

Formelsammlung Physik

Mario Felder
Michael Fallegger

4. Februar 2014

Inhaltsverzeichnis

1	Bewegung	1
1.1	Gerade Bewegung	1
1.1.1	Spezialfall: konstante Beschleunigung a	1
1.2	Bewegung im Raum	2
1.2.1	Bahnkurve	2
1.2.2	Kreisbewegung	2
1.3	Schiefer Wurf	2
1.3.1	$x(t), y(t) \leftrightarrow y(x)$	3
1.3.2	schräge Zerlegung	3
2	Kraft	5
2.1	Übersicht	6
2.2	Federkraft	7
2.3	Reibung	7
2.3.1	Kontaktkräfte: Normal- & Reibungskraft	7
2.3.2	Luftwiderstand	8
2.4	Kurvenkräfte	8
2.4.1	Zentripetalkraft	8
2.4.2	Neigungswinkel	8
3	Arbeit und Energie	11
3.1	Arbeit	11
3.2	Energie	12
3.3	Leistung	12
3.3.1	Bewegung mit konstanter Leistung	12

4	Impuls und Kraftstoss	15
4.1	Impuls \vec{p}	15
4.2	Kraftstoss \vec{J}	15
4.3	Impulserhaltung	16
4.3.1	elastischer Stoss	16
4.3.2	inelastischer Stoss	16
5	Schwerpunkt	19
5.1	Bewegung des Schwerpunktes	19
5.2	Raketenantrieb	20
6	Rotation	21
6.1	Übersicht	21
6.2	Kreisbewegung	21
6.3	Trägheitsmoment	22
6.3.1	Parallel Axis Theorem:	22
6.3.2	Trägheitsmoment regelmässiger Körper	23
6.4	Perfektes Rollen	25
6.4.1	Momentane Drehachse P	25
6.5	Drehmoment \vec{M}	25
6.6	Arbeit und Leistung (rot.)	25
6.7	Drehimpuls \vec{L} und Drallsatz	26
6.8	Präzession	27
7	Schwingungen	29
7.1	Einfache harmonische Schwingung	29
7.1.1	$x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ der EHS	30
7.1.2	EHS und Kreisbewegung	30
7.1.3	Energie der harmonischen Schwingung	31
7.1.4	Torsion, Koordinate θ	31
7.1.5	Fadenpendel	32
7.1.6	Physikalisches Pendel	32
7.2	Gedämpfte Schwingung	32
7.2.1	Abklingkonstante β , Zerfallszeit τ	34
7.2.2	Torsionsschwingung mit Dämpfung	34
7.2.3	Physikalisches Pendel mit Dämpfung	34
7.2.4	Elektrischer Schwingkreis	35
7.2.5	Energieverlust durch Dämpfung	35

7.2.6	Güte, Q -Faktor bei kleiner Dämpfung	36
7.3	Erzwungene Schwingung	36
7.3.1	Frequenzgang	37
7.3.2	Resonanz	37
8	Wellen	39
8.1	Seilwelle	40
8.1.1	Freihängendes Seil	40
8.2	Harmonische Wellen	40
8.3	Durckwellen, Schallwellen	41
8.4	Energiefluss	42
8.5	Intensität I	42
8.5.1	Intensität und Abstand	43
8.6	Schallpegel L	43
8.7	Doppler Effekt	44
8.8	Überschall	45
8.9	Superposition - Interferenz	45
8.10	Schwebung	45
8.11	Reflexion und Transmission	46
8.12	Stehende Welle	46
8.12.1	Harmonische	46
8.12.2	Orgelpfeife	47
8.12.3	Wasserwelle	47
9	Wärme	49
9.1	Konstanten	49
9.2	Ideale Gasgleichung	49
9.3	Luftdruck vs. Höhe bei konstanter Temperatur	50
9.4	Luftdruck bei veränderlicher Temperatur	50
9.5	Energie	51
9.6	Geschwindigkeiten	51
9.7	Freiheitsgrade FG	51
9.8	Spezifische Wärmekapazität c	52
9.9	Mittlere freie Weglänge Λ	53
9.10	Wahrscheinlichkeit	53
9.11	Volumenarbeit eines Gases	54
9.12	Innere Energie U , Erster Hauptsatz der TD	54
9.12.1	Innere Energie des idealen Gases	55

