

Formelsammlung Physik

Mario Felder

15. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Bewegung	7
1.1	Gerade Bewegung	7
1.1.1	Spezialfall: konstante Beschleunigung a	7
1.2	Bewegung im Raum	8
1.2.1	Bahnkurve	8
1.2.2	Kreisbewegung	8
1.3	Schiefer Wurf	8
1.3.1	$x(t), y(t) \leftrightarrow y(x)$	9
1.3.2	schräge Zerlegung	9
2	Kraft	11
2.1	Übersicht	12
2.2	Federkraft	13
2.3	Reibung	13
2.3.1	Kontaktkräfte: Normal- & Reibungskraft	13
2.3.2	Luftwiderstand	14
2.4	Kurvenkräfte	15
2.4.1	Zentripetalkraft	15
2.4.2	Neigungswinkel	15
3	Arbeit und Energie	17
3.1	Arbeit	17
3.2	Energie	18
3.3	Leistung	18
3.3.1	Bewegung mit konstanter Leistung	18

4	Impuls und Kraftstoss	21
4.1	Impuls \vec{p}	21
4.2	Kraftstoss \vec{J}	21
4.3	Impulserhaltung	22
4.3.1	elastischer Stoss	22
4.3.2	inelastischer Stoss	22
5	Schwerpunkt	25
5.1	Bewegung des Schwerpunktes	25
5.2	Raketenantrieb	26
6	Rotation	27
6.1	Übersicht	27
6.2	Kreisbewegung	27
6.3	Trägheitsmoment	28
6.3.1	Parallel Axis Theorem:	28
6.3.2	Trägheitsmoment regelmässiger Körper	29
6.4	Perfektes Rollen	29
6.4.1	Momentane Drehachse P	29
6.5	Drehmoment \vec{M}	29
6.6	Arbeit und Leistung (rot.)	30
6.7	Drehimpuls \vec{L} und Drallsatz	30
6.8	Präzession	31
7	Schwingungen	33
7.1	Einfache harmonische Schwingung	33
7.1.1	$x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ der EHS	34
7.1.2	EHS und Kreisbewegung	34
7.1.3	Energie der harmonischen Schwingung	35
7.1.4	Torsion, Koordinate θ	35
7.1.5	Fadenpendel	36
7.1.6	Physikalisches Pendel	36
7.2	Gedämpfte Schwingung	36
7.2.1	Abklingkonstante β , Zerfallszeit τ	38
7.2.2	Torsionsschwingung mit Dämpfung	38
7.2.3	Physikalisches Pendel mit Dämpfung	38
7.2.4	Elektrischer Schwingkreis	39
7.2.5	Energieverlust durch Dämpfung	39

7.2.6	Güte, Q -Faktor bei kleiner Dämpfung	40
7.3	Erzwungene Schwingung	40
7.3.1	Frequenzgang	41
7.3.2	Resonanz	41
8	Wellen	43
8.1	Seilwelle	44
8.1.1	Freihängendes Seil	44
8.2	Harmonische Wellen	44
8.3	Durckwellen, Schallwellen	45
8.4	Energiefluss	46
8.5	Intensität I	46
8.5.1	Intensität und Abstand	47
8.6	Schallpegel L	47
8.7	Doppler Effekt	48
8.8	Überschall	49
8.9	Superposition - Interferenz	49
8.10	Schwebung	49
8.11	Reflexion und Transmission	50
8.12	Stehende Welle	50
8.12.1	Harmonische	50
8.12.2	Orgelpfeife	51
8.12.3	Wasserwelle	51
9	Wärme	53
9.1	Konstanten	53
9.1.1	Ideale Gasgleichung	53
9.2	Luftdruck vs. Höhe bei konstanter Temperatur	54
9.2.1	Energie	54
9.2.2	Geschwindigkeiten	55
9.2.3	Freiheitsgrade FG	55
9.2.4	Spezifische Wärmekapazität c	55
9.2.5	Mittlere freie Weglänge Λ	56
9.2.6	Wahrscheinlichkeit	57

Kapitel 1

Bewegung

1.1 Gerade Bewegung

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$$

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta t = \int_{t_A}^{t_B} v dt$$

1.1.1 Spezialfall: konstante Beschleunigung a

$$a(t) = a = \text{konstant}$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a^2$$

$$\Delta x = x - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$a = \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta s}$$

1.2 Bewegung im Raum

Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind Vektoren.

$$\begin{aligned}\vec{\Delta r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ v &\rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ a &\rightarrow \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\end{aligned}$$

1.2.1 Bahnkurve

Die Geschwindigkeit liegt immer **tangential** an der Bahnkurve.

Die Beschleunigung zeigt immer nach **innen**.

1.2.2 Kreisbewegung

Bei einer **gleichförmigen** Kreisbewegung ($v = \text{konst.}$) gilt:

$$a_{ZP} = a_{radial} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Bei einer **ungleichförmigen** Kreisbewegung gilt:

$$a_{radial} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r \qquad a_{tangential} = \frac{d|v|}{dt}$$

1.3 Schiefer Wurf

x- und y-Bewegung sind unabhängig:

horizontal:	vertikal:
$a_x = 0$	$a_y = -g$
$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha_0$	$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha_0 - g \cdot t$
$x = (v_0 \cdot \cos \alpha_0) \cdot t$	$y = (v_0 \cdot \sin \alpha_0) \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$
	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$

Wurfdauer:

