



Universidade Federal do Piauí 2014



Controle Digital

Prof. Otacílio da Mota Almeida

Identificação de Sistemas Representado por Equações à Diferenças

4 – Introdução

Os principais objetivos deste capítulo são:

- i) familiarizar com a derivação, propriedades e utilização do algoritmo dos mínimos quadrados recursivo (*MQR*) quando aplicado na estimação de sistemas lineares discretos *SISO* (*Single-Input and Single-Output*) com parâmetros desconhecidos e/ou variantes no tempo;
- ii) viabilizar a utilização do estimador dos *MQR* em aplicações de controle adaptativo, isto é, no contexto de algoritmos de controle auto-ajustável (*self-tuning control*).

Exemplos de Aplicações Livro do Aguirre

FORMALISMO HISTÓRICO DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Karl Friedrich Gauss formulou o *Princípio dos Mínimos Quadrados* ao final do século 18 para previsão da trajetória de planetas e cometas a partir das observações realizadas. K. F. Gauss estabeleceu que os parâmetros desconhecidos de um modelo matemático deveriam ser selecionados de modo que

“o valor mais provável das grandezas desconhecidas é a que minimiza a soma dos quadrados da diferença entre os valores atualmente observados e os valores calculados multiplicados por números que medem o grau de precisão, onde quanto mais precisa a medida maior a sua ponderação”

4.1 ESTIMADOR DOS MÍNIMOS QUADRADOS NÃO-RECURSIVO

Considere um processo físico caracterizado por uma entrada, $u(t)$, uma saída, $y(t)$, uma perturbação $e(t)$ e com função de transferência discreta linear da forma

$$A(z-1)y(t) = z^{-d}B(z-1)u(t) + e(t) \quad (4.1)$$

onde

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{na}z^{-na}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_nbz^{-nb}$$

e cuja representação por uma equação a diferenças é

$$y(t) = -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) - \dots - a_{na}y(t-na) + b_0u(t-d) + b_1u(t-d-1) + \dots + b_nb u(t-d-nb) + e(t) \quad (4.2)$$

Observações:

- Para o modelo da equação (4.2) tem-se $(na + nb + 1)$ parâmetros a estimar;
- Para determinar os ai ($i = 1, \dots, na$) e bj ($j = 0, \dots, nb$) deve-se utilizar as medidas de entrada e saída do processo;
- O termo $e(t)$ pode representar o erro de modelagem, o erro de medição ou o ruído na saída do tipo estocástico, determinístico ou *offset*.

Definindo-se o vetor de medidas, $\varphi(t)$, com dimensão $[(na + nb + 1) \times 1]$

$$\varphi^T(t) = [-y(t-1) -y(t-2) \dots -y(t-na) u(t-d) \dots u(t-d-nb)] \quad (4.3)$$

e o vetor de parâmetros, $\theta(t)$, com dimensão $[(na + nb + 1) \times 1]$

$$\theta^T(t) = [a_1 a_2 \dots a_{na} b_0 b_1 \dots b_{nb}] \quad (4.4)$$

pode-se reescrever a equação (42) como

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta(t) + e(t) \quad (4.5)$$

que é denominado modelo de regressão linear.

Admitindo que são realizadas N medidas, suficiente para determinar os parâmetros a_i e b_j , então tem-se que

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \dots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi^T(0) \\ \phi^T(1) \\ \dots \\ \phi^T(N-1) \end{bmatrix} \theta + \begin{bmatrix} e(0) \\ e(1) \\ \dots \\ e(N-1) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A representação matricial da equação (4.6) é

$$Y = \phi\theta + E \quad (4.7)$$

onde a matriz de observação é

$$\phi = \begin{bmatrix} -y(-1) & -y(-2) & \dots & -y(-na) & u(-d) & u(-d-1) & \dots & u(-d-nb) \\ -y(0) & -y(-1) & \dots & -y(1-na) & u(1-d) & u(-d) & \dots & u(1-d-nb) \\ -y(1) & -y(0) & \dots & -y(2-na) & u(2-d) & u(1-d) & \dots & u(2-d-nb) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -y(N-1) & -y(N-2) & \dots & -y(N-na) & u(N-d) & u(N-d-1) & \dots & u(N-d-nb) \end{bmatrix}$$

e o vetor de saída é dado por

$$Y^T = [y(0) \ y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N-1)]$$

Observação:

A matriz ϕ não é quadrada, isto é, o número de linhas é maior do que o de colunas.

