Formelsammlung HMAT

Mario Felder

21. Juni 2015

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Matrizen Repetition

1.1 Grundbegriffe

$m \times n$-Matrix:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

a_{ij} :	Matrixelement der Zeile i und der Spalte j
m :	Anzahl Zeilen
n :	Anzahl Spalten

Transponierte Matrix $\mathbf{A}^T$ von A:

$$(a_{ij})^T = a_{ji}$$

Für das Produkt der Transponierten gilt:

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$$

1.1.1 Spezielle Matrizen

- **Nullmatrix:** Alle Elemente der Matrix sind Null, $a_{ij} = 0 \ \forall i, j$

- **Spaltenmatrix:** Die Matrix enthält nur eine Spalte

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

- **Zeilenmatrix:** Die Matrix enthält nur eine Zeile

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}$$

- **Quadratische Matrix:** Gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten.
- **Symmetrische Matrix:** Quadratische Matrix, welche mit ihrer Transponierten übereinstimmen ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$).

$$a_{ij} = a_{ji} \; \forall i, j$$

- **Dreiecksmatrix:** Alle Elemente die unter oder über der Hauptdiagonalen stehen sind Null.
- **Diagonalmatrix:** Alle Elemente ausserhalb der Hauptdiagonalen sind Null.
  Spezialfall ist die **Einheitsmatrix E**

1.2 Grundoperationen

Addition und Subtraktion zweier Matrizen **A** und **B**:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \qquad \Leftrightarrow \qquad c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$$

Multiplikation mit einem Skalar:

$$\mathbf{B} = \lambda \cdot \mathbf{A} \qquad \Leftrightarrow \qquad b_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$$

Matrizenmultiplikation einer $m \times n$-Matrix **A** und einer $n \times p$-Matrix **B**:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj} \qquad \mathbf{C}_{m \times p}$$

1.3 Die Inverse Matrix

Definition:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$$

Die Inverse Matrix existiert (ist *invertierbar, regulär*), wenn:

$$\det \mathbf{A} \neq 0$$

Kapitel 2

Lineare Algebra

2.1 Vektorraum

Ein Vektorraum V besteht aus einer Menge von Vektoren und den zwei Operationen:

1. Vektoren können addiert/subtrahiert werden

2. Vektoren können mit einem Skalar multipliziert werden

Die Ergebnisse aus den beiden Operationen müssen wieder im Vektorraum liegen.

Weitere Bedingungen:

- Es gibt einen Nullvektor $0 \in V$ mit $v + 0 = v$ für alle Vektoren $v \in V$

- Zu jedem Vektor $v \in V$ gibt es einen inversen Vektor $-v \in V$ mit $v - v = 0$

2.2 Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension

2.2.1 Linearkombination von Vektoren:

$$v = \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n$$

$v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$
$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

2.2.2 Lineare Unabhängigkeit

n Vektoren sind linear unabhängig, wenn

$$\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2 + \ldots + \lambda_n \cdot v_n = 0$$

nur mit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

erreicht ist.

$\boxed{n \text{ Vektoren in } \mathbb{R}^m \text{ sind linear abhängig, falls } n > m.}$

2.2.3 Basis, Dimension und Koordinaten

Die *Basis* eines Vektorraums ist die Menge vn Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (*Basisvektoren*), die:

1. linear unabhängig sind
2. den gesamten Vektorraum durch Linearkombination erzeugen

$\boxed{\text{Die Dimension des Vektorraums } \mathbb{R}^n \ (\dim V) \text{ ist } n}$

Die *Koordinaten* sind die Koeffizienten λ_1 bis λ_n der Linearkombination der Basen, um den gewünschten Vektor zu erreichen.

Polynom vom Grad n hat die Basis:

$$\mathbb{P} : \{x^n, x^{n-1} \ldots, x, 1\} \qquad \Rightarrow \dim \mathbb{P}_n = n + 1$$

2.2.4 Untervektorraum

Definition: Ein Unterraum ist eine Teilmenge eines Vektorraums, die selbst einen Vektorraum bildet.

Satz: Ist V ein Vektorraum mit Dimension n, so gibt es für jedes $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ einen Unterraum der Dimension k.

2.3 Lineare Abbildung zwischen Vektorräumen

Eine Abbildung

$$f : V_1 \longrightarrow V_2$$

zwischen Vektorräumen V_1 und V_2 ist *linear*, falls

1. $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$ für jeden Vektor $v \in V_1$ und jeden Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$
2. $f(v + w) = f(v) + f(w)$ für alle Vektoren $v, w \in V_1$

Ist $f : V_1 \longrightarrow V_2$ eine lineare Abbildung, so bleibt der Nullpunkt fest:

$$f(0) = 0$$

Achtung: Umkehrung gilt nicht. D.h. $f(0) = 0$ bedeutet nicht, dass f linear ist.