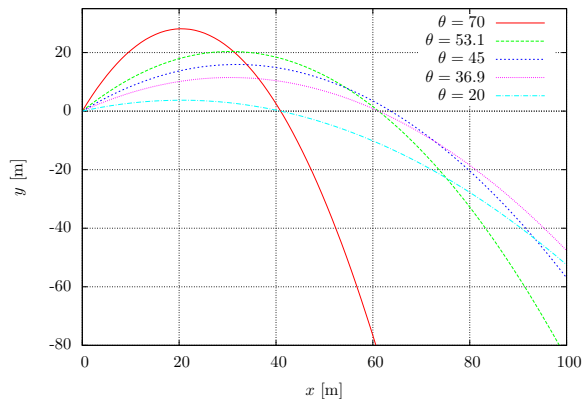
$$t_R = \frac{2 \cdot v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \cdot \sin \theta}{g}$$

Wurfweite:

$$R = x(t_r) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

1.3.1 $x(t), y(t) \leftrightarrow y(x)$

$$y(x) = \tan \theta_0 \cdot x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \cdot x^2$$



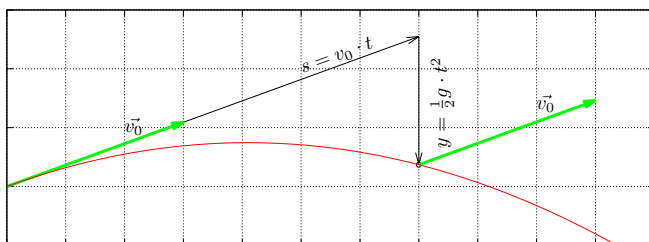
1.3.2 schräge Zerlegung

Die Komponentenzerlegung eines Vektors ist beliebig. Manchmal ist eine schräge Zerlegung besser als eine Senkrechte, beispielsweise in die

\vec{v}_0 und \vec{g} Richtung:

$$s = v_0 \cdot t$$

$$y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$



Kapitel 2

Kraft

Die 4 fundamentalen Kräfte sind:

- **Gravitationskraft** (Anziehung zwischen Massen)
(Bsp: Anziehung zwischen Sonne und Erde, Gezeitenkräfte)
- **Elektromagnetische Kraft** (Kräfte zwischen Ladungen)
(Bsp: Reibung, Seilkraft, Lorentzkraft)
- **Schwache Kraft und starke Kraft** (Kernkräfte)
(Bsp: Radioaktiver Zerfall, Anziehung zwischen Protonen und Neutronen)

- **Kräfte sind Vektoren:**

$$\vec{F}_{Res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (F_r, F_\varphi, F_z)$$

- **Trägheitsgesetz (1. Axiom)**

$$\vec{F}_{Res} = 0 \leftrightarrow \vec{a} = 0 \leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$$

- **Bewegungsgleichung (2. Axiom)**

$$\vec{F}_{Res} = m \cdot \vec{a} \leftrightarrow F_x = m \cdot a_x, F_y = m \cdot a_y, F_z = m \cdot a_z$$

- **Wechselwirkungsgesetz (3. Axiom)**

$$\vec{F}_{\text{Körper A auf Körper B}} = -\vec{F}_{\text{Körper B auf Körper A}}$$

2.1 Übersicht

Kraft	Gleichung	Ursprung und Bemerkung
Feder	$F_{Feder} = k \cdot x$ ($\vec{F}_H = -k \cdot \vec{x}$)	(em); lineare Näherung - Hooke'sches Gesetz
Normalkraft	$F_N = F_g \cdot \cos \theta$	(em); F_N ist immer senkrecht zur Kontaktfläche
Hangkraft	$F_H = m \cdot g \cdot \sin \theta$	(em); F_H ist immer parallel zu Kontaktfläche
Haftreibung	$F_{HR} < F_{HR,max} = \mu_{HR} \cdot F_N$	(em); Parallel zur Kontaktfläche und der angreifenden Kraft entgegengesetzt
Gleitreibung	$F_{GR} = \mu_{GR} \cdot F_N$	(em); Der Bewegung entgegengesetzt; Van der Waals Kräfte
Lorentzkraft	$F_L = qvB \cdot \sin \theta$	(em); $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$
Hydrostatische Kraft	$F_{hydr} = \rho g h \cdot A = \int \rho g h dA$	Gravitation (und em); $p_{hydr} = \rho g h$ ist der hydrostatische Druck
Auftrieb	$F_A = \rho_{Fluid} g V_{Körper}$	Gravitation (und em)

2.2 Federkraft

Hooke'sches Gesetz:

$$F_{Feder} = k \cdot \Delta x \quad [k] = \frac{N}{m}$$

Federn in Serie:

$$F_{Res} = k_{Res} \cdot \Delta x$$

wobei:

$$k_{Res} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

oder allgemein:

$$k_{Res} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots}$$

Federn parallel:

$$F_{Res} = k_{Res} \cdot \Delta x = F_{H,1} + F_{H,2} + \dots = (k_1 + k_2 + \dots) \cdot \Delta x$$

2.3 Reibung

2.3.1 Kontaktkräfte: Normal- & Reibungskraft

Die **Normalkraft** steht immer **senkrecht** auf der Kontaktfläche.

Die **Reibungskraft** zeigt immer **parallel** zu Kontaktfläche.

Haftreibungskraft:

$$F_{Zug} = F_{HR} \leq \mu_{HR} \cdot F_N$$

Die Haftreibung muss überwunden werden, damit sich der Körper in Bewegung setzt.

