

# Cours de physique CPGE MPSI

Florian MAILLARD  
e-mail : [florian.maillard@mailoo.org](mailto:florian.maillard@mailoo.org)

23 avril 2020

---

# Chapitre 1

## Cinématique du point matériel

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Espace physique et temps d'un observateur . .</b>	<b>2</b>
1.1.1	Notion de solide . . . . .	2
1.1.2	Espace physique . . . . .	2
1.1.3	Chronologie et définition de la seconde . . . . .	2
<b>1.2</b>	<b>Mouvement et référentiel, temps absolu . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>1.3</b>	<b>Notion de point matériel . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>1.4</b>	<b>Complément de géométrie . . . . .</b>	<b>4</b>
1.4.1	Repère, coordonnées cartésiennes . . . . .	4
1.4.2	Coordonnées cylindriques, ou cylindro-polaires . .	4
<b>1.5</b>	<b>Trajectoire, abscisse curviligne et loi horaire . .</b>	<b>5</b>
<b>1.6</b>	<b>Vitesse . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>1.7</b>	<b>Accélération . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.8</b>	<b>Mouvements particuliers . . . . .</b>	<b>6</b>
1.8.1	Lois horaires particulières . . . . .	6
1.8.2	Mouvements rectilignes . . . . .	7
1.8.3	Mouvements à accélération constante . . . . .	7
1.8.4	Mouvements circulaires . . . . .	8
<b>1.9</b>	<b>Produit vectoriel . . . . .</b>	<b>9</b>
1.9.1	Définition . . . . .	9
1.9.2	Propriétés du produit vectoriel . . . . .	9
1.9.3	Norme, direction et sens du produit vectoriel, produit vectoriel nul . . . . .	9
1.9.4	Moment en un point d'un vecteur lié . . . . .	9
<b>1.10</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>10</b>

---

## 1.1 Espace physique et temps d'un observateur

### 1.1.1 Notion de solide

En mécanique, certains corps physiques ont une forme indépendante des actions mécaniques qu'ils subissent. Ces corps sont appelés *solides indéformables*. Les propriétés géométriques de l'ensemble des points d'un solide, tels que des distances ou des angles, sont invariants.

### 1.1.2 Espace physique

Jusqu'en 1960, le mètre était défini par une distance entre deux traits sur une barre de platine iridiée, qui s'appelle le *mètre étalon*. On avait aussi défini le mètre comme un multiple de la longueur d'onde d'une certaine radiation de krypton.

Aujourd'hui ces définitions sont abandonnées et le mètre est défini tel que :

**Définition 1.1.** Le mètre est la longueur du trajet que la lumière parcourt en une durée de  $1/299\,792\,458$  secondes.

La mécanique classique et la relativité restreinte postulent que l'espace physique est un espace euclidien à trois dimensions. La relativité générale remet en cause cette hypothèse et postule plutôt que l'espace physique est un espace de Minkowski à quatre dimensions.

### 1.1.3 Chronologie et définition de la seconde

La notion d'écoulement du temps est d'abord intuitive. Un observateur est tout à fait capable d'établir une chronologie. C'est-à-dire de déterminer si un événement a eu lieu avant ou après tel autre.

Le temps est un paramètre réel servant à dater les événements. N'importe quel instrument pouvant dater les événements constitue un chronomètre ou une horloge. Une personne qui énonce une suite de nombres ou un sablier sont des horloges.

Pour choisir parmi les différentes horloges, on impose une exigence supplémentaire : l'uniformité du temps, ou, ce qui revient au même, nous postulons que *les lois physiques sont invariantes par translation dans le temps*. Par exemple, si un pendule oscille en repassant toujours par les mêmes positions dans des conditions extérieures constantes, les lois physiques étant inchangées d'une oscillation à l'autre, la durée doit être la même pour chaque oscillation. On voit ainsi l'importance des phénomènes cycliques pour définir une chronologie.

Le problème crucial, dans l'exemple précédent comme pour toute horloge basée sur un phénomène cyclique, est celui des conditions extérieures

qui doivent être constantes. Le choix d'une chronologie privilégiée permettant d'appliquer les lois de la mécanique s'est fait par des approximations successives. Les scientifiques ont longtemps utilisé l'astronomie pour définir l'unité de temps.

Jusqu'en 1960, les scientifiques utilisaient le *temps sidéral*. La seconde était définie comme la fraction  $1/86\,400$  du jour sidéral (le jour sidéral est la durée que met une planète pour faire un tour sur elle-même par rapport aux étoiles, indépendamment de sa révolution autour du Soleil). L'inconvénient de cette définition est le suivant : Le mouvement des astres s'accélérait sans qu'aucune explication plausible ne puisse être donnée. Alors qu'en réalité c'est le contraire : la Terre ralentit à cause des frottements de l'eau des océans. C'était alors l'horloge qui retardait. Ensuite, les scientifiques ont utilisé le *temps des éphémérides*, la révolution de la Terre autour du Soleil, pour définir la seconde. Aujourd'hui, on utilise plutôt des mesures de fréquence, qui sont très précises, pour définir la seconde. C'est le *temps atomique*.

**Définition 1.2.** La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

## 1.2 Mouvement et référentiel, temps absolu

*Un référentiel d'espace-temps est un système d'axes de coordonnées attaché à un solide et muni d'une chronologie.* Du point de vue spatial, un référentiel est donc par définition indéformable, car les distances et les angles d'un ensemble de points du référentiel sont constants. Chaque référentiel d'espace-temps est muni d'une chronologie. On le muni d'une horloge atomique fixe dans le référentiel.

En mécanique classique, on considère que le temps est une notion indépendante du référentiel considéré. On parle dans ce cas de temps absolu, c'est-à-dire que des observateurs liés à des référentiels différents peuvent attribuer les mêmes dates aux mêmes événements.

La relativité restreinte remet en cause ce postulat. Le temps écoulé entre deux événements n'est pas le même dans deux référentiels d'espace-temps, munis d'horloges identiques, si le mouvement de l'un n'est pas une translation rectiligne uniforme par rapport à l'autre.

## 1.3 Notion de point matériel

Un point matériel est un objet dont la position dans un référentiel donné est entièrement définie par ses trois coordonnées. Il ne suffit pas qu'un solide soit petit pour l'assimiler à un point matériel. Une molécule possédant un moment dipolaire possède une symétrie de révolution autour de son vecteur

## 1.4. Complément de géométrie

---

moment dipolaire mais pas la symétrie sphérique nécessaire. Il faudrait donc que l'objet que l'on assimile à un point matériel possède la symétrie sphérique du point géométrique et soit ainsi homogène et isotrope. Mais ceci ne suffit pas encore pour l'assimiler à un point matériel, le centre d'inertie d'une sphère homogène sur un plan incliné n'a pas le même mouvement selon qu'elle roule ou qu'elle glisse. Il faut donc de plus exclure pour un point matériel la possibilité de tourner.

Enfin, la condition de petitesse n'est même pas nécessaire. En effet, la Terre, dans l'étude du mouvement d'un satellite, peut être valablement être assimilée à un point matériel coïncident avec son centre d'inertie.

On appellera point matériel un corps, ou un point géométrique associé à un système de corps, dont la position géométrique est totalement déterminée par trois coordonnées. Le type même du point matériel est, comme on le verra, le point matériel fictif coïncidant avec le centre d'inertie d'un système, et où serait concentrée toute la masse du système.

## 1.4 Complément de géométrie

### 1.4.1 Repère, coordonnées cartésiennes

Un repère d'espace est constitué par un point et trois axes de coordonnées cartésiennes, qu'il soient ou non liés au référentiel auquel on rapporte le mouvement étudié.

En coordonnées cartésiennes, la position d'un point matériel est définie par son *vecteur position* décomposable suivant la direction de ces trois axes :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z. \quad (1.1)$$

Si le repère est lié au référentiel dans lequel on travail, ses axes sont considérés comme fixe. Les vecteurs unitaires de la base correspondante sont alors constants. Le déplacement élémentaire du point matériel est alors :

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z. \quad (1.2)$$

La longueur de ce déplacement est donc :

$$ds = ||d\overrightarrow{OM}||, \quad (1.3)$$

tel que

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (1.4)$$

### 1.4.2 Coordonnées cylindriques, ou cylindro-polaires

Un repère cartésien, que l'on supposera ici lié au référentiel dans lequel on étudie le mouvement, étant défini, les coordonnées cylindro-polaires sont les coordonnées polaires de la projection  $H$  de  $M$  dans le plan  $(xOy)$  : la

coordonnées radiale  $\rho = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , l'angle polaire  $\theta = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH})$  et la côte  $z$ .

Les vecteurs unitaires  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_z$  forment une base mobile utilisée pour décomposer les vecteurs. Par exemple

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z. \quad (1.5)$$

On remarque que  $\vec{u}_r = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$  et  $\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$ . D'autre part,  $(Oxyz)$  étant un référentiel, les vecteurs  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  sont constants alors

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r. \quad (1.6)$$

Plus généralement, la dérivée d'un vecteur unitaire  $\vec{u}$  tournant dans un plan par rapport à l'angle qui définit sa direction dans ce plan est le vecteur  $\vec{v}$  unitaire par rotation de  $\vec{u}$  de  $\frac{\pi}{2}$ .

## 1.5 Trajectoire, abscisse curviligne et loi horaire

*La trajectoire d'un point mobile dans un référentiel donné est l'ensemble des points de ce référentiel avec lesquels il coïncide successivement au cours du temps.* Il s'agit bien sûr d'une courbe continue. La trajectoire dépend du référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement. Un sens positif noté par  $\rightarrow s$  et une origine  $A$  étant choisie arbitrairement sur la trajectoire, l'abscisse curviligne de  $M$  est définie par  $s = 6.0\text{ptAB}$ . L'abscisse curviligne est une fonction du temps  $t$  continue et dérivable. Cette fonction  $f : t \rightarrow s = f(t)$  est appelée *loi horaire du mouvement* ou *équation horaire*.

## 1.6 Vitesse

La vitesse d'un point matériel dans un référentiel où le point  $O$  est fixe est

$$v = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}. \quad (1.7)$$

Le point  $O$  pouvant être remplacé par n'importe quel point lié au référentiel. On note encore la vitesse du point  $M$  comme  $\frac{d\vec{M}}{dt}$  ou  $\overrightarrow{OM}$  ou encore  $\dot{\vec{M}}$ . La vitesse est une fonction continue du temps. Si l'on utilise plusieurs référentiels, la vitesse de  $M$  dans le référentiel  $R$  est notée  $\vec{v}_{M/R}$ . Un déplacement élémentaire  $d\vec{M}$  du point  $M$  est tangent à la trajectoire donc *le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire*.

Le vecteur  $\vec{u}_r$  étant tangent à la trajectoire et orienté dans le même sens que celle-ci, le déplacement élémentaire s'écrit  $d\vec{M} = ds\vec{u}_r$  donc  $\vec{v} = \dot{s}\vec{u}_r$ ,  $\dot{s}$  est la *vitesse algébrique* et la *norme de la vitesse* est donc  $v = |\dot{s}|$ .

## 1.7. Accélération

---

On appelle hodographe du mouvement la courbe décrite par l'extrémité du vecteur vitesse représenté avec une origine fixe.

En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z, \quad (1.8)$$

et en coordonnées cylindriques  $\vec{u}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et donc

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z. \quad (1.9)$$

## 1.7 Accélération

L'accélération d'un point matériel dans un référentiel où le point  $O$  est fixe est

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}. \quad (1.10)$$

Elle peut présenter des discontinuités. Si l'on doit préciser le référentiel on note  $\vec{a}_{M/R}$ . Si la trajectoire n'est pas rectiligne, le vecteur unitaire tangentiel  $\vec{u}_T$  varie donc sa dérivée par rapport au temps est normale à la trajectoire. Ainsi l'accélération a une composante tangentielle,  $\ddot{s}$ , et une composante normale à la trajectoire

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{u}_T + \dot{s}\dot{\vec{u}}_T. \quad (1.11)$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z, \quad (1.12)$$

et en coordonnées cylindriques  $\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$  et donc

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z. \quad (1.13)$$

Si  $\vec{a} \cdot \vec{v} = \dot{s}\ddot{s}$  est positif, alors le mouvement est accéléré. Sinon alors le mouvement est ralenti.

## 1.8 Mouvements particuliers

### 1.8.1 Lois horaires particulières

Si  $v = |\dot{s}|$  est constante on dit que le mouvement est uniforme et sa loi horaire est  $s = \dot{s}t + s_0$ .

Si  $\ddot{s}$  est constant, le mouvement est dit uniformément varié. Alors la loi horaire s'écrit  $s = \frac{\ddot{s}t^2}{2} + \dot{s}_0t + s_0$ .

Un mouvement est sinusoïdal si  $s = s_0 + \alpha \cos(\omega t + \varphi)$ . Le nombre  $\alpha > 0$  est l'amplitude du mouvement. Le nombre  $\varphi$  est la phase à l'origine des dates. Le nombre  $\omega > 0$  est la pulsation ou fréquence angulaire du mouvement. Le mouvement est périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et de fréquence  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  (en Hertz). Un choix convenable de l'origine des dates et de l'origine des abscisses curvilignes permet de ramener cette loi horaire à la forme  $s = \alpha \cos(\omega t)$ .



### 1.8.2 Mouvements rectilignes

Pour un mouvement rectiligne,  $\vec{u}_T$  est constant, l'accélération est tangentielle :  $\vec{a} = \ddot{s}\vec{u}_T$ . On choisit l'axe  $(Ox)$  suivant la trajectoire ( $s$  est alors noté  $x$  et l'origine des abscisses curvilignes est en  $O$ ). La loi horaire est alors  $f : t \rightarrow x = f(t)$ .

Si le mouvement est rectiligne uniforme alors  $\vec{v}$  est constant et l'accélération est nulle.

Si le mouvement est rectiligne uniformément varié alors  $\vec{a}$  est constant. La réciproque est fausse.

Si le mouvement est rectiligne sinusoïdal, avec le choix de  $O$  au milieu du segment parcouru, la loi horaire s'écrit  $x = X \cos(\omega t + \varphi)$  ou  $x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ . L'accélération s'écrit  $\vec{a} = -\omega^2 X \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \vec{OM}$ .

Si à  $t = 0$ , on a

$$x = x_0 = X \cos(\varphi) \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = -\omega X \sin(\varphi), \quad (1.14)$$

alors

$$X = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \quad \tan(\varphi) = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}. \quad (1.15)$$

Si  $x_0 > 0$  alors  $\varphi = -\arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)$ , sinon  $\varphi = \pi - \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)$ .

On obtient plus directement  $A$  et  $B$  avec  $x_0 = A$  et  $\dot{x}_0 = \omega B$ .

### 1.8.3 Mouvements à accélération constante

Si  $\vec{a}$  est constant, alors  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$  et  $\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a} \frac{t^2}{2}$ .

On choisit les axes du repère avec  $M_0 = O$  comme origine, l'axe  $Oz$  parallèle à l'accélération  $\vec{a}$  et de sens contraire et le plan  $(xOz)$  confondu avec le plan  $(\vec{a}, \vec{v}_0)$ .

On a donc, avec  $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{v}_0)$  :

$$\vec{a} = \ddot{z}\vec{u}_z = -a\vec{u}_z \quad (1.16)$$

$$\vec{v}_0 = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{z}\vec{u}_z = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_z. \quad (1.17)$$

On en déduit

$$\begin{cases} x &= v_0 t \cos \alpha \\ y &= 0 \\ z &= -\frac{a}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha. \end{cases} \quad (1.18)$$

En éliminant la date  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ , on obtient l'équation de la trajectoire :

$$z = -\frac{a}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha, \quad (1.19)$$

c'est l'équation d'une parabole.

## 1.8. Mouvements particuliers

*La trajectoire d'un point matériel dont l'accélération est constante est une parabole.* Le mouvement de la projection de  $M$  sur  $(Ox)$  est uniforme et celui de la projection de  $M$  sur  $Oz$  est uniformément varié. Si  $\vec{v}_0$  et  $\vec{a}$  sont parallèles alors le mouvement de  $M$  est rectiligne uniformément varié sur l'axe  $Oz$ .

Avec les équations vectorielles on démontre facilement les propriétés suivantes :

— la vitesse moyenne entre  $t_1$  et  $t_2$  est égale à la vitesse à  $\frac{t_1+t_2}{2}$

$$\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_{\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}; \quad (1.20)$$

— la variation du carré de la vitesse est le double du produit scalaire de l'accélération par le vecteur déplacement

$$v_2^2 - v_1^2 = 2\vec{a} \cdot \overrightarrow{M_1M_2}; \quad (1.21)$$

— les vecteurs déplacements pendant des intervalles de temps successifs de même durée  $\tau$  forment une suite arithmétique :

$$\overrightarrow{M_nM_{n+1}} - \overrightarrow{M_{n-1}M_n} = \vec{a}\tau^2 \quad (1.22)$$

### 1.8.4 Mouvements circulaires

Un point matériel mobile  $M$  se meut circulairement s'il se déplace sur un cercle. Dans ce cas, il est pratique d'utiliser les coordonnées polaires.

En notant  $R$  le rayon du cercle parcouru par  $M$  et  $O$  son centre, si  $s = 0$  lorsque  $\theta = 0$  alors  $s = R\theta$ ,  $\dot{s} = R\dot{\theta}$  et  $\ddot{s} = R\ddot{\theta}$ .

Le vecteur *vitesse angulaire* est  $\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{u}_z$ . Sa norme vaut  $\omega = \frac{v}{R}$  et elle s'exprime en rad/s.

Le vecteur vitesse est

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{u}_\theta = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}. \quad (1.23)$$

C'est le moment en  $M$  du vecteur vitesse angulaire représenté en  $O$ .

Le vecteur accélération est

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r + R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r + \ddot{s}\vec{u}_\theta. \quad (1.24)$$

On constate que l'accélération normale est orientée vers le centre du cercle.

Si le mouvement est circulaire uniforme, alors l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$  est nulle. Le vecteur vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  est constant, l'accélération est donc normale :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u}_r = -\omega^2\overrightarrow{OM}. \quad (1.25)$$

Le mouvement est périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}$  et de fréquence  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi R}$ .

## 1.9 Produit vectoriel

### 1.9.1 Définition

Soit la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  formant un trièdre direct. Soient deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  de coordonnées respectives dans cette base  $(U_1, U_2, U_3)$  et  $(V_1, V_2, V_3)$ . Le produit vectoriel est donné par

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = (U_2 V_3 - U_3 V_2) \vec{u} + (U_3 V_1 - U_1 V_3) \vec{v} + (U_1 V_2 - U_2 V_1) \vec{w} \quad (1.26)$$

### 1.9.2 Propriétés du produit vectoriel

Le produit vectoriel est une loi de composition interne dans  $\mathbb{R}^3$ . Il est anticommutatif  $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$ . Il n'est pas associatif, ce qui peut être constaté avec la formule du double produit vectoriel

$$(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W} = (\vec{U} \cdot \vec{W}) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{W}) \vec{U}, \quad (1.27)$$

et il est distributif à gauche et à droite par rapport à la somme

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}; \quad (1.28)$$

$$(\vec{U} + \vec{V}) \wedge \vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{W} + \vec{V} \wedge \vec{W}. \quad (1.29)$$

### 1.9.3 Norme, direction et sens du produit vectoriel, produit vectoriel nul

En choisissant  $(xOy)$  suivant le plan défini par les deux vecteurs avec  $(O\vec{x})$  dans la direction et le sens de  $\vec{U}$ , si  $(\vec{U}, \vec{V}) = \alpha$ , leurs coordonnées sont, dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  formant un trièdre trirectangle de sens direct :  $(U, 0, 0)$  et  $(V \cos \alpha, V \sin \alpha, 0)$ . On a alors  $\vec{U} \wedge \vec{V} = UV \sin \alpha \vec{e}_z$ . Le trièdre  $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$  est de sens direct.

Le produit vectoriel est nul si et seulement si la famille  $(\vec{U}, \vec{V})$  est liée, c'est-à-dire si et seulement s'ils sont colinéaires ou l'un des deux est nul.

### 1.9.4 Moment en un point d'un vecteur lié

On appelle vecteur lié un vecteur représentant une caractéristique physique d'un point donné (vitesse, accélération, force subie, ...) et on le représente alors en ce point.

Le moment en  $P$  du vecteur  $\vec{U}$  lié au point  $M$  est par définition

$$\mathcal{M}_{\vec{U}/P} = \overrightarrow{PM} \wedge \vec{U}. \quad (1.30)$$

## 1.10 Exercices

**Exercice 1.1** (Mouvements uniformément variés). Démontrer que dans un mouvement uniformément varié d'accélération tangentielle  $\ddot{s}$ ,

1. les distances parcourues pendant des intervalles de temps successifs de même durée  $\tau$  forment une suite arithmétique de raison  $\ddot{s}\tau^2$ ;
2. la variation du carré de la vitesse entre  $t_1$  et  $t_2$  s'exprime par

$$\dot{s}_2^2 - \dot{s}_1^2 = 2\ddot{s}(s_2 - s_1), \quad (1.31)$$

3. la vitesse algébrique moyenne entre  $t_1$  et  $t_2$  est égale à la vitesse algébrique en  $\frac{t_1+t_2}{2}$  et à la moyenne des vitesses algébriques à  $t_1$  et  $t_2$ .

**Exercice 1.2** (Exemple de mouvement circulaire). Un point  $M$  se déplace sur un cercle de centre  $O$  et de rayon  $R = 1$  m. Sa position est repérée par l'angle  $\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$  et la loi horaire de ce mouvement est  $\theta = \pi \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$  avec une période de  $T = 1$  s.

1. À quelle date le mobile  $M$  passe-t-il pour la première fois en  $M_1$  d'angle polaire  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  ?
2. Calculez numériquement les coordonnées radiale et orthoradiale du vecteur vitesse à la date  $t_1$  à laquelle  $M$  est en  $M_1$ .
3. Même question pour l'accélération.
4. Pour quelles valeurs de  $\theta$  la norme du vecteur accélération est-elle maximale ?

**Exercice 1.3** (Roulement sans glissement, cycloïde). Une roue de rayon  $R$ , de centre  $C$ , roule sans glisser sur l'axe  $(Ox)$ . Le mouvement de la roue est paramétrée par l'angle  $\theta$  dont la roue a tourné depuis l'instant initial  $t = 0$  où l'abscisse de  $C$  était nulle.

1. Quelles sont, en fonction de  $R$  et de  $\theta$ , les coordonnées du point  $M$  de la périphérie de la roue qui coïncidait avec le point  $O$  à la date  $t = 0$  ?
2. Calculez, en fonction de  $R$  et de  $\theta$  et des ses dérivées temporelles, les composantes de la vitesse et de l'accélération de  $M$ .
3. Donnez les valeurs de la vitesse et de l'accélération de  $M$  au moment où ce point touche l'axe  $(Ox)$ .

**Exercice 1.4** (Courbes de Lissajous). Les coordonnées cartésiennes d'un point sont données en fonction du temps par

$$\begin{cases} x(t) &= a \sin(\omega_1 t) \\ y(t) &= b \sin(\omega_2 t) \end{cases} \quad (1.32)$$

1. Quelle relation doit exister entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour que la trajectoire soit fermée ?
2. Tracez cette trajectoire pour  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{3}{2}$ .

**Exercice 1.5** (Spirale logarithmique). Trois chats se trouvent initialement aux sommets d'un triangle équilatéral. Le premier court après le second qui poursuit le troisième, lui-même courant après le premier. Ils courent à la même vitesse et celle-ci reste constante pendant toute la poursuite.

1. Déterminez la durée de la poursuite.
2. Déduisez-en la distance parcourue par chacun des chats.
3. Déterminez l'équation de la trajectoire de l'un des chats en coordonnées polaires.

**Exercice 1.6** (Mouvement uniforme sur une astroïde). Un homme partant du point  $O$  à  $t = 0$  décrit l'axe  $Oy$  avec une vitesse constante  $W$ . Son chien part du point  $A$ , d'abscisse  $a$  sur l'axe  $(Ox)$ , se dirige constamment vers lui à la vitesse constante  $2W$ .

1. Quelle est la trajectoire  $y = f(x)$  du chien ? Tracez l'allure de cette courbe.
2. À quelle ordonnée le chien rejoint-il l'homme ? Quelle distance a-t-il parcourue ? À quelle date rejoint-il l'homme ?
3. On note  $H$  la position de l'homme et  $Hx$  et  $Hy$  les parallèles à  $(Ox)$  et  $Oy$  d'origine  $H$ . Établissez l'équation  $r = g(\theta)$  de la trajectoire en coordonnées polaires dans le repère  $Hx, Hy$ . Tracez l'allure de cette trajectoire.

## 1.10. Exercices

---

## Chapitre 2

# Cinématique du point matériel

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Masse pesante et masse inerte . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>2.2</b>	<b>Quantité de mouvement et moment cinétique .</b>	<b>14</b>
<b>2.3</b>	<b>Principe d'inertie, référentiel galiléen . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>2.4</b>	<b>Notion de force . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>2.5</b>	<b>Relation fondamentale de la dynamique du point matériel (deuxième loi de Newton) . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>2.6</b>	<b>Théorème du moment cinétique pour un point matériel . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2.7</b>	<b>Principe des interactions (troisième loi de Newton) . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2.8</b>	<b>Interactions à distance . . . . .</b>	<b>17</b>
2.8.1	Interaction gravitationnelle . . . . .	17
2.8.2	Interaction électromagnétique . . . . .	17
2.8.3	Interaction forte . . . . .	18
2.8.4	Interaction faible . . . . .	19
2.8.5	Unification des interactions . . . . .	19
<b>2.9</b>	<b>Interactions de contact . . . . .</b>	<b>19</b>
2.9.1	Point matériel lié à un fil tendu de masse nulle . .	19
2.9.2	Point matériel liée à une extrémité d'un ressort parfait . . . . .	20
2.9.3	Mouvement d'un point lié à une courbe ou à une surface . . . . .	20
<b>2.10</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>20</b>

---

## 2.1 Masse pesante et masse inerte

**Définition 2.1.** La *masse pesante* est définie expérimentalement à partir de l'utilisation de la balance. Elle est donc liée à la notion de poids. Si dans une balance à deux plateaux on remplace un corps  $A$  par un corps  $B$  et que l'équilibre est conservé, on dira par définition que  $A$  et  $B$  ont la même masse. Si la balance reste en équilibre en remplaçant  $A$  par deux corps  $B$  et  $C$  on dira que  $m_A = m_B + m_C$ . La masse est donc par définition une *grandeur extensive*, elle s'ajoute.

La validité de cette définition nécessite que l'équilibre d'une balance soit conservé si on change la balance de lieu, c'est-à-dire si l'intensité de la pesanteur est modifiée, ce qui est effectivement le cas.

L'égalité de la somme de deux masses pesantes étant ainsi définies, la masse est une grandeur mesurable. Dans le système international son unité est le *kilogramme*, kg. C'est la masse du cylindre de platine iridié nommé kilogramme étalon, déposé au Bureau International de Poids et Mesures. Cette définition du kilogramme permet des mesures avec une précision relative de l'ordre de  $10^{-9}$ .

On admettra, comme le confirme l'expérience, que la masse pesante s'identifie à la masse inerte. La masse inerte est la grandeur scalaire extensive, indépendante de l'état de mouvement du corps considéré, qui caractérise la difficulté que l'on a à modifier le mouvement de ce corps. La seule théorie capable de rendre compte de cette identité entre masse inerte et masse pesante est la théorie de la relativité générale.

## 2.2 Quantité de mouvement et moment cinétique

**Définition 2.2.** Pour un point matériel de masse  $m$  dans un référentiel où sa vitesse est  $\vec{v}$ , la quantité de mouvement est définie par

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.1)$$

**Définition 2.3.** En un point  $P$ , le moment cinétique du point matériel  $M$  dans ce même référentiel est par définition le moment en  $P$  du vecteur quantité de mouvement en  $M$ . Il est noté  $\vec{L}_P$  et vaut

$$\vec{L}_P = m\overrightarrow{PM} \wedge \vec{v}. \quad (2.2)$$

## 2.3 Principe d'inertie, référentiel galiléen

Les interactions ont une propriété commune : elles décroissent et tendent vers zéro lorsque la distance entre deux systèmes en interaction tend vers



l'infini et elles tendent vers l'infini lorsque cette distance tend vers zéro.

Un point matériel ou un système situé à une distance suffisamment grande de tout autre point matériel peut être considéré comme *isolé*, c'est-à-dire sans interactions. Si un point matériel a le même comportement mécanique qu'un point matériel isolé, on dira que les interactions qu'il subit se compensent, on dit encore qu'il est *pseudo-isolé*. Le principe d'inertie s'énonce ainsi : *Il existe des référentiels privilégiés dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne et uniforme. On les appelle référentiels d'inertie ou référentiels galiléens.*

Le principe d'inertie définit donc les référentiels galiléens et postule leur existence. L'expérimentation conduit à constater que le référentiel de Copernic est un référentiel galiléen. Le référentiel de Copernic a, par définition, son origine au centre d'inertie du système solaire, ses axes étant définis par les directions de trois étoiles très éloignées. Le caractère galiléen du référentiel de Copernic n'est en fait qu'une approximation, mais celle-ci reste très valable tant que l'on ne s'intéresse pas à des mouvements de systèmes n'appartenant pas au système solaire. Ainsi, le mouvement d'une étoile de la galaxie nécessite d'utiliser un référentiel moins grossièrement galiléen, lié au centre d'inertie de la galaxie et dont les axes sont dirigés vers des galaxies lointaines ...

La loi de composition des vitesses montre que si un référentiel est en translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen, ce référentiel est aussi galiléen. En effet, si  $\vec{v}$  est la vitesse d'un point matériel dans un référentiel galiléen (R) et si  $\vec{v}_0$  est la vitesse de translation constante, du référentiel (R) par rapport à un autre référentiel ( $R_0$ ), alors la vitesse du point matériel considéré est  $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_0$  dans le référentiel ( $R_0$ ). Si  $\vec{v}$  est constante (mouvement rectiligne uniforme), alors  $\vec{v}'$  est aussi constante. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic est donc galiléen.

Ce n'est pas le cas d'un référentiel lié à la Terre puisque la terre tourne par rapport aux étoiles. Cependant, pour des applications pratiques réclamant peu de précision et concernant des objets terrestres, on admettra que si les effets de la rotation de la terre peuvent être négligés un référentiel terrestre peut être assimilé à un référentiel galiléen.

## 2.4 Notion de force

On admettra que les interactions subies par un point matériel peuvent être représentées par des forces, caractérisées par :

- une intensité, exprimée en newton N dans le système international ;
- un sens ;
- une direction (la relation d'équipollence) ;
- un point d'application.

## 2.5. Relation fondamentale de la dynamique du point matériel (deuxième loi de Newton)

---

Ces différentes caractéristiques d'une force peuvent être définies par les effets statiques de la force, par exemple sur un ressort parfait . . . Une force est donc mathématiquement définie par un vecteur associé à un point, ("vecteur lié" ou "bipoint" représentant ce vecteur avec pour origine le point d'application de la force). On pourra si nécessaire adopter la notation :  $(M, \vec{F})$ . La *droite d'action* d'une force est la droite ayant la direction de la force et passant par son point d'application. On admettra enfin que le caractère additif des vecteurs forces : si un point matériel est soumis aux forces  $(M, \vec{F}_1), (M, \vec{F}_2), \dots$  il a le même mouvement que s'il était soumis à la force résultante, la somme  $(M, \vec{F})$  avec  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$ .

Plus généralement, dans le cas de systèmes matériels, on appellera force la grandeur vectorielle liée à un point d'application, capable de modifier le mouvement ou la forme du système.

On notera encore que la position du point d'application d'une force n'est une notion évidente que pour une force agissant sur un point matériel. Il n'est pas toujours facile ni indispensable de préciser le point d'application si l'on considère la résultante des forces correspondant à un type d'interaction subie par un système. Par contre la droite d'action est plus facile à préciser et plus nécessaire.

## 2.5 Relation fondamentale de la dynamique du point matériel (deuxième loi de Newton)

*Dans un référentiel galiléen, la force totale qui s'exerce sur un point matériel est la dérivée temporelle de sa quantité de mouvement :*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.3)$$

Cette loi reste valable, sous cette forme, en mécanique relativiste. Elle s'applique à des points matériels, donc à des objets contenant de la matière. La masse étant une constante, on a donc aussi

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}. \quad (2.4)$$

D'après cette relation, on voit que la dimension de la force est  $[m.L.t^{-2}]$  donc  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$ . Le newton est donc l'intensité de la force agissant sur un point matériel pesant  $1 \text{ kg}$  subissant une accélération de  $1 \text{ m s}^{-2}$ .

## 2.6 Théorème du moment cinétique pour un point matériel

Si  $P$  est un point fixe dans le référentiel galiléen considéré :

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \frac{d\vec{PM}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{PM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{PM} \wedge \vec{F} \quad (2.5)$$

*Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel  $M$  en un point fixe  $P$  vaut le moment en  $P$  de la force qui agit en  $M$ .*

## 2.7 Principe des interactions (troisième loi de Newton)

*Si à un instant donné, un point matériel  $A$  exerce une force  $(B, \vec{F}_1)$  sur un point matériel  $B$ , alors  $B$  exerce la force  $(A, \vec{F}_2)$  telle que  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  et de même droite d'action  $(AB)$ .*

Ce principe ne s'applique que si l'interaction se propage à une vitesse infinie. Si l'on tient compte de la propagation à la célérité de la lumière  $c$ , on ne peut plus appliquer en toute rigueur ce principe si les vitesses considérées ne sont pas négligeable devant  $c$ . D'autre part, ce principe ne s'applique qu'à des points matériels.

## 2.8 Interactions à distance

### 2.8.1 Interaction gravitationnelle

Elle suit la loi de Newton : Pour deux points matériels  $(A, m_A)$  et  $(B, m_B)$ , c'est la force de droite d'action  $(AB)$  et d'intensité  $F = \mathcal{G} \frac{m_A m_B}{AB^2}$  avec  $\mathcal{G} = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  la constante de gravitation universelle. Elle est toujours attractive :

$$\vec{F}_{A/B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{AB^3} \vec{AB}. \quad (2.6)$$

En un point où la masse  $m$  subit (ou subirait si elle n'est pas présente) une force de gravitation  $\vec{F}$ , le champ de gravitation est  $\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$ .

La théorie complète qui décrit la gravitation est la gravitation relativiste. Cette interaction serait véhiculée par des particules nommées gravitons, que l'on n'a pas encore détectés.

### 2.8.2 Interaction électromagnétique

Elle concerne les charges électriques. Une charge ponctuelle  $q$  de vitesse  $\vec{v}$  dans un champ électromagnétique caractérisé dans le référentiel considéré

## 2.8. Interactions à distance

---

par les vecteurs  $\vec{E}$  (le champ électrique, en  $\text{V m}^{-1}$ ) et  $\vec{B}$  (le champ magnétique, en tesla noté T) est soumis à la force de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ .

En plus de l'expression de la force de Lorentz, les lois de l'électromagnétisme comprennent les équations de Maxwell qui seront étudiées en seconde année. La théorie complète actuelle, relativiste et quantique, est l'électrodynamique quantique. Les particules qui véhiculent l'interaction électromagnétiques sont les photons. Si les objets qui créent le champ sont immobiles, on parle de champ statique.

En particulier, dans le cas de deux charges ponctuelles, immobiles, l'interaction électrostatique est donnée par la loi de Coulomb. Pour deux charges ponctuelles  $(A, q_A)$  et  $(B, q_B)$  la force est telle que

$$\vec{F}_{A/B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^3} \vec{AB}, \quad (2.7)$$

avec  $\epsilon_0 = 8.8537 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$  la permittivité électrique du vide. Cette force est attractive lorsque les charges sont de signes opposées et répulsive sinon.

### 2.8.3 Interaction forte

Elle concerne les quarks qui sont les particules fondamentales qui forment les baryons (neutron, proton, ...) et les mésons. Elles ne concernent pas les leptons (électron, positron, muon, neutrino, ...). Elle est liée à la couleur des quarks. Il y a trois couleurs : vert, bleu, et rouge et les trois anti-couleurs correspondantes magenta (antivert), jaune (antibleu) et cyan (antirouge).

Les quarks *up*, noté  $u$  et de charge  $\frac{2e}{3}$ , et *down*, noté  $d$  et de charge  $-\frac{e}{3}$  forment les constituants des nucléons : le neutre est composé d'un *up* et deux *downs* et le proton est constitué de deux *ups* et d'un *down*.

