

# Formelsammlung INKT

Mario Felder

16. Juni 2015



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Basisband- und Bandpasssignale</b>	<b>7</b>
2.1	Amplitudenmodulation . . . . .	8
2.2	Digitale Modulation . . . . .	8
2.3	Binäre Amplitudenumtastung (On-Off Keying) . . . . .	8
2.4	Binäre Phasenumtastung (BPSK) . . . . .	9
2.5	Amplitudenumtastung (PAM, AM, ASK) . . . . .	9
2.6	Phasenmodulation (PSK) . . . . .	10
2.7	Minimum Shift Keying . . . . .	10
2.8	Quadraturamplitudenmodulation (QAM) . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Übertragung</b>	<b>13</b>
3.1	Mehrweg-Ausbreitung . . . . .	13
3.2	Verzerrung . . . . .	14
3.3	Schmalband vs. Breitband . . . . .	14
3.3.1	Schmalbandige Übertragung . . . . .	14
3.3.2	Breitbandige Übertragung . . . . .	15
3.4	Mehrträgerübertragung . . . . .	16
3.5	OFDM . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Matched Filter</b>	<b>19</b>
4.1	Weisses gaussssches Rauschen am Empfängerfilter . . . . .	20



# Kapitel 1

## Einleitung

Energie:

$$E_s = \int_0^T |s(t)|^2 dt$$

Korrelation (Skalarprodukt):

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_0^T s_1(t) \cdot s_2^*(t) dt$$

zwei Signale sind orthogonal wenn:

$$\langle s_1, s_2 \rangle = 0$$

Amplitudenspektrum:

$$S(f) = \mathcal{F} \{s(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Parsevalsches Theorem:

$$\langle s_1, s_2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} S_1(f) \cdot S_2^*(f) df$$

Leistungsdichtespektrum  $\Gamma_{ss}(f)$  (unter der Annahme, dass die Symbolfolge mittelwertfrei, in der Leistung auf 1 normiert und unkorreliert ist):

$$\Gamma_{ss}(f) = \frac{1}{T_s} |P(f)|^2$$

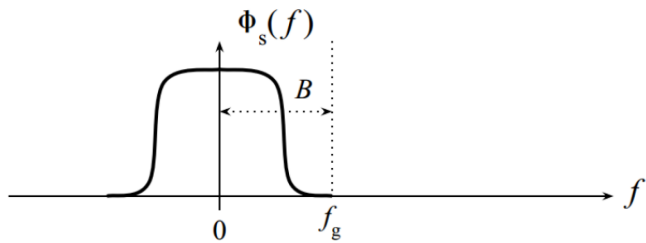
P-Norm:

$$||x||_p = \left( \sum_i |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

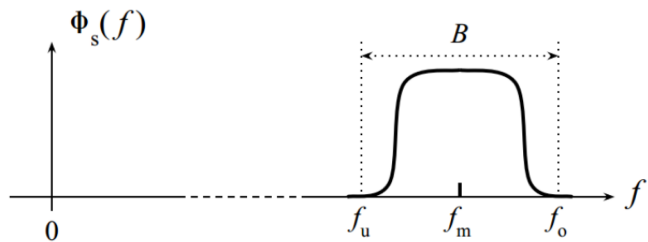
## Kapitel 2

# Basisband- und Bandpasssignale

Spektrum von Basisbandsignal:



Spektrum von Bandpasssignal



## 2.1 Amplitudenmodulation

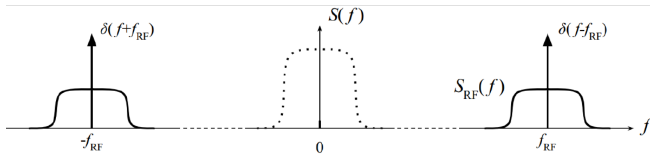
Trägermodulation:

$$s_{RF}(t) = s(t) \cdot \cos(2\pi f_{RF}t)$$

Träger:

$$\cos(2\pi f_{RF}t) = \frac{e^{j2\pi f_{RF}t} + e^{-j2\pi f_{RF}t}}{2}$$

Spektrum:



## 2.2 Digitale Modulation

mittlere Symbolenergie:  $\varepsilon_s$

mittlere Bitenergie:  $\varepsilon_B = \frac{\varepsilon_s}{\text{Anzahl Bit pro Symbol}}$

minimale euklidische Distanz zwischen zwei Signalpunkten:  $d$

## 2.3 Binäre Amplitudenumtastung (On-Off Keying)

Basisband:

$$s(t) = \sum_k a_k \cdot p(t - kT_b) \quad , a_k \in \{0, 1\}$$

Bandpasssignal:

$$s_{RF}(t) = s(t) \cos(2\pi f_{RF}t)$$

Signalraum:



$$\varepsilon_s = 0.5$$



## 2.4 Binäre Phasenumtastung (BPSK)

Basisband:

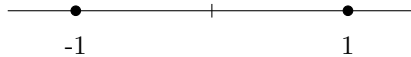
$$s(t) = \sum_k a_k \cdot p(t - kT_b) \quad , a_k \in \{-1, 1\}$$

Bandpasssignal:

$$s_{RF}(t) = s(t) \cos(2\pi f_{RF}t)$$

Signalraum:

$$\varepsilon_s = 1$$



## 2.5 Amplitudenumtastung (PAM, AM, ASK)

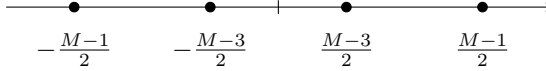
Basisband:

$$s(t) = \sum_k a_k \cdot p(t - kT_b) \quad , a_k \in \left\{ -\frac{M-1}{2}, \dots, \frac{M-1}{2} \right\}$$

Bandpasssignal:

$$s_{RF}(t) = s(t) \cos(2\pi f_{RF}t)$$

Signalraum:



## 2.6 Phasenmodulation (PSK)

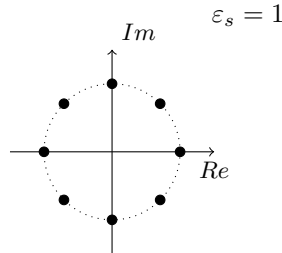
Basisband:

$$s(t) = \sum_k a_k \cdot p(t - kT_b) \quad , a_k \in \left\{ e^{\frac{j2\pi 0}{M}}, e^{\frac{j2\pi 1}{M}}, \dots, e^{\frac{j2\pi (M-1)}{M}} \right\}$$

Bandpasssignal:

$$s_{RF}(t) = \Re\{s(t)\} \cos(2\pi f_{RF}t) - \Im\{s(t)\} \sin(2\pi f_{RF}t)$$

Signalraum:



## 2.7 Minimum Shift Keying

Basisband:

$$\phi_s(t) = \pi h \left( \sum_{n=-\infty}^{k-1} a_n + a_k \frac{t - kT_s}{T_s} \right) \quad \text{mit } k = \left\lfloor \frac{t}{T_s} \right\rfloor ,$$

$$a_k \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$$

Bandpasssignal:

$$s_{RF}(t) = \Re\{s(t)\} \cos(2\pi f_{RF}t) - \Im\{s(t)\} \sin(2\pi f_{RF}t)$$

## 2.8 Quadraturamplitudenmodulation (QAM)

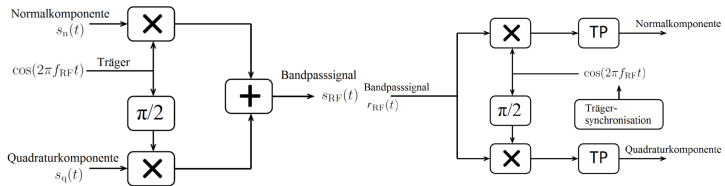
Basisband:

