Formelsammlung DSVB

Mario Felder
Michi Fallegger

23. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Digitale Signale im Zeitbereich

1.1 Signal Analyse

1.1.1 Sampling

Die Sample-Frequenz f_S ist durch die Sample-Periode T_S gegeben:

$$f_S = \frac{1}{T_S}$$

Aus dem Signal $x(t)$ wird durch die Abtastung:

$$x(n \cdot T_S) = x[n]$$

Das Signal $x[n]$ ist kausal wenn:

$$x[n] = 0 \qquad \text{für alle } n < 0$$

1.1.2 Standard digital Signale

Einheitsimpuls oder Diracimpuls:

$$\delta = \begin{cases} 0 & : \quad n \neq 0 \\ 1 & : \quad n = 0 \end{cases}$$

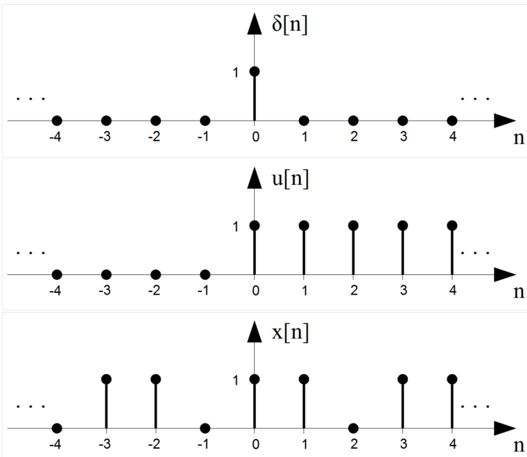
Einheitsschirtt:

$$\delta = \begin{cases} 0 & : \quad n < 0 \\ 1 & : \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Ein periodisches Signal ist beschrieben durch:

$$x[n] = x[n + T_0/T_S] \qquad \text{mit } T_0/T_S = k$$

Ein periodisches Signal muss eine Periodendauer T_0 haben, welche ein ganzzahliges Vielfaches der Sample-Periode T_S ist.



Komplexe harmonische Sequenz:

$$x[n] = \hat{X} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 n T_S}$$

Real- und Imaginäranteil der komplexen Harmonischen:

$$Re\{\} = \hat{X} \cdot \cos 2\pi f_0 n T_S$$

$$Im\{\} = \hat{X} \cdot \sin 2\pi f_0 n T_S$$

1.1.3 Statistische Signalparameter

Observations Intervall T:

$$T = N \cdot T_S$$

Der Mittelwert (**mean value**) μ_x repräsentiert den DC-Anteil des Signals x[n]:

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i]$$

Der quadratische Mittelwert (**quadratic mean value**) ${\rho_x}^2$ korrespondiert zur durchschnittlichen Leistung des Signal $x[n]$ mit DC-Anteil:

$${\rho_x}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i]^2$$

Die **Varianz** ${\sigma_x}^2$ repräsentiert die durchschnittliche AC-Leistung des Signals $x[n]$:

$${\sigma_x}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x[i] - \mu_x)^2$$

1.1.4 Messverhältnisse und dB

Leistungsverhältnis (**power ratio**):

$$A_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

Signal-to-noise ratio (**SNR**):

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}} \right)$$

Linear	Power ratio [dB]	
a/b	Power	Voltage
1/1000	-30	-60
1/100	-20	-40
1/10	-10	-20
1/2	≈ -3	≈ -6
1	0	0
2/1	≈ -3	≈ 6
10/1	10	20
100/1	20	40

1.2 Signal Operationen

1.2.1 Korrelation

Die statische Korrelation (**static correlation**) drückt die Ähnlichkeit zweier Signale x[n] und y[n] der selben Länge N aus:

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i]y[i]$$

Je ähnlicher sich die Signale sind, desto grösser der Wert R.

Die lineare Korrelationsfunktion (**linear correlation fucntion**):

$$r_{xy}[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[i+n]$$

Die Korrelation ist nicht kommutativ, $r_{xy}[n] \neq r_{yx}[n]$.

Resultierende Länge von r_{xy}:

$$N_{xy} = N_x + N_y - 1$$

Mathlabbefehl für Kreuz- und Autokorrelation: `xcorr`

1.2.2 Faltung

Die Faltung (**convolution**) ist definiert als:

$$z[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[-i+n]$$

Die Faltung ist kommutativ:

$$z[n] = x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$$

Resultierende Länge für $z[n]$:

$$N_z = N_x + N_y - 1$$

Bei der zyklischen Faltung (**circular convolution**) müssen die beiden Signale die selbe Länge N haben, oder mit Zero-Padding auf die selbe Länge gebracht werden:

$$z[n] = x[n] \circledast_N y[n] = y[n] \circledast_N x[n]$$

Lösung durch Matrix:

$$\begin{bmatrix} y[N] & y[N-1] & \dots & y[0] \\ y[0] & y[N] & \ddots & y[1] \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ y[N-1] & y[N-2] & \dots & y[N] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z[0] \\ z[1] \\ \vdots \\ z[N] \end{bmatrix}$$

Mathlabbefehl für Faltung: `conv`
Mathalbbefehl für zyklische Faltung: `convmtx`

Kapitel 2

Analog-Digital & Digital-Analog Wandlung

2.1 Schritte der A/D- und D/A-Wandlung

Sample: Kontinuierliche Signalwerte werden mit der Samplefrequenz f_S aufgezeichnet. Dies erzeugt eine Sequenz von diskreten Signalwerten.

