Formelsammlung DSVB

Mario Felder
Michi Fallegger

23. Januar 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Digitale Signale im Zeitbereich

1.1 Signal Analyse

1.1.1 Sampling

Die Sample-Frequenz f_S ist durch die Sample-Periode T_S gegeben:

$$f_S = \frac{1}{T_S}$$

Aus dem Signal $x(t)$ wird durch die Abtastung:

$$x(n \cdot T_S) = x[n]$$

Das Signal $x[n]$ ist kausal wenn:

$$x[n] = 0 \qquad \text{für alle } n < 0$$

1.1.2 Standard digital Signale

Einheitsimpuls oder Diracimpuls:

$$\delta = \begin{cases} 0 & : \quad n \neq 0 \\ 1 & : \quad n = 0 \end{cases}$$

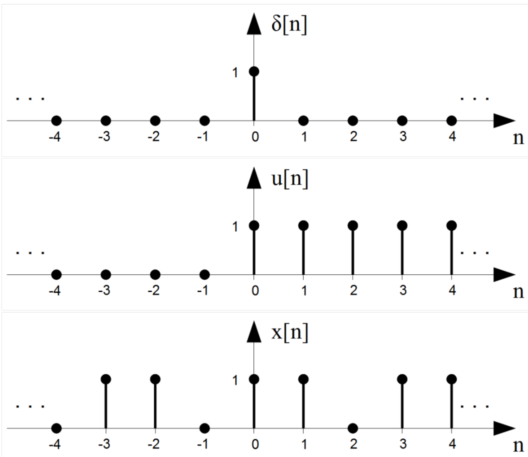
Einheitsschirtt:

$$\delta = \begin{cases} 0 & : \quad n < 0 \\ 1 & : \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Ein periodisches Signal ist beschrieben durch:

$$x[n] = x[n + T_0/T_S] \qquad \text{mit } T_0/T_S = k$$

Ein periodisches Signal muss eine Periodendauer T_0 haben, welche ein ganzzahliges Vielfaches der Sample-Periode T_S ist.



Komplexe harmonische Sequenz:

$$x[n] = \hat{X} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f_0 n T_S}$$

Real- und Imaginäranteil der komplexen Harmonischen:

$$Re\{\} = \hat{X} \cdot \cos 2\pi f_0 n T_S$$

$$Im\{\} = \hat{X} \cdot \sin 2\pi f_0 n T_S$$

1.1.3 Statistische Signalparameter

Observations Intervall T:

$$T = N \cdot T_S$$

Der Mittelwert (**mean value**) μ_x repräsentiert den DC-Anteil des Signals x[n]:

$$\mu_x = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i]$$

Der quadratische Mittelwert (**quadratic mean value**) ${\rho_x}^2$ korrespondiert zur durchschnittlichen Leistung des Signal $x[n]$ mit DC-Anteil:

$${\rho_x}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i]^2$$

Die **Varianz** ${\sigma_x}^2$ repräsentiert die durchschnittliche AC-Leistung des Signals $x[n]$:

$${\sigma_x}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} (x[i] - \mu_x)^2$$

1.1.4 Messverhältnisse und dB

Leistungsverhältnis (**power ratio**):

$$A_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_1}{P_2} \right)$$

Signal-to-noise ratio (**SNR**):

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_{signal}}{P_{noise}} \right)$$

Linear	Power ratio [dB]	
a/b	Power	Voltage
1/1000	-30	-60
1/100	-20	-40
1/10	-10	-20
1/2	≈ -3	≈ -6
1	0	0
2/1	≈ -3	≈ 6
10/1	10	20
100/1	20	40

1.2 Signal Operationen

1.2.1 Korrelation

Die statische Korrelation (**static correlation**) drückt die Ähnlichkeit zweier Signale x[n] und y[n] der selben Länge N aus:

$$R = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} x[i]y[i]$$

Je ähnlicher sich die Signale sind, desto grösser der Wert R.

Die lineare Korrelationsfunktion (**linear correlation fucntion**):

$$r_{xy}[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[i+n]$$

Die Korrelation ist nicht kommutativ, $r_{xy}[n] \neq r_{yx}[n]$.