L'interaction forte est régie par les lois de la chromo-dynamique quantique. Elle est véhiculée par des gluons (il en existe 8).

Dans un nucléon, les trois quarks sont de couleurs différentes et se neutralisent comme des charges électriques opposées. Mais une molécule, bien que neutre, peut en attirer une autre du fait du décalage entre les charges positives et négatives (dipôle électrique) ; de même un nucléon, bien que neutre du point de vue de la chromo-dynamique, attire les autres nucléons. C'est pourquoi les nucléons peuvent se lier entre eux pour former des noyaux atomiques plus ou moins stables. Sans l'interaction forte, les noyaux atomiques éclateraient sous l'effet des répulsions électriques des protons.

Entre les quarks, elle semble de portée infinie comme les interactions gravitationnelle et électromagnétique et bien plus intense, avec une intensité qui semble croître avec la distance (ce qui empêche d'isoler un quark). Mais entre les nucléons elle n'est que cent fois plus forte que l'interaction électromagnétique et sa portée est faible (de l'ordre du femtomètre).

### 2.8.4 Interaction faible

Elle est de l'ordre de  $10^5$  fois plus faible que l'interaction forte et de portée très faible (inférieure au femtomètre). Elle intervient dans les radioactivités  $\beta^-$ ,  $\beta^+$  et la capture électronique (K-capture), c'est-à-dire :

$$d \rightarrow u + e + \bar{\nu} \quad \beta^-, \quad (2.8)$$

$$u \rightarrow d + \bar{e} + \nu \quad \beta^+, \quad (2.9)$$

$$u + e \rightarrow d + \nu \quad K. \quad (2.10)$$

Elle est véhiculée par les bosons intermédiaires  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z$ .

### 2.8.5 Unification des interactions

La théorie électrofaible (1967) de Weinberg, Salam et Glashow unifie les interactions électromagnétique et faible. Dans cette théorie les interactions électromagnétique et faible apparaissent comme deux aspects d'une même interaction plus fondamentale.

On cherche à unifier l'interaction forte avec l'interaction électrofaible, voire avec l'interaction gravitationnelle, mais les tentatives actuelles (théorie des cordes, relativité d'échelle, ...) ne sont encore que des ébauches.

*Remarque :* Pour l'étude de la mécanique classique à laquelle on se limitera, les seules interactions à prendre en compte seront les interactions gravitationnelle et électromagnétique. En effet, on ne considérera que de la matière formée de particules ne changeant pas de nature et les interactions fortes et faibles ont alors des portées bien trop courtes pour qu'on ait à les prendre en considération.

## 2.9 Interactions de contact

Des objets *en contact* sont formés d'atomes et sont en interaction électromagnétique (essentiellement par l'intermédiaire de leurs nuages électroniques). Sans entrer dans les détails de ces interactions, on les appellera interactions de contact.

Pour s'en tenir aux actions subies par des objets assimilés à des points matériels, on peut envisager les cas qui suivent.

### 2.9.1 Point matériel lié à un fil tendu de masse nulle

*Un fil tendu, de masse négligeable, exerce à ses deux extrémités des forces opposées dont la droite d'action est matérialisée par le fil. Leur sens est évident, un fil ne peut que tirer.* En fait il s'agit d'une force élastique liée à un léger allongement du fil.

### 2.9.2 Point matériel liée à une extrémité d'un ressort parfait

Un ressort, de masse négligeable, parfaitement élastique, exerce à ses deux extrémités des forces opposées dont la droite d'action est confondue avec l'axe du ressort et dont l'intensité est proportionnelle à son allongement. Un ressort tendu tire et un ressort comprimé pousse.

$$F_{R/M} = k |L - L_0|, \quad (2.11)$$

avec  $k$  la raideur du ressort en  $\text{N m}^{-1}$ ,  $L_0$  la longueur à vide du ressort et  $L$  la longueur du ressort. Ainsi si le ressort est attaché en un point  $A$  et la force appliqué en  $M$  on a

$$\overrightarrow{F_{R/M}} = -k(L - L_0) \frac{\overrightarrow{AM}}{L}. \quad (2.12)$$

### 2.9.3 Mouvement d'un point lié à une courbe ou à une surface

Si un point mobile reste en contact avec une surface  $\Sigma$  sans la quitter, la liaison est dite bilatérale. Tout se passe comme si  $M$  était entre deux surface parallèles  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . La force de liaison ou *réaction de la surface* a en général deux composantes : une normale (à  $\Sigma$ ) et une tangentielle (à  $\Sigma$ ) :

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t. \quad (2.13)$$

Si le point mobile peut quitter la surface sans la traverser, le contact est unilatéral. La réaction normale est alors toujours dans le sens de  $\Sigma$  vers  $M$ . Elle s'annule quand  $M$  quitte  $\Sigma$  et le problème change de nature. En l'absence de frottement,  $\vec{R}_t = \vec{0}$ . S'il y a frottement, la réaction tangentielle est de même direction que la vitesse et de sens opposé.

Si un point mobile reste en contact avec une courbe  $\Gamma$ , sa trajectoire est imposée. En l'absence de frottement,  $\vec{R}_t = \vec{0}$ . S'il y a frottement, la réaction tangentielle est de même direction que la vitesse et de sens opposé.

Pour un point lié à une surface, la direction de  $\vec{R}_n$  est imposée. Alors que pour un point lié à une courbe, elle ne l'est pas car il y a une infinité de normales en un point d'une courbe.

## 2.10 Exercices

**Exercice 2.1** (Tir dans le vide). Un canon éjecte des obus avec une vitesse de norme  $v_0 = 200 \text{ m s}^{-1}$ . On désire atteindre un objectif situé au sommet d'une montagne de hauteur  $h = 1000 \text{ m}$ . On notera  $x_m$  la distance horizontale maximale entre le canon et l'objectif pour que ce soit possible et  $g$  l'accélération de la pesanteur. On suppose que le champ de pesanteur est uniforme et on néglige la résistance de l'air ainsi que les effets de rotation de la Terre.

1. Trouver la relation entre  $x_m$ ,  $v_0$ ,  $g$  et  $h$ . Calculer  $x_m$  si  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .
2. On se place à la distance horizontale  $\frac{x_m}{2}$  de l'objectif et on appelle  $\alpha$  l'angle de tir. Trouver la relation entre  $x_m$ ,  $v_0$ ,  $g$ ,  $h$  et  $\alpha$ . Calculer numériquement les valeurs de  $\alpha$  en degrés et minutes.
3. Calculer la vitesse de l'obus au moment où il atteint l'objectif.

**Exercice 2.2** (Accéléromètre). Montrer que l'on peut mesurer l'accélération d'un ascenseur dans les phases uniformément variées de son mouvement avec un ressort, une masse et un double décimètre.

**Exercice 2.3** (Mouvement sans frottement sur une surface plane). On considère le mouvement d'un point matériel glissant sans frottement sur un plan incliné. On notera  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur,  $\vec{v}_0$  la vitesse initiale,  $O$  la position initiale,  $\alpha$  le rectiligne du dièdre formé par le plan incliné et le plan horizontal,  $\beta$  l'angle de  $\vec{v}_0$  avec une horizontale du plan incliné (compté positivement si  $\vec{v}_0$  est au-dessus de cette horizontale). On utilise comme repère orthogonal :  $(Ox)$  horizontale du plan incliné orienté dans le sens de  $\vec{v}_0$ ,  $(Oy)$  vers le haut dans le plan incliné et  $(Oz)$  perpendiculaire au plan vers le haut.

1. Établir les expressions vectorielles de  $\vec{a}$ ,  $\vec{v}$  et  $\overrightarrow{OM}$  en fonction du temps  $t$ , puis donner les coordonnées  $x$  et  $y$  de  $M$  en fonction de  $t$ . En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire.
2. Exprimer la portée horizontale et la flèche de la trajectoire avec  $g$ ,  $v_0$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .
3. Donner la loi horaire du mouvement  $s = f(t)$  (la trajectoire étant dans le sens du mouvement et l'origine des abscisses curvilignes étant le point  $O$ ).
4. Exprimer l'accélération tangentielle et l'accélération normale, puis en déduire l'expression du rayon de courbure en fonction de la position de  $M$ , puis en fonction du temps  $t$ .

**Exercice 2.4** (Frottement proportionnel à la vitesse). Un point matériel lancé sur une droite avec une vitesse initiale de norme  $v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$  n'est soumis qu'à la force de frottement fluide  $\vec{f} = -\lambda m \vec{v}$ .

1. Le point parcourt en tout la distance  $d = 100 \text{ m}$ . Calculer numériquement  $\lambda$ .
2. Calculer les temps  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  et  $t_f$  nécessaires pour parcourir les distances respectives de 50 m, 99 m, 99.9 m, 100 m.
3. Calculer le travail de la force de frottement de l'instant initial, à  $t_1$ , à  $t_2$ , à  $t_3$  puis à  $t_f$  sachant que  $m = 1 \text{ g}$ .

**Exercice 2.5** (Frottement proportionnel au carré de la vitesse). Un point matériel lancé sur une droite avec une vitesse initiale de norme  $v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$  n'est soumis qu'à la force de frottement fluide  $\vec{f} = -K m v \vec{v}$ . Le point met  $T = 50 \text{ s}$  pour parcourir  $d = 50 \text{ m}$ .

1. Calculer numériquement  $K$ , en précisant son unité.
2. Quel temps met le point matériel pour parcourir la distance  $2d$  ?
3. Quel est le travail de la force de frottement quand le point matériel a parcouru la distance  $2d$  si  $m = 1 \text{ kg}$  ?

**Exercice 2.6** (Pendule simple). Un anneau, assimilé à un point matériel de masse  $m$ , glisse sans frotter sur une tige circulaire, de rayon  $r$ , placée dans un plan vertical. On repère sa position par l'angle polaire  $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ . Le point  $A$  étant la position la plus basse. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$  :

1. avec la relation fondamentale de la dynamique ;
2. avec le théorème du moment cinétique.



## Chapitre 3

# Applications de la relation fondamentale de la dynamique

### Sommaire

3.1	Chute libre, tir dans le vide . . . . .	23
3.2	Influence de la résistance de l'air sur le tir d'un projectile pour des vitesses faibles . . . . .	25
3.3	Tir vertical . . . . .	26
3.4	Mouvement d'un point matériel soumis à une force de rappel . . . . .	27
3.4.1	Pendule élastique horizontal . . . . .	27
3.4.2	Pendule élastique vertical . . . . .	27
3.5	Exercices . . . . .	28

### 3.1 Chute libre, tir dans le vide

Dans une région de la Terre suffisamment petite, on sait que la seule force qui s'exerce dans le référentiel terrestre sur un corps dans le vide est son poids :  $\vec{P} = m\vec{g}$ ,  $\vec{g}$  étant le champ de pesanteur, localement uniforme, vertical et orienté vers le bas. La relation fondamentale de la dynamique donne alors  $\vec{a} = \vec{g}$ , elle est nommée aussi accélération de la pesanteur. À Paris,  $g = 9.806\,65\,\text{m s}^{-2}$ .

Pour étudier le mouvement d'un projectile dans le vide, on utilise un repère cartésien lié à la terre avec  $O$  : position à  $t = 0$ ,  $(Oz)$  vertical ;  $(Ox)$  dans le plan de tir formé par  $O$  et  $\vec{v}_0$ . À  $t = 0$ , on a l'angle de tir  $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{v}_0)$ . Alors, en prenant en compte  $\vec{a} = -g\vec{u}_z$  et  $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_z$  et en

### 3.1. Chute libre, tir dans le vide

---

intégrant deux fois, on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = v_0 t \cos \alpha \overrightarrow{u_x} + \left( v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2} \right) \overrightarrow{u_z}. \quad (3.1)$$

Ainsi, l'équation cartésienne du mouvement est

$$y = 0 \quad z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha. \quad (3.2)$$

C'est l'équation d'une parabole d'axe vertical, dont la concavité est tournée vers le bas. Elle coupe l'axe  $(Oz)$  en  $x = 0$  et en la portée horizontale  $x = p = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ . Le sommet de la parabole a pour coordonnées  $x = \frac{p}{2} = \frac{v_0 \cos \alpha \sin \alpha}{2}$  (par symétrie de la trajectoire). Alors la flèche vaut :

$$f = z(x = p/2) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (3.3)$$

On constate que la portée horizontale est maximale pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et sa valeur est  $p = \frac{v_0^2}{g}$ . La flèche est maximale lorsque  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et alors  $f_m = \frac{v_0^2}{2g}$ .

Pour atteindre un point de coordonnées données  $P(X, Y)$  avec  $X > 0$ , avec une vitesse initiale de norme  $v_0$ , l'angle de tir doit être solution de l'équation

$$Z = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} X^2 + X \tan \alpha. \quad (3.4)$$

Notons pour simplifier l'écriture :  $u = \tan \alpha$ , alors  $1 + u^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  et  $\alpha = \arctan u$ . Ainsi l'équation devient

$$Z = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + u^2) X^2 + uX, \quad (3.5)$$

c'est-à-dire

$$\left( \frac{gX^2}{2v_0^2} \right) u^2 - Xu + \left( Z + \frac{gX^2}{2v_0^2} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Cette équation n'a de solution que si son discriminant est positif, c'est-à-dire que si  $Z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gX^2}{2v_0^2}$ .

La parabole de sûreté a pour équation :

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \quad (3.7)$$

Son sommet a les coordonnées de  $x = 0$  et  $z = f_m$  et elle coupe l'axe  $(Ox)$  au point  $z = 0$  et  $x = p_m$ . Tout point  $P$  situé en-dessous de la parabole de sûreté peut être atteint avec deux valeurs différentes de  $\alpha$ . Tout point situé sur la parabole de sûreté n'est atteint qu'avec une seule valeur de  $\alpha$  et tout point au-dessus de la parabole ne peut être atteint.

### 3.2 Influence de la résistance de l'air sur le tir d'un projectile pour des vitesses faibles

Pour des vitesses faibles, on peut faire l'approximation suivante : la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse :  $\vec{f} = -k\vec{v}$ . La relation fondamentale de la dynamique donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}. \quad (3.8)$$

La solution homogène de cette équation est  $\vec{v} = \vec{C}e^{-\frac{k}{m}t}$  (où  $\vec{C}$  est un vecteur constant). Une solution particulière de l'équation complète est  $\vec{v} = \frac{m}{k}\vec{g}$ . La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$\vec{v} = \vec{C}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k}\vec{g}. \quad (3.9)$$

À  $t = 0$  on a  $\vec{v} = \vec{v}_0$  donc  $\vec{C} = \vec{v}_0 - \frac{m}{k}\vec{g}$ . La solution physique de cette équation est donc

$$\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \frac{m}{k}\vec{g}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k}\vec{g} \quad (3.10)$$

En intégrant encore une fois (avec  $\vec{OM}(t=0) = \vec{0}$ ), on obtient

$$\vec{OM} = \frac{m}{k} \left(\vec{v}_0 - \frac{m}{k}\vec{g}\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \frac{m}{k}\vec{g}t. \quad (3.11)$$

Si on décompose dans le repère orthogonal on obtient

$$\begin{cases} x = \frac{mv_0 \cos \alpha}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ z = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{m}{k}g\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k}t \end{cases} \quad (3.12)$$

Lorsque  $t$  tend vers l'infini la vitesse tend vers une vitesse limite verticale :  $\vec{v}_L = \frac{m}{k}\vec{g}$ . On notera donc  $v_L = \frac{m}{k}g$ . L'abscisse tend vers la valeur limite  $x_L = \frac{mv_0 \cos \alpha}{k}$ .

On peut donc écrire plus simplement :  $x = x_L \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$  d'où  $t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{x}{x_L}\right)$  et

$$z = \left(x_L \tan \alpha + \frac{mv_L}{k}\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - v_L t. \quad (3.13)$$

D'où l'équation de la trajectoire

$$z = \left(x_L \tan \alpha + \frac{mv_L}{k}\right) \frac{x}{x_L} + \frac{mv_L}{k} \ln \left(1 - \frac{x}{x_L}\right). \quad (3.14)$$

La flèche de la trajectoire s'obtient avec la résolution de l'équation  $\frac{dz}{dx} = 0$ , et on arrive à

$$f = x_L \tan \alpha - \frac{mv_L}{k} \ln \left(1 + \frac{kx_L \tan \alpha}{mv_L}\right) = \frac{mv_0 \sin \alpha}{k} - \frac{m^2 g}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0 \sin \alpha}{mg}\right). \quad (3.15)$$

### 3.3. Tir vertical

---

De manière triviale, elle est maximale pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et vaut alors  $f = \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2g}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right)$ .

La portée est la valeur  $x$  non nulle solution de  $z = 0$ , que l'on ne peut pas résoudre analytiquement. Néanmoins une simulation numérique montrerait qu'elle est réduite par rapport au cas sans frottements.

### 3.3 Tir vertical

Dans le cas général, la force de frottement exercée par le fluide est de la forme  $\vec{f} = -Kv^\alpha \vec{v}$  avec  $\alpha \in [0, 3]$  et  $K > 0$ . On étudiera ici le cas où la vitesse initiale est verticale, le champ de pesanteur uniforme et la poussée d'Archimède négligeable. On a alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{Kv^\alpha}{m} \vec{v} = \vec{g}. \quad (3.16)$$

Les vecteurs  $\vec{v}_0$  et  $\vec{g}$  étant verticaux, on en déduit que le mouvement se fait sur une trajectoire verticale.

On se limite maintenant au cas où  $v$  reste d'un ordre de grandeur où  $\alpha = 1$  avec  $\vec{v}_0$  vers le bas. Ainsi l'équation différentielle s'écrit

$$mg - Kv^2 = m \frac{dv}{dt}. \quad (3.17)$$

Cette équation n'est pas linéaire, on peut cependant la résoudre en utilisant la vitesse limite  $v_L = \sqrt{\frac{mg}{K}}$ , qui est une solution particulière. L'équation se réécrit

$$v_L^2 - v^2 = \frac{m}{K} \frac{dv}{dt}, \quad (3.18)$$

soit alors

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v_L^2 - v^2} = \int_0^t \frac{K}{m} dt. \quad (3.19)$$

En remarquant que  $\frac{1}{v_L^2 - v^2} = \frac{1}{2v_L} \left( \frac{1}{v_L + v} + \frac{1}{v_L - v} \right)$  on obtient

$$\frac{1}{2v_L} \left[ \ln \left( \frac{v_L + v}{v_L - v} \right) \right]_{v_0}^v = \frac{K}{m} t. \quad (3.20)$$

En isolant  $v$  de cette équation on a :

$$v = v_L \frac{(v_L + v_0) e^{\frac{2Kv_L t}{m}} - (v_L - v_0)}{(v_L + v_0) e^{\frac{2Kv_L t}{m}} + (v_L - v_0)}. \quad (3.21)$$

On remarque que lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $v$  tend vers  $v_L$ .

### 3.4 Mouvement d'un point matériel soumis à une force de rappel

#### 3.4.1 Pendule élastique horizontal

On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$ , attaché à un ressort dont l'autre extrémité est fixe. L'ensemble est enfilé sur une tige horizontale ( $Ax$ ). On suppose que le ressort est parfait, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $L_0 = AO$  et que les frottements sont négligeables.

Le point  $M$  est soumis, dans le référentiel terrestre assumé galiléen, à son poids  $\vec{P}$  vertical, à la réaction de la tige  $\vec{R}$  normale à ( $Ox$ ) et à la force de rappel exercée par le ressort  $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$ .

La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{R} - kx\vec{u}_x = m\vec{a}. \quad (3.22)$$

La vitesse est horizontale donc  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$  est aussi horizontale donc  $\vec{R} = -\vec{P}$  et alors on a l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.23)$$

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique. Le mouvement est rectiligne sinusoïdal. La solution réelle générale de cette équation est

$$x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = X \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right). \quad (3.24)$$

Les conditions sur  $x$  et  $\dot{x}$  permettent de calculer  $A$  et  $B$  ou l'amplitude  $X$  et la phase d'origine  $\varphi$ .

#### 3.4.2 Pendule élastique vertical

On suppose maintenant que le ressort est vertical. Pour amorcer le mouvement, il faut écarter  $M$  verticalement de sa position d'équilibre, ou le lancer verticalement, ou les deux à la fois.

On prend la position d'équilibre comme l'origine de l'axe vertical descendant ( $Ox$ ) et on note  $L_e$  la longueur du ressort à l'équilibre.

En négligeant encore la poussée d'Archimède et la résistance de l'air,  $M$  est soumis à son poids  $\vec{P} = mg\vec{u}_x$  et la force du ressort  $\vec{F} = -k(L_e + x - L_0)\vec{u}_x$ . L'équation différentielle du mouvement est donc

$$mg - k(L_e + x - L_0) = m\ddot{x}. \quad (3.25)$$

D'autre part on a  $mg - k(L_e - L_0) = 0$ . Alors par soustraction membre à membre de ces deux égalités, on obtient la même équation différentielle que pour le pendule élastique horizontal :

$$-kx\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x, \quad (3.26)$$

d'où  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$  et le même type de solution.

### 3.5 Exercices

**Exercice 3.1** (Interaction entre deux charges ponctuelles). Quatre charges ponctuelles  $q$ ,  $-2q$ ,  $2q$ , et  $-q$  sont placées respectivement aux sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'un carré de côté  $a$ . Exprimer la force exercée par l'ensemble de ces quatre charges sur une charge ponctuelle  $q$  placée au centre  $O$  du carré, avec  $a$ ,  $q$  et les vecteurs unitaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  tels que  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = a\vec{i}$  et  $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB} = a\vec{j}$ .

**Exercice 3.2** (Expérience de Millikan). On observe au microscope la chute d'une gouttelette sphérique d'huile dans l'air. SA vitesse est rapidement stabilisée à la valeur  $v_0$ , elle parcourt alors 4.00 mm en 12.4 s.

On admettra que la résistance de l'air oppose au mouvement de la goutte une force d'intensité  $6\pi r\eta v$ ,  $v$  étant la vitesse de la goutte,  $r$  son rayon et  $\eta$  la viscosité de l'air. On rappelle que la poussée d'Archimède a la même intensité que le poids de l'air déplacé par la goutte. On pose  $\eta = 1.80 \times 10^{-5}$  SI,  $\rho = 1260$  kg/m<sup>3</sup>,  $g = 9.81$  m s<sup>-2</sup> et  $\rho' = 1.3$  kg/m<sup>3</sup>.

1. Calculer le rayon de la goutte. ;
2. Les gouttes observées se chargent positivement par frottement lors de la pulvérisation de l'huile et se déplacent entre les armatures horizontales d'un condensateur, distantes de  $d = 2.00$  cm. Lorsque le condensateur est chargé sous une tension de  $U = 9.00$  kV, la goutte remonte de 4.00 mm en 15.1 s. En déduire la charge électrique  $q$  de la goutte.
3. La charge de la goutte peut varier brusquement lors de son contact avec une molécule d'air ionisée par un faisceau de rayons  $X$ . La goutte précédente portant une nouvelle charge  $q'$  est pratiquement immobile pour une tension de  $U' = 3.95$  kV entre les armatures du condensateur. Calculer  $q'$ . Déduire de  $q$  et  $q'$  une valeur probable de la charge élémentaire  $e$ .

**Exercice 3.3** (Masse du Soleil). La Terre et le Soleil sont assimilés à des points matériels, on considère que le Soleil est fixe. La Terre décrit en une année (365,25 jours) autour du Soleil un cercle de rayon 150 millions de kilomètres. Sachant que la masse de la Terre vaut  $m_T = 5.97 \times 10^{24}$  kg et la constante de gravitation universelle  $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11}$  SI, déterminer la masse du Soleil.

**Exercice 3.4** (Pendule conique à deux fils). On suspend un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , à un fil inextensible de longueur  $L$  et de masse négligeable fixé en  $O_1$  (de l'axe  $(Oz)$ ). Le point  $M$  subit un mouvement de rotation uniforme (de vitesse  $\omega$ ) dans le plan  $(xOy)$ . Le fil  $O_1M$  reste incliné d'un angle constant  $\alpha$  par rapport à  $(Oz)$ .

Déterminer  $\alpha$  en fonction de  $\omega$ ,  $L$ , et de l'accélération de la pesanteur  $g$ .

Maintenant, le point matériel  $M$  est relié au point  $O_2$  (qui est le symétrique de  $O_1$  par rapport à  $O$ ),  $OO_1 = OO_2 = D$ . Le point  $M$  est mis en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  que l'on augment progressivement. Le fil  $O_2M$  commence à se tendre pour une valeur  $\omega_1$  que l'on exprimera en fonction de  $g$  et  $D$ .

Pour  $\omega > \omega_1$ , déterminer les normes  $T_1$  et  $T_2$  des tensions respectives des fils  $O_1M$  et  $O_2M$  en fonction de  $m$ ,  $L$ ,  $\omega_1$  et  $\omega$ .

Calculer numériquement  $T_1$  et  $T_2$  pour  $L = 0.5 \text{ m}$ ,  $D = 0.3 \text{ m}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  et  $\omega = 7 \text{ rad s}^{-1}$ .

### 3.5. Exercices

---



## Chapitre 4

# Aspects énergétiques de la dynamique du point matériel

### Sommaire

---

4.1	Puissance et travail d'une force . . . . .	32
4.2	Énergie cinétique, théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel . . . . .	32
4.3	Exemple d'utilisation du théorème de l'énergie cinétique . . . . .	33
4.4	Exemples de calculs de travaux et de puissances	34
4.4.1	Travail du poids d'un point matériel . . . . .	34
4.4.2	Travail d'une force de rappel d'un ressort . . . . .	34
4.4.3	Travail d'une force de frottement . . . . .	35
4.5	Énergie potentielle d'un point matérielle . . . . .	35
4.5.1	Force conservative . . . . .	35
4.5.2	Énergie potentielle . . . . .	35
4.5.3	Énergie potentielle de pesanteur . . . . .	36
4.5.4	Énergie potentielle élastique . . . . .	36
4.5.5	Cas d'une force qui ne travaille pas . . . . .	36
4.6	Énergie mécanique d'un point matériel, limites du mouvement . . . . .	36
4.6.1	Définition de l'énergie mécanique et théorème de l'énergie mécanique pour un point matériel . . . . .	36
4.6.2	Limites du mouvement . . . . .	37
4.7	Positions d'équilibre, stabilité d'un équilibre . . . . .	37
4.7.1	Positions d'équilibre . . . . .	37
4.7.2	Stabilité d'un équilibre . . . . .	38
4.8	Exemples d'application . . . . .	39
4.8.1	Utilisation de l'intégrale première du mouvement pour un pendule élastique incliné . . . . .	39

#### 4.1. Puissance et travail d'une force

4.8.2	Positions d'équilibre d'un point matériel sur un cercle . . . . .	40
4.9	Exercices . . . . .	41

### 4.1 Puissance et travail d'une force

**Définition 4.1** (Puissance). Soit  $\vec{v}$  la vitesse d'un point  $M$  dans le référentiel considéré, la puissance développée par la force  $(M, \vec{F})$  est définie comme

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (4.1)$$

Elle s'exprime en watt,  $1 \text{ W} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3}$ .

Pendant un intervalle de temps élémentaire  $dt$ , le déplacement élémentaire de  $M$  est  $d\vec{M} = \vec{v} dt$ . Le travail élémentaire effectué par la force vaut donc  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = \mathcal{P} dt$ .

On remarquera que l'on note  $\delta W$  et non  $dW$  car le travail d'une force, dans le cas général, ne dépend pas que de la position initiale et de la position finale. En d'autres termes le travail élémentaire n'est pas une forme différentielle.

**Définition 4.2** (Travail). Pour un point  $M$  qui se déplace de  $M_1$  à  $M_2$  sur une trajectoire  $\Gamma$ , le travail effectué par la force  $(M, \vec{F})$  est définie par

$$W_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{M} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt. \quad (4.2)$$

Le travail d'une force s'exprime en joule,  $1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ . Dans le cas d'une force constante,  $W_{1,2} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$ .

Le produit scalaire est distributif, donc la puissance d'une somme de force vaut la somme des puissances des forces (idem pour le travail).

Lorsque  $M$  effectue un parcours fermé le long d'une courbe  $\Gamma$ , l'intégrale curviligne est notée  $\oint$  et le travail ne dépend pas du point de départ :  $W_{1,1} = W_{2,2} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{M}$ .

### 4.2 Énergie cinétique, théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel

**Définition 4.3** (Énergie cinétique). On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel considéré, son énergie cinétique est définie (dans ce référentiel) comme :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2. \quad (4.3)$$

Elle s'exprime en joule

### 4.3. Exemple d'utilisation du théorème de l'énergie cinétique

**Théorème 4.1** (Théorème de l'énergie cinétique). *La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel dans un référentiel galiléen est la puissance totale des forces qui agissent sur ce point matériel :*

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}, \quad (4.4)$$

$$dE_c = \delta W, \quad (4.5)$$

$$\Delta E_c = W \quad (4.6)$$

*Démonstration.* En appliquant la relation fondamentale de la dynamique on trouve que

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m \vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{m}{2} \frac{d\vec{v}^2}{dt} = \frac{dE_c}{dt}. \quad (4.7)$$

□

### 4.3 Exemple d'utilisation du théorème de l'énergie cinétique

Un point matériel  $M$  de masse  $M$  glisse sans frotter sur un rail circulaire (de rayon  $r$  et de centre  $O$ ) contenu dans un plan vertical. On abandonne ce point sans vitesse initiale en un point  $M_0$  très voisin de la position la plus haute  $A$ . On repère sa position par l'angle polaire  $\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$ .

Pour quelle valeur de  $\theta$  le contact entre  $M$  et le rail est rompu ?

Le point  $M$  est soumis à la réaction du rail  $\vec{R}$  perpendiculaire au rail (donc aussi à  $\vec{v}$ ) et à son poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_x$ . La puissance développée par la réaction est nulle, donc son travail aussi est nul. Le travail du poids vaut :

$$W_{\vec{P}} = -mg\vec{u}_x \cdot \overrightarrow{M_0M} = -mg\vec{u}_x \cdot \overrightarrow{AM} \quad (4.8)$$

$$= -mg\vec{u}_x \cdot r((\cos \theta - 1)\vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) \quad (4.9)$$

$$= mgr(1 - \cos \theta). \quad (4.10)$$

La vitesse vaut  $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et donc  $E_c = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$   $E_{c0} = 0$ .

Le théorème de l'énergie cinétique donne  $E_c - E_{c0} = W_{\vec{R}} + W_{\vec{P}}$  et après simplification

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g(1 - \cos \theta)}{r}. \quad (4.11)$$

Les forces agissant sur  $M$  s'expriment en coordonnées cylindro-polaires par :

$$\vec{R} = R_\rho \vec{u}_\rho + R_z \vec{u}_z \quad (4.12)$$

$$\vec{P} = mg(-\cos \theta \vec{u}_\rho + \sin \theta \vec{u}_\theta) \quad (4.13)$$

et l'accélération par

$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho. \quad (4.14)$$

#### 4.4. Exemples de calculs de travaux et de puissances

---

La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\begin{cases} R_z = 0 \\ R_\rho - mg \cos \theta = -mr\dot{\theta}^2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Le rail exerce une force du rail vers le point, donc on a

$$R = R_\rho = mg \cos \theta - mr \frac{2g(1 - \cos \theta)}{r} = mg(3 \cos \theta - 2) > 0 \quad (4.16)$$

Le contact est rompu lorsque  $R$  s'annule, c'est-à-dire pour  $\cos \theta = \frac{2}{3}$ , soit  $\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48,2$  degrés.

### 4.4 Exemples de calculs de travaux et de puissances

#### 4.4.1 Travail du poids d'un point matériel

On notera  $(Oz)$  un axe vertical ascendant, donc  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ . Pour un déplacement élémentaire  $d\vec{M} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$ , le travail élémentaire vaut  $\delta W = -mgdz$ . Entre une position initiale  $z_1$  et une position finale  $z_2$ , le travail du poids est  $W = mg(z_2 - z_1)$ . La puissance du poids est  $\mathcal{P} = -mg\dot{z}$ .

*Le travail du poids d'un point matériel est égal au produit de son intensité par la diminution de l'altitude du point matériel.*

#### 4.4.2 Travail d'une force de rappel d'un ressort

On considère un point matériel  $M$  attaché à une extrémité libre d'un ressort parfait, l'autre extrémité  $A$  du ressort étant fixé. Le ressort exerce sur ce point la force

$$\vec{F} = -k(L - L_0) \frac{\overrightarrow{AM}}{L}. \quad (4.17)$$

Pour un déplacement élémentaire  $d\overrightarrow{AM}$  de  $M$ , le travail vaut

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{AM} \quad (4.18)$$

$$= -k \frac{L - L_0}{L} \overrightarrow{AM} d\overrightarrow{AM} \quad (4.19)$$

$$= -k \frac{L - L_0}{L} L dL \quad (4.20)$$

$$= -k \frac{L - L_0}{d} L. \quad (4.21)$$

En notant l'allongement  $\alpha = L - L_0$ , on obtient

$$\delta W = -k\alpha d\alpha \quad (4.22)$$

$$= -d\left(\frac{k\alpha^2}{2}\right). \quad (4.23)$$

Entre deux positions  $M_1$  et  $M_2$  de  $M$ , le travail de la force vaut  $W_{1,2} = \frac{k}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$ .

#### 4.4.3 Travail d'une force de frottement

Une force de frottement est toujours orientée comme  $-\vec{v}$ , donc sa puissance est négative et son travail est aussi négatif, quelque soit le déplacement.

### 4.5 Énergie potentielle d'un point matérielle

#### 4.5.1 Force conservative

**Définition 4.4.** Une force est conservative si et seulement si son travail est indépendant du chemin suivi par son point d'application.

Ce travail ne dépend donc que des positions initiale et finale du point d'application de la force. Le long d'un parcours fermé, le travail d'une force conservative est nul.

C'est le cas du poids d'un point matériel,  $W_{1,2} = mg(z_1 - z_2)$ . C'est aussi le cas de la force de rappel d'un ressort de masse négligeable dont une extrémité est fixe,  $W_{1,2} = \frac{k}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$ . Par contre, ce n'est pas le cas de la force de frottement, car son travail est négatif même pour un parcours fermé. Les frottements ne sont pas conservatifs.

#### 4.5.2 Énergie potentielle

Dans ces deux cas, le travail apparaît comme la diminution d'une fonction de la position. Cette fonction est appelée énergie potentielle.

**Définition 4.5.** Le travail d'une force conservative est égal à la diminution de l'énergie potentielle correspondante

$$W_{1,2} = E_{p1} - E_{p2}. \quad (4.24)$$

Pour un déplacement élémentaire, on a donc  $\delta W = -dE_p$ . Le travail élémentaire d'une force conservative est la différentielle d'une fonction de la position de son point d'application<sup>1</sup>. Réciproquement, si le travail élémentaire est la différentielle d'une fonction de la position, alors la force est conservative. On a l'équivalence

$$\vec{F} \text{ est conservative} \iff \exists f \delta W = df(x, y, z) = -dE_p. \quad (4.25)$$

L'énergie potentielle est donc définie à une constante près. Pour choisir une expression de l'énergie potentielle parmi toutes les expressions possibles, il faut choisir une position du point matériel pour laquelle on décide que  $E_p = 0$ .

---

1. C'est une différentielle totale exacte, alors qu'en général  $\delta W$  n'est qu'une forme différentielle.

### 4.5.3 Énergie potentielle de pesanteur

On a vu que le travail du poids d'un point matériel s'écrit  $W_{1,2} = mg(z_1 - z_2)$ , donc l'énergie potentielle de pesanteur est  $E_p = mgz + K$ . En choisissant  $E_p = 0$  pour  $z = 0$  on a  $E_p = mgz$ .

### 4.5.4 Énergie potentielle élastique

Le travail de la force exercée par l'extrémité libre d'un ressort parfaitement élastique et de masse négligeable sur un point matériel (si son autre extrémité est fixe) est  $W_{1,2} = \frac{k}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$  avec  $\alpha$  l'allongement du ressort.  $\alpha$  n'est fonction que des coordonnées du point matériel. L'énergie potentielle correspondante à cette force est l'énergie potentielle élastique. Alors  $E_p = \frac{k}{2}\alpha^2$  avec  $\alpha = L - L_0$ ,  $E_p = 0$  lorsque  $\alpha = 0$ .