$$s(t) = \sum_k a_k \cdot p(t - kT_s)$$

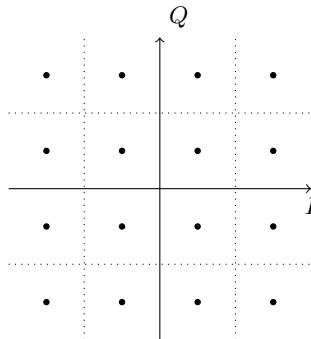
Bandpasssignal:

$$s_{RF}(t) = \Re\{s(t)\} \cos(2\pi f_{RF}t) - \Im\{s(t)\} \sin(2\pi f_{RF}t)$$

Modulator/Demodulation:



Bsp: 16-QAM:



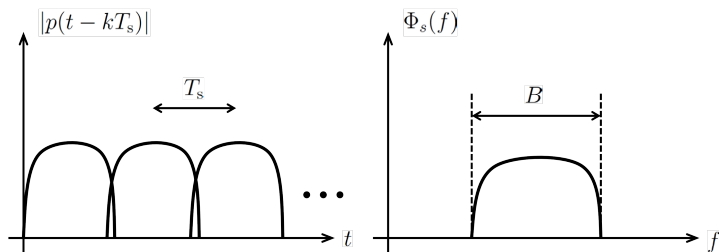


# Kapitel 3

## Übertragung

Bandbreite des Sendesignals:

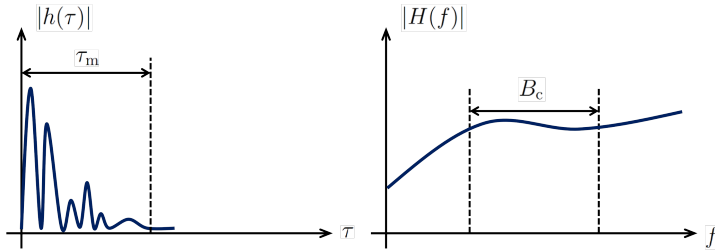
$$B \approx \frac{1}{T_S}$$



### 3.1 Mehrweg-Ausbreitung

Kohärenzbandbreite des Kanals:

$$B_c \approx \frac{1}{\tau_m}$$



## 3.2 Verzerrung

Impuls am Empfänger:

$$q(t) = (p * h)(t)$$

Leistungsdichtespektrum des Empfangssignals:

$$\Phi_r(f) = \Phi_s(f) \cdot |H(f)|^2$$

## 3.3 Schmalband vs. Breitband

Symboldauer:  $T_s$

Bandbreite:  $B \approx \frac{1}{T_s}$

Multipath Spread:  $\tau_m$

Kohärenzbandbreite:  $B_c \approx \frac{1}{\tau_m}$

schmalbandige Übertragung:  $\tau_m < T_s$

breitbandige Übertragung:  $\tau_m > T_s$

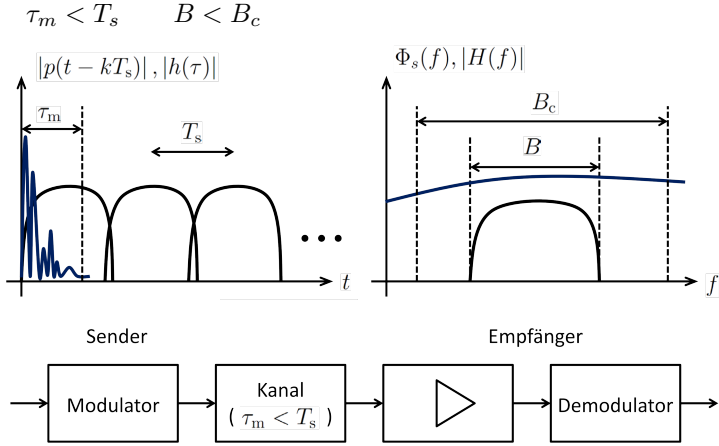
### 3.3.1 Schmalbandige Übertragung

Impuls am Empfänger:

$$q(t) \approx \alpha \cdot p(t)$$

Leistungsdichtespektrum des Empfangssignals:

$$\Phi_r(f) \approx |\alpha|^2 \cdot \Phi_s(f)$$



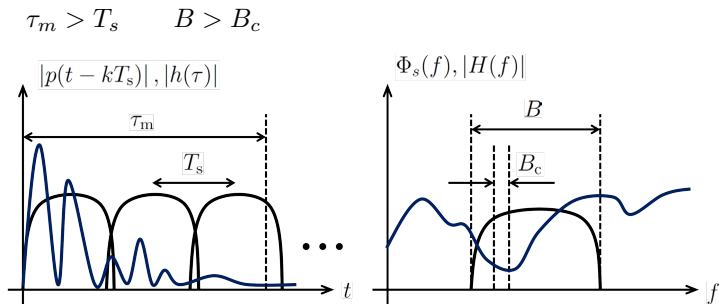
### 3.3.2 Breitbandige Übertragung

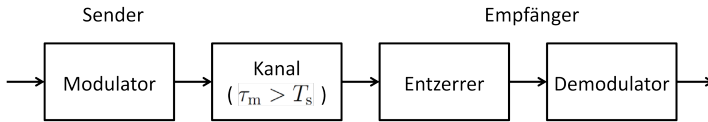
Impuls am Empfänger:

$$q(t) = (p * h)(t)$$

Leistungsdichtespektrum des Empfangssignals:

$$\Phi_r(f) = \Phi_s(f) \cdot |H(f)|^2$$

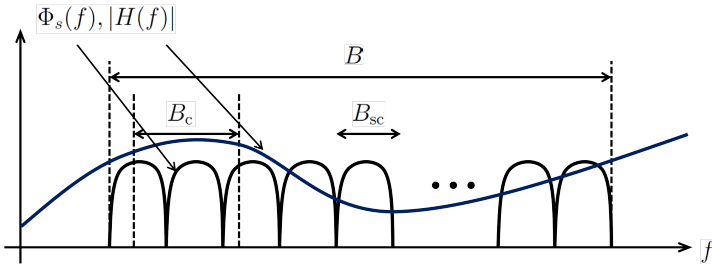




## 3.4 Mehrträgerübertragung

Bandbreite des Sendesignals:  $B$

Bandbreite eines Unterträgers:  $B_{sc}$

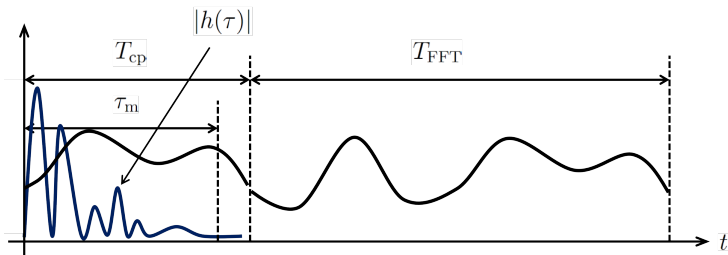


## 3.5 OFDM

Dauer des Kernsymbols:  $T_{FFT}$

Dauer des Schutzintervalls:  $T_{cp}$

Bedingung für interferenzfreien Empfang:  $T_{cp} \geq \tau_m$



Bandbreite:  $B$



Unterträger:  $K$

Bandbreite Unterträger:

$$F = \frac{B}{K}$$

Dauer des Kernsymbols:

$$T_{FFT} = \frac{1}{F}$$

Dauer des Schutzintervalls:

$$T_{cp} \geq \frac{\text{längster Pfad [m]}}{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

