb{R}^2, +, \times)$ est un anneau commutatif ;
2. Tous les éléments non nuls sont inversibles pour $\times$ et le neutre et $(1,0)$;
3. Le neutre pour $+$ est différent du neutre pour $\times$.

Démonstration. 1. Déjà vu ;

2. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $(x,y) \neq (0,0)$. Alors $x^2+y^2 > 0$ et

$$(x,y)\times\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,-y) = (1,0) \qquad \text{(E.19)}$$

□

Soit l'application $\varphi\colon \left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ x & \longmapsto & (x,0)\end{array}\right.$. Elle est injective et c'est un morphisme d'anneaux :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad \varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),\ \varphi(xy)\varphi(x)\varphi(y),\ \varphi(1)=(1,0) \qquad \text{(E.20)}$$

On peut donc identifier $\mathbb{R}$ et le sous-ensemble $\mathbb{R}\times\{0\}$ de $\mathbb{R}^2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, x avec $(x,0)$.

Définition E.1. On note $\mathbb{C}$ l'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni des deux lois $+$ et $\times$.

Ainsi, $\mathbb{C}$ est un corps commutatif. On appelle i le complexe $(0,1)$ et donc $\mathrm{i}^2 = (0,1) \times (0,1) = (-1,0) = -1$. On a alors pour tout couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = (x,0) \times (1,0) + (y,0) \times (0,1) = x \times 1 + y \times \mathrm{i} = x + \mathrm{i}\, y \tag{E.21}$$

On adopte la notation définitive du complexe $(x,y) = x + \mathrm{i}\, y$. L'écriture $z = x+\mathrm{i}\, y, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ s'appelle la forme normale ou la forme algébrique du complexe z.

Proposition E.4. Pour tout élément $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + \mathrm{i}\, y$.

Démonstration. Pour tout $(x,y,x',y') \in \mathbb{R}^4$, on a

$$z = x + \mathrm{i}\, y = x' + \mathrm{i}\, y' \Longleftrightarrow z = (x,y) = (x',y') \Longleftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases} \tag{E.22}$$

□

Annexe F

Fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou dans $\mathbb{R}^2$

Les propositions énoncées ci-dessous peuvent être pour l'instant considérées comme des définitions.

F.1 Fonctions d'un intervalle réel dans $\mathbb{C}$

Soit I un intervalle réel contenant au moins deux points et $f : I \longmapsto \mathbb{C}$ une application. Se donner une fonction f revient à se donner les deux applications "partie réelle" x et "partie imaginaire" y telles que $f = x + \mathrm{i}\, y$. Ces applications sont définies telles que

$$x\colon \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \Re(f(t)) \end{array} \right. \qquad y\colon \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \Im(f(t)) \end{array} \right. \tag{F.1}$$

Proposition F.1. Soit a un point ou une borne de I. L'application f admet une limite au point a si et seulement si les applications x et y admettent des limites au point a, auquel cas

$$\lim_{t \to a} f(t) = \lim_{t \to a} x(t) + \mathrm{i} \lim_{t \to a} y(t) \tag{F.2}$$

Proposition F.2. L'application f est continue sur I si et seulement si x et y sont continues sur I.

Proposition F.3. Soit t un point de I. L'application f est dérivable au point t si et seulement si les applications x et y sont dérivables en t et auquel cas

$$f'(t) = x'(t) + \mathrm{i}\, y'(t) \tag{F.3}$$

On montre que les théorèmes usuels sur la dérivation (respectivement la continuité et les limites) d'une somme ou d'un produit de fonctions dérivables (respectivement continues et admettant des limites), ou d'un quotient de fonctions dérivables (respectivement continues et admettant des limites) dont le dénominateur ne s'annule pas, se prolongent aux fonctions à valeurs complexes.

Théorème F.1. *Toute application continue $f : I \longmapsto \mathbb{C}$ admet des primitives sur I. Si $F : I \longmapsto \mathbb{C}$ est une primitive de f sur I, alors les autres primitives sur I sont les applications $F + c$ où c est une application constante sur I.*

F.2 Fonctions d'un intervalle réel dans $\mathbb{R}^2$

On rappelle que l'ensemble $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des couples (x, y) de réels. Il est muni d'une addition définie par $(x, y) + (x' + y') = (x + x', y + y')$ et d'une multiplication scalaire définie par $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$.

