

# Cours de physique CPGE MPSI

Florian MAILLARD  
e-mail : [florian.maillard@mailoo.org](mailto:florian.maillard@mailoo.org)

24 novembre 2013

---

# Chapitre 1

## Cinématique du point matériel

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Espace physique et temps d'un observateur . .</b>	<b>2</b>
1.1.1	Notion de solide . . . . .	2
1.1.2	Espace physique . . . . .	2
1.1.3	Chronologie et définition de la seconde . . . . .	2
<b>1.2</b>	<b>Mouvement et référentiel, temps absolu . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>1.3</b>	<b>Notion de point matériel . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>1.4</b>	<b>Complément de géométrie . . . . .</b>	<b>4</b>
1.4.1	Repère, coordonnées cartésiennes . . . . .	4
1.4.2	Coordonnées cylindriques, ou cylindro-polaires . .	4
<b>1.5</b>	<b>Trajectoire, abscisse curviligne et loi horaire . .</b>	<b>5</b>
<b>1.6</b>	<b>Vitesse . . . . .</b>	<b>5</b>
<b>1.7</b>	<b>Accélération . . . . .</b>	<b>6</b>
<b>1.8</b>	<b>Mouvements particuliers . . . . .</b>	<b>6</b>
1.8.1	Lois horaires particulières . . . . .	6
1.8.2	Mouvements rectilignes . . . . .	7
1.8.3	Mouvements à accélération constante . . . . .	7
1.8.4	Mouvements circulaires . . . . .	8
<b>1.9</b>	<b>Produit vectoriel . . . . .</b>	<b>9</b>
1.9.1	Définition . . . . .	9
1.9.2	Propriétés du produit vectoriel . . . . .	9
1.9.3	Norme, direction et sens du produit vectoriel, produit vectoriel nul . . . . .	9
1.9.4	Moment en un point d'un vecteur lié . . . . .	10
<b>1.10</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>10</b>

---

## 1.1 Espace physique et temps d'un observateur

### 1.1.1 Notion de solide

En mécanique, certains corps physiques ont une forme indépendante des actions mécaniques qu'ils subissent. Ces corps sont appelés *solides indéformables*. Les propriétés géométriques de l'ensemble des points d'un solide, tels que des distances ou des angles, sont invariants.

### 1.1.2 Espace physique

Jusqu'en 1960, le mètre était défini par une distance entre deux traits sur une barre de platine iridiée, qui s'appelle le *mètre étalon*. On avait aussi défini le mètre comme un multiple de la longueur d'onde d'une certaine radiation de krypton.

Aujourd'hui ces définitions sont abandonnées et le mètre est défini tel que :

**Définition 1.1.** Le mètre est la longueur du trajet que la lumière parcourt en une durée de  $1/299\,792\,458$  secondes.

La mécanique classique et la relativité restreinte postulent que l'espace physique est un espace euclidien à trois dimensions. La relativité générale remet en cause cette hypothèse et postule plutôt que l'espace physique est un espace de Minkowski à quatre dimensions.

### 1.1.3 Chronologie et définition de la seconde

La notion d'écoulement du temps est d'abord intuitive. Un observateur est tout à fait capable d'établir une chronologie. C'est-à-dire de déterminer si un événement a eu lieu avant ou après tel autre.

Le temps est un paramètre réel servant à dater les événements. N'importe quel instrument pouvant dater les événements constitue un chronomètre ou une horloge. Une personne qui énonce une suite de nombres ou un sablier sont des horloges.

Pour choisir parmi les différentes horloges, on impose une exigence supplémentaire : l'uniformité du temps, ou, ce qui revient au même, nous postulons que *les lois physiques sont invariantes par translation dans le temps*. Par exemple, si un pendule oscille en repassant toujours par les mêmes positions dans des conditions extérieures constantes, les lois physiques étant inchangées d'une oscillation à l'autre, la durée doit être la même pour chaque oscillation. On voit ainsi l'importance des phénomènes cycliques pour définir une chronologie.

Le problème crucial, dans l'exemple précédent comme pour toute horloge basée sur un phénomène cyclique, est celui des conditions extérieures

qui doivent être constantes. Le choix d'une chronologie privilégiée permettant d'appliquer les lois de la mécanique s'est fait par des approximations successives. Les scientifiques ont longtemps utilisé l'astronomie pour définir l'unité de temps.

Jusqu'en 1960, les scientifiques utilisaient le *temps sidéral*. La seconde était définie comme la fraction  $1/86\,400$  du jour sidéral (le jour sidéral est la durée que met une planète pour faire un tour sur elle-même par rapport aux étoiles, indépendamment de sa révolution autour du Soleil). L'inconvénient de cette définition est le suivant : Le mouvement des astres s'accélérait sans qu'aucune explication plausible ne puisse être donnée. Alors qu'en réalité c'est le contraire : la Terre ralentit à cause des frottements de l'eau des océans. C'était alors l'horloge qui retardait. Ensuite, les scientifiques ont utilisé le *temps des éphémérides*, la révolution de la Terre autour du Soleil, pour définir la seconde. Aujourd'hui, on utilise plutôt des mesures de fréquence, qui sont très précises, pour définir la seconde. C'est le *temps atomique*.

**Définition 1.2.** La seconde est la durée de  $9\,192\,631\,770$  périodes de la radiation correspondant entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133.

## 1.2 Mouvement et référentiel, temps absolu

*Un référentiel d'espace-temps est un système d'axes de coordonnées attaché à un solide et muni d'une chronologie.* Du point de vue spatial, un référentiel est donc par définition indéformable, car les distances et les angles d'un ensemble de points du référentiel sont constants. Chaque référentiel d'espace-temps est muni d'une chronologie. On le muni d'une horloge atomique fixe dans le référentiel.

En mécanique classique, on considère que le temps est une notion indépendante du référentiel considéré. On parle dans ce cas de temps absolu, c'est-à-dire que des observateurs liés à des référentiels différents peuvent attribuer les mêmes dates aux mêmes événements.

La relativité restreinte remet en cause ce postulat. Le temps écoulé entre deux événements n'est pas le même dans deux référentiels d'espace-temps, munis d'horloges identiques, si le mouvement de l'un n'est pas une translation rectiligne uniforme par rapport à l'autre.

## 1.3 Notion de point matériel

Un point matériel est un objet dont la position dans un référentiel donné est entièrement définie par ses trois coordonnées. Il ne suffit pas qu'un solide soit petit pour l'assimiler à un point matériel. Une molécule possédant un moment dipolaire possède une symétrie de révolution autour de son vecteur

## 1.4. Complément de géométrie

---

moment dipolaire mais pas la symétrie sphérique nécessaire. Il faudrait donc que l'objet que l'on assimile à un point matériel possède la symétrie sphérique du point géométrique et soit ainsi homogène et isotrope. Mais ceci ne suffit pas encore pour l'assimiler à un point matériel, le centre d'inertie d'une sphère homogène sur un plan incliné n'a pas le même mouvement selon qu'elle roule ou qu'elle glisse. Il faut donc de plus exclure pour un point matériel la possibilité de tourner.

Enfin, la condition de petitesse n'est même pas nécessaire. En effet, la Terre, dans l'étude du mouvement d'un satellite, peut être valablement être assimilée à un point matériel coïncident avec son centre d'inertie.

On appellera point matériel un corps, ou un point géométrique associé à un système de corps, dont la position géométrique est totalement déterminée par trois coordonnées. Le type même du point matériel est, comme on le verra, le point matériel fictif coïncidant avec le centre d'inertie d'un système, et où serait concentrée toute la masse du système.

## 1.4 Complément de géométrie

### 1.4.1 Repère, coordonnées cartésiennes

Un repère d'espace est constitué par un point et trois axes de coordonnées cartésiennes, qu'il soient ou non liés au référentiel auquel on rapporte le mouvement étudié.

En coordonnées cartésiennes, la position d'un point matériel est définie par son *vecteur position* décomposable suivant la direction de ces trois axes :

$$\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z. \quad (1.1)$$

Si le repère est lié au référentiel dans lequel on travail, ses axes sont considérés comme fixe. Les vecteurs unitaires de la base correspondante sont alors constants. Le déplacement élémentaire du point matériel est alors :

$$d\overrightarrow{OM} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z. \quad (1.2)$$

La longueur de ce déplacement est donc :

$$ds = ||d\overrightarrow{OM}||, \quad (1.3)$$

tel que

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (1.4)$$

### 1.4.2 Coordonnées cylindriques, ou cylindro-polaires

Un repère cartésien, que l'on supposera ici lié au référentiel dans lequel on étudie le mouvement, étant défini, les coordonnées cylindro-polaires sont

les coordonnées polaires de la projection H de M dans le plan  $(xOy)$  : la coordonnée radiale  $\rho = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , l'angle polaire  $\theta = (\vec{Ox}, \vec{OH})$  et la cote  $z$ .

Les vecteurs unitaires  $\vec{u}_r$ ,  $\vec{u}_\theta$  et  $\vec{u}_z$  forment une base mobile utilisée pour décomposer les vecteurs. Par exemple

$$\vec{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z. \quad (1.5)$$

On remarque que  $\vec{u}_r = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y$ . D'autre part,  $(Oxyz)$  étant un référentiel, les vecteurs  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  sont constants alors

$$\frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = \vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_r. \quad (1.6)$$

Plus généralement, la dérivée d'un vecteur unitaire  $\vec{u}$  tournant dans un plan par rapport à l'angle qui définit sa direction dans ce plan est le vecteur  $\vec{v}$  unitaire par rotation de  $\vec{u}$  de  $\frac{\pi}{2}$ .

## 1.5 Trajectoire, abscisse curviligne et loi horaire

La trajectoire d'un point mobile dans un référentiel donné est l'ensemble des points de ce référentiel avec lesquels il coïncide successivement au cours du temps. Il s'agit bien sûr d'une courbe continue. La trajectoire dépend du référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement. Un sens positif noté par  $\rightarrow s$  et une origine A étant choisie arbitrairement sur la trajectoire, l'abscisse curviligne de M est définie par  $s = \overline{AB}$ . L'abscisse curviligne est une fonction du temps  $t$  continue et dérivable. Cette fonction  $f : t \rightarrow s = f(t)$  est appelée *loi horaire du mouvement* ou *équation horaire*.

## 1.6 Vitesse

La vitesse d'un point matériel dans un référentiel où le point O est fixe est

$$v = \frac{d\overline{OM}}{dt}. \quad (1.7)$$

Le point O pouvant être remplacé par n'importe quel point lié au référentiel. On note encore la vitesse du point M comme  $\frac{d\vec{M}}{dt}$  ou  $\dot{\vec{M}}$  ou encore  $\dot{\vec{M}}$ . La vitesse est une fonction continue du temps. Si l'on utilise plusieurs référentiels, la vitesse de M dans le référentiel R est notée  $\vec{v}_{M/R}$ . Un déplacement élémentaire  $d\vec{M}$  du point M est tangent à la trajectoire donc *le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire*.

## 1.7. Accélération

---

Le vecteur  $\vec{u}_r$  étant tangent à la trajectoire et orienté dans le même sens que celle-ci, le déplacement élémentaire s'écrit  $d\vec{M} = ds\vec{u}_T$  donc  $\vec{v} = \dot{s}\vec{u}_T$ ,  $\dot{s}$  est la *vitesse algébrique* et la *norme de la vitesse* est donc  $v = |\dot{s}|$ .

On appelle hodographe du mouvement la courbe décrite par l'extrémité du vecteur vitesse représenté avec une origine fixe.

En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z, \quad (1.8)$$

et en coordonnées cylindriques  $\vec{u}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et donc

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z. \quad (1.9)$$

## 1.7 Accélération

L'accélération d'un point matériel dans un référentiel où le point O est fixe est

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}. \quad (1.10)$$

Elle peut présenter des discontinuités. Si l'on doit préciser le référentiel on note  $\vec{a}_{M/R}$ . Si la trajectoire n'est pas rectiligne, le vecteur unitaire tangentiel  $\vec{u}_T$  varie donc sa dérivée par rapport au temps est normale à la trajectoire. Ainsi l'accélération a une composante tangentielle,  $\ddot{s}$ , et une composante normale à la trajectoire

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{u}_T + \dot{s}\dot{\vec{u}}_T. \quad (1.11)$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z, \quad (1.12)$$

et en coordonnées cylindriques  $\dot{\vec{u}}_\theta = -\dot{\theta}\vec{u}_r$  et donc

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z. \quad (1.13)$$

Si  $\vec{a} \cdot \vec{v} = \dot{s}\ddot{s}$  est positif, alors le mouvement est accéléré. Sinon alors le mouvement est ralenti.

## 1.8 Mouvements particuliers

### 1.8.1 Lois horaires particulières

Si  $v = |\dot{s}|$  est constante on dit que le mouvement est uniforme et sa loi horaire est  $s = \dot{s}t + s_0$ .

Si  $\ddot{s}$  est constant, le mouvement est dit uniformément varié. Alors la loi horaire s'écrit  $s = \frac{\ddot{s}t^2}{2} + \dot{s}_0t + s_0$ .



Un mouvement est sinusoïdal si  $s = s_0 + \alpha \cos(\omega t + \varphi)$ . Le nombre  $\alpha > 0$  est l'amplitude du mouvement. Le nombre  $\varphi$  est la phase à l'origine des dates. Le nombre  $\omega > 0$  est la pulsation ou fréquence angulaire du mouvement. Le mouvement est périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  et de fréquence  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$  (en Hertz). Un choix convenable de l'origine des dates et de l'origine des abscisses curvilignes permet de ramener cette loi horaire à la forme  $s = \alpha \cos(\omega t)$ .

### 1.8.2 Mouvements rectilignes

Pour un mouvement rectiligne,  $\vec{u}_T$  est constant, l'accélération est tangentielle :  $\vec{a} = \ddot{s} \vec{u}_T$ . On choisit l'axe  $(Ox)$  suivant la trajectoire ( $s$  est alors noté  $x$  et l'origine des abscisses curvilignes est en  $O$ ). La loi horaire est alors  $f : t \rightarrow x = f(t)$ .

Si le mouvement est rectiligne uniforme alors  $\vec{v}$  est constant et l'accélération est nulle.

Si le mouvement est rectiligne uniformément varié alors  $\vec{a}$  est constant. La réciproque est fausse.

Si le mouvement est rectiligne sinusoïdal, avec le choix de  $O$  au milieu du segment parcouru, la loi horaire s'écrit  $x = X \cos(\omega t + \varphi)$  ou  $x = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ . L'accélération s'écrit  $\vec{a} = -\omega^2 X \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 \vec{OM}$ .

Si à  $t = 0$ , on a

$$x = x_0 = X \cos(\varphi) \quad \dot{x} = \dot{x}_0 = -\omega X \sin(\varphi), \quad (1.14)$$

alors

$$X = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \quad \tan(\varphi) = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}. \quad (1.15)$$

Si  $x_0 > 0$  alors  $\varphi = -\arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)$ , sinon  $\varphi = \pi - \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}\right)$ .

On obtient plus directement  $A$  et  $B$  avec  $x_0 = A$  et  $\dot{x}_0 = \omega B$ .

### 1.8.3 Mouvements à accélération constante

Si  $\vec{a}$  est constant, alors  $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$  et  $\vec{OM} = \vec{OM}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a} t^2}{2}$ .

On choisit les axes du repère avec  $M_0 = O$  comme origine, l'axe  $Oz$  parallèle à l'accélération  $\vec{a}$  et de sens contraire et le plan  $(xOz)$  confondu avec le plan  $(\vec{a}, \vec{v}_0)$ .

On a donc, avec  $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{v}_0)$  :

$$\vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z = -a \vec{u}_z \quad (1.16)$$

$$\vec{v}_0 = \dot{x} \vec{u}_x + \dot{z} \vec{u}_z = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_z. \quad (1.17)$$

On en déduit

$$\begin{cases} x &= v_0 t \cos \alpha \\ y &= 0 \\ z &= -\frac{a}{2} t^2 + v_0 t \sin \alpha. \end{cases} \quad (1.18)$$

## 1.8. Mouvements particuliers

En éliminant la date  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ , on obtient l'équation de la trajectoire :

$$z = -\frac{a}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha, \quad (1.19)$$

c'est l'équation d'une parabole.

*La trajectoire d'un point matériel dont l'accélération est constante est une parabole.* Le mouvement de la projection de M sur (Ox) est uniforme et celui de la projection de M sur Oz est uniformément varié. Si  $\vec{v}_0$  et  $\vec{a}$  sont parallèles alors le mouvement de M est rectiligne uniformément varié sur l'axe Oz.