9.12.2 Zustandsänderungen des idealen Gas	56
9.12.3 Spezifische Wärme C_p des idealen Gas	56
9.12.4 Adiabatischer Prozess des idealen Gas	56
Appendices	59
A Periodensystem	i

Kapitel 1

Bewegung

1.1 Gerade Bewegung

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \dot{v} = \ddot{x}$$

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v_i \cdot \Delta t = \int_{t_A}^{t_B} v dt$$

1.1.1 Spezialfall: konstante Beschleunigung a

$$a(t) = a = \text{konstant}$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a^2$$

$$\Delta x = x - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$a = \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta s}$$

1.2 Bewegung im Raum

Position, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind Vektoren.

$$\begin{aligned}\vec{\Delta r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) \\ v &\rightarrow \vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ a &\rightarrow \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\end{aligned}$$

1.2.1 Bahnkurve

Die Geschwindigkeit liegt immer **tangential** an der Bahnkurve.

Die Beschleunigung zeigt immer nach **innen**.

1.2.2 Kreisbewegung

Bei einer **gleichförmigen** Kreisbewegung ($v = \text{konst.}$) gilt:

$$a_{ZP} = a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Bei einer **ungleichförmigen** Kreisbewegung gilt:

$$a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r \qquad a_{\text{tangential}} = \frac{d|v|}{dt}$$

1.3 Schiefer Wurf

x- und y-Bewegung sind unabhängig:

horizontal:	vertikal:
$a_x = 0$	$a_y = -g$
$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha_0$	$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha_0 - g \cdot t$
$x = (v_0 \cdot \cos \alpha_0) \cdot t$	$y = (v_0 \cdot \sin \alpha_0) \cdot t - \frac{1}{2}g \cdot t^2$
	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$

Wurfdauer:

$$t_R = \frac{2 \cdot v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \cdot \sin \theta}{g}$$

Wurfweite:

$$R = x(t_r) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$

1.3.1 $x(t), y(t) \leftrightarrow y(x)$

$$y(x) = \tan \theta_0 \cdot x - \frac{g}{2(v_0 \cos \theta_0)^2} \cdot x^2$$

1.3.2 schräge Zerlegung

Die Komponentenzerlegung eines Vektors ist beliebig. Manchmal ist eine schräge Zerlegung besser als eine Senkrechte, beispielsweise in die \vec{v}_0 und \vec{g} Richtung:

$$s = v_0 \cdot t \qquad y = \frac{1}{2}g \cdot t^2$$

Kapitel 2

Kraft

Die 4 fundamentalen Kräfte sind:

- **Gravitationskraft** (Anziehung zwischen Massen)
(Bsp: Anziehung zwischen Sonne und Erde, Gezeitenkräfte)
- **Elektromagnetische Kraft** (Kräfte zwischen Ladungen)
(Bsp: Reibung, Seilkraft, Lorentzkraft)
- **Schwache Kraft und starke Kraft** (Kernkräfte)
(Bsp: Radioaktiver Zerfall, Anziehung zwischen Protonen und Neutronen)

- **Kräfte sind Vektoren:**

$$\vec{F}_{Res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (F_r, F_\varphi, F_z)$$

- **Trägheitsgesetz (1. Axiom)**

$$\vec{F}_{Res} = 0 \leftrightarrow \vec{a} = 0 \leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$$

- **Bewegungsgleichung (2. Axiom)**

$$\vec{F}_{Res} = m \cdot \vec{a} \leftrightarrow F_x = m \cdot a_x, F_y = m \cdot a_y, F_z = m \cdot a_z$$

- **Wechselwirkungsgesetz (3. Axiom)**

$$\vec{F}_{\text{Körper A auf Körper B}} = -\vec{F}_{\text{Körper B auf Körper A}}$$

2.1 Übersicht

Kraft	Gleichung	Ursprung und Bemerkung
Feder	$F_{Feder} = k \cdot x$ ($\vec{F}_H = -k \cdot \vec{x}$)	(em); lineare Näherung - Hooke'sches Gesetz
Normalkraft	$F_N = F_g \cdot \cos \theta$	(em); F_N ist immer senkrecht zur Kontaktfläche
Hangkraft	$F_H = m \cdot g \cdot \sin \theta$	(em); F_H ist immer parallel zu Kontaktfläche
Haftreibung	$F_{HR} < F_{HR,max} = \mu_{HR} \cdot F_N$	(em); Parallel zur Kontaktfläche und der angreifenden Kraft entgegengesetzt
Gleitreibung	$F_{GR} = \mu_{GR} \cdot F_N$	(em); Der Bewegung entgegengesetzt; Van der Waals Kräfte
Lorentzkraft	$F_L = qvB \cdot \sin \theta$	(em); $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$
Hydrostatische Kraft	$F_{hydr} = \rho g h \cdot A = \int \rho g h dA$	Gravitation (und em); $p_{hydr} = \rho g h$ ist der hydrostatische Druck
Auftrieb	$F_A = \rho_{Fluid} g V_{Körper}$	Gravitation (und em)