Soient I un intervalle réel contenant au moins deux points et $f : I \longmapsto \mathbb{R}^2$ une application. Se donner une application f revient à se donner les deux applications "coordonnées" $x : I \longmapsto \mathbb{R}$ et $y : I \longmapsto \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in I$ $f(t) = (x(t), y(t))$.

Proposition F.4. Soit a un point ou une borne de I. L'application f admet une limite au point a si et seulement si les applications x et y admettent des limites au point a, auquel cas

$$\lim_{t\to a} f(t) = \left(\lim_{t\to a} x(t), \lim_{t\to a} y(t)\right) \tag{F.4}$$

Proposition F.5. L'application f est continue sur I si et seulement si les applications x et y sont continues sur I.

Proposition F.6. Soit t un point de I. L'application f est dérivable au point t si et seulement si les applications x et y sont dérivables en t et auquel cas

$$f'(t) = (x'(t), y'(t)) \tag{F.5}$$

On montre que les théorèmes usuels sur la dérivation (respectivement la continuité et les limites) d'une somme ou d'un produit de fonctions dérivables (respectivement continues et admettant des limites), ou d'un quotient de fonctions dérivables (respectivement continues et admettant des limites) dont le dénominateur ne s'annule pas, se prolongent aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Annexe G

Plan géométrique euclidien – Prérequis

L'objet de cette anexxe est de rappeler des résultats et des notions supposés connus à l'issue de la classe de terminale scientifique, mais avec une formalisation nouvelle. Le plan géométrique euclidien $\mathcal{P}$ est un ensemble dont les éléments son appelés points et notés en lettres majusucules. On lui associe une ensemble noté $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et appelé plan vectoriel euclidien. Ses éléments sont appelés vecteurs et notés en lettres minuscules coiffés d'une flèche. On appelle scalaire les éléments de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

G.1 Plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$

Le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni de deux lois :

— la loi d'addition vectorielle, qui aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ fait correspondre le vecteur noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$;

— la loi de multiplication par un scalaire, qui au scalaire λ et au vecteur $\overrightarrow{u}$ fait correspondre le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$.

Il possède de plus un élément appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$.

Proposition G.1. $(\overrightarrow{\mathcal{P}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, ce qui signifie que pour tout $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ tout scalaires λ, μ on a :

1. $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$, la loi + est associative ;
2. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$, la loi + est commutative ;
3. $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$, le vecteur nul est neutre pour l'addition ;
4. il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}' \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ tel que $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{u}' = \overrightarrow{0}$, c'est l'opposé $\overrightarrow{u}' = -\overrightarrow{u}$;
5. $1\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}$;
6. $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$;
7. $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$;
8. $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$, c'est la distributivité de $\cdot$ sur + ;
9. $0\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Définition G.1. Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

1. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si :
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \exists\lambda \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} \tag{G.1}$$
2. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires et de même sens si :
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0} \text{ ou } \exists\lambda \in \mathbb{R}_+\ \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} \tag{G.2}$$

Proposition G.2. Il existe dans $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ des couples $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de vecteurs non colinéaires. De plus, si $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un tel couple, alors c'est une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, c'est-à-dire que pour tout vecteur $\overrightarrow{w} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ il existe un unique couple de scalaires (λ, μ) tel que
$$\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \tag{G.3}$$

Définition G.2. Le couple (λ, μ) est alors appelé coordonnées du vecteur $\overrightarrow{w}$ dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Ce résultat caractérise le fait que $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est un espace vectoriel de dimension deux, c'est-à-dire un plan (cf. chapitre **??**).

G.2 Plan affine $\mathcal{P}$

Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'une loi qui aux points A et B fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Proposition G.3. Soient trois points de $\mathcal{P}$, A, B et C et alors :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, c'est la relation de Chasles ;
2. $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$;
3. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$;
4. pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$, il existe un unique point $A' \in \mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u}$. On note alors $A' = A + \overrightarrow{u}$.