### 4.5.5 Cas d'une force qui ne travaille pas

Si une force reste perpendiculaire au déplacement de son point d'application (réaction d'un fil tendu, inextensible ou réaction d'une surface en l'absence de frottements), alors son travail est nul pour tout déplacement et tout se passe comme s'il lui correspondait une énergie potentielle constante, qui est choisie nulle.

## 4.6 Énergie mécanique d'un point matériel, limites du mouvement

### 4.6.1 Définition de l'énergie mécanique et théorème de l'énergie mécanique pour un point matériel

**Définition 4.6** (Énergie mécanique). L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme de son énergie cinétique et de toutes ses énergies potentielles. En notant  $E_p$  la somme des énergies potentielles on a

$$E_m = E_c + E_p. \quad (4.26)$$

**Théorème 4.2** (de l'énergie mécanique). *La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale au travail effectué par les forces non-conservatives auxquelles il est soumis :*

$$\Delta E_m = W_{nc}. \quad (4.27)$$

*Démonstration.* Si un point matériel est soumis à des forces conservatives effectuant le travail  $W_c$  et à des forces non-conservatives effectuant pour le même trajet  $W_{nc}$ , alors la variation de l'énergie cinétique du point matériel est

$$\Delta E_c = W_c + W_{nc}, \quad (4.28)$$

d'après le théorème de l'énergie cinétique. On vient de voir que le travail d'une force conservative est l'opposée de la variation de l'énergie potentielle

$$W_c = -\Delta E_p \quad (4.29)$$

Alors d'une part

$$\Delta E_c - W_c = \Delta E_m \quad (4.30)$$

et d'autre part

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W_{nc}. \quad (4.31)$$

Alors  $\Delta E_m = W_{nc}$ .  $\square$

Par exemple, si le point matériel est soumis à des frottements, en l'absence d'autres forces non conservatives, le travail des forces de frottements étant toujours négatif, l'énergie mécanique décroît<sup>2</sup>.

*Si aucune force non-conservative appliquée au point matériel ne travaille, son énergie mécanique est constante.*

Dans ce cas, avec un repère lié au référentiel galiléen de référence,  $E_p = f(x, y, z)$  et  $E_c = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ , avec  $E_m = E_c + E_p$ . On obtient une équation différentielle nommée *intégrale première du mouvement* :

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + f(x, y, z) = \frac{m}{2}v_0^2 + f(x_0, y_0, z_0). \quad (4.32)$$

L'indice 0 correspond à une position particulière, par exemple la position initiale.

Le nom de cette équation différentielle vient de ce que les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  n'interviennent que par leurs premières dérivées temporelles. Alors que la relation fondamentale de la dynamique fait intervenir les dérivées secondes.

Dans le cas général, cette équation différentielle a l'inconvénient de faire apparaître les trois coordonnées.

#### 4.6.2 Limites du mouvement

Si aucune force non-conservative ne travaille, l'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p$  est une constante et garde donc sa valeur initiale  $E_0$ . Cependant, l'énergie cinétique est toujours positive, donc  $E_p \leq E_0$ . Les coordonnées de  $M$  ne peuvent donc varier que dans des domaines où  $E_p$  reste inférieure à l'énergie mécanique.

## 4.7 Positions d'équilibre, stabilité d'un équilibre

### 4.7.1 Positions d'équilibre

**Définition 4.7.** Une position d'équilibre est une position telle que, si le point s'y trouve avec une vitesse nulle, il reste immobile.

---

2. et elle est transformée en énergie thermique

#### 4.7. Positions d'équilibre, stabilité d'un équilibre

---

C'est donc un point où si la vitesse d'un point matériel est nulle, elle reste nulle. C'est donc un point où l'accélération est nulle si sa vitesse est nulle.

Le cas où l'accélération dépend de la vitesse se pose concrètement si une force de frottement fluide intervient, car la force de frottement fluide est du type :  $\vec{f} = -Kv^\alpha \vec{v}$ . C'est aussi le cas s'il intervient une force magnétique  $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ . Mais dans ces deux cas, si la vitesse est nulle, alors la force est nulle.

Dans le cas où seules les forces sont des forces conservatives et, éventuellement, des forces qui s'annulent avec le vitesse et des forces qui ne travaillent pas, si le point matériel se trouve avec une vitesse nulle dans une position d'équilibre, la somme des forces est nulle, son travail élémentaire est alors  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = dE_p$ , avec  $\vec{F} = \vec{0}$ . Si  $x$  est une coordonnée de position,  $\frac{dE_p}{dx} = 0$ .

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point matériel soit dans une position d'équilibre est que son énergie potentielle soit extrémale, c'est-à-dire que ses dérivées spatiales soient nulles.*

##### 4.7.2 Stabilité d'un équilibre

**Définition 4.8.** Une position d'équilibre est une position d'équilibre stable pour un point matériel si et seulement si lorsque ce point est abandonné sans vitesse très près de cette position, il va vers cette position. S'il s'en écarte, il s'agit d'une position d'équilibre instable.

On supposera pour simplifier, que  $E_p$  n'est fonction que de la coordonnée  $x$  du point matériel. Soit  $dx = x - x_0$  la petite variation de la coordonnée  $x$  à partir d'une position d'équilibre  $M_0$  du point matériel  $M$ .

On a donc :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0) \frac{dE_p}{dx}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) + \dots \quad (4.33)$$

Comme c'est une position d'équilibre ( $\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0$ ), l'énergie potentielle a varié de

$$dE_p = -\vec{F}_c \overrightarrow{M_0M} = \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0). \quad (4.34)$$

Si  $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) > 0$  alors  $\vec{F}_c$  est dans le sens de  $M$  vers  $M_0$ , sinon elle est dans l'autre sens.

L'équilibre est stable si et seulement si la dérivée seconde de l'énergie potentielle est positive en ce point d'équilibre.

Si la dérivée seconde est nulle, on étudie la dérivée troisième. Si la dérivée troisième est nulle, ... Si toutes les dérivées de l'énergie potentielles sont nulles, alors l'équilibre est dit indifférent.



## 4.8 Exemples d'application

### 4.8.1 Utilisation de l'intégrale première du mouvement pour un pendule élastique incliné

Soit un objet de masse  $m$  que l'on assimile à un point matériel  $M$  glissant sans frotter sur une tige rectiligne  $x'x$  inclinée d'un angle  $\alpha$  (par rapport à l'horizontale). L'objet est attaché à un ressort parfaitement élastique, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $L_0$ , lui-même enfilé sur la même tige et dont l'autre extrémité  $A$  est fixe.

On supposera que la tige est lubrifiée et que la vitesse de  $M$  reste suffisamment faible pour que les frottements soient négligeables.

On notera  $O$  la position d'équilibre de  $M$  et on prendra l'altitude de  $O$  comme origine des altitudes. L'abscisse de  $M$  sur l'axe  $(Ox)$  est  $x$ .

Le point matériel  $M$  est soumis aux forces suivantes :

- La réaction de la tige  $\vec{R}$  perpendiculaire à  $xx'$ , donc elle ne travaille pas ;
- Son poids  $\vec{P}$ , qui est une force conservative ;
- La force de rappel exercée par le ressort  $\vec{f}$ , qui est conservative.

L'énergie potentielle de  $M$  vaut donc  $E_p = mgz + \frac{k}{2}(L - L_0)^2 + K$  (où  $K$  est une constante dont on peut choisir la valeur). En notant  $L_e$  la longueur du ressort à l'équilibre, on a

$$z = -x \sin \alpha \quad (4.35)$$

$$L - L_0 = L_e + x - L_0. \quad (4.36)$$

Donc

$$E_p = -mgx \sin \alpha + \frac{k}{2}(L_e - L_0 + x)^2 + K \quad (4.37)$$

$$= -mgx \sin \alpha + \frac{k}{2}(L_e - L_0)^2 + \frac{k}{2}x^2 + k(L_e - L_0)x + K \quad (4.38)$$

La dérivée spatiale de  $E_p$  vaut

$$\frac{dE_p}{dx} = -mg \sin \alpha + k(L_e - L_0) + kx. \quad (4.39)$$

À l'équilibre,  $x = 0$ , on a  $\frac{dE_p}{dx} = 0$  c'est-à-dire  $L_e = L_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k}$ . Donc

$$E_p = -mgx \sin \alpha + \frac{k}{2} \left( \frac{mg \sin \alpha}{k} \right)^2 + \frac{k}{2}x^2 + k \left( \frac{mg \sin \alpha}{k} \right) x + K. \quad (4.40)$$

En choisissant  $K$  convenablement, il reste  $E_p = \frac{k}{2}x^2$ .

L'énergie cinétique s'exprime par  $E_x = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ .

Les forces étant conservatives,  $E_m = E_p + E_x$  est constante. L'énergie mécanique garde donc sa valeur initiale  $E_0 = \frac{k}{2}x_0^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_0^2$ .

## 4.8. Exemples d'application

---

En dérivant temporellement l'équation  $E_c + E_p = E_0$  il vient

$$kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0. \quad (4.41)$$

On suppose que  $\dot{x} \neq 0$  (sinon il n'y a pas de mouvement) et on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (4.42)$$

Sa solution est de la forme  $x = X \cos(\omega t + \varphi)$  avec la pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , l'amplitude  $X$  et la phase à l'origine des dates sont déterminées avec les conditions initiales ...

La valeur initiale de l'énergie mécanique  $E_0$  donne les limites du mouvements, donc de l'amplitude :

$$E_p = \frac{k}{2}x^2 \leq E_0, \quad (4.43)$$

donc  $x \in \left[-\sqrt{\frac{2E_0}{k}}; \sqrt{\frac{2E_0}{k}}\right]$ , c'est-à-dire que l'amplitude est  $X = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$ .

La représentation de  $E_p$  en fonction de  $x$  et de la constante  $E_0$  fait apparaître que le point matériel se déplace dans un puits de potentiel, entre deux barrières de potentiels.

### 4.8.2 Positions d'équilibre d'un point matériel sur un cercle

On considère un point matériel  $M$  formé par une perle de masse  $m$ , enfilée sur une tige circulaire de rayon  $r$ , placée dans un plan vertical, et glissant sans frotter sur cette tige. La perle est attachée à un ressort parfait, de longueur à vide négligeable et dont l'autre extrémité est attachée à une extrémité  $A$  du diamètre de la tige circulaire. La position  $M$  est repérée par l'angle polaire  $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ .

Déterminer les positions d'équilibres de  $M$  et préciser pour chacune leur stabilité.

Le point  $M$  est soumis à trois forces :

- son poids, qui est conservatif auquel correspond l'énergie potentielle de pesanteur  $mgy = mgr \sin \theta$  ;
- la réaction de la tige qui ne travaille pas, car elle est perpendiculaire à la vitesse ;
- la force de rappel du ressort, qui est conservative et à laquelle correspond l'énergie potentielle élastique  $\frac{k}{2}AM^2 = \frac{k}{2}(2r \sin(\frac{\theta}{2}))^2$ .

L'énergie potentielle totale est donc  $E_p = mgr \sin \theta + 2kr^2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$ . Les positions d'équilibre correspondent aux zéros de la dérivée spatiale de  $E_p$  :

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \iff mgr \cos \theta + 2kr^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \quad (4.44)$$

$$\Longleftrightarrow mgr \cos \theta + kr^2 \sin \theta = 0 \quad (4.45)$$

$$\Longleftrightarrow \tan \theta = -\frac{mg}{kr} \quad (4.46)$$

$$\Longleftrightarrow \theta \in \{\theta_1 = -\arctan\left(\frac{mg}{kr}\right), \theta_2 = \pi - \arctan\left(\frac{mg}{kr}\right)\} \quad (4.47)$$

La dérivée seconde de l'énergie potentielle vaut

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -mgr \sin \theta + kr^2 \cos \theta. \quad (4.48)$$

Pour  $\theta = \theta_1$ ,  $\sin \theta_1 < 0$  et  $\cos \theta_1 > 0$  donc  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} > 0$  ( $E_p$  est minimale) alors que pour  $\theta_2$ ,  $\sin \theta_2 > 0$  et  $\cos \theta_2 < 0$  donc  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} < 0$  ( $E_p$  est maximale). Ainsi :  $\theta_1$  correspond à une position d'équilibre stable alors que  $\theta_2$  correspond à une position d'équilibre instable.

## 4.9 Exercices

**Exercice 4.1** (Énergie potentielle électrostatique). Soit une charge électrique ponctuelle fixe  $Q$  en un point  $O$ , et une charge ponctuelle mobile  $q$  placée en  $M$ . Exprimer la force électrostatique exercée par  $O$  sur  $M$  et son travail élémentaire. Montrer que cette force est conservative et exprimer l'énergie potentielle électrostatique du point  $M$ , avec  $E_p$  tendant vers zéro en l'infini.

**Exercice 4.2** (Énergie potentielle gravitationnelle). Soit une masse ponctuelle fixe  $\mu$  placée en un point  $O$ , et une masse ponctuelle mobile  $m$  placée en  $M$ . Exprimer la force gravitationnelle exercée par  $O$  sur  $M$  et son travail élémentaire. Montrer que cette force est conservative et exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle du point  $M$ , avec  $E_p$  tendant vers zéro en l'infini.

**Exercice 4.3** (Oscillations sur une gouttière cycloïdale). Soit une gouttière cycloïdale d'équations paramétriques 
$$\begin{cases} x = R(\theta + \sin \theta) \\ y = R(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in [0; \pi].$$

L'axe  $(Oy)$  est vertical et orienté vers le haut. Le champ de pesanteur est uniforme et le point matériel  $M$ , de masse  $m$ , glisse sans frotter dans cette gouttière.

1. Exprimer  $\frac{dy}{dx}$  avec  $\frac{\theta}{2}$ . Tracer l'allure de cette gouttière, en montrant sur le dessin la signification géométrique de l'angle  $\frac{\theta}{2}$ .
2. On place l'origine des abscisses curvilignes en  $O$  et le sens positif sur la trajectoire est celui des  $x$  croissants. Exprimer  $ds$ , puis  $s$  avec  $R$  et  $\theta$ .

#### 4.9. Exercices

---

3. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur de  $M$  en fonction de  $\theta$ , puis en fonction de  $s$ , avec les paramètres  $m$ ,  $g$  et  $R$ .
4. Quelle est la position d'équilibre de  $M$  ? Est-elle stable ?
5.  $M$  est lâché sans vitesse initiale du point  $\theta = \frac{\pi}{2}$  à  $t = 0$ . Quelle est l'abscisse curviligne initiale ? Entre quelles valeurs  $s$  variera-t-il ?
6. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $s$  et la résoudre.

**Exercice 4.4** (Glissement sur une sphère). Un point matériel est lâché du point  $A$  de la sphère  $(O, r)$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$  horizontale. Les frottements ne sont pas négligés.

1. Démontrer que la trajectoire de  $M$  est un cercle vertical.
2. Exprimer la relation entre  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  à l'instant où le contact entre la sphère et  $M$  est rompu, avec les paramètres  $r$  et  $g$ .
3. Exprimer le travail  $W_f$  de la force de frottement que subit le point matériel., depuis le départ jusqu'à la rupture du contact, si le contact est rompu en  $\theta = \theta_1$ , avec  $m$ ,  $g$ ,  $r$ ,  $v_0$  et  $\theta_1$ .
4. Calculer numériquement ce travail pour les données suivantes :  $\theta_1 = 60$  degrés,  $r = 1$  m,  $m = 10$  g,  $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$  et  $v_0 = 2$  m/s.

## Chapitre 5

# Oscillateurs et portraits de phase

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Oscillateur harmonique . . . . .</b>	<b>43</b>
5.1.1	Mouvement d'un point matériel sur une courbe au voisinage d'une position d'équilibre . . . . .	43
5.1.2	Oscillateur harmonique . . . . .	44
5.1.3	Aspect énergétique . . . . .	45
<b>5.2</b>	<b>Portrait de phase . . . . .</b>	<b>46</b>
5.2.1	Définitions, propriétés des trajectoires de phase . .	46
5.2.2	Portraits de phase de l'oscillateur harmonique . .	46
5.2.3	Portrait de phase du pendule pesant simple . . . .	47
<b>5.3</b>	<b>Oscillateur amorti par frottements fluides . . . .</b>	<b>49</b>
5.3.1	Équation différentielle . . . . .	49
5.3.2	Loi horaire du mouvement . . . . .	50
5.3.3	Aspect énergétique, facteur de qualité d'un oscillateur . . . . .	51
5.3.4	Portrait de phase de l'oscillateur amorti . . . . .	52
<b>5.4</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>52</b>

---

## 5.1 Oscillateur harmonique

### 5.1.1 Mouvement d'un point matériel sur une courbe au voisinage d'une position d'équilibre

Soit  $s$  l'abscisse curviligne d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , mobile sur une courbe et soumis à des forces conservatives et à des forces qui ne travaillent pas (de puissances nulles).

### 5.1. Oscillateur harmonique

---

Soit  $E_{p_m}$  son énergie pour une position d'équilibre stable et  $s_m$  l'abscisse curviligne correspondante. De plus  $\frac{dE_p}{ds}_m = 0$  et  $\frac{d^2E_p}{ds^2}_m > 0$ . La formule de Taylor-Young permet d'écrire :

$$E_p(s) = E_{p_m} + \frac{dE_p}{ds}_m (s - s_m) + \frac{d^2E_p}{ds^2}_m \frac{(s - s_m)^2}{2} + \dots \quad (5.1)$$

pour  $s$  au voisinage de  $s_m$ . Alors en posant  $K = \frac{d^2E_p}{ds^2}_m > 0$  on obtient

$$E_p(s) = E_{p_m} + K \frac{(s - s_m)^2}{2}. \quad (5.2)$$

En dérivant cette expression, on a au voisinage de  $s_m$  :

$$\frac{dE_p}{dt} = K \dot{s}(s - s_m). \quad (5.3)$$

Mais la puissance développée par les forces conservatives est aussi la puissance totale puisque les autres forces ne travaillent pas :  $\mathcal{P} = -\frac{dE_p}{dt}$ . En notant  $\vec{F}$  la résultante des forces que subit le point matériel, on a

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V} = m \vec{a} \cdot \vec{v} = m \ddot{s} \dot{s}. \quad (5.4)$$

Ainsi

$$m \ddot{s} \dot{s} = -K \dot{s}(s - s_m). \quad (5.5)$$

On suppose que  $\dot{s}$  n'est pas identiquement nulle, donc on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{s} + \frac{K}{m}(s - s_m) = 0. \quad (5.6)$$

En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  et en prenant l'origine des abscisses curvilignes en  $s_m$ , l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable est :

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0. \quad (5.7)$$

S'il se déplace sur un cercle de rayon  $R$ , avec  $\theta = \frac{s}{R}$ , elle s'écrit aussi  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ . Si le point se déplace sur une droite que l'on prend alors comme axe des  $x$ , l'équation s'écrit  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ .

#### 5.1.2 Oscillateur harmonique

Tout point matériel dont la loi horaire  $X = f(t)$  est solution de l'équation différentielle  $\ddot{X} + \omega_0^2 x = 0$  est un oscillateur harmonique.

*Un point matériel au voisinage d'une position d'équilibre stable est un oscillateur harmonique.* On a déjà vu qu'un point matériel lié à un ressort parfait dont l'autre extrémité est fixe et astreint à se déplacer sans frotter

sur la droite formée par l'axe du ressort est un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  avec  $k$  la raideur du ressort et  $m$  la masse du point. On a aussi vu qu'un pendule pesant simple est un oscillateur harmonique, de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$  avec  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $L$  la longueur du pendule.

La loi horaire de l'oscillateur harmonique avec  $X = 0$  à la position d'équilibre stable s'écrit donc, avec des constantes  $A$  et  $\varphi$  :  $X = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

### 5.1.3 Aspect énergétique

Soit un point mobile sur une courbe et dont l'abscisse curviligne est solution de l'équation différentielle  $\ddot{s} + \omega_0^2(s - s_m) = 0$  (un oscillateur!). Sa loi horaire s'écrit donc :  $s = s_m + A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

On a donc, dans le domaine où cette équation est valable,

$$\dot{s}\ddot{s} + \omega_0^2\dot{s}(s - s_m) = 0. \quad (5.8)$$

En multipliant par  $m$  et en intégrant, on obtient

$$m \frac{\dot{s}^2}{2} + m\omega_0^2 \frac{(s - s_m)^2}{2} = C^{st}, \quad (5.9)$$

c'est-à-dire

$$E_c + f(s) = C^{st}. \quad (5.10)$$

La quantité  $f(s) = m\omega_0^2 \frac{(s - s_m)^2}{2} + B$  ( $B$  constante) est l'énergie potentielle du point matériel, et  $E_0 = C + B$  est son énergie mécanique (constante). En  $s_m$ ,  $E_p = E_{p_m} = B$ . Finalement

$$E_p = \frac{K}{2}(s - s_m)^2 + E_{p_m}, \quad (5.11)$$

avec  $K = m\omega_0^2 = \frac{d^2 E_p}{ds^2}$ .

Si le mouvement est rectiligne, on notera  $x$  à la place de  $s$ ; et s'il est circulaire de rayon  $R$ , on notera  $s = R\theta$  et  $E_p = \frac{KR^2}{2}(\theta - \theta_m)^2$ .

L'allure de la courbe représentant  $E_p$  en fonction de  $s$ ,  $x$  ou  $\theta$  est une parabole. Le point se déplace dans une cuvette de potentiel. La condition  $E_p < E_0$  donne l'amplitude  $A$  du mouvement.

Bien entendu, un choix plus adéquat de l'origine des abscisses curvilignes ( $s_m = 0$ ) et de l'origine des énergie potentielles ( $E_{p_m} = 0$ ) ne fait que décaler le sommet de la parabole au point  $O$  et du coup l'énergie potentielle est transformée en  $E_p = \frac{K}{2}s^2$  et la loi horaire  $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

## 5.2 Portrait de phase

### 5.2.1 Définitions, propriétés des trajectoires de phase

On considère un point matériel à *un seul degré de liberté*. On notera ici  $X = s$  ou  $x$ , ou  $\theta$  et  $\dot{X}$  la vitesse algébrique ou la vitesse angulaire suivant les cas.

L'état de ce point est caractérisé à un instant donné par le *point de phase* de coordonnées  $X$  et  $\dot{X}$ . Le point de phase se déplace au cours du temps dans le *plan de phase* sur sa *trajectoire de phase*. L'ensemble des trajectoires de phase pour les différentes conditions initiales est le *portrait de phase* du point matériel.

Pour  $\dot{X} > 0$ ,  $X$  est croissant et pour  $\dot{X} < 0$ ,  $X$  est décroissant. Ceci donne le sens de parcours du point de phase sur la trajectoire de phase (sens horaire).

D'autre part, si  $\dot{X} = 0$ ,  $X$  est un extrémum donc la tangente à la trajectoire de phase pour  $\dot{X} = 0$  est verticale. Un tel point de phase est appelé *point de rebroussement*.

De plus

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dX} = \frac{\ddot{X}}{\dot{X}}. \quad (5.12)$$

Donc la tangente à la trajectoire de phase pour  $\dot{X} = 0$  est horizontale. Un tel point de phase correspond au passage du point matériel par une position d'équilibre.

Si la trajectoire de phase est une courbe fermée, le point matériel repasse aux mêmes positions avec la même vitesse. Il en résulte que le mouvement est périodique et la trajectoire de phase est parcourue dans le sens inverse du sens trigonométrique (sens horaire).

### 5.2.2 Portraits de phase de l'oscillateur harmonique

On obtient la trajectoire de phase de l'oscillateur d'équation différentielle  $\ddot{X} + \omega_0 X = 0$ , avec les conditions initiales  $X_0$  et  $\dot{X}_0$  et de trois façons différentes :

— *En résolvant l'équation différentielle* : On a  $X = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  et  $\dot{X} = -A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ . De plus  $X_0 = A \cos \varphi$  et  $\dot{X}_0 = -A \omega_0 \sin \varphi$ .

Alors  $A = \sqrt{X_0^2 + \frac{\dot{X}_0^2}{\omega_0^2}}$  et  $\begin{cases} \varphi = -\arctan\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_0 X_0}\right) & X_0 > 0 \\ \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_0 X_0}\right) & X_0 < 0 \end{cases}$ . Grâce à  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ , on obtient l'équation de la trajectoire de phase :

$$\left(\frac{\dot{X}}{\omega_0 A}\right)^2 + \left(\frac{X}{A}\right)^2 = 1. \quad (5.13)$$



- Avec l'équation différentielle : En multipliant par  $2\dot{X}dt$  les deux membres de l'équation différentielle et en intégrant entre 0 et  $t$ , on obtient :

$$\int_0^t 2\dot{X}\ddot{X}dt + \omega_0^2 \int_0^t 2X\dot{X}dt = 0, \quad (5.14)$$

soit

$$\int_{\dot{X}_0}^{\dot{X}} 2\dot{X}d\dot{X} + \omega_0^2 \int_{X_0}^X 2XdX = 0, \quad (5.15)$$

c'est-à-dire

$$\dot{X}^2 + \omega_0^2 X^2 = \omega_0^2 A^2, \quad \dot{X}_0^2 + \omega_0^2 X_0^2 = \omega_0^2 A^2. \quad (5.16)$$

Finalement

$$\left(\frac{\dot{X}}{\omega_0 A}\right)^2 + \left(\frac{X}{A}\right)^2 = 1. \quad (5.17)$$

- Avec l'énergie mécanique constante : Si  $X$  représente  $x$  ou  $s$  (si c'est  $\theta$ , il faut multiplier par le rayon) alors

$$\frac{m\dot{X}^2}{2} + \frac{KX^2}{2} = \frac{m\dot{X}_0^2}{2} + \frac{KX_0^2}{2}. \quad (5.18)$$

En utilisant  $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ , on obtient  $\dot{X}^2 + \omega_0^2 X^2 = \dot{X}_0^2 + \omega_0^2 X_0^2$  et alors

$$\left(\frac{\dot{X}}{\omega_0 A}\right)^2 + \left(\frac{X}{A}\right)^2 = 1. \quad (5.19)$$

Cette relation entre  $X$  et  $\dot{X}$  est représentée par une ellipse de demi-axes  $A$  sur  $X$  et  $\omega_0 A$  sur  $\dot{X}$ . *Le portrait de phase de l'oscillateur harmonique est un ensemble d'ellipses homothétiques dans une homothétie de centre  $O$ .*

### 5.2.3 Portrait de phase du pendule pesant simple

#### Définition, équation différentielle

*Un pendule pesant simple est un point matériel qui oscille sur un cercle vertical sous l'action de son poids.* Il peut s'agir d'un point matériel suspendu à un fil inextensible, de masse négligeable dont l'autre extrémité est fixe, à condition que la vitesse initiale ait une direction convenable. Mais dans certaines conditions, le fil peut se détendre et le point matériel quitte sa trajectoire circulaire ...

On évite ce problème de la tension du fil en considérant un point lié à un cercle vertical (anneau circulaire). On considérera ici le cas où le point matériel n'est soumis, en plus de son poids, qu'à la réaction normale du cercle sur lequel il se déplace (on néglige les frottements).

## 5.2. Portrait de phase

L'équation différentielle du mouvement s'obtient avec la conservation de l'énergie mécanique (ou avec le principe fondamental de la dynamique, ou encore avec le théorème du moment cinétique appliqué au point fixe  $O$ ) :

En notant  $L$  le rayon du cercle (longueur du fil, pour le pendule simple), le moment cinétique en  $O$  est  $\vec{\sigma}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{v} = mL^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$ . Donc  $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = mL^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z$ .

La somme des moments en  $O$  des forces que subit  $M$  est :  $\vec{\Gamma}_0 = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}$ . Avec  $\vec{R} = R_r \vec{u}_r + R_z \vec{u}_z$  (pas de frottements) et  $\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$ . Alors

$$\vec{\Gamma}_0 = L \vec{u}_r \wedge ((mg \cos \theta + R_r) \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta + R_z \vec{u}_z) \quad (5.20)$$

$$= -mgL \sin \theta \vec{u}_z - LR_z \vec{u}_\theta. \quad (5.21)$$

Mais  $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{\Gamma}_0$ , donc  $R_z = 0$  et  $mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta$ . En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ , on obtient l'équation différentielle du mouvement du pendule pesant simple :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (5.22)$$

### Cas des petites oscillations

Pour des mouvements de faible amplitude, on peut faire l'approximation  $\sin \theta = \theta$  et il s'agit d'un oscillateur harmonique. En notant  $\Theta$  l'amplitude du mouvement, on obtient la loi horaire  $\theta = \Theta \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . La trajectoire de phase est une ellipse d'équation

$$\left( \frac{\dot{\theta}}{\omega_0 \Theta} \right)^2 + \left( \frac{\theta}{\Theta} \right)^2 = 1, \quad (5.23)$$

ou

$$\left( \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 = \Theta^2 - \theta^2 \quad (5.24)$$

avec  $\Theta = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega_0^2}}$ .

### Cas général

Dans le cas général, il n'y a pas de solution analytique de l'équation différentielle, mais on peut obtenir l'équation du portrait de phase en multipliant l'équation différentielle par  $2\dot{\theta} dt$ , on obtient

$$2\dot{\theta} d\dot{\theta} + 2\omega_0^2 \sin \theta d\theta = 0. \quad (5.25)$$

En intégrant de 0 à  $t$ , on a

$$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 + 2\omega_0^2(\cos \theta_0 - \cos \theta) = 0, \quad (5.26)$$

soit encore

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 = 2 \cos \theta - 2 \cos \theta_0 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2. \quad (5.27)$$

La condition  $\dot{\theta}^2$  (équivalente à  $E_c > 0$ ) s'écrit  $A < \cos \theta$  avec  $A = \cos \theta_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2$ . D'une part on remarque que  $A < 1$  et d'autre part que la condition est vérifiée pour tout  $\theta$  si et seulement si  $A < -1$ .

Il peut se présenter trois cas différents :

- Si  $-1 < A < 1$ , alors il existe  $\Theta = \arccos A$  et  $\cos \theta > \cos \Theta$ , soit  $-\Theta < \theta < \Theta$ . L'angle  $\Theta$  est l'amplitude des oscillations périodiques du pendule.  $\Theta = \arccos \left( \cos \theta_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2 \right)$  et la trajectoire de phase a pour équation

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 = 2(\cos \theta - \cos \Theta). \quad (5.28)$$

- Si  $A < -1$ , alors l'équation de la trajectoire de phase s'écrit toujours

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 = 2(\cos \theta - A), \quad (5.29)$$

mais toutes les valeurs de  $\theta$  sont possibles. Il y a rotation toujours dans le même sens et non oscillation. Le mouvement est périodique bien que la trajectoire de phase ne se referme pas.

- Si  $A = 1$ , alors le point de phase se déplace sur la trajectoire de phase critique. Si cela était réalisable, le point matériel s'arrêterait pour  $\theta = \pi$ , c'est-à-dire sur une position d'équilibre instable. Si cela se produit, c'est à cause de légers frottements inévitables que l'on a négligé.

## 5.3 Oscillateur amorti par frottements fluides

### 5.3.1 Équation différentielle

On considère un pendule élastique horizontal. Le point matériel  $M$ , de masse  $m$ , est soumis à son poids, à la force de rappel du ressort et à la réaction du support (composée d'une réaction normale et d'une force de frottement fluide).

En appliquant le principe fondamental de la dynamique et en projetant sur l'axe horizontal, on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m\ddot{x} = -f\dot{x} - kx, \quad (5.30)$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (5.31)$$

### 5.3. Oscillateur amorti par frottements fluides

---

En l'absence de frottements,  $M$  aurait un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  appelée pulsation propre. D'autre part, on posera le coefficient d'amortissement  $\lambda = \frac{f}{2m}$  (pour faciliter l'écriture des solutions). On réécrit l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.32)$$

#### 5.3.2 Loi horaire du mouvement

On ne résoudra ici l'équation différentielle que pour des conditions initiales simples :

$$x(t=0) = x_0 > 0 \quad \dot{x}(t=0) = 0. \quad (5.33)$$

L'équation caractéristique associée s'écrit  $u^2 + 2\lambda u + \omega_0^2 = 0$  et son discriminant réduit  $\delta = \lambda^2 - \omega_0^2$ . Trois cas différents peuvent se présenter selon la valeur de  $\delta$ .

#### Régime apériodique

Si  $\lambda > \omega_0$  ( $\delta > 0$ ), l'équation caractéristique a deux solutions réelles :  $-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ , toutes deux négatives que l'on notera  $-\alpha$  et  $-\beta$ . La solution de l'équation différentielle s'écrit

$$x = A e^{-\alpha t} + B e^{-\beta t} \quad (5.34)$$

Les conditions initiales donnent  $A = \frac{-\beta x_0}{\alpha - \beta}$  et  $B = \frac{\alpha x_0}{\alpha - \beta}$ . Alors

$$x = \frac{x_0}{\alpha - \beta} (\alpha e^{-\beta t} - \beta e^{-\alpha t}) \quad \dot{x} = \frac{\alpha\beta x_0}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}). \quad (5.35)$$

On remarque que  $x$  reste toujours positif et que  $\dot{x}$  reste toujours négatif. Il n'y a pas d'oscillations. Lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $x$  et  $\dot{x}$  tendent vers 0.

#### Régime critique

Si  $\lambda = \omega_0$  ( $\delta = 0$ ), l'équation caractéristique a une racine double  $\lambda = \omega_0$ . La solution de l'équation s'écrit

$$x = (A + Bt) e^{-\lambda t} \quad \dot{x} = (B - \lambda A - \lambda Bt) e^{-\lambda t}. \quad (5.36)$$

Les conditions initiales donnent  $x_0 = A$  et  $B = \lambda A = \lambda x_0$  donc

$$x = x_0(1 + \lambda t) e^{-\lambda t} \quad \dot{x} = -\lambda^2 x_0 t e^{-\lambda t}. \quad (5.37)$$

Dans ce cas,  $x$  demeure toujours positif et  $\dot{x}$  demeure toujours négatif. Il n'y a pas d'oscillations. Lorsque  $t$  tend vers l'infini  $x$  et  $\dot{x}$  tendent vers zéro. Ils tendent vers zéro plus rapidement que dans le cas apériodique.

### Régime pseudopériodique

Si  $\lambda < \omega_0$  ( $\delta < 0$ ), l'équation caractéristique a deux solutions complexes  $-\lambda \pm i\sqrt{-\delta}$ . On pose  $\omega = \sqrt{-\delta}$ , soit  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ . C'est la pseudopulsation. Les solutions réelles de l'équation différentielle s'écrivent

$$x = e^{-\lambda t}(A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad \dot{x} = e^{-\lambda t}((B\omega - \lambda A) \cos \omega t - (\lambda B + \omega A) \sin \omega t). \quad (5.38)$$

Les conditions initiales donnent  $x_0 = A$  et  $0 = -\lambda A + B\omega$  d'où  $B = \frac{\lambda}{\omega}x_0$ . La solution s'écrit donc

$$x = x_0 e^{-\lambda t} \left( \cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right) \quad \dot{x} = -\frac{\omega_0^2}{\omega} x_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t. \quad (5.39)$$

On peut aussi poser  $\varphi = -\arctan\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)$ , d'où  $\sin \varphi = -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}$  et  $\cos \varphi = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Ainsi

$$x = \frac{\omega_0}{\omega} x_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.40)$$

On peut dire que l'amplitude est  $X = \frac{\omega_0}{\omega} x_0 e^{-\lambda t}$ , elle décroît exponentiellement. Le graphe de  $x$  en fonction du temps oscille entre deux exponentielles  $X$  et  $-X$ .

On remarquera d'autre part que la pseudopériode  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$  est plus grande que la période propre  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , celle de l'oscillateur non amorti. L'écart entre  $T$  et  $T_0$  croît en fonction du coefficient d'amortissement  $\lambda$ . De plus

$$\ln \left( \frac{x(t)}{x(t+T)} \right) = \ln \left( \frac{\dot{x}(t)}{\dot{x}(t+T)} \right) = \ln \left( \frac{e^{x(-\lambda t)}}{e^{x(-\lambda(t+T))}} \right) = \lambda T. \quad (5.41)$$

Le nombre  $\delta = \lambda T$  est appelé le décrément logarithmique.

#### 5.3.3 Aspect énergétique, facteur de qualité d'un oscillateur

L'énergie mécanique de l'oscillateur est  $E(t) = \frac{kx(t)^2}{2} + \frac{m\dot{x}(t)^2}{2}$ . Compte tenu du décrément logarithmique  $E(t+T) = E(t)e^{-2\lambda T}$ . L'énergie perdue par frottements en une pseudopériode est  $E(t) - E(t+T) = E(t)(1 - e^{-2\lambda T})$ .