Quantize: Die diskreten Signalwerte werden einer bestimmten Anzahl Quantisierungsleveln zugeordnet.

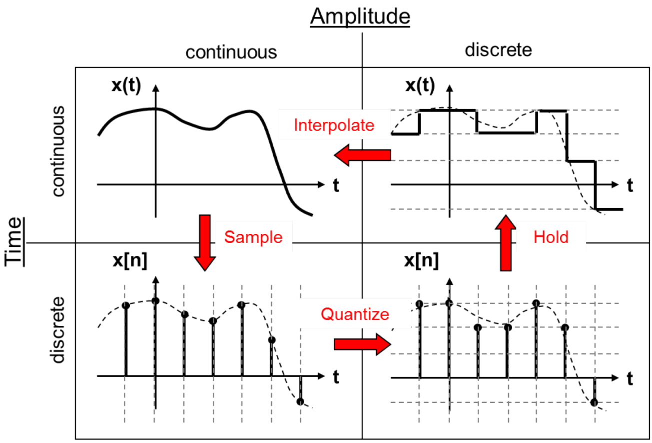
Code: Die quantisierten Abtastwerte können verwendet werden, um die erhaltene Pulsfolge zu modulieren (Pulse Code Modulation PCM). Meistens wird die Signalverarbeitung direkt mit den quantisierten Abtastwerten vorgenommen, so dass diese ohne Modulation gespeichert werden. Dazu wird die Repräsentierung der Quantisierungsleveln benötigt.

Die Digital-Analog Wandlung enthält folgende Schritte:

Decode: Die digitalen Werte werden in einer für die Digital-Analog Wandlung repräsentativer Form benötigt.

Hold: Das diskrete Signal muss über die Sampleperiode T_S konstant gehalten werden, ein Treppen ähnlicher Output entsteht.

Interpolate: Das kontinuierliche Treppensignal wird durch Mittelwerte von Tiefpass-Filtern geglättet.



2.2 Abtasten und Aliasing

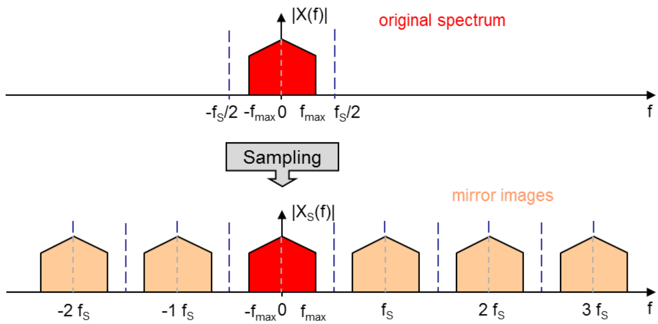
2.2.1 Abtasten von Tiefpass Signalen

Mathematisch wird die Abtastung des Signals $x(t)$ durch eine Multiplikation mit Dirac-Impulsen der Periode T_S dargestellt:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT_S)$$

Das Frequenzspektrum des abgetasteten Singals ist:

$$X_S(f) = \frac{1}{T_S} \sum_{k)-\infty}^{\infty} X(f - kf_S)$$



Um das Signal rekonstruieren zu können, müssen die Spiegelfrequenzen von $X(f)$ mit einem Tiefpassfilter unterdrückt werden. Das geht nur, wenn die grösste Frequenz f_{max} des Signals kleiner als die halbe Abtastfrequenz $f_S/2$ ist.

$$f_S > 2 \cdot f_{max}$$

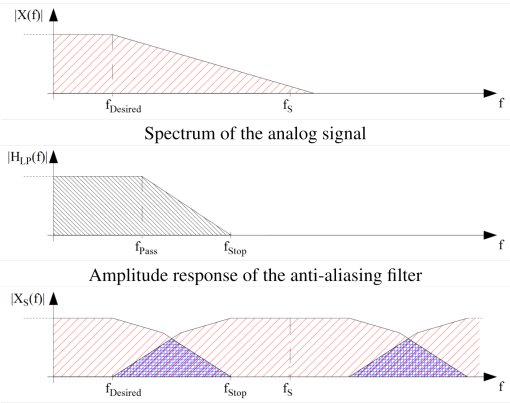
2.2.2 Aliasing

Aliasing entsteht, wenn das Abtasttheorem verletzt wird. Die Frequenzanteile über $f_S/2$ werden in das Basisband gespiegelt und überlagern mit den gewünschten Frequenzen. Das analoge Signal kann nicht rekonstruiert werden.