Définition G.3.
1. On dit que trois points A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
2. On dit que trois points A, B et C sont alignés dans cet ordre si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et de même sens.

Définition G.4. On appelle point pondéré tout couple (A, λ) où $A \in \mathcal{P}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition G.4. Soient un naturel $n \geq 2$ et $\{(A_k, \lambda_k)_{k\in[\![1;n]\!]}\}$ une famille de n points pondérés telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$. Alors il existe un unique point $G \in \mathcal{P}$ tel que
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0 \tag{G.4}$$
Il est appelé barycentre du système de points pondérés $\{(A_k, \lambda_k)_{k\in[\![1;n]\!]}\}$ et on note
$$G = \mathrm{Bar}\{(A_k, \lambda_k)_{k\in[\![1;n]\!]}\} \tag{G.5}$$

On a alors pour tout point $M \in \mathcal{P}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MG} \tag{G.6}$$

Proposition G.5. Soient $A, B, A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q$ des points de $\mathcal{P}$ et λ, μ, λ_1, $\ldots$, λ_p, et μ_1, $\ldots$, μ_q des réels. En notant $G = \mathrm{Bar}\{(A_k, \lambda_k)_{k\in[\![1;p]\!]}\}$, $\alpha = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$, $H = \mathrm{Bar}\{(B_l, \mu_l)_{l\in[\![1;q]\!]}\}$, et $\beta = \sum_{i=1}^{q} \mu_i$ on a

1. L'associativité du barycentre, c'est à dire que
$$\mathrm{Bar}\{(G, \alpha), (H, \beta)\} = \mathrm{Bar}\{(A_k, \lambda_k)_{k\in[\![1;p]\!]}, (B_l, \mu_l)_{l\in[\![1;q]\!]}\} \tag{G.7}$$
2. La commutativité du barycentre
$$\mathrm{Bar}\{(A, \lambda), (B, \mu)\} = \mathrm{Bar}\{(B, \mu), (A, \lambda)\} \tag{G.8}$$
3. $$\mathrm{Bar}\{(A, \lambda), (A, \lambda)\} = A \tag{G.9}$$

G.3 Distances et normes

Le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'une loi qui au vecteur $\overrightarrow{u}$ associe le réel noté $||\overrightarrow{u}||$ appelé sa norme ou norme euclidienne.

Proposition G.6. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\vec{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes

1. positivité
$$||\overrightarrow{u}|| \geq 0 \tag{G.10}$$
2. séparation
$$||\overrightarrow{u}|| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \vec{0} \tag{G.11}$$
3. homogénéité
$$||\lambda\overrightarrow{u}|| = |\lambda| \cdot ||\overrightarrow{u}|| \tag{G.12}$$
4. inégalité triangulaire
$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}|| \tag{G.13}$$
égalité si et seulement s'ils sont colinéaires et de même sens

Le plan affine $\mathcal{P}$ est muni d'une loi qui aux points A et B fait correspondre le réel $||\overrightarrow{AB}||$, noté AB et appelé distance de A à B.

Proposition G.7. Soient A, B et C trois points de $\mathcal{P}$ on a les propriétés suivantes

1. positivité
$$AB \geq 0 \tag{G.14}$$
2. séparation
$$AB = 0 \Rightarrow A = B \tag{G.15}$$
3. symétrie
$$AB = BA \tag{G.16}$$
4. inégalité triangulaire
$$AC \leq AB + BC \tag{G.17}$$
égalité si et seulement si A B et C sont alignés dans cet ordre

G.4 Angles non orientés, orthogonalité

Le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est muni d'une loi qui aux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ associe le réel noté $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$, appartenant à $[0,\pi]$, appelé mesure de l'angle non orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Proposition G.8. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et un réel non nul λ, on a

1. $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{w})} \leq \widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} + \widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})}$
2. $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{u})} = 0$
3. $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} = \widehat{(\overrightarrow{v},\overrightarrow{u})}$
4. Si $\lambda > 0$ $\widehat{(\overrightarrow{u},\lambda\overrightarrow{v})} = \widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$ et si $\lambda < 0$ alors $\widehat{(\overrightarrow{u},\lambda\overrightarrow{v})} = -\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul ou si $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} = 0$ ou π.