Avec les équations vectorielles on démontre facilement les propriétés suivantes :

- la vitesse moyenne entre  $t_1$  et  $t_2$  est égale à la vitesse à  $\frac{t_1+t_2}{2}$

$$\vec{v}_{1,2} = \vec{v}_{\left(\frac{t_1+t_2}{2}\right)} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}; \quad (1.20)$$

- la variation du carré de la vitesse est le double du produit scalaire de l'accélération par le vecteur déplacement

$$v_2^2 - v_1^2 = 2\vec{a} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}; \quad (1.21)$$

- les vecteurs déplacements pendant des intervalles de temps successifs de même durée  $\tau$  forment une suite arithmétique :

$$\overrightarrow{M_n M_{n+1}} - \overrightarrow{M_{n-1} M_n} = \vec{a} \tau^2 \quad (1.22)$$

### 1.8.4 Mouvements circulaires

Un point matériel mobile M se meut circulairement s'il se déplace sur un cercle. Dans ce cas, il est pratique d'utiliser les coordonnées polaires.

En notant R le rayon du cercle parcouru par M et O son centre, si  $s = 0$  lorsque  $\theta = 0$  alors  $s = R\theta$ ,  $\dot{s} = R\dot{\theta}$  et  $\ddot{s} = R\ddot{\theta}$ .

Le vecteur *vitesse angulaire* est  $\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{u}_z$ . Sa norme vaut  $\omega = \frac{v}{R}$  et elle s'exprime en rad/s.

Le vecteur vitesse est

$$\vec{v} = \dot{s} \vec{u}_\theta = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}. \quad (1.23)$$

C'est le moment en M du vecteur vitesse angulaire représenté en O.

Le vecteur accélération est

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r + \dot{s} \vec{u}_\theta. \quad (1.24)$$

On constate que l'accélération normale est orientée vers le centre du cercle.

Si le mouvement est circulaire uniforme, alors l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$  est nulle. Le vecteur vitesse angulaire  $\vec{\omega}$  est constant, l'accélération est donc normale :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\omega^2 \vec{OM}. \quad (1.25)$$

Le mouvement est périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi R}{v}$  et de fréquence  $f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v}{2\pi R}$ .

## 1.9 Produit vectoriel

### 1.9.1 Définition

Soit la base  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  formant un trièdre direct. Soient deux vecteurs  $\vec{U}$  et  $\vec{V}$  de coordonnées respectives dans cette base  $(U_1, U_2, U_3)$  et  $(V_1, V_2, V_3)$ . Le produit vectoriel est donné par

$$\vec{U} \wedge \vec{V} = (U_2 V_3 - U_3 V_2) \vec{u} + (U_3 V_1 - U_1 V_3) \vec{v} + (U_1 V_2 - U_2 V_1) \vec{w} \quad (1.26)$$

### 1.9.2 Propriétés du produit vectoriel

Le produit vectoriel est une loi de composition interne dans  $\mathbb{R}^3$ . Il est anticommutatif  $\vec{U} \wedge \vec{V} = -\vec{V} \wedge \vec{U}$ . Il n'est pas associatif, ce qui peut être constaté avec la formule du double produit vectoriel

$$(\vec{U} \wedge \vec{V}) \wedge \vec{W} = (\vec{U} \cdot \vec{W}) \vec{V} - (\vec{V} \cdot \vec{W}) \vec{U}, \quad (1.27)$$

et il est distributif à gauche et à droite par rapport à la somme

$$\vec{U} \wedge (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \wedge \vec{V} + \vec{U} \wedge \vec{W}; \quad (1.28)$$

$$(\vec{U} + \vec{V}) \wedge \vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{W} + \vec{V} \wedge \vec{W}. \quad (1.29)$$

### 1.9.3 Norme, direction et sens du produit vectoriel, produit vectoriel nul

En choisissant  $(xOy)$  suivant le plan défini par les deux vecteurs avec  $(O\vec{x})$  dans la direction et le sens de  $\vec{U}$ , si  $(\vec{U}, \vec{V}) = \alpha$ , leurs coordonnées sont, dans la base  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  formant un trièdre trirectangle de sens direct :  $(U, 0, 0)$  et  $(V \cos \alpha, V \sin \alpha, 0)$ . On a alors  $\vec{U} \wedge \vec{V} = UV \sin \alpha \vec{e}_z$ . Le trièdre  $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{U} \wedge \vec{V})$  est de sens direct.

Le produit vectoriel est nul si et seulement si la famille  $(\vec{U}, \vec{V})$  est liée, c'est-à-dire si et seulement s'ils sont colinéaires ou l'un des deux est nul.

### 1.9.4 Moment en un point d'un vecteur lié

On appelle vecteur lié un vecteur représentant une caractéristique physique d'un point donné (vitesse, accélération, force subie, ...) et on le représente alors en ce point.

Le moment en P du vecteur  $\vec{U}$  lié au point M est par définition

$$\mathcal{M}_{\vec{U}/P} = \overrightarrow{PM} \wedge \vec{U}. \quad (1.30)$$

## 1.10 Exercices

**Exercice 1.1** (Mouvements uniformément variés). Démontrer que dans un mouvement uniformément varié d'accélération tangentielle  $\vec{s}$ ,

1. les distances parcourues pendant des intervalles de temps successifs de même durée  $\tau$  forment une suite arithmétique de raison  $\vec{s}\tau^2$  ;
2. la variation du carré de la vitesse entre  $t_1$  et  $t_2$  s'exprime par

$$s_2^2 - s_1^2 = 2\vec{s}(s_2 - s_1), \quad (1.31)$$

3. la vitesse algébrique moyenne entre  $t_1$  et  $t_2$  est égale à la vitesse algébrique en  $\frac{t_1+t_2}{2}$  et à la moyenne des vitesses algébriques à  $t_1$  et  $t_2$ .

**Exercice 1.2** (Exemple de mouvement circulaire). Un point M se déplace sur un cercle de centre O et de rayon  $R = 1$  m. Sa position est repérée par l'angle  $\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$  et la loi horaire de ce mouvement est  $\theta = \pi \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$  avec une période de  $T = 1$  s.

1. À quelle date le mobile M passe-t-il pour la première fois en  $M_1$  d'angle polaire  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$  ?
2. Calculez numériquement les coordonnées radiale et orthoradiale du vecteur vitesse à la date  $t_1$  à laquelle M est en  $M_1$ .
3. Même question pour l'accélération.
4. Pour quelles valeurs de  $\theta$  la norme du vecteur accélération est-elle maximale ?

**Exercice 1.3** (Roulement sans glissement, cycloïde). Une roue de rayon  $R$ , de centre C, roule sans glisser sur l'axe  $(Ox)$ . Le mouvement de la roue est paramétrée par l'angle  $\theta$  dont la roue a tourné depuis l'instant initial  $t = 0$  où l'abscisse de C était nulle.

1. Quelles sont, en fonction de  $R$  et de  $\theta$ , les coordonnées du point M de la périphérie de la roue qui coïncidait avec le point O à la date  $t = 0$  ?
2. Calculez, en fonction de  $R$  et de  $\theta$  et des ses dérivées temporelles, les composantes de la vitesse et de l'accélération de M.

3. Donnez les valeurs de la vitesse et de l'accélération de M au moment où ce point touche l'axe  $(Ox)$ .

**Exercice 1.4** (Courbes de Lissajous). Les coordonnées cartésiennes d'un point sont données en fonction du temps par

$$\begin{cases} x(t) &= a \sin(\omega_1 t) \\ y(t) &= b \sin(\omega_2 t) \end{cases} . \quad (1.32)$$

1. Quelle relation doit exister entre  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour que la trajectoire soit fermée ?
2. Tracez cette trajectoire pour  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{3}{2}$ .

**Exercice 1.5** (Spirale logarithmique). Trois chats se trouvent initialement aux sommets d'un triangle équilatéral. Le premier court après le second qui poursuit le troisième, lui-même courant après le premier. Ils courent à la même vitesse et celle-ci reste constante pendant toute la poursuite.

1. Déterminez la durée de la poursuite.
2. Déduisez-en la distance parcourue par chacun des chats.
3. Déterminez l'équation de la trajectoire de l'un des chats en coordonnées polaires.

**Exercice 1.6** (Mouvement uniforme sur une astroïde). Un homme partant du point O à  $t = 0$  décrit l'axe  $Oy$  avec une vitesse constante  $W$ . Son chien part du point A, d'abscisse  $a$  sur l'axe  $(Ox)$ , se dirige constamment vers lui à la vitesse constante  $2W$ .

1. Quelle est la trajectoire  $y = f(x)$  du chien ? Tracez l'allure de cette courbe.
2. À quelle ordonnée le chien rejoint-il l'homme ? Quelle distance a-t-il parcourue ? À quelle date rejoint-il l'homme ?
3. On note H la position de l'homme et  $Hx$  et  $Hy$  les parallèles à  $(Ox)$  et  $Oy$  d'origine H. Établissez l'équation  $r = g(\theta)$  de la trajectoire en coordonnées polaires dans le repère  $Hx, Hy$ . Tracez l'allure de cette trajectoire.

## 1.10. Exercices

---

## Chapitre 2

# Cinématique du point matériel

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Masse pesante et masse inerte . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>2.2</b>	<b>Quantité de mouvement et moment cinétique .</b>	<b>14</b>
<b>2.3</b>	<b>Principe d'inertie, référentiel galiléen . . . . .</b>	<b>14</b>
<b>2.4</b>	<b>Notion de force . . . . .</b>	<b>15</b>
<b>2.5</b>	<b>Relation fondamentale de la dynamique du point matériel (deuxième loi de Newton) . . . . .</b>	<b>16</b>
<b>2.6</b>	<b>Théorème du moment cinétique pour un point matériel . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2.7</b>	<b>Principe des interactions (troisième loi de Newton) . . . . .</b>	<b>17</b>
<b>2.8</b>	<b>Interactions à distance . . . . .</b>	<b>17</b>
2.8.1	Interaction gravitationnelle . . . . .	17
2.8.2	Interaction électromagnétique . . . . .	18
2.8.3	Interaction forte . . . . .	18
2.8.4	Interaction faible . . . . .	19
2.8.5	Unification des interactions . . . . .	19
<b>2.9</b>	<b>Interactions de contact . . . . .</b>	<b>19</b>
2.9.1	Point matériel lié à un fil tendu de masse nulle . .	19
2.9.2	Point matériel liée à une extrémité d'un ressort parfait . . . . .	20
2.9.3	Mouvement d'un point lié à une courbe ou à une surface . . . . .	20
<b>2.10</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>20</b>

---

## 2.1 Masse pesante et masse inerte

**Définition 2.1.** La *masse pesante* est définie expérimentalement à partir de l'utilisation de la balance. Elle est donc liée à la notion de poids. Si dans une balance à deux plateaux on remplace un corps A par un corps B et que l'équilibre est conservé, on dira par définition que A et B ont la même masse. Si la balance reste en équilibre en remplaçant A par deux corps B et C on dira que  $m_A = m_B + m_C$ . La masse est donc par définition une *grandeur extensive*, elle s'ajoute.

La validité de cette définition nécessite que l'équilibre d'une balance soit conservé si on change la balance de lieu, c'est-à-dire si l'intensité de la pesanteur est modifiée, ce qui est effectivement le cas.

L'égalité de la somme de deux masses pesantes étant ainsi définies, la masse est une grandeur mesurable. Dans le système international son unité est le *kilogramme*, kg. C'est la masse du cylindre de platine iridié nommé kilogramme étalon, déposé au Bureau International de Poids et Mesures. Cette définition du kilogramme permet des mesures avec une précision relative de l'ordre de  $10^{-9}$ .

On admettra, comme le confirme l'expérience, que la masse pesante s'identifie à la masse inerte. La masse inerte est la grandeur scalaire extensive, indépendante de l'état de mouvement du corps considéré, qui caractérise la difficulté que l'on a à modifier le mouvement de ce corps. La seule théorie capable de rendre compte de cette identité entre masse inerte et masse pesante est la théorie de la relativité générale.

## 2.2 Quantité de mouvement et moment cinétique

**Définition 2.2.** Pour un point matériel de masse  $m$  dans un référentiel où sa vitesse est  $\vec{v}$ , la quantité de mouvement est définie par

$$\vec{p} = m \vec{v}. \quad (2.1)$$

**Définition 2.3.** En un point P, le moment cinétique du point matériel M dans ce même référentiel est par définition le moment en P du vecteur quantité de mouvement en M. Il est noté  $\vec{L}_P$  et vaut

$$\vec{L}_P = m \overrightarrow{PM} \wedge \vec{v}. \quad (2.2)$$

## 2.3 Principe d'inertie, référentiel galiléen

Les interactions ont une propriété commune : elles décroissent et tendent vers zéro lorsque la distance entre deux systèmes en interaction tend vers



l'infini et elles tendent vers l'infini lorsque cette distance tend vers zéro.

Un point matériel ou un système situé à une distance suffisamment grande de tout autre point matériel peut être considéré comme *isolé*, c'est-à-dire sans interactions. Si un point matériel a le même comportement mécanique qu'un point matériel isolé, on dira que les interactions qu'il subit se compensent, on dit encore qu'il est *pseudo-isolé*. Le principe d'inertie s'énonce ainsi : *Il existe des référentiels privilégiés dans lesquels le mouvement d'un point matériel isolé est rectiligne et uniforme. On les appelle référentiels d'inertie ou référentiels galiléens.*

Le principe d'inertie définit donc les référentiels galiléens et postule leur existence. L'expérimentation conduit à constater que le référentiel de Copernic est un référentiel galiléen. Le référentiel de Copernic a, par définition, son origine au centre d'inertie du système solaire, ses axes étant définis par les directions de trois étoiles très éloignées. Le caractère galiléen du référentiel de Copernic n'est en fait qu'une approximation, mais celle-ci reste très valable tant que l'on ne s'intéresse pas à des mouvements de systèmes n'appartenant pas au système solaire. Ainsi, le mouvement d'une étoile de la galaxie nécessite d'utiliser un référentiel moins grossièrement galiléen, lié au centre d'inertie de la galaxie et dont les axes sont dirigés vers des galaxies lointaines ...

La loi de composition des vitesses montre que si un référentiel est en translation rectiligne et uniforme par rapport à un référentiel galiléen, ce référentiel est aussi galiléen. En effet, si  $\vec{v}$  est la vitesse d'un point matériel dans un référentiel galiléen (R) et si  $\vec{v}_0$  est la vitesse de translation constante, du référentiel (R) par rapport à un autre référentiel ( $R_0$ ), alors la vitesse du point matériel considéré est  $\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_0$  dans le référentiel ( $R_0$ ). Si  $\vec{v}$  est constante (mouvement rectiligne uniforme), alors  $\vec{v}'$  est aussi constante. Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic est donc galiléen.

Ce n'est pas le cas d'un référentiel lié à la Terre puisque la terre tourne par rapport aux étoiles. Cependant, pour des applications pratiques réclamant peu de précision et concernant des objets terrestres, on admettra que si les effets de la rotation de la terre peuvent être négligés un référentiel terrestre peut être assimilé à un référentiel galiléen.

## 2.4 Notion de force

On admettra que les interactions subies par un point matériel peuvent être représentées par des forces, caractérisées par :

- une intensité, exprimée en newton N dans le système international ;
- un sens ;
- une direction (la relation d'équipollence) ;
- un point d'application.

## 2.5. Relation fondamentale de la dynamique du point matériel (deuxième loi de Newton)

---

Ces différentes caractéristiques d'une force peuvent être définies par les effets statiques de la force, par exemple sur un ressort parfait . . . Une force est donc mathématiquement définie par un vecteur associé à un point, ("vecteur lié" ou "bipoint" représentant ce vecteur avec pour origine le point d'application de la force). On pourra si nécessaire adopter la notation :  $(M, \vec{F})$ . La *droite d'action* d'une force est la droite ayant la direction de la force et passant par son point d'application. On admettra enfin que le caractère additif des vecteurs forces : si un point matériel est soumis aux forces  $(M, \vec{F}_1), (M, \vec{F}_2), \dots$  il a le même mouvement que s'il était soumis à la force résultante, la somme  $(M, \vec{F})$  avec  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$

Plus généralement, dans le cas de systèmes matériels, on appellera force la grandeur vectorielle liée à un point d'application, capable de modifier le mouvement ou la forme du système.

On notera encore que la position du point d'application d'une force n'est une notion évidente que pour une force agissant sur un point matériel. Il n'est pas toujours facile ni indispensable de préciser le point d'application si l'on considère la résultante des forces correspondant à un type d'interaction subie par un système. Par contre la droite d'action est plus facile à préciser et plus nécessaire.