Dans le cas d'un régime pseudopériodique d'amortissement très faible,  $2\lambda T \ll 1$ , on peut utiliser un développement limité  $e^x = 1 + x$ . On a donc

$$E(t) - E(t+T) = 2\lambda T E(t). \quad (5.42)$$

**Définition 5.1** (facteur de qualité). Le facteur de qualité est défini par la valeur du rapport sans dimension

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)} \quad (5.43)$$

pour un régime pseudopériodique très peu amorti.

## 5.4. Exercices

---

C'est-à-dire  $Q = \frac{\omega}{2\lambda}$  mais pour un régime très peu amorti on a  $\lambda \ll \omega_0$ . Donc  $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$ . Avec  $\omega_0 = \frac{k}{m}$  et  $\lambda = \frac{f}{2m}$  on a  $Q = \frac{\sqrt{km}}{f}$ .

Plus le facteur de qualité est grand, plus on se rapproche du régime périodique d'un oscillateur harmonique.

La situation critique est telle que  $\lambda = \omega_0$ , donc le facteur de qualité vaut  $Q_{\text{critique}} = \frac{1}{2}$ .

On peut utiliser  $Q$  comme un paramètre, à la place de  $\lambda$ , dans l'équation différentielle :  $2\lambda = \frac{\omega_0}{Q}$ . L'équation différentielle s'écrit donc

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.44)$$

Les tracés ci-dessous donnent  $x(t)$  (pour les conditions initiales  $x = x_0$  et  $\dot{x} = 0$ ) en coordonnées réduites  $\xi = \frac{x}{x_0}$  et  $\tau = \omega_0 t$ .

Avec ces coordonnées réduites,  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$ , c'est-à-dire  $\dot{x} = \omega_0 x_0 \xi'$ . De même  $\ddot{x} = \omega_0^2 x_0 \xi''$ . Alors l'équation différentielle s'écrit

$$\xi'' + \frac{1}{Q} \xi' + \xi = 0. \quad (5.45)$$

Le facteur de qualité  $Q$  est donc le seul paramètre. On remarque sur ces tracés que l'oscillateur revient le plus rapidement possible à sa position d'équilibre pour le régime critique.

### 5.3.4 Portrait de phase de l'oscillateur amorti

Avec un logiciel de calcul, on obtient facilement le portrait de phase représentant la relation entre  $\dot{x}$  et  $x$  (ou entre  $\xi'$  et  $\xi$  sans dimension). On a tracé ici quelques trajectoires de phase correspondant aux mêmes conditions initiales (pour  $t = 0$   $\xi = 1$  et  $\xi' = 0$ ). Si  $Q$  est très grand, on retrouve la trajectoire de phase circulaire de l'oscillateur harmonique. Pour les autres valeurs de  $Q$ , le mouvement n'est pas périodique. La trajectoire de phase n'est donc pas une courbe fermée, elle tend vers le point de phase limite  $(0, 0)$ .

L'apparition d'oscillations pour  $Q > \frac{1}{2}$  se traduit par un changement de signe de  $\xi$ , ...

## 5.4 Exercices

**Exercice 5.1** (Ressort comprimé). Un objet de masse  $m$  assimilé à un point matériel M, glisse sans frottement sur une tige inclinée de l'angle  $\alpha$  par rapport au plan horizontal. Arrivé au point  $O$ , origine de l'axe  $Ox$ , il vient comprimer un ressort de longueur à vide  $L_0$  et de raideur  $k$ , dont l'autre extrémité  $A$  est fixe. Le contact est rompu dès que le ressort reprend

sa longueur à vide  $L_0$ . Pour  $x$  négatif,  $M$  est donc soumis à une force supplémentaire exercée par le ressort comprimé. À la date  $t = 0$ ,  $M$  est lâché sans vitesse initiale du point d'abscisse  $x_0 = \frac{L_0}{2}$ . La longueur à vide du ressort est telle que  $\frac{mg \sin(\alpha)}{k} = \frac{L_0}{4}$ .

1. Exprimer l'énergie potentielle de  $M$  avec  $j$ ,  $L_0$ , et  $x$  pour  $x$  positif puis pour  $x$  négatif.
2. Quelle est l'abscisse de la position d'équilibre? Est-ce une position d'équilibre stable?
3. Représenter l'énergie potentielle  $E_p$  en fonction de  $x$  et montrer sur le tracé la valeur de l'énergie mécanique  $E$  avec les échelles suivantes : 8 cm pour  $L_0$  et 8 cm  $\frac{kL_0^2}{4}$ .
4. Établir les équations implicites de la trajectoire de phase (relation entre  $x$  et  $\dot{x}$ ) avec les paramètres  $k$ ,  $m$  et  $L_0$ .

On remplace les variables  $x$  et  $t$  par des variables adimensionnées  $X$  et  $\tau$  et on pose  $X' = \frac{dX}{d\tau}$   $X'' = \frac{d^2X}{d\tau^2}$ . Ceci permet d'écrire les équations de la trajectoire de phase sans aucun paramètre.

Exprimer les relations entre  $x$  et  $X$ , entre  $t$  et  $\tau$ , entre  $\dot{x}$  et  $X'$  et entre  $\ddot{x}$  et  $X''$ . Écrire les équations implicites de la trajectoire de phase avec les nouvelles variables. Montrer comment on vérifie les résultats de la question 2) sur le tracé.

#### 5.4. Exercices

---



## Chapitre 6

# Lois de Descartes – Prisme

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Nature de la lumière</b>	<b>55</b>
6.1.1	Vitesse de propagation, indices de réfraction	55
6.1.2	Différents domaines des ondes électromagnétiques	56
<b>6.2</b>	<b>Propagation rectiligne</b>	<b>56</b>
6.2.1	Hypothèse de propagation rectiligne	56
6.2.2	Rayons lumineux	56
<b>6.3</b>	<b>Lois de Descartes</b>	<b>57</b>
6.3.1	Définitions	57
6.3.2	Réflexion totale et réfraction limite	58
<b>6.4</b>	<b>Prisme</b>	<b>58</b>
6.4.1	Les formules du prisme	59
6.4.2	Étude de la déviation en fonction de l'angle d'incidence	59
6.4.3	Exemple	60
6.4.4	Étude de la déviation, dispersion polychromatique	60
<b>6.5</b>	<b>Exercices</b>	<b>61</b>

---

### Figures

---

6.1	Deviation en fonction de l'incidence	60
-----	--------------------------------------	----

---

## 6.1 Nature de la lumière

### 6.1.1 Vitesse de propagation, indices de réfraction

Une onde progressive électromagnétique monochromatique est constituée d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$  vibrant en phase, perpendiculairement entre eux et perpendiculairement à la direction de propagation. Si la fréquence de la radiation électromagnétique est  $\nu$ , alors la

## 6.2. Propagation rectiligne

---

période est  $\tau = \frac{1}{\nu}$ . Si la vitesse de propagation est  $v$ , la longueur d'onde (période spatiale) est la distance dont l'onde progresse en une période  $\lambda = v\tau$ . Dans le vide  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$ .

Pour un milieu isotrope, homogène, où la vitesse de propagation est  $v$ , l'indice de réfraction absolu du milieu pour la fréquence  $\nu$  est  $N = \frac{c}{v}$ ,  $\lambda = \frac{\lambda_0}{N}$ .

Pour deux milieux 1 et 2, homogènes et optiquement isotropes, l'indice de réfraction du milieu 2 par rapport au milieu 1 est le rapport  $n_{2/1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_2}{N_1}$ . Les indices de réfraction dépendent de la fréquence de la radiation considérée.

### 6.1.2 Différents domaines des ondes électromagnétiques

Suivant la longueur d'onde dans le vide, on distingue différents domaines de radiation. La lumière visible correspond à une longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  telle que

$$400 \text{ nm} < \lambda_0 < 750 \text{ nm}. \quad (6.1)$$

On distingue différentes couleurs, dans l'ordre des longueurs d'onde croissante : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé, rouge. Aux longueurs d'ondes dans le vide inférieure à 400 nm jusqu'à environ 1 nm, on trouve le domaine de l'ultraviolet, puis les rayons  $X$ , les rayons  $\gamma$  et les rayons cosmiques. Aux longueurs d'ondes au-delà de 750 nm jusqu'à environ 1 mm, on trouve le domaine de l'infrarouge, puis celui des ondes radioélectriques.

Dans le domaine de la lumière proprement dite, des ultraviolets et des infrarouges l'indice absolu d'un milieu est toujours supérieur à 1 et la vitesse de la lumière dans l'air est voisine de  $c$ . On utilise couramment les indices par rapport à l'air ( $n$ ) au lieu des indices absolus ( $N$ ).

## 6.2 Propagation rectiligne

### 6.2.1 Hypothèse de propagation rectiligne

Toute l'optique géométrique repose sur l'hypothèse de la propagation rectiligne de la lumière issue d'une source ponctuelle dans le cas d'une propagation homogène. Cette hypothèse est remise en question par les phénomènes de diffraction qui deviennent appréciable chaque fois que la lumière doit passer dans des fentes dont la largeur est du même ordre (ou inférieure) que la longueur d'onde.

### 6.2.2 Rayons lumineux

**Définition 6.1.** Le trajet rectiligne de la lumière issue d'un point est un rayon lumineux.

Un faisceau isogène est formé par des rayons lumineux issu d'un point source. S'il est étroit, on parle de pinceau lumineux. Si la lumière est issue d'une source étendue, on a un faisceau complexe forme une infinité de faisceaux isogènes.

Les phénomènes de réflexion et de réfraction permettant de modifier la direction des rayons lumineux, on peut avoir des faisceaux lumineux divergents, convergents ou cylindriques.

## 6.3 Lois de Descartes

### 6.3.1 Définitions

Elles précisent le comportement d'un rayon lumineux arrivant sur une surface réfléchissante et réfringente  $\Sigma$  séparant deux milieux de propagation homogènes et isotropes.

On appelle point d'incidence le point d'intersection du rayon incident avec la surface  $\Sigma$ . La normale à  $\Sigma$  en ce point et le rayon d'incidence déterminent le plan d'incidence. L'angle entre la normale au point d'incidence et le rayon incident est l'angle d'incidence. Il y a deux rayons émergents. Le rayon émergent dans le même milieu que le rayon incident est le rayon réfléchi, et l'angle qu'il forme avec la normale au point d'incidence est l'angle de réflexion. Le rayon émergent dans le second milieu de propagation est le rayon réfracté, l'angle qu'il forme avec la normale au point d'incidence s'appelle l'angle de réfraction.

**Théorème 6.1** (Lois de Descartes pour la réflexion). *Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence. L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence :  $i' = i$ .*

**Théorème 6.2** (Lois de Descartes pour la réfraction). *Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence. L'angle de réfraction  $i_2$  est tel que  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ , en notant  $i_1$  l'angle d'incidence et  $n$  l'indice des milieux.*

On remarquera que si une lumière monochromatique donnée est plus freinée par le milieu 2 que par le milieu 1, on dit que le milieu 2 est plus réfringent que le milieu 1. Dans ce cas,  $v_2 < v_1$  (ou  $n_2 > n_1$ ), et il en résulte que  $i_2 > i_1$ .

Si le milieu 2 est plus réfringent que le milieu 1, le rayon lumineux se rapproche de la normale lors du passage de la lumière.

**Théorème 6.3** (Loi du retour inverse). *Le trajet suivi par la lumière n'est pas modifié si le sens de propagation est inversé.*

### 6.3.2 Réflexion totale et réfraction limite

Soit un rayon lumineux passant du milieu 1 au milieu 2 plus réfringent ( $n_{2/1} > 1$ ). L'angle de réfraction est tel que  $n_{2/1} \sin i_2 = \sin i_1$ , donc

$$i_2 < \arcsin \left( \frac{1}{n_{2/1}} \right) = i_m. \quad (6.2)$$

L'angle limite de réfraction  $i_m$  correspond à un rayon incident longeant la surface réfringente ( $i_1 = \frac{\pi}{2}$ ).

Inversement, si la lumière passe du milieu 2 (plus réfringent) au milieu 1 (moins réfringent), l'angle d'incidence  $i_2$  ne dépassera pas la valeur  $i_m$  obtenue pour un angle de réfraction  $i_1 = \frac{\pi}{2}$ . Si l'angle d'incidence est supérieur à  $i_m$ , il y a réflexion totale.

Par exemple, si un verre a l'indice  $n = \frac{3}{2}$  par rapport à l'air, pour une lumière monochromatique donnée, l'angle limite de réfraction pour le passage de la lumière de l'air au verre (ou l'angle d'incidence à partir duquel il y a réflexion totale pour le passage du verre à l'air) est  $i_m = \arcsin \left( \frac{2}{3} \right) = 41,8$  degrés.

## 6.4 Prisme

Un prisme est un milieu transparent, homogène et optiquement isotrope, limité par deux faces planes et une base. On s'intéressera uniquement ici à un prisme placé dans l'air et éclairé en lumière monochromatique.

Le rectiligne du dièdre formé par les deux faces planes est nommé angle du prisme, noté souvent  $A$ . L'indice du milieu transparent par rapport à l'air est l'indice du prisme, noté  $n$ . Il dépend de la longueur d'onde dans le vide de la lumière. On s'intéresse uniquement ici au cas d'un rayon incident contenu dans un plan de section droite du prisme, c'est-à-dire dans un plan perpendiculaire à l'arête du dièdre.

La première loi de Descartes pour la réfraction implique que le trajet d'un tel rayon lumineux se fera entièrement dans un plan de section principale constitué par le plan d'incidence sur la face d'entrée.

L'angle d'incidence sur la face d'entrée sera noté  $i$  et l'angle de réfraction sur la face de sortie  $i'$ . L'angle  $i$  est compté positivement lorsque le rayon incident est du même côté de la normale à la face d'entrée que la base du prisme et négativement s'il est du même côté que l'arête. De même pour l'angle  $i'$ , il est positif si le rayon émergent est du même côté de la normale à la face de sortie que la base du prisme et négativement dans l'autre cas.

L'angle de réfraction sur la face d'entrée sera noté  $r$  et l'angle d'incidence sur la face de sortie sera noté  $r'$ . Les angles  $r$  et  $r'$  sont comptés positivement pour des rayons correspondants situés du même côté de la normale correspondante que l'arête du prisme.

### 6.4.1 Les formules du prisme

Les deux premières formules traduisent la deuxième loi de Descartes pour la réfraction :  $\sin(i) = n \sin(r)$  et  $\sin(i') = n \sin(r')$ . Les deux autres sont géométriques :  $r + r' = A$  et  $D = i + i' - A$ .  $D$  est la déviation, c'est l'angle entre le rayon incident et le rayon émergent. *Un rayon lumineux est toujours dévié vers la base du prisme,  $D \geq 0$ .*

### 6.4.2 Étude de la déviation en fonction de l'angle d'incidence

**Existence d'un minimum de déviation** Pour une lumière monochromatique donnée et un prisme donnée,  $n$  et  $A$  sont constants. Les formules du prisme donnent alors :  $r = \arcsin \frac{\sin(i)}{n}$  et donc  $r' = A - \arcsin \frac{\sin(i)}{n}$  et donc aussi  $i' = \arcsin n \sin(A - \arcsin(\sin(i)/n))$ , donc finalement :

$$D = i + \arcsin n \sin \left( A - \arcsin \frac{\sin(i)}{n} \right) - A. \quad (6.3)$$

Cette fonction,  $D = f(i)$  est assez compliquée à étudier, mais on peut montrer qu'elle admet un seul extremum, qui est d'ailleurs un minimum. On peut le confirmer par expérience.

**Symétrie au minimum de déviation** La loi du retour inverse de la lumière implique que si  $i$  prend la valeur  $i_1$  et  $i'$  la valeur  $i_2$  pour un sens donné de la lumière, alors, pour le sens inverse,  $i = i_2$  et  $i' = i_1$ . La déviation est la même pour les deux sens de la lumière. Donc, à chaque valeur de  $D$ , il correspond deux angles d'incidence possibles. Mais au minimum de déviation  $D_m$  il n'en correspond qu'un seul.

Pour  $D = D_m$ , on a  $i = i'$  et par conséquent  $r = r'$ , la figure est alors symétrique par rapport au plan bisecteur du dièdre formé par le prisme. En indiquant par  $m$  les valeurs correspondantes au minimum de déviation, on a :  $r_m = r'_m = \frac{A}{2}$ ,  $D_m = 2i_m - A$ , d'où  $i_m = \frac{D_m + A}{2}$  ; avec  $\sin(i_m) = n \sin(r_m)$ , on obtient :

$$n = \frac{\sin \left( \frac{D_m + A}{2} \right)}{\sin \left( \frac{A}{2} \right)} \quad (6.4)$$

**Déviation maximale, condition d'émergence** Un rayon lumineux pourra de toute façon traverser la face d'entrée du prisme quel que soit son angle d'incidence, mais il ne traversera la face de sortie que si son angle d'incidence  $r'$  sur celle-ci est inférieur à  $i_m = \arcsin 1/n$  ce qui correspond à  $i'_0 = \frac{\pi}{2}$  et à  $r_0 = A - \arcsin 1/n$  donc à l'angle d'incidence minimal  $i_0 = \arcsin(n \sin(A - \arcsin 1/n))$ . On remarquera que cet angle peut être positif ou négatif suivant la valeur du prisme  $A$ . La déviation prendra alors sa valeur maximale, la même que pour  $i = \frac{\pi}{2}$ , d'après la loi du retour inverse de la lumière :

$$D_m = i_0 + \frac{\pi}{2} - A \quad (6.5)$$

## 6.4. Prisme

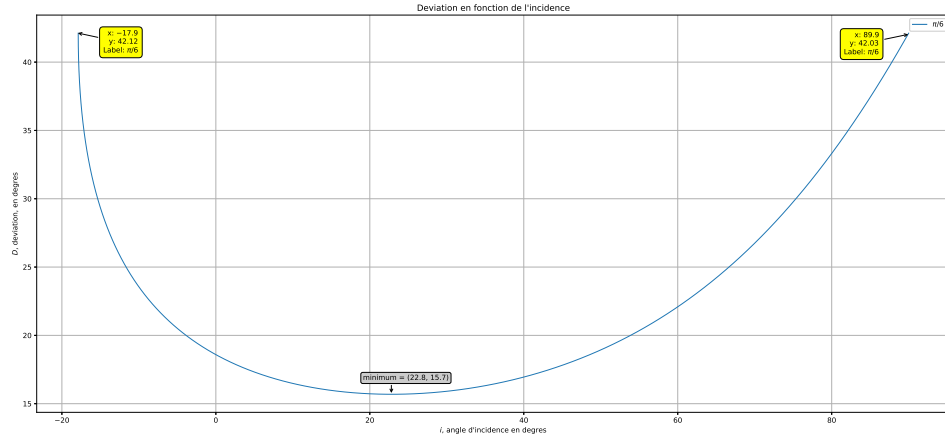


FIGURE 6.1 – Deviation en fonction de l'incidence

### 6.4.3 Exemple

Soit un prisme d'angle au sommet  $A = \frac{\pi}{6}$ , d'indice  $n = \frac{3}{2}$  pour une lumière monochromatique considérée.

Au minimum de déviation,  $r = r' = r_m = \frac{A}{2} = \frac{\pi}{12}$ , et  $i = i' = i_m = \arcsin\left(\frac{3}{2} \sin(\pi/12)\right) = \arcsin\left(\frac{3}{2} \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)$  soit 22.8 degrés, et  $D_m = 2i_m - A$  vaut approximativement 15.7 degrés. L'angle d'incidence minimal permettant la traversée de la deuxième face du prisme est  $i_0$  tel que  $i'_0 = \frac{\pi}{2}$ , d'où  $r'_0 = \arcsin(1/n)$  soit approximativement 41.8 degrés et  $r_0 = A - r'_0$  soit -11.8 degrés d'où  $i_0 = \arcsin(1.5 \sin(r_0))$  soit approximativement -17.9 degrés. La déviation maximale est donc de  $D_0 = i_0 + \frac{\pi}{2} - A$  approximativement 42.1 degrés. Elle est obtenue pour  $i = i_0$  et  $i' = \frac{\pi}{2}$  comme pour  $i = \frac{\pi}{2}$  et  $i' = i_0$ .

Pour  $i = 0$  on a  $r = 0$ ,  $r' = A = \frac{\pi}{6}$ . On a alors  $i' = \arcsin(\frac{3}{2} \sin(\pi/6))$  soit approximativement 48.6 degrés et une déviation  $D = i' - A$  soit approximativement 18.6 degrés. La même déviation est obtenue pour  $i$  valant 48.6 degrés et  $i' = 0$ . Le tracé complet de  $D = f(i)$  est réalisé ci-dessous sur la figure 6.1, directement avec l'expression de cette fonction.

### 6.4.4 Étude de la déviation, dispersion polychromatique

On retiendra d'abord que *l'indice d'un milieu transparent est une fonction croissante de la fréquence de la lumière, donc décroissante en fonction de la longueur d'onde dans le vide.*

En effet, pour les radiations lumineuse (aussi dans l'infrarouge et l'ultra-violet), mais pas au delà, *la lumière est d'autant plus freinée que ses photons ont plus d'énergie*, donc si  $E = h\nu$  croît, alors la longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0 = h/\nu$  décroît, la vitesse  $v$  décroît et donc l'indice de réfraction par rapport à l'air  $n = c/v$  croît. À la lumière violette correspond un indice

plus élevé que pour la lumière rouge.

Il en résulte qu'un rayon entrant dans un milieu moins réfringent est d'autant plus dévié (rapproché de la normale) que sa longueur d'onde dans le vide est basse. De même, un rayon entrant dans un milieu moins réfringent est d'autant plus dévié (écarté de la normale) que lorsque sa longueur d'onde dans le vide est plus basse.

Pour un rayon lumineux traversant le prisme, les deux déviations  $i - r$  et  $i' - r'$  (dont la somme est  $D$ ) se font dans le même sens, vers la base du prisme; donc, pour un angle d'incidence fixé, *un rayon lumineux est d'autant plus dévié par un prisme que sa longueur d'onde dans le vide est plus basse. Un prisme permet donc de disperser une lumière polychromatique plus efficacement, grâce aux deux réfractions, qu'une réfraction unique.*

## 6.5 Exercices

**Exercice 6.1** (Conditions d'émergences pour le prisme). Soit un prisme d'indice  $n$ , plongé dans l'air d'indice 1, d'angle  $A$ . Soit  $S$  la source lumineuse ponctuelle et  $SI$  un rayon incident contenu dans un plan de section principale,  $I$  étant le point d'incidence. Le rayon réfracté par la première face frappe la seconde face du prisme en  $I'$ . Le rayon réfracté par la seconde face est  $I'R$ , lorsqu'il existe.

On utilisera les notations et les conventions de signes habituelles pour les angles  $i$ ,  $i'$ ,  $r$  et  $r'$  et  $D$ .

1. Montrer que, lorsqu'il existe, le rayon  $I'R$  est dans le plan de section principale de  $SI$ .
2. Établir les quatre formules du prisme.
3. Montrer que pour que le rayon  $I'R$  existe, il est nécessaire que les deux conditions suivantes soient satisfaites :  $A \leq 2 \arctan(1/n)$  et  $i_0 \leq i \leq \pi/2$  avec  $\sin i_0 = n \sin(A - \arcsin(1/n))$ .

**Exercice 6.2** (Étude du minimum de déviation). Les notations sont celles de l'exercice précédent.

1. (a) Montrer que la déviation  $D$  passe par un minimum  $D_m$  lorsque  $i = i' = i_m$ .  
 (b) Exprimer l'indice  $n$  du prisme en fonction de  $A$  et  $D_m$ .  
 (c) Tracer l'allure de la courbe de  $D = f(i)$ . On précisera les tangentes aux deux extrémités  $i = i_0$  et  $i = \pi/2$ , ainsi que la valeur de la déviation  $D_0$  correspondante.  
 (d) Quel est d'après vous l'intérêt d'utiliser le prisme au minimum de déviation ?
2. Dans un spectroscope à prisme, le prisme est éclairé en lumière parallèle (donc sous une incidence  $i$  fixée), est monochromatique, de

longueur d'onde dans le vide  $\lambda$ , variable. Exprimer  $\frac{dD}{d\lambda}$ , en fonction de  $\frac{dn}{d\lambda}$  (dispersion du verre du prisme),  $A$ ,  $r$  et  $i'$ .

3. On se place au minimum de déviation pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée. Le faisceau incident est obtenu grâce à une fente éclairée par la source, parallèle à l'arête du prisme et une lentille convergente  $L_1$ , de distance focale  $f'$ , placée entre la fente et le prisme. Le spectre obtenu est recueilli sur une plaque photographique dans le plan focal d'une lentille convergente  $L_2$  de même distance focale  $f'$  que  $L_1$ . La base de la partie éclairée du prisme a une largeur  $b$ , celui-ci est éclairé jusqu'à son arête. Le faisceau émergent a une largeur égale à  $a$  dans les plans de section principale du prisme. Exprimer  $\frac{dD}{d\lambda}$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $\frac{dn}{d\lambda}$ .

**Exercice 6.3** (Fibre optique à saut d'indice). Soit une fibre optique  $F$  constituée d'un cœur cylindrique de rayon  $a$  et d'indice  $n_1$ , entouré d'une gaine d'indice  $n_2 \leq n_1$  et de rayon extérieur  $b$ . Les faces d'entrées et de sortie sont perpendiculaires au cylindre d'axe  $(Oz)$  formé par la fibre. L'ensemble, en particulier la face d'entrée, est en contact avec un milieu d'indice  $n_0$  et pour les applications numériques, on considérera que ce milieu est de l'air  $n_0 = 1$ .

1. "Zigzag plan". Un rayon lumineux  $SI$  arrive en un point  $I$  sur la face d'entrée de la fibre. À quelles conditions d'incidence ce rayon a-t-il, dans la fibre, un trajet plan ?

On considère un rayon  $(SI)$  incident sur le cœur et contenu dans le plan  $Oxz$ . On appelle  $i$  l'angle d'incidence et  $\theta$  l'angle de la réfraction sur la face d'entrée de la fibre.

2. Déterminer en fonction de  $n_0$ ,  $n_1$  et  $n_2$  la condition que doit satisfaire  $i$  pour que le rayon réfracté ait une propagation guidée dans le cœur. la valeur maximale de  $i$  est alors désignée par  $i_a$ , l'angle d'acceptance de la fibre.
3. On appelle ouverture numérique  $ON$  du guide la quantité  $ON = n_0 \sin i_a$ . Exprimer l'ouverture numérique en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .
4. Calculer  $i_a$  et  $ON$  pour une fibre d'indice  $n_1 = 1.456$  (silice) et  $n_2 = 1.410$  (silicone). Quelles seraient les valeurs de ces grandeurs pour un guide à base d'arséniure de gallium pour lequel  $n_1 = 3.9$  et  $n_2 = 3$  ? Commenter

L'atténuation de la lumière dans les fibres optiques est due à l'absorption et à la diffusion par le matériau constitutif du cœur et par ses impuretés (les ions fers  $2$ , les ions cuivres  $2$ , les ions hydroxyde, ...). Elle se mesure en décibels par kilomètre :  $A = \frac{10 \text{ km}}{l} \log(\Phi_1/\Phi_2)$ ,



où  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  désignent les flux lumineux (puissance lumineuse) dans les plans de front successifs 1 et 2 distants de  $l$ .

5. On parvient couramment à réaliser des fibres dans lesquelles le flux, après un parcours de 50 kilomètres, représente 10 pourcents du flux incident. Calculer l'atténuation de telles fibres. Applications : Endoscope à fibres, fibroscope. Le but d'un endoscope est de permettre à un observateur de "voir" dans des endroits inaccessibles, d'intérêts divers (médical, militaire, industriel, ...). L'endoscope à fibres est constitué de deux faisceaux de fibres : l'un éclaire le site, l'autre assure le retour vers l'extérieur de la lumière émise par la cible éclairée. Le nombre de fibres constituant chaque faisceau est de l'ordre de 10 mille à 1 million.
6. Si l'on imagine la cible divisée en 100 mille petits carrés à peu près, chaque fibre au voisinage de la cible recueillant la lumière de l'un d'eux, quel est le problème posé à l'autre extrémité par la reconstitution de l'image ? Quel est le problème technologique majeur posé alors par la fabrication d'un faisceau de fibres ?

## 6.5. Exercices

---

## Chapitre 7

# Formation des images, miroir plan, miroir sphérique

### Sommaire

---

<b>7.1</b>	<b>Point objet, point image, stigmatisme . . . . .</b>	<b>66</b>
7.1.1	Stigmatisme d'un système optique pour un point .	66
7.1.2	Réalité, virtualité d'un point objet ou d'un point image . . . . .	66
7.1.3	Objets et images étendus . . . . .	66
<b>7.2</b>	<b>Images données par un miroir plan . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>7.3</b>	<b>Miroir sphérique . . . . .</b>	<b>67</b>
7.3.1	Définitions . . . . .	67
7.3.2	Condition de stigmatisme rigoureux . . . . .	67
7.3.3	Stigmatisme approché . . . . .	69
7.3.4	Aplanétisme, notion de plans conjugués, conditions de Gauss, grandissement transversal . . . . .	69
7.3.5	Formules du miroir sphérique avec origine au centre et avec origine au sommet . . . . .	69
7.3.6	Foyer principal, plan focal, distance focale . . . . .	70
7.3.7	Foyers secondaires . . . . .	70
7.3.8	Représentation du miroir sphérique utilisé dans les conditions de Gauss, construction des images . . . .	71
7.3.9	Formules de Newton (origine au foyer) . . . . .	71
7.3.10	Image d'un objet à l'infini . . . . .	71
<b>7.4</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>72</b>

---

## 7.1 Point objet, point image, stigmatisme

### 7.1.1 Stigmatisme d'un système optique pour un point

Soit un système optique utilisant l'optique géométrique (réflexions et réfractions), frappé par un faisceau lumineux monochromatique, dont les rayons (rayons incidents) sont portés par des droites concourantes. Le point de concours de ces droites est un point objet. Celui-ci peut se trouver sur le trajet des rayons lumineux ou sur leurs prolongements.

Si les droites supports des rayons émergeant du système optique sont concourantes, on dit que le système est stigmatique pour le point objet considéré. Le point de concours des droites supports des rayons émergents est le point image correspondant au point objet considéré.

*Un système optique stigmatique pour un point objet donné, (intersection des supports des rayons incidents), donne de ce point objet un point image, (intersection des supports des rayons émergents).*

Un point objet et le point image correspondant sont dits “conjugués” par rapport au système optique.

### 7.1.2 Réalité, virtualité d'un point objet ou d'un point image

Si un système optique est stigmatique pour un point objet donné, le point objet est réel s'il est avant l'entrée dans le système et virtuel s'il se trouve après. Le point image est réel s'il se trouve après la sortie du système et virtuel s'il se trouve avant. On retiendra les définitions suivantes qui sont équivalentes.

*Un point objet est réel si les rayons incidents divergent et virtuel s'ils convergent, à l'entrée dans le système optique. Un point image est réel si les rayons émergents convergent et virtuel s'ils divergent à la sortie du système optique.*

### 7.1.3 Objets et images étendus

Un ensemble de points objets constitue un objet étendu. Si le système optique considéré est stigmatique pour tous ces points, l'ensemble des points image correspondants constitue une image étendue.

## 7.2 Images données par un miroir plan

Les lois de Descartes pour la réflexion impliquent qu'à tout rayon incident dont le support passe par un point objet donné correspond un rayon

émergent dont le support passe par le symétrique du point objet par rapport au plan du miroir. Celui-ci est donc le point image correspondant.

*Un miroir plan est stigmatique pour tout point objet. L'image d'un objet donnée par un miroir plan est symétrique de l'objet par rapport au plan du miroir.*

Si l'objet est une source de lumière, source primaire, produisant elle-même de la lumière, ou source secondaire, éclairée et diffusant la lumière qu'elle reçoit, c'est-à-dire la réfléchissant dans toutes les directions du fait de la structure plus ou moins granulaire de sa surface, l'objet est réel et l'image est virtuelle.

Si l'objet est l'image que formerait un système optique (projecteur) sur un écran si la lumière n'était pas déviée avant celui-ci par le miroir, il s'agit pour le miroir d'un objet virtuel et son image est réelle, on peut l'observer sur un écran diffusant convenablement placé. Si l'objet est plan son image l'est aussi).

## 7.3 Miroir sphérique

### 7.3.1 Définitions

Un miroir sphérique est constitué par une calotte sphérique réfléchissante. Le centre  $C$  de la sphère dans laquelle a été découpé le miroir est le centre du miroir. Le rayon  $r$  de cette sphère est le rayon du miroir. L'axe de la calotte sphérique est l'axe principal ou axe optique du miroir. Son intersection  $S$  avec le miroir est le sommet du miroir. Le demi angle au sommet  $a$  du cône de sommet  $C$  qui délimite le miroir est l'angle d'ouverture du miroir. Les droites passant par  $C$  sont les axes secondaires du miroir. Si le centre  $C$  est dans le milieu de propagation de la lumière, le miroir est concave. Il est convexe dans le cas contraire.

### 7.3.2 Condition de stigmatisme rigoureux

On prendra l'exemple d'un point objet réel  $A$  sur l'axe principal d'un miroir sphérique concave. Un rayon lumineux issu de  $A$ , suivant l'axe principal est réfléchi en  $S$  avec un angle d'incidence nul. L'angle de réflexion est donc aussi nul et le rayon réfléchi suit l'axe principal en sens inverse. Donc, si  $A$  a un conjugué, celui-ci se trouve aussi sur l'axe principal. Soit un autre rayon issu de  $A$ , frappant le miroir au point d'incidence  $I$ , avec l'angle d'incidence  $i$ . On notera  $\omega$  l'angle de la normale au point d'incidence avec l'axe principal. D'après les lois de Descartes, le rayon réfléchi coupe l'axe principal, en un point  $A'$ , puisqu'il est dans le plan de  $A$ ,  $C$  et  $I$  et l'angle de réflexion est égal à  $i$ .  $A'$  est le conjugué de  $A$  si et seulement si la position de  $A'$  est indépendante de l'angle  $\omega$ , (ou de  $I$ , ou de  $i$ ).

### 7.3. Miroir sphérique

---

On a :

$$\tan(\omega - i) = \frac{\tan \omega - \tan i}{1 + \tan \omega \tan i} = \frac{IH}{\overline{CH} - \overline{CA}}. \quad (7.1)$$

Avec  $H$  le projeté de  $I$  sur l'axe du miroir,  $IH = \overline{CS} \sin \omega$  et  $\overline{CH} = \overline{CS} \cos \omega$ .  
En posant  $a = \frac{\overline{CA}}{\overline{CS} \cos \omega}$  on obtient

$$\tan(\omega - i) = \frac{\tan \omega - \tan i}{1 + \tan \omega \tan i} = \frac{\tan \omega}{1 - a} \quad (7.2)$$

d'où

$$\tan i = -\frac{a \tan \omega}{1 - a + \tan^2 \omega}. \quad (7.3)$$

De la même manière, en posant  $a' = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CS} \cos \omega}$  on obtient

$$\tan(\omega + i) = \frac{\tan \omega + \tan i}{1 + \tan \omega \tan i} = \frac{\tan \omega}{1 - a'}, \quad (7.4)$$

d'où

$$\tan i = \frac{a' \tan \omega}{1 - a' + \tan^2 \omega}. \quad (7.5)$$

Avec les deux expressions de  $\tan i$ , on obtient

$$-a + aa' - a \tan^2 \omega = a' - a'a + a' \tan^2 \omega, \quad (7.6)$$

d'où

$$2aa' = \frac{a + a'}{\cos^2 \omega}. \quad (7.7)$$

En remplaçant  $a$  et  $a'$  on obtient

$$2 \frac{\overline{CACA'}}{\overline{CS}^2 \cos^2 \omega} = \frac{\overline{CA} + \overline{CA'}}{\overline{CS} \cos^3 \omega}, \quad (7.8)$$

d'où

$$2\overline{CACA'} \cos \omega = \overline{CS}(\overline{CA} + \overline{CA'}). \quad (7.9)$$

Ainsi

$$\overline{CA'} = \frac{\overline{CACS}}{2\overline{CA} \cos \omega - \overline{CS}}, \quad (7.10)$$

et en dérivant

$$\frac{d\overline{CA'}}{d\omega} = 2 \frac{\overline{CA}^2 \overline{CS} \sin \omega}{(2\overline{CA} \cos \omega - \overline{CS})^2}. \quad (7.11)$$

Pour qu'il y ait stigmatisme rigoureux, il faut que pour tout  $\omega$ ,  $\frac{d\overline{CA'}}{d\omega} = 0$ . En dehors du cas où  $\overline{CS} = 0$  qui n'a aucun intérêt et  $\overline{CS} = \infty$  qui est la cas du miroir plan, la seule possibilité est que  $\overline{CA} = 0$ . Alors : *Un miroir sphérique n'est exactement stigmatique que pour un seul point objet, son centre. Le centre d'un miroir sphérique est son propre conjugué.*

### 7.3.3 Stigmatisme approché

Si tous les rayons issus de  $A$  sont paraxiaux, c'est-à-dire voisins de l'axe principal, on peut faire l'approximation  $\cos \omega = 1$ . L'équation 7.9 se ré-écrit alors en

$$2\overline{CACA'} = \overline{CS}(\overline{CA} + \overline{CA'}), \quad (7.12)$$

alors

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}. \quad (7.13)$$

On remarque que si  $A'$  est le conjugué de  $A$ , alors  $A$  est le conjugué de  $A'$  (c'est une conséquence de la loi du retour inverse). Lorsque tous les rayons sont paraxiaux, on dit que le miroir sphérique est utilisé dans les *conditions de Gauss*.