Définition G.5. On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est nul ou si $\overrightarrow{v}$ est nul ou encore si $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})} = \frac{\pi}{2}$.

Étant donné trois points A, B et C de $\mathcal{E}$ tels que $A \neq B$ et $C \neq B$, on appelle mesure de l'angle non orienté $\widehat{ABC}$ la mesure de l'angle non orienté $\widehat{(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})}$.

Proposition G.9. Pour tout triangle ABC rectangle en B, on a

1. Le théorème de Pythagore : $AB^2 + BC^2 = AC^2$;
2. $AB = AC\cos(\widehat{ABC})$;
3. $BC = AC\sin(\widehat{ABC})$;
4. $BC = AB\tan(\widehat{ABC})$.

G.5 Bases et repères

Un couple $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ de vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ est une base de $\vec{E}$ si et seulement si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ sont non coplinéaires.

Définition G.6. On appelle repère de l'espace $\mathcal{P}$ tout triplet $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ où O est un point quelconque de l'espace $\mathcal{P}$ et $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Si M est un point de $\mathcal{P}$, on appelle coordonnées du point M dans le repère $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ l'unique couple de réels (x,y) tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v} \tag{G.18}$$

Soient $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et θ la mesure principale de l'angle orineté $\widehat{(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})}$. Par définition, $\theta \in]-\pi,\pi]$ et comme $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires, $\theta \neq 0$. Si $\theta > 0$ on dit que la base est directe sinon on dit qu'elle est indirecte.

Définition G.7. On dit qu'un repère $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est direct (resp. indirect) si la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est directe (resp. indirecte).

Définition G.8. On dit que $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est une base orthonormée si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs orthogonaux et de norme 1. Le repère $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est orthonormé si la base $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ est orthonormée.

G.6 Figures usuelles

Soient A et B deux points distincts du plan $\mathcal{P}$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

- La droite (AB) est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que A, B et M sont alignés. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).
- Le segment $[AB]$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que A, B et M sont alignés dans cet ordre.
- Le cercle de centre A et de rayon r est l'ensemble des points $M \in \mathcal{P}$ tels que $AM = r$.

Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan $\mathcal{P}$.

- On dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont orthogonales si elles ont des vecteurs directeurs orthogonaux.
- On dit que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Annexe H

Espace géométrique euclidien – Prérequis

L'objet de cette annexe est de rappeler des résultats et notions supposés connus à l'issue de la classe de terminale, mais avec une formalisation nouvelle. L'espace géométrique euclidien $\mathcal{E}$ est un ensemble dont les éléments sont appelés points et notés en lettre majuscules. On lui associe un ensemble noté $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ appelé espace vectoriel euclidien. Ses éléments sont appelés vecteurs et notés en minuscules surmontés d'une flèche. On appelle scalaire les éléments de l'ensemble $\mathbb{R}$, plus généralement les éléments d'un corps.

H.1 Espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$

L'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est muni de deux lois
- l'addition vectorielle, qui fait correspondre aux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur noté $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$;
- la multiplication scalaire, qui au scalaire λ et au vecteur $\overrightarrow{u}$ le vecteur noté $\lambda\overrightarrow{u}$.

Il possède de plus un élément appelé vecteur nul noté $\vec{0}$.

Proposition H.1. $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel, c'est à dire

1. $(\overrightarrow{\mathcal{E}}, +)$ est un groupe abélien ;
2. $\cdot$ admet un élément neutre noté 1 ;
3. $\cdot$ est associative ;
4. $\cdot$ est distributive sur $+$;
5. $0 \cdot \overrightarrow{u} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$

Définition H.1. Soient $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

1. On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires ou liés si
$$\overrightarrow{u} = \vec{0} \text{ ou } \exists\lambda \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u} \tag{H.1}$$
2. On dit que $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires ou liés si
$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont liés ou } \exists\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ \overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \tag{H.2}$$

Proposition H.2. Il existe dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ des triplets $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de vecteurs non coplanaires. De plus si $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un tel triplet alors c'est une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, c'est à dire que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que

$$\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} \tag{H.3}$$

Définition H.2. Le triplet (x, y, z) est alors appelé coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Ce résultat caractérise le fait que $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est un espace vectoriel de dimension trois, c'est à dire un espace.

