

Formelsammlung HMAT

Mario Felder

22. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Matrizen Repetition	5
1.1	Grundbegriffe	5
1.1.1	Spezielle Matrizen	5
1.2	Grundoperationen	6
1.3	Die Inverse Matrix	7
2	Lineare Algebra	9
2.1	Vektorraum	9
2.2	Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension	10
2.2.1	Linearkombination von Vektoren:	10
2.2.2	Lineare Unabhängigkeit	10
2.2.3	Basis, Dimension und Koordinaten	10
2.2.4	Untervektorraum	11
2.3	Lineare Abbildung zwischen Vektorräumen	11
2.3.1	Matrix einer linearen Abbildung	11
2.3.2	Kern und Bild	12
2.3.3	Lineare Gleichungssysteme als lineare Abbildungen	13
2.4	Eigenwertprobleme	14
2.4.1	Definition	14
2.4.2	Berechnung der Eigenvektoren und Eigenwerte	14
2.4.3	Sätze zu Eigenwerten / -vektoren	14
3	Vektroanalysis	15
3.1	Felder	15
3.1.1	Skalarfelder	15

3.1.2	Vektorfelder	15
3.1.3	Arbeit und Wegintegrale	16
3.1.4	Parametrisierung einer Kurve	16
3.1.5	Gradient eines Skalarfeldes	17
3.1.6	Konservative Felder	17
3.1.7	Kriterium für konservative Felder	18
4	Mehrdimensionale Integralrechnung	19
4.1	Doppelintegrale	19
4.1.1	Polarkoordinaten	20
4.1.2	Oberfläche	20
4.1.3	Variablentransformation	20
4.2	Dreifachintegrale	21
4.2.1	Zylinderkoordinaten	21
4.2.2	Kugelkoordinaten	21
4.3	Schwerpunkte	22
4.4	Trägheitsmomente	22
5	Fourierreihen	25
5.1	2π -periodische Funktionen	25
5.1.1	Orthogonalitätsrelationen	25
5.1.2	Berechnung der Fourier-Koeffizienten	25
5.2	T -periodische Funktionen	26
5.3	Spezielles	26
5.3.1	Konvergenz	26
5.3.2	Gerade und ungerade Funktionen	27
5.4	Energiesatz	27
5.5	Komplexe Fourierreihe	28

Kapitel 1

Matrizen Repetition

1.1 Grundbegriffe

$m \times n$ -Matrix:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} : Matricelement der Zeile i und der Spalte j

m : Anzahl Zeilen

n : Anzahl Spalten

Transponierte Matrix \mathbf{A}^T von A :

$$(a_{ij})^T = a_{ji}$$

Für das Produkt der Transponierten gilt:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

1.1.1 Spezielle Matrizen

- **Nullmatrix:** Alle Elemente der Matrix sind Null, $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$

- **Spaltenmatrix:** Die Matrix enthält nur eine Spalte

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

- **Zeilenmatrix:** Die Matrix enthält nur eine Zeile

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}$$

- **Quadratische Matrix:** Gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten.
- **Symmetrische Matrix:** Quadratische Matrix, welche mit ihrer Transponierten übereinstimmen ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$).

$$a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

- **Dreiecksmatrix:** Alle Elemente die unter oder über der Hauptdiagonalen stehen sind Null.
- **Diagonalmatrix:** Alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonalen sind Null.
Spezialfall ist die **Einheitsmatrix** \mathbf{E}

1.2 Grundoperationen

Addition und Subtraktion zweier Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \quad \Leftrightarrow \quad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Multiplikation mit einem Skalar:

$$\mathbf{B} = \lambda \cdot \mathbf{A} \quad \Leftrightarrow \quad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Matrizenmultiplikation einer $m \times n$ -Matrix \mathbf{A} und einer $n \times p$ -Matrix \mathbf{B} :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \mathbf{C}_{m \times p}$$

1.3 Die Inverse Matrix

Definition:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

Die Inverse Matrix existiert (ist *invertierbar*, *regulär*), wenn:

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

Kapitel 2

Lineare Algebra

2.1 Vektorraum

Ein Vektorraum V besteht aus einer Menge von Vektoren und den zwei Operationen:

1. Vektoren können addiert/subtrahiert werden
2. Vektoren können mit einem Skalar multipliziert werden

Die Ergebnisse aus den beiden Operationen müssen wieder im Vektorraum liegen.