### 7.3.4 Aplanétisme, notion de plans conjugués, conditions de Gauss, grandissement transversal

Soit un point  $A$  de l'axe principal et  $A'$  son conjugué dans les conditions de Gauss.  $AB$  est un petit objet dans un plan frontal, c'est-à-dire perpendiculaire à l'axe principal.  $B$  est sur un axe secondaire ; si les rayons issus de  $B$  sont voisins de l'axe principal, ils le sont aussi de l'axe secondaire  $CB$  si  $AB$  est suffisamment petit.  $B$  a donc un conjugué  $B'$  tel que  $\frac{1}{\overline{CB}} + \frac{1}{\overline{CB'}} = \frac{2}{\overline{CS}} = \frac{2}{\overline{CS}}$ . Mais  $AB$  étant petit,  $\overline{CA} = \overline{CB}$ ,  $\overline{CA'} \approx \overline{CB'}$  et l'image  $A'B'$  est à peu près perpendiculaire à l'axe principal, c'est-à-dire *contenue dans un plan frontal* dont on dira qu'il est *conjugué du plan frontal de l'objet*. Lorsqu'il en est ainsi pour un système centré, c'est-à-dire présentant une symétrie de révolution autour d'un axe appelé axe optique du système, on dit que celui-ci est *aplanétique*. On peut remarquer d'autre part que pour que les conditions de Gauss soient respectées à la fois pour  $A$  et pour  $B$ , il faut et il suffit que l'angle d'incidence  $i$  d'un rayon issu de  $B$  et passant par  $S$  soit très petit et que l'angle  $\alpha$  d'ouverture utile du miroir le soit aussi. (On peut limiter l'ouverture utile du miroir avec un diaphragme).

*Conditions de Gauss : objet petit devant le rayon du miroir et ouverture utile du miroir très faible (alors tous les rayons issus de l'objet et frappant le miroir sont paraxiaux). Le grandissement transversal est par définition le rapport des dimensions algébriques de l'image et de l'objet situés dans des plans frontaux conjugués  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$ .*

Pour le miroir sphérique on obtient immédiatement  $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$ .

### 7.3.5 Formules du miroir sphérique avec origine au centre et avec origine au sommet

Les formules déjà démontrées sont les formules de Descartes du miroir sphérique avec origine au centre : formule de conjugaison  $\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$ ,

### 7.3. Miroir sphérique

---

formule du grandissement transversal  $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$ . Le sens positif étant celui de la lumière incidente dans la direction de l'axe principal et celui de l'objet  $AB$  dans la direction perpendiculaire. Ces formules ne sont valables que si l'image existe, c'est-à-dire si les conditions de Gauss sont respectées. On supposera dorénavant qu'il en est ainsi, même si pour des raisons pratiques les figures sont dilatées dans la direction perpendiculaire à l'axe principal. Elles conviennent que le miroir soit concave ou convexe.

En plaçant maintenant l'origine au sommet, on obtient  $\frac{1}{\overline{SA}-\overline{SC}} + \frac{1}{\overline{SA'}-\overline{SC}} = -\frac{2}{\overline{SC}}$ , en réduisant au même dénominateur et en multipliant par ce dénominateur  $\overline{SC}(\overline{SA}+\overline{SA'}-2\overline{SC}) = -2(\overline{SA}-\overline{SC})(\overline{SA'}-\overline{SC})$ , après simplification il reste :  $0 = -2\overline{SA}(\overline{SA'} + \overline{SASC} + \overline{SA'SC})$ . En divisant par  $\overline{SASA'SC}$ , on obtient finalement :  $\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$ .

Formules de Descartes du miroir sphérique avec origine au sommet : formule de conjugaison  $\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$ , formule du grandissement transversal  $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ .

#### 7.3.6 Foyer principal, plan focal, distance focale

Pour un système optique centré, en général on nomme *foyer principal image* le point image conjugué du point objet situé à l'infini sur l'axe principal et *foyer principal objet* le point objet conjugué du point image situé à l'infini sur l'axe principal.

*Les foyers principaux image et objet du miroir sphérique sont confondus en un point  $F$  nommé foyer principal du miroir, situé sur l'axe principal, à égale distance du centre et du sommet.*

On nomme distance focale la distance algébrique  $f = \overline{SF}$  (avec pour sens positif celui de la lumière incidente). Distance focale :  $f = \overline{SF} = \overline{FC} = \frac{\overline{SC}}{2}$ , pour un miroir concave  $f < 0$ , pour un miroir convexe  $f > 0$ . Le plan focal est le plan frontal qui contient le foyer principal. Son plan frontal conjugué est donc à l'infini.

De la définition du foyer principal, il résulte que : *tout rayon incident parallèle à l'axe principal émerge en passant par le foyer principal. Tout rayon incident passant par le foyer principal émerge parallèlement à l'axe principal.*

#### 7.3.7 Foyers secondaires

Pour un axe secondaire, peu incliné sur l'axe principal, on a les mêmes propriétés : l'intersection d'un axe secondaire avec le plan focal est le foyer secondaire correspondant (noté  $\Phi$ ), c'est le conjugué du point à l'infini de cet axe secondaire. Tout rayon incident (paraxial) parallèle à un axe secondaire donné émerge en passant par le foyer secondaire correspondant. Tout rayon



incident (paraxial) passant par un foyer secondaire donné émerge parallèlement à l'axe secondaire correspondant.

### 7.3.8 Représentation du miroir sphérique utilisé dans les conditions de Gauss, construction des images

Pour qu'un miroir sphérique soit utilisé dans les conditions de Gauss, il est nécessaire que les rayons lumineux soient paraxiaux, donc qu'ils frappent le miroir près de son sommet. La partie utile du miroir est donc pratiquement un plan de front d'où sa représentation (toujours fortement dilatée dans la direction perpendiculaire à l'axe principal, pour faciliter les constructions graphiques).

Les propriétés des foyers secondaires permettent de construire le rayon émergent correspondant à un rayon incident paraxial donné.

Pour construire l'image d'un petit objet  $AB$  situé dans un plan frontal,  $A$  étant sur l'axe principal, il suffit d'utiliser les propriétés du foyer principal pour obtenir l'image  $B'$  de  $B$ . (On peut aussi utiliser le fait qu'un rayon passant par  $C$  se réfléchit en revenant sur lui-même). L'image  $A'$  de  $A$  sera dans le même plan frontal que  $B'$ .

Exemple avec un miroir concave, un objet réel, une image réelle, renversée, plus petite que l'objet. Exemple avec un miroir convexe, un objet réel, une image virtuelle, droite, plus petite que l'objet.

### 7.3.9 Formules de Newton (origine au foyer)

Les homothéties dans les figures ci-dessus permettent d'écrire (toujours avec  $f = \overline{SF}$ ) :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{SI}} = \frac{\overline{FA'}}{\overline{FS}} = -\frac{\overline{FA'}}{f} \quad (7.14)$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{SI'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FS}}{\overline{FA}} = -\frac{f}{\overline{FA}}. \quad (7.15)$$

D'où  $f^2 = \overline{FAFA'}$ .

Formule de Newton du grandissement :  $\gamma = -\frac{\overline{FA'}}{f} = -\frac{f}{\overline{FA}}$ . Formule de conjugaison de Newton :  $f^2 = \overline{FAFA'}$ .

### 7.3.10 Image d'un objet à l'infini

On peut utiliser directement la deuxième loi de Descartes ou les propriétés des foyers secondaires. Par exemple, pour un objet réel à l'infini, avec un miroir concave : On constate que l'image est réelle et renversée. Le grandissement est bien sûr nul. L'image est vue de  $S$  sous le même angle apparent que l'objet :  $\alpha' = \alpha$  (angle petit dans les conditions de Gauss). On a donc  $A'B' = \alpha|f|\tan(\alpha)$  soit  $\overline{A'B'} = \alpha f$ .

## 7.4 Exercices

**Exercice 7.1** (Association de miroirs). On réalise un système optique centré constitué par l'association du miroir concave  $M_1$ , de centre  $C_1$  de sommet  $S_1$ , et du miroir  $M_2$ , de centre  $C_2$ , de sommet  $S_2$ , de même axe optique. Ils sont disposés tels que :  $C_1 - C_2 - S_2 - S_1$ .

Le miroir  $M_1$  est percé d'un petit trou permettant à la lumière de le traverser près de son sommet, mais qui ne modifie pas ses propriétés. Les distances focales  $f_1$  et  $f_2$  des deux miroirs sont telles que  $|f_1| = 3.0\text{ m}$  et  $|f_2| = 2.0\text{ m}$ . On note  $d = \overline{S_1 S_2}$ .

1. Déterminer  $d$  pour que tout rayon incident, parallèle à l'axe optique et réfléchi par les deux miroirs, passe par  $S_1$ .
2. Vérifier le calcul par une construction graphique à l'échelle 0,02 pour les segments parallèles à l'axe optique. (L'échelle dans la direction perpendiculaire à l'axe optique sera prise bien plus grande).

**Exercice 7.2** (Cavité confocale). Une cavité confocale est constituée de deux miroirs identiques concaves  $M_1$  et  $M_2$  face à face, de même rayon  $R$ , de même axe optique  $\Delta$  et dont les foyers sont confondus. On place un objet  $AB$  à l'intérieur de la cavité perpendiculairement à  $\Delta$ .

1. Construire géométriquement les quatre images successives obtenues, la première réflexion ayant lieu sur  $M_2$ . Le résultat dépend-il de la position de l'objet  $AB$  ?
2. On considère un rayon lumineux, incliné d'un angle  $\alpha_1$  sur l'axe optique, émis d'un point  $B$  et dont le support passe par le point  $I_1$  de  $M_1$  distant de  $y_0$  de l'axe optique.

Exprimer en fonction de  $\alpha_1$ ,  $y_0$  et  $R$  dans les conditions de Gauss, les angles  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  que font les rayons réfléchis avec  $\Delta$  à l'issue respectivement de la 1<sup>re</sup>, 2<sup>e</sup> puis 3<sup>e</sup> réflexion.

3. Conclure quant à la localisation du rayon à l'intérieur de la cavité optique.

**Exercice 7.3** (Télescope Hipparcos (D'après écrit Mines sup 2000 filière PCSI option PC)). On propose de modéliser le télescope d'Hipparcos par un miroir concave  $M_C$  de rayon  $R = 2800\text{ mm}$  avec un miroir plan de renvoi. On note  $S$  le sommet du miroir concave. La lumière subit deux réflexions et passe par un orifice dans le miroir concave pour atteindre le détecteur. Celui-ci est constitué d'une grille et de cellules CCD permettant de repérer la position de l'image. La grille comporte  $N = 2688$  fentes équidistantes de  $L = 8.2\text{ }\mu\text{m}$ .

On considère une étoile visée dans la direction  $Sx$ . L'axe  $Sx$  est orienté vers l'étoile.

1. Déterminer l'abscisse  $x$  de l'image  $E_1$ , de l'étoile  $E$  donnée par le miroir  $M_C$ .

2. On note  $a$  la distance séparant le miroir plan et le sommet du miroir concave. Déterminer une condition sur  $a$  pour que l'image finale  $E_2$  se forme sur le détecteur placé à l'arrière du miroir concave.
3. Déterminer la largeur angulaire  $\alpha_C$  du champ observé. Calculer  $\alpha_C$  en degré.
4. En réalité, Hipparcos réalise une mesure de position relative des étoiles. Le télescope vise deux directions symétriques par rapport à  $Sx$  présentant un angle  $\alpha = 58$ . C'est un système de deux miroirs plans  $M_1$ ,  $M_2$  qui permet d'obtenir les images des deux étoiles sur le détecteur. Le télescope tourne autour d'un axe de direction fixe  $S_z$ . Déterminer l'angle  $\alpha_0$  des miroirs  $M_1$  et  $M_2$  avec l'axe  $Sx$  du télescope.
5. Déterminer le déplacement angulaire  $\theta_1$ , d'un rayon lumineux réfléchi par le miroir  $M_1$  lorsque le satellite tourne d'un angle  $\theta$ . Préciser le sens de déplacement des rayons réfléchis par  $M_1$  et  $M_2$ .

#### 7.4. Exercices

---

## Chapitre 8

# Lentilles sphériques minces

### Sommaire

---

8.1	Différents types de lentilles sphériques . . . . .	75
8.2	Lentilles sphériques minces, leurs représentations	76
8.3	Conditions de stigmatisme approché pour une lentille mince, conditions de Gauss et aplanétisme	76
8.4	Foyers d'une lentille mince . . . . .	76
8.4.1	Foyers principaux objet et image . . . . .	76
8.4.2	Plans focaux, distance focale . . . . .	77
8.4.3	Vergence . . . . .	77
8.4.4	Foyers secondaires . . . . .	77
8.5	Tracé du rayon émergent correspondant à un rayon incident donné . . . . .	77
8.6	Construction de l'image d'un objet frontal donné, dans les conditions de Gauss . . . . .	78
8.7	Formules des lentilles minces . . . . .	78
8.8	Image d'un objet à l'infini . . . . .	79
8.9	Étude analytique des différents cas . . . . .	79
8.10	Lentilles minces accolées . . . . .	80
8.11	Exercices . . . . .	80

---

### 8.1 Différents types de lentilles sphériques

Une lentille sphérique est formée par un milieu transparent, homogène et optiquement isotrope, limité par deux calottes sphériques. Placée dans l'air, la lentille forme donc *deux dioptries sphériques* traversés successivement par la lumière, c'est-à-dire deux surfaces réfringentes correspondant au passage de la lumière de l'air au milieu qui constitue la lentille, et au passage de ce milieu à l'air. *L'axe principal d'une lentille est la droite qui passe par les centres de courbure des deux faces.*

Les deux réfractions subies par un rayon lumineux tendent à rabattre un rayon lumineux vers la base du prisme constitué par les plans tangents aux points d'incidence. On en déduit ainsi le caractère convergent ou divergent des différents types de lentilles, suivant leur action sur un faisceau lumineux parallèle à l'axe principal.

## 8.2 Lentilles sphériques minces, leurs représentations

*Une lentille sphérique mince est une lentille sphérique dont l'épaisseur, mesurée sur l'axe principal, est petite devant les rayons de courbure de ses deux faces.* La lentille mince est donc assimilée grossièrement à un plan, le plan de la lentille. L'intersection du plan de la lentille avec son axe principal est le centre optique de la lentille. Tout plan perpendiculaire à l'axe principal est un plan frontal.

Toute droite passant par le centre optique de la lentille est un axe secondaire de la lentille. Les lentilles minces sont représentées ainsi :

## 8.3 Conditions de stigmatisme approché pour une lentille mince, conditions de Gauss et aplanétisme

L'étude du dioptré sphérique n'étant pas au programme, on admettra les résultats suivants sans démonstration. Les conditions de stigmatisme approché sont les mêmes que pour le miroir sphérique ; ce sont les conditions de Gauss : *Une lentille mince est approximativement stigmatique pour des rayons lumineux paraxiaux.*

Utilisée dans ces conditions, la lentille mince est *aplanétique* ; *l'image d'un petit objet contenu dans un plan frontal et voisin de l'axe principal est elle-même contenue dans un plan frontal, conjugué de celui de l'objet.*

## 8.4 Foyers d'une lentille mince

### 8.4.1 Foyers principaux objet et image

Les définitions sont les mêmes que pour le miroir sphérique ; *Le foyer principal objet, noté  $F$ , est le point de l'axe principal dont l'image est située à l'infini sur l'axe principal. Le foyer principal image, noté  $F'$ , est le point de l'axe principal image du point objet à l'infini sur l'axe principal.*

Pour une lentille sphérique mince, ces deux points sont distincts, *les deux foyers sont symétriques l'un de l'autre par rapport au centre optique de la lentille.*

## 8.5. Tracé du rayon émergent correspondant à un rayon incident donné

---

### 8.4.2 Plans focaux, distance focale

*Les plans frontaux contenant les foyers principaux objet et image sont respectivement nommés plan focal objet et plan focal image de la lentille. Les distances sont mesurées algébriquement sur l'axe principal avec le sens de propagation de la lumière comme sens positif. La distance algébrique du centre optique au foyer principal image est la distance focale de la lentille, on la note  $f'$ ,  $f' = \overline{OF'}$ . On la nomme encore “distance focale image” alors que  $f = \overline{OF} = -f'$  est la “distance focale objet”.*

Pour une lentille convergente  $f' > 0$  et les deux foyers sont réels. Alors que pour une lentille divergente  $f' < 0$  et les deux foyers sont virtuels.

### 8.4.3 Vergence

Par définition, la vergence d'une lentille sphérique mince est l'inverse de sa distance focale  $C = \frac{1}{f}$ . La vergence d'une lentille convergente est positive, celle d'une lentille divergente est négative. Son unité SI est la dioptrie.  $1\delta = 1\text{ m}^{-1}$ .

On démontre à partir des formules du dioptre (hors programme) que la distance focale dépend des rayons de courbure des faces et de l'indice de la lentille par rapport à l'air par la formule

$$C = \frac{1}{f'} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right), \quad (8.1)$$

avec  $R_1 = \overline{OC_1}$  et  $R_2 = \overline{OC_2}$  avec  $C_1$  et  $C_2$  les centres de courbures des deux faces.

### 8.4.4 Foyers secondaires

L'intersection d'un axe secondaire avec le plan focal objet est un foyer secondaire objet ; c'est le point objet conjugué du point image situé à l'infini sur cet axe secondaire. L'intersection d'un axe secondaire avec le plan focal image est un foyer secondaire image ; c'est le point image conjugué d'un point objet situé à l'infini sur cet axe secondaire.

## 8.5 Tracé du rayon émergent correspondant à un rayon incident donné

Bien entendu les propriétés énoncées ci-dessous ne sont valables que pour des rayons paraxiaux.

Tout rayon passant par le centre optique ne subit aucune déviation à la traversée de la lentille. À tout rayon incident parallèle à l'axe principal (resp. à un axe secondaire) correspond un rayon émergent dont le support passe par le foyer principal image (resp. le foyer secondaire image correspondant).

## 8.6. Construction de l'image d'un objet frontal donné, dans les conditions de Gauss

---

À tout rayon incident dont le support passe par le foyer principal objet (resp. par un foyer secondaire objet) correspond un rayon émergent parallèle à l'axe principal (resp. à l'axe secondaire correspondant).

## 8.6 Construction de l'image d'un objet frontal donné, dans les conditions de Gauss

On prendra d'abord l'exemple d'un objet réel situé avant le plan focal objet d'une lentille convergente. On obtient alors une image réelle, donc observable sur un écran diffusant. C'est le cas d'un projecteur de diapositives, d'un appareil photographique, d'un agrandisseur etc.

Une lentille convergente donne d'un objet réel une image virtuelle, droite, plus grande que l'objet, si l'objet est situé entre le plan focal objet et la lentille. C'est le cas de la loupe ou d'un verre correcteur pour hypermétrope ou presbyte.

Une lentille divergente donne d'un objet réel une image virtuelle droite, plus petite que l'objet. C'est le cas d'un verre correcteur pour myope.

On s'exercera en traitant les autres cas, en particulier avec les lentilles divergentes.

## 8.7 Formules des lentilles minces

On note habituellement :  $p = \overline{OA}$  et  $p' = \overline{OA'}$  on a  $f' = \overline{OF'} = \overline{FO} = -f$ .

Si  $p < 0$  l'objet est réel. Si  $p > 0$  l'objet est virtuel. Si  $p' < 0$  l'image est virtuelle. Si  $p' > 0$  l'image est réelle.

En observant les figures ci-dessus, on constate du fait des homothéties

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'I'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{O'I'}}{\overline{AB}} \quad (8.2)$$

avec  $\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$  et  $\frac{\overline{O'I'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}$  donc  $\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$ .

Donc  $\frac{f'}{p+f'} = \frac{p'-f'}{f'}$  soit  $-f'^2 = -f'^2 + pp' - pf' + p'f'$  et  $pf' - p'f' = pp'$ . On obtient la formule de conjugaison en divisant les deux membres par  $pp'f'$ . Formule de conjugaison

$$\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'} = C. \quad (8.3)$$

D'autre part, on obtient directement  $\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$  avec l'homothétie des triangles  $OAB$  et  $OA'B'$ . Formule du grandissement transversal :

$$\gamma = \frac{p'}{p}. \quad (8.4)$$



Ce sont les formules de Descartes des lentilles sphériques minces (ou formules avec origine au centre optique).

Le grandissement  $\gamma > 0$  quand  $p$  et  $p'$  sont de même signe donc quand l'objet est réel et l'image virtuelle ou l'inverse. Le grandissement  $\gamma < 0$  quand  $p$  et  $p'$  sont de signes contraires donc quand l'objet et l'image sont tous deux réels ou tous deux virtuels. Si  $\gamma > 0$  l'image est droite, de nature différente de l'objet. Si  $\gamma < 0$  l'image est renversée, de même nature que l'objet. Si  $|\gamma| > 1$  l'image est plus grande que l'objet, sinon l'image est plus petite que l'objet.

De  $\gamma = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}}$  on tire les formules de Newton ou formules avec origines aux foyers. Formules du grandissement de Newton :  $\gamma = \frac{f'}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$  Formule de conjugaison de Newton :  $\overline{FAFA'} = ff' = -f'^2$ .

## 8.8 Image d'un objet à l'infini

On prendra l'exemple d'un objet réel à l'infini. dont une lentille divergente donne une image virtuelle droite.

$B'$  se trouve au foyer secondaire correspondant à l'axe secondaire  $BO$ . Si la lentille est convergente, l'image est réelle et renversée. L'image et l'objet sont vus de  $O$  sous le même angle  $\alpha$ , toujours petit, si les conditions de Gauss sont respectées, donc  $\alpha = \tan \alpha = \frac{A'B'}{\overline{F'O}} = \frac{A'B'}{-f'}$  donc  $\overline{A'B'} = -\alpha f'$  (pour  $\overline{AB} > 0$ ).

## 8.9 Étude analytique des différents cas

De la formule de conjugaison avec origine au centre optique, on tire

$$p' = \frac{pf'}{p + f'} \quad \gamma = \frac{f'}{p + f'}. \quad (8.5)$$

Il est pratique d'utiliser des coordonnées réduites sans dimensions :

— Si la lentille est convergente,  $f' > 0$ , alors on posera  $x = \frac{p}{f'}$  et  $x' = \frac{p'}{f'}$  donc  $x' = \frac{x}{1+x}$  et  $\gamma = \frac{1}{1+x}$ . Ainsi

$$\forall x \quad \frac{dx'}{dx} = \frac{1}{(1+x)^2} > 0 \quad \frac{d\gamma}{dx} = -\frac{1}{(1+x)^2} < 0. \quad (8.6)$$

— Si la lentille est divergente,  $f' < 0$ , pour que  $x$  soit du même signe que  $p$  et  $x'$  du même signe que  $p'$ , il est préférable de poser  $x = \frac{p}{f}$  et  $x' = \frac{p'}{f}$  donc  $x' = \frac{x}{1-x}$  et  $\gamma = \frac{1}{1-x}$ .

$$\forall x \quad \frac{dx'}{dx} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0 \quad \frac{d\gamma}{dx} = -\frac{1}{(1-x)^2} < 0. \quad (8.7)$$

Si l'objet avance dans le sens positif, l'image fait de même, mais avec une discontinuité; elle passe de  $+\infty$  à  $-\infty$  pour  $x = -l$  avec une lentille convergente, et de  $-\infty$  à  $+\infty$  pour  $x = 1$  avec une lentille divergente, c'est-à-dire dans les deux cas, quand l'objet atteint le plan focal objet. On voit aussi que le grandissement décroît constamment pour une lentille convergente et croît constamment pour une lentille divergente, avec une discontinuité quand l'objet traverse le plan focal objet ( $x = -1$  pour une lentille convergente et  $x = 1$  pour une lentille divergente).

## 8.10 Lentilles minces accolées

Si des lentilles minces sont accolées, leurs centres optiques coïncident pratiquement. La première de distance focale  $f'_1$ , donne de l'objet frontal  $AB$  une image  $A_1B_1$  qui pour la deuxième lentille est l'objet. La deuxième lentille, de distance focale  $f'_2$  donne de  $A_1B_1$  une image  $A'B'$  qui est aussi l'image de  $AB$  donnée par le système des deux lentilles accolées.

En posant  $p = \overline{OA}$ ,  $p_1 = \overline{OA_1}$  et  $p' = \overline{OA'}$ , les formules des lentilles sphériques minces donnent

$$\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'_1} \quad \frac{1}{p'} - \frac{1}{p_1} = \frac{1}{f'_2} \quad (8.8)$$

d'où, par addition membre à membre :  $\frac{1}{p'} - \frac{1}{p} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} = C_1 + C_2$ .

Le grandissement de la première lentille est  $\gamma_1 = \frac{p_1}{p}$ , celui de la deuxième est  $\gamma_2 = \frac{p'}{p_1}$ , celui du système est donc  $\gamma = \gamma_1 \gamma_2 = \frac{p'}{p}$ .

*L'ensemble de deux lentilles sphériques minces accolées équivaut à une lentille unique dont la vergence est la somme des vergences des deux lentilles.*

Si les deux lentilles ont des vergences opposées, la vergence du système est nulle. sa distance focale est infinie, c'est-à-dire que ses foyers sont rejetés à l'infini. On a alors un *système afocal*. Dans ce cas,  $p' = p$ , l'image est identique à l'objet.

Une des possibilités pour mesurer la vergence d'une lentille est de rechercher la lentille de vergence connue qui, accolée à la première, donnera un système afocal. Quelques autres méthodes de *focométrie* (mesure des distances focales) seront étudiées en travaux pratiques.

## 8.11 Exercices

**Exercice 8.1** (Montage  $4f'$  d'une lentille convergente). Un objet  $AB$  est situé à une distance  $2f'$  en avant d'une lentille mince convergente de distance focale image  $f'$ . Où se trouve l'image  $A'B'$ ? Quel est le grandissement?

**Exercice 8.2** (Lentille biconcave). Une lentille mince biconcave a des faces sphériques dont les rayons de courbure sont 0.10 m et 0.15 m. Le verre la

constituant a un indice valant 1,5. Où se trouve l'image d'un point objet situé à 20 cm en avant de la lentille ?

**Exercice 8.3** (Distance entre l'objet et l'image). On considère une lentille mince convergente de distance focale image  $f'$ , un point objet  $A$  situé sur l'axe et son image  $A'$ . Étudier les variations de la distance  $D = \overline{AA'}$  en fonction de la position de l'objet  $A$  par rapport à la lentille.

**Exercice 8.4** (Détermination d'une distance focale). Une lentille mince convergente donne d'un objet une image sur un écran, agrandie deux fois. Lorsqu'on rapproche de 0.36 m la lentille de l'écran, la taille de l'image devient la moitié de celle de l'objet. Déterminer la distance focale image de la lentille.

**Exercice 8.5** (Mesure de la distance focale d'une lentille par la méthode de Bessel). Un objet frontal  $AB$  et un écran (E) sont fixes et distants de  $D$ . Entre l'objet et l'écran, on déplace une lentille mince convergente de distance focale image  $f'$ . Montrer que si  $D \geq 4f'$ , il existe deux positions de la lentille distantes de  $d$  pour lesquelles il y a une image nette de l'objet sur l'écran. Calculer  $f'$  en fonction de  $D$  et  $d$ .

**Exercice 8.6** (Méthode d'autocollimation). On accole une lentille mince convergente de distance focale  $f'$  et un miroir plan. On éclaire ce dispositif au moyen d'un petit objet lumineux. Lorsque celui-ci est à 0.1 m du dispositif, l'image se forme dans le plan de l'objet. Calculer la distance focale de la lentille.

**Exercice 8.7** (Position de l'image donnée par un système catadioptrique). Un système optique est formé d'une lentille mince de distance focale 0.3 m et d'un miroir plan disposé à 0.15 m de la lentille. Déterminer la position de l'image que ce système donne d'un objet situé à 0.15 m en avant de la lentille.

**Exercice 8.8** (Construction de l'image donnée par un système catadioptrique). Construire l'image d'un objet à travers un système optique formé d'une lentille mince et d'un miroir plan disposé dans le plan focal image de la lentille. L'objet est placé en avant de la lentille à une distance comprise entre la distance focale et deux fois la distance focale.

**Exercice 8.9** (Points doubles d'un système catadioptrique). Un système est formé par l'association d'une lentille mince convergente de distance focale 0.1 m et d'un miroir plan situé à 0.2 m de la lentille. Déterminer le ou les point(s) de l'axe qui est à lui-même, ou qui sont à eux-mêmes, leur propre image. Ces points sont dits points doubles ou points de Bravais.

**Exercice 8.10** (Construction de l'image donnée par un système catadioptrique). Un système optique est formé d'un miroir sphérique concave de

distance focale 0.1 m et d'une lentille mince convergente de distance focale 0.2 m. La distance entre la lentille et le miroir est 0.3 m. Un objet est placé à 40 cm de la lentille. Construire son image à travers le système.

**Exercice 8.11** (Système catadioptrique afocal). On associe une lentille divergente et un miroir sphérique concave de façon à ce que le foyer principal image de la lentille soit confondu avec le centre du miroir et que le foyer principal objet de celle-ci soit confondu avec le sommet du miroir. Construire l'image d'un objet dans les conditions de Gauss, déterminer le grandissement transversal.

**Exercice 8.12** (Foyers d'un doublet). Un doublet est formé d'une lentille convergente de distance focale 15 cm et d'une lentille convergente de distance focale 10 cm, les centres optiques des deux lentilles étant distants de 5 cm. Déterminer les positions des foyers du doublet.

**Exercice 8.13** (Doublet afocal). Une lentille convergente de 0.3 m de distance focale et une lentille divergente de 0.1 m de distance focale sont distantes de 0.2 m. Où faut-il placer une source lumineuse pour que ce doublet donne un faisceau de rayons parallèles.

**Exercice 8.14** (Étude graphique d'un doublet). Étudier graphiquement le doublet de symbole  $(-1 ; 2 ; -1)$ .

**Exercice 8.15** (Points doubles d'un doublet). Deux lentilles convergentes (L1) et (L2) de distances focales images  $f'_1$ , et  $f'_2$  forment un système afocal. Soit un objet  $AB$  repéré par la distance algébrique  $\overline{F_1A} = x_1$  et soit son image  $A'B'$  à travers le doublet repéré par la distance algébrique  $\overline{F'_2A'} = x_2$ . Déterminer les relations de conjugaison du doublet. Application numérique  $f'_1 = 20$  cm,  $f'_2 = 2$  cm, déterminer le point de l'axe qui est à lui-même sa propre image.

**Exercice 8.16** (Lunette de Galilée). Une lunette de Galilée est constituée d'une première lentille mince convergente (L1) de distance focale  $f'_1 = 0.3$  m (objectif) et d'une seconde lentille mince divergente (L2) de distance focale  $f'_2 = -0.12$  m (oculaire). Ces lentilles sont distantes de 0.12 m. Au moyen de cette lunette, on observe un objet très éloigné vu sous le diamètre apparent  $10'$ . Déterminer les caractéristiques de l'image donnée par la lunette.

**Exercice 8.17** (Téléobjectif). Un téléobjectif est formé d'une lentille mince convergente de distance focal image 5 cm et d'une lentille mince divergente de distance focale image  $-2$  cm distantes de 3.5 cm. À quelle distance de la lentille convergente, l'image d'un objet lointain se forme-t-elle ? Quelle en est la taille si l'objet est vu sous un angle de  $5'$  de la première lentille ?

**Exercice 8.18** (Téléobjectif). Un téléobjectif d'appareil photographique est constitué d'une lentille convergente (L1) de distance focale  $f'_1 = 0.06$  m et

d'une lentille divergente (L2) de distance focale  $f'_2 = -0.08$  m. Les centres optiques des deux lentilles sont distants de  $d = \overline{O_1O_2} = 0.02$  m. La pellicule photographique est placée dans le plan focal image du téléobjectif.

1. Où faut-il disposer cette pellicule ?
2. Construire l'image d'un objet très éloigné.
3. L'objet très éloigné est vu depuis le téléobjectif sous un diamètre apparent de  $1'$ . Déterminer la grandeur de l'image.

**Exercice 8.19** (Microscope). Un microscope est constitué d'une lentille mince convergente (L1) de distance focale  $f'_1 = 0.002$  m (objectif) et d'une lentille mince convergente (L2) de distance focale  $f'_2 = 0.02$  m. La distance entre les foyers  $F'_1$  et  $F_2$  est  $d = 0.159$  m. Un objet de longueur  $0.01$  mm est placé à  $0.025$  mm du foyer principal objet  $F_1$  de (L1) . Déterminer les caractéristiques de l'image donnée par le microscope. Faire une construction géométrique. En déduire les conditions nécessaires pour que le doublet puisse effectivement jouer le rôle de microscope.

## 8.11. Exercices

---

## Chapitre 9

# Charges électriques, intensité, tension et lois de Kirchhoff

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Charge électrique . . . . .</b>	<b>86</b>
9.1.1	Électrisation . . . . .	86
9.1.2	Définition . . . . .	86
9.1.3	Quantification de la charge électrique . . . . .	86
9.1.4	Propriétés des charges électriques . . . . .	87
<b>9.2</b>	<b>Densités de charge électrique . . . . .</b>	<b>87</b>
9.2.1	Densité volumique de charge . . . . .	87
9.2.2	Densité surfacique de charge, densité linéique de charge . . . . .	87
<b>9.3</b>	<b>Densités de courant . . . . .</b>	<b>87</b>
9.3.1	Densité volumique de courant . . . . .	87
9.3.2	Densité surfacique de courant . . . . .	88
<b>9.4</b>	<b>Intensité d'un courant électrique . . . . .</b>	<b>88</b>
<b>9.5</b>	<b>Lignes de courant, tubes de courant . . . . .</b>	<b>89</b>
<b>9.6</b>	<b>Régime stationnaire, approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) . . . . .</b>	<b>89</b>
9.6.1	Définition . . . . .	89
9.6.2	Tube de courant dans le cadre de l'ARQS . . . . .	90
<b>9.7</b>	<b>Potentiel électrostatique, tension électrostatique ou différence de potentiel électrostatique . . . . .</b>	<b>90</b>
9.7.1	Potentiel électrostatique . . . . .	90
9.7.2	Surfaces équipotentielles . . . . .	90
9.7.3	Différence de potentiel électrostatique ou tension électrostatique . . . . .	91
<b>9.8</b>	<b>Cas de l'ARQS, différence de potentiel électrique ou tension électrique . . . . .</b>	<b>91</b>

## 9.1. Charge électrique

---

<b>9.9</b>	<b>Travail et puissance électrocinétiques reçus par un dipôle électrocinétique en ARQS . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>9.10</b>	<b>Lois de Kirchhoff . . . . .</b>	<b>92</b>
9.10.1	Définitions . . . . .	92
9.10.2	Loi des nœuds . . . . .	92
9.10.3	Loi des mailles . . . . .	93
9.10.4	Utilisation des lois de Kirchhoff . . . . .	93
<b>9.11</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>93</b>

---

## 9.1 Charge électrique

### 9.1.1 Électrisation

Elle se fait par frottement, contact ou influence. Elle permet de distinguer isolants et conducteurs : à la surface d'un conducteur les charges sont mobiles (présence d'électrons libres). Il y a deux types de charges électriques. Une charge négative est due à un excès d'électrons par rapport aux protons ; une charge positive est due à un défaut d'électrons. Les atomes concernés par ces excès ou défauts d'électrons sont toujours extrêmement minoritaires.