H.2 Espace affine $\mathcal{E}$

L'espace affine $\mathcal{E}$ est muni d'une loi qui aux points A et B fait correspondre le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Proposition H.3. Soient A, B et C des points de $\mathcal{E}$, alors

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$;
2. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$;
3. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$;
4. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\mathcal{E}$ il existe une unique point $A' \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u}$. On note alors $A' = A + \overrightarrow{u}$.

Définition H.3. 1. On dit que trois points A, B et C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.

2. On dit que quatre points A, B, C et D sont coplanaires si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.

Définition H.4. On appelle points pondéré tout couple (A, λ) où A est point de $\mathcal{E}$ et λ un réel.

Proposition H.4. Soit un naturel $n \geq 2$ et $\{(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n)\}$ une famille de n points pondérés telle que $\sum_i^n \lambda_i \neq 0$. Alors il existe un unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = 0 \tag{H.4}$$

Il est appelé barycentre du système de points pondérés $\{(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n)\}$ et on note

$$G = \mathrm{Bar}\{(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_n, \lambda_n)\} \tag{H.5}$$

On a alors pour tout point $M \in \mathcal{E}$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MG} \tag{H.6}$$

Proposition H.5. Soient $A, B, A_1, \ldots, A_p, B_1, \ldots, B_q$ des points de $\mathcal{E}$ et $\lambda, \mu, \lambda_1, \ldots, \lambda_p, \mu_1, \ldots, \mu_q$ des réels. En notant $G = \mathrm{Bar}\{(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_p, \lambda_p)\}$, $\alpha = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i$, $H = \mathrm{Bar}\{(B_1, \mu_1), \ldots, (B_q, \mu_q)\}$, $\beta = \sum_{i=1}^{q} \mu_i$ on a

1. L'associativité du barycentre, c'est à dire que

$$\mathrm{Bar}\{(G,\alpha),(H,\beta)\} = \mathrm{Bar}\{(A_1,\lambda_1),\ldots,(A_p,\lambda_p),(B_1,\mu_1),\ldots,(B_q,\mu_q)\} \tag{H.7}$$

2. La commutativité du barycentre

$$\mathrm{Bar}\{(A,\lambda),(B,\mu)\} = \mathrm{Bar}\{(B,\mu),(A,\lambda)\} \tag{H.8}$$

3. $$\mathrm{Bar}\{(A,\lambda),(A,\lambda)\} = A \tag{H.9}$$

H.3 Distances et normes

L'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est muni d'une loi qui au vecteur $\overrightarrow{u}$ associe le réel noté $||\overrightarrow{u}||$ appelé sa norme ou norme euclidienne.

Proposition H.6. Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a les propriétés suivantes

1. positivité
$$||\overrightarrow{u}|| \geq 0 \tag{H.10}$$
2. séparation
$$||\overrightarrow{u}|| = 0 \Rightarrow \overrightarrow{u} = \vec{0} \tag{H.11}$$
3. homogénéité
$$||\lambda\overrightarrow{u}|| = |\lambda| \cdot ||\overrightarrow{u}|| \tag{H.12}$$
4. inégalité triangulaire
$$||\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}|| \leq ||\overrightarrow{u}|| + ||\overrightarrow{v}|| \tag{H.13}$$
égalité si et seulement s'ils sont colinéaires et de même sens

L'espace affine $\mathcal{E}$ est muni d'une loi qui aux points A et B fait correspondre le réel $||\overrightarrow{AB}||$, noté AB et appelé distance de A à B.