Solange die angreifende Kraft F_{Zug} nicht grösser als $F_{HR,max} = \mu_{HR} \cdot$

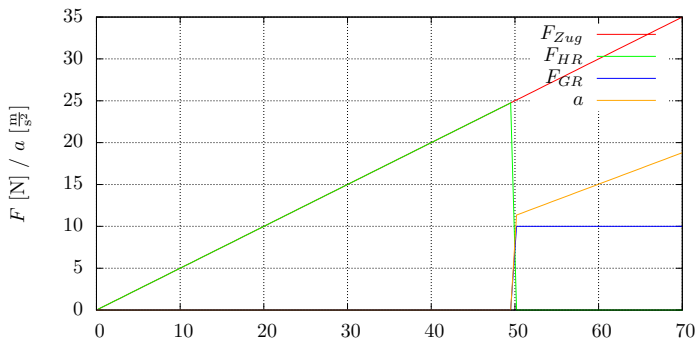
F_N ist, ist die Haftreibungskraft gleich der Zugkraft.

Gleitreibung:

$$F_{GR} = \mu_{GR} \cdot F_N$$

Die Gleitreibung zwischen festen Körpern hängt nicht von deren relativer Geschwindigkeit v ab.

$$\mu_{GR} < \mu_{HR}!$$



2.3.2 Luftwiderstand

Im Gegensatz zur Reibung zwischen festen Körpern ist der Luftwiderstand von der Fahrgeschwindigkeit v abhängig.

$F_{LW,l} = b \cdot v$	langsam, kleines v
$F_{LW,s} = c \cdot v^2$	schnell, grosses v

2.4 Kurvenkräfte

2.4.1 Zentripetalkraft

$$F_{rad} = F_{Zentripetal} = m \cdot a_{rad} = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R = m \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

2.4.2 Neigungswinkel

Bei hängenden Massen:

$$\tan \beta = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{R}{H}$$

mit $H = \frac{g}{\omega^2}$; die Höhe unter der Aufhängung ist einzig eine Funktion der Kreisfrequenz ω und g , nicht der Seillänge L !

Steilwandkurven:

$$\tan \beta = \frac{F_{ZP}}{F_g} = \frac{v^2}{R \cdot g}$$

In die Kurve liegen (Winkel β gegenüber horizontalen sonst wie bei Steilwandkurve):

$$\tan \beta = \frac{F_g}{F_{ZP}} = \frac{R \cdot g}{v^2}$$

Kapitel 3

Arbeit und Energie

3.1 Arbeit

Eine Kraft verrichtet Arbeit an einem Körper, wenn sie sich mit diesem verschiebt.

Bei konstanter Kraft:

$$W = F_{||} \cdot s = F \cdot \cos \theta \cdot s$$

$$[W] = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = J = \text{Joule}$$

Bei veränderlicher Kraft:

$$W = \sum_i F_{||}(x_i) \cdot dx_i = \int_a^b F_x(x) \cdot dx$$

Federarbeit:

$$W = \int_a^b F_x \cdot dx = k \int_a^b x \cdot dx$$

3.2 Energie

Energie kann weder vergehen noch entstehen. Energie kann nur umgewandelt oder zwischen Körpern ausgetauscht werden.

Beschleunigungsarbeit $W_{\text{beschl}} = ma \cdot \Delta x$	kinetische Energie $\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$
Reibungsarbeit $W_{\text{gleiten}} = \mu_{\text{GleitR}} F_N \cdot \Delta x$	innere, thermische Energie ΔQ
Hubarbeit $W_{\text{hub}} = mg \cdot \Delta h$	potentielle Energie der Höhe $\Delta E_{\text{pot}} = mg \cdot \Delta h$
Dehnarbeit an der Feder $W_{\text{dehnen}} = \int_0^s F_{\text{zug}} \cdot dx = \frac{1}{2}ks^2$	potentielle Energie der Spannung $\Delta E_{\text{elast}} = \frac{1}{2}ks^2$
	Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$

3.3 Leistung

Definition Leistung:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot v$$

Durchschnittliche Leistung:

$$\langle P \rangle = \frac{\int_{t_1}^{t_2} P dt}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$[P] = W = \frac{J}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$

$$1\text{PS} = 735.5\text{W}$$

3.3.1 Bewegung mit konstanter Leistung

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot t}{m}}$$

$$\Delta t = (v_2^2 - v_1^2) \frac{m}{P}$$

$$s = \int v \cdot dt = \sqrt{\frac{2 \cdot P}{m}} \int \sqrt{t} \cdot dt = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2 \cdot P}{m}} t^{3/2} \Big|_{t_A}^{t_B}$$

Kapitel 4

Impuls und Kraftstoss

4.1 Impuls \vec{p}

Definition:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Das zweite Newtonsche Gesetz verallgemeinert:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

4.2 Kraftstoss \vec{J}

Definition des Kraftstosses (Impulsänderung):

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \vec{F}) dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Durchschnittliche Kraft:

$$\vec{F}_{average} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \frac{\vec{J}}{\Delta t}$$

4.3 Impulserhaltung

Definition Gesamtimpuls:

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_C + \dots$$

Ist die Vektrosumme aller äusseren Kräfte auf ein System Null, bleibt der Gesamtimpuls erhalten:

$$\sum \vec{F}_{\text{extern}} = 0 \leftrightarrow \vec{P} = \text{konst.}$$

4.3.1 elastischer Stoss

Definition:

Beim elastischen Stoss bleibt die kinetische Energie vor und nach dem Stoss vollständig erhalten.

Mit dem Energie- und Impulserhalt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1}^2 &= \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2 \\ m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} &= m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2} \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_{A2} &= \frac{m_A \cdot v_{A1} + m_B(2 \cdot v_{B1} - v_{A1})}{m_A + m_B} \\ v_{B2} &= \frac{m_B \cdot v_{B1} + m_A(2 \cdot v_{A1} - v_{B1})}{m_A + m_B} \end{aligned}$$

4.3.2 inelastischer Stoss

Definition:

Beim inelastischen Stoss wird ein Teil der kinetischen Energie in Verformungsarbeit gesteckt.

Gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoss:

$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_2$$

$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} = (m_A + m_B) \cdot \vec{v}_2$$

\vec{v}_2 ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der beiden Körper.

Kapitel 5

Schwerpunkt

$$\begin{aligned}x_{cm} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} \\y_{cm} &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}\end{aligned}$$

oder durch integrieren:

$$\begin{aligned}x_{cm} &= \frac{1}{M} \int_0^M x \cdot dm \\y_{cm} &= \frac{1}{M} \int_0^M y \cdot dm\end{aligned}$$

5.1 Bewegung des Schwerpunktes

$$v_{cm,x} = \frac{m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + m_3v_{3x} + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{dx_{cm}}{dt}$$

Gesamtimpuls des Systems:

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots = \vec{P}$$

Ableitung nach Zeit:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{res} = \sum \vec{F}_{ext}$$

5.2 Raketenantrieb

$$m \cdot a = v_{rel} \frac{dm}{dt} + \sum F_{ext}$$

$$v_{rel} \frac{dm}{dt} \Rightarrow \text{Schubkraft}$$

Im Fall $F_{ext} = -mg$ und einem konstanten Massentrom $R = \frac{dm}{dt}$:

$$a(t) = \frac{v_{rel}}{m} \frac{dm}{dt} - g = \frac{v_{rel} \cdot R}{m_0 - R \cdot t} - g$$

v_{rel} : realtive ausstossgeschw. des Gases (gegenüber der Rakete)

Kapitel 6

Rotation

6.1 Übersicht

ROTATION	LINEARE BEWEGUNG
Trägheitsmoment $[kg \cdot m^2]$	Masse
$I = \sum r_i^2 m_i = \int r^2 dm$	m
Drehmoment $[N \cdot m]$	Kraft $[N]$
$M = I \cdot \alpha$	$F = m \cdot a$
Drehimpuls $[\frac{kg \cdot m^2}{s}]$	Impuls $[N \cdot s]$
$L = I \cdot \omega$	$p = m \cdot v$
Newtonsches Gesetz $[N \cdot m]$	Newtonsches Gesetz
$M = \frac{dL}{dt}$	$F = \frac{dp}{dt}$
Rotationsenergie $[J]$	Kinetische Energie
$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$
Leistung $[W]$	Leistung
$P = \frac{dE}{dt} = M \cdot \omega$	$P = F \cdot v$

6.2 Kreisbewegung

Bogenlänge s :

$$s = r \cdot \theta$$

Geschwindigkeit tangential v :

$$v = r \cdot \omega = r \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Beschleunigung tangential a_{tan} :

$$a_{tan} = r \cdot \alpha = r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Beschleunigung radial a_{rad} :

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

6.3 Trägheitsmoment

Definition bzgl. fester Achse:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots = \sum r_i^2 m_i = \int r^2 dm$$

$$[I] = kg \cdot m^2$$

Fehlende Massen haben negatives Trägheitsmoment!

Scheibe mit Loch: $I_{tot} = I^* + I_{Loch}$

$I^* \Rightarrow I$ der Scheibe ohne Loch

$I_{Loch} \Rightarrow$ negatives Moment

6.3.1 Parallel Axis Theorem:

$$I_P = I_{cm} + m \cdot h^2$$

6.3.2 Trägheitsmoment regelmässiger Körper

TODO

6.4 Perfektes Rollen

$$v_{cm} = R \cdot \omega$$

6.4.1 Momentane Drehachse P

Beim perfekten Rollen ist der Kontaktpunkt P zwischen Rad und Unterlage momentan in Ruhe:

$$E_{pot} = E_{kin,cm} + E_{rot,cm} = E_{rot,P}$$

6.5 Drehmoment \vec{M}

Definition:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$[M] = Nm$$

Das Drehmoment ist **senkrecht** zu \vec{F} und \vec{r} .

Rotation eines starren Körpers um feste Achse:

$$\sum \vec{M}_i = \vec{M}_{res} = I\vec{\alpha}$$

Teilchengeschwindigkeit:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{i,rel} = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

6.6 Arbeit und Leistung (rot.)

Bei der Rotation verrichtete **Arbeit**:

$$W = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z d\omega_z = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

Bei der Rotation verrichtete **Leistung**:

$$P = M_z\omega_z$$

6.7 Drehimpuls \vec{L} und Drallsatz

Definition:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$[L] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

Drehimpuls für Symmetrieachse von starrem Körper:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Drallsatz (Newton für die Rotation):

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

6.8 Präzession

Die Schwerkraft bewirkt das Drehmoment:

$$M = r \times mg$$

Mit r als Abstand des Schwerpunkts zum Unterstützungspunkt.

Da M senkrecht zu r und F_g ist, ist es auch senkrecht zum Drehimpuls L . Daher ändert sich nur dessen Richtung, nicht jedoch der Betrag. Somit dreht sich der Kreisel horizontal. Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{L} &= d\varphi \\ \Rightarrow M &= \frac{dL}{dt} = L \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω_P dieser Rotation beträgt ($w_P \ll w_K$):

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{mgr}{I\omega_K}$$

w_P auch als Ω

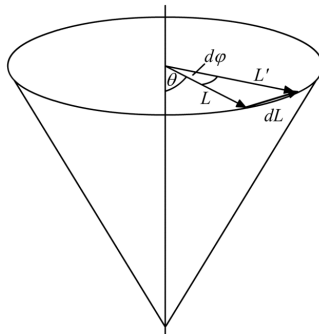


Abbildung 6.1: Präzession

Kapitel 7

Schwingungen

7.1 Einfache harmonische Schwingung

Die rücktreibende Kraft ist proportional zur Auslenkung. In diesem Fall ist die Schwingung harmonisch, d.h. eine Sinus- bzw. Kosinus-Schwingung.

$$-kx = F_x = ma = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Die Lösung aus dieser homogenen Differenzialgleichung:

$$x(t) = A \cos(\omega t \pm \phi)$$

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Eine positive Phase ϕ bedeutet eine Verschiebung nach links, ein negatives ϕ eine nach rechts!