Resultierende Länge von r_{xy}:

$$N_{xy} = N_x + N_y - 1$$

Mathlabbefehl für Kreuz- und Autokorrelation: `xcorr`

1.2.2 Faltung

Die Faltung (**convolution**) ist definiert als:

$$z[n] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]y[-i+n]$$

Die Faltung ist kommutativ:

$$z[n] = x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$$

Resultierende Länge für $z[n]$:

$$N_z = N_x + N_y - 1$$

Bei der zyklischen Faltung (**circular convolution**) müssen die beiden Signale die selbe Länge N haben, oder mit Zero-Padding auf die selbe Länge gebracht werden:

$$z[n] = x[n] \circledast_N y[n] = y[n] \circledast_N x[n]$$

Lösung durch Matrix:

$$\begin{bmatrix} y[N] & y[N-1] & \dots & y[0] \\ y[0] & y[N] & \ddots & y[1] \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ y[N-1] & y[N-2] & \dots & y[N] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z[0] \\ z[1] \\ \vdots \\ z[N] \end{bmatrix}$$

Mathlabbefehl für Faltung: `conv`
Mathalbbefehl für zyklische Faltung: `convmtx`

Kapitel 2

Analog-Digital & Digital-Analog Wandlung

2.1 Schritte der A/D- und D/A-Wandlung

Sample: Kontinuierliche Signalwerte werden mit der Samplefrequenz f_S aufgezeichnet. Dies erzeugt eine Sequenz von diskreten Signalwerten.

Quantize: Die diskreten Signalwerte werden einer bestimmten Anzahl Quantisierungsleveln zugeordnet.

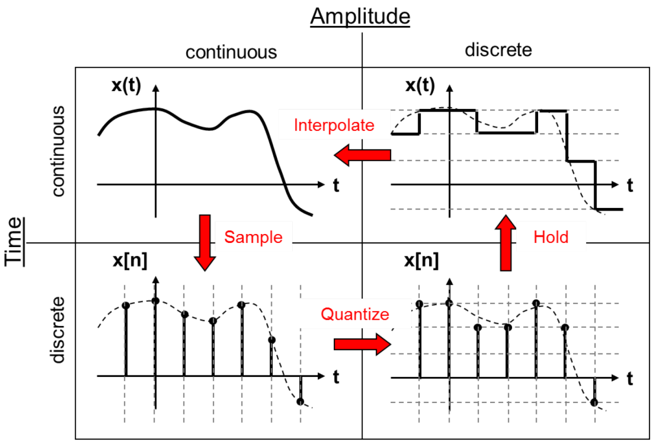
Code: Die quantisierten Abtastwerte können verwendet werden, um die erhaltene Pulsfolge zu modulieren (Pulse Code Modulation PCM). Meistens wird die Signalverarbeitung direkt mit den quantisierten Abtastwerten vorgenommen, so dass diese ohne Modulation gespeichert werden. Dazu wird die Repräsentierung der Quantisierungsleveln benötigt.

Die Digital-Analog Wandlung enthält folgende Schritte:

Decode: Die digitalen Werte werden in einer für die Digital-Analog Wandlung repräsentativer Form benötigt.

Hold: Das diskrete Signal muss über die Sampleperiode T_S konstant gehalten werden, ein Treppen ähnlicher Output entsteht.

Interpolate: Das kontinuierliche Treppensignal wird durch Mittelwerte von Tiefpass-Filtern geglättet.



2.2 Abtasten und Aliasing

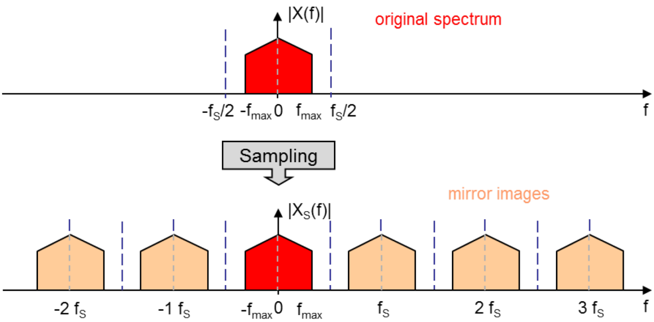
2.2.1 Abtasten von Tiefpass Signalen

Mathematisch wird die Abtastung des Signals $x(t)$ durch eine Multiplikation mit Dirac-Impulsen der Periode T_S dargestellt:

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t - nT_S)$$

Das Frequenzspektrum des abgetasteten Singals ist:

$$X_S(f) = \frac{1}{T_S} \sum_{k)-\infty}^{\infty} X(f - kf_S)$$



Um das Signal rekonstruieren zu können, müssen die Spiegelfrequenzen von $X(f)$ mit einem Tiefpassfilter unterdrückt werden. Das geht nur, wenn die grösste Frequenz f_{max} des Signals kleiner als die halbe Abtastfrequenz $f_S/2$ ist.