2.2 Federkraft

Hooke'sches Gesetz:

$$F_{Feder} = k \cdot \Delta x \quad [k] = \frac{N}{m}$$

Federn in Serie:

$$F_{Res} = k_{Res} \cdot \Delta x$$

wobei:

$$k_{Res} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

oder allgemein:

$$k_{Res} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots}$$

Federn parallel:

$$F_{Res} = k_{Res} \cdot \Delta x = F_{H,1} + F_{H,2} + \dots = (k_1 + k_2 + \dots) \cdot \Delta x$$

2.3 Reibung

2.3.1 Kontaktkräfte: Normal- & Reibungskraft

Die **Normalkraft** steht immer **senkrecht** auf der Kontaktfläche.

Die **Reibungskraft** zeigt immer **parallel** zu Kontaktfläche.

Haftreibungskraft:

$$F_{Zug} = F_{HR} \leq \mu_{HR} \cdot F_N$$

Die Haftreibung muss überwunden werden, damit sich der Körper in Bewegung setzt.

Solange die angreifende Kraft F_{Zug} nicht grösser als $F_{HR,max} = \mu_{HR} \cdot$

F_N ist, ist die Haftreibungskraft gleich der Zugkraft.

Gleitreibung:

$$F_{GR} = \mu_{GR} \cdot F_N$$

Die Gleitreibung zwischen festen Körpern hängt nicht von deren relativer Geschwindigkeit v ab.

$$\mu_{GR} < \mu_{HR}!$$

2.3.2 Luftwiderstand

Im Gegensatz zur Reibung zwischen festen Körpern ist der Luftwiderstand von der Fahrgeschwindigkeit v abhängig.

$F_{LW,l} = b \cdot v$	langsam, kleines v
$F_{LW,s} = c \cdot v^2$	schnell, grosses v

2.4 Kurvenkräfte

2.4.1 Zentripetalkraft

$$F_{rad} = F_{Zentripetal} = m \cdot a_{rad} = m \frac{v^2}{R} = m \omega^2 R = m \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

2.4.2 Neigungswinkel

Bei hängenden Massen:

$$\tan \beta = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{R}{H}$$

mit $H = \frac{g}{\omega^2}$; die Höhe unter der Aufhängung ist einzig eine Funktion der Kreisfrequenz ω und g , nicht der Seillänge L !

Steilwandkurven:

$$\tan \beta = \frac{F_{ZP}}{F_g} = \frac{v^2}{R \cdot g}$$

In die Kurve liegen (Winkel β gegenüber horizontalen sonst wie bei Steilwandkurve):

$$\tan \beta = \frac{F_g}{F_{ZP}} = \frac{R \cdot g}{v^2}$$

Kapitel 3

Arbeit und Energie

3.1 Arbeit

Eine Kraft verrichtet Arbeit an einem Körper, wenn sie sich mit diesem verschiebt.

Bei konstanter Kraft:

$$W = F_{||} \cdot s = F \cdot \cos \theta \cdot s$$

$$[W] = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = J = \text{Joule}$$

Bei veränderlicher Kraft:

$$W = \sum_i F_{||}(x_i) \cdot dx_i = \int_a^b F_x(x) \cdot dx$$

Federarbeit:

$$W = \int_a^b F_x \cdot dx = k \int_a^b x \cdot dx$$

3.2 Energie

Energie kann weder vergehen noch entstehen. Energie kann nur umgewandelt oder zwischen Körpern ausgetauscht werden.