Phase und Amplitude aus Anfangsbedingungen:

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

7.1.1 $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ der EHS

Einfache harmonische Schwingung:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t \pm \phi) \\ \dot{x}(t) = v(t) &= -\omega A \sin(\omega t \pm \phi) \\ \ddot{x}(t) = a(t) &= -\omega^2 A \cos(\omega t \pm \phi) \end{aligned}$$

ω = Kreisfrequenz ($2\pi f$)

A = Amplitude

ϕ = Phasenwinkel

v aus Amplitude und Position:

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{A^2 - x^2(t)}$$

$$v_{max} = \omega A = A \sqrt{\frac{k}{m}}$$

a aus Amplitude und Position:

$$a(t) = -\frac{k}{m} \cdot x(t)$$

$$a_{max} = -\omega^2 \cdot A$$

7.1.2 EHS und Kreisbewegung

Position:

$$r(t) = (x(t), y(t)) = A \cdot (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

Geschwindigkeit:

$$v = \frac{dr}{dt} = A\omega \cdot (-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$$

Beschleunigung:

$$a = \frac{v^2}{r} = A \cdot \omega^2$$

7.1.3 Energie der harmonischen Schwingung

Gesamte energie der EHS:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m(v_{max})^2}$$

7.1.4 Torsion, Koordinate θ

Das rücktreibende Drehmoment M_A ist proportional zum Torsionswinkel θ :

$$M_A = -\kappa \cdot \theta$$

harmonische Torsionsschwingung:

$$M = I_A \cdot \ddot{\theta} + \kappa \cdot \theta$$

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t \pm \phi)$$

Kreisfrequenz und Periode:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I_A}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{\kappa}}}$$

für kleine Winkel:

$$\kappa = k_1 \cdot r_1^2 + k_2 \cdot r_2^2 = \sum_1^n (k_n \cdot r_n^2)$$

7.1.5 Fadenpendel

Es gilt die Näherung: $\sin \theta \approx \theta$ (in rad)

$$m\ddot{x} = F_{tan} = -mg \sin \theta \approx -mg\theta = -mg \frac{x}{L} \rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{L}x = 0$$

Kreisfrequenz und Periodendauer:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Fadenkraft:

$$F_s = mg \cdot \cos \theta + m \frac{v^2}{L} = mg \cdot \cos \theta + m\omega^2 L$$

7.1.6 Physikalisches Pendel

Anstelle von $F = ma$ wird $M = I\alpha$ verwendet:

$$I_z \ddot{\theta} = M_z = -d \cdot mg \sin \theta \approx -mgd \cdot \theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_z} \theta = 0$$

Kreisfrequenz und Periodendauer:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_z}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgd}}$$

d : Abstand der Drehachse zum **Schwerpunkt**

I_z : Trägheitsmoment bzgl. der Drehachse

m : Masse des Körpers

7.2 Gedämpfte Schwingung

Reale Schwingungen sind gedämpft durch Reibung. Die Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit v .

$$\vec{F}_{Res} = ma \rightarrow \vec{F}_{Rück} + \vec{F}_{Dämpf} = -kx - bv = ma$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = 0$$

$$F_{D\ddot{a}mpf} = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v \rightarrow b = 6\pi \cdot \eta \cdot R$$

$$\text{Radikant: } \delta^2 = \beta^2 - \omega^2$$

1. Fall: $\delta^2 > 0 \rightarrow$ Kriechfall

allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{\delta t} + C_2 e^{-\delta t})$$

2. Fall: $\delta^2 = 0 \rightarrow$ kritische Dämpfung

allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{-\beta t} (C_1 t + C_2)$$

$$b_{krit} = \sqrt{4k \cdot m}$$

3. Fall: $\delta^2 < 0 \rightarrow$ gedämpfte Schwingung

allgemeine Lösung:

$$x(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t \pm \phi)$$

Kreisfrequenz:

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\beta^2 < \omega^2 \Rightarrow b^2 < 4k \cdot m$$

7.2.1 Abklingkonstante β , Zerfallszeit τ

Die Amplitude zerfällt exponentiell:

$$A(t) = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\beta = \frac{1}{\tau} \qquad \beta = \frac{\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right)}{t_2 - t_1}$$

7.2.2 Torsionsschwingung mit Dämpfung

Differenzialgleichung:

$$-\kappa\theta - B\dot{\theta} = I_A\ddot{\theta}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d t \pm \phi)$$

Daraus folgt:

$$\beta = \frac{B}{2I_A} \qquad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I_A}} \qquad \omega_d = \sqrt{\frac{\kappa}{I_A} - \frac{B^2}{4I_A^2}}$$

I_A : Trägheitsmoment

κ : Hookesche Proportionalitätskonstante

B : viskose Dämpfungskonstante

7.2.3 Physikalisches Pendel mit Dämpfung

Differenzialgleichung:

$$-mgd \cdot \theta - b^*\dot{\theta} = I_z\ddot{\theta}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d t \pm \phi)$$

Daraus folgt:

$$\beta = \frac{b}{2I_z} \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_z}} \qquad \omega_d = \sqrt{\frac{mgd}{I_z} - \frac{b^2}{4I_z^2}}$$

I_{zA} : Trägheitsmoment

b^* : viskose Dämpfung

7.2.4 Elektrischer Schwingkreis

Differenzialgleichung:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

Daraus folgt:

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \quad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{L}{R^2 \cdot C}}$$

$$q(t) = \hat{q} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)$$

$$u(t) = \frac{\hat{q}}{C} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)$$

$$i(t) = \hat{q} \cdot e^{-\beta t} (-\beta \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi) - \omega_d \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \phi))$$

$i = \frac{dq}{dt}$: El. Strom

$u_c = \frac{q}{C}$: Kondensatorspannung

$u_L = L \frac{di}{dt}$: Spulenspannung

$u_R = R \cdot i$: Spannung am Widerstand

7.2.5 Energieverlust durch Dämpfung

Energie am schwingenden System:

$$E(t) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

Momentante Energieänderungsrate:

$$\frac{dE}{dt} = kx \frac{dx}{dt} + mv \frac{dv}{dt} = \dot{x}(kx + m\ddot{x}) = \dot{x} \cdot F_D = -bv^2$$

Mittlere Energie des schwingenden Systems:

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{2} kA^2 \cdot e^{-2\frac{t}{\tau}} = E_0 \cdot e^{-2\frac{t}{\tau}} = E_0 \cdot e^{-2\beta t}$$

7.2.6 Güte, Q -Faktor bei kleiner Dämpfung

Der Energieverlust pro Zyklus wird mit der Güte ausgedrückt. Definition:

$$Q = \frac{2\pi \cdot E(t)}{|\Delta E(t)_T|} = \frac{2\pi \cdot E(t)}{\left| \frac{dE}{dt} \cdot T \right|} = \frac{\omega_d \cdot E(t)}{\left| \frac{dE}{dt} \right|} = \frac{\pi}{\beta \cdot T} = \pi \frac{\tau}{T} = \frac{\omega_d \cdot \tau}{2}$$

$\Delta E(t)_T$: Energieverlust pro Zyklus

Je kleiner die Dämpfung β , bzw. b und je grösser die Kreisfrequenz $\omega_d \approx \omega$, desto grösser die Güte Q .

Für grosse Q ($Q > 5$):

$$\omega_d \approx \frac{\omega}{\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}} \approx \omega \left(1 - \frac{1}{8Q^2} \right)$$

7.3 Erzwungene Schwingung

Differenzialgleichung:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 H \cos(\Omega \cdot t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega \cdot t)$$

Die Amplitude A und die Phase ϕ sind nun Funktion der Anreger-Kreisfrequenz Ω :

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \frac{F_0}{m \cdot \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta \cdot \Omega)^2}} = \frac{H}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \frac{b^2}{k \cdot m} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \\ &\approx \frac{H}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{Q \cdot \omega}\right)^2}} \end{aligned}$$

\approx gilt für $Q > 5$

F_0 : Anregerkraft ($= k \cdot H$)

Ω : Anreger-Kreisfrequenz

H : Anreger-Auslenkung

$$\phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{2\beta \cdot \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{b}{\sqrt{k \cdot m}} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}\right)$$

Weiterhin gilt:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \beta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{\tau} \quad Q = \frac{\omega_d}{2\beta} = \pi \frac{\tau}{T}$$

Allerdings ist jetzt:

$$x(t) = A(\omega) \cdot \cos(\Omega \cdot t - \phi(\omega))$$

7.3.1 Frequenzgang

Kurvendiskussion von $A(\Omega)$ und $\phi(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \Omega := 0 : \quad A(\Omega) &= H & \phi(\Omega) &= 0 \\ \Omega := \infty : \quad A(\Omega) &= 0 & \phi(\Omega) &= \pi \\ \Omega := \omega : \quad A(\Omega) &= \frac{k \cdot H}{b \cdot \omega} & \phi(\Omega) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

7.3.2 Resonanz

Resonanz bedeutet maximale Amplitude.

$$\begin{aligned} \Omega_R &= \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} \approx \omega \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\ &\approx \omega \cdot \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) \end{aligned}$$

$$A_R = A(\Omega_R) \approx \frac{Q \cdot H}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \approx Q \cdot H$$

$$\phi_R = \phi(\Omega_R) \approx \arctan\left(\sqrt{4Q^2 - 2}\right) \approx \frac{\pi}{2}$$

\approx gilt für $Q > 5$

Q -Faktor und Resonanzkurve

Die Güte ist ein Mass für die Peak-Schärfe. Für grosse Q (=kleine Dämpfung) gilt:

$$Q = \frac{\Omega_R}{\Delta\Omega}$$

$\Delta\Omega$: Kurfenbreite auf der Höhe $\frac{A_R}{\sqrt{2}}$

Kapitel 8

Wellen

Wellentypen:

- **Transversal:** Die Auslenkung ist veritkal oder horizontal zur Fortbewegung. z.B. Seilwelle
- **Longitudinal:** Die Auslenkung ist in die gleiche Richtung wie die Fortbewegung. z.B. Schallwelle in Luft

Allgemein:

$$f(x, 0) = f^*(x)$$

$$f(x, t) = f^*(x - vt)$$

8.1 Seilwelle

Wellengleichung:

$$\boxed{v^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}}$$

mit der Wellengeschwindigkeit:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}} = \sqrt{\frac{F_S}{\rho S}}}$$

μ : Längendichte

S : Seilquerschnittsfläche

ρ : Volumendichte

8.1.1 Freihängendes Seil

Die Spannkraft ist an jeder Höhe x unterschiedlich:

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}} = \sqrt{\frac{x\mu \cdot g}{\mu}} \Rightarrow t = \int_0^t dt = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x \cdot g}} dx$$

8.2 Harmonische Wellen

Rechts laufende Sinuswelle:

$$\boxed{f(x, t) = A \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + \phi \right)}$$

Eine positive Phase ϕ bedeutet eine Verschiebung nach links!