Weitere Bedingungen:

- Es gibt einen Nullvektor $0 \in V$ mit $v + 0 = v$ für alle Vektoren $v \in V$
- Zu jedem Vektor $v \in V$ gibt es einen inversen Vektor $-v \in V$ mit $v - v = 0$

2.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

2.2.1 Linearkombination von Vektoren:

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n$$

$$v_1, v_2, \dots, v_n \in V$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

2.2.2 Lineare Unabhängigkeit

n Vektoren sind linear unabhängig, wenn

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \dots + \lambda_n \cdot v_n = 0$$

nur mit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$$

erreicht ist.

n Vektoren in \mathbb{R}^m sind linear abhängig, falls $n > m$.

2.2.3 Basis, Dimension und Koordinaten

Die *Basis* eines Vektorraums ist die Menge von Vektoren v_1, v_2, \dots, v_n (*Basisvektoren*), die:

1. linear unabhängig sind
2. den gesamten Vektorraum durch Linearkombination erzeugen

Die Dimension des Vektorraums \mathbb{R}^n ($\dim V$) ist n

Die *Koordinaten* sind die Koeffizienten λ_1 bis λ_n der Linearkombination der Basen, um den gewünschten Vektor zu erreichen.

Polynom vom Grad n hat die Basis:

$$\mathbb{P} : \{x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1\} \quad \Rightarrow \dim \mathbb{P}_n = n + 1$$

2.2.4 Untervektorraum

Definition: Ein Unterraum ist eine Teilmenge eines Vektorraums, die selbst einen Vektorraum bildet.

Satz: Ist V ein Vektorraum mit Dimension n , so gibt es für jedes $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ einen Unterraum der Dimension k .

2.3 Lineare Abbildung zwischen Vektorräumen

Eine Abbildung

$$f : V_1 \longrightarrow V_2$$

zwischen Vektorräumen V_1 und V_2 ist *linear*, falls

1. $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ für jeden Vektor $v \in V_1$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $f(v + w) = f(v) + f(w)$ für alle Vektoren $v, w \in V_1$

Ist $f : V_1 \longrightarrow V_2$ eine lineare Abbildung, so bleibt der Nullpunkt fest:

$$f(0) = 0$$

Achtung: Umkehrung gilt nicht. D.h. $f(0) = 0$ bedeutet nicht, dass f linear ist.

2.3.1 Matrix einer linearen Abbildung

Für die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit den Basisvektoren e_1, e_2, \dots, e_n gibt es eine $(m \times n)$ -Matrix \mathbf{A} , so dass

$$f(x) = \mathbf{A} \cdot x$$

Die Spalten der Matrix \mathbf{A} sind die Bilder $v_i = f(e_i)$ der Einheitsvektoren.

Die Abbildung ist umkehrbar, wenn

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0$$

Satz

Jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kann auf eindeutige Weise eine $m \times n$ -Matrix \mathbf{A} zugeordnet werden, wobei deren Spalten der Reihe nach die Bilder $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$ der Standardbasis des \mathbb{R}^n sind.

Ist umgekehrt eine $m \times n$ -Matrix mit Spalten $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, so ist die zugehörige lineare Abbildung durch die Vorschrift gegeben:

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i$$

2.3.2 Kern und Bild

Der *Kern* der Abbildung f besteht aus der Menge der Vektoren in V_1 die durch f auf den Nullvektor in V_2 abgebildet werden:

$$\ker(f) := \{x \in V_1 \mid f(x) = 0\}$$

Das *Bild* der Abbildung f ist die Menge der möglichen Bildvektoren in V_2 :

$$\operatorname{im}(f) := \{y \in V_2 \mid \text{es gibt ein } x \in V_1 \text{ mit } f(x) = y\}$$

Kern und *Bild* von f sind Untervektorräume von V_1 resp. V_2 .

Dimensionssatz: Das Bild und der Kern einer linearen Abbildung $f : V_1 \rightarrow V_2$ stehen über den Dimensionssatz in Beziehung:

$$\dim(V_1) = \dim(\ker(f)) + \dim(\operatorname{im}(f))$$

Umkehrbarkeit von linearen Abbildungen: Falls die Dimensionen der betrachteten Räume V_1 und V_2 einer linearen Abbildung $f :$

$V_1 \rightarrow V_2$ identisch sind, können die folgenden äquivalenten Aussagen zur Umkehrbarkeit von f gemacht werden:

- i) Die Abbildung f ist umkehrbar
- ii) $\dim(\ker(f)) = 0$
- iii) $\dim(\operatorname{im}(f)) = \dim(V_2)$

2.3.3 Lineare Gleichungssysteme als lineare Abbildungen

Das Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten x_1, x_2, \dots, x_n der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

kann in Matrizenform als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$\mathbf{A} \cdot x = b$$

geschrieben werden.