$$f_S > 2 \cdot f_{max}$$

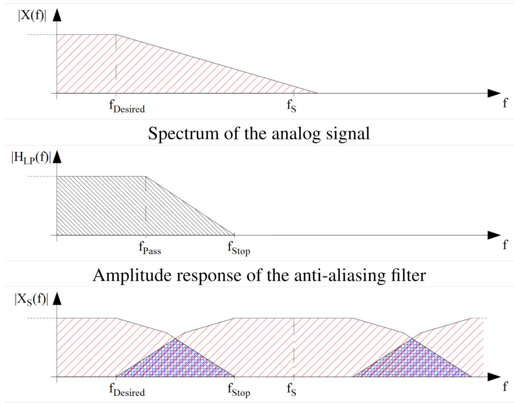
2.2.2 Aliasing

Aliasing entsteht, wenn das Abtasttheorem verletzt wird. Die Frequenzanteile über $f_S/2$ werden in das Basisband gespiegelt und überlagern mit den gewünschten Frequenzen. Das analoge Signal kann nicht rekonstruiert werden.

Dem kann mit einer Tiefpassfilterung entgegengewirkt werden. Der Filter hat folgende Spezifikationen:

$$f_{pass} \geq f_{desired}$$

$$f_{stop} \leq f_S - f_{desire}$$



Spectrum of the analog signal

Amplitude response of the anti-aliasing filter

Spectrum of the filtered and sampled signal

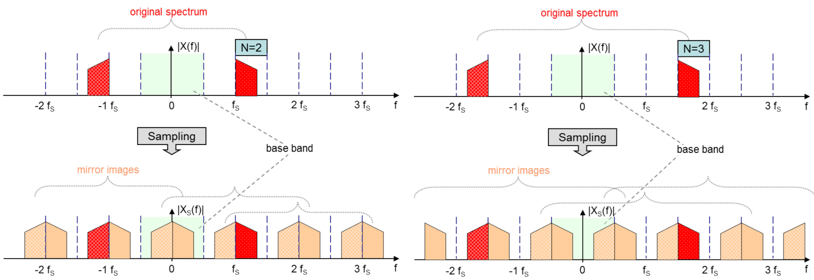
2.2.3 Abtasten von Bandpass Signalen

Das Abtasttheorem wird folgendermassen angepasst (für $N \geq 1$):

$$\frac{2 \cdot f_{min}}{N} \geq f_S \geq \frac{2 \cdot f_{max}}{N+1}$$

Für ungerade N erscheint das originale Spektrum invertiert im Basisband. Die originale Struktur des Spektrum wird zurückgewonnen durch invertierung jedes zweiten Samples im Zeitbereich:

$$\tilde{x}[n] = (-1)^n \cdot x[n]$$



Band-pass sampling for even N Band-pass sampling for odd N

2.3 Quantisierung von Signalen

2.3.1 Uniforme Quantisierung

Der Quantisierungsschritt (**quantization step**) Δ ist gegeben durch die Auflösung mit W bits und der dynamischen Reichweite R des abgetasteten Signals $x[n]$:

$$\Delta = \frac{R}{2^W}$$

Durch das Abbilden eines amplitudenkontinuierlichen Signals auf eine endliche Anzahl von Rekonstruktionsleveln können zweier Fehler entstehen:

Clipping: Werte von $x[n]$ ausserhalb des Bereichs R werden mit dem maximum bzw. minimum Rekonstruktionslevel dargestellt.

Quantization error ϵ: Dieser Fehler tritt immer auf und kann nicht verhindert werden. Die Grösse des Fehlers ist gegeben durch die Qunatisierungsgrösse Δ.

Für den mid-tread quantizer (runden zum nächsten Wert):

$$-\Delta/2 < \epsilon \leq \Delta/2$$

Für den mid-rise quntizer:

$$-\Delta < \epsilon \leq 0$$

2.3.2 Quantisierungsrauschen

Der Quantisierungsfehler zeigt sich als Rauschen überlagert zum quantisierten Signal:

$$\epsilon[n] = x_q[n] - x[n]$$

Die Leistung P_ϵ des Quantisierungsrauschens (**quantization noise**) ist:

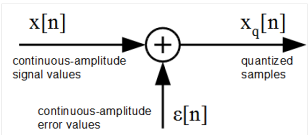
$$P_\epsilon = {\sigma_\epsilon}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\epsilon - \sigma_\epsilon)^2 \cdot p(\epsilon) \mathrm{d}\epsilon = \frac{\Delta^2}{12}$$