Gesamtdauer:

$$T_{OFDM} = T_{cp} + T_{FFT}$$

Bitrate:

$$R_b = \frac{K \cdot \text{Bit pro Symbol}}{T_{OFDM}}$$

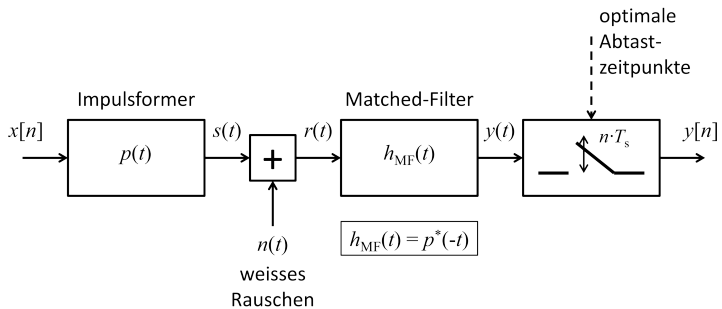
Spektrale Effizienz:

$$R/W = \frac{R_b}{B}$$



# Kapitel 4

## Matched Filter



Wahrscheinlichkeitsdichte mit Gauss:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

Q-Funktion:

$$Q(z) = \int_z^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

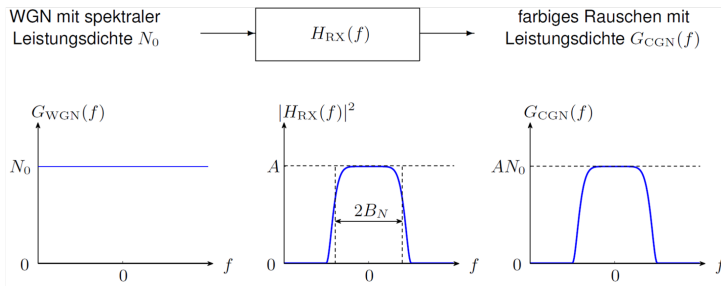
Error-Funktion:

$$\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-x^2} dx = 2Q(\sqrt{2}z)$$

$Y$  ist Gauss-Verteilt mit Mittelwert  $m$  und Varianz  $\sigma^2$ :

$$P(Y \geq z) = Q\left(\frac{z - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z - m}{\sqrt{2}\sigma}\right)$$

## 4.1 Weisses gaussssches Rauschen am Empfängerfilter



Äquivalente Rauschbandbreite des TP:

$$B_N = A^{-1} \int_0^\infty |H_{RX}(f)|^2 df$$

Leistung des reellen Rauschsignals am Filterausgang:

$$\frac{N}{2} = N_0 \int_0^\infty |H_{RX}(f)|^2 df = N_0 A B_N$$

#### 4.1. WEISSES GAUSSSCHES RAUSCHEN AM EMPFÄNGERFILTER

---

	vor Empfänger-Filter / Abtaster	im Signalraum (nach Abtastung)
Symbolenergie	$\varepsilon_{s,RX}$	$\varepsilon_s = \varepsilon_{s,RX} \quad 1)$
spektr. Rauschleistungsdichte	$N_0$	
Varianz des reellen (oder imaginären) Rauschterms		$\sigma_n^2 = N_0/2 \quad 1)$
Signalleistung $S$	$\varepsilon_{s,RX}/T_s$	$\varepsilon_s \quad 1,2)$
Rauschleistung $N$	$N_0 \cdot 2B \quad 3)$	$2\sigma_n^2 \quad 2)$
Signal-/Rauschleistungs- verhältnis $S/N$	$\varepsilon_{s,RX}/N_0/(2BT_s) \quad 3)$	$\varepsilon_s/N_0 \quad 1)$

1) mit Matched-Filter (mit Energie in Impulsantwort normiert)

2) Leistung normiert auf Abtastrate

3) bei Basisband-Kanal mit Bandbreite  $B$