Proposition H.7. Soient A, B et C trois points de $\mathcal{E}$ on a les propriétés suivantes

1. positivité
$$AB \geq 0 \tag{H.14}$$
2. séparation
$$AB = 0 \Rightarrow A = B \tag{H.15}$$
3. symétrie
$$AB = BA \tag{H.16}$$
4. inégalité triangulaire
$$AC \leq AB + BC \tag{H.17}$$
égalité si et seulement si A B et C sont alignés dans cet ordre

H.4 Angles non orientés, orthogonalité

L'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est muni d'une loi qui aux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ associe le réel noté $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$, appartenant à $[0, \pi]$, appelé mesure de l'angle non orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

Proposition H.8. Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ des vecteurs non nuls de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et un réel non nul λ, on a

1. $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})} \leq \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} + \widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})}$
2. $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u})} = 0$
3. $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = \widehat{(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})}$
4. Si $\lambda > 0$ $\widehat{(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v})} = \widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$ et si $\lambda < 0$ alors $\widehat{(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v})} = -\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}$

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont donc colinéaires si et seulement si $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ est nul ou si $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = 0$ ou π.

Définition H.5. On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est nul ou si $\overrightarrow{v}$ est nul ou encore si $\widehat{(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})} = \frac{\pi}{2}$.

Étant donné trois points A, B et C de $\mathcal{E}$ tels que $A \neq B$ et $C \neq B$, on appelle mesure de l'angle non orienté $\widehat{ABC}$ la mesure de l'angle non orienté $\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}$.

Proposition H.9. Pour tout triangle ABC rectangle en B, on a

1. Le théorème de Pythagore : $AB^2 + BC^2 = AC^2$;
2. $AB = AC \cos(\widehat{ABC})$;
3. $BC = AC \sin(\widehat{ABC})$;
4. $BC = AB \tan(\widehat{ABC})$.

H.5 Bases et repères

Un triplet $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de vecteurs de $\overrightarrow{E}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ si et seulement si $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont non coplanaires.

Définition H.6. On appelle repère de l'espace $\mathcal{E}$ tout quadruplet $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où O est un point quelconque de l'espace $\mathcal{E}$ et $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ une base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Si M est un point de $\mathcal{E}$, on appelle coordonnées du point M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ l'unique triplet de réels (x, y, z) tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k} \tag{H.18}$$

Définition H.7. On dit que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est une base orthonormée si les vecteurs $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont des vecteurs orthogonaux et de norme 1. Le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormé si la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormée.

On définira plus tard, à l'aide du déterminant, les notions de base directe et de base indirecte. Dans ce chapitre, on se contentera d'en donner une définition géométrique à l'aide de la "règle des trois doigts".

On retiendra que si $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base directe de l'espace alors les bases $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, vu)$ et $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, obtenues par permutation circulaires, sont également directes. Alors que les bases $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w})$, $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$ obtenues en échangeant à chaque fois deux vecteurs et les bases $(-\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ $(\overrightarrow{u}, -\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, -\overrightarrow{w})$, obtenues en remplaçant à chaque fois un des vecteurs par son opposé, sont indirectes.

On dira que le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormée direct (respectivement indirect) si la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est orthonormée directe (respectivement indirecte).

Annexe I

Ensembles finis – Quelques démonstrations

Théorème I.1. *Soient p et q deux naturels non nuls. S'il existe une bijection $\varphi : [\![1\,;p]\!] \longmapsto [\![1\,;q]\!]$ alors $p = q$.*

Démonstration. On démontre par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathcal{P}(p)$ "pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ s'il existe une bijection $\varphi : [\![1\,;p]\!] \longmapsto [\![1\,;q]\!]$ alors $p = q$".

Initialisation. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe une bijection

$$\varphi : \{1\} \longmapsto [\![1\,;q]\!]. \tag{I.1}$$

Si on a $q \geq 2$, comme φ est surjective, il existe $x \in \{1\}$ (donc $x = 1$) tel que $\varphi(x) = 1$. Il existe aussi $y \in \{1\}$ (donc $y = 1$) tel que $\varphi(y) = 2$. C'est impossible donc $q = 1$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie

Hérédité. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $\mathcal{P}(p)$ soit vraie et montrons $\mathcal{P}(p+1)$. Soit un naturel q non nul. On suppose l'existence d'une bijection

$$\varphi : [\![1\,;p+1]\!] \longmapsto [\![1\,;q]\!]. \tag{I.2}$$

Notons déjà que q est nécessairement supérieur ou égal à 2 [1] d'où $\varphi(1) = 1 = \varphi(2)$ ce qui est impossible puisque φ est injective. L'astuce consiste à construire une bijection

$$\psi : [\![1\,;p]\!] \longmapsto [\![1\,;q-1]\!] \tag{I.3}$$

afin d'utiliser l'hypothèse de récurrence.