Beschleunigungsarbeit $W_{\text{beschl}} = ma \cdot \Delta x$	kinetische Energie $\Delta E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$
Reibungsarbeit $W_{\text{gleiten}} = \mu_{\text{GleitR}} F_N \cdot \Delta x$	innere, thermische Energie ΔQ
Hubarbeit $W_{\text{hub}} = mg \cdot \Delta h$	potentielle Energie der Höhe $\Delta E_{\text{pot}} = mg \cdot \Delta h$
Dehnarbeit an der Feder $W_{\text{dehnen}} = \int_0^s F_{\text{zug}} \cdot dx = \frac{1}{2}ks^2$	potentielle Energie der Spannung $\Delta E_{\text{elast}} = \frac{1}{2}ks^2$
	Rotationsenergie $E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}I\omega^2$

3.3 Leistung

Definition Leistung:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cdot ds}{dt} = F \cdot v$$

Durchschnittliche Leistung:

$$\langle P \rangle = \frac{\int_{t_1}^{t_2} P dt}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$[P] = W = \frac{J}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$

$$1\text{PS} = 735.5\text{W}$$

3.3.1 Bewegung mit konstanter Leistung

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot t}{m}}$$

$$\Delta t = (v_2^2 - v_1^2) \frac{m}{P}$$

$$s = \int v \cdot dt = \sqrt{\frac{2 \cdot P}{m}} \int \sqrt{t} \cdot dt = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot t^3}{m}} \bigg|_{t_A}^{t_B}$$

Kapitel 4

Impuls und Kraftstoss

4.1 Impuls \vec{p}

Definition:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Das zweite Newtonsche Gesetz verallgemeinert:

$$\sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

4.2 Kraftstoss \vec{J}

Definition des Kraftstosses (Impulsänderung):

$$\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \vec{F}) dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

Durchschnittliche Kraft:

$$\vec{F}_{average} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt = \frac{\vec{J}}{\Delta t}$$

4.3 Impulserhaltung

Definition Gesamtimpuls:

$$\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_C + \dots$$

Ist die Vektrosomme aller äusseren Kräfte auf ein System Null, bleibt der Gesamtimpuls erhalten:

$$\sum \vec{F}_{extern} = 0 \leftrightarrow \vec{P} = konst.$$

4.3.1 elastischer Stoss

Definition:

Beim elastischen Stoss bleibt die kinetische Energie vor und nach dem Stoss vollständig erhalten.

Mit dem Energie- und Impulserhalt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1}^2 &= \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2 \\ m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} &= m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2} \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$\begin{aligned} v_{A2} &= \frac{m_A \cdot v_{A1} + m_B(2 \cdot v_{B1} - v_{A1})}{m_A + m_B} \\ v_{B2} &= \frac{m_B \cdot v_{B1} + m_A(2 \cdot v_{A1} - v_{B1})}{m_A + m_B} \end{aligned}$$

4.3.2 inelastischer Stoss

Definition:

Beim inelastischen Stoss wird ein Teil der kinetischen Energie in Verformungsarbeit gesteckt.

Gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoss:

$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_2$$

$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} = (m_A + m_B) \cdot \vec{v}_2$$

\vec{v}_2 ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der beiden Körper.

Kapitel 5

Schwerpunkt

$$\begin{aligned}x_{cm} &= \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} \\y_{cm} &= \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots}\end{aligned}$$

oder durch integrieren:

$$\begin{aligned}x_{cm} &= \frac{1}{M} \int_0^M x \cdot dm \\y_{cm} &= \frac{1}{M} \int_0^M y \cdot dm\end{aligned}$$

5.1 Bewegung des Schwerpunktes

$$v_{cm,x} = \frac{m_1v_{1x} + m_2v_{2x} + m_3v_{3x} + \dots}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots} = \frac{dx_{cm}}{dt}$$

Gesamtimpuls des Systems:

$$M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots = \vec{P}$$

Ableitung nach Zeit:

$$M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{res} = \sum \vec{F}_{ext}$$

5.2 Raketenantrieb

$$m \cdot a = v_{rel} \frac{dm}{dt} + \sum F_{ext}$$

$$v_{rel} \frac{dm}{dt} \Rightarrow \text{Schubkraft}$$

Im Fall $F_{ext} = -mg$ und einem konstanten Massentrom $R = \frac{dm}{dt}$:

$$a(t) = \frac{v_{rel}}{m} \frac{dm}{dt} - g = \frac{v_{rel} \cdot R}{m_0 - R \cdot t} - g$$

v_{rel} : realtive ausstossgeschw. des Gases (gegenüber der Rakete)

Kapitel 6

Rotation

6.1 Übersicht

ROTATION	LINEARE BEWEGUNG
Trägheitsmoment $[kg \cdot m^2]$	Masse
$I = \sum r_i^2 m_i