### 9.1.2 Définition

Une grandeur physique est dite "mesurable" si et seulement si l'on peut définir l'égalité et la somme ou le rapport de deux valeurs de cette grandeur. Soient deux charges  $q$  et  $q'$  ponctuelles, fixes, placées successivement au même point, dans le même environnement électrique (1) et subissant les forces électrostatiques  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}'_1$ , puis dans un autre environnement (2),  $\vec{F}_2$  et  $\vec{F}'_2$  etc.

On peut constater par la mesure que  $\frac{F'_1}{F_1} = \frac{F'_2}{F_2} = \dots$ . Par définition, on pose  $\left| \frac{q'}{q} \right| = \frac{F'_1}{F_1}$ . L'unité internationale de la charge électrique est le coulomb, c'est la charge qui traverse toute section d'un circuit parcourue par un courant de 1 A pendant une durée de 1 s, donc  $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$ .

### 9.1.3 Quantification de la charge électrique

Historiquement ceci a été vérifié par l'expérience de Millikan. La charge de tout objet (isolable) est un multiple de la charge élémentaire :  $q = ze$ , avec  $z$  un entier relatif. Ceci ne s'applique donc pas aux quarks que l'on ne sait pas séparer les uns des autres. La charge élémentaire vaut  $e = 1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$ . Nombres de charge des particules fondamentales : électron  $z = -1$ , proton  $z = 1$ , neutron  $z = 0$ , positron  $z = 1$ , ..., mais pour les quarks : up (u.)  $z = 2/3$ , down (d)  $z = -1/3$ .



### 9.1.4 Propriétés des charges électriques

Elles sont invariantes dans un changement de référentiel. La charge électrique est une grandeur extensive conservative. Elle est donc invariable pour un système fermé. Les charges de chaque signe se conservent dans un système fermé en l'absence de toute réaction de création ou d'annihilation de particules.

## 9.2 Densités de charge électrique

### 9.2.1 Densité volumique de charge

Soit un volume élémentaire  $d\tau$  autour du point  $M$ , portant la charge  $dq$ , la densité volumique de charge en  $M$  est :  $\rho = \frac{dq}{d\tau}$  ( $d\tau$  est de l'ordre de  $1 \times 10^{-24} \text{ m}^3$ ,  $dq$  est grand devant la charge élémentaire  $e$ ). Son unité internationale est le  $\text{C}/\text{m}^3$ . Si  $n_i$  est la concentration volumique (nombre par unité de volume en mètre cube) des particules de charge  $q_i$ , la densité volumique de charge s'écrit encore :  $\rho = \sum_i n_i q_i$ .

À l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrique,  $\rho = 0$ . Les charges éventuelles sont réparties sur la surface du conducteur (voir le cours de deuxième année). Dans un volume  $V$ , la charge est  $q = \iiint_V \rho dV$ . Cette écriture signifie simplement que la charge  $q$  est la somme d'un nombre infini de charges infiniment petites. Le signe  $\iiint$  est utilisé ici parce que le volume élémentaire  $d\tau = dx dy dz$  est le produit de trois différentielles, ce qui implique qu'il faut effectuer trois intégrations, sur les valeurs de  $x$ , sur celles de  $y$  et sur celles de  $z$  pour obtenir  $q$ .

### 9.2.2 Densité surfacique de charge, densité linéique de charge

Soit une surface élémentaire d'aire  $dS$  autour du point  $M$ , portant la charge  $dq$ , la densité surfacique de charge en  $M$  est :  $\sigma = \frac{dq}{dS}$ . ( $dS$  de l'ordre de  $1 \text{ e} - 16 \text{ m}^2$ ,  $dq$  grand devant la charge élémentaire  $e$ ). Son unité internationale est le  $\text{C m}^{-2}$ . Sur une surface  $\Sigma$ , la charge est  $\iint_{\Sigma} \sigma dS$ .

Soit une ligne élémentaire de longueur  $dL$  autour du point  $M$ , portant la charge  $dq$ , la densité linéique de charge en  $M$  est :  $\lambda = \frac{dq}{dL}$ . ( $dL$  de l'ordre de  $1 \text{ e} - 8 \text{ m}$ ,  $dq$  grand devant la charge élémentaire  $e$ ). Son unité internationale est le  $\text{C m}^{-1}$ . Sur une ligne  $\Gamma$ , la charge est  $\int_{\Gamma} \lambda dL$ .

## 9.3 Densités de courant

### 9.3.1 Densité volumique de courant

Soit, pour le  $i^{\text{e}}$  type de porteur de charge, au point  $M$  :

#### 9.4. Intensité d'un courant électrique

---

- $q_i$  : charge de ce type de porteur de charge,
- $\rho_i$  : densité volumique de charge mobile (en  $\text{C m}^{-3}$ ),
- $\vec{v}_i$  : vecteur vitesse moyen (en  $\text{m/s}$ ),
- $n_i$  : concentration volumique (en  $\text{m}^{-3}$ ).

La densité volumique de courant en  $M$  est  $\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i = \sum_i n_i q_i \vec{v}_i$ . Elle s'exprime en  $\text{A m}^{-2}$ .

##### 9.3.2 Densité surfacique de courant

Avec des notations semblables, pour des courants circulant sur une surface, la densité surfacique de courant en  $M$  est :  $\vec{j}_s = \sum_i \sigma_i \vec{v}_i$ .  $\vec{j}_s$  s'exprime en  $\text{A m}^{-1}$ .

#### 9.4 Intensité d'un courant électrique

Soit une surface  $\Sigma$  à travers laquelle circule un courant d'intensité algébrique  $i$ .  $\text{A} = \text{C s}^{-1}$  donc ceci signifie que  $i$  est le nombre d'ampères, c'est-à-dire le nombre de coulombs qui traverse  $\Sigma$  par seconde dans le sens de la flèche qui donne la convention de signe pour  $i$ .

$d\vec{S}$  représente un vecteur surface élémentaire de norme  $dS$  autour du point  $M$  (aire élémentaire), normal à la surface  $\Sigma$ , orienté dans le sens de la flèche qui définit la convention de signe pour  $i$ . Si la densité volumique de charges mobiles, au voisinage de  $M$  est  $\rho$ , et si leur vitesse moyenne est  $\vec{v}$ , la densité volumique de courant est  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ . Les charges mobiles contenues dans le cylindre de base, de génératrice  $\vec{v} dt$ , sont celles qui auront traversé la surface  $dS$  au bout du temps  $dt$ . Le volume de ce cylindre est  $d\vec{S} \cdot \vec{v} dt$ . La charge qui traverse  $dS$  pendant le temps  $dt$  a donc pour expression

$$dq = \rho d\vec{S} \cdot \vec{v} dt = \vec{j} \cdot d\vec{S} dt. \quad (9.1)$$

L'intensité du courant traversant la surface  $dS$  dans le sens défini par la flèche est  $di = \frac{dq}{dt} = \vec{j} \cdot d\vec{S}$ . Pour obtenir l'intensité totale du courant traversant la surface  $\Sigma$ , il faut additionner les intensités élémentaires qui traversent toutes les surfaces élémentaires dont la réunion constitue  $\Sigma$ . L'intensité du courant électrique traversant  $\Sigma$  dans le sens défini par la flèche est donc le "flux" du vecteur densité volumique de courant à travers  $\Sigma$  :  $i = \iint_{\Sigma} \vec{j} \cdot d\vec{S}$ .

Dans le cas d'un courant surfacique (nappe de courant), pour évaluer le courant traversant une ligne  $\Gamma$ , on fait correspondre à un élément de longueur  $dL$  de cette ligne un vecteur, normal à la ligne, dans le plan tangent à la surface où circule le courant et orienté dans le sens de la flèche qui définit la convention de signe pour l'intensité. L'élément  $dL$  est traversé par le courant d'intensité  $di = \vec{j}_s \cdot d\vec{L}$  et l'intensité totale qui traverse la ligne  $\Gamma$  est  $i = \int_{\Gamma} \vec{j}_s \cdot d\vec{L}$ .

## 9.5 Lignes de courant, tubes de courant

En chaque point d'une ligne de courant  $\vec{j}$  est tangent à cette ligne. Les lignes de courant sont orientées dans le même sens que  $\vec{j}$ . Ce sont donc les lignes de champ de la densité volumique de courant. Pour une nappe de courant, ce sont les lignes de champ de la densité surfacique de courant  $\vec{j}_S$ . Les équations d'une ligne de courant sont telles que : soit un point  $M(x, y, z)$  sur une ligne de courant et un vecteur  $d\vec{M}$  joignant  $M$  à un point  $M'$  infiniment voisins de  $M$  sur la même ligne de courant.  $d\vec{M} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$  est parallèle à  $\vec{j} = j_x\vec{u}_x + j_y\vec{u}_y + j_z\vec{u}_z$  donc  $\frac{dx}{j_x} = \frac{dy}{j_y} = \frac{dz}{j_z}$ . L'intégration de ces équations différentielles donne l'équation des lignes de courant.

*Un tube de courant s'appuie sur une courbe fermée et est limité par des lignes de courant.*

Pour une portion de tube de courant limitée par les sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ , avec  $I_1$  courant entrant par  $\Sigma_1$  et  $I_2$  courant sortant par  $\Sigma_2$ . Le courant sortant par la paroi  $T$  est nul car en chaque point de  $T$ ,  $\vec{j}$  est normal à  $d\vec{S}$  et  $\vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ . Le courant  $i$  sortant de cette portion de tube de courant est donc  $i = I_2 - I_1$ .

## 9.6 Régime stationnaire, approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS)

### 9.6.1 Définition

En régime stationnaire, toutes les grandeurs physiques sont indépendantes du temps (sauf bien entendu les coordonnées des porteurs de charge). Les dérivées partielles par rapport au temps de En régime stationnaire, toutes les grandeurs physiques sont indépendantes du temps (sauf bien entendu les coordonnées des porteurs de charge). Les dérivées partielles par rapport au temps de  $n_i, \rho_i, \vec{j}, \vec{v}_i, T$ , etc. sont nulles en chaque point. L'approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) concerne les régimes "lentement" variables.

Concrètement, en régime sinusoïdal permanent (courant alternatif sinusoïdal), on peut appliquer cette approximation tant que la fréquence est suffisamment basse pour que la longueur d'onde de la propagation du courant soit grande devant les dimensions du circuit. En notant  $f$  la fréquence et  $v$  la vitesse de propagation du courant ( $v \approx c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  : vitesse de la lumière dans le vide), cette longueur d'onde est  $\lambda = \frac{c}{f}$ .

Pour une fréquence de 1 MHz,  $\lambda \approx 300 \text{ m}$ , il suffit donc que les dimensions du circuit ne dépassent pas 1 m pour qu'on puisse appliquer l'ARQS.

Pour  $f = 50 \text{ Hz}$  (courants EDF)  $\lambda \approx 6000 \text{ km}$ , pour des lignes de transport de plusieurs centaines de kilomètres, l'ARQS ne serait pas très bonne.

### 9.6.2 Tube de courant dans le cadre de l'ARQS

En régime stationnaire, si on note  $q$  la charge électrique contenue dans un volume déterminé, on a  $\frac{dq}{dt} = 0$ . Par exemple, pour le tube de courant  $T$ , limité par les sections  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$ . Le courant sortant par  $T$  est nul. Le courant sortant est donc  $i = I_2 - I_1$  or  $i = -\frac{dq}{dt} = 0$ , donc  $I_1 = I_2$ . L'intensité du courant a la même valeur à travers toutes les sections d'une branche du circuit. Pour un tube de courant se partageant en deux branches : On a pour la même raison :  $I = I_1 + I_2$ .

En ARQS, ces lois restent valables approximativement, mais les intensités varient (lentement) au cours du temps.

## 9.7 Potentiel électrostatique, tension électrostatique ou différence de potentiel électrostatique

### 9.7.1 Potentiel électrostatique

Une répartition de charges (ponctuelles, volumiques, surfaciques ou linéiques) fixe et indépendante du temps crée un champ électrostatique. Le champ électrostatique en un point où une charge  $q$  subit (ou subirait) la force électrostatique  $\vec{F}$  est  $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ , il ne dépend pas de  $q$  mais de la disposition et des valeurs des charges qui créent ce champ.

*Les forces électrostatiques sont conservatives donc elles dérivent d'un potentiel : l'énergie potentielle électrostatique.* Pour un déplacement  $d\vec{M}$  on a  $\vec{F} \cdot d\vec{M} = \delta W = -dE_p$  soit  $q\vec{E} \cdot d\vec{M} = -dE_p$  avec  $q$  constante donc  $d\left(\frac{E_p}{q}\right) = -\vec{E} \cdot d\vec{M}$ .  $V = \frac{E_p}{q}$  est le potentiel électrostatique au point  $M$ , il ne dépend pas de la charge  $q$ , ni même de la présence d'une charge électrique en  $M$  puisque sa différentielle est  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{M}$  et que  $\vec{E}$  dépend des charges qui le créent et non de celle qui éventuellement le subit.

Son unité internationale est le volt  $V = J/C = W/A = kg\ m^2\ s^{-3}\ A^{-1}$ . On peut donc définir le potentiel électrostatique par la formule

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{M}. \quad (9.2)$$

Il en résulte que l'unité internationale du champ électrostatique est le volt par mètre :  $V/m$ .

Étant défini par sa différentielle, (comme une énergie potentielle ou un avancement de réaction...) le potentiel électrostatique n'est ainsi défini qu'à une constante près que l'on peut choisir arbitrairement.

### 9.7.2 Surfaces équipotentielles

*Une surface équipotentielle est une surface sur laquelle le potentiel électrique  $V$  est uniforme.* Soient deux points  $M_1$  et  $M_2$  très voisins sur une

## 9.8. Cas de l'ARQS, différence de potentiel électrique ou tension électrique

surface équipotentielle. On note  $d\vec{M} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  et  $dV = V_1 - V_2 = 0$ , on a donc  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{M} = 0$  donc  $\vec{E} \perp d\vec{M}$ . En un point d'une surface équipotentielle, le champ électrostatique est normal à la surface équipotentielle.

### 9.7.3 Différence de potentiel électrostatique ou tension électrostatique

La différence de potentiel électrostatique entre deux points  $M_1$  et  $M_2$  est obtenue par intégration de la relation précédente :  $V_2 - V_1 = \int_{M_1}^{M_2} -\vec{E} \cdot d\vec{M}$ , cette intégrale est bien sûr indépendante du chemin suivi de  $M_1$  à  $M_2$  puisqu'on intègre une différentielle totale exacte : celle de  $V$ .

La diminution du potentiel électrostatique entre  $M_1$  et  $M_2$  est donc égale à la circulation du champ électrostatique de  $M_1$  à  $M_2$  :  $V_1 - V_2 = \int_{M_1}^{M_2} \vec{E} \cdot d\vec{M}$ . Dans le cas d'un champ électrostatique uniforme :  $V_1 - V_2 = \vec{E} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$ . La différence de potentiel électrostatique (d.d.p.) entre deux points est aussi nommée *tension électrostatique entre ces deux points*. On peut la définir par une flèche : La tension  $u$  définie par la flèche ci-dessus est  $u = V_1 - V_2$  (On peut aussi la noter  $u_{12}$ ). Le travail de la force électrostatique subie par une charge ponctuelle  $q$  se déplaçant de  $M_1$  à  $M_2$  peut donc s'écrire :  $W_{1,2} = E_{p_1} - E_{p_2}$  avec  $E_p = qV$  donc  $W_{1,2} = q(V_1 - V_2)$  ou  $W_{1,2} = qu$  si la flèche définissant  $u$  va de  $M_2$  vers  $M_1$ .

## 9.8 Cas de l'ARQS, différence de potentiel électrique ou tension électrique

Dans le cas d'un régime variable, les charges sont soumises à un champ électromagnétique, formé d'un champ électrique et d'un champ magnétique qui sont couplés (chacun dépend des variations temporelles de l'autre). Il existe toujours un potentiel  $V$ , nommé alors potentiel électrique, mais la relation  $dV = -\vec{E} \cdot d\vec{M}$  n'est plus valable (voir cours de deuxième année). On admettra que si le régime est lentement variable, c'est-à-dire quasi-stationnaire, les relations obtenues en électrostatique restent valables avec une bonne approximation. En ARQS :  $V$  représente alors le potentiel électrique,  $E_p$  l'énergie potentielle électrique (ou électrocinétique) et  $W$  le travail de la force électrique agissant sur la charge ponctuelle  $q$ .

### 9.9 Travail et puissance électrocinétiques reçus par un dipôle électrocinétique en ARQS

Une portion de circuit (tube de courant) comprise entre deux surfaces équipotentielles  $A$  et  $B$ , constitue un dipôle électrocinétique  $D$ . Si le régime est quasi stationnaire, l'intensité  $i$  (ou  $i_{AB}$ ) du courant circulant de  $A$  vers  $B$

est la même à travers toutes les sections du tube de courant, et en particulier, à travers les deux équipotentiels  $A$  et  $B$ . Soit  $u$  la différence de potentiel ou tension électrique définie sur le schéma ( $u = u_{AB} = V_A - V_B$ ).

L'énergie électrocinétique que reçoit une charge  $q$  qui le traverse de la part du reste du circuit est :  $W = E_{pA} - E_{pB} = q(V_A - V_B)$ . En un temps  $dt$  :

- il entre par  $A$  dans le dipôle, la charge  $dq = idt$  avec l'énergie potentielle  $dE_{pA} = idtV_A$ ,
- il sort par  $B$  du dipôle la même charge  $dq = idt$  (en ARQS la charge de  $D$  est quasi-constante), avec l'énergie potentielle  $dE_{pB} = idtV_B$ ,
- il ne sort ni ne rentre aucune charge par la surface latérale du tube de courant,
- à l'intérieur du tube, les charges se sont déplacées mais en ARQS chaque petit volume contient une charge électrique constante à un potentiel constant. L'énergie potentielle électrique des charges intérieures au tube n'a donc pas changé pendant  $dt$ .

L'énergie électrocinétique reçue par le dipôle de la part du reste du circuit pendant  $dt$ , c'est-à-dire le travail total des forces électriques qui s'exercent sur les porteurs de charge du dipôle est donc

$$\delta W = (V_A - V_B)idt = uidt = u dq. \quad (9.3)$$

La puissance électrocinétique reçue par le dipôle est  $\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = ui$ . Si  $u$  et  $i$  sont fléchés dans le même sens on a bien sûr  $P = -ui$ .

Si  $P > 0$  le dipôle reçoit de l'énergie électrocinétique de la part du reste du circuit. Si  $P < 0$ , il fournit de l'énergie électrocinétique au reste du circuit, c'est un générateur.

## 9.10 Lois de Kirchhoff

### 9.10.1 Définitions

Ces lois concernent les circuits électriques filiformes, c'est-à-dire formés de composants connectés entre eux par des fils conducteurs fins. Un nœud est un point d'où partent plus de deux branches du circuit. Une maille est une suite de branches du circuit partant d'un point pour aboutir au même point.

### 9.10.2 Loi des nœuds

On a déjà démontré, en ARQS, que l'intensité totale du courant sortant d'un conducteur est nulle donc, si  $n$  courants d'intensités  $i_1, i_2, \dots, i_n$  arrivent en un nœud par les différentes branches, leur somme est nulle :

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0. \quad (9.4)$$

Il en est de même pour les courants arrivant en un nœud.

### 9.10.3 Loi des mailles

Le potentiel électrique dépend du point considéré, la différence de potentiel ne dépend pas du chemin suivi par les porteurs de charge, d'où la loi des mailles : *La somme des tensions représentées par des flèches, correspondant toutes au même sens de parcours le long d'une maille, est nulle.* En notant  $u_1, u_2, \dots, u_n$  les  $n$  tensions correspondantes :

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0. \quad (9.5)$$

### 9.10.4 Utilisation des lois de Kirchhoff

On étudie ici le cas d'un circuit pour lequel on connaît les relations  $u = f(i)$  pour chacun des dipôles qui le constituent ( $u = Ri$  pour un conducteur ohmique,  $u = E - Ri$  pour un générateur,  $u = Ri + E'$  pour un récepteur). On cherche à calculer les intensités des courants dans toutes les branches de ce circuit, (on pourra en déduire ensuite les tensions).

L'utilisation directe des lois de Kirchhoff se fait en écrivant autant d'équations qu'il y a d'intensités inconnues : on écrit d'abord la loi des nœuds pour tous les nœuds moins un. (le dernier nœud fournirait une équation qui serait une combinaison linéaire des précédentes).

On écrit ensuite la loi des mailles autant de fois que nécessaire pour compléter le système d'équations, après avoir choisi sur chaque maille utilisée un sens de parcours déterminé. Il suffit pour ceci de repérer un ensemble de mailles indépendantes.

Chaque tension intervenant dans une équation est exprimée en fonction de l'intensité dans la branche correspondante en utilisant l'expression de la caractéristique  $u = f(i)$  du dipôle contenu dans cette branche.

On résout ensuite le système d'équations par le moyen le plus adapté.

Cette méthode est souvent longue, d'autres méthodes plus rapides seront étudiées ultérieurement.

## 9.11 Exercices

**Exercice 9.1** (Conducteur métallique). 1. Sachant que chaque atome de cuivre fournit un électron libre, calculer la densité volumique de charge mobile  $\rho$  dans un conducteur en cuivre. On donne la masse volumique du cuivre :  $\mu = 8.96 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , son numéro atomique :  $Z = 29$  et sa masse molaire atomique :  $M = 63.5 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}$ . La charge élémentaire est  $e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ , la constante d'Avogadro est  $N = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

2. Un fil de cuivre cylindrique de rayon  $r = 0.500 \text{ mm}$  est parcouru par un courant d'intensité  $I = 1.00 \text{ A}$ . En admettant que le vecteur densité de courant soit uniforme dans le fil et parallèle à l'axe du cylindre, calculer la norme  $j$  de ce vecteur ainsi que la norme  $v$  du vecteur vitesse moyen des électrons libres.
3. Ce fil est enroulé à spires jointives sur un cylindre de diamètre  $D = 10 \text{ cm}$ . On considérera que les spires sont pratiquement circulaires et qu'elles forment une nappe de courant. Quels sont la direction, et la norme  $j_s$  du vecteur densité surfacique de courant ?

**Exercice 9.2** (Pont de Wheatstone). 1. Écrire les équations d'inconnues  $i, i_{1..5}$ , données par les lois de Kirchhoff, qui permettent le calcul de ces intensités.

2. Si  $i_5 = 0$ , quelle relation y a-t-il entre  $R_1, R_2, R_3$  et  $R_4$  ? Exprimer alors toutes les intensités avec les résistances et  $E$ .

**Exercice 9.3** (Lois de Kirchhoff). Pour le circuit suivant :

1. Écrire la relation entre l'intensité et la tension pour chaque branche du circuit (On appellera les tensions  $u, u', u_1, u_2 \dots u_5$  et on les fléchera sur le circuit).
2.  $E, E', r, r', R_{1..5}$  étant des constantes supposées connues, écrire les équations données par les lois de Kirchhoff qui permettent de calculer les intensités.
3. Réécrire en le simplifiant le système d'équations précédent pour  $E' = 2E, r' = r$  et  $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R$ , avec  $E, r$  et  $R$  pour seuls paramètres.
4. Résoudre ce système d'équations pour  $E = 6 \text{ V}, R = 10 \Omega$  et  $r = 2 \Omega$ .

**Exercice 9.4** (Courant volumique). Une tôle métallique est définie dans le repère cartésien Oxyz, de vecteurs unitaire  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$ , par  $y \in [0; \ell], x \in [0; L]$  et  $z \in [0; H]$ . Elle est parcourue par un courant de densité volumique  $\vec{j} = j_0 \exp\left(-\frac{z}{a}\right) \vec{u}_x$ . Dans cette expression la constante  $a$  est une constante très petite devant l'épaisseur  $H$  de la tôle.

1. Exprimer l'intensité  $I$  du courant qui traverse une section de la tôle normale à l'axe Ox.
2.  $H$  étant petite devant  $\ell$  et  $L$ , on assimile la tôle à une surface. Exprimer le vecteur densité surfacique de courant  $\vec{j}_s$ .

**Exercice 9.5** (Sphère chargée en volume). Soit une sphère de rayon  $R$ , de centre  $O$ , chargée électriquement. La densité volumique de charge en un point  $M$ , à la distance  $r$  de  $O$  est  $\rho = \frac{q \exp\left(-\frac{r}{a}\right)}{4\pi r a^2}$ . Calculer sa charge électrique totale  $Q$  pour  $R = a$  ainsi que  $\lim_{R \rightarrow \infty} Q$ .



## Chapitre 10

# Conducteurs ohmiques, loi d'ohm, loi de joule

### Sommaire

---

<b>10.1 Conductivité, loi d'Ohm locale . . . . .</b>	<b>96</b>
10.1.1 Conducteur ohmique, mobilité des porteurs de charge	96
10.1.2 Loi d'Ohm locale . . . . .	96
<b>10.2 Résistance électrique d'un conducteur ohmique, loi d'Ohm . . . . .</b>	<b>97</b>
10.2.1 Loi d'Ohm . . . . .	97
10.2.2 Résistance d'un conducteur ohmique élémentaire et d'un conducteur ohmique cylindrique . . . . .	97
<b>10.3 Étude physique de la conductivité . . . . .</b>	<b>98</b>
10.3.1 Cas des métaux, des alliages métalliques . . . . .	98
10.3.2 Supraconducteurs . . . . .	98
10.3.3 Électrolytes . . . . .	98
<b>10.4 Associations de résistances . . . . .</b>	<b>99</b>
10.4.1 Association en série . . . . .	99
10.4.2 Association en parallèle . . . . .	99
10.4.3 Cas de deux conducteurs ohmiques . . . . .	99
10.4.4 Théorème de Kennely (équivalence triangle, étoile) . . . . .	99
<b>10.5 Théorème de Millman . . . . .</b>	<b>100</b>
<b>10.6 Ponts diviseur de tension et diviseur de courant</b>	<b>101</b>
10.6.1 Pont diviseur de tension . . . . .	101
10.6.2 Pont diviseur de courant . . . . .	101
<b>10.7 Loi de Joule . . . . .</b>	<b>101</b>
10.7.1 Cas d'un conducteur ohmique . . . . .	101
10.7.2 Cas d'un dipôle quelconque . . . . .	102
<b>10.8 Exercices . . . . .</b>	<b>102</b>

---

## 10.1 Conductivité, loi d'Ohm locale

### 10.1.1 Conducteur ohmique, mobilité des porteurs de charge

On considère un conducteur homogène, électriquement isotrope, immobile et à température constante et uniforme. Dans un tel conducteur, le mouvement d'ensemble des porteurs de charge est dû à une seule cause, le champ électrique créé par le reste du circuit. Le conducteur étant isotrope, il n'existe aucune direction privilégiée, mise à part celle du champ électrique. La vitesse moyenne (vitesse de leur mouvement d'ensemble) de chaque type de porteurs de charge est donc parallèle à  $\vec{E}$ . Les lignes du champ électrique sont donc les lignes de courant. La *mobilité*  $\mu_i$  du  $i^{\text{e}}$  type de porteurs de charge est définie par  $\vec{v}_i = \mu_i \vec{E}$  lorsque le régime stationnaire (ou quasi-stationnaire) est atteint. La mobilité  $\mu_i > 0$  si  $q_i > 0$  et  $\mu_i < 0$  si  $q_i < 0$ .

La limitation de la vitesse moyenne d'un porteur de charge est due aux interactions avec les obstacles. Dans un conducteur métallique, ces obstacles sont les défauts du réseau cristallin et les impuretés, c'est-à-dire tout ce qui rompt la périodicité spatiale du cristal. Dans un électrolyte ce sont les ions de charge opposée et éventuellement les molécules du solvant. La mobilité d'un porteur de charge dépend de la température. Pour un métal elle décroît si la température  $T$  croît, car les défauts cristallins sont en nombre croissant avec  $T$ . Par contre, pour un électrolyte, elle croît avec  $T$ . La densité volumique de courant est  $\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i = \sum_i \rho_i \mu_i \vec{E}$ .

### 10.1.2 Loi d'Ohm locale

Un conducteur suit la loi d'Ohm locale si et seulement si  $\mu_i$  est indépendante de  $\vec{E}$ .

Les métaux suivent la loi d'Ohm locale, même pour des champs électriques intenses. Dans ce cas, le conducteur considéré est un conducteur ohmique. Sa conductivité est définie par  $\rho = \sum_i \rho_i \mu_i$ . Elle est indépendante de  $\vec{E}$  et uniforme dans tout le conducteur. Elle est de plus indépendante du temps en régime stationnaire ou elle en dépend très peu en ARQS. Son unité internationale est le siemens par mètre : S/m.

La loi d'Ohm locale se traduit donc par la formule  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$  avec  $\sigma$  constant. L'inverse de la conductivité est la résistivité, son unité internationale est l'ohm-mètre :  $\Omega \text{ m}$ . Le siemens est l'inverse de l'ohm. La loi d'Ohm locale s'écrit donc encore  $\vec{E} = \rho \vec{j}$ .

## 10.2 Résistance électrique d'un conducteur ohmique, loi d'Ohm

### 10.2.1 Loi d'Ohm

Pour un conducteur ohmique, c'est-à-dire un conducteur homogène, isotrope, immobile, en régime stationnaire ou en ARQS (donc en particulier à  $T$  constante), la loi d'Ohm s'écrit :  $u = Ri$  avec  $R$  constante, si l'on utilise la convention récepteur.

$R$  est la résistance du conducteur ohmique, son unité SI est l'ohm :  $\Omega$ . Son inverse est la conductance  $G = \frac{1}{R}$ . Son unité SI est le siemens S. La loi d'Ohm s'écrit donc aussi  $i = Gu$ . La loi d'Ohm est bien entendue une conséquence de la loi d'Ohm locale : Soit un conducteur ohmique traversé par un courant en régime stationnaire, limité par deux équipotentiels A et B. Sa surface latérale est un tube de courant puisque aucun courant n'en sort. Soit une section quelconque du conducteur, l'intensité du courant est  $i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \sigma \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$  et la tension est  $u = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{M}$ . Si en chaque point du conducteur,  $\vec{E}$  est multiplié par  $k$ , alors  $u$  est multiplié par  $k$  et  $\sigma$  étant inchangé,  $i$  est aussi multiplié par  $k$ . Le rapport  $R = \frac{u}{i}$  reste bien constant.

### 10.2.2 Résistance d'un conducteur ohmique élémentaire et d'un conducteur ohmique cylindrique

Soit un tube de courant élémentaire de longueur  $dL$  et de section  $dS$ , limité par deux équipotentiels entre lesquelles la tension est  $du$  et parcouru par le courant d'intensité  $di$ .

Le champ électrique  $\vec{E}$  est comme les lignes de courant normal aux équipotentiels et il est donc parallèle au vecteur  $dL$  et au vecteur  $dS$ .

On a alors  $di = \sigma E dS$  et  $du = E dL$  d'où la conductance de cet élément de conducteur ohmique :  $dG = \sigma \frac{dS}{dL}$ . (c'est un infiniment petit) et sa résistance (infiniment grande) :  $\Delta R = \rho \frac{dL}{dS}$ .

Par intégration, on obtient la résistance d'un conducteur ohmique cylindrique limité par deux équipotentiels, si la densité volumique de courant est bien parallèle à l'axe du cylindre :  $R = \rho \frac{L}{S}$ .

Si un conducteur est filiforme, de section constante, chaque petite portion du fil est assimilable à un cylindre, la formule ci-dessus s'applique aussi.

Pour une forme quelconque du conducteur ohmique, on peut calculer sa résistance ou sa conductance en le décomposant en tubes de courant élémentaires et en appliquant les lois sur les associations de résistances ou de conductances.

## 10.3 Étude physique de la conductivité

### 10.3.1 Cas des métaux, des alliages métalliques

Pour un métal pur :

- aux températures ordinaires :  $\rho = \rho_0(1 + a\theta)$ , avec  $\theta$  représentant la température en C et  $a$  est de l'ordre de  $3.7 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}$  ;
- à des températures basses (20 K à 100 K environ) la résistivité varie plus rapidement et non linéairement.

Les alliages métalliques ont souvent des coefficients  $a$  bien plus faibles, parfois même très faibles (constantan, manganine).

### 10.3.2 Supraconducteurs

Il existe une température critique en dessous de laquelle la résistivité s'annule pour certains matériaux. En dessous de cette température critique, le matériau est "supraconducteur".

Pour les métaux, la température critique est toujours très basse : quelques kelvins pour la plupart, mais il n'y a pas de température critique pour les meilleurs conducteurs (cuivre, argent).

### 10.3.3 Électrolytes

La conductivité d'un électrolyte est une fonction croissante de la température, (la mobilité des ions croît avec la température).

Soit un électrolyte dans lequel les porteurs de charge sont les ions libres  $X_i^{z_i+}$  ( $z_i > 0$  ou  $z_i < 0$  suivant si l'on a affaire à un cation ou à un anion).

La charge de l'ion est  $q_i = z_i e$ . La concentration molaire volumique de cet ion étant  $c_i$  (ou  $[X_i^{z_i+}]$ ), la concentration volumique de ces ions est  $n_i = N c_i$ . La densité volumique de charge mobile pour ces ions est donc  $\rho_i = N c_i z_i e$ . En utilisant la constante de Faraday  $F = Ne = 96.5 \text{ kC mol}^{-1}$ , on obtient :  $\rho_i = z_i F c_i$ . On a donc :

$$\vec{j} = \sum_i \rho_i \vec{v}_i = \sum_i z_i \mu_i c_i \vec{E} \quad (10.1)$$

Avec la loi d'Ohm locale  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ , on obtient  $\sigma = \sum_i z_i \mu_i c_i$

La conductivité molaire des ions  $X_i^{z_i+}$  est définie par  $\lambda_i = z_i \mu_i F$ , son unité SI est :  $\text{S m}^2 \text{ mol}^{-1}$ ,  $\lambda_i > 0$  car  $z_i$  et  $\rho_i$  sont de même signe. D'où l'expression de la conductivité de l'électrolyte :  $\sigma = \sum_i \lambda_i c_i$ . Les conductivités molaires des ions, comme leurs mobilités, dépendent de la température et des concentrations.

Pour une solution suffisamment diluée, la conductivité molaire de chaque ion tend vers une limite appelée conductivité molaire limite, notée  $\lambda^0$ , qui

croît avec la température. Pour une solution très diluée :

$$\sigma = \sum_i \lambda_i^0 c_i \quad (10.2)$$

## 10.4 Associations de résistances

### 10.4.1 Association en série

Des dipôles sont en série s'ils sont traversés par le même courant. Soit  $i$  l'intensité de ce courant,  $R$  la résistance électrique du  $k^{\text{e}}$  conducteur et  $u_k = R_k i$  la tension entre les équipotentiels qui le limitent. La tension entre les bornes de l'association des  $n$  conducteurs ohmiques est  $u = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n R_k i$ . La résistance du conducteur ohmique équivalent au groupement en série est donc  $R = \sum_{k=1}^n R_k$ .

### 10.4.2 Association en parallèle

Des dipôles sont en parallèle s'ils sont placés entre les deux mêmes équipotentiels, donc sous la même tension. Soit  $u$  la tension entre ces deux équipotentiels,  $G_k$  la conductance électrique du  $k^{\text{e}}$  conducteur et  $i_k = G_k u$  l'intensité du courant qui le traverse. L'intensité du courant qui traverse l'ensemble des  $n$  conducteurs ohmiques est  $i = \sum_{k=1}^n i_k = \sum_{k=1}^n G_k u$ . La conductance du conducteur ohmique équivalent au groupement en parallèle est donc  $G = \sum_{k=1}^n G_k$ .

### 10.4.3 Cas de deux conducteurs ohmiques

Pour deux conducteurs ohmiques en série  $R = R_1 + R_2$  et  $G = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ .

Pour deux conducteurs ohmiques en parallèle  $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$  et  $G = G_1 + G_2$ .

### 10.4.4 Théorème de Kennely (équivalence triangle, étoile)

On admettra qu'il y a équivalence entre les deux réseaux ci-dessous et on cherchera les relations entre les résistances de l'étoile et celles du triangle.