2.3.1 Matrix einer linearen Abbildung

Für die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit den Basisvektoren $e_1, e_2, \dots, e_n$ gibt es eine $(m \times n)$-Matrix $\mathbf{A}$, so dass

$$f(x) = \mathbf{A} \cdot x$$

Die Spalten der Matrix $\mathbf{A}$ sind die Bilder $v_i = f(e_i)$ der Einheitsvektoren.
Die Abbildung ist umkehrbar, wenn

$$\det(\mathbf{A}) \neq 0$$

Satz
Jeder linearen Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kann auf eindeutige Weise eine $m \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ zugeordnet werden, wobei deren Spalten der Reihe nach die Bilder $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ der Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ sind.

Ist umgekehrt eine $m \times n$-Matrix mit Spalten $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$, so ist die zugehörige lineare Abbildung durch die Vorschrift gegeben:

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i$$

2.3.2 Kern und Bild

Der *Kern* der Abbildung f besteht aus der Menge der Vektoren in V_1 die durch f auf den Nullvektor in V_2 abgebildet werden:

$$\ker(f) := \{x \in V_1 | f(x) = 0\}$$

Das *Bild* der Abbildung f ist die Menge der möglichen Bildvektoren in V_2:

$$\mathrm{im}(f) := \{y \in V_2 | \text{es gibt ein } x \in V_1 \text{ mit } f(x) = y\}$$

Kern und *Bild* von f sind Untervektorräume von V_1 resp. V_2.

Dimensionssatz: Das Bild und der Kern einer linearen Abbildung $f : V_1 \to V_2$ stehen über den Dimensionssatz in Beziehung:

$$\dim(V_1) = \dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{im}(f))$$

Umkehrbarkeit von linearen Abbildungen: Falls die Dimensionen der betrachteten Räume V_1 und V_2 einer linearen Abbildung f :

$V_1 \to V_2$ identisch sind, können die folgenden äquivalenten Aussagen zur Umkehrbarkeit von f gemacht werden:

i) Die Abbildung f ist umkehrbar

ii) $\dim(\ker(f)) = 0$

iii) $\dim(\mathrm{im}(f)) = \dim(V_2)$

2.3.3 Lineare Gleichungssysteme als lineare Abbildungen

Das Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ der Form

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots &= \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

kann in Matrizenform als

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

oder kurz

$$\mathbf{A} \cdot x = b$$

geschrieben werden.

Lösbarkeit linearer Gleichungssystemen
Fall 1: ist $\det \mathbf{A} \neq 0$ so ist x eindeutig durch $\mathbf{A}^{-1} \cdot b$ gegeben.
Fall 2: ist $\det \mathbf{A} = 0$ so hat man entweder

i) keine Lösung, falls $b \notin \mathrm{bild}\mathbf{A}$

ii) unendlich viele Lösungen, falls $b \in \mathrm{bild}\mathbf{A}$

2.4 Eigenwertprobleme

2.4.1 Definition

Gegeben sein ein quadratische Matrix $\mathbf{A}$. finde einen Vektor $x \neq 0$ und einen Skalar λ, so dass

$$\mathbf{A} \cdot x = \lambda \cdot x$$

2.4.2 Berechnung der Eigenvektoren und Eigenwerte

$$(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) \cdot x = 0$$

Dabei muss gelten:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{E}) = 0$$

Nach der Bestimmung der Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ kann für jedes λ_i ein Vektor $x_i \neq 0$ mit

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \cdot \mathbf{E}) \cdot x_i = 0$$

gefunden werden.

2.4.3 Sätze zu Eigenwerten / -vektoren

$\mathbf{A}$ sei eine $n \times n$-Matrix.

Satz 1: $\mathbf{A}$ kann höchstens n Eigenwerte haben.

Satz 2: Die Determinante von $\mathbf{A}$ ist gleich dem Produkt all ihrer Eigenwerte.

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

Ist ein Eigenwert $= 0$, so ist die Matrix singulär (nicht invertierbar).

Satz 3: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{A} = 0$ falls für alle Eigenwerte λ_i gilt $|\lambda_i| < 1$

Satz 4: Bei einer Diagonalmatrix oder Dreiecksmatrix sind die Diagonaleinträge gerade die Eigenwerte der Matrix.

Kapitel 3

Vektroanalysis

3.1 Felder

3.1.1 Skalarfelder

Eine skalare Grösse Φ die jedem Raumpunkt $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$ zugeordnet ist, heisst *Skalarfeld:*

$$\Phi = \Phi(\vec{r}) = \Phi(x, y, z)$$

Wenn die Werte der Funktion Φ nur vom Abstand r von einem Zentrum abhängen, heisst $\Phi(r)$ ein *zentrales* oder *radiales* Feld.