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}}$$

A : Amplitude

ω : Kreisfrequenz

k : Wellenzahl

v : Wellengeschwindigkeit

ϕ : Phasenwinkel

T : Periodendauer

λ : Wellenlänge

8.3 Durckwellen, Schallwellen

Schallgeschwindigkeit in einem Fluid wie Luft oder Wasser:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\kappa \cdot \rho}}$$

κ : Kompressibilität des Fluids ($\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$)

Schallgeschwindigkeit einer Kompressionswelle in einem Festkörper:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

ρ : Dichte

E : Elastizitätsmodul (Hooke)

Luft (20°C)	343 $\frac{m}{s}$
Helium (20°C)	999 $\frac{m}{s}$
Wasserstoff (20°C)	1330 $\frac{m}{s}$
flüssiges Helium (4K)	211 $\frac{m}{s}$
Wasser (0°C)	1402 $\frac{m}{s}$
Wasser (20°C)	1482 $\frac{m}{s}$
Quecksilber (20°C)	1451 $\frac{m}{s}$
Aluminium	6420 $\frac{m}{s}$
Blei	1960 $\frac{m}{s}$
Stahl	5941 $\frac{m}{s}$

8.4 Energiefluss

Allgemein:

$$P \propto A^2$$

Leistung der flachen harmonischen Seilwelle:

$$P_{Seil} = \frac{1}{2} \mu v \cdot \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho S v \omega^2 A^2$$

ρ : Volumendichte

S : Seilquerschnittsfläche

$\rho \cdot S = \mu$: Längendichte

Für eine harmonische Schallwelle:

$$P_{Schall} = \frac{1}{2} \rho S v \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \frac{S}{\rho v} \hat{p}^2$$

A : maximale Auslenkung der Luftteilchen

$\hat{p} = \rho \omega v A$: Maximum des Schalldrucks

8.5 Intensität I

Die Intensität I ist definiert als die durchschnittliche Leistung P_{av} einer Welle pro Einheitsfläche, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung:

$$I = \frac{P_{av}}{S}$$

S : Querschnittsfläche

Intensität der harmonischen Seilwelle:

$$I_{Seil} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2$$

Intensität der harmonischen Schallwelle:

$$I_{Schall} = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^2}{\rho v}$$

8.5.1 Intensität und Abstand

Die **ebene** Welle oder der gerichtete Strahl entlang x (z.B. Laserstrahl):

$$I(x) = \frac{P_{av}}{S} = konst.$$

Die **Zylinder** Welle oder Kreiswelle entlang r (z.B. Säulenlautsprecher):

$$I(r) = \frac{P_{av}}{S_{Zylinder}} = \frac{P_{av}}{L \cdot 2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

Die Kugel Welle entlang r (z.B. Punktquelle):

$$I(r) = \frac{P_{av}}{S_{Kugelschale}} = \frac{P_{av}}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

8.6 Schallpegel L

Wir nehmen Lautstärke logarithmisch wahr. Zwei Frösche hören wir nicht doppelt so laut wie einen, erst zehn Frösche.

$$L = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

mit:

$$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{\frac{L_2 - L_1}{10}}$$

8.7 Doppler Effekt



Quelle bewegt sich:

$$\lambda = \frac{v \mp u_s}{f_s}$$

–: Wellenlänge vor der bewegten Quelle

+ : Wellenlänge hinter der bewegten Quelle

Empfänger bewegt sich:

$$f_e = \frac{v \pm u_e}{\lambda}$$

+ : Bewegung zur Quelle

–: Bewegung weg von Quelle

Quelle und Empfänger bewegen sich:

$$f_e = \frac{v \pm u_e}{v \mp u_s} f_s$$

+ wenn e auf Quelle **zu** steuert

+ wenn s vom Empfänger **weg** steuert

u_e : Geschwindigkeit Empfänger

u_s : Geschwindigkeit Sender

v : Schallgeschwindigkeit ($343 \frac{m}{s}$ @ Luft)

8.8 Überschall

$$\sin \theta = \frac{v}{u} = \frac{1}{Ma}$$

θ : Halber Öffnungswinkel des Kegels

v : Schallgeschwindigkeit

u : Geschwindigkeit des Objekts

8.9 Superposition - Interferenz

Konstruktive Interferenz: Gleiche Phase $\Delta\phi = 0$

$$A = A_1 + A_2 \quad P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} \right)^2$$

Destruktive Interferenz: gegenphasig $\Delta\phi = \pi$

$$A = A_1 - A_2 \quad P = \left(\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2} \right)^2$$

8.10 Schwebung

Schwebungsfrequenz:

$$f_B = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2\pi}$$

Resultierende Welle:

$$f_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4\pi}$$

8.11 Reflexion und Transmission

- Reflexion einer Seilwelle an der Wand **invertiert** den Puls
- An einem losen Ende wird der Puls ohne Inversion reflektiert
- Trifft die Seilwelle auf ein andere Schnur, findet Reflexion und Transmission statt (Übergang leicht → schwer: invertierte Reflexion; Übergang schwer → leicht: keine Inversion)

8.12 Stehende Welle

$$2A \sin(kx) \cdot \sin(\omega t)$$

8.12.1 Harmonische

n	λ	Bäuche	Knoten	Mitte
1	$\frac{2L}{1}$	1	2	Bauch
2	$\frac{2L}{2}$	2	3	Knoten
3	$\frac{2L}{3}$	3	4	Bauch
4	$\frac{2L}{4}$	4	5	Knoten
5	$\frac{2L}{5}$	5	6	Bauch

Eine Saite ist auf beiden Seiten eingespannt (\Rightarrow Wellenknoten):