## 2.5 Relation fondamentale de la dynamique du point matériel (deuxième loi de Newton)

*Dans un référentiel galiléen, la force totale qui s'exerce sur un point matériel est la dérivée temporelle de sa quantité de mouvement :*

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.3)$$

Cette loi reste valable, sous cette forme, en mécanique relativiste. Elle s'applique à des points matériels, donc à des objets contenant de la matière. La masse étant une constante, on a donc aussi

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{a}. \quad (2.4)$$

D'après cette relation, on voit que la dimension de la force est  $[m.L.t^{-2}]$  donc  $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$ . Le newton est donc l'intensité de la force agissant sur un point matériel pesant 1 kg subissant une accélération de  $1 \text{ m s}^{-2}$ .

## 2.6 Théorème du moment cinétique pour un point matériel

Si P est un point fixe dans le référentiel galiléen considéré :

$$\frac{d\vec{L}_P}{dt} = \frac{d\vec{PM}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{PM} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{PM} \wedge \vec{F} \quad (2.5)$$

*Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un point matériel M en un point fixe P vaut le moment en P de la force qui agit en M.*

## 2.7 Principe des interactions (troisième loi de Newton)

*Si à un instant donné, un point matériel A exerce une force  $(B, \vec{F}_1)$  sur un point matériel B, alors B exerce la force  $(A, \vec{F}_2)$  telle que  $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$  et de même droite d'action (AB).*

Ce principe ne s'applique que si l'interaction se propage à une vitesse infinie. Si l'on tient compte de la propagation à la célérité de la lumière  $c$ , on ne peut plus appliquer en toute rigueur ce principe si les vitesses considérées ne sont pas négligeable devant  $c$ . D'autre part, ce principe ne s'applique qu'à des points matériels.

## 2.8 Interactions à distance

### 2.8.1 Interaction gravitationnelle

Elle suit la loi de Newton : Pour deux points matériels  $(A, m_A)$  et  $(B, m_B)$ , c'est la force de droite d'action (AB) et d'intensité  $F = \mathcal{G} \frac{m_A m_B}{AB^2}$  avec  $\mathcal{G} = 6.672 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  la constante de gravitation universelle. Elle est toujours attractive :

$$\vec{F}_{A/B} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{AB^3} \vec{AB}. \quad (2.6)$$

En un point où la masse  $m$  subit (ou subirait si elle n'est pas présente) une force de gravitation  $\vec{F}$ , le champ de gravitation est  $\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m}$ .

La théorie complète qui décrit la gravitation est la gravitation relativiste. Cette interaction serait véhiculée par des particules nommées gravitons, que l'on n'a pas encore détectés.

### 2.8.2 Interaction électromagnétique

Elle concerne les charges électriques. Une charge ponctuelle  $q$  de vitesse  $\vec{v}$  dans un champ électromagnétique caractérisé dans le référentiel considéré par les vecteurs  $\vec{E}$  (le champ électrique, en  $\text{V m}^{-1}$ ) et  $\vec{B}$  (le champ magnétique, en tesla noté T) est soumis à la force de Lorentz  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$ .

En plus de l'expression de la force de Lorentz, les lois de l'électromagnétisme comprennent les équations de Maxwell qui seront étudiées en seconde année. La théorie complète actuelle, relativiste et quantique, est l'électrodynamique quantique. Les particules qui véhiculent l'interaction électromagnétiques sont les photons. Si les objets qui créent le champ sont immobile, on parle de champ statique.

En particulier, dans le cas de deux charges ponctuelles, immobiles, l'interaction électrostatique est donnée par la loi de Coulomb. Pour deux charges ponctuelles (A,  $q_A$ ) et (B,  $q_B$ ) la force est telle que

$$\vec{F}_{A/B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{AB^3} \vec{AB}, \quad (2.7)$$

avec  $\epsilon_0 = 8.8537 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$  la permittivité électrique du vide. Cette force est attractive lorsque les charges sont de signes opposées et répulsive sinon.

### 2.8.3 Interaction forte

Elle concerne les quarks qui sont les particules fondamentales qui forment les baryons (neutron, proton, ...) et les mésons. Elles ne concernent pas les leptons (électron, positron, muon, neutrino, ...). Elle est liée à la couleur des quarks. Il y a trois couleurs : vert, bleu, et rouge et les trois anti-couleurs correspondantes magenta (antivert), jaune (antibleu) et cyan (antirouge).

Les quarks *up*, noté  $u$  et de charge  $\frac{2e}{3}$ , et *down*, noté  $d$  et de charge  $-\frac{e}{3}$  forment les constituants des nucléons : le neutre est composé d'un up et deux downs et le proton est constitué de deux ups et d'un down.

L'interaction forte est régie par les lois de la chromo-dynamique quantique. Elle est véhiculée par des gluons (il en existe 8).

Dans un nucléon, les trois quarks sont de couleurs différentes et se neutralisent comme des charges électriques opposées. Mais une molécule, bien que neutre, peut en attirer une autre du fait du décalage entre les charges positives et négatives (dipôle électrique) ; de même un nucléon, bien que neutre du point de vue de la chromo-dynamique, attire les autres nucléons. C'est pourquoi les nucléons peuvent se lier entre eux pour former des noyaux atomiques plus ou moins stables. Sans l'interaction forte, les noyaux atomiques éclateraient sous l'effet des répulsions électriques des protons.

Entre les quarks, elle semble de portée infinie comme les interactions gravitationnelle et électromagnétique et bien plus intense, avec une intensité qui semble croître avec la distance (ce qui empêche d'isoler un quark).

Mais entre les nucléons elle n'est que cent fois plus forte que l'interaction électromagnétique et sa portée est faible (de l'ordre du femtomètre).

#### 2.8.4 Interaction faible

Elle est de l'ordre de  $10^5$  fois plus faible que l'interaction forte et de portée très faible (inférieure au femtomètre). Elle intervient dans les radioactivités  $\beta^-$ ,  $\beta^+$  et la capture électronique (K-capture), c'est-à-dire :

$$d \rightarrow u + e + \bar{\nu} \quad \beta^-, \quad (2.8)$$

$$u \rightarrow d + \bar{e} + \nu \quad \beta^+, \quad (2.9)$$

$$u + e \rightarrow d + \nu \quad \text{K}. \quad (2.10)$$

Elle est véhiculée par les bosons intermédiaires  $W^+$ ,  $W^-$  et  $Z$ .

#### 2.8.5 Unification des interactions

La théorie électrofaible (1967) de Weinberg, Salam et Glashow unifie les interactions électromagnétique et faible. Dans cette théorie les interactions électromagnétique et faible apparaissent comme deux aspects d'une même interaction plus fondamentale.

On cherche à unifier l'interaction forte avec l'interaction électrofaible, voire avec l'interaction gravitationnelle, mais les tentatives actuelles (théorie des cordes, relativité d'échelle, ...) ne sont encore que des ébauches.

*Remarque :* Pour l'étude de la mécanique classique à laquelle on se limitera, les seules interactions à prendre en compte seront les interactions gravitationnelle et électromagnétique. En effet, on ne considérera que de la matière formée de particules ne changeant pas de nature et les interactions fortes et faibles ont alors des portées bien trop courtes pour qu'on ait à les prendre en considération.

### 2.9 Interactions de contact

Des objets *en contact* sont formés d'atomes et sont en interaction électromagnétique (essentiellement par l'intermédiaire de leurs nuages électroniques). Sans entrer dans les détails de ces interactions, on les appellera interactions de contact.

Pour s'en tenir aux actions subies par des objets assimilés à des points matériels, on peut envisager les cas qui suivent.

#### 2.9.1 Point matériel lié à un fil tendu de masse nulle

*Un fil tendu, de masse négligeable, exerce à ses deux extrémités des forces opposées dont la droite d'action est matérialisée par le fil. Leur sens est*

## 2.10. Exercices

---

*évident, un fil ne peut que tirer.* En fait il s'agit d'une force élastique liée à un léger allongement du fil.

### 2.9.2 Point matériel liée à une extrémité d'un ressort parfait

*Un ressort, de masse négligeable, parfaitement élastique, exerce à ses deux extrémités des forces opposées dont la droite d'action est confondue avec l'axe du ressort et dont l'intensité est proportionnelle à son allongement. Un ressort tendu tire et un ressort comprimé pousse.*

$$F_{R/M} = k |L - L_0|, \quad (2.11)$$

avec  $k$  la raideur du ressort en  $\text{N m}^{-1}$ ,  $L_0$  la longueur à vide du ressort et  $L$  la longueur du ressort. Ainsi si le ressort est attaché en un point A et la force appliqué en M on a

$$\overrightarrow{F_{R/M}} = -k(L - L_0) \frac{\overrightarrow{AM}}{L}. \quad (2.12)$$

### 2.9.3 Mouvement d'un point lié à une courbe ou à une surface

Si un point mobile reste en contact avec une surface  $\Sigma$  sans la quitter, la liaison est dite bilatérale. Tout se passe comme si M était entre deux surface parallèles  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . La force de liaison ou *réaction de la surface* a en général deux composantes : une normale (à  $\Sigma$ ) et une tangentielle (à  $\Sigma$ ) :

$$\vec{R} = \vec{R}_n + \vec{R}_t. \quad (2.13)$$

Si le point mobile peut quitter la surface sans la traverser, le contact est unilatéral. La réaction normale est alors toujours dans le sens de  $\Sigma$  vers M. Elle s'annule quand M quitte  $\Sigma$  et le problème change de nature. En l'absence de frottement,  $\vec{R}_t = \vec{0}$ . S'il y a frottement, la réaction tangentielle est de même direction que la vitesse et de sens opposé.

Si un point mobile reste en contact avec une courbe  $\Gamma$ , sa trajectoire est imposée. En l'absence de frottement,  $\vec{R}_t = \vec{0}$ . S'il y a frottement, la réaction tangentielle est de même direction que la vitesse et de sens opposé.

Pour un point lié à une surface, la direction de  $\vec{R}_n$  est imposée. Alors que pour un point lié à une courbe, elle ce l'est pas car il y a une infinité de normales en un point d'une courbe.

## 2.10 Exercices

**Exercice 2.1** (Tir dans le vide). Un canon éjecte des obus avec une vitesse de norme  $v_0 = 200 \text{ m s}^{-1}$ . On désire atteindre un objectif situé au sommet

d'une montagne de hauteur  $h = 1000$  m. On notera  $x_m$  la distance horizontale maximale entre le canon et l'objectif pour que ce soit possible et  $g$  l'accélération de la pesanteur. On suppose que le champ de pesanteur est uniforme et on néglige la résistance de l'air ainsi que les effets de rotation de la Terre.

1. Trouver la relation entre  $x_m$ ,  $v_0$ ,  $g$  et  $h$ . Calculer  $x_m$  si  $g = 10 \text{ m s}^{-2}$ .
2. On se place à la distance horizontale  $\frac{x_m}{2}$  de l'objectif et on appelle  $\alpha$  l'angle de tir. Trouver la relation entre  $x_m$ ,  $v_0$ ,  $g$ ,  $h$  et  $\alpha$ . Calculer numériquement les valeurs de  $\alpha$  en degrés et minutes.
3. Calculer la vitesse de l'obus au moment où il atteint l'objectif.

**Exercice 2.2** (Accéléromètre). Montrer que l'on peut mesurer l'accélération d'un ascenseur dans les phases uniformément variées de son mouvement avec un ressort, une masse et un double décimètre.

**Exercice 2.3** (Mouvement sans frottement sur une surface plane). On considère le mouvement d'un point matériel glissant sans frottement sur un plan incliné. On notera  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur,  $\vec{v}_0$  la vitesse initiale,  $O$  la position initiale,  $\alpha$  le rectiligne du dièdre formé par le plan incliné et le plan horizontal,  $\beta$  l'angle de  $\vec{v}_0$  avec une horizontale du plan incliné (compté positivement si  $\vec{v}_0$  est au-dessus de cette horizontale). On utilise comme repère orthogonal :  $(Ox)$  horizontale du plan incliné orienté dans le sens de  $\vec{v}_0$ ,  $(Oy)$  vers le haut dans le plan incliné et  $(Oz)$  perpendiculaire au plan vers le haut.

1. Établir les expressions vectorielles de  $\vec{a}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{OM}$  en fonction du temps  $t$ , puis donner les coordonnées  $x$  et  $y$  de  $M$  en fonction de  $t$ . En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire.
2. Exprimer la portée horizontale et la flèche de la trajectoire avec  $g$ ,  $v_0$ ,  $\alpha$  et  $\beta$ .
3. Donner la loi horaire du mouvement  $s = f(t)$  (la trajectoire étant dans le sens du mouvement et l'origine des abscisses curvilignes étant le point  $O$ ).
4. Exprimer l'accélération tangentielle et l'accélération normale, puis en déduire l'expression du rayon de courbure en fonction de la position de  $M$ , puis en fonction du temps  $t$ .

**Exercice 2.4** (Frottement proportionnel à la vitesse). Un point matériel lancé sur une droite avec une vitesse initiale de norme  $v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$  n'est soumis qu'à la force de frottement fluide  $\vec{f} = -\lambda m \vec{v}$ .

1. Le point parcourt en tout la distance  $d = 100$  m. Calculer numériquement  $\lambda$ .
2. Calculer les temps  $t_1$ ,  $t_2$ ,  $t_3$  et  $t_f$  nécessaires pour parcourir les distances respectives de 50 m, 99 m, 99.9 m, 100 m.

## 2.10. Exercices

---

3. Calculer le travail de la force de frottement de l'instant initial, à  $t_1$ , à  $t_2$ , à  $t_3$  puis à  $t_f$  sachant que  $m = 1$  g.

**Exercice 2.5** (Frottement proportionnel au carré de la vitesse). Un point matériel lancé sur une droite avec une vitesse initiale de norme  $v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$  n'est soumis qu'à la force de frottement fluide  $\vec{f} = -Kmv\vec{v}$ . Le point met  $T = 50$  s pour parcourir  $d = 50$  m.

1. Calculer numériquement  $K$ , en précisant son unité.
2. Quel temps met le point matériel pour parcourir la distance  $2d$  ?
3. Quel est le travail de la force de frottement quand le point matériel a parcouru la distance  $2d$  si  $m = 1$  kg ?

**Exercice 2.6** (Pendule simple). Un anneau, assimilé à un point matériel de masse  $m$ , glisse sans frotter sur une tige circulaire, de rayon  $r$ , placée dans un plan vertical. On repère sa position par l'angle polaire  $\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$ . Le point A étant la position la plus basse. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$  :

1. avec la relation fondamentale de la dynamique ;
2. avec le théorème du moment cinétique.



## Chapitre 3

# Applications de la relation fondamentale de la dynamique

### Sommaire

3.1	Chute libre, tir dans le vide . . . . .	23
3.2	Influence de la résistance de l'air sur le tir d'un projectile pour des vitesses faibles . . . . .	25
3.3	Tir vertical . . . . .	26
3.4	Mouvement d'un point matériel soumis à une force de rappel . . . . .	27
3.4.1	Pendule élastique horizontal . . . . .	27
3.4.2	Pendule élastique vertical . . . . .	27
3.5	Exercices . . . . .	28

### 3.1 Chute libre, tir dans le vide

Dans une région de la Terre suffisamment petite, on sait que la seule force qui s'exerce dans le référentiel terrestre sur un corps dans le vide est son poids :  $\vec{P} = m\vec{g}$ ,  $\vec{g}$  étant le champ de pesanteur, localement uniforme, vertical et orienté vers le bas. La relation fondamentale de la dynamique donne alors  $\vec{a} = \vec{g}$ , elle est nommée aussi accélération de la pesanteur. À Paris,  $g = 9.806\,65\,\text{m s}^{-2}$ .