Si  $i_{12} = 0$ , on peut supprimer la branche correspondante, entre  $A_{31}$  et  $A_{23}$  on a, d'après les lois sur les associations de résistances :

$$R_{31} + R_{23} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (10.3)$$

Par le même raisonnement, on obtient

$$R_{12} + R_{31} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (10.4)$$

$$R_{23} + R_{12} = \frac{R_2(R_3 + R_1)}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (10.5)$$

## 10.5. Théorème de Millman

---

L'opération sur les équations précédentes :  $(10.4+10.5-10.3)/2$  donne

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (10.6)$$

et de manière similaire

$$R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (10.7)$$

$$R_{31} = \frac{R_3 R_1}{R_1 + R_2 + R_3}. \quad (10.8)$$

Si  $V_{31} = V_{23}$ , on peut réunir les noeuds  $A_{31}$  et  $A_{23}$  (on supprime  $R_3$  où ne passe aucun courant), on a alors

$$G_2 + G_3 = \frac{(G_{12} + G_{31})G_{23}}{G_{31} + G_{23} + G_{12}}. \quad (10.9)$$

De la même manière, on a

$$G_3 + G_1 = \frac{(G_{23} + G_{12})G_{31}}{G_{31} + G_{23} + G_{12}}, \quad (10.10)$$

$$G_1 + G_2 = \frac{(G_{31} + G_{23})G_{12}}{G_{31} + G_{23} + G_{12}}. \quad (10.11)$$

En manipulant ces trois équations, il vient :

$$G_1 = \frac{G_{12}G_{31}}{G_{12} + G_{31} + G_{23}}, \quad (10.12)$$

$$G_2 = \frac{G_{23}G_{12}}{G_{12} + G_{31} + G_{23}}, \quad (10.13)$$

$$G_3 = \frac{G_{31}G_{23}}{G_{12} + G_{31} + G_{23}}. \quad (10.14)$$

## 10.5 Théorème de Millman

Soit un noeud au potentiel  $V$  ou aboutissent :

- $n$  branches passives, par la branche de numéro  $k$  de conductance  $G_k$  arrive au noeud considéré le courant d'intensité  $i_k$  et son autre extrémité étant au potentiel  $V_k$ ,
- $m$  branches comportant des sources de courant,  $\eta_j$  étant l'intensité du courant électromoteur de la branche numéro  $j$  fléché vers le noeud considéré.

La loi d'Ohm donne :  $i_k = G_k(V_k - V)$ . La loi des noeuds donne  $\sum_{k=1}^n G_k(V_k - V) + \sum_{j=1}^m \eta_j = 0$ . D'où, en notant  $G = \sum_{k=1}^n G_k$ , le théorème de Millman :

$$V = \sum_{k=1}^n \frac{G_k}{G} V_k + \sum_{j=1}^m \frac{\eta_j}{G}. \quad (10.15)$$

Le théorème de Millman, comme on le verra en exercices, est très pratique à utiliser dans les montages à amplificateurs opérationnels.

## 10.6 Ponts diviseur de tension et diviseur de courant

### 10.6.1 Pont diviseur de tension

Les deux schémas sont équivalents, le second présente le diviseur de tension sous forme d'un quadripôle, le quadripôle est le réseau de quatre bornes entouré en pointillés.  $R_C$  est la résistance de charge, ou résistance utile. En son absence, on dit que le diviseur de tension est en sortie ouverte. Les formules du diviseur de tension s'obtiennent facilement avec la loi d'Ohm : pour une même intensité, les tensions sont proportionnelles aux résistances.

En sortie ouverte,

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}. \quad (10.16)$$

Avec une résistance de charge, il faut remplacer  $R_2$  par la résistance équivalente  $R_2 \parallel R_c$ , ce qui donne :

$$\frac{u_s}{u_e} = \frac{R_2 R_c}{R_1 R_2 + R_1 R_c + R_2 R_c} = \frac{G_1}{G_1 + G_2 + G_c}. \quad (10.17)$$

### 10.6.2 Pont diviseur de courant

Les deux schémas sont équivalents, le second présente le diviseur de courant sous forme d'un quadripôle, le quadripôle est le réseau de quatre bornes entouré en pointillés.  $G_C$  est la conductance de charge, ou conductance utile. En son absence, on dit que le diviseur de courant est en sortie court-circuitée. Les formules du diviseur de courant s'obtiennent facilement avec la loi d'Ohm : pour une même tension, les intensités sont proportionnelles aux conductances.

En sortie court-circuitée,

$$\frac{i_s}{i_e} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2}. \quad (10.18)$$

Avec une conductance de charge, il faut remplacer  $G_2$  par la conductance équivalente  $G_2$  en série avec  $R_c$ , qui vaut  $\frac{G_c G_2}{G_c + G_2}$  ce qui donne :

$$\frac{i_s}{i_e} = \frac{G_2 G_c}{G_1 G_2 + G_1 G_c + G_2 G_c} = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + R_c}. \quad (10.19)$$

## 10.7 Loi de Joule

### 10.7.1 Cas d'un conducteur ohmique

*Dans un conducteur ohmique toute l'énergie électrocinétique reçue est transformée en énergie thermique. En régime stationnaire, cette énergie thermique est intégralement cédée au milieu extérieur sous forme de chaleur,*

puisque la température du conducteur est fixe, de même bien sûr que l'état physique et la composition chimique du conducteur.

Par contre, en régime variable, une partie de l'énergie thermique peut être conservée par le conducteur qui voit alors sa température varier. La résistance du conducteur est alors une variable de la température... La puissance électrocinétique reçue par un conducteur ohmique est, avec la convention récepteur  $P = ui$ , avec  $u = Ri$  ou  $u = Gi$ , donc  $P = Ri^2 = Gu^2$ .

*La puissance thermique produite dans un conducteur ohmique est donc :*

$$\mathcal{P}_{th} = Ri^2 = Gu^2. \quad (10.20)$$

L'énergie thermique produite pendant un temps infinitésimal  $dt$  est donc  $\delta W_{th} = Ri^2 dt = Gu^2 dt$ . Si le régime est stationnaire, la chaleur reçue par le conducteur ohmique vaut  $Q = -Ri^2 t = -Gu^2 t$ .

### 10.7.2 Cas d'un dipôle quelconque

L'effet Joule est la production d'énergie thermique dans un dipôle. Il concerne tous les dipôles. Par définition, la résistance d'un dipôle dans lequel la puissance thermique produite est  $\mathcal{P}_{th}$  pour une intensité  $i$  traversant ce dipôle est  $R = \frac{\mathcal{P}_{th}}{i^2}$ . La loi de Joule s'écrit donc pour un dipôle quelconque  $\mathcal{P}_{th} = Ri^2$ , mais elle ne s'écrit  $\mathcal{P}_{th} = Gu^2$  que pour un conducteur ohmique. De même, en régime stationnaire  $Q = -Ri^2 t$ , mais  $Q = -Gu^2 t$  n'est valable que pour un conducteur ohmique.

## 10.8 Exercices

- Exercice 10.1** (Loi de joule locale). 1. On donne la masse de l'électron  $m = 9.11 \times 10^{-31}$  kg, la charge élémentaire  $e = 1.60 \times 10^{-19}$  C, la masse molaire atomique de l'argent  $M = 108$  g mol<sup>-1</sup> et la masse volumique de l'argent  $M_V = 10.5$  g<sup>3</sup> cm<sup>-1</sup>. En admettant qu'il y a un électron libre par atome d'argent, calculer la concentration  $n$  des électrons libres dans ce métal.
2. La conductivité de l'argent étant  $\sigma = 61.8$  μS m<sup>-1</sup>, déterminer la norme de la vitesse moyenne des électrons libres pour une densité de courant de norme  $j = 20.0$  A m<sup>-2</sup>, puis la mobilité  $\mu$  de ces électrons libres dans l'argent.
3. Exprimer avec  $j$ ,  $\sigma$  et  $n$  la puissance de la force exercée par le champ électrique sur un porteur de charge, puis, avec  $j$  et  $\sigma$ , le rapport  $\frac{dP}{dV}$ ,  $dP$  étant la puissance électrocinétique que reçoivent les électrons libres d'un volume élémentaire  $dV$ . Cette dernière formule exprime la loi de Joule locale.



4. Retrouver la loi de Joule macroscopique  $P = Ri^2$  à partir de la loi de Joule locale.

**Exercice 10.2** (Association de résistances). 1. Les douze arêtes d'un cube sont constituées par des résistance identiques de valeur  $r$  chacune. Le cube est relié au circuit extérieur par deux sommets opposés. Exprimer la résistance équivalente de ce cube avec  $r$  (On utilisera des symétries pour chercher comment on divise l'intensité totale entre les différentes arêtes).

2. On considère un grillage formé de seize carrés dont les côtés ont chacun une résistance  $r$ . Ce réseau est connecté au circuit extérieur par des sommets opposés. Exprimer la résistance équivalente de ce grillage avec  $r$  (On montrera d'abord à l'aide des symétries, l'équivalence entre les deux réseaux ci-dessous, puis on utilisera les lois sur les associations de résistance et le théorème de Kennelly).

**Exercice 10.3** (Résistance d'une prise de terre). Deux sphères métalliques concentriques en un point  $O$ , de rayons  $r_1$  et  $r_2$ , supposées parfaitement conductrices, sont séparées par un milieu peu conducteur de résistivité  $\rho$ . On établit entre ces deux sphères une différence de potentiel.

Quelles sont les surfaces équipotentielles et quelles sont les lignes de ce champ électrique ?

Calculer la résistance  $R$  du conducteur situé entre les deux sphères. On exprimera d'abord la résistance d'un tronc de cône élémentaire, de sommet  $O$ , limité par les sphères de rayon  $r$  et  $r+dr$ , que l'on assimilera à un cylindre de section  $dS$ ; puis on effectuera les intégrations nécessaires pour calculer  $R$ .

Que devient  $R$  lorsque  $r_2$  tend à l'infini ?

Application numérique pour  $r_1 = 10$  cm et  $\rho = 10^3 \Omega \text{ m}$  (sol argileux).

**Exercice 10.4** (Diviseur de courant en cascade). 1. Quelle est, exprimée en avec  $G$ , la conductance  $G_k$  équivalente au groupement de conducteurs ohmiques à droite des points  $A_k$  et  $B_k$  pour  $k$  allant de 1 à 3 ?

2. Montrer que pour tout naturel non nul  $k$  on a :  $G_k = \frac{x_{k+1}}{x_k} G$ , où  $(x_k)$  est la suite de Fibonacci définie par  $x_2 = x_1 = 1$  et  $x_k = x_{k-1} + x_{k-2}$  pour  $k \geq 3$ .
3. Lorsque  $k$  tend vers l'infini, le rapport  $\frac{x_{k+1}}{x_k}$  converge vers une limite finie. Calculer cette limite et donner la valeur de  $G_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} G_k$  en fonction de  $G$ .
4. On note  $i_k$  l'intensité entrant par  $A_k$  et sortant par  $B_k$ . Calculer le rapport  $\frac{i_{k-1}}{i_k}$  avec  $G$  et  $G_{k-1}$ , en utilisant la formule du diviseur de courant, puis avec les termes  $x_{2k+1}$  et  $x_{2k-1}$  de la suite de Fibonacci.

## 10.8. Exercices

---

5. En déduire que le rapport  $\frac{i_n}{i_0}$  de l'intensité du courant d'entrée à l'intensité du courant de sortie du quadripôle représenté  $(A_n, B_n, A_0, B_0)$  est égal à l'un des termes de la suite de Fibonacci, lequel ?

# Chapitre 11

## Dipôles électrocinétiques

### Sommaire

---

<b>11.1 Dipôle électrocinétique, puissance électrocinétique</b>	<b>106</b>
11.1.1 Circuits étudiés . . . . .	106
11.1.2 Transformations d'énergie dans un dipôle . . . . .	106
<b>11.2 Caractéristique courant tension d'un dipôle . .</b>	<b>107</b>
11.2.1 Définition . . . . .	107
11.2.2 Exemples de caractéristiques de dipôles . . . . .	107
11.2.3 Dipôles linéaires . . . . .	107
<b>11.3 Dipôles linéaires idéaux . . . . .</b>	<b>107</b>
11.3.1 Sources de tension . . . . .	107
11.3.2 Sources de courant . . . . .	108
11.3.3 Auto-inductance pure . . . . .	108
11.3.4 Capacité pure . . . . .	108
<b>11.4 Bobines et condensateurs réels . . . . .</b>	<b>109</b>
11.4.1 Bobine de résistance non négligeable . . . . .	109
11.4.2 Condensateur réel avec conductance de fuite . . . . .	109
<b>11.5 Générateurs et récepteurs linéaires . . . . .</b>	<b>109</b>
11.5.1 Modèle de Thévenin . . . . .	109
11.5.2 Modèle de Norton . . . . .	109
11.5.3 Équivalence des deux modèles . . . . .	109
11.5.4 Puissance électrocinétique reçue, puissance électrocinétique engendrée, différents types de fonctionnement . . . . .	110
11.5.5 Cas d'un dipôle non linéaire possédant une caractéristique . . . . .	110
11.5.6 Récepteurs (électrolyseurs, moteurs électriques) non polarisés . . . . .	111
<b>11.6 Loi d'Ohm généralisée, signe de la force électromotrice . . . . .</b>	<b>111</b>

---

## 11.1 Dipôle électrocinétique, puissance électrocinétique

### 11.1.1 Circuits étudiés

On ne considérera ici que des circuits dans lesquels les dipôles seront reliés entre eux par des fils que l'on assimilera à de simples lignes conductrices, le plus souvent, de résistances négligeables (de conductances infinies). La tension entre les deux extrémités d'un fil sera alors nulle. Un dipôle sera donc limité par deux équipotentielles assimilables à des points. Chaque dipôle sera donc couplé électriquement au reste du circuit. Avec la convention récepteur, la puissance électrocinétique que reçoit un dipôle de la part du reste du circuit est  $P = ui$ .

La charge entrant par A pendant  $dt$  est  $dq = idt$ , la charge sortant par B pendant  $dt$  est la même (ARQS). L'énergie électrocinétique reçue par le dipôle pendant  $dt$  est  $\delta W = Pdt = uidt = udq$ . Avec la convention générateur (flèche  $u$  inversée), on a bien sûr  $P = -ui$  et  $\delta W = -uidt$ . On se placera toujours dans des conditions telles que l'on puisse appliquer l'approximation des régimes quasi stationnaires. La température d'un dipôle sera considérée comme constante, sa résistance le sera donc aussi. Toute l'énergie thermique produite par effet Joule sera donc évacuée sous forme de chaleur  $P_{th} = Ri^2$  et  $\delta W_{th} = Ri^2dt = -\delta Q$ , si  $R$  est la résistance du dipôle.

### 11.1.2 Transformations d'énergie dans un dipôle

En plus du couplage électrique avec le reste du circuit et du couplage thermique avec l'extérieur, le dipôle peut être couplé au milieu extérieur de différentes façons :

- Couplage mécanique pour un moteur ou un alternateur comme une transformation d'énergie électrocinétique en énergie mécanique ou l'inverse ;
- Couplage chimique pour un électrolyseur ou une pile comme une transformation d'énergie électrocinétique en énergie chimique ou l'inverse ;
- Couplage par rayonnement dans le cas d'un photopile ;
- Couplage électromagnétique ...

Dans tous les cas l'énergie électrocinétique reçue sera intégralement transformée en autres formes d'énergie :

- en énergie thermique uniquement pour un conducteur ohmique ;
- en énergie thermique et en une autre forme d'énergie (chimique, mécanique, électromagnétique), cédée à l'extérieur ou accumulée dans le dipôle pour les autres dipôles.

Ceci est valable au sens algébrique du terme, un récepteur reçoit de l'énergie électrocinétique alors qu'un générateur peut en fournir au reste du

circuit. On reviendra sur ces notions de générateur et de récepteur plus loin dans ce chapitre.

## 11.2 Caractéristique courant tension d'un dipôle

### 11.2.1 Définition

Lorsque la caractéristique existe, c'est la relation (éventuellement la fonction) qui à  $i$  fait correspondre  $u$ , ou celle qui à  $u$  fait correspondre  $i$ . Un dipôle possédant une caractéristique est linéaire si sa caractéristique est une droite. Il est symétrique si  $u(-i) = -u(i)$  (fonction impaire). Les deux bornes du dipôle sont alors équivalentes.

Il est actif si pour  $i = 0$ ,  $u \neq 0$ . Lorsqu'il est passif, sa caractéristique passe par l'origine des axes. Le point de fonctionnement d'un dipôle est le point de coordonnées  $(u, i)$  correspondant à son fonctionnement dans le circuit considéré. Beaucoup de dipôles n'ont pas de caractéristique, c'est par exemple le cas si la relation entre  $u$  et  $i$  est une équation différentielle comme par exemple pour une bobine  $u = L \frac{di}{dt}$ .

### 11.2.2 Exemples de caractéristiques de dipôles

#### 11.2.3 Dipôles linéaires

Un dipôle est linéaire si et seulement si  $u$  est une fonction affine de  $i$  ou est lié à  $i$  par une équation différentielle linéaire. En régime stationnaire, les dipôles linéaires sont les conducteurs ohmiques ( $u = Ri$ ) et les générateurs et récepteurs linéaires ( $u = Ri - e$  avec la convention récepteur). En régime quasi-stationnaire il faut ajouter les bobines et les condensateurs.

## 11.3 Dipôles linéaires idéaux

### 11.3.1 Sources de tension

Ce sont des générateurs (ou récepteurs) idéaux pour lesquels la tension entre les bornes est indépendante de l'intensité du courant qui les traverse. Le tension  $e$  est la force électromotrice (force électro-motrice) de la source de tension. C'est la tension constante entre ses bornes, fléchée habituellement dans le même sens que le courant  $i$ . C'est un dipôle actif, non symétrique, ses deux bornes (ou pôles) sont différents : Si  $e > 0$ , le pôle  $+$  est du côté de la pointe de la flèche représentant la force électro-motrice. Avec la convention récepteur, l'équation de la caractéristique est quelque soit le courant  $i$  :  $u = -e$ . La puissance électrocinétique est  $P = -ei$ .

Son opposé est la puissance électrocinétique engendrée :  $P' = ei$ . Lorsqu'elle est positive, ( $e$  et  $i$  de même signe), la source transforme de l'énergie

### 11.3. Dipôles linéaires idéaux

---

chimique, mécanique ou autre en énergie électrocinétique qu'elle fournit au reste du circuit. Il s'agit donc alors d'un générateur. Si c'est  $P$  qui est positive ( $P' < 0$ ), elle transforme de l'énergie électrocinétique qu'elle reçoit du reste du circuit en énergie chimique, mécanique ou autre. Il s'agit alors d'un récepteur.

#### 11.3.2 Sources de courant

Ce sont des générateurs (ou récepteurs) idéaux pour lesquels l'intensité du courant qui les traverse est indépendante de la tension entre les bornes.

$\eta$  est le courant électromoteur (c.é.m.) de la source de courant. C'est l'intensité constante qui traverse la source de courant, fléchée habituellement dans le même sens que  $i$ . C'est un dipôle actif, non symétrique, ses deux bornes (ou pôles) sont différents : Si  $\eta > 0$ , le pôle + est du côté de la pointe de la flèche représentant le c.é.m. Avec la convention récepteur, l'équation de la caractéristique est quelque soit la tension  $u$  :  $i = \eta$ . La puissance électrocinétique reçue est  $P = ui = u\eta$ . Lorsqu'elle est négative, ( $u$  et  $\eta$  de signe opposés), la source transforme de l'énergie chimique, mécanique ou autre en énergie électrocinétique qu'elle fournit au reste du circuit. Il s'agit donc alors d'un générateur. Son opposé est la puissance électrocinétique engendrée :  $P' = -u\eta$ . Si c'est  $P'$  qui est positive ( $P < 0$ ), elle transforme de l'énergie électrocinétique qu'elle reçoit du reste du circuit en énergie chimique, mécanique ou autre. Il s'agit alors d'un récepteur.

#### 11.3.3 Auto-inductance pure

Il s'agit du cas idéal d'une bobine de résistance nulle. Dans le cours de deuxième année, on démontrera que si le courant  $i$  varie, la bobine est le siège d'un phénomène d'auto-induction. La force électro-motrice d'auto-induction est  $e = -L \frac{di}{dt}$ . La relation entre  $u$  et  $i$  est donc l'équation différentielle linéaire :  $u = L \frac{di}{dt}$ . C'est donc une source de tension variable puisque sa force électro-motrice dépend des variations de  $i$  au cours du temps.

#### 11.3.4 Capacité pure

Il s'agit du cas idéal d'un condensateur parfait, c'est-à-dire parfaitement isolant (de conductance nulle). Par définition de la capacité d'un condensateur,  $q = Cu$ .  $q$  étant la charge accumulée sur l'armature où arrive le courant d'intensité  $i$  donc  $i = \frac{dq}{dt}$  et la relation entre  $i$  et  $u$  est l'équation différentielle linéaire :  $i = C \frac{du}{dt}$ . On peut considérer que c'est une source de courant variable puisque son c.é.m. dépend des variations de  $u$  au cours du temps.

## 11.4 Bobines et condensateurs réels

### 11.4.1 Bobine de résistance non négligeable

On peut l'assimiler à une auto-inductance pure en série avec un conducteur ohmique. En réalité, il faudrait modéliser la bobine en ajoutant en parallèle une capacité due au vernis isolant qui se trouve entre les spires. Mais cette capacité est négligeable pour des fréquences pas trop élevées. D'autre part, pour une bobine avec noyau de fer, si le courant est intense,  $L$  varie avec  $i$  et le dipôle n'est donc plus linéaire. Par addition des tensions aux bornes des deux dipôles élémentaires imaginaires  $R$  et  $L$ , on a donc :

$$u = L \frac{di}{dt} + Ri.$$

### 11.4.2 Condensateur réel avec conductance de fuite

Si le diélectrique d'un condensateur n'est pas un isolant parfait, un courant le traverse. On peut alors le modéliser comme une capacité pure en parallèle avec un conducteur ohmique. La loi des nœuds donne :  $i = Gu + C \frac{du}{dt}$ .

## 11.5 Générateurs et récepteurs linéaires

Tout générateur ou récepteur linéaire peut être modélisé de deux façons différentes.

### 11.5.1 Modèle de Thévenin

Avec la convention récepteur et  $e$  fléché dans le même sens que  $i$ , l'équation de la caractéristique est  $u = Ri - e$ . Si le pôle + est du côté de la pointe de la flèche  $e$ , alors  $e > 0$ . C'est à ce cas que correspond le tracé ci-dessus.

### 11.5.2 Modèle de Norton

Avec la convention récepteur et  $\eta$  fléché dans le même sens que  $i$ , l'équation de la caractéristique est  $i = Gu + \eta$ . Si le c.é.m.  $\eta$  est fléché comme sortant du pôle +, alors  $\eta > 0$ . C'est à ce cas que correspond le tracé ci-dessus.

### 11.5.3 Équivalence des deux modèles

Les deux modèles représentent donc le même dipôle si et seulement si  $G = \frac{1}{R}$  et  $e = R\eta$ . La tension à vide est la valeur de  $u$  pour  $i = 0$ , (coupe circuit dans sa branche). On la mesure en plaçant directement un voltmètre (de résistance infinie) entre les bornes du dipôle non connecté à un circuit. Sa valeur est  $-e = -R\eta = -\frac{\eta}{G}$ .

L'intensité du courant de court-circuit est la valeur de  $i$  pour  $u = 0$  (court-circuit réalisé en reliant les deux bornes avec un conducteur ohmiques de résistance négligeable). On la mesure en plaçant directement un ampèremètre (de conductance infinie) entre les bornes du dipôle. Sa valeur est  $\eta = Ge = \frac{e}{R}$ .

#### 11.5.4 Puissance électrocinétique reçue, puissance électrocinétique engendrée, différents types de fonctionnement

La puissance électrocinétique reçue par le dipôle est  $P = ui = Ri^2 - ei = P_{th} - P'$ . Il cède donc au reste du circuit  $-P = P' - P_{th}$  : il cède la puissance électrocinétique qu'il engendre diminuée de celle qu'il consomme par effet Joule. Toutes les grandeurs sont en fait algébriques dans ces relations, sauf bien sûr  $P_{th} > 0$ .

Étudions le cas où  $e > 0$  ( $\eta > 0$ ) ; il y a trois fonctionnements possibles : Si  $i > 0$  et  $u < 0$ , alors  $P' > 0$  et  $-P > 0$ , avec  $-P < P'$ . C'est le cas habituel d'un générateur qui engendre effectivement de la puissance électrocinétique, qui en fournit une partie au reste du circuit et qui dissipe le reste par effet Joule.

Si  $i < 0$ , et  $u < 0$ , alors  $P > 0$  et  $P' < 0$ . C'est le cas d'un fonctionnement en récepteur ; le dipôle consomme de la puissance électrocinétique par effet joule et par un autre effet (chimique, mécanique...). Ce récepteur peut être un "générateur monté en opposition",  $i < 0$  étant imposé par un autre générateur de force électro-motrice plus grande (en valeur absolue), les deux pôles + étant reliés entre eux.

Si  $i > 0$  et  $u > 0$ , alors  $P > 0$  et  $P' > 0$  avec  $P > P'$ . On a dans ce cas  $i > \eta$ , l'intensité du courant est plus grande que celle du courant de court-circuit (avec souvent un risque de détérioration du fait d'un effet Joule intense). C'est le cas exceptionnel d'un générateur qui engendre effectivement de la puissance électrocinétique mais qui en consomme par effet Joule plus qu'il n'en engendre. Ce n'est possible que s'il est monté en série avec un autre générateur de force électro-motrice grande et de résistance petite (son pôle - est relié au pôle + de l'autre).

#### 11.5.5 Cas d'un dipôle non linéaire possédant une caractéristique

C'est en fait le cas habituel pour les générateurs et récepteurs réels. On peut, au voisinage du point de fonctionnement assimiler la caractéristique à sa tangente et écrire suivant la modélisation choisie  $u = Ri - e$  ou  $i = Gu + \eta$ . La caractéristique est "linéarisée". Mais alors,  $R$  (ou  $G$ ) et  $e$  (ou  $\eta$ ) dépendent du point de fonctionnement.



### 11.5.6 Récepteurs (électrolyseurs, moteurs électriques) non polarisés

Il s'agit de récepteurs symétriques, leurs deux bornes sont identiques.

$E' > 0$  est la force contre électromotrice (f.c.é.m.) du récepteur. La caractéristique comporte trois parties linéaires :

$$i > 0, u = Ri + E' \quad (u > E') \quad (11.1)$$

$$i < 0, u = Ri - E' \quad (u < -E') \quad (11.2)$$

$$i = 0, -E' < u < E'. \quad (11.3)$$

La puissance utile, c'est-à-dire la puissance électrocinétique transformée en puissance chimique ou mécanique est  $P_u = E' |i|$ . Elle est toujours positive. La puissance électrocinétique reçue est  $P = ui = Ri^2 + E' |i| = P_{th} + P_u$ .

## 11.6 Loi d'Ohm généralisée, signe de la force électro-motrice

Finalement, tout récepteur ou générateur polarisé ou non, si sa caractéristique est linéaire dans le domaine du point de fonctionnement, peut être modélisé par la représentation de Thévenin ou par celle de Norton et suit la loi d'Ohm généralisée qui s'écrit, avec la convention récepteur avec  $i$ ,  $e$ , et  $\eta$  fléchés dans le même sens :  $u = Ri - e$  ou  $i = Gu + \eta$ .

Si le dipôle est polarisé, alors le signe de  $e$  est constant : avec  $e$  fléché de  $A$  vers  $B$ ,  $e = eAB$  on a  $e > 0$  si  $B$  est le pôle plus, et  $e < 0$  si  $B$  est le pôle moins. De même pour le signe de  $\eta$ .

Si le dipôle n'est pas polarisé, alors le signe de  $e$  (ou de  $\eta$ ) change avec celui de  $i$  : si  $i > 0$ ,  $e = -E'$ . Si  $i < 0$ ,  $e = E'$ . On a bien dans ces deux cas  $u = Ri - e$ .

La puissance utile s'écrit donc aussi  $P_u = -ei$ . Elle est toujours positive car un récepteur non polarisé ne peut fonctionner qu'en récepteur. On a donc toujours  $ei < 0$ .



# Chapitre 12

## Régimes transitoires

### Sommaire

---

<b>12.1 Régime continu . . . . .</b>	<b>114</b>
12.1.1 Définitions . . . . .	114
12.1.2 Loi de Pouillet . . . . .	114
12.1.3 Circuits complexes . . . . .	115
<b>12.2 Échelon de tension . . . . .</b>	<b>115</b>
<b>12.3 Dipôle R, L série soumis à un échelon de tension</b>	<b>115</b>
12.3.1 Schéma, équation différentielle . . . . .	115
12.3.2 Établissement du courant . . . . .	116
12.3.3 Constante de temps . . . . .	116
12.3.4 Arrêt du courant . . . . .	117
12.3.5 Aspect Énergétique . . . . .	117
<b>12.4 Dipôle R, C série soumis à un échelon de tension</b>	<b>118</b>
12.4.1 Schéma, équation différentielle . . . . .	118
12.4.2 Charge du condensateur . . . . .	118
12.4.3 Constante de temps . . . . .	118
12.4.4 Décharge du condensateur . . . . .	119
12.4.5 Aspect énergétique . . . . .	119
<b>12.5 Régimes propres du circuit RLC série . . . . .</b>	<b>119</b>
12.5.1 Équation différentielle . . . . .	119
12.5.2 Régime apériodique . . . . .	120
12.5.3 Régime critique . . . . .	121
12.5.4 Régime pseudo-périodique (ou sinusoïdal amorti) .	121
12.5.5 Aspects énergétiques, facteur de qualité . . . . .	122
<b>12.6 Réponse d'un diôle R,L,C série à un échelon de tension . . . . .</b>	<b>123</b>
12.6.1 Équation différentielle . . . . .	123
12.6.2 Régime pseudo périodique . . . . .	124
12.6.3 Aspects énergétiques . . . . .	124
12.6.4 Régime propre et régime transitoire . . . . .	124

---

## 12.1 Régime continu

### 12.1.1 Définitions

En "régime continu" (ou stationnaire), les tensions et les intensités sont constantes. Le régime continu a un début et une fin qui ne peuvent être instantanés pour deux raisons :

- Continuité de  $i_L = f(t)$  dans toute portion de circuit inductive car la tension  $u_L = L \frac{di_L}{dt}$  ne peut être infinie ;
- Continuité de la charge  $q(t)$  accumulée sur une armature de condensateur, et donc aussi de la tension entre les armatures  $u_c(t) = \frac{q}{C}$ , pour toute portion de circuit capacitive car l'intensité  $i_C = C \frac{du_c}{dt}$  ne peut être infinie.

Le régime continu est donc précédé et suivi de "régimes transitoires". On verra que pour les circuits ne comportant que des dipôles linéaires, intensités et tensions sont solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants. Chaque solution est la somme de deux fonctions, l'une correspondant au régime continu, l'autre s'amortissant au cours du temps, souvent rapidement, elle correspond donc au régime transitoire et disparaît en régime continu.

### 12.1.2 Loi de Pouillet

Pour un circuit simple, (c'est-à-dire sans nœuds), ne comportant que des dipôles linéaires, en régime continu :

- l'intensité  $i_L$  est constante donc  $u_L = L \frac{di}{dt} = 0$ , une inductance pure équivaut à un court-circuit.
- la tension  $u_C$  entre les armatures d'un condensateur est constante, donc  $q = Cu_C$  est constante et  $i_c = C \frac{du_C}{dt} = 0$ , un condensateur pur équivaut à un coupe-circuit.

Les circuits simples en continu sont donc du type suivant :

On choisit un sens positif pour le courant (ici le sens trigonométrique), les f.é.m. fléchées dans ce sens sont :  $e_1 = E_1$ ,  $e_2 = -E_2$ ,  $e_3 = -E_3$ . Avec la loi d'Ohm et la loi des mailles, on obtient :

$$R_4 i - e_3 + R_1 i + R_2 i - e_1 + R_3 i - e_2 = 0. \quad (12.1)$$

D'où la loi de Pouillet :

$$i = \frac{\sum_j e_j}{\sum_k R_k}, \quad (12.2)$$

avec les  $e$  fléchés dans le même sens que  $i$ .

Si le circuit comporte un récepteur non polarisé, de f.c.é.m.  $E'$ , on suppose  $i > 0$  donc  $e = -E'$ . Si on trouve  $i < 0$ , on recommence avec  $i < 0$

donc  $e = E'$ . Si on obtient  $i > 0$ , c'est que le récepteur ne fonctionne pas (sources insuffisantes).

### 12.1.3 Circuits complexes

S'ils ne comportent que des dipôles linéaires, on peut les réduire à des circuits simples avec les lois sur les associations de conducteurs ohmiques, l'équivalence triangle étoile, l'équivalence entre générateurs de Norton et générateurs de Thévenin ... On applique ensuite la loi de Pouillet. On peut aussi utiliser les lois de Kirchhoff pour écrire le nombre d'équations nécessaire à la résolution du problème. On verra encore d'autres méthodes ...

S'ils comportent des dipôles non linéaires, on doit appliquer des méthodes graphiques qui aboutissent à l'obtention du point de fonctionnement à l'intersection de deux caractéristiques.

## 12.2 Échelon de tension

Un échelon de tension est une fonction du type :

$$e: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ E & t > t_0 \end{cases} \end{cases} \quad (12.3)$$

La fonction  $e$  n'est pas définie en  $t_0$ . Il correspond à la mise en marche brutale d'une source de tension qui était jusqu'alors court-circuitée, mais en pratique, le temps de montée de 0 à  $E$  ne peut être tout à fait nul. On obtient des échelons de tension presque parfaits avec certains dispositifs électroniques. On peut décrire mathématiquement l'échelon de tension avec la fonction de Heaviside.

On étudiera dans la suite la réponse de différents dipôles en série soumis à des échelons de tension et dans tous les cas, on supposera que le régime stationnaire était atteint à la date  $t = 0$ , ce qui permettra d'obtenir la condition initiale pour  $t > 0$ .

## 12.3 Dipôle R, L série soumis à un échelon de tension

### 12.3.1 Schéma, équation différentielle

On supposera que  $L$  et  $R$  sont des constantes. L'équation différentielle s'écrit grâce à la loi des mailles :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = e(t). \quad (12.4)$$

Ainsi, pour  $t < 0$ ,  $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$  et pour  $t > 0$ ,  $L \frac{di}{dt} + Ri = E$ . Si le régime stationnaire est atteint pour  $t < 0$ , alors  $\frac{di}{dt} = 0$  et  $i = 0$ . Mais  $i$  est une fonction continue de  $t$  car ce courant passe dans une bobine donc  $\lim_{t \rightarrow 0^+} i = 0$ .

### 12.3.2 Établissement du courant

On résout l'équation différentielle pour  $t > 0$ . L'équation homogène (ou "sans second membre") s'écrit

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0 \quad (12.5)$$

soit en séparant les variables :

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt, \quad (12.6)$$

d'où en intégrant :

$$\ln \left( \frac{i}{A} \right) = -\frac{R}{L} t. \quad (12.7)$$

Ainsi Donc la solution générale de l'équation homogène est :

$$i = A \exp \left( -\frac{R}{L} t \right) \quad (12.8)$$

La constante d'intégration  $A$  est une intensité. Une solution particulière évidente de l'équation complète est  $i = \frac{E}{R}$ . Par conséquent :

$$i = \frac{E}{R} + A \exp \left( -\frac{R}{L} t \right). \quad (12.9)$$

La condition initiale  $\lim_{t \rightarrow 0^+} i = 0$  donne la constante :  $A = -\frac{E}{R}$ . L'établissement du courant dans le circuit se fait donc suivant la loi :

$$i = \frac{E}{R} \left( 1 - \exp \left( -\frac{R}{L} t \right) \right). \quad (12.10)$$

La courbe présente donc une asymptote,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} i = \frac{E}{R}$ . Elle correspond au régime stationnaire.

### 12.3.3 Constante de temps

La constante de temps du dipôle R, L série est  $\tau = \frac{L}{R}$  donc, pendant l'établissement du courant dans le circuit  $i = \frac{E}{R} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$  et  $\frac{di}{dt} = \frac{E}{L} \exp(-\frac{t}{\tau})$  donc  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{di}{dt} = \frac{E}{L}$ . La tangente à l'origine a pour équation  $\frac{E}{L} t$ , elle coupe l'asymptote pour  $t = \frac{L}{R}$  soit  $t = \tau$ . Des ordres de grandeur de la constante de temps sont :

- Si  $L = 2 \text{ H}$  et  $R = 10 \Omega$ , alors  $\tau = 0.2 \text{ s}$  ;
- Si  $L = 20 \text{ mH}$  et  $R = 1 \text{ k}\Omega$ , alors  $\tau = 20 \mu\text{s}$ .