Lösbarkeit linearer Gleichungssystemen

Fall 1: ist $\det \mathbf{A} \neq 0$ so ist x eindeutig durch $\mathbf{A}^{-1} \cdot b$ gegeben.

Fall 2: ist $\det \mathbf{A} = 0$ so hat man entweder

- i) keine Lösung, falls $b \notin \operatorname{bild} \mathbf{A}$
- ii) unendlich viele Lösungen, falls $b \in \operatorname{bild} \mathbf{A}$

2.4 Eigenwertprobleme

2.4.1 Definition

Gegeben sein ein quadratische Matrix \mathbf{A} . finde einen Vektor $x \neq 0$ und einen Skalar λ , so dass

$$\mathbf{A} \cdot x = \lambda \cdot x$$

2.4.2 Berechnung der Eigenvektoren und Eigenwerte

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot x = 0$$

Dabei muss gelten:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0$$

Nach der Bestimmung der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ kann für jedes λ_i ein Vektor $x_i \neq 0$ mit

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}) \cdot x_i = 0$$

gefunden werden.

2.4.3 Sätze zu Eigenwerten / -vektoren

\mathbf{A} sei eine $n \times n$ -Matrix.

Satz 1: \mathbf{A} kann höchstens n Eigenwerte haben.

Satz 2: Die Determinante von \mathbf{A} ist gleich dem Produkt all ihrer Eigenwerte.

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

Ist ein Eigenwert $= 0$, so ist die Matrix singulär (nicht invertierbar).

Satz 3: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{A} = 0$ falls für alle Eigenwerte λ_i gilt $|\lambda_i| < 1$

Satz 4: Bei einer Diagonalmatrix oder Dreiecksmatrix sind die Diagonaleinträge gerade die Eigenwerte der Matrix.

Kapitel 3

Vektroanalysis

3.1 Felder

3.1.1 Skalarfelder

Eine skalare Grösse Φ die jedem Raumpunkt $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ zugeordnet ist, heisst *Skalarfeld*:

$$\Phi = \Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z)$$

Wenn die Werte der Funktion Φ nur vom Abstand r von einem Zentrum abhängen, heisst $\Phi(r)$ ein *zentrales* oder *radiales* Feld.

Linien in 2D resp. Flächen in 3D auf denen das Skalarfeld konstant ist werden *Äquipotentiallinien* resp. -flächen genannt (bzw. *Niveaulinien/-flächen*).

3.1.2 Vektorfelder

Einem Vektorfeld \vec{F} ist jedem Raumpunkt $\vec{r} = (x, y, z)$ einen Vektor $\vec{F}(x, y, z)$ zugeordnet.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Gravitationsfeld Die Kraft auf eine Masse m an der Stelle $\vec{r} = (x, y, z)$ ist gegeben durch:

$$\vec{F}_m = -G \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{e}_r$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$: Abstand der beiden Masse

$\vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$: radialer Einheitsvektor von M in Richtung m

$G = 6.67428 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$: universelle Gravitationskonstante

$M = 5.97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$: Erdmasse

3.1.3 Arbeit und Wegintegrale

Gegeben sei ein Vektorfeld \vec{F} und ein Weg C parametrisiert durch $t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{\gamma}(t)$ mit Anfangspunkt $\vec{\gamma}(t_1)$ und Endpunkt $\vec{\gamma}(t_2)$, dann ist das *skalare Kurvenintegral*, *Wegintegral* oder die *Arbeit* des Vektorfeldes \vec{F} längs der Kurve C gegeben durch:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t) dt$$

Ist das Vozeichen von W positiv, so wird Arbeit oder Energie gewonnen, ist es negativ, muss Arbeit oder Energie eingesteckt werden.

3.1.4 Parametrisierung einer Kurve

Ist die Kurve durch eine Funktionsvorschrift $y = f(x)$ gegeben, kann

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

für die Kurve gewählt werden.

Kreis mit Radius $r > 0$ im Ursprung:

$$\vec{y}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

wobei $t \in [0, 2\pi]$

Archimedische Spirale:

$$\vec{y}(t) = \frac{a}{2\pi} t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0, k \cdot 2\pi]$, wobei k der Anzahl Windungen und a dem Abstand der einzelnen Windungen entspricht.

Lemniskate (∞):

$$\vec{y}(t) = a \begin{pmatrix} \cos(t) \sqrt{2 \cos(2t)} \\ \sin(t) \sqrt{2 \cos(2t)} \end{pmatrix}$$

3.1.5 Gradient eines Skalarfeldes

Der Gradient eines Skalarfeldes Φ ist definiert als:

$$\text{grad } \Phi(x, y, z) = \vec{\nabla} \Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

3.1.6 Konservative Felder

Fall es für ein Vektorfeld \vec{F} ein Skalarfeld Φ mit $\nabla \Phi = \vec{F}$ gibt, so ist das Linienintegral längs des Weges C von \vec{r}_1 bis \vec{r}_2 nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig und ist gegeben durch:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

Pfadunabhängigkeit: Sind C_1 und C_2 verschiedene Pfade mit gleichem Start- und Endpunkt so ist:

$$\int_{C_1} \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r}$$

Geschlossene Kurven: Ist C eine geschlossene Kurve dann gilt:

$$\oint_C \vec{\nabla} \Phi \cdot d\vec{r} = 0$$

3.1.7 Kriterium für konservative Felder

Das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix}$$

ist konservativ, wenn

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

erfüllt ist. Das Potential Φ ergibt sich durch

$$\Phi(x, y) = \int F_x(x, y) dx + f_1(y)$$

$$\Phi(x, y) = \int F_y(x, y) dy + f_2(x)$$

Die unbekannten Funktionen $f_1(y)$ und $f_2(x)$ erhält man durch Vergleichen der beiden Integrale.

Prüfen mit rot

Ein Vektorfeld \vec{F} ist konservativ, falls die Rotation verschwindet

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{rot } \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Für den 2D Fall kann die z -Komponente auf Null gesetzt werden.

Kapitel 4

Mehrdimensionale Integralrechnung

4.1 Doppelintegrale

Allgemeine Form:

$$V = \iint_A f(x, y) \, dA$$

Über Rechteck-Gebiete ($a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$):

$$V = \iint_A f(x, y) \, dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy$$

Begrenzt durch $y = g_u(x)$ und $y = g_o(x)$:

$$V = \int_a^b \int_{g_u(x)}^{g_o(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

Begrenzt durch $x = h_l(y)$ und $x = h_r(y)$:

$$V = \int_c^d \int_{h_l(y)}^{h_r(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

4.1.1 Polarkoordinaten

$$V = \iint_A f(r, \theta) \, dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r, \theta) r \, dr \, d\theta$$

mit

$$x = r \cdot \cos \theta \quad y = r \cdot \sin \theta$$

4.1.2 Oberfläche

$$S = \iint_R \sqrt{(f_x)^2 + (f_y)^2 + 1} \, dA$$

4.1.3 Variablentransformation

Anstelle der (x, y) -Variablen werden (u, v) -Variablen verwendet:

$$x = x(u, v)$$

$$y = y(u, v)$$

Das Flächenelement $dA = dx \, dy$ wird transformiert:

$$dx \, dy = |D| \, du \, dv$$

Die Determinante der *Jacobischen Matrix* ist gegeben durch:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Das neue Integral ist

$$\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R \tilde{f}(u, v) |D| \, du \, dv$$

4.2 Dreifachintegrale

Masse eines Körpers $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) \, dV$$

Über Rechteckgebiet ($a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f$):

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dV = \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

4.2.1 Zylinderkoordinaten

$$V = \iiint_G f(x, y, z) \, dV = \iiint_{\tilde{G}} \tilde{f}(r, \theta, z) r \, dr \, d\theta \, dz$$

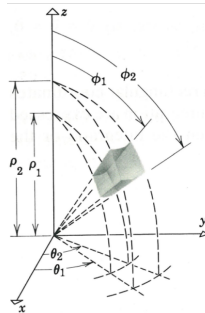
Variablen werden ersetzt mit:

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

$$z = z$$

4.2.2 Kugelkoordinaten



$$V = \iiint_G f(x, y, z) \, dV = \iiint_{\tilde{G}} \tilde{f}(r, \phi, \theta) r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta$$

Variablen werden ersetzt mit:

$$x = r \cdot \sin \phi \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \phi \sin \theta$$

$$z = r \cdot \cos \phi$$

4.3 Schwerpunkte

Der *Schwerpunkt* \vec{r}_S eines Körpers Ω mit der Dichte $\rho = \rho(\vec{r}) = \rho(x, y, z)$ ist gegeben durch:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} \vec{r} \rho(\vec{r}) \, dV$$

wobei die Masse m gegeben ist durch:

$$m = \iiint_{\Omega} \rho(\vec{r}) \, dV$$

Oder die einzelnen Komponenten:

$$x_S = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} x \rho(\vec{r}) \, dV$$

$$y_S = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} y \rho(\vec{r}) \, dV$$

$$z_S = \frac{1}{m} \iiint_{\Omega} z \rho(\vec{r}) \, dV$$

4.4 Trägheitsmomente

Trägheitsmoment (z -Achse als Bezugsachse):

$$I_z = \rho \cdot \iiint_{\Omega} r^2 \, dV = \rho \cdot \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dV$$

Trägheitstensor \mathbf{I} mit Zentrum \vec{r}_s :

$$\mathbf{I}_{ik} = \iiint_{\Omega} (r^2 \delta_{ik} - r_i r_k) \, dm = \rho \cdot \iiint_{\Omega} (r^2 \delta_{ik} - r_i r_k) \, dV$$

mit δ_{ik} als Kronecker-Delta:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k \\ 0, & \text{falls } i \neq k \end{cases}$$

Kapitel 5

Fourierreihen

Trigonometrische Reihe:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

5.1 2π -periodische Funktionen

5.1.1 Orthogonalitätsrelationen

$$\int_0^{2\pi} \cos kx \cos lx \, dx = \begin{cases} \pi & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \cos lx \, dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \sin kx \sin lx \, dx = \begin{cases} \pi & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases}$$

5.1.2 Berechnung der Fourier-Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

5.2 T -periodische Funktionen

Fourierreihe einer Funktion f mit Periode T :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_0 x + b_k \sin k\omega_0 x)$$

Berechnung der Koeffizienten:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_T f(x) \cos(k\omega_0 x) \, dx \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_T f(x) \sin(k\omega_0 x) \, dx \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

mit

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

5.3 Spezielles

5.3.1 Konvergenz

Die Fourierreihe einer 2π -periodischen Funktion f existiert:

- Das Grundintervall $[0, 2\pi]$ lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, auf denen f stetig und monoton ist.
- An jeder Unstetigkeitsstelle x_0 existiert der rechts- und linksseitige Grenzwert.

An Unstetigkeitsstellen konvergiert die Reihe gegen den arithmetischen Mittelwert des rechts- und linksseitigen Grenzwerts:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \begin{cases} \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} & f \text{ in } x \text{ nicht stetig.} \\ f(x) & \text{sonst.} \end{cases}$$

5.3.2 Gerade und ungerade Funktionen

Eine *gerade Funktion* ($f(-x) = f(x)$) enthält nur Kosinusanteile:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(kx) \, dx \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

bzw.:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 x$$

$$a_k = \frac{4}{T} \int_{\frac{T}{2}} f(x) \cos(k\omega_0 x) \, dx \quad \text{für } k = 0, 1, 2, \dots$$

Eine *ungerade Funktion* ($f(-x) = -f(x)$) enthält nur Sinusanteile:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(kx) \, dx \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

bzw.:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 x$$

$$b_k = \frac{4}{T} \int_{\frac{T}{2}} f(x) \sin(k\omega_0 x) \, dx \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots$$

5.4 Energiesatz

$$W = \int_0^T [f(t)]^2 \, dt = \frac{T}{2} \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right]$$

Energie einer rechteckförmigen Welle:

$$W = \frac{8T}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

5.5 Komplexe Fourierreihe

Komplexe Fourierreihe einer 2π -periodischen Funktion f :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jkx}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-jkx} dx \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Berechnung aus reellen Koeffizienten:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \quad , k = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + jb_k) \quad , k = 1, 2, 3, \dots$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

Umkehrung:

$$a_0 = 2c_0$$

$$a_k = 2 \cdot \Re\{c_k\}$$

$$b_k = -2 \cdot \Im\{c_k\}$$

Komplexe Fourierreihe einer T -periodischen Funktion f :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 x}$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_T f(x) e^{-jk\omega_0 x} dx \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$