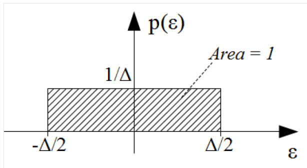
wobei $p(\epsilon)$ die Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Angenommen die Werte von $\epsilon[n]$ sind statistisch unkorreliert und uniform verteilt über den Intervall $(-\Delta/2, \Delta/2]$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für einen mid-tread quantizer:

$$p(\epsilon) = 1/\Delta$$

Der Erwartungswert des Quantisierungsfehlers ist somit:

$$\mu(\epsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} \epsilon \cdot p(\epsilon) \mathrm{d}\epsilon = \frac{1}{2\Delta} \epsilon^2 \Big|_{-\Delta/2}^{\Delta/2} = 0$$





Das SNR ist:

$$SNR = \frac{P_x}{P_\epsilon} = 2^{2W} \cdot \frac{12P_x}{R^2}$$

$$SNR_{dB} = 10 \cdot \left(\log_{10} 2^{2W} + \log_{10} \frac{12P_x}{R^2} \right)$$
$$\approx 6W + 10 \cdot \log_{10} \frac{12P_x}{R^2}$$

Bei einem harmonischen Inputsignal $x[n]$ ergibt sich folgendes SNR für eine uniforme Quantisierung:

$$SNR_{db} = 6W + 1.76 \approx 6W$$

Kapitel 3

Digitale Signale im Frequenzbereich

3.1 Von Fourier Tranformation zur DFT

3.1.1 Übergang zu diskreter Zeit

Die zeitdiskrete Fourier Transformation (DTFT) kann berechnet werden mit:

$$X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega n}$$

mit der normalisierten Winkelfrequenz:

$$\Omega = 2\pi f T_S = 2\pi \frac{f}{f_S}$$

Die DTFT produziert ein 2π-periodisches, kontinuierliches Spektrum.

3.1.2 Übergang zu endlichem Messintervall

Wenn nur über N Abtastpunkte eine Fourier Analyse gemacht werden soll, ist die kleinste Frequenz, welche aufgenommen werden kann:

$$f_1 = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \cdot T_S} = \frac{f_S}{N}$$

Die Diskrete Fourier Transformation (DFT) kann geschrieben werden als:

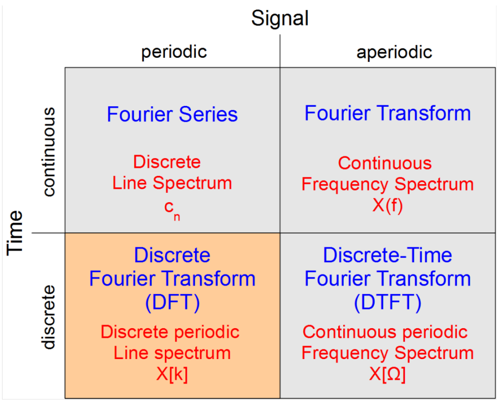
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\pi n \frac{k}{N}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

Die DFT ist beschränkt zu einer maximalen Frequenz von:

$$(N-1)\frac{f_S}{N}$$

Die inverse diskrete Fourier Transformation (IDFT) ist gegeben durch:

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n \frac{k}{N}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$



3.2 Eingenschaften der DFT

Periodizität

Das Spektrum der DFT ist f_S-periodisch

$$X[k] = X[k+N]$$

Dementsprechend ist IDFT periodisch mit $T = NT_S$

$$x[n] = x[n+N]$$

Symmetrie
Die DFT eines realwertigen Signals ist symmetrisch um den Punkt $k = N/2$

$$X[N/2+m] = X^*[N/2-m]$$

Zeit/Frequenz Verschiebung
Verschiebung einer periodischen Zeitsequenz um n_0 hat einen linearen Phasen Offset bei allen Spektralwerten zur Folge

$$x[n+n_0] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi n_0 \frac{k}{N}} \cdot X[k]$$

Die Multiplikation mit einem komplexen Exponent hat eine konstante Frequenzverschiebung zur Folge

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi k_0 \frac{n}{N}} \cdot x[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X[k-k_0]$$

Modulation
Konsequenz der Frequenzverschiebung ist die Modulation

$$\cos\left(2\pi k_0 \frac{n}{N}\right) \cdot x[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad \frac{1}{2}\left(X[k+k_0] + X[k-k_0]\right)$$