Le temps de montée est le temps pour passer de 10 % à 90 % de  $i$  maximal. Donc  $t_M = t_2 - t_1$ , donc  $t_M = \tau \ln(9)$  soit  $t_M = 2.2\tau$ . Le temps de réponse à 5 % est le temps nécessaire pour que l'écart avec la valeur finale soit inférieur à 5 %, donc  $\tau_R = \tau \ln(20) = 3\tau$ .

#### 12.3.4 Arrêt du courant

Si, après que le régime stationnaire se soit établi dans le circuit, la source est court-circuitée à partir de  $t = 0$ , c'est-à-dire :  $e(t) = EY(-t)$ , on a alors  $\lim_{t \rightarrow 0^+} i = \frac{E}{R}$  et, pour  $t > 0$  l'équation différentielle est l'équation homogène :

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0, \quad (12.11)$$

l'arrêt du courant dans le circuit suit donc la loi :

$$i = -\frac{E}{R} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right). \quad (12.12)$$

L'asymptote est  $i = 0$ , elle correspond au régime stationnaire.

#### 12.3.5 Aspect Énergétique

La puissance fournie par la source est  $ei = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$ . Pendant l'établissement du courant dans le circuit, l'énergie fournie par la source est :

$$\int_0^t E i dt = \int_0^t Ri^2 dt + \int_0^t Li \frac{di}{dt} dt. \quad (12.13)$$

On voit que cette énergie est consommée en partie par effet Joule dans le conducteur ohmique et en partie stockée dans la bobine sous forme d'énergie électromagnétique (magnétique). L'énergie stockée dans la bobine est  $W_m = \int_0^t Li di$ . L'énergie électromagnétique stockée dans la bobine est  $W_m = \frac{Li^2}{2}$ . Quand le régime stationnaire est atteint la bobine a accumulé une énergie  $\lim_{\infty} W_m = \frac{LE^2}{2R^2}$ , cette énergie est restituée sous forme électrocinétique pendant la phase d'arrêt du courant et finalement transformée en chaleur par effet Joule dans le conducteur ohmique.

## 12.4 Dipôle R, C série soumis à un échelon de tension

### 12.4.1 Schéma, équation différentielle

On a  $i = \frac{dq}{dt}$ . L'équation différentielle s'écrit donc grâce à la loi des mailles :

$$R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = e(t). \quad (12.14)$$

Pour  $t < 0$ , on a  $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$  et pour  $t > 0$   $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$ . Si le régime stationnaire est atteint pour  $t < 0$ ,  $\frac{dq}{dt} = 0$  et  $q = 0$ . Mais  $q$  est une fonction continue du temps donc  $\lim_{t \rightarrow 0} q = 0$ .

### 12.4.2 Charge du condensateur

On résout l'équation différentielle pour  $t > 0$  : L'équation homogène s'écrit  $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ . En séparant les variables, on obtient  $\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC}$ . Soit en intégrant en posant  $A$  la constante d'intégration :  $\ln |q| = -\frac{t}{RC}$ . Ainsi, la solution de l'équation homogène est :

$$q = A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (12.15)$$

Une solution particulière évidente de l'équation complète est  $q = CE$ . La solution complète s'exprime donc :

$$q = CE + A \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (12.16)$$

La condition initiale  $\lim_{t \rightarrow 0} q = 0$  donne la constante  $A = -CE$ . Ainsi :

$$q = CE \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right). \quad (12.17)$$

La courbe représentative de  $q$  en fonction du temps possède donc une asymptote. Elle correspond au régime stationnaire. L'intensité est  $i = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$ .

### 12.4.3 Constante de temps

La constante de temps du dipôle R,C série est  $\tau = RC$ . Pendant la charge du condensateur :

$$q = CE(1 - \exp(-t/\tau)), \quad (12.18)$$



et  $i = \frac{E}{R} \exp(-t/\tau)$ . La limite en zéro du courant vaut  $\frac{E}{R}$ , donc la tangente à l'origine de  $q$  a pour équation  $\frac{E}{R}t$ . La tangente à l'origine coupe l'asymptote pour une valeur de  $t = \tau$ . Le temps de montée est le temps pour passer de 10% à 90 % de  $q_{max}$ , soit  $t_M = 2.2\tau$ . Le temps de réponse à 5% est le temps nécessaire pour que l'écart avec la valeur finale soit inférieure à 5%. Donc  $t_r = 3\tau$ .

#### 12.4.4 Décharge du condensateur

Si, après que le régime stationnaire se soit établi dans le circuit, la source est court-circuitée à partir de  $t = 0$ , (c'est-à-dire :  $e(t) = EY(-t)$ ), on a alors  $\lim_0 q = CE$  et, pour  $t > 0$  l'équation différentielle est l'équation homogène  $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ , sa solution générale est donc  $q = CE \exp(-t/\tau)$ . La décharge du condensateur suit donc la loi  $q = CE \exp -t/\tau$ . L'asymptote est  $q = 0$ , elle correspond au régime stationnaire. On a alors  $i = 0$ .

#### 12.4.5 Aspect énergétique

La puissance fournie par la source est  $ei = Ri^2 + \frac{q}{C} \frac{dq}{dt}$ . Pendant l'établissement du courant dans le circuit, l'énergie fournie par la source est :

$$\int_0^t E i dt = \int_0^t Ri^2 dt + \int_0^t \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} dt. \quad (12.19)$$

On voit que cette énergie est consommée en partie par effet Joule dans le conducteur ohmique et en partie stockée dans le condensateur sous forme d'énergie électromagnétique (électrostatique). L'énergie stockée dans le condensateur est  $W_e = \int_0^t \frac{q}{C} \frac{dq}{dt} dt = \frac{q^2}{2C}$ . La source a fourni l'énergie  $W' = Eq$ . Quand le régime stationnaire est atteint le condensateur a accumulé une énergie  $\frac{CE^2}{2}$ , alors que la source a fourni  $W' = CE^2$ . Le condensateur accumule donc la moitié de l'énergie fournie par la source, l'autre moitié est dissipée par effet Joule dans le conducteur ohmique. Cette énergie accumulée est restituée sous forme électrocinétique pendant la décharge du condensateur et finalement transformée en chaleur par effet Joule dans le conducteur ohmique.

## 12.5 Régimes propres du circuit RLC série

### 12.5.1 Équation différentielle

On parle de régime libre lorsqu'il n'y a pas de générateur dans le circuit. On a au préalable chargé le condensateur ou fait circuler un courant dans la bobine pour accumuler de l'énergie dans l'un de ces deux dipôles (ou dans

## 12.5. Régimes propres du circuit RLC série

---

les deux). On supposera que  $R$ ,  $L$  et  $C$  sont des constantes. On a  $i = \frac{dq}{dt}$  et  $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ . Ainsi

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (12.20)$$

ou

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = 0. \quad (12.21)$$

C'est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants. On pose en général :  $\lambda = \frac{R}{2L}$  qu'on appelle coefficient d'amortissement et  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . appelée la pulsation propre. La pulsation propre vérifie donc la formule de Thomson :  $LC\omega_0^2 = 1$ . On a alors :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (12.22)$$

L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est  $x^2 + 2\lambda x + \omega_0^2 = 0$ . Son discriminant réduit est  $\delta = \lambda^2 - \omega_0^2$  (c'est  $\frac{\Delta}{4}$ ). Il est nul pour  $\lambda = \omega_0$ , soit pour une valeur de  $R$  appelée résistance critique :  $R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$ . Pour  $L$  et  $C$  fixés,  $\delta > 0$  si  $R > R_c$ .

### 12.5.2 Régime aperiodique

Lorsque  $\delta > 0$ , l'équation caractéristique possède deux racines réelles négatives :  $x_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ . La solution de l'équation différentielle s'écrit :  $q(t) = A \exp(-\alpha t) + B \exp(-\beta t)$ , avec  $\alpha = -x_1$  et  $\beta = -x_2$ ,  $\alpha > \beta > 0$ . En dérivant la charge, le courant vaut

$$i(t) = -A\alpha \exp(-\alpha t) - B\beta \exp(-\beta t). \quad (12.23)$$

Si les conditions initiales à  $t = 0$  sont  $q = q_0$  et  $i = 0$ , alors les deux constantes d'intégrations valent  $A = -\frac{q_0\beta}{\alpha-\beta}$  et  $B = \frac{q_0\alpha}{\alpha-\beta}$ .

La solution adaptée au problème physique est donc :

$$q(t) = \frac{q_0}{\alpha - \beta} (-\beta \exp(-\alpha t) + \alpha \exp(-\beta t)). \quad (12.24)$$

Ainsi  $i = \frac{dq}{dt} = \frac{q_0\alpha\beta}{\alpha-\beta} (\exp(-\alpha t) - \exp(-\beta t))$  et  $\frac{di}{dt} = \frac{q_0\alpha\beta}{\alpha-\beta} (-\alpha \exp(-\alpha t) + \beta \exp(-\beta t))$ .

On voit que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{di}{dt} = -q_0\alpha\beta$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} q = \lim_{t \rightarrow \infty} i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{di}{dt} = 0$ .

Pour  $t_m = \frac{\ln(\frac{\alpha}{\beta})}{\alpha - \beta}$ , le courant  $i$  est minimal et  $q$  s'infléchit.

### 12.5.3 Régime critique

Si le discriminant réduit,  $\delta = 0$  (*i.e.*  $\lambda = \omega_0$  et  $R = R_c$ ) alors l'équation caractéristique a une racine double réelle  $x = -\lambda = -\omega_0$ . La solution générale de l'équation différentielle s'écrit  $q(t) = (At + B) \exp(-\lambda t)$ . En dérivant temporellement la charge, le courant vaut  $i(t) = (A - \lambda B - \lambda At) \exp(-\lambda t)$ .

Si les conditions initiales sont à  $t = 0$ ,  $q = q_0 > 0$ ,  $i = 0$  alors on a  $B = q_0$  et  $A = \lambda q_0$ . La solution adaptée au problème physique s'écrit donc  $q(t) = q_0(A + \lambda t) \exp(-\lambda t)$ . D'où  $i(t) = -q_0 \lambda^2 t \exp(-\lambda t)$  et  $\frac{di}{dt} = -q_0 \lambda^2 (1 - \lambda t) \exp(-\lambda t)$ .

On voit que  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{di}{dt} = -q_0 \lambda^2$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0$ .

On voit que la dérivée du courant s'annule pour  $t = t_m = \frac{1}{\lambda} = \frac{2L}{R} = \sqrt{LC} = \frac{RC}{2}$ . Le courant passe par un minimum négatif  $i_m = -\frac{q_0 \lambda}{e}$  et  $q$  présente un point d'inflexion. Les graphes sont du même types que pour le régime apériodique, avec un amortissement plus rapide pour des valeurs de  $L$  et de  $C$  identiques.

### 12.5.4 Régime pseudo-périodique (ou sinusoïdal amorti)

Si le discriminant réduit,  $\delta$  est négatif (*i.e.*  $\lambda = \omega_0$  et  $R = R_c$ ) alors l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées :  $x_{1,2} = -\lambda \pm j\sqrt{-\delta}$ . La solution générale de l'équation différentielle (homogène) s'écrit :

$$q(t) = A \exp(x_1 t) + B \exp(x_2 t) = \exp(-\lambda t) (A \exp(-j\sqrt{-\delta} t) + B \exp(j\sqrt{-\delta} t)). \quad (12.25)$$

Seules les solution réelles nous intéressent, alors :

$$q(t) = \exp(-\lambda t) (A \cos(\sqrt{-\delta} t) + B \sin(\sqrt{-\delta} t)). \quad (12.26)$$

On a donc un régime sinusoïdal amorti de pseudo pulsation  $\omega = \sqrt{-\delta} = \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} < \omega_0$  qui vérifie  $\omega^2 + \lambda^2 = \omega_0^2$ . La pseudo période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  est supérieure à la période propre  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

La solution réelle générale s'écrit donc :

$$q(t) = \exp(-\lambda t) (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)). \quad (12.27)$$

Alors le courant vaut :

$$i(t) = \exp(-\lambda t) ((B\omega - A\lambda) \cos(\omega t) - (A\omega + B\lambda) \sin(\omega t)). \quad (12.28)$$

Si les conditions initiales à  $t = 0$  sont  $q = q_0 > 0$ ,  $i = 0$  alors on a :  $A = q_0$  et  $B = q_0 \frac{\lambda}{\omega}$ . La solution adaptée au problème est donc :

$$q(t) = q_0 \exp(-\lambda t) \left( \cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right). \quad (12.29)$$

## 12.5. Régimes propres du circuit RLC série

Alors,  $i(t) = -\exp(-\lambda t) \left( \omega + \frac{\lambda^2}{\omega} \right) \sin(\omega t)$  avec  $\omega + \frac{\lambda^2}{\omega} = \frac{\omega_0^2}{\omega}$  d'où :

$$i(t) = \frac{-q_0 \omega_0^2}{\omega} \exp(-\lambda t) \sin(\omega t), \quad (12.30)$$

et

$$\frac{di}{dt} = \frac{-q_0 \omega_0^2}{\omega} \exp(-\lambda t) (\omega \cos(\omega t) - \lambda \sin(\omega t)). \quad (12.31)$$

La pseudo période est l'intervalle de temps entre deux maxima (ou deux minima, ou deux annulations), avec variation dans le même sens, de  $i$  ou de  $q$ .

En une pseudo période,  $\ln(q)$  et  $\ln(i)$  diminuent de  $\delta_\ell = \ln \left( \frac{q(t)}{q(t+T)} \right) = \ln \left( \frac{\exp(-\lambda t)}{\exp(-\lambda t - \lambda T)} \right) = \lambda T$ .

Cette grandeur est appelée *décrément logarithmique* :  $\delta_\ell = \lambda T$ .

On peut aussi écrire la solution sous la forme :  $q = K \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \phi)$ . Donc :

$$i = -K \exp(-\lambda t) (\lambda \cos(\omega t + \phi) + \omega \sin(\omega t + \phi)) \quad (12.32)$$

En effet,

$$K \exp(-\lambda t) \cos(\omega t + \phi) = \exp(-\lambda t) (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad (12.33)$$

pour  $A = K \cos \phi$  et  $B = -K \sin \phi$ . D'où  $K = \sqrt{A^2 + B^2}$  et  $\phi = -\arctan \left( \frac{B}{A} \right)$ .

Avec les mêmes conditions initiale que précédemment, on obtient :

$$q_0 = K \cos \phi \quad (12.34)$$

$$0 = \lambda \cos \phi + \omega \sin \phi. \quad (12.35)$$

Ainsi  $\cos \phi = \frac{q_0}{K}$  et  $\sin \phi = -\frac{\lambda}{K\omega}$  alors  $\frac{q_0^2}{K^2} + \frac{\lambda^2}{K^2 \omega^2} = \left( \frac{q_0 \omega_0}{K\omega} \right) = 1$ . Si on choisit  $K$  positif, alors  $K = q_0 \frac{\omega_0}{\omega}$ . Alors :

$$\cos \phi = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (12.36)$$

$$\sin \phi = -\frac{\lambda}{\omega_0}, \quad (12.37)$$

alors  $\tan \phi = -\frac{\lambda}{\omega}$ . Comme  $\cos \phi$  est positif,  $\phi = \arctan \left( -\frac{\lambda}{\omega} \right)$ .

On remarquera que la courbe est comprise entre les deux exponentielles  $K \exp(-\lambda t)$  et  $-K \exp(-\lambda t)$  et que  $K > q_0$  puisque  $\omega_0 > \omega$ .

### 12.5.5 Aspects énergétiques, facteur de qualité

Le facteur de qualité d'un dipôle R, L, C est par définition  $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ , compte tenu de la formule de Thomson, on a donc aussi

$$Q = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (12.38)$$

L'énergie stockée dans le dipôle R,L,C série est  $W = W_m + W_m = \frac{1}{2} \left( Li^2 + \frac{q^2}{C} \right)$ . Pour un amortissement très faible :  $\lambda$  est très petit devant  $\omega_0$ , d'où  $\omega = \omega_0$  et  $\frac{\lambda}{\omega}$  est très faible. Les approximations suivantes sont justifiées :

$$q(t) = q_0 \exp(-\lambda t) \left( \cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right) \quad (12.39)$$

$$= q_0 \exp(-\lambda t) \cos(\omega t), \quad (12.40)$$

et :

$$i(t) = \frac{-q_0 \omega_0^2}{\omega} \exp(-\lambda t) \sin(\omega t) \quad (12.41)$$

$$= -q_0 \omega_0 \exp(-\lambda t) \sin(\omega t). \quad (12.42)$$

Alors en injectant ces expressions dans le calcul de l'énergie :

$$W(t) = \frac{q_0^2 \exp(-2\lambda t)}{2} \left( L\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{C} \cos^2(\omega_0 t) \right) = \frac{q_0^2 \exp(-2\lambda t)}{2} \quad (12.43)$$

Une période plus tard, l'énergie accumulée a diminuée à cause de l'effet Joule :  $W(t+T) = \frac{q_0^2 \exp(-2\lambda(t+T))}{2}$ . Alors le ratio suivant vaut :

$$\frac{\text{énergie accumulée}}{\text{énergie perdue en une période}} = \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T_0)} = \frac{1}{1 - \exp(-2\lambda T_0)} = \frac{1}{2\lambda T_0}, \quad (12.44)$$

avec  $\lambda = \frac{R}{2L}$ , soit  $\frac{1}{2\lambda} = \frac{L}{R}$  et  $\frac{1}{T_0} = \frac{\omega}{2\pi}$ . Donc le ratio vaut :

$$\frac{\text{énergie accumulée}}{\text{énergie perdue en une période}} = \frac{Q}{2\pi}, \quad (12.45)$$

si l'amortissement est faible. Plus le facteur de qualité est grand, plus l'énergie électromagnétique accumulée est longue à se dissiper par effet Joule.

## 12.6 Réponse d'un diôle R,L,C série à un échelon de tension

### 12.6.1 Équation différentielle

$R$ ,  $L$  et  $C$  sont des constantes, par hypothèse. L'équation différentielle du circuit est :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t), \quad (12.46)$$

avec  $E(t)$  un échelon en zéro de valeur  $E$ . Cette équation différentielle est équivalente à :

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\lambda \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E(t)}{L} \quad (12.47)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E(t)}{L}, \quad (12.48)$$

puisque  $2\lambda = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}$ .

Si lorsque  $t < 0$ , le régime stationnaire était atteint, alors le courant et la charge seraient nuls puisque qu'elles sont continues en fonction du temps.

La solution générale de l'équation homogène dépend du signe du discriminant réduit de l'équation caractéristique  $\delta$ , elles ont été vues dans la section précédente. Une solution particulière pour  $t > 0$  de cette équation est  $q(t) = CE$ . La solution physique de l'équation différentielle est la somme de ces deux solutions, les constantes d'intégration étant fixées par les conditions initiales.

### 12.6.2 Régime pseudo périodique

Pour  $R < Rc$ , (*i.e.*  $\delta < 0$ ), la solution générale de l'équation différentielle est :

$$q = CE + \exp(-\lambda t)(A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) \quad (12.49)$$

D'où :

$$i = \exp(-\lambda t)((B\omega - A\lambda) \cos(\omega t) - (B\lambda + A\omega) \sin(\omega t)). \quad (12.50)$$

Avec les conditions initiales données,  $A = -CE$  et  $B = -\lambda \frac{CE}{\omega}$ . La solution adaptée est donc :

$$q = CE \left( 1 - \exp(-\lambda t) \left( \cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right) \right). \quad (12.51)$$

On procéderait de la même manière pour les régimes critique et apériodique.

### 12.6.3 Aspects énergétiques

L'énergie fournie par la source est  $\int_0^t E i dt = Eq$ , celle qui est stockée est  $W = \frac{1}{2} \left( Li^2 + \frac{q^2}{C} \right)$ . À la fin du régime transitoire, la source a fourni l'énergie  $CE^2$  et il reste  $W = \frac{CE^2}{2}$  stockée dans le condensateur (ici  $W_m = 0$ ). La moitié de l'énergie fournie par la source a été consommée par effet Joule.

### 12.6.4 Régime propre et régime transitoire

L'exemple du régime R,L,C série a montré que le régime propre et le régime transitoire sont étroitement liés, le régime propre n'étant qu'un régime transitoire particulier.

Le régime transitoire, caractéristique du circuit, disparaît au bout d'un temps suffisamment long. Il en est de même si la source fournit une tension alternative sinusoïdale, à la fin du régime transitoire, il y a un régime sinusoïdal permanent.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Cinématique du point matériel</b>	<b>1</b>
1.1	Espace physique et temps d'un observateur . . . . .	2
1.1.1	Notion de solide . . . . .	2
1.1.2	Espace physique . . . . .	2
1.1.3	Chronologie et définition de la seconde . . . . .	2
1.2	Mouvement et référentiel, temps absolu . . . . .	3
1.3	Notion de point matériel . . . . .	3
1.4	Complément de géométrie . . . . .	4
1.4.1	Repère, coordonnées cartésiennes . . . . .	4
1.4.2	Coordonnées cylindriques, ou cylindro-polaires . . . . .	4
1.5	Trajectoire, abscisse curviligne et loi horaire . . . . .	5
1.6	Vitesse . . . . .	5
1.7	Accélération . . . . .	6
1.8	Mouvements particuliers . . . . .	6
1.8.1	Lois horaires particulières . . . . .	6
1.8.2	Mouvements rectilignes . . . . .	7
1.8.3	Mouvements à accélération constante . . . . .	7
1.8.4	Mouvements circulaires . . . . .	8
1.9	Produit vectoriel . . . . .	9
1.9.1	Définition . . . . .	9
1.9.2	Propriétés du produit vectoriel . . . . .	9
1.9.3	Norme, direction et sens du produit vectoriel, produit vectoriel nul . . . . .	9
1.9.4	Moment en un point d'un vecteur lié . . . . .	9
1.10	Exercices . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Cinématique du point matériel</b>	<b>13</b>
2.1	Masse pesante et masse inerte . . . . .	14
2.2	Quantité de mouvement et moment cinétique . . . . .	14
2.3	Principe d'inertie, référentiel galiléen . . . . .	14
2.4	Notion de force . . . . .	15
2.5	Relation fondamentale de la dynamique du point matériel (deuxième loi de Newton) . . . . .	16

2.6	Théorème du moment cinétique pour un point matériel . . .	17
2.7	Principe des interactions (troisième loi de Newton) . . . . .	17
2.8	Interactions à distance . . . . .	17
2.8.1	Interaction gravitationnelle . . . . .	17
2.8.2	Interaction électromagnétique . . . . .	17
2.8.3	Interaction forte . . . . .	18
2.8.4	Interaction faible . . . . .	19
2.8.5	Unification des interactions . . . . .	19
2.9	Interactions de contact . . . . .	19
2.9.1	Point matériel lié à un fil tendu de masse nulle . . . .	19
2.9.2	Point matériel liée à une extrémité d'un ressort parfait	20
2.9.3	Mouvement d'un point lié à une courbe ou à une surface	20
2.10	Exercices . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Applications de la relation fondamentale de la dynamique</b>	<b>23</b>
3.1	Chute libre, tir dans le vide . . . . .	23
3.2	Influence de la résistance de l'air sur le tir d'un projectile pour des vitesses faibles . . . . .	25
3.3	Tir vertical . . . . .	26
3.4	Mouvement d'un point matériel soumis à une force de rappel	27
3.4.1	Pendule élastique horizontal . . . . .	27
3.4.2	Pendule élastique vertical . . . . .	27
3.5	Exercices . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Aspects énergétiques de la dynamique du point matériel</b>	<b>31</b>
4.1	Puissance et travail d'une force . . . . .	32
4.2	Énergie cinétique, théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel . . . . .	32
4.3	Exemple d'utilisation du théorème de l'énergie cinétique . . .	33
4.4	Exemples de calculs de travaux et de puissances . . . . .	34
4.4.1	Travail du poids d'un point matériel . . . . .	34
4.4.2	Travail d'une force de rappel d'un ressort . . . . .	34
4.4.3	Travail d'une force de frottement . . . . .	35
4.5	Énergie potentielle d'un point matérielle . . . . .	35
4.5.1	Force conservative . . . . .	35
4.5.2	Énergie potentielle . . . . .	35
4.5.3	Énergie potentielle de pesanteur . . . . .	36
4.5.4	Énergie potentielle élastique . . . . .	36
4.5.5	Cas d'une force qui ne travaille pas . . . . .	36
4.6	Énergie mécanique d'un point matériel, limites du mouvement	36
4.6.1	Définition de l'énergie mécanique et théorème de l'éner- gie mécanique pour un point matériel . . . . .	36
4.6.2	Limites du mouvement . . . . .	37
4.7	Positions d'équilibre, stabilité d'un équilibre . . . . .	37



4.7.1	Positions d'équilibre . . . . .	37
4.7.2	Stabilité d'un équilibre . . . . .	38
4.8	Exemples d'application . . . . .	39
4.8.1	Utilisation de l'intégrale première du mouvement pour un pendule élastique incliné . . . . .	39
4.8.2	Positions d'équilibre d'un point matériel sur un cercle . . . . .	40
4.9	Exercices . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Oscillateurs et portraits de phase</b>	<b>43</b>
5.1	Oscillateur harmonique . . . . .	43
5.1.1	Mouvement d'un point matériel sur une courbe au voi- sinage d'une position d'équilibre . . . . .	43
5.1.2	Oscillateur harmonique . . . . .	44
5.1.3	Aspect énergétique . . . . .	45
5.2	Portrait de phase . . . . .	46
5.2.1	Définitions, propriétés des trajectoires de phase . . . . .	46
5.2.2	Portraits de phase de l'oscillateur harmonique . . . . .	46
5.2.3	Portrait de phase du pendule pesant simple . . . . .	47
5.3	Oscillateur amorti par frottements fluides . . . . .	49
5.3.1	Équation différentielle . . . . .	49
5.3.2	Loi horaire du mouvement . . . . .	50
5.3.3	Aspect énergétique, facteur de qualité d'un oscillateur . . . . .	51
5.3.4	Portrait de phase de l'oscillateur amorti . . . . .	52
5.4	Exercices . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Lois de Descartes – Prisme</b>	<b>55</b>
6.1	Nature de la lumière . . . . .	55
6.1.1	Vitesse de propagation, indices de réfraction . . . . .	55
6.1.2	Différents domaines des ondes électromagnétiques . . . . .	56
6.2	Propagation rectiligne . . . . .	56
6.2.1	Hypothèse de propagation rectiligne . . . . .	56
6.2.2	Rayons lumineux . . . . .	56
6.3	Lois de Descartes . . . . .	57
6.3.1	Définitions . . . . .	57
6.3.2	Réflexion totale et réfraction limite . . . . .	58
6.4	Prisme . . . . .	58
6.4.1	Les formules du prisme . . . . .	59
6.4.2	Étude de la déviation en fonction de l'angle d'incidence . . . . .	59
6.4.3	Exemple . . . . .	60
6.4.4	Étude de la déviation, dispersion polychromatique . . . . .	60
6.5	Exercices . . . . .	61

<b>7</b>	<b>Formation des images, miroir plan, miroir sphérique</b>	<b>65</b>
7.1	Point objet, point image, stigmatisme . . . . .	66
7.1.1	Stigmatisme d'un système optique pour un point . . .	66
7.1.2	Réalité, virtualité d'un point objet ou d'un point image	66
7.1.3	Objets et images étendus . . . . .	66
7.2	Images données par un miroir plan . . . . .	66
7.3	Miroir sphérique . . . . .	67
7.3.1	Définitions . . . . .	67
7.3.2	Condition de stigmatisme rigoureux . . . . .	67
7.3.3	Stigmatisme approché . . . . .	69
7.3.4	Aplanétisme, notion de plans conjugués, conditions de Gauss, grandissement transversal . . . . .	69
7.3.5	Formules du miroir sphérique avec origine au centre et avec origine au sommet . . . . .	69
7.3.6	Foyer principal, plan focal, distance focale . . . . .	70
7.3.7	Foyers secondaires . . . . .	70
7.3.8	Représentation du miroir sphérique utilisé dans les conditions de Gauss, construction des images . . . . .	71
7.3.9	Formules de Newton (origine au foyer) . . . . .	71
7.3.10	Image d'un objet à l'infini . . . . .	71
7.4	Exercices . . . . .	72
<b>8</b>	<b>Lentilles sphériques minces</b>	<b>75</b>
8.1	Différents types de lentilles sphériques . . . . .	75
8.2	Lentilles sphériques minces, leurs représentations . . . . .	76
8.3	Conditions de stigmatisme approché pour une lentille mince, conditions de Gauss et aplanétisme . . . . .	76
8.4	Foyers d'une lentille mince . . . . .	76
8.4.1	Foyers principaux objet et image . . . . .	76
8.4.2	Plans focaux, distance focale . . . . .	77
8.4.3	Vergence . . . . .	77
8.4.4	Foyers secondaires . . . . .	77
8.5	Tracé du rayon émergent correspondant à un rayon incident donné . . . . .	77
8.6	Construction de l'image d'un objet frontal donné, dans les conditions de Gauss . . . . .	78
8.7	Formules des lentilles minces . . . . .	78
8.8	Image d'un objet à l'infini . . . . .	79
8.9	Étude analytique des différents cas . . . . .	79
8.10	Lentilles minces accolées . . . . .	80
8.11	Exercices . . . . .	80

<b>9</b>	<b>Charges électriques, intensité, tension et lois de Kirchhoff</b>	<b>85</b>
9.1	Charge électrique . . . . .	86
9.1.1	Électrisation . . . . .	86
9.1.2	Définition . . . . .	86
9.1.3	Quantification de la charge électrique . . . . .	86
9.1.4	Propriétés des charges électriques . . . . .	87
9.2	Densités de charge électrique . . . . .	87
9.2.1	Densité volumique de charge . . . . .	87
9.2.2	Densité surfacique de charge, densité linéique de charge	87
9.3	Densités de courant . . . . .	87
9.3.1	Densité volumique de courant . . . . .	87
9.3.2	Densité surfacique de courant . . . . .	88
9.4	Intensité d'un courant électrique . . . . .	88
9.5	Lignes de courant, tubes de courant . . . . .	89
9.6	Régime stationnaire, approximation des régimes quasi-stationnaires (ARQS) . . . . .	89
9.6.1	Définition . . . . .	89
9.6.2	Tube de courant dans le cadre de l'ARQS . . . . .	90
9.7	Potentiel électrostatique, tension électrostatique ou différence de potentiel électrostatique . . . . .	90
9.7.1	Potentiel électrostatique . . . . .	90
9.7.2	Surfaces équipotentielles . . . . .	90
9.7.3	Différence de potentiel électrostatique ou tension électrostatique . . . . .	91
9.8	Cas de l'ARQS, différence de potentiel électrique ou tension électrique . . . . .	91
9.9	Travail et puissance électrocinétiques reçus par un dipôle électrocinétique en ARQS . . . . .	91
9.10	Lois de Kirchhoff . . . . .	92
9.10.1	Définitions . . . . .	92
9.10.2	Loi des nœuds . . . . .	92
9.10.3	Loi des mailles . . . . .	93
9.10.4	Utilisation des lois de Kirchhoff . . . . .	93
9.11	Exercices . . . . .	93
<b>10</b>	<b>Conducteurs ohmiques, loi d'ohm, loi de joule</b>	<b>95</b>
10.1	Conductivité, loi d'Ohm locale . . . . .	96
10.1.1	Conducteur ohmique, mobilité des porteurs de charge	96
10.1.2	Loi d'Ohm locale . . . . .	96
10.2	Résistance électrique d'un conducteur ohmique, loi d'Ohm . .	97
10.2.1	Loi d'Ohm . . . . .	97
10.2.2	Résistance d'un conducteur ohmique élémentaire et d'un conducteur ohmique cylindrique . . . . .	97
10.3	Étude physique de la conductivité . . . . .	98

10.3.1	Cas des métaux, des alliages métalliques . . . . .	98
10.3.2	Supraconducteurs . . . . .	98
10.3.3	Électrolytes . . . . .	98
10.4	Associations de résistances . . . . .	99
10.4.1	Association en série . . . . .	99
10.4.2	Association en parallèle . . . . .	99
10.4.3	Cas de deux conducteurs ohmiques . . . . .	99
10.4.4	Théorème de Kennely (équivalence triangle, étoile) . . . . .	99
10.5	Théorème de Millman . . . . .	100
10.6	Ponts diviseur de tension et diviseur de courant . . . . .	101
10.6.1	Pont diviseur de tension . . . . .	101
10.6.2	Pont diviseur de courant . . . . .	101
10.7	Loi de Joule . . . . .	101
10.7.1	Cas d'un conducteur ohmique . . . . .	101
10.7.2	Cas d'un dipôle quelconque . . . . .	102
10.8	Exercices . . . . .	102
<b>11</b>	<b>Dipôles électrocinétiques</b>	<b>105</b>
11.1	Dipôle électrocinétique, puissance électrocinétique . . . . .	106
11.1.1	Circuits étudiés . . . . .	106
11.1.2	Transformations d'énergie dans un dipôle . . . . .	106
11.2	Caractéristique courant tension d'un dipôle . . . . .	107
11.2.1	Définition . . . . .	107
11.2.2	Exemples de caractéristiques de dipôles . . . . .	107
11.2.3	Dipôles linéaires . . . . .	107
11.3	Dipôles linéaires idéaux . . . . .	107
11.3.1	Sources de tension . . . . .	107
11.3.2	Sources de courant . . . . .	108
11.3.3	Auto-inductance pure . . . . .	108
11.3.4	Capacité pure . . . . .	108
11.4	Bobines et condensateurs réels . . . . .	109
11.4.1	Bobine de résistance non négligeable . . . . .	109
11.4.2	Condensateur réel avec conductance de fuite . . . . .	109
11.5	Générateurs et récepteurs linéaires . . . . .	109
11.5.1	Modèle de Thévenin . . . . .	109
11.5.2	Modèle de Norton . . . . .	109
11.5.3	Équivalence des deux modèles . . . . .	109
11.5.4	Puissance électrocinétique reçue, puissance électrocinétique engendrée, différents types de fonctionnement . . . . .	110
11.5.5	Cas d'un dipôle non linéaire possédant une caractéristique . . . . .	110
11.5.6	Récepteurs (électrolyseurs, moteurs électriques) non polarisés . . . . .	111
11.6	Loi d'Ohm généralisée, signe de la force électro-motrice . . . . .	111

<b>12 Régimes transitoires</b>	<b>113</b>
12.1 Régime continu . . . . .	114
12.1.1 Définitions . . . . .	114
12.1.2 Loi de Pouillet . . . . .	114
12.1.3 Circuits complexes . . . . .	115
12.2 Échelon de tension . . . . .	115
12.3 Dipôle R, L série soumis à un échelon de tension . . . . .	115
12.3.1 Schéma, équation différentielle . . . . .	115
12.3.2 Établissement du courant . . . . .	116
12.3.3 Constante de temps . . . . .	116
12.3.4 Arrêt du courant . . . . .	117
12.3.5 Aspect Énergétique . . . . .	117
12.4 Dipôle R, C série soumis à un échelon de tension . . . . .	118
12.4.1 Schéma, équation différentielle . . . . .	118
12.4.2 Charge du condensateur . . . . .	118
12.4.3 Constante de temps . . . . .	118
12.4.4 Décharge du condensateur . . . . .	119
12.4.5 Aspect énergétique . . . . .	119
12.5 Régimes propres du circuit RLC série . . . . .	119
12.5.1 Équation différentielle . . . . .	119
12.5.2 Régime apériodique . . . . .	120
12.5.3 Régime critique . . . . .	121
12.5.4 Régime pseudo-périodique (ou sinusoïdal amorti) . . . . .	121
12.5.5 Aspects énergétiques, facteur de qualité . . . . .	122
12.6 Réponse d'un diôle R,L,C série à un échelon de tension . . . . .	123
12.6.1 Équation différentielle . . . . .	123
12.6.2 Régime pseudo périodique . . . . .	124
12.6.3 Aspects énergétiques . . . . .	124
12.6.4 Régime propre et régime transitoire . . . . .	124

## Table des matières

---

# Table des figures

6.1	Deviation en fonction de l'incidence . . . . .	60
-----	--	----

## Table des figures

---



# Liste des tableaux