Pour étudier le mouvement d'un projectile dans le vide, on utilise un repère cartésien lié à la terre avec O : position à  $t = 0$ , (Oz) vertical ; (Ox) dans le plan de tir formé par O et  $\vec{v}_0$ . À  $t = 0$ , on a l'angle de tir  $\alpha = (\vec{Ox}, \vec{v}_0)$ . Alors, en prenant en compte  $\vec{a} = -g\vec{u}_z$  et  $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_z$  et en

### 3.1. Chute libre, tir dans le vide

---

intégrant deux fois, on obtient :

$$\overrightarrow{OM} = v_0 t \cos \alpha \overrightarrow{u_x} + \left( v_0 t \sin \alpha - g \frac{t^2}{2} \right) \overrightarrow{u_z}. \quad (3.1)$$

Ainsi, l'équation cartésienne du mouvement est

$$y = 0 \quad z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha. \quad (3.2)$$

C'est l'équation d'une parabole d'axe vertical, dont la concavité est tournée vers le bas. Elle coupe l'axe (Oz) en  $x = 0$  et en la portée horizontale  $x = p = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$ . Le sommet de la parabole a pour coordonnées  $x = \frac{p}{2} = \frac{v_0 \cos \alpha \sin \alpha}{2}$  (par symétrie de la trajectoire). Alors la flèche vaut :

$$f = z(x = p/2) = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (3.3)$$

On constate que la portée horizontale est maximale pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  et sa valeur est  $p = \frac{v_0^2}{g}$ . La flèche est maximale lorsque  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et alors  $f_m = \frac{v_0^2}{2g}$ .

Pour atteindre un point de coordonnées données P(X, Y) avec  $X > 0$ , avec une vitesse initiale de norme  $v_0$ , l'angle de tir doit être solution de l'équation

$$Z = \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} X^2 + X \tan \alpha. \quad (3.4)$$

Notons pour simplifier l'écriture :  $u = \tan \alpha$ , alors  $1 + u^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$  et  $\alpha = \arctan u$ . Ainsi l'équation devient

$$Z = -\frac{g}{2v_0^2} (1 + u^2) X^2 + uX, \quad (3.5)$$

c'est-à-dire

$$\left( \frac{gX^2}{2v_0^2} \right) u^2 - Xu + \left( Z + \frac{gX^2}{2v_0^2} \right) = 0. \quad (3.6)$$

Cette équation n'a de solution que si son discriminant est positif, c'est-à-dire que si  $Z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gX^2}{2v_0^2}$ .

La parabole de sûreté a pour équation :

$$z = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2. \quad (3.7)$$

Son sommet a les coordonnées de  $x = 0$  et  $z = f_m$  et elle coupe l'axe (Ox) au point  $z = 0$  et  $x = p_m$ . Tout point P situé en-dessous de la parabole de sûreté peut être atteint avec deux valeurs différentes de  $\alpha$ . Tout point situé sur la parabole de sûreté n'est atteint qu'avec une seule valeur de  $\alpha$  et tout point au-dessus de la parabole ne peut être atteint.

### 3.2 Influence de la résistance de l'air sur le tir d'un projectile pour des vitesses faibles

Pour des vitesses faibles, on peut faire l'approximation suivante : la résistance de l'air est proportionnelle à la vitesse :  $\vec{f} = -k\vec{v}$ . La relation fondamentale de la dynamique donne l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{k}{m}\vec{v} = \vec{g}. \quad (3.8)$$

La solution homogène de cette équation est  $\vec{v} = \vec{C}e^{-\frac{k}{m}t}$  (où  $\vec{C}$  est un vecteur constant). Une solution particulière de l'équation complète est  $\vec{v} = \frac{m}{k}\vec{g}$ . La solution générale de l'équation différentielle est donc

$$\vec{v} = \vec{C}e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k}\vec{g}. \quad (3.9)$$

À  $t = 0$  on a  $\vec{v} = \vec{v}_0$  donc  $\vec{C} = \vec{v}_0 - \frac{m}{k}\vec{g}$ . La solution physique de cette équation est donc

$$\vec{v} = \left(\vec{v}_0 - \frac{m}{k}\vec{g}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m}{k}\vec{g} \quad (3.10)$$

En intégrant encore une fois (avec  $\vec{OM}(t=0) = \vec{0}$ ), on obtient

$$\vec{OM} = \frac{m}{k} \left(\vec{v}_0 - \frac{m}{k}\vec{g}\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) + \frac{m}{k}\vec{g}t. \quad (3.11)$$

Si on décompose dans le repère orthogonal on obtient

$$\begin{cases} x = \frac{mv_0 \cos \alpha}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) \\ z = \frac{m}{k} \left(v_0 \sin \alpha + \frac{m}{k}g\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mg}{k}t \end{cases} \quad (3.12)$$

Lorsque  $t$  tend vers l'infini la vitesse tend vers une vitesse limite verticale :  $\vec{v}_L = \frac{m}{k}\vec{g}$ . On notera donc  $v_L = \frac{m}{k}g$ . L'abscisse tend vers la valeur limite  $x_L = \frac{mv_0 \cos \alpha}{k}$ .

On peut donc écrire plus simplement :  $x = x_L \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$  d'où  $t = -\frac{m}{k} \ln \left(1 - \frac{x}{x_L}\right)$  et

$$z = \left(x_L \tan \alpha + \frac{mv_L}{k}\right) \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - v_L t. \quad (3.13)$$

D'où l'équation de la trajectoire

$$z = \left(x_L \tan \alpha + \frac{mv_L}{k}\right) \frac{x}{x_L} + \frac{mv_L}{k} \ln \left(1 - \frac{x}{x_L}\right). \quad (3.14)$$

### 3.3. Tir vertical

---

La flèche de la trajectoire s'obtient avec la résolution de l'équation  $\frac{dz}{dx} = 0$ , et on arrive à

$$f = x_L \tan \alpha - \frac{mv_L}{k} \ln \left( 1 + \frac{kx_L \tan \alpha}{mv_L} \right) = \frac{mv_0 \sin \alpha}{k} - \frac{m^2 g}{k} \ln \left( 1 + \frac{kv_0 \sin \alpha}{mg} \right). \quad (3.15)$$

De manière triviale, elle est maximale pour  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  et vaut alors  $f = \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k} \ln \left( 1 + \frac{kv_0}{mg} \right)$ .

La portée est la valeur  $x$  non nulle solution de  $z = 0$ , que l'on ne peut pas résoudre analytiquement. Néanmoins une simulation numérique montrerait qu'elle est réduite par rapport au cas sans frottements.

### 3.3 Tir vertical

Dans le cas général, la force de frottement exercée par le fluide est de la forme  $\vec{f} = -Kv^\alpha \vec{v}$  avec  $\alpha \in [0, 3]$  et  $K > 0$ . On étudiera ici le cas où la vitesse initiale est verticale, le champ de pesanteur uniforme et la poussée d'Archimède négligeable. On a alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{Kv^\alpha}{m} \vec{v} = \vec{g}. \quad (3.16)$$

Les vecteurs  $\vec{v}_0$  et  $\vec{g}$  étant verticaux, on en déduit que le mouvement se fait sur une trajectoire verticale.

On se limite maintenant au cas où  $v$  reste d'un ordre de grandeur où  $\alpha = 1$  avec  $\vec{v}_0$  vers le bas. Ainsi l'équation différentielle s'écrit

$$mg - Kv^2 = m \frac{dv}{dt}. \quad (3.17)$$

Cette équation n'est pas linéaire, on peut cependant la résoudre en utilisant la vitesse limite  $v_L = \sqrt{\frac{mg}{K}}$ , qui est une solution particulière. L'équation se réécrit

$$v_L^2 - v^2 = \frac{m}{K} \frac{dv}{dt}, \quad (3.18)$$

soit alors

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v_L^2 - v^2} = \int_0^t \frac{K}{m} dt. \quad (3.19)$$

En remarquant que  $\frac{1}{v_L^2 - v^2} = \frac{1}{2v_L} \left( \frac{1}{v_L + v} + \frac{1}{v_L - v} \right)$  on obtient

$$\frac{1}{2v_L} \left[ \ln \left( \frac{v_L + v}{v_L - v} \right) \right]_{v_0}^v = \frac{K}{m} t. \quad (3.20)$$

En isolant  $v$  de cette équation on a :

$$v = v_L \frac{(v_L + v_0) e^{\frac{2Kv_L t}{m}} - (v_L - v_0)}{(v_L + v_0) e^{\frac{2Kv_L t}{m}} + (v_L - v_0)}. \quad (3.21)$$

On remarque que lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $v$  tend vers  $v_L$ .

### 3.4 Mouvement d'un point matériel soumis à une force de rappel

#### 3.4.1 Pendule élastique horizontal

On considère un point matériel M de masse  $m$ , attaché à un ressort dont l'autre extrémité est fixe. L'ensemble est enfilé sur une tige horizontale (Ax). On suppose que le ressort est parfait, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $L_0 = AO$  et que les frottements sont négligeables.

Le point M est soumis, dans le référentiel terrestre assumé galiléen, à son poids  $\vec{P}$  vertical, à la réaction de la tige  $\vec{R}$  normale à (Ox) et à la force de rappel exercée par le ressort  $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$ .

La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\vec{P} + \vec{R} - kx\vec{u}_x = m\vec{a}. \quad (3.22)$$

La vitesse est horizontale donc  $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$  est aussi horizontale donc  $\vec{R} = -\vec{P}$  et alors on a l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.23)$$

Cette équation est celle d'un oscillateur harmonique. Le mouvement est rectiligne sinusoïdal. La solution réelle générale de cette équation est

$$x = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = X \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right). \quad (3.24)$$

Les conditions sur  $x$  et  $\dot{x}$  permettent de calculer A et B ou l'amplitude X et la phase d'origine  $\varphi$ .

#### 3.4.2 Pendule élastique vertical

On suppose maintenant que le ressort est vertical. Pour amorcer le mouvement, il faut écarter M verticalement de sa position d'équilibre, ou le lancer verticalement, ou les deux à la fois.

On prend la position d'équilibre comme l'origine de l'axe vertical descendant (Ox) et on note  $L_e$  la longueur du ressort à l'équilibre.

En négligeant encore la poussée d'Archimède et la résistance de l'air, M est soumis à son poids  $\vec{P} = mg\vec{u}_x$  et la force du ressort  $\vec{F} = -k(L_e + x - L_0)\vec{u}_x$ . L'équation différentielle du mouvement est donc

$$mg - k(L_e + x - L_0) = m\ddot{x}. \quad (3.25)$$

D'autre part on a  $mg - k(L_e - L_0) = 0$ . Alors par soustraction membre à membre de ces deux égalités, on obtient la même équation différentielle que pour le pendule élastique horizontal :

$$-kx\vec{u}_x = m\ddot{x}\vec{u}_x, \quad (3.26)$$

d'où  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$  et le même type de solution.

### 3.5 Exercices

**Exercice 3.1** (Interaction entre deux charges ponctuelles). Quatre charges ponctuelles  $q$ ,  $-2q$ ,  $2q$ , et  $-q$  sont placées respectivement aux sommets A, B, C et D d'un carré de côté  $a$ . Exprimer la force exercée par l'ensemble de ces quatre charges sur une charge ponctuelle  $q$  placée au centre O du carré, avec  $a$ ,  $q$  et les vecteurs unitaires  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  tels que  $\vec{AB} = \vec{DC} = a\vec{i}$  et  $\vec{DA} = \vec{CB} = a\vec{j}$ .

**Exercice 3.2** (Expérience de Millikan). On observe au microscope la chute d'une gouttelette sphérique d'huile dans l'air. SA vitesse est rapidement stabilisée à la valeur  $v_0$ , elle parcourt alors 4.00 mm en 12.4 s.

On admettra que la résistance de l'air oppose au mouvement de la goutte une force d'intensité  $6\pi r\eta v$ ,  $v$  étant la vitesse de la goutte,  $r$  son rayon et  $\eta$  la viscosité de l'air. On rappelle que la poussée d'Archimède a la même intensité que le poids de l'air déplacé par la goutte. On pose  $\eta = 1.80 \times 10^{-5}$  SI,  $\rho = 1260 \text{ kg/m}^3$ ,  $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$  et  $\rho' = 1.3 \text{ kg/m}^3$ .

1. Calculer le rayon de la goutte. ;
2. Les gouttes observées se chargent positivement par frottement lors de la pulvérisation de l'huile et se déplacent entre les armatures horizontales d'un condensateur, distantes de  $d = 2.00 \text{ cm}$ . Lorsque le condensateur est chargé sous une tension de  $U = 9.00 \text{ kV}$ , la goutte remonte de 4.00 mm en 15.1 s. En déduire la charge électrique  $q$  de la goutte.
3. La charge de la goutte peut varier brusquement lors de son contact avec une molécule d'air ionisée par un faisceau de rayons X. La goutte précédente portant une nouvelle charge  $q'$  est pratiquement immobile pour une tension de  $U' = 3.95 \text{ kV}$  entre les armatures du condensateur. Calculer  $q'$ . Déduire de  $q$  et  $q'$  une valeur probable de la charge élémentaire  $e$ .

**Exercice 3.3** (Masse du Soleil). La Terre et le Soleil sont assimilés à des points matériels, on considère que le Soleil est fixe. La Terre décrit en une année (365,25 jours) autour du Soleil un cercle de rayon 150 millions de kilomètres. Sachant que la masse de la Terre vaut  $m_T = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$  et la constante de gravitation universelle  $\mathcal{G} = 6.67 \times 10^{-11} \text{ SI}$ , déterminer la masse du Soleil.

**Exercice 3.4** (Pendule conique à deux fils). On suspend un point matériel M, de masse  $m$ , à un fil inextensible de longueur  $L$  et de masse négligeable fixé en  $O_1$  (de l'axe  $(Oz)$ ). Le point M subit un mouvement de rotation uniforme (de vitesse  $\omega$ ) dans le plan  $(xOy)$ . Le fil  $O_1M$  reste incliné d'un angle constant  $\alpha$  par rapport à  $(Oz)$ .

Déterminer  $\alpha$  en fonction de  $\omega$ ,  $L$ , et de l'accélération de la pesanteur  $g$ .

Maintenant, le point matériel M est relié au point  $O_2$  (qui est le symétrique de  $O_1$  par rapport à O),  $OO_1 = OO_2 = D$ . Le point M est mis

en rotation à la vitesse angulaire  $\omega$  que l'on augment progressivement. Le fil  $O_2M$  commence à se tendre pour une valeur  $\omega_1$  que l'on exprimera en fonction de  $g$  et  $D$ .

Pour  $\omega > \omega_1$ , déterminer les normes  $T_1$  et  $T_2$  des tensions respectives des fils  $O_1M$  et  $O_2M$  en fonction de  $m$ ,  $L$ ,  $\omega_1$  et  $\omega$ .

Calculer numériquement  $T_1$  et  $T_2$  pour  $L = 0.5 \text{ m}$ ,  $D = 0.3 \text{ m}$ ,  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$  et  $\omega = 7 \text{ rad s}^{-1}$ .

### 3.5. Exercices

---



## Chapitre 4

# Aspects énergétiques de la dynamique du point matériel

### Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Puissance et travail d'une force . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>4.2</b>	<b>Énergie cinétique, théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel . . . . .</b>	<b>32</b>
<b>4.3</b>	<b>Exemple d'utilisation du théorème de l'énergie cinétique . . . . .</b>	<b>33</b>
<b>4.4</b>	<b>Exemples de calculs de travaux et de puissances</b>	<b>34</b>
4.4.1	Travail du poids d'un point matériel . . . . .	34
4.4.2	Travail d'une force de rappel d'un ressort . . . . .	34
4.4.3	Travail d'une force de frottement . . . . .	35
<b>4.5</b>	<b>Énergie potentielle d'un point matérielle . . . . .</b>	<b>35</b>
4.5.1	Force conservative . . . . .	35
4.5.2	Énergie potentielle . . . . .	35
4.5.3	Énergie potentielle de pesanteur . . . . .	36
4.5.4	Énergie potentielle élastique . . . . .	36
4.5.5	Cas d'une force qui ne travaille pas . . . . .	36
<b>4.6</b>	<b>Énergie mécanique d'un point matériel, limites du mouvement . . . . .</b>	<b>36</b>
4.6.1	Définition de l'énergie mécanique et théorème de l'énergie mécanique pour un point matériel . . . . .	36
4.6.2	Limites du mouvement . . . . .	37
<b>4.7</b>	<b>Positions d'équilibre, stabilité d'un équilibre . . . . .</b>	<b>37</b>
4.7.1	Positions d'équilibre . . . . .	37
4.7.2	Stabilité d'un équilibre . . . . .	38
<b>4.8</b>	<b>Exemples d'application . . . . .</b>	<b>39</b>
4.8.1	Utilisation de l'intégrale première du mouvement pour un pendule élastique incliné . . . . .	39

4.8.2	Positions d'équilibre d'un point matériel sur un cerle . . . . .	40
4.9	Exercices . . . . .	41

## 4.1 Puissance et travail d'une force

**Définition 4.1** (Puissance). Soit  $\vec{v}$  la vitesse d'un point M dans le référentiel considéré, la puissance développée par la force  $(M, \vec{F})$  est définie comme

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (4.1)$$

Elle s'exprime en watt,  $1 \text{ W} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3}$ .

Pendant un intervalle de temps élémentaire  $dt$ , le déplacement élémentaire de M est  $d\vec{M} = \vec{v} dt$ . Le travail élémentaire effectué par la force vaut donc  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = \mathcal{P} dt$ .

On remarquera que l'on note  $\delta W$  et non  $dW$  car le travail d'une force, dans le cas général, ne dépend pas que de la position initiale et de la position finale. En d'autres termes le travail élémentaire n'est pas une forme différentielle.

**Définition 4.2** (Travail). Pour un point M qui se déplace de  $M_1$  à  $M_2$  sur une trajectoire  $\Gamma$ , le travail effectué par la force  $(M, \vec{F})$  est définie par

$$W_{1,2} = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{M} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P} dt. \quad (4.2)$$

Le travail d'une force s'exprime en joule,  $1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ . Dans le cas d'une force constante,  $W_{1,2} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2}$ .

Le produit scalaire est distributif, donc la puissance d'une somme de force vaut la somme des puissance des forces (idem pour le travail).

Lorsque M effectue un parcours fermé le long d'une courbe  $\Gamma$ , l'intégrale curviligne est notée  $\oint$  et le travail ne dépend pas du point de départ :  $W_{1,1} = W_{2,2} = \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{M}$ .

## 4.2 Énergie cinétique, théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel

**Définition 4.3** (Énergie cinétique). On considère un point matériel M de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  dans le référentiel considéré, son énergie cinétique est définie (dans ce référentiel) comme :

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2. \quad (4.3)$$

Elle s'exprime en joule

**Théorème 4.1** (Théorème de l'énergie cinétique). *La dérivée temporelle de l'énergie cinétique d'un point matériel dans un référentiel galiléen est la puissance totale des forces qui agissent sur ce point matériel :*

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}, \quad (4.4)$$

$$dE_c = \delta W, \quad (4.5)$$

$$\Delta E_c = W \quad (4.6)$$

*Démonstration.* En appliquant la relation fondamentale de la dynamique on trouve que

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m \vec{v} \cdot \vec{a} = \frac{m}{2} \frac{d\vec{v}^2}{dt} = \frac{dE_c}{dt}. \quad (4.7)$$

□

### 4.3 Exemple d'utilisation du théorème de l'énergie cinétique

Un point matériel M de masse M glisse sans frotter sur un rail circulaire (de rayon  $r$  et de centre O) contenu dans un plan vertical. On abandonne ce point sans vitesse initiale en un point  $M_0$  très voisin de la position la plus haute A. On repère sa position par l'angle polaire  $\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$ .

Pour quelle valeur de  $\theta$  le contact entre M et le rail est rompu ?

Le point M est soumis à la réaction du rail  $\vec{R}$  perpendiculaire au rail (donc aussi à  $\vec{v}$ ) et à son poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_x$ . La puissance développée par la réaction est nulle, donc son travail aussi est nul. Le travail du poids vaut :

$$W_{\vec{P}} = -mg\vec{u}_x \cdot \vec{M_0M} = -mg\vec{u}_x \cdot \vec{AM} \quad (4.8)$$

$$= -mg\vec{u}_x \cdot r((\cos \theta - 1)\vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) \quad (4.9)$$

$$= mgr(1 - \cos \theta). \quad (4.10)$$

La vitesse vaut  $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$  et donc  $E_c = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$   $E_{c0} = 0$ .

Le théorème de l'énergie cinétique donne  $E_c - E_{c0} = W_{\vec{R}} + W_{\vec{P}}$  et après simplification

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g(1 - \cos \theta)}{r}. \quad (4.11)$$

Les forces agissant sur M s'expriment en coordonnées cylindro-polaires par :

$$\vec{R} = R_\rho \vec{u}_\rho + R_z \vec{u}_z \quad (4.12)$$

$$\vec{P} = mg(-\cos \theta \vec{u}_\rho + \sin \theta \vec{u}_\theta) \quad (4.13)$$

et l'accélération par

$$\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho. \quad (4.14)$$

#### 4.4. Exemples de calculs de travaux et de puissances

---

La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\begin{cases} R_z = 0 \\ R_p - mg \cos \theta = -mr\dot{\theta}^2. \end{cases} \quad (4.15)$$

Le rail exerce une force du rail vers le point, donc on a

$$R = R_p = mg \cos \theta - mr \frac{2g(1 - \cos \theta)}{r} = mg(3 \cos \theta - 2) > 0 \quad (4.16)$$

Le contact est rompu lorsque  $R$  s'annule, c'est-à-dire pour  $\cos \theta = \frac{2}{3}$ , soit  $\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48,2^\circ$ .

### 4.4 Exemples de calculs de travaux et de puissances

#### 4.4.1 Travail du poids d'un point matériel

On notera  $(Oz)$  un axe vertical ascendant, donc  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ . Pour un déplacement élémentaire  $d\vec{M} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$ , le travail élémentaire vaut  $\delta W = -mgdz$ . Entre une position initiale  $z_1$  et une position finale  $z_2$ , le travail du poids est  $W = mg(z_2 - z_1)$ . La puissance du poids est  $\mathcal{P} = -mg\dot{z}$ .

*Le travail du poids d'un point matériel est égal au produit de son intensité par la diminution de l'altitude du point matériel.*

#### 4.4.2 Travail d'une force de rappel d'un ressort

On considère un point matériel  $M$  attaché à une extrémité libre d'un ressort parfait, l'autre extrémité  $A$  du ressort étant fixé. Le ressort exerce sur ce point la force

$$\vec{F} = -k(L - L_0) \frac{\overrightarrow{AM}}{L}. \quad (4.17)$$

Pour un déplacement élémentaire  $d\overrightarrow{AM}$  de  $M$ , le travail vaut

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{AM} \quad (4.18)$$

$$= -k \frac{L - L_0}{L} \overrightarrow{AM} d\overrightarrow{AM} \quad (4.19)$$

$$= -k \frac{L - L_0}{L} L dL \quad (4.20)$$

$$= -k \frac{L - L_0}{d} L. \quad (4.21)$$

En notant l'allongement  $\alpha = L - L_0$ , on obtient

$$\delta W = -k\alpha d\alpha \quad (4.22)$$

$$= -d\left(\frac{k\alpha^2}{2}\right). \quad (4.23)$$

Entre deux positions  $M_1$  et  $M_2$  de  $M$ , le travail de la force vaut  $W_{1,2} = \frac{k}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$ .

#### 4.4.3 Travail d'une force de frottement

Une force de frottement est toujours orientée comme  $-\vec{v}$ , donc sa puissance est négative et son travail est aussi négatif, quelque soit le déplacement.

### 4.5 Énergie potentielle d'un point matérielle

#### 4.5.1 Force conservative

**Définition 4.4.** Une force est conservative si et seulement si son travail est indépendant du chemin suivi par son point d'application.

Ce travail ne dépend donc que des positions initiale et finale du point d'application de la force. Le long d'un parcours fermé, le travail d'une force conservative est nul.

C'est le cas du poids d'un point matériel,  $W_{1,2} = mg(z_1 - z_2)$ . C'est aussi le cas de la force de rappel d'un ressort de masse négligeable dont une extrémité est fixe,  $W_{1,2} = \frac{k}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$ . Par contre, ce n'est pas le cas de la force de frottement, car son travail est négatif même pour un parcours fermé. Les frottements ne sont pas conservatifs.

#### 4.5.2 Énergie potentielle

Dans ces deux cas, le travail apparaît comme la diminution d'une fonction de la position. Cette fonction est appelée énergie potentielle.

**Définition 4.5.** Le travail d'une force conservative est égal à la diminution de l'énergie potentielle correspondante

$$W_{1,2} = E_{p1} - E_{p2}. \quad (4.24)$$

Pour un déplacement élémentaire, on a donc  $\delta W = -dE_p$ . Le travail élémentaire d'une force conservative est la différentielle d'une fonction de la position de son point d'application<sup>1</sup>. Réciproquement, si le travail élémentaire est la différentielle d'une fonction de la position, alors la force est conservative. On a l'équivalence

$$\vec{F} \text{ est conservative} \iff \exists f \delta W = df(x, y, z) = -dE_p. \quad (4.25)$$

L'énergie potentielle est donc définie à une constante près. Pour choisir une expression de l'énergie potentielle parmi toutes les expressions possibles, il faut choisir une position du point matériel pour laquelle on décide que  $E_p = 0$ .

---

1. C'est une différentielle totale exacte, alors qu'en général  $\delta W$  n'est qu'une forme différentielle.

### 4.5.3 Énergie potentielle de pesanteur

On a vu que le travail du poids d'un point matériel s'écrit  $W_{1,2} = mg(z_1 - z_2)$ , donc l'énergie potentielle de pesanteur est  $E_p = mgz + K$ . En choisissant  $E_p = 0$  pour  $z = 0$  on a  $E_p = mgz$ .

### 4.5.4 Énergie potentielle élastique

Le travail de la force exercée par l'extrémité libre d'un ressort parfaitement élastique et de masse négligeable sur un point matériel (si son autre extrémité est fixe) est  $W_{1,2} = \frac{k}{2}(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$  avec  $\alpha$  l'allongement du ressort.  $\alpha$  n'est fonction que des coordonnées du point matériel. L'énergie potentielle correspondante à cette force est l'énergie potentielle élastique. Alors  $E_p = \frac{k}{2}\alpha^2$  avec  $\alpha = L - L_0$ ,  $E_p = 0$  lorsque  $\alpha = 0$ .

### 4.5.5 Cas d'une force qui ne travaille pas

Si une force reste perpendiculaire au déplacement de son point d'application (réaction d'un fil tendu, inextensible ou réaction d'une surface en l'absence de frottements), alors son travail est nul pour tout déplacement et tout se passe comme s'il lui correspondait une énergie potentielle constante, qui est choisie nulle.

## 4.6 Énergie mécanique d'un point matériel, limites du mouvement

### 4.6.1 Définition de l'énergie mécanique et théorème de l'énergie mécanique pour un point matériel

**Définition 4.6** (Énergie mécanique). L'énergie mécanique d'un point matériel est la somme de son énergie cinétique et de toutes ses énergies potentielles. En notant  $E_p$  la somme des énergies potentielles on a

$$E_m = E_c + E_p. \quad (4.26)$$

**Théorème 4.2** (de l'énergie mécanique). *La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale au travail effectué par les forces non-conservatives auxquelles il est soumis :*

$$\Delta E_m = W_{nc}. \quad (4.27)$$

*Démonstration.* Si un point matériel est soumis à des forces conservatives effectuant le travail  $W_c$  et à des forces non-conservatives effectuant pour le même trajet  $W_{nc}$ , alors la variation de l'énergie cinétique du point matériel est

$$\Delta E_c = W_c + W_{nc}, \quad (4.28)$$

d'après le théorème de l'énergie cinétique. On vient de voir que le travail d'une force conservative est l'opposée de la variation de l'énergie potentielle

$$W_c = -\Delta E_p \quad (4.29)$$

Alors d'une part

$$\Delta E_c - W_c = \Delta E_m \quad (4.30)$$

et d'autre part

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W_{nc}. \quad (4.31)$$

Alors  $\Delta E_m = W_{nc}$ .  $\square$

Par exemple, si le point matériel est soumis à des frottements, en l'absence d'autres forces non conservatives, le travail des forces de frottements étant toujours négatif, l'énergie mécanique décroît<sup>2</sup>.

*Si aucune force non-conservative appliquée au point matériel ne travaille, son énergie mécanique est constante.*

Dans ce cas, avec un repère lié au référentiel galiléen de référence,  $E_p = f(x, y, z)$  et  $E_c = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ , avec  $E_m = E_c + E_p$ . On obtient une équation différentielle nommée *intégrale première du mouvement* :

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + f(x, y, z) = \frac{m}{2}v_0^2 + f(x_0, y_0, z_0). \quad (4.32)$$

L'indice 0 correspond à une position particulière, par exemple la position initiale.

Le nom de cette équation différentielle vient de ce que les variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  n'interviennent que par leurs premières dérivées temporelles. Alors que la relation fondamentale de la dynamique fait intervenir les dérivées secondes.

Dans le cas général, cette équation différentielle a l'inconvénient de faire apparaître les trois coordonnées.

#### 4.6.2 Limites du mouvement

Si aucune force non-conservative ne travaille, l'énergie mécanique  $E_m = E_c + E_p$  est une constante et garde donc sa valeur initiale  $E_0$ . Cependant, l'énergie cinétique est toujours positive, donc  $E_p \leq E_0$ . Les coordonnées de  $M$  ne peuvent donc varier que dans des domaines où  $E_p$  reste inférieure à l'énergie mécanique.

## 4.7 Positions d'équilibre, stabilité d'un équilibre

### 4.7.1 Positions d'équilibre

**Définition 4.7.** Une position d'équilibre est une position telle que, si le point s'y trouve avec une vitesse nulle, il reste immobile.

---

2. et elle est transformée en énergie thermique

#### 4.7. Positions d'équilibre, stabilité d'un équilibre

---

C'est donc un point où si la vitesse d'un point matériel est nulle, elle reste nulle. C'est donc un point où l'accélération est nulle si sa vitesse est nulle.

Le cas où l'accélération dépend de la vitesse se pose concrètement si une force de frottement fluide intervient, car la force de frottement fluide est du type :  $\vec{f} = -Kv^a \vec{v}$ . C'est aussi le cas s'il intervient une force magnétique  $\vec{f} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$ . Mais dans ces deux cas, si la vitesse est nulle, alors la force est nulle.

Dans le cas où seules les forces sont des forces conservatives et, éventuellement, des forces qui s'annulent avec le vitesse et des forces qui ne travaillent pas, si le point matériel se trouve avec une vitesse nulle dans une position d'équilibre, la somme des forces est nulle, son travail élémentaire est alors  $\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{M} = dE_p$ , avec  $\vec{F} = \vec{0}$ . Si  $x$  est une coordonnée de position,  $\frac{dE_p}{dx} = 0$ .

*La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point matériel soit dans une position d'équilibre est que son énergie potentielle soit extrémale, c'est-à-dire que ses dérivées spatiales soient nulles.*

##### 4.7.2 Stabilité d'un équilibre

**Définition 4.8.** Une position d'équilibre est une position d'équilibre stable pour un point matériel si et seulement si lorsque ce point est abandonné sans vitesse très près de cette position, il va vers cette position. S'il s'en écarte, il s'agit d'une position d'équilibre instable.

On supposera pour simplifier, que  $E_p$  n'est fonction que de la coordonnée  $x$  du point matériel. Soit  $dx = x - x_0$  la petite variation de la coordonnée  $x$  à partir d'une position d'équilibre  $M_0$  du point matériel  $M$ .

On a donc :

$$E_p(x) = E_p(x_0) + (x - x_0) \frac{dE_p}{dx}(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) + \dots \quad (4.33)$$

Comme c'est une position d'équilibre ( $\frac{dE_p}{dx}(x_0) = 0$ ), l'énergie potentielle a varié de

$$dE_p = -\vec{F}_c \overrightarrow{M_0M} = \frac{(x - x_0)^2}{2} \frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0). \quad (4.34)$$

Si  $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x_0) > 0$  alors  $\vec{F}_c$  est dans le sens de  $M$  vers  $M_0$ , sinon elle est dans l'autre sens.

L'équilibre est stable si et seulement si la dérivée seconde de l'énergie potentielle est positive en ce point d'équilibre.

Si la dérivée seconde est nulle, on étudie la dérivée troisième. Si la dérivée troisième est nulle, ... Si toutes les dérivées de l'énergie potentielles sont nulles, alors l'équilibre est dit indifférent.



## 4.8 Exemples d'application

### 4.8.1 Utilisation de l'intégrale première du mouvement pour un pendule élastique incliné

Soit un objet de masse  $m$  que l'on assimile à un point matériel  $M$  glissant sans frotter sur une tige rectiligne  $x'x$  inclinée d'un angle  $\alpha$  (par rapport à l'horizontale). L'objet est attaché à un ressort parfaitement élastique, de raideur  $k$  et de longueur à vide  $L_0$ , lui-même enfilé sur la même tige et dont l'autre extrémité  $A$  est fixe.

On supposera que la tige est lubrifiée et que la vitesse de  $M$  reste suffisamment faible pour que les frottements soient négligeables.

On notera  $O$  la position d'équilibre de  $M$  et on prendra l'altitude de  $O$  comme origine des altitudes. L'abscisse de  $M$  sur l'axe  $(Ox)$  est  $x$ .

Le point matériel  $M$  est soumis aux forces suivantes :

- La réaction de la tige  $\vec{R}$  perpendiculaire à  $xx'$ , donc elle ne travaille pas ;
- Son poids  $\vec{P}$ , qui est une force conservative ;
- La force de rappel exercée par le ressort  $\vec{f}$ , qui est conservative.

L'énergie potentielle de  $M$  vaut donc  $E_p = mgz + \frac{k}{2}(L - L_0)^2 + K$  (où  $K$  est une constante dont on peut choisir la valeur). En notant  $L_e$  la longueur du ressort à l'équilibre, on a

$$z = -x \sin \alpha \quad (4.35)$$

$$L - L_0 = L_e + x - L_0. \quad (4.36)$$

Donc

$$E_p = -mgx \sin \alpha + \frac{k}{2}(L_e - L_0 + x)^2 + K \quad (4.37)$$

$$= -mgx \sin \alpha + \frac{k}{2}(L_e - L_0)^2 + \frac{k}{2}x^2 + k(L_e - L_0)x + K \quad (4.38)$$

La dérivée spatiale de  $E_p$  vaut

$$\frac{dE_p}{dx} = -mg \sin \alpha + k(L_e - L_0) + kx. \quad (4.39)$$

À l'équilibre,  $x = 0$ , on a  $\frac{dE_p}{dx} = 0$  c'est-à-dire  $L_e = L_0 + \frac{mg \sin \alpha}{k}$ . Donc

$$E_p = -mgx \sin \alpha + \frac{k}{2} \left( \frac{mg \sin \alpha}{k} \right)^2 + \frac{k}{2}x^2 + k \left( \frac{mg \sin \alpha}{k} \right) x + K. \quad (4.40)$$

En choisissant  $K$  convenablement, il reste  $E_p = \frac{k}{2}x^2$ .

L'énergie cinétique s'exprime par  $E_c = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ .

Les forces étant conservatives,  $E_m = E_p + E_c$  est constantes. L'énergie mécanique garde donc sa valeur initiale  $E_0 = \frac{k}{2}x_0^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_0^2$ .

#### 4.8. Exemples d'application

---

En dérivant temporellement l'équation  $E_c + E_p = E_0$  il vient

$$kx\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} = 0. \quad (4.41)$$

On suppose que  $\dot{x} \neq 0$  (sinon il n'y a pas de mouvement) et on obtient l'équation différentielle d'un oscillateur :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (4.42)$$

Sa solution est de la forme  $x = X \cos(\omega t + \varphi)$  avec la pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , l'amplitude  $X$  et la phase à l'origine des dates sont déterminées avec les conditions initiales ...

La valeur initiale de l'énergie mécanique  $E_0$  donne les limites du mouvements, donc de l'amplitude :

$$E_p = \frac{k}{2}x^2 \leq E_0, \quad (4.43)$$

donc  $x \in \left[-\sqrt{\frac{2E_0}{k}}; \sqrt{\frac{2E_0}{k}}\right]$ , c'est-à-dire que l'amplitude est  $X = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$ .

La représentation de  $E_p$  en fonction de  $x$  et de la constante  $E_0$  fait apparaître que le point matériel se déplace dans un puits de potentiel, entre deux barrières de potentiels.

##### 4.8.2 Positions d'équilibre d'un point matériel sur un cercle

On considère un point matériel  $M$  formé par une perle de masse  $m$ , enfilée sur une tige circulaire de rayon  $r$ , placée dans un plan vertical, et glissant sans frotter sur cette tige. La perle est attachée à un ressort parfait, de longueur à vide négligeable et dont l'autre extrémité est attachée à une extrémité  $A$  du diamètre de la tige circulaire. La position  $M$  est repérée par l'angle polaire  $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ .

Déterminer les positions d'équilibres de  $M$  et préciser pour chacune leur stabilité.

Le point  $M$  est soumis à trois forces :

- son poids, qui est conservatif auquel correspond l'énergie potentielle de pesanteur  $mgy = mgr \sin \theta$  ;
- la réaction de la tige qui ne travaille pas, car elle est perpendiculaire à la vitesse ;
- la force de rappel du ressort, qui est conservative et à laquelle correspond l'énergie potentielle élastique  $\frac{k}{2}AM^2 = \frac{k}{2}\left(2r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2$ .

L'énergie potentielle totale est donc  $E_p = mgr \sin \theta + 2kr^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Les

positions d'équilibre correspondent aux zéros de la dérivée spatiale de  $E_p$  :

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \iff mgr \cos \theta + 2kr^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0 \quad (4.44)$$

$$\iff mgr \cos \theta + kr^2 \sin \theta = 0 \quad (4.45)$$

$$\iff \tan \theta = -\frac{mg}{kr} \quad (4.46)$$

$$\iff \theta \in \{\theta_1 = -\arctan\left(\frac{mg}{kr}\right), \theta_2 = \pi - \arctan\left(\frac{mg}{kr}\right)\} \quad (4.47)$$

La dérivée seconde de l'énergie potentielle vaut

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = -mgr \sin \theta + kr^2 \cos \theta. \quad (4.48)$$

Pour  $\theta = \theta_1$ ,  $\sin \theta_1 < 0$  et  $\cos \theta_1 > 0$  donc  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} > 0$  ( $E_p$  est minimale) alors que pour  $\theta_2$ ,  $\sin \theta_2 > 0$  et  $\cos \theta_2 < 0$  donc  $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} < 0$  ( $E_p$  est maximale). Ainsi :  $\theta_1$  correspond à une position d'équilibre stable alors que  $\theta_2$  correspond à une position d'équilibre instable.

## 4.9 Exercices

**Exercice 4.1** (Énergie potentielle électrostatique). Soit une charge électrique ponctuelle fixe  $Q$  en un point  $O$ , et une charge ponctuelle mobile  $q$  placée en  $M$ . Exprimer la force électrostatique exercée par  $O$  sur  $M$  et son travail élémentaire. Montrer que cette force est conservative et exprimer l'énergie potentielle électrostatique du point  $M$ , avec  $E_p$  tendant vers zéro en l'infini.

**Exercice 4.2** (Énergie potentielle gravitationnelle). Soit une masse ponctuelle fixe  $\mu$  placée en un point  $O$ , et une masse ponctuelle mobile  $m$  placée en  $M$ . Exprimer la force gravitationnelle exercée par  $O$  sur  $M$  et son travail élémentaire. Montrer que cette force est conservative et exprimer l'énergie potentielle gravitationnelle du point  $M$ , avec  $E_p$  tendant vers zéro en l'infini.

**Exercice 4.3** (Oscillations sur une gouttière cycloïdale). Soit une gouttière cycloïdale d'équations paramétriques 
$$\begin{cases} x = R(\theta + \sin \theta) \\ y = R(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad \text{avec } \theta \in [0; \pi].$$

L'axe  $(Oy)$  est vertical et orienté vers le haut. Le champ de pesanteur est uniforme et le point matériel  $M$ , de masse  $m$ , glisse sans frotter dans cette gouttière.

1. Exprimer  $\frac{dy}{dx}$  avec  $\frac{\theta}{2}$ . Tracer l'allure de cette gouttière, en montrant sur le dessin la signification géométrique de l'angle  $\frac{\theta}{2}$ .

#### 4.9. Exercices

---

2. On place l'origine des abscisses curvilignes en O et le sens positif sur la trajectoire est celui des  $x$  croissants. Exprimer  $ds$ , puis  $s$  avec  $R$  et  $\theta$ .
3. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur de M en fonction de  $\theta$ , puis en fonction de  $s$ , avec les paramètres  $m$ ,  $g$  et  $R$ .
4. Quelle est la position d'équilibre de M ? Est-elle stable ?
5. M est lâché sans vitesse initiale du point  $\theta = \frac{\pi}{2}$  à  $t = 0$ . Quelle est l'abscisse curviligne initiale ? Entre quelles valeurs  $s$  variera-t-il ?
6. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $s$  et la résoudre.

**Exercice 4.4** (Glissement sur une sphère). Un point matériel est lâché du point A de la sphère  $(O, r)$  avec une vitesse  $\vec{v}_0$  horizontale. Les frottements ne sont pas négligés.

1. Démontrer que la trajectoire de M est un cercle vertical.
2. Exprimer la relation entre  $\theta$  et  $\dot{\theta}$  à l'instant où le contact entre la sphère et M est rompu, avec les paramètres  $r$  et  $g$ .
3. Exprimer le travail  $W_f$  de la force de frottement que subit le point matériel., depuis le départ jusqu'à la rupture du contact, si le contact est rompu en  $\theta = \theta_1$ , avec  $m$ ,  $g$ ,  $r$ ,  $v_0$  et  $\theta_1$ .
4. Calculer numériquement ce travail pour les données suivantes :  $\theta_1 = 60^\circ$ ,  $r = 1$  m,  $m = 10$  g,  $g = 9.81$  m s<sup>-2</sup> et  $v_0 = 2$  m/s.

## Chapitre 5

# Oscillateurs et portraits de phase

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Oscillateur harmonique . . . . .</b>	<b>43</b>
5.1.1	Mouvement d'un point matériel sur une courbe au voisinage d'une position d'équilibre . . . . .	43
5.1.2	Oscillateur harmonique . . . . .	44
5.1.3	Aspect énergétique . . . . .	45
<b>5.2</b>	<b>Portrait de phase . . . . .</b>	<b>46</b>
5.2.1	Définitions, propriétés des trajectoires de phase . .	46
5.2.2	Portraits de phase de l'oscillateur harmonique . .	46
5.2.3	Portrait de phase du pendule pesant simple . . . .	47
<b>5.3</b>	<b>Oscillateur amorti par frottements fluides . . . .</b>	<b>49</b>
5.3.1	Équation différentielle . . . . .	49
5.3.2	Loi horaire du mouvement . . . . .	50
5.3.3	Aspect énergétique, facteur de qualité d'un oscillateur . . . . .	51
5.3.4	Portrait de phase de l'oscillateur amorti . . . . .	52
<b>5.4</b>	<b>Exercices . . . . .</b>	<b>52</b>

---

## 5.1 Oscillateur harmonique

### 5.1.1 Mouvement d'un point matériel sur une courbe au voisinage d'une position d'équilibre

Soit  $s$  l'abscisse curviligne d'un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , mobile sur une courbe et soumis à des forces conservatives et à des forces qui ne travaillent pas (de puissances nulles).

### 5.1. Oscillateur harmonique

---

Soit  $E_{p_m}$  son énergie pour une position d'équilibre stable et  $s_m$  l'abscisse curviligne correspondante. De plus  $\frac{dE_p}{ds}_m = 0$  et  $\frac{d^2E_p}{ds^2}_m > 0$ . La formule de Taylor-Young permet d'écrire :

$$E_p(s) = E_{p_m} + \frac{dE_p}{ds}_m (s - s_m) + \frac{d^2E_p}{ds^2}_m \frac{(s - s_m)^2}{2} + \dots \quad (5.1)$$

pour  $s$  au voisinage de  $s_m$ . Alors en posant  $K = \frac{d^2E_p}{ds^2}_m > 0$  on obtient

$$E_p(s) = E_{p_m} + K \frac{(s - s_m)^2}{2}. \quad (5.2)$$

En dérivant cette expression, on a au voisinage de  $s_m$  :

$$\frac{dE_p}{dt} = K \dot{s}(s - s_m). \quad (5.3)$$

Mais la puissance développée par les forces conservatives est aussi la puissance totale puisque les autres forces ne travaillent pas :  $\mathcal{P} = -\frac{dE_p}{dt}$ . En notant  $\vec{F}$  la résultante des forces que subit le point matériel, on a

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{V} = m \vec{a} \cdot \vec{v} = m \ddot{s} \dot{s}. \quad (5.4)$$

Ainsi

$$m \ddot{s} \dot{s} = -K \dot{s}(s - s_m). \quad (5.5)$$

On suppose que  $\dot{s}$  n'est pas identiquement nulle, donc on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{s} + \frac{K}{m}(s - s_m) = 0. \quad (5.6)$$

En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  et en prenant l'origine des abscisses curvilignes en  $s_m$ , l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre stable est :

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0. \quad (5.7)$$

S'il se déplace sur un cercle de rayon  $R$ , avec  $\theta = \frac{s}{R}$ , elle s'écrit aussi  $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$ . Si le point se déplace sur une droite que l'on prend alors comme axe des  $x$ , l'équation s'écrit  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ .

#### 5.1.2 Oscillateur harmonique

Tout point matériel dont la loi horaire  $X = f(t)$  est solution de l'équation différentielle  $\ddot{X} + \omega_0^2 x = 0$  est un oscillateur harmonique.

*Un point matériel au voisinage d'une position d'équilibre stable est un oscillateur harmonique.* On a déjà vu qu'un point matériel lié à un ressort

parfait dont l'autre extrémité est fixe et astreint à se déplacer sans frotter sur la droite formée par l'axe du ressort est un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  avec  $k$  la raideur du ressort et  $m$  la masse du point. On a aussi vu qu'un pendule pesant simple est un oscillateur harmonique, de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$  avec  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $L$  la longueur du pendule.

La loi horaire de l'oscillateur harmonique avec  $X = 0$  à la position d'équilibre stable s'écrit donc, avec des constantes  $A$  et  $\varphi$  :  $X = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

### 5.1.3 Aspect énergétique

Soit un point mobile sur une courbe et dont l'abscisse curviligne est solution de l'équation différentielle  $\ddot{s} + \omega_0^2(s - s_m) = 0$  (un oscillateur !). Sa loi horaire s'écrit donc :  $s = s_m + A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

On a donc, dans le domaine où cette équation est valable,

$$\dot{s}\ddot{s} + \omega_0^2\dot{s}(s - s_m) = 0. \quad (5.8)$$

En multipliant par  $m$  et en intégrant, on obtient

$$m\frac{\dot{s}^2}{2} + m\omega_0^2\frac{(s - s_m)^2}{2} = C^{st}, \quad (5.9)$$

c'est-à-dire

$$E_c + f(s) = C^{st}. \quad (5.10)$$

La quantité  $f(s) = m\omega_0^2\frac{(s - s_m)^2}{2} + B$  ( $B$  constante) est l'énergie potentielle du point matériel, et  $E_0 = C + B$  est son énergie mécanique (constante). En  $s_m$ ,  $E_p = E_{p_m} = B$ . Finalement

$$E_p = \frac{K}{2}(s - s_m)^2 + E_{p_m}, \quad (5.11)$$

avec  $K = m\omega_0^2 = \frac{d^2E_p}{ds^2}$ .

Si le mouvement est rectiligne, on notera  $x$  à la place de  $s$  ; et s'il est circulaire de rayon  $R$ , on notera  $s = R\theta$  et  $E_p = \frac{KR^2}{2}(\theta - \theta_m)^2$ .

L'allure de la courbe représentant  $E_p$  en fonction de  $s$ ,  $x$  ou  $\theta$  est une parabole. Le point se déplace dans une cuvette de potentiel. La condition  $E_p < E_0$  donne l'amplitude  $A$  du mouvement.

Bien entendu, un choix plus adéquat de l'origine des abscisses curvilignes ( $s_m = 0$ ) et de l'origine des énergie potentielles ( $E_{p_m} = 0$ ) ne fait que décaler le sommet de la parabole au point  $O$  et du coup l'énergie potentielle est transformée en  $E_p = \frac{K}{2}s^2$  et la loi horaire  $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

## 5.2 Portrait de phase

### 5.2.1 Définitions, propriétés des trajectoires de phase

On considère un point matériel à *un seul degré de liberté*. On notera ici  $X = s$  ou  $x$ , ou  $\theta$  et  $\dot{X}$  la vitesse algébrique ou la vitesse angulaire suivant les cas.

L'état de ce point est caractérisé à un instant donné par le *point de phase* de coordonnées  $X$  et  $\dot{X}$ . Le point de phase se déplace au cours du temps dans le *plan de phase* sur sa *trajectoire de phase*. L'ensemble des trajectoires de phase pour les différentes conditions initiales est le *portrait de phase* du point matériel.

Pour  $\dot{X} > 0$ ,  $X$  est croissant et pour  $\dot{X} < 0$ ,  $X$  est décroissant. Ceci donne le sens de parcours du point de phase sur la trajectoire de phase (sens horaire).

D'autre part, si  $\dot{X} = 0$ ,  $X$  est un extrémum donc la tangente à la trajectoire de phase pour  $\dot{X} = 0$  est verticale. Un tel point de phase est appelé *point de rebroussement*.

De plus

$$\frac{d\dot{X}}{dX} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dX} = \frac{\ddot{X}}{\dot{X}}. \quad (5.12)$$

Donc la tangente à la trajectoire de phase pour  $\dot{X} = 0$  est horizontale. Un tel point de phase correspond au passage du point matériel par une position d'équilibre.

Si la trajectoire de phase est une courbe fermée, le point matériel repasse aux mêmes positions avec la même vitesse. Il en résulte que le mouvement est périodique et la trajectoire de phase est parcourue dans le sens inverse du sens trigonométrique (sens horaire).

### 5.2.2 Portraits de phase de l'oscillateur harmonique

On obtient la trajectoire de phase de l'oscillateur d'équation différentielle  $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ , avec les conditions initiales  $X_0$  et  $\dot{X}_0$  et de trois façons différentes :

- *En résolvant l'équation différentielle* : On a  $X = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  et  $\dot{X} = -A \sin(\omega_0 t + \varphi)$ . De plus  $X_0 = A \cos \varphi$  et  $\dot{X}_0 = -A \omega_0 \sin \varphi$ .

Alors  $A = \sqrt{X_0^2 + \frac{\dot{X}_0^2}{\omega_0^2}}$  et  $\begin{cases} \varphi = -\arctan\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_0 X_0}\right) & X_0 > 0 \\ \varphi = \pi - \arctan\left(\frac{\dot{X}_0}{\omega_0 X_0}\right) & X_0 < 0 \end{cases}$ . Grâce à  $\sin^2 + \cos^2 = 1$ , on obtient l'équation de la trajectoire de phase :

$$\left(\frac{\dot{X}}{\omega_0 A}\right)^2 + \left(\frac{X}{A}\right)^2 = 1. \quad (5.13)$$



- Avec l'équation différentielle : En multipliant par  $2\dot{X}dt$  les deux membres de l'équation différentielle et en intégrant entre 0 et  $t$ , on obtient :

$$\int_0^t 2\dot{X}\ddot{X}dt + \omega_0^2 \int_0^t 2X\dot{X}dt = 0, \quad (5.14)$$

soit

$$\int_{\dot{X}_0}^{\dot{X}} 2\dot{X}d\dot{X} + \omega_0^2 \int_{X_0}^X 2XdX = 0, \quad (5.15)$$

c'est-à-dire

$$\dot{X}^2 + \omega_0^2 X^2 = \omega_0^2 A^2, \quad \dot{X}_0^2 + \omega_0^2 X_0^2 = \omega_0^2 A^2. \quad (5.16)$$

Finalement

$$\left( \frac{\dot{X}}{\omega_0 A} \right)^2 + \left( \frac{X}{A} \right)^2 = 1. \quad (5.17)$$

- Avec l'énergie mécanique constante : Si  $X$  représente  $x$  ou  $s$  (si c'est  $\theta$ , il faut multiplier par le rayon) alors

$$\frac{m\dot{X}^2}{2} + \frac{KX^2}{2} = \frac{m\dot{X}_0^2}{2} + \frac{KX_0^2}{2}. \quad (5.18)$$

En utilisant  $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$ , on obtient  $\dot{X}^2 + \omega_0^2 X^2 = \dot{X}_0^2 + \omega_0^2 X_0^2$  et alors

$$\left( \frac{\dot{X}}{\omega_0 A} \right)^2 + \left( \frac{X}{A} \right)^2 = 1. \quad (5.19)$$

Cette relation entre  $X$  et  $\dot{X}$  est représentée par une ellipse de demi-axes  $A$  sur  $X$  et  $\omega_0 A$  sur  $\dot{X}$ . *Le portrait de phase de l'oscillateur harmonique est un ensemble d'ellipses homothétiques dans une homothétie de centre  $O$ .*

### 5.2.3 Portrait de phase du pendule pesant simple

#### Définition, équation différentielle

*Un pendule pesant simple est un point matériel qui oscille sur un cercle vertical sous l'action de son poids.* Il peut s'agir d'un point matériel suspendu à un fil inextensible, de masse négligeable dont l'autre extrémité est fixe, à condition que la vitesse initiale ait une direction convenable. Mais dans certaines conditions, le fil peut se détendre et le point matériel quitte sa trajectoire circulaire ...

On évite ce problème de la tension du fil en considérant un point lié à un cercle vertical (anneau circulaire). On considérera ici le cas où le point matériel n'est soumis, en plus de son poids, qu'à la réaction normale du cercle sur lequel il se déplace (on néglige les frottements).

## 5.2. Portrait de phase

L'équation différentielle du mouvement s'obtient avec la conservation de l'énergie mécanique (ou avec le principe fondamental de la dynamique, ou encore avec le théorème du moment cinétique appliqué au point fixe O) :

En notant  $L$  le rayon du cercle (longueur du fil, pour le pendule simple), le moment cinétique en O est  $\vec{\sigma}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = mL^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$ . Donc  $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = mL^2 \ddot{\theta} \vec{u}_z$ .

La somme des moments en O des forces que subit M est :  $\vec{\Gamma}_0 = \vec{OM} \wedge \vec{R} + \vec{OM} \wedge \vec{P}$ . Avec  $\vec{R} = R_r \vec{u}_r + R_z \vec{u}_z$  (pas de frottements) et  $\vec{P} = mg(\cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta)$ . Alors

$$\vec{\Gamma}_0 = L \vec{u}_r \wedge ((mg \cos \theta + R_r) \vec{u}_r - mg \sin \theta \vec{u}_\theta + R_z \vec{u}_z) \quad (5.20)$$

$$= -mgL \sin \theta \vec{u}_z - LR_z \vec{u}_\theta. \quad (5.21)$$

Mais  $\frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = \vec{\Gamma}_0$ , donc  $R_z = 0$  et  $mL^2 \ddot{\theta} = -mgL \sin \theta$ . En posant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ , on obtient l'équation différentielle du mouvement du pendule pesant simple :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0. \quad (5.22)$$

### Cas des petites oscillations

Pour des mouvements de faible amplitude, on peut faire l'approximation  $\sin \theta = \theta$  et il s'agit d'un oscillateur harmonique. En notant  $\Theta$  l'amplitude du mouvement, on obtient la loi horaire  $\theta = \Theta \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . La trajectoire de phase est une ellipse d'équation

$$\left( \frac{\dot{\theta}}{\omega_0 \Theta} \right)^2 + \left( \frac{\theta}{\Theta} \right)^2 = 1, \quad (5.23)$$

ou

$$\left( \frac{\dot{\theta}}{\omega_0} \right)^2 = \Theta^2 - \theta^2 \quad (5.24)$$

avec  $\Theta = \sqrt{\theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega_0^2}}$ .

### Cas général

Dans le cas général, il n'y a pas de solution analytique de l'équation différentielle, mais on peut obtenir l'équation du portrait de phase en multipliant l'équation différentielle par  $2\dot{\theta} dt$ , on obtient

$$2\dot{\theta} d\dot{\theta} + 2\omega_0^2 \sin \theta d\theta = 0. \quad (5.25)$$

En intégrant de 0 à  $t$ , on a

$$\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}_0^2 + 2\omega_0^2(\cos \theta_0 - \cos \theta) = 0, \quad (5.26)$$

soit encore

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 = 2 \cos \theta - 2 \cos \theta_0 + \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2. \quad (5.27)$$

La condition  $\dot{\theta}^2$  (équivalente à  $E_c > 0$ ) s'écrit  $A < \cos \theta$  avec  $A = \cos \theta_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2$ . D'une part on remarque que  $A < 1$  et d'autre part que la condition est vérifiée pour tout  $\theta$  si et seulement si  $A < -1$ .

Il peut se présenter trois cas différents :

- Si  $-1 < A < 1$ , alors il existe  $\Theta = \arccos A$  et  $\cos \theta > \cos \Theta$ , soit  $-\Theta < \theta < \Theta$ . L'angle  $\Theta$  est l'amplitude des oscillations périodiques du pendule.  $\Theta = \arccos \left( \cos \theta_0 - \frac{1}{2} \left(\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_0}\right)^2 \right)$  et la trajectoire de phase a pour équation

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 = 2(\cos \theta - \cos \Theta). \quad (5.28)$$

- Si  $A < -1$ , alors l'équation de la trajectoire de phase s'écrit toujours

$$\left(\frac{\dot{\theta}}{\omega_0}\right)^2 = 2(\cos \theta - A), \quad (5.29)$$

mais toutes les valeurs de  $\theta$  sont possibles. Il y a rotation toujours dans le même sens et non oscillation. Le mouvement est périodique bien que la trajectoire de phase ne se referme pas.

- Si  $A = 1$ , alors le point de phase se déplace sur la trajectoire de phase critique. Si cela était réalisable, le point matériel s'arrêterait pour  $\theta = \pi$ , c'est-à-dire sur une position d'équilibre instable. Si cela se produit, c'est à cause de légers frottements inévitables que l'on a négligé.

## 5.3 Oscillateur amorti par frottements fluides

### 5.3.1 Équation différentielle

On considère un pendule élastique horizontal. Le point matériel M, de masse  $m$ , est soumis à son poids, à la force de rappel du ressort et à la réaction du support (composée d'une réaction normale et d'une force de frottement fluide).

En appliquant le principe fondamental de la dynamique et en projetant sur l'axe horizontal, on obtient l'équation différentielle du mouvement :

$$m\ddot{x} = -f\dot{x} - kx, \quad (5.30)$$

soit

$$\ddot{x} + \frac{f}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (5.31)$$

### 5.3. Oscillateur amorti par frottements fluides

---

En l'absence de frottements,  $M$  aurait un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  appelée pulsation propre. D'autre part, on posera le coefficient d'amortissement  $\lambda = \frac{f}{2m}$  (pour faciliter l'écriture des solutions). On réécrit l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.32)$$

#### 5.3.2 Loi horaire du mouvement

On ne résoudra ici l'équation différentielle que pour des conditions initiales simples :

$$x(t=0) = x_0 > 0 \quad \dot{x}(t=0) = 0. \quad (5.33)$$

L'équation caractéristique associée s'écrit  $u^2 + 2\lambda u + \omega_0^2 = 0$  et son discriminant réduit  $\delta = \lambda^2 - \omega_0^2$ . Trois cas différents peuvent se présenter selon la valeur de  $\delta$ .

##### Régime apériodique

Si  $\lambda > \omega_0$  ( $\delta > 0$ ), l'équation caractéristique a deux solutions réelles :  $-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ , toutes deux négatives que l'on notera  $-\alpha$  et  $-\beta$ . La solution de l'équation différentielle s'écrit

$$x = A e^{-\alpha t} + B e^{-\beta t} \quad (5.34)$$

Les conditions initiales donnent  $A = \frac{-\beta x_0}{\alpha - \beta}$  et  $B = \frac{\alpha x_0}{\alpha - \beta}$ . Alors

$$x = \frac{x_0}{\alpha - \beta} (\alpha e^{-\beta t} - \beta e^{-\alpha t}) \quad \dot{x} = \frac{\alpha\beta x_0}{\alpha - \beta} (e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}). \quad (5.35)$$

On remarque que  $x$  reste toujours positif et que  $\dot{x}$  reste toujours négatif. Il n'y a pas d'oscillations. Lorsque  $t$  tend vers l'infini,  $x$  et  $\dot{x}$  tendent vers 0.

##### Régime critique

Si  $\lambda = \omega_0$  ( $\delta = 0$ ), l'équation caractéristique a une racine double  $\lambda = \omega_0$ . La solution de l'équation s'écrit

$$x = (A + Bt) e^{-\lambda t} \quad \dot{x} = (B - \lambda A - \lambda Bt) e^{-\lambda t}. \quad (5.36)$$

Les conditions initiales donnent  $x_0 = A$  et  $B = \lambda A = \lambda x_0$  donc

$$x = x_0(1 + \lambda t) e^{-\lambda t} \quad \dot{x} = -\lambda^2 x_0 t e^{-\lambda t}. \quad (5.37)$$

Dans ce cas,  $x$  demeure toujours positif et  $\dot{x}$  demeure toujours négatif. Il n'y a pas d'oscillations. Lorsque  $t$  tend vers l'infini  $x$  et  $\dot{x}$  tendent vers zéro. Ils tendent vers zéro plus rapidement que dans le cas apériodique.

### Régime pseudopériodique

Si  $\lambda < \omega_0$  ( $\delta < 0$ ), l'équation caractéristique a deux solutions complexes  $-\lambda \pm i\sqrt{-\delta}$ . On pose  $\omega = \sqrt{-\delta}$ , soit  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ . C'est la pseudopulsation. Les solutions réelles de l'équation différentielle s'écrivent

$$x = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \quad \dot{x} = e^{-\lambda t} ((B\omega - \lambda A) \cos \omega t - (\lambda B + \omega A) \sin \omega t). \quad (5.38)$$

Les conditions initiales donnent  $x_0 = A$  et  $0 = -\lambda A + B\omega$  d'où  $B = \frac{\lambda}{\omega} x_0$ . La solution s'écrit donc

$$x = x_0 e^{-\lambda t} \left( \cos \omega t + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega t \right) \quad \dot{x} = -\frac{\omega_0^2}{\omega} x_0 e^{-\lambda t} \sin \omega t. \quad (5.39)$$

On peut aussi poser  $\varphi = -\arctan\left(\frac{\lambda}{\omega}\right)$ , d'où  $\sin \varphi = -\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \omega^2}}$  et  $\cos \varphi = \frac{\omega}{\omega_0}$ . Ainsi

$$x = \frac{\omega_0}{\omega} x_0 e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (5.40)$$

On peut dire que l'amplitude est  $X = \frac{\omega_0}{\omega} x_0 e^{-\lambda t}$ , elle décroît exponentiellement. Le graphe de  $x$  en fonction du temps oscille entre deux exponentielles  $X$  et  $-X$ .

On remarquera d'autre part que la pseudopériode  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$  est plus grande que la période propre  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ , celle de l'oscillateur non amorti. L'écart entre  $T$  et  $T_0$  croît en fonction du coefficient d'amortissement  $\lambda$ . De plus

$$\ln \left( \frac{x(t)}{x(t+T)} \right) = \ln \left( \frac{\dot{x}(t)}{\dot{x}(t+T)} \right) = \ln \left( \frac{e^{x(-\lambda t)}}{e^{x(-\lambda(t+T))}} \right) = \lambda T. \quad (5.41)$$

Le nombre  $\delta = \lambda T$  est appelé le décrement logarithmique.

#### 5.3.3 Aspect énergétique, facteur de qualité d'un oscillateur

L'énergie mécanique de l'oscillateur est  $E(t) = \frac{kx(t)^2}{2} + \frac{m\dot{x}(t)^2}{2}$ . Compte tenu du décrement logarithmique  $E(t+T) = E(t)e^{-2\lambda T}$ . L'énergie perdue par frottements en une pseudopériode est  $E(t) - E(t+T) = E(t)(1 - e^{-2\lambda T})$ .

Dans le cas d'un régime pseudopériodique d'amortissement très faible,  $2\lambda T \ll 1$ , on peut utiliser un développement limité  $e^x = 1 + x$ . On a donc

$$E(t) - E(t+T) = 2\lambda T E(t). \quad (5.42)$$

**Définition 5.1** (facteur de qualité). Le facteur de qualité est défini par la valeur du rapport sans dimension

$$Q = 2\pi \frac{E(t)}{E(t) - E(t+T)} \quad (5.43)$$

pour un régime pseudopériodique très peu amorti.

## 5.4. Exercices

---

C'est-à-dire  $Q = \frac{\omega}{2\lambda}$  mais pour un régime très peu amorti on a  $\lambda \ll \omega_0$ . Donc  $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$ . Avec  $\omega_0 = \frac{k}{m}$  et  $\lambda = \frac{f}{2m}$  on a  $Q = \frac{\sqrt{km}}{f}$ .

Plus le facteur de qualité est grand, plus on se rapproche du régime périodique d'un oscillateur harmonique.

La situation critique est telle que  $\lambda = \omega_0$ , donc le facteur de qualité vaut  $Q_{\text{critique}} = \frac{1}{2}$ .

On peut utiliser  $Q$  comme un paramètre, à la place de  $\lambda$ , dans l'équation différentielle :  $2\lambda = \frac{\omega_0}{Q}$ . L'équation différentielle s'écrit donc

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (5.44)$$

Les tracés ci-dessous donnent  $x(t)$  (pour les conditions initiales  $x = x_0$  et  $\dot{x} = 0$ ) en coordonnées réduites  $\xi = \frac{x}{x_0}$  et  $\tau = \omega_0 t$ .

Avec ces coordonnées réduites,  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt}$ , c'est-à-dire  $\dot{x} = \omega_0 x_0 \xi'$ . De même  $\ddot{x} = \omega_0^2 x_0 \xi''$ . Alors l'équation différentielle s'écrit

$$\xi'' + \frac{1}{Q} \xi' + \xi = 0. \quad (5.45)$$

Le facteur de qualité  $Q$  est donc le seul paramètre. On remarque sur ces tracés que l'oscillateur revient le plus rapidement possible à sa position d'équilibre pour le régime critique.

### 5.3.4 Portrait de phase de l'oscillateur amorti

Avec un logiciel de calcul, on obtient facilement le portrait de phase représentant la relation entre  $\dot{x}$  et  $x$  (ou entre  $\xi'$  et  $\xi$  sans dimension). On a tracé ici quelques trajectoires de phase correspondant aux mêmes conditions initiales (pour  $t = 0$   $\xi = 1$  et  $\xi' = 0$ ). Si  $Q$  est très grand, on retrouve la trajectoire de phase circulaire de l'oscillateur harmonique. Pour les autres valeurs de  $Q$ , le mouvement n'est pas périodique. La trajectoire de phase n'est donc pas une courbe fermée, elle tend vers le point de phase limite  $(0, 0)$ .

L'apparition d'oscillations pour  $Q > \frac{1}{2}$  se traduit par un changement de signe de  $\xi$ , ...

## 5.4 Exercices

# Chapitre 6

## Lois de Descartes – Prisme

### Sommaire

<b>6.1</b>	<b>Nature de la lumière . . . . .</b>	<b>53</b>
6.1.1	Vitesse de propagation, indices de réfraction . . . .	53
6.1.2	Différents domaines des ondes électromagnétiques .	54
<b>6.2</b>	<b>Propagation rectiligne . . . . .</b>	<b>54</b>
6.2.1	Hypothèse de propagation rectiligne . . . . .	54
6.2.2	Rayons lumineux . . . . .	54
<b>6.3</b>	<b>Lois de Descartes . . . . .</b>	<b>55</b>
6.3.1	Définitions . . . . .	55
6.3.2	Réflexion totale et réfraction limite . . . . .	55
<b>6.4</b>	<b>Prisme . . . . .</b>	<b>56</b>

### 6.1 Nature de la lumière

#### 6.1.1 Vitesse de propagation, indices de réfraction

Une onde progressive électromagnétique monochromatique est constituée d'un champ électrique  $\vec{E}$  et d'un champ magnétique  $\vec{B}$  vibrant en phase, perpendiculairement entre eux et perpendiculairement à la direction de propagation. Si la fréquence de la radiation électromagnétique est  $\nu$ , alors la période est  $\tau = \frac{1}{\nu}$ . Si la vitesse de propagation est  $v$ , la longueur d'onde (période spatiale) est la distance dont l'onde progresse en une période  $\lambda = v\tau$ . Dans le vide  $\lambda_0 = \frac{c}{\nu}$ .

Pour un milieu isotrope, homogène, où la vitesse de propagation est  $v$ , l'indice de réfraction absolu du milieu pour la fréquence  $\nu$  est  $N = \frac{c}{v}$ ,  $\lambda = \frac{\lambda_0}{N}$ .

Pour deux milieux 1 et 2, homogènes et optiquement isotropes, l'indice de réfraction du milieu 2 par rapport au milieu 1 est le rapport  $n_{2/1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_2}{N_1}$ . Les indices de réfraction dépendent de la fréquence de la radiation considérée.

### 6.1.2 Différents domaines des ondes électromagnétiques

Suivant la longueur d'onde dans le vide, on distingue différents domaines de radiation. La lumière visible correspond à une longueur d'onde dans le vide  $\lambda_0$  telle que

$$400 \text{ nm} < \lambda_0 < 750 \text{ nm}. \quad (6.1)$$

On distingue différentes couleurs, dans l'ordre des longueurs d'onde croissante : violet, indigo, bleu, vert, jaune, orangé, rouge. Aux longueurs d'ondes dans le vide inférieure à 400 nm jusqu'à environ 1 nm, on trouve le domaine de l'ultraviolet, puis les rayons X, les rayons  $\gamma$  et les rayons cosmiques. Aux longueurs d'ondes au-delà de 750 nm jusqu'à environ 1 mm, on trouve le domaine de l'infrarouge, puis celui des ondes radioélectriques.

Dans le domaine de la lumière proprement dite, des ultraviolets et des infrarouges l'indice absolu d'un milieu est toujours supérieur à 1 et la vitesse de la lumière dans l'air est voisine de  $c$ . On utilise couramment les indices par rapport à l'air ( $n$ ) au lieu des indices absolus ( $N$ ).

## 6.2 Propagation rectiligne

### 6.2.1 Hypothèse de propagation rectiligne

Toute l'optique géométrique repose sur l'hypothèse de la propagation rectiligne de la lumière issue d'une source ponctuelle dans le cas d'une propagation homogène. Cette hypothèse est remise en question par les phénomènes de diffraction qui deviennent appréciable chaque fois que la lumière doit passer dans des fentes dont la largeur est du même ordre (ou inférieure) que la longueur d'onde.

### 6.2.2 Rayons lumineux

**Définition 6.1.** Le trajet rectiligne de la lumière issue d'un point est un rayon lumineux.

Un faisceau isogène est formé par des rayons lumineux issu d'un point source. S'il est étroit, on parle de pinceau lumineux. Si la lumière est issue d'une source étendue, on a un faisceau complexe forme une infinité de faisceaux isogènes.

Les phénomènes de réflexion et de réfraction permettant de modifier la direction des rayons lumineux, on peut avoir des faisceaux lumineux divergents, convergents ou cylindriques.



## 6.3 Lois de Descartes

### 6.3.1 Définitions

Elles précisent le comportement d'un rayon lumineux arrivant sur une surface réfléchissante et réfringente  $\Sigma$  séparant deux milieux de propagation homogènes et isotropes.

On appelle point d'incidence le point d'intersection du rayon incident avec la surface  $\Sigma$ . La normale à  $\Sigma$  en ce point et le rayon d'incidence déterminent le plan d'incidence. L'angle entre la normale au point d'incidence et le rayon incident est l'angle d'incidence. Il y a deux rayons émergents. Le rayon émergent dans le même milieu que le rayon incident est le rayon réfléchi, et l'angle qu'il forme avec la normale au point d'incidence est l'angle de réflexion. Le rayon émergent dans le second milieu de propagation est le rayon réfracté, l'angle qu'il forme avec la normale au point d'incidence s'appelle l'angle de réfraction.

**Théorème 6.1** (Lois de Descartes pour la réflexion). *Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence. L'angle de réflexion est égal à l'angle d'incidence :  $i' = i$ .*

**Théorème 6.2** (Lois de Descartes pour la réfraction). *Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence. L'angle de réfraction  $i_2$  est tel que  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ , en notant  $i_1$  l'angle d'incidence et  $n$  l'indice des milieux.*

On remarquera que si une lumière monochromatique donnée est plus freinée par le milieu 2 que par le milieu 1, on dit que le milieu 2 est plus réfringent que le milieu 1. Dans ce cas,  $v_2 < v_1$  (ou  $n_2 > n_1$ ), et il en résulte que  $i_2 > i_1$ .

Si le milieu 2 est plus réfringent que le milieu 1, le rayon lumineux se rapproche de la normale lors du passage de la lumière.

**Théorème 6.3** (Loi du retour inverse). *Le trajet suivi par la lumière n'est pas modifié si le sens de propagation est inversé.*

### 6.3.2 Réflexion totale et réfraction limite

Soit un rayon lumineux passant du milieu 1 au milieu 2 plus réfringent ( $n_{2/1} > 1$ ). L'angle de réfraction est tel que  $n_{2/1} \sin i_2 = \sin i_1$ , donc

$$i_2 < \arcsin \left( \frac{1}{n_{2/1}} \right) = i_m. \quad (6.2)$$

L'angle limite de réfraction  $i_m$  correspond à un rayon incident longeant la surface réfringente ( $i_1 = \frac{\pi}{2}$ ).

Inversement, si la lumière passe du milieu 2 (plus réfringent) au milieu 1 (moins réfringent), l'angle d'incidence  $i_2$  ne dépassera pas la valeur  $i_m$  obtenue pour un angle de réfraction  $i_1 = \frac{\pi}{2}$ . Si l'angle d'incidence est supérieur à  $i_m$ , il y a réflexion totale.

Par exemple, si un verre a l'indice  $n = \frac{3}{2}$  par rapport à l'air, pour une lumière monochromatique donnée, l'angle limite de réfraction pour le passage de la lumière de l'air au verre (ou l'angle d'incidence à partir duquel il y a réflexion totale pour le passage du verre à l'air) est  $i_m = \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) = 41,8^\circ$

## 6.4 Prisme

Un prisme est un milieu transparent, homogène et optiquement isotrope, limité par deux faces planes et une base. On s'intéressera uniquement ici à un prisme placé dans l'air et éclairé en lumière monochromatique.

Le rectiligne du dièdre formé par les deux faces planes est nommé angle du prisme, noté souvent  $A$ . L'indice du milieu transparent par rapport à l'air est l'indice du prisme, noté  $n$ . Il dépend de la longueur d'onde dans le vide de la lumière. On s'intéresse uniquement ici au cas d'un rayon incident contenu dans un plan de section droite du prisme, c'est-à-dire dans un plan perpendiculaire à l'arête du dièdre.

La première loi de Descartes pour la réfraction implique que le trajet d'un tel rayon lumineux se fera entièrement dans un plan de section principale constitué par le plan d'incidence sur la face d'entrée.

L'angle d'incidence sur la face d'entrée sera noté  $i$  et l'angle de réfraction sur la face de sortie  $i'$ . L'angle  $i$  est compté positivement lorsque le rayon incident est du même côté de la normale à la face d'entrée que la base du prisme et négativement s'il est du même côté que l'arête. De même pour l'angle  $i'$ , il est positif si le rayon émergent est du même côté de la normale à la face de sortie que la base du prisme et négativement dans l'autre cas.

L'angle de réfraction sur la face d'entrée sera noté  $r$  et l'angle d'incidence sur la face de sortie sera noté  $r'$ . Les angles  $r$  et  $r'$  sont comptés positivement pour des rayons correspondants situés du même côté de la normale corres

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Cinématique du point matériel</b>	<b>1</b>
1.1	Espace physique et temps d'un observateur . . . . .	2
1.1.1	Notion de solide . . . . .	2
1.1.2	Espace physique . . . . .	2
1.1.3	Chronologie et définition de la seconde . . . . .	2
1.2	Mouvement et référentiel, temps absolu . . . . .	3
1.3	Notion de point matériel . . . . .	3
1.4	Complément de géométrie . . . . .	4
1.4.1	Repère, coordonnées cartésiennes . . . . .	4
1.4.2	Coordonnées cylindriques, ou cylindro-polaires . . . .	4
1.5	Trajectoire, abscisse curviligne et loi horaire . . . . .	5
1.6	Vitesse . . . . .	5
1.7	Accélération . . . . .	6
1.8	Mouvements particuliers . . . . .	6
1.8.1	Lois horaires particulières . . . . .	6
1.8.2	Mouvements rectilignes . . . . .	7
1.8.3	Mouvements à accélération constante . . . . .	7
1.8.4	Mouvements circulaires . . . . .	8
1.9	Produit vectoriel . . . . .	9
1.9.1	Définition . . . . .	9
1.9.2	Propriétés du produit vectoriel . . . . .	9
1.9.3	Norme, direction et sens du produit vectoriel, produit vectoriel nul . . . . .	9
1.9.4	Moment en un point d'un vecteur lié . . . . .	10
1.10	Exercices . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Cinématique du point matériel</b>	<b>13</b>
2.1	Masse pesante et masse inerte . . . . .	14
2.2	Quantité de mouvement et moment cinétique . . . . .	14
2.3	Principe d'inertie, référentiel galiléen . . . . .	14
2.4	Notion de force . . . . .	15
2.5	Relation fondamentale de la dynamique du point matériel (deuxième loi de Newton) . . . . .	16

2.6	Théorème du moment cinétique pour un point matériel . . .	17
2.7	Principe des interactions (troisième loi de Newton) . . . . .	17
2.8	Interactions à distance . . . . .	17
2.8.1	Interaction gravitationnelle . . . . .	17
2.8.2	Interaction électromagnétique . . . . .	18
2.8.3	Interaction forte . . . . .	18
2.8.4	Interaction faible . . . . .	19
2.8.5	Unification des interactions . . . . .	19
2.9	Interactions de contact . . . . .	19
2.9.1	Point matériel lié à un fil tendu de masse nulle . . . .	19
2.9.2	Point matériel liée à une extrémité d'un ressort parfait	20
2.9.3	Mouvement d'un point lié à une courbe ou à une surface	20
2.10	Exercices . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Applications de la relation fondamentale de la dynamique</b>	<b>23</b>
3.1	Chute libre, tir dans le vide . . . . .	23
3.2	Influence de la résistance de l'air sur le tir d'un projectile pour des vitesses faibles . . . . .	25
3.3	Tir vertical . . . . .	26
3.4	Mouvement d'un point matériel soumis à une force de rappel	27
3.4.1	Pendule élastique horizontal . . . . .	27
3.4.2	Pendule élastique vertical . . . . .	27
3.5	Exercices . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Aspects énergétiques de la dynamique du point matériel</b>	<b>31</b>
4.1	Puissance et travail d'une force . . . . .	32
4.2	Énergie cinétique, théorème de l'énergie cinétique pour un point matériel . . . . .	32
4.3	Exemple d'utilisation du théorème de l'énergie cinétique . . .	33
4.4	Exemples de calculs de travaux et de puissances . . . . .	34
4.4.1	Travail du poids d'un point matériel . . . . .	34
4.4.2	Travail d'une force de rappel d'un ressort . . . . .	34
4.4.3	Travail d'une force de frottement . . . . .	35
4.5	Énergie potentielle d'un point matérielle . . . . .	35
4.5.1	Force conservative . . . . .	35
4.5.2	Énergie potentielle . . . . .	35
4.5.3	Énergie potentielle de pesanteur . . . . .	36
4.5.4	Énergie potentielle élastique . . . . .	36
4.5.5	Cas d'une force qui ne travaille pas . . . . .	36
4.6	Énergie mécanique d'un point matériel, limites du mouvement	36
4.6.1	Définition de l'énergie mécanique et théorème de l'éner- gie mécanique pour un point matériel . . . . .	36
4.6.2	Limites du mouvement . . . . .	37
4.7	Positions d'équilibre, stabilité d'un équilibre . . . . .	37

4.7.1	Positions d'équilibre . . . . .	37
4.7.2	Stabilité d'un équilibre . . . . .	38
4.8	Exemples d'application . . . . .	39
4.8.1	Utilisation de l'intégrale première du mouvement pour un pendule élastique incliné . . . . .	39
4.8.2	Positions d'équilibre d'un point matériel sur un cercle	40
4.9	Exercices . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Oscillateurs et portraits de phase</b>	<b>43</b>
5.1	Oscillateur harmonique . . . . .	43
5.1.1	Mouvement d'un point matériel sur une courbe au voi- sinage d'une position d'équilibre . . . . .	43
5.1.2	Oscillateur harmonique . . . . .	44
5.1.3	Aspect énergétique . . . . .	45
5.2	Portrait de phase . . . . .	46
5.2.1	Définitions, propriétés des trajectoires de phase . . . .	46
5.2.2	Portraits de phase de l'oscillateur harmonique . . . . .	46
5.2.3	Portrait de phase du pendule pesant simple . . . . .	47
5.3	Oscillateur amorti par frottements fluides . . . . .	49
5.3.1	Équation différentielle . . . . .	49
5.3.2	Loi horaire du mouvement . . . . .	50
5.3.3	Aspect énergétique, facteur de qualité d'un oscillateur	51
5.3.4	Portrait de phase de l'oscillateur amorti . . . . .	52
5.4	Exercices . . . . .	52
<b>6</b>	<b>Lois de Descartes – Prisme</b>	<b>53</b>
6.1	Nature de la lumière . . . . .	53
6.1.1	Vitesse de propagation, indices de réfraction . . . . .	53
6.1.2	Différents domaines des ondes électromagnétiques . . .	54
6.2	Propagation rectiligne . . . . .	54
6.2.1	Hypothèse de propagation rectiligne . . . . .	54
6.2.2	Rayons lumineux . . . . .	54
6.3	Lois de Descartes . . . . .	55
6.3.1	Définitions . . . . .	55
6.3.2	Réflexion totale et réfraction limite . . . . .	55
6.4	Prisme . . . . .	56