On distingue deux cas :

— Cas 1. $\varphi(p+1) = q$. L'application φ est injective, donc pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$ on a $\varphi(i) \neq q$. Ainsi

$$\varphi([\![1\,;p]\!]) \subset [\![1\,;q-1]\!]. \tag{I.4}$$

On définit donc ψ comme l'application induite par φ de $[\![1\,;p]\!]$ sur $[\![1\,;q-1]\!]$. Alors

— ψ est injective : Puisque φ est injective

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2 \quad i \neq j \implies \varphi(i) \neq \varphi(j), \tag{I.5}$$

et comme ψ et φ sont égales sur $[\![1\,;p]\!]$ alors ψ est injective.

1. car sinon $q = 1$ or $p \geq 1$ donc $p + 1 \geq 2$

— ψ est surjective : Puisque φ est surjective,

$$\forall i \in [\![1\,;q-1]\!]\ \exists \alpha \in [\![1\,;p+1]\!] \quad i = \varphi(\alpha). \tag{I.6}$$

On a $\alpha \neq p+1$ [2] donc $\alpha \in [\![1\,;p]\!]$ et $i = \varphi(\alpha) = \psi(\alpha)$. L'application ψ est surjective.

Finalement ψ est bijective.

— Cas 2. $\varphi(p+1) \neq q$. On pose $a = \varphi(p+1)$ et $b = \varphi^{-1}(q)$ [3]. On définit

$$\psi : [\![1\,;p]\!] \longmapsto [\![1\,;q-1]\!] \tag{I.7}$$

par

$$\forall i \in [\![1\,;p]\!] \setminus \{b\} \quad \psi(i) = \varphi(i)\ \psi(b) = a. \tag{I.8}$$

Cette application est bien à valeurs dans $[\![1\,;q-1]\!]$, car φ est injective et $\varphi(b) = q$. Donc

$$\forall i \in [\![1\,;p]\!] \setminus \{b\} \quad \varphi(i) \in [\![1\,;q-1]\!] \text{ et } a = \varphi(p+1) \neq q. \tag{I.9}$$

Alors

— ψ est injective : Soient $(i,j) \in [\![1\,;p]\!]^2$ et $i \neq j$. Deux sous-cas se présentent :
  — si $i \neq b$ et $j \neq b$ alors comme φ est injective $\psi(i) = \varphi(i) \neq \varphi(j) \neq \psi(j)$;
  — si $i = b$ et $j \neq b$ ou si $j = b$ et $i \neq b$ alors $\psi(i) = a = \varphi(p+1)$ et $\psi(j) = \varphi(j)$ et comme $j \neq p+1$ et que φ est injective donc $\varphi(j) \neq \varphi(p+1)$ donc $\psi(j) \neq \psi(i)$;

— ψ est surjective : Soit $i \in [\![1\,;q-1]\!]$, si $i = a$ alors $i = \psi(b)$ et sinon, il existe $j \in [\![1\,;p+1]\!]$ tel que $i = \psi(j)$; puisque $\varphi(p+1) = a \neq i$ alors $j \in [\![1\,;p]\!]$ et $\varphi(b) = q \neq i$, donc $j \in [\![1\,;p]\!] \setminus \{b\}$ et alors $i = \varphi(j) = \psi(j)$.

Au final ψ est bijective.

Dans les deux cas, il a été possible de construire une bijection $\psi : [\![1\,;p]\!] \longmapsto [\![1\,;q-1]\!]$. Par hypothèse de récurrence, on en déduit que $p = q-1$ et donc que $q = p+1$. L'assertion $\mathcal{P}(p+1)$ est vérifiée.