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} = n \cdot f_1$$

f_1 : Grundschwingung

$n = 1, 2, 3, \dots$

$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cdot \sin(\omega_n t)$$

$n = 1$: 1. Harmonische = Grundton

$n = 2$: 2. Harmonische = 1. Oberschwingung

$n = 3$: 3. Harmonische = 2. Oberschwingung

8.12.2 Orgelpfeife

Am Ende der Pfeife ist ein Bauch:

$$\lambda_n = \frac{4L}{n} \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{4L} = n \cdot f_1$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

8.12.3 Wasserwelle

Wellengeschwindigkeit einer seichten Oberflächenwelle ($\delta y \ll y$):

$$v = \sqrt{g \cdot y}$$

Tiefwasser:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

y : Wassertiefe

Kapitel 9

Wärme

9.1 Konstanten

Avogadrozahl

$$N_A = 6.00221 \cdot 10^{23} \text{Teilchen}$$

Universelle Gaskonstante

$$R = 8.314472 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

Boltzmann

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.381 \cdot 10^{23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

9.1.1 Ideale Gasgleichung

$$pV = nRT = \frac{N_{tot}}{N_A} RT = \frac{m_{tot}}{M} RT$$

Variable	Bedeutung	Einheit
p	Gasdruck	Pa
T	Gastemperatur	K
N_{tot}	Anzahl Moleküle im Gas	
m_{tot}	Gasmasse	
n	Anzahl mol im Gas	
N_A	Avogadrozahl	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{\text{Teilchen}}{\text{mol}}$
M	Molmasse	

9.2 Luftdruck vs. Höhe bei konstanter Temperatur

Der Schweredruck in einem Fluid ist $\Delta p = -\rho \cdot g \Delta y$.

$$p(y) = p_0 \cdot e^{-\frac{m_{mol}g}{RT}y} = p_0 e^{-\frac{y}{H}}$$

$$H = \frac{RT}{m_{mol}g}$$

9.2.1 Energie

Kinetische Energie im idealen Gas.

$$E_{Gas} = \frac{3}{2}nRT$$

Mittlere kinetische Energie eines Moleküls im idealen Gas.

$$\langle E_{kin,kül} \rangle = \frac{1}{2}m_{kül}\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

9.2.2 Geschwindigkeiten

$$v_{rms} = \text{sqr}t\langle v^2 \rangle = \text{sqr}t \frac{3k_B T}{m_{k\ddot{u}l}} = \text{sqr}t \frac{3RT}{m_{mol}}$$

Wahrscheinlichste Geschwindigkeit:

$$v_w = \text{sqr}t \frac{2k_B T}{m_{k\ddot{u}l}} = \text{sqr}t \frac{2RT}{m_{mol}}$$

Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$v_{av} = \text{sqr}t \frac{8k_B T}{\pi m_{k\ddot{u}l}} = \text{sqr}t \frac{8RT}{\pi m_{mol}}$$

9.2.3 Freiheitsgrade FG

Das einatomige, ideale Gas hat genau drei Bewegungs-Freiheitsgrade: links nach rechts, hinten nach vorn, unten nach oben. Zweiatomige Gase haben mehr Bewegungsmöglichkeiten.

Äquipartitions Gesetz der klassischen Mechanik: Auf jeden aktiven Freiheitsgrad eines Moleküls in einem Gas der Temperatur T entfällt im Mittel die Energie $\frac{1}{2}k_B T$.

$$\frac{\langle E_{k\ddot{u}l} \rangle}{FG} = \frac{1}{2} k_B T$$
$$\frac{\langle E_{mol} \rangle}{FG} = \frac{1}{2} R \cdot T$$

9.2.4 Spezifische Wärmekapazität c

Um die Temperatur einer Substanz zu erhöhen, kann man ihr Wärme Q zuführen. Wärme ist eine Energieform [J]. Eine Kalorie entspricht 4.186J.

$$\begin{aligned}
 Q &= m \cdot c \cdot \Delta T \rightarrow dQ = m \cdot c \cdot dT \\
 c_{proMasse} : c_{(m)} &= \frac{1 \cdot dQ}{m \cdot dT} \\
 c_{proMol} : c_{(n)} &= \frac{1 \cdot dQ}{n \cdot dT} \\
 c_{(m)} &= \frac{c_{(n)}}{m_{mol}}
 \end{aligned}$$

Spezifische Wärmekapazität des **idealen Gases** pro Mol, bei konstantem Gasvolumen.

Einatomigen Gases:

$$c_{(n)V} = c_V = \frac{3}{2}R$$

Zweiatomigen Gases:

$$c_{(n)V} = c_V = \frac{5}{2}R$$

9.2.5 Mittlere freie Weglänge Λ

Wir betrachten die Moleküle als harte Kugeln mit Radius r und leiten eine Kollisionszeit t_{mean} und eine mittlere freie Weglänge Λ her.

Mittlere Kollisionszeit

$$t_{mean} = \frac{dt}{dN} = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}r^2vN}$$

Mittlere freie Weglänge

$$\Lambda = v \cdot t = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}r^2 \cdot N} = \frac{k_B \cdot T}{4\pi\sqrt{2}r^2 \cdot p}$$

9.2.6 Wahrscheinlichkeit

Die Verteilfunktion der molekularen Geschwindigkeiten $f(v)$ kann mittels statistischer Mechanik hergeleitet werden.

Maxwell-Boltzmann Verteilung

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_{mol}}{2\pi \cdot RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m_{mol} \cdot v^2}{2RT}}$$

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_{kul}}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m_{kul} \cdot v^2}{2k_B T}}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$W(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$$

$$W(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} 4\pi \left(\frac{m_{mol}}{2\pi \cdot RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m_{mol} \cdot v^2}{2RT}} dv$$