A estimativa do vetor de parâmetros, $\hat{\theta}$ pode ser obtida pelo procedimento dos mínimos quadrados (least squares approach). Utilizando a estimativa $\hat{\theta}$, a melhor previsão da saída do sistema, \hat{y} , é calculada por

$$\hat{Y} = \phi \hat{\theta} \quad (4.8)$$

e o erro de previsão, ε , é avaliado de acordo com

$$\varepsilon = Y - \hat{Y} = Y - \phi \hat{\theta} \quad (4.9)$$

O estimador dos mínimos quadrados ponderado, também denominado de estimador de *Markov*, é obtido minimizando o seguinte critério

$$J = \min_{\hat{\theta}} \|Y - \phi \hat{\theta}\|_w^2 \quad (4.10)$$

ou

$$J = [Y - \phi \hat{\theta}]^T W [Y - \phi \hat{\theta}] \quad (4.11)$$

e sendo a matriz W simétrica e definida positiva, isto é

$$W = \begin{bmatrix} w(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w(1) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & w(N-1) \end{bmatrix}$$

onde $w(i)$ é a ponderação em cada componente do erro e função da precisão da medida (mais precisa a medida maior é a ponderação).

Derivando a equação (4.11) em relação a $\hat{\theta}$ e igualando a zero tem-se que

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = -2(Y^T W \phi)^T + 2\phi^T W \phi \hat{\theta} = 0$$

Assim, o estimador dos mínimos quadrados ponderado é calculado por

$$\hat{\theta} = [\phi^T W \phi]^{-1} \phi^T W Y \quad (4.12)$$

e isto conduz ao mínimo se

$$\frac{\partial J^2}{\partial \hat{\theta}^2} = 2\phi^T W \phi > 0$$

e, portanto, $(\phi^T W \phi)$ deve ser uma matriz não-singular (*full rank*). ,

Observações:

- $J = (Y - \phi\hat{\theta})^T W (Y - \phi\hat{\theta}) = Y^T W Y - Y^T W \phi \hat{\theta} - \hat{\theta}^T \phi^T W Y + \hat{\theta}^T \phi^T W \phi \hat{\theta}$
- $W = W^T$;
- $\frac{d}{dm}(m^T A m) = 2 A m$
- $\frac{d}{dm}(b^T m) = b$

o vetor $\hat{\theta}$ pode ser obtido desde que $(\phi^T W \phi)$ seja uma matriz definida positiva;

- O sistema deve estar persistentemente excitado para evitar o caso de linhas comuns na matriz ϕ (colunas linearmente dependentes)
- O estimador dos mínimos quadrados não-recursivo é obtido admitindo que

$$W = \sigma^2 I_N$$

isto é, a mesma ponderação em todos os erros de medida.

Observações continuação:

Logo, a equação (4.12) torna-se

$$\hat{\theta} = \left[\frac{1}{\sigma^2} \right] [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T [\sigma^2] Y$$

$$\hat{\theta} = [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T Y \quad (4.13)$$

O estimador dos mínimos quadrados, equação (5.13), é uma transformação linear sobre Y (função linear das medidas) e, assim, é denominado *estimador linear*.

Observações continuação:

- a condição de que a matriz $(\phi^T \phi)$ é inversível é denominada condição de excitação
- o critério dos mínimos quadrados pondera todos os erros, $\varepsilon(i)$, igualmente e isto corresponde a suposição de que todas as medidas têm a mesma precisão
- a dimensão de $(\phi^T \phi)$ é

$$([n_a + n_b + 1] \times [n_a + n_b + 1]);$$

- na aplicação do estimador dos mínimos quadrados todas as medidas devem estar disponíveis a priori para análise, e não existe limitação no tempo de processamento do algoritmo (identificação *off-line*)

Os exemplos (4.1) e (4.2) discutem algumas importantes características do estimador dos mínimos quadrados dado pela equação (4.13).

Exemplo 5.1 - Seja um processo sem atraso de transporte representado por

$$y(t) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1) + e(t)$$

A matriz ϕ para N amostras é caracterizada por

$$\phi = \begin{bmatrix} u(t) & u(t-1) \\ u(t+1) & u(t) \\ \dots & \dots \\ u(t+N) & u(t+N-1) \end{bmatrix}$$

para os parâmetros estimados \hat{b}_0 e \hat{b}_1

A matriz $(\phi^T \phi)$ é então calculada por

$$\phi^T \phi = \begin{bmatrix} u(t) & u(t+1) & \dots & u(t+N) \\ u(t-1) & u(t) & \dots & u(t+N-1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) & u(t-1) \\ u(t+1) & u(t) \\ \dots & \dots \\ u(t+N) & u(t+N-1) \end{bmatrix}$$

$$\phi^T \phi = \begin{bmatrix} \sum_{i=t}^{t+N} u^2(i) & \sum_{i=t}^{t+N} u(i)u(i-1) \\ \sum_{i=t}^{t+N} u(i-1)u(i) & \sum_{i=t}^{t+N} u^2(i-1) \end{bmatrix}$$

- Considerações:
 - i) a dimensão de $(\phi^T \phi)$ depende do número de parâmetros desconhecidos (não do número de amostras). Neste caso a matriz é (2×2) . Para m parâmetros desconhecidos a matriz tem dimensão $(m \times m)$;
 - ii) a matriz $(\phi^T \phi)$ é simétrica de modo que somente a parte triangular superior (ou inferior) precisa ser calculada;
- se $u(t)$ é uma constante, $u(t) = u_0$, então

$$y(t) = (b_0 + b_1) u_0 + e(t)$$

a matriz $(\phi^T \phi)$ é dada por

$$\phi^T \phi = N u_0 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e, assim, a matriz $(\phi^T \phi)$ é singular e uma solução única (mínimos quadrados) não pode ser obtida porque $(\phi^T \phi)$ não é inversível. Para a solução ser obtida então $u(t)$ deve variar suficientemente para garantir que

$$\det \{ \phi^T \phi \} \neq 0$$

Quando N cresce. Esta condição está usualmente associada com o termo suficientemente excitado. No contexto de controle adaptativo é importante que $u(t)$ mude suficientemente para evitar um *rank* deficiente para a matriz $(\phi^T \phi)$;

A precisão das estimativas está associada ao tamanho dos elementos da matriz de covariância, que por definição é

$$P(t) = [\phi^T(t)\phi(t)]^{-1} \Rightarrow \text{variabilidade dos parâmetros estimados}$$

Exemplo 5.2 - Obter a função de transferência estimada para um processo representado pelo seguinte modelo matemático

$$y(t) = b_0 u(t) + b_1 u(t-1)$$

utilizando o estimador dos mínimos quadrados (procedimento *off-line*). Determinar as estimativas para $\hat{\theta}$ dos parâmetros \hat{b}_0 e \hat{b}_1 para $N = 7, 8, \dots, 14$ considerando as medidas de entrada e saída de acordo com a tabela, ou seja

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
u(t)	1	0.8	0.6	0.4	0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.4	0.2
y(t)	0.9	2.5	2.4	1.3	1.2	0.8	0	0.9	1.4	1.9	2.3	2.4	.23	1.3	1.2

Para $N = 7$ tem-se

$$\begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ y(4) \\ y(5) \\ y(6) \\ y(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(1) & u(0) \\ u(2) & u(1) \\ u(3) & u(2) \\ u(4) & u(3) \\ u(5) & u(4) \\ u(6) & u(5) \\ u(7) & u(6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ e(4) \\ e(5) \\ e(6) \\ e(7) \end{bmatrix}$$

Substituindo-se os valores numéricos da tabela obtém-se

$$\begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.4 \\ 1.3 \\ 1.2 \\ 0.8 \\ 0 \\ 0.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_0 \\ \hat{b}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ e(4) \\ e(5) \\ e(6) \\ e(7) \end{bmatrix}$$

A estimativa ótima para \hat{b}_0 e \hat{b}_1 é

$$\hat{\theta} = [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T Y$$

e calculada de acordo com

$$(\phi^T \phi) = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 1 \\ 0.6 & 0.8 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.2 & 0.4 \\ 0 & 0.2 \\ 0.2 & 0 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

$$(\phi^T \phi) = \begin{bmatrix} 1.4 & 1.68 \\ 1.68 & 2.24 \end{bmatrix}$$

$$(\phi^T \phi)^{-1} = \begin{bmatrix} 7.143 & -5.357 \\ -5.357 & 4.464 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 7.143 & -5.357 \\ -5.357 & 4.464 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 & 0.4 \\ 1 & 0.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.4 \\ 1.3 \\ 1.2 \\ 0.8 \\ 0 \\ 0.9 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\theta} = \begin{bmatrix} 0.322 \\ 2.446 \end{bmatrix}$$

A tabela (4.1) mostra que com o aumento do número de medidas melhora-se o desempenho (precisão) do estimador

Tabela 4.1 - Estimativas de \hat{b}_0 e \hat{b}_1

N	\hat{b}_0	\hat{b}_1
7	0.322	2.446
8	0.607	2.256
9	0.661	2.222
10	0.573	2.272
11	0.662	2.116
12	0.606	2.199
13	0.681	2.104
14	0.611	2.181

Tabela 4.1 – Programação em Matlab do estimador dos mínimos quadrados.

```
% ESTIMADOR DOS MINIMOS QUADRADOS NAO-RECURSIVO
```

```
% ESTIMACAO DE UM PROCESSO DE SEGUNDA ORDEM
```

```
Clear all;
```

```
load medidas.dat
```

```
npts=100;
```

```
u=medidas(1:npts,1); y=medidas(1:npts,2); Y=[ ]; fi=[ ];
```

```
for j=1:npts
```

```
if j<=2
```

```
    y1=0; y2=0; u1=0; u2=0;
```

```
    else y1=y(j-1); y2=y(j-2); u1=u(j-1); u2=u(j-2);
```

```
end;
```

```
    Y=[Y; y(j)]; fi=[fi; -y1 -y2 u1 u2];
```

```
end;
```

```
teta=inv(fi'*fi)*fi'*Y
```

```
for t=1:2,
```

```
    yest(t)=0;
```

```
end;
```

```
a1=teta(1) ; a2=teta(2) ; b1=teta(3) ; b2=teta(4);
```

```
for t=3:npts,
```

```
    yest(t)=-a1*yest(t-1)-a2*yest(t-2)+b1*u(t-1)+b2*u(t-2);
```

```
end;
```

```
plot(y,'g'); hold on; plot(yest,'r');
```

4.2 PROPRIEDADES DO ESTIMADOR DOS MÍNIMOS QUADRADOS

- O estimador dos mínimos quadrados $\hat{\theta}$ é uma variável aleatória, onde as propriedades podem ser analisadas utilizando-se a equação a diferenças do processo, ou seja:

$$y(t) = \phi^T(t)\theta(t) + e(t)$$

a qual define a saída real e perturbações. As duas importantes propriedades são: polarização (*bias*) e covariância (*covariance*), isto é

- O estimador é não-polarizado (os parâmetros estimados convergem para os parâmetros verdadeiros quando o número de iterações aumenta) se a perturbação é um ruído branco (média nula e variância σ_e^2 , e $y(t)$, $u(t)$ são estatisticamente independentes de $e(t)$;

$$\text{Cov}(\hat{\theta}) = \sigma_e^2 [\phi^T \phi]^{-1}$$

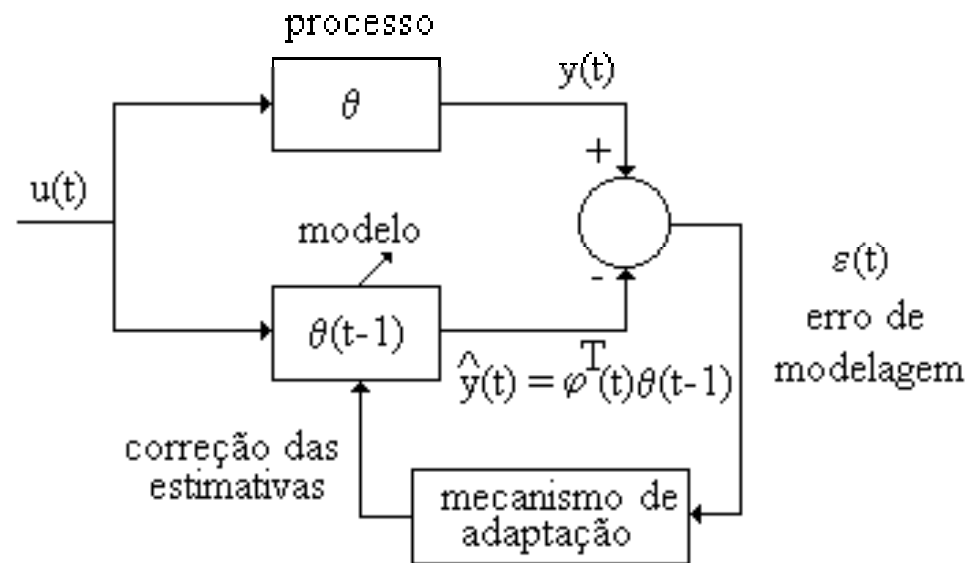
fornece a medida direta da variabilidade e covariabilidade dos parâmetros estimados (a precisão das estimativas é estabelecida pelo tamanho dos elementos da matriz de covariância);

o estimador dos mínimos quadrados é não-polarizado e consistente (*BLUE - Best Linear Unbiased Estimate*) se

$$\begin{array}{ccc} E[(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T] & \leq & E[(\theta^* - \theta)(\theta^* - \theta)^T] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Melhor estimativa} & & \text{Qualquer estimativa} \end{array}$$
$$\Rightarrow \quad \|\hat{\theta}(t) - \theta\| \leq \|\hat{\theta}(t-1) - \theta\| \leq \dots \leq \|\hat{\theta}(0) - \theta\| \quad \text{para } t \geq 1$$

4.3 ESTIMADOR DOS MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO

Procedimento iterativo na estimação de parâmetros. .



- supervisão,
- rastreamento de parâmetros variantes para controle adaptativo,
- filtragem,
- previsão,
- processamento de sinais,
- detecção e diagnóstico.

-Observações:

-a quantidade de dados armazenada no estimador recursivo é pequena se comparada com o estimador não-recursivo;

-outros nomes atribuídos na literatura ao estimador recursivo são: estimação seqüencial, identificação em tempo real, identificação *on-line*.

4.3.1 DERIVAÇÃO DO ESTIMADOR *MQR*

Para o desenvolvimento das equações do estimador dos *MQR* deve-se comparar a estimativa baseada nas medidas em instantes que variam de 1 (*um*) até *t* com a estimativa baseada nas medidas nos instantes de 1 (*um*) até (*t+1*).

Conforme já visto o estimador dos mínimos quadrados é calculado por

$$\hat{\theta}(t) = [\phi^T \phi]^{-1} \phi^T Y \quad \text{com} \quad \phi(t) = \begin{bmatrix} \phi^T(1) \\ \phi^T(2) \\ \dots \\ \phi^T(t) \end{bmatrix} ; \quad Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Supor que no instante (*t + 1*) obtém-se nova medida do sistema, então os vetores de medida e saída são reescritos como

$$\phi(t+1) = \begin{bmatrix} \phi^T(1) \\ \phi^T(2) \\ \dots \\ \phi^T(t) \\ \phi^T(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \phi^T(t+1) \end{bmatrix} \quad Y(t+1) = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \dots \\ y(t) \\ y(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(t) \\ y(t+1) \end{bmatrix}$$

As estimativas no instante de tempo t são

$$\hat{\theta}(t) = [\phi^T(t)\phi(t)]^{-1} \phi^T(t)Y(t)$$

enquanto que no instante $(t+1)$ são dadas por

$$\hat{\theta}(t+1) = [\phi^T(t+1)\phi(t+1)]^{-1} \phi^T(t+1)Y(t+1) \quad (4.15)$$

onde

$$\phi^T(t+1)\phi(t+1) = \begin{bmatrix} \phi^T(t) & \varphi(t+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi(t) \\ \varphi^T(t+1) \end{bmatrix}$$

$$\phi^T(t+1)\phi(t+1) = \phi^T(t)\phi(t) + \varphi(t+1)\varphi^T(t+1) \quad (4.16)$$

Uma vez conhecido $\varphi(t+1)$ pode-se atualizar a matriz anterior das correlações $\phi^T(t)\phi(t)$ para obter a matriz atual $\phi^T(t+1)\phi(t+1)$. Entretanto, é necessário encontrar uma maneira de atualizar a inversa de $\phi^T(t)\phi(t)$ sem calcular a matriz inversa em cada instante de tempo.

Adicionalmente, necessita-se atualizar o termo $\phi^T(t+1)Y(t+1)$, isto é

$$\begin{aligned}\phi^T(t+1)Y(t+1) &= \begin{bmatrix} \phi^T(t) & \varphi(t+1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y(t) \\ y(t+1) \end{bmatrix} \\ \phi^T(t+1)Y(t+1) &= \phi^T(t)Y(t) + \varphi(t+1)y(t+1)\end{aligned}\tag{4.17}$$

Sejam as seguintes definições

$$P(t) = [\phi^T(t)\phi(t)]^{-1}\tag{4.18}$$

$$R(t) = \phi^T(t)Y(t)\tag{4.19}$$

Substituindo as equações (4.18) e (4.19) na equação (4.15) obtém-se

$$\hat{\theta}(t+1) = P(t+1)R(t+1) \quad \text{ou então} \quad \hat{\theta}(t) = P(t)R(t)\tag{4.20}$$

enquanto que das equações (4.16) e (4.17) encontra-se

$$P^{-1}(t+1) = P^{-1}(t) + \varphi(t+1)\varphi^T(t+1)\tag{4.21}$$

$$R(t+1) = R(t) + \varphi(t+1)y(t+1)\tag{4.22}$$

A equação (4.22) fornece uma atualização direta de $R(t)$ para $R(t+1)$. A atualização de $P(t)$ para $P(t+1)$ pode ser obtida pela equação (4.21) aplicando-se a seguinte identidade

$$(A + BCD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}B(C^{-1} + DA^{-1}B)^{-1}DA^{-1}$$

Considerando o termo do lado direito da equação (4.21), isto é

$$[P^{-1}(t) + \varphi(t+1)\varphi^T(t+1)]^{-1}$$

onde $A = P^{-1}(t)$, $C = 1$, $B = \varphi(t+1)$ e $D = \varphi^T(t+1)$,

obtem-se

$$P(t+1) = P(t)[I - \varphi(t+1)\{1 + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)\}^{-1}\varphi^T(t+1)P(t)]$$

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P(t)\varphi(t+1)\varphi^T(t+1)P(t)}{1 + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)} \quad (4.23)$$

onde $\{1 + \varphi^T(t+1)P(t)\varphi(t+1)\}$ é um escalar

De acordo com a equação do erro de previsão

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \varphi^T(t+1) \hat{\theta}(t)$$

a equação (4.22) torna-se

$$\begin{aligned} R(t+1) &= R(t) + \varphi(t+1) \{ \varepsilon(t+1) + \varphi^T(t+1) \hat{\theta}(t) \} \\ R(t+1) &= R(t) + \varphi(t+1) \varepsilon(t+1) + \varphi(t+1) \varphi^T(t+1) \hat{\theta}(t) \end{aligned} \quad (5.24)$$

Substituindo as equações (5.16) e (5.20) na equação (5.24) resulta

$$\begin{aligned} P^{-1}(t+1) \hat{\theta}(t+1) &= P^{-1}(t) \hat{\theta}(t) + \varphi(t+1) \varepsilon(t+1) + \{ P^{-1}(t+1) - P^{-1}(t) \} \hat{\theta}(t) \\ \hat{\theta}(t+1) &= \hat{\theta}(t) + P(t) \varphi(t+1) \varepsilon(t+1) \end{aligned}$$

O termo $P(t) \varphi(t+1)$ é um vetor coluna e é denominado *ganho do estimador*, ou seja,

$$K(t+1) = P(t) \varphi(t+1) = \frac{P(t) \varphi(t+1)}{1 + \varphi^T(t+1) P(t) \varphi(t+1)}$$

O vetor de parâmetros estimados é calculado por

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1) \varepsilon(t+1)$$

-A equação que calcula $P(t+1)$ fornece a atualização de $P(t)$ para $P(t+1)$ sem inversão de matriz. A única inversão está associada ao escalar

$$\{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(t+1)P(t)\boldsymbol{\varphi}(t+1)\}$$

A equação recursiva para $P(t+1)$ pode ser combinada com a equação para $R(t+1)$ de diferentes maneiras para estabelecer uma forma direta para $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$.

Convencionalmente, utiliza-se a definição da variável erro $\varepsilon(t+1)$ como

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \boldsymbol{\varphi}^T(t+1) \hat{\boldsymbol{\theta}}(t)$$

Combinando as equações $P(t+1)$, $R(t+1)$ e $\varepsilon(t+1)$, obtém-se a forma recursiva de $\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1)$ dada por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}(t+1) = \hat{\boldsymbol{\theta}}(t) + K(t+1) \{y(t+1) - \boldsymbol{\varphi}^T(t+1)\hat{\boldsymbol{\theta}}(t)\}$$

$$K(t+1) = \frac{P(t)\boldsymbol{\varphi}(t+1)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(t+1)P(t)\boldsymbol{\varphi}(t+1)} \quad (4.25)$$

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P(t)\boldsymbol{\varphi}(t+1)\boldsymbol{\varphi}^T(t+1)P(t)}{1 + \boldsymbol{\varphi}^T(t+1)P(t)\boldsymbol{\varphi}(t+1)}$$

Algoritmo Básico do Estimador MQR

i) medir a saída e entrada do sistema;

ii) atualizar o vetor de medidas

$$\phi^T(t+1) = [-y(t) -y(t-1) \dots u(t-d) u(t-d-1) \dots];$$

iii) calcular o erro de previsão

$$\varepsilon(t+1) = y(t+1) - \phi^T(t+1) \hat{\theta}(t)$$

iv) calcular o ganho do estimador

$$K(t+1) = \frac{P(t)\phi(t+1)}{1 + \phi^T(t+1)P(t)\phi(t+1)}$$

v) calcular o vetor de parâmetros estimados

$$\hat{\theta}(t+1) = \hat{\theta}(t) + K(t+1)\varepsilon(t+1)$$

vi) calcular a matriz de covariância

$$P(t+1) = P(t) - \frac{P(t)\phi(t+1)\phi^T(t+1)P(t)}{1 + \phi^T(t+1)P(t)\phi(t+1)}$$

ou então utilizar a equação

$$P(t+1) = P(t) - K(t+1) [P(t)\phi(t+1)]^T.$$

Código em Matlab do estimador MQR

```
% -----  
% ESTIMADOR DOS MÍNIMOS QUADRADOS RECURSIVO  
%  
% APLICADO A UMA PLANTA DE SEGUNDA ORDEM  
% -----  
clear all  
% -- Pergunta: Quantos períodos de amostragem a simular  
nit=input(' Quantas iterações ? ');  
% -- Gera sinais de entrada e ruído  
for i=1:nit  
    if rand>0.5  
        u(i)=1;  
    else  
        u(i) = -1;  
    end  
end  
e = u*0.01;  
% -- Condições iniciais: matriz de covariância  
p = 1000*eye(4,4);
```

```

% -- Condições iniciais: parâmetros e saída
teta = [0;0;0;0];
for t = 1:4
    y(i) = 0;erro(t) = 0;
    a1(t) = teta(1);a2(t) = teta(2);
    b0(t) = teta(3);b1(t) = teta(4);
end
% -- Iterações das simulações
for t = 4:nit
% ----- Calcular a saída atual
    y(t) = 1.5144*y(t-1)-0.5506*y(t-2)+0.599*u(t-1)+0.163*u(t-2)+e(t);
% ----- Atualizar Fi(t) com novas medidas no tempo 't'
    fi = [-y(t-1);-y(t-2);u(t-1);u(t-2)];
% ----- Calcular o erro de estimação
    erro(t) = y(t)-teta'*fi;
% ----- Calcular o vetor de ganho
    k = p*fi/(1+fi'*p*fi);
% ----- Calcular o novo vetor de estimação de parâmetros
    teta = teta+k*erro(t);
% ----- Atualizar a matriz de covariância
    p = (p-k*fi'*p);
% ----- Armazenar parâmetros
    a1(t) = teta(1); a2(t) = teta(2); b0(t) = teta(3); b1(t) = teta(4);
end

```

```
% ----- Armazenar parâmetros
```

```
    a1(t) = teta(1);
```

```
    a2(t) = teta(2);
```

```
    b0(t) = teta(3);
```

```
    b1(t) = teta(4);
```

```
end
```

```
%--- Plotar os resultados
```

```
    t = 1:nit;
```

```
    subplot(221),plot(t,a1(t)),title('a1'),xlabel('amostragem');
```

```
    subplot(222),plot(t,a2(t)),title('a2'),xlabel('amostragem');
```

```
    subplot(223),plot(t,b0(t)),title('b0'),xlabel('amostragem');
```

```
    subplot(224),plot(t,b1(t)),title('b1'),xlabel('amostragem');
```

Uma vez parametrizado o processo, deve-se qualificar o modelo estimado utilizando técnicas de *validação de modelos*. Entre as diversas técnicas de validação pode-se investigar a magnitude de certos índices de desempenho. Os *índices de desempenho* para avaliação da qualidade dos modelos matemáticos podem ser calculados pelas seguintes equações:

- Somatório do Erro Quadrático — SEQ

$$SEQ = \sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k)]^2$$

- Coeficiente de Correlação Múltipla — R^2

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^N [y(k) - \hat{y}(k)]^2}{\sum_{k=1}^N [y(k) - \bar{y}]^2}$$

Quando o valor de R^2 é igual a 1 (um) indica uma exata adequação do modelo para os dados medidos do processo. O valor de R^2 entre 0.9 e 1 pode ser considerado suficiente para muitas aplicações práticas em identificação;