Parseval Theorem
Zwischen Signalwerten $x[k]$ und Fourier Koeffizienten $X[k]$ besteht folgende Beziehung:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \left|\frac{X[k]}{N}\right|^2$$

Zusammenhang von Faltung und Multiplikation

Punktweise Multiplikation zweier DFT Spektren $X[k]$ und $Y[k]$ im Frequenzbereich entspricht der zyklischen Faltung von $x[n]$ und $y[n]$ im Zeitbereich

$$x[n] \circledast_N y[n] \quad \circ\!\!-\!\!\bullet \quad X[k] \cdot Y[k]$$

3.2.1 Gültigkeitsbereich der DFT

$$X[k] = X[\Omega]|_{\Omega = 2\pi \frac{k}{N}}$$

$x[n]$ **periodisch:**
Der Messintervall NT_S ist ein ganzzahliger Vielfache der Periodendauer von $x[n]$.

$x[n]$ **aperiodisch:**
Alle Werte von $x[n]$ ausserhalb dem Bereich $0 \geq n < N$ sind Null.

3.3 Anwendungs Aspekte

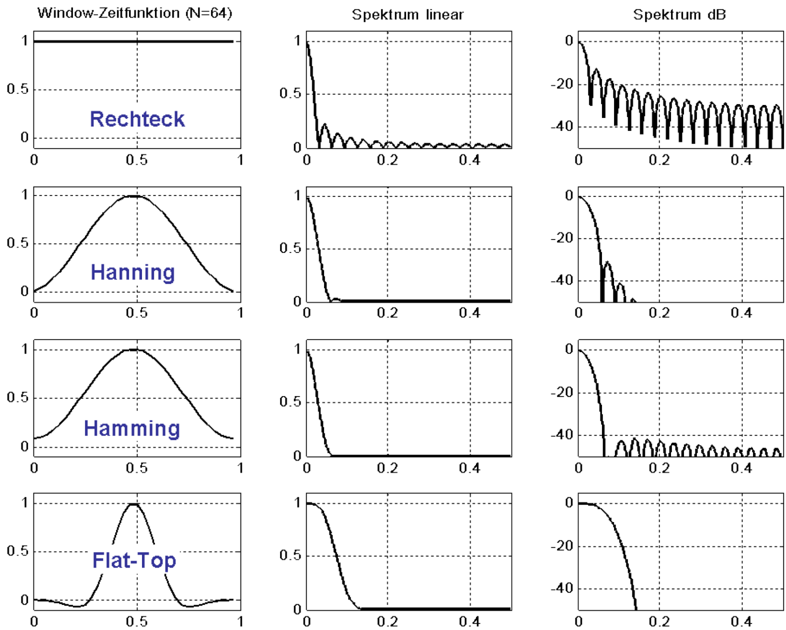
3.3.1 Zero-Padding

Um eine bessere Interpolation zwischen den N Frequenzpunkten in der DFT zu bekommen, kann das Signal im Zeitbereich mit Nullen aufgefüllt werden. Das Spektrum $X(\Omega)$ wird nicht verändert, allerdings stehen zusätzliche Abtastpunkte auf der Achse der normalisierten Winkelfrequenz zu Verfügung.

3.3.2 Fensterfunktion

Die DFT wendet per Definition ein Rechteckfenster an, um die N Samples auszuschneiden. Es können andere Fensterfunktionen auf das Signal $x[n]$ angewendet werden, allerdings gelten folgende Punkte:

- Je schmaler die Hauptkeule im Spektrum des Fensters, desto höher ist die spektrale Auflösung für $X[k]$
- Je stärker die Dämpfung der Nebenkeulen im Spektrum des Fenster, desto besser die Unterdrückung der Leackage in $X[k]$



3.4 Short-Time DFT

Wenn die Entwicklung des Frequenzspektrums über die Zeit interessiert, werden kontinuierliche Berechnungen des Spektrums von kurzen Signalsektoren durchgeführt. Da diese kurzen Sektoren meistens nicht ein ganzzahliges vielfache Vielfache der Periode ist, werden Fensterfunktionen angewendet.

Bei der Länge N des Fensters ergibt sich der Kompromiss von:

- grosse spektrale Auflösung (N gross)
- grosse zeitliche Auflösung (N klein)

Um beides zu erreichen, können die DFT-Fenster überlappt werden um maximal $N-1$.

3.5 Fast Fourier Transformation (FFT)

Geschwindigkeitsvergleich FFT-DFT:

$$speedup\_factor_{FFT} = \frac{8N-2}{5 \cdot \log_2 N} \approx 1.5 \frac{N}{\log_2 N}$$

Dabei ist $N = 2^L$ mit einem ganzzahligen Wert für L.

3.5.1 Twiddle Faktoren

Definition:

$$W_N = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N}}$$

Periodizität
W_N kann nur für N verschiedene Zahlen ausgewertet werden. Der Twiddle Faktor ist somit N-periodisch

$$W_N^{k+N} = W_N^k$$

Symmetrie
Abgesehen vom Vorzeichen nimmt W_N nur $N/2$ verschiedene Werte an.

$$W_N^{k+N/2} = -W_N^k$$

3.5.2 Radix-2 FFT

Die DFT wird mit dem Twiddle Faktor umgeschrieben:

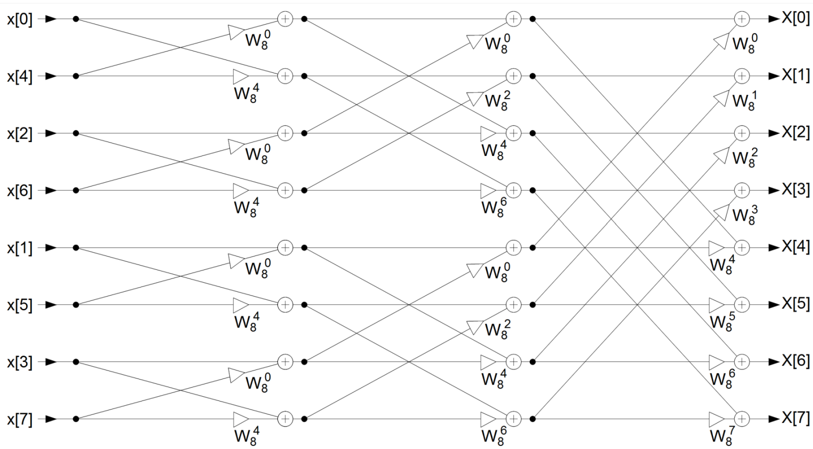
$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[nW_N^{nk}] \\ &= \sum_{n \text{ even}} x[n]W_N^{nk} + \sum_{n \text{ odd}} x[n]W_N^{nk} \end{aligned}$$

Es können zwei neue Sequenzen $x_1[n]$ und $x_2[n]$ mit geraden und ungeraden n von der Länge $N/2$ erzeugt werden.

$$X[k] = \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x_1[n] W_{N/2}^{nk}}_{x_1[\tilde{k}]} + W_N^k \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{N/2-1} x_2[n] W_{N/2}^{nk}}_{x_2[\tilde{k}]}$$

wobei

$$\tilde{k} = k \mod N/2$$



Index bit-reversed in Matlab: `bitrevorder`

3.6 Goertzel-Algorithmus

Definition:

$$X[k] = y_k[n]|_{n=N} = \sum_{i=0}^{N-1} x[i] W_N^{-k(N-i)}$$

Differenzengleichung:

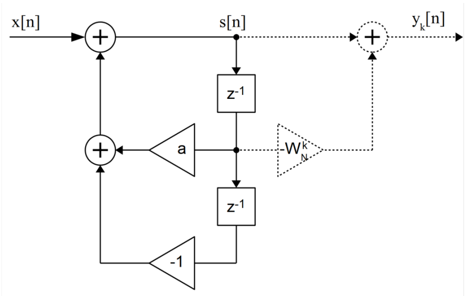
$$s[n] = x[n] + a \cdot s[n-1] - s[n-2]$$

$$y_k[n] = s[n] - W_N^k \cdot s[n-1]$$

mit

$$a = 2\cos 2\pi \frac{k}{N}$$

$s[n]$ muss für alle Zeitpunkte $n = 0, 1, \ldots, N$ berechnet werden, $y_k[n]$ nur für $n = N$.



Der Goertzel-Algorithmus gibt die DFT spectral componente bei der Frequenz

$$f_k = k\frac{f_S}{N}$$

Mit dem PArseval Theorem kann der Leistungsgehalt P_k eines realwertigen Signals $x[n]$ bei einer Frequenz von f_k ermittelt werden:

$$P_k = 2\left|\frac{X[k]}{N}\right|^2 = \frac{2}{N^2}(\Re\{X[k]\}^2 + \Im\{X[k]\}^2)$$