Dem kann mit einer Tiefpassfilterung entgegengewirkt werden. Der Filter hat folgende Spezifikationen:

$$f_{pass} \geq f_{desired}$$

$$f_{stop} \leq f_S - f_{desire}$$



Spectrum of the analog signal

Amplitude response of the anti-aliasing filter

Spectrum of the filtered and sampled signal

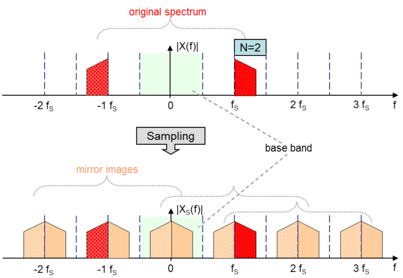
2.2.3 Abtasten von Bandpass Signalen

Das Abtasttheorem wird folgendermassen angepasst (für $N \geq 1$):

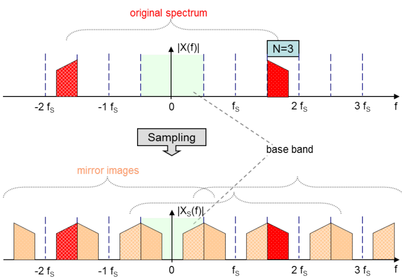
$$\frac{2 \cdot f_{min}}{N} \geq f_S \geq \frac{2 \cdot f_{max}}{N+1}$$

Für ungerade N erscheint das originale Spektrum invertiert im Basisband. Die originale Struktur des Spektrum wird zurückgewonnen durch invertierung jedes zweiten Samples im Zeitbereich:

$$\tilde{x}[n] = (-1)^n \cdot x[n]$$



Band-pass sampling for even N



Band-pass sampling for odd N

2.3 Quantisierung von Signalen

2.3.1 Uniforme Quantisierung

Der Quantisierungsschritt (**quantization step**) Δ ist gegeben durch die Auflösung mit W bits und der dynamischen Reichweite R des abgetasteten Signals $x[n]$:

$$\Delta = \frac{R}{2^W}$$

Durch das Abbilden eines amplitudenkontinuierlichen Signals auf eine endliche Anzahl von Rekonstruktionsleveln können zweier Fehler entstehen:

Clipping: Werte von $x[n]$ ausserhalb des Bereichs R werden mit dem maximum bzw. minimum Rekonstruktionslevel dargestellt.

Quantization error ϵ: Dieser Fehler tritt immer auf und kann nicht verhindert werden. Die Grösse des Fehlers ist gegeben durch die Qunatisierungsgrösse Δ.

Für den mid-tread quantizer (runden zum nächsten Wert):

$$-\Delta/2 < \epsilon \leq \Delta/2$$

Für den mid-rise quntizer:

$$-\Delta < \epsilon \leq 0$$

2.3.2 Quantisierungsrauschen

Der Quantisierungsfehler zeigt sich als Rauschen überlagert zum quantisierten Signal:

$$\epsilon[n] = x_q[n] - x[n]$$

Die Leistung P_ϵ des Quantisierungsrauschens (**quantization noise**) ist:

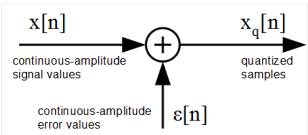
$$P_\epsilon = {\sigma_\epsilon}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon - \sigma_\epsilon)^2 \cdot p(\epsilon) \mathrm{d}\epsilon = \frac{\Delta^2}{12}$$

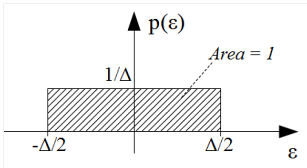
wobei $p(\epsilon)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Angenommen die Werte von $\epsilon[n]$ sind statistisch unkorreliert und uniform verteilt über den Intervall $(-\Delta/2, \Delta/2]$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für einen mid-tread quantizer:

$$p(\epsilon) = 1/\Delta$$

Der Erwartungswert des Quantisierungsfehlers ist somit:

$$\mu(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \cdot p(\epsilon) \mathrm{d}\epsilon = \frac{1}{2\Delta}\epsilon^2 \Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = 0$$





Das SNR ist:

$$SNR = \frac{P_x}{P_\epsilon} = 2^{2W} \cdot \frac{12P_x}{R^2}$$

$$\begin{aligned} SNR_{dB} &= 10 \cdot \left(\log_{10} 2^{2W} + \log_{10} \frac{12P_x}{R^2} \right) \\ &\approx 6W + 10 \cdot \log_{10} \frac{12P_x}{R^2} \end{aligned}$$

Bei einem harmonischen Inputsignal $x[n]$ ergibt sich folgendes SNR für eine uniforme Quantisierung:

$$SNR_{db} = 6W + 1.76 \approx 6W$$