Conclusion Le théorème de récurrence nous permet donc d'affirmer que, pour tout naturel p non nul, l'assertion $\mathcal{P}(p)$ est vraie. □

Théorème I.2. *Soit P une partie finie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. Alors P est un ensemble fini et il existe un naturel n non nul et une application bijective croissante (donc strictement croissante) $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto P$. De plus un tel couple (n,φ) vérifiant ces hypothèse est unique.*

Démonstration. On démontre par récurrence sur $M \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(M)$ “Le théorème est vérifié pour toute partie P majorée par M, c'est-à-dire telle que $\forall x \in P\ x \leq M$”.

Initialisation. Si $M = 0$, la seule partie majorée par 0 de $\mathbb{N}$ est $P = \{0\}$. P est donc finie de cardinal égal à 1. Il existe une seule application de $\{1\}$ dans $\{0\}$ qui se trouve être bijective et croissante. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $M \in \mathbb{N}$. On suppose que $\mathcal{P}(M)$ est vérifiée. Soit P une partie de $\mathbb{N}$ non vide et majorée par $M+1$. On sait alors que P possède un plus grand élément noté a. Alors $a \in P$ et $a \leq M+1$. Deux cas se présentent :

2. car $\varphi(p+1) = q \neq i$
3. c'est possible puisque φ est bijective

— Cas 1. Si $P = \{a\}$, alors P est de cardinal fini égal à 1. Comme pour l'initialisation, l'existence et l'unicité du couple (n, φ) sont immédiates.

— Cas 2. Si $P \neq \{a\}$ on pose $P' = P \setminus \{a\}$. P' est non vide. Pour tout $x \in P'$, $x \in P$ donc $x \leq a$ et $x \neq a$ alors $x \leq a - 1 \leq M$. P' est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$ majorée par M. L'hypothèse de récurrence nous dit alors que P' est finie et donc que $P = P' \cup \{a\}$ est finie aussi. Si on note $n = \mathrm{Card}(P)$ alors $\mathrm{Card}(P') = n - 1$. L'hypothèse de récurrence nous assure l'existence d'une unique bijection croissante $\psi : [\![1\,;n-1]\!] \longmapsto P'$. Montrons alors l'existence et l'unicité de la bijection croissante $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto P$.

Unicité. Soit $\varphi : [\![1\,;n]\!] \longmapsto P$ une bijection croissante. Alors pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $k \leq n$. Ainsi $\varphi(k) \leq \varphi(n)$. Alors $\varphi(n)$ est un majorant de $P = \varphi([\![1\,;n]\!])$ et $\varphi(n) \in P$: $\varphi(n)$ est le plus grand élément de P. Par unicité du plus grand élément $a = \varphi(n)$. L'application φ étant injective, on $\varphi([\![1\,;n]\!]) \subset P'$ et on peut définir la restriction $\tilde{\varphi}$ de φ à $[\![1\,;n-1]\!]$ au départ et à P' à l'arrivée. Comme φ est croissante et bijective, sa restriction $\tilde{\varphi}$ est aussi croissante et bijective. Alors par hypothèse de récurrence, on a donc nécessairement $\psi = \tilde{\varphi}$. On a donc

$$\forall k \in [\![1\,;n-1]\!]\ \varphi(k) = \psi(k) \quad \varphi(n) = a \tag{I.10}$$

L'application φ est unique.

Existence. L'application φ ainsi définie est une bijection croissante de $[\![1\,;n]\!]$ sur P.

Conclusion. Par théorème de récurrence, on a l'existence et l'unicité du couple (n, φ) pour toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$. □

Annexe J

Développements limités

Ces développements limités sont à connaître par cœur. Au voisinage de zéro, on a :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \tag{J.1}$$

$$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{J.2}$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \tag{J.3}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{J.4}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \tag{J.5}$$

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6) \tag{J.6}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (\alpha - i) + o(x^n) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}_+^* \tag{J.7}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + o(x^n) \tag{J.8}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \tag{J.9}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} -\frac{(-x)^k}{k} + o(x^n) \tag{J.10}$$

$$\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n} -\frac{x^k}{k} + o(x^n) \tag{J.11}$$

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux