Movimiento Browniano en finanzas: el modelo de Black-Scholes

SEBASTIÁN ACUÑA U. Y MARTÍN DIDYK B.

Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

ABSTRACT: El *modelo de Black-Scholes* es un modelo de gran importancia en el mundo financiero y del mercado de acciones ya que permite calcular el precio que debe tener una *opción*.

Una *opción* es un contrato entre dos partes (vendedor y comprador), donde el comprador tiene el derecho, pero no la obligación, de comprar una acción a un precio y en una fecha estipulados.

Entre las variables del modelo se encuentran el precio actual del activo en el mercado S, el precio estipulado de compra del activo K (también conocido como *Strike Price*), la volatilidad del activo σ, el momento T en que se ejercerá la opción y la tasa de interés libre de riesgo r, congruente con el tiempo transcurrido entre la compra y la fecha de expiración de la opción.

En el presente proyecto, mediante el uso de lo visto en clases sobre el BM, se implementará el modelo Black-Scholes como una SDE que será resuelta numéricamente con el método de Euler, para posteriormente utilizar una fórmula con la que se realizarán comparaciones y luego se determinará el precio de una opción de compra para algunos activos del mercado de valores.

Implementación

Tenemos la siguiente EDP:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Donde $V(S,t)$ es la función a optimizar, que corresponde al valor de la opción en función del precio actual del activo en el mercado (S) y el tiempo en que se ejercerá (t). Aquí, el precio del activo a través del tiempo S_t, se modela como una SDE de la forma:

$$dSt = \mu_t S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Donde $\{W_t\}_{t\geq 0}$ es un movimiento browniano, μ_t es una función de t y $\sigma > 0$ es un indicador de la volatilidad del activo. Acorde a esto, asumiendo que μ_t es una constante, tenemos una SDE geométrica con solución conocida. Luego al aplicar esta solución a la ecuación de Black-Scholes transformada a una SDE, se obtiene como solución:

$$
\begin{aligned}
C(S_t, t) &= \Phi(d_1)S_t - \Phi(d_2)Ke^{-r(T-t)} \\
d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left[\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right] \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t}
\end{aligned}
$$

Donde Φ corresponde a la distribución normal acumulada.

Referencias

[1] Manafian, J. & Paknezhad, M.. (2017, diciembre). *Analytical solutions for the Black-Scholes equation.* Applications and Applied Mathematics, 12, pp.843-852.

[2] *Black-Scholes model.* (s. f.). Wikipedia. Recuperado 20 de diciembre de 2021, de `https://en.wikipedia.org/wiki/Black?Scholes_model`

[3] Ermogenous, A.. (2006). *Brownian Motion and Its Applications In The Stock Market.* Recuperado 20 de diciembre de 2021, de University of Dayton. Sitio web: `https://ecommons.udayton.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1010&context=mth_epumd`