Linien in 2D resp. Flächen in 3D auf denen das Skalarfeld konstant ist werden *Äquipotentiallinien* resp. -flächen genannt (bzw. *Niveaulinien/-fälchen*).

3.1.2 Vektorfelder

Einem Vektorfeld $\vec{F}$ ist jedem Raumpunkt $\vec{r} = (x, y, z)$ einen Vektor $\vec{F}(x, y, z)$ zugeordnet.

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x(x, y) \\ F_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Gravitationsfeld Die Kraft auf eine Masse m an der Stelle $\vec{r} = (x, y, z)$ ist gegeben durch:

$$\vec{F}_m = -G\frac{M \cdot m}{r^2}\vec{e}_r$$

$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$:	Abstand der beiden Masse
$\vec{e}_r = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:	radialer Einheitsvektor von M in Richtung m
$G = 6.67428 \cdot 10^{-11} \, \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$:	universelle Gravitationskonstante
$M = 5.97 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$:	Erdmasse

3.1.3 Arbeit und Wegintegrale

Gegeben sei ein Vektorfeld $\vec{F}$ und ein Weg C paramtetrisiert durch $t \in [t_1, t_2] \mapsto \vec{\gamma}(t)$ mit Anfangspunkt $\vec{\gamma}(t_1)$ und Endpunkt $\vec{\gamma}(t_2)$, dann ist das *skalare Kurvenintegral, Wegintegral* oder die *Arbeit* des Vektorfeldes $\vec{F}$ längs der Kurve C gegeben durch:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(\vec{\gamma}(t)) \cdot \dot{\vec{\gamma}}(t)\mathrm{d}t$$

Ist das Vozeichen von W positiv, so wird Arbeit oder Energie gewonnen, ist es negativ, muss Arbeit oder Energie reingesteckt werden.

3.1.4 Parametrisierung einer Kurve

Ist die Kurve durch eine Funktionsvorschrift $y = f(x)$ gegeben, kann

$$\vec{y}(t) = \begin{pmatrix} t \\ f(t) \end{pmatrix}$$

für die Kurve gewählt werden.

Kreis mit Radius $r > 0$ im Ursprung:

$$\vec{y}(t) = r \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

wobei $t \in [0, 2\pi]$

Archimedische Spirale:

$$\vec{y}(t) = \frac{a}{2\pi} t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

mit $t \in [0, k \cdot 2\pi]$, wobie k der Anzahl Windungen und a dem Abstand der einzelnen Windungen entspricht.

Lemniskate (∞):

$$\vec{y}(t) = a \begin{pmatrix} \cos(t)\sqrt{2\cos(2t)} \\ \sin(t)\sqrt{2\cos(2t)} \end{pmatrix}$$

3.1.5 Gradient enes Skalarfeldes

Der Gradient eines Skalarfeldes Φ ist definiert als:

$$\operatorname{grad} \Phi(x, y, z) = \vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{pmatrix}$$

3.1.6 Konservative Felder

Fall es für ein Vektorfeld $\vec{F}$ ein Skalarfeld Φ mit $\nabla\Phi = \vec{F}$ gibt, so ist das Linienintegral längs des Weges C von $\vec{r}_1$ bis $\vec{r}_2$ nur vom Anfangs- und Endpunkt abhängig und ist gegeben durch:

$$\int_C \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_C \vec{\nabla}\Phi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \Phi(\vec{r}_2) - \Phi(\vec{r}_1)$$

Pfadunabhängigkeit: Sind C_1 und C_2 verschiedene Pfade mit gleichem Start- und Endpunkt so ist:

$$\int_{C_1} \vec{\nabla}\Phi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{C_2} \vec{\nabla}\Phi \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

Geschlossene Kurven: Ist C eine geschlossene Kurve dann gilt:

$$\oint_C \vec{\nabla}\Phi \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

3.1.7 Kriterium für konservative Felder

Das Vektorfeld

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x(x,y) \\ F_y(x,y) \end{pmatrix}$$

ist konservativ, wenn

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

erfüllt ist. Das Potential Φ ergibt sich durch

$$\Phi(x,y) = \int F_x(x,y)\mathrm{d}x + f_1(y)$$

$$\Phi(x,y) = \int F_y(x,y)\mathrm{d}y + f_2(x)$$

Die unbekannten Funktionen $f_1(y)$ und $f_2(x)$ erhält man durch Vergleichen der beiden Integrale.

Prüfen mit rot
Ein Vektorfeld $\vec{F}$ ist konservativ, falls die Rotation verschwindet

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Für den 2D Fall kann die z-Komponente auf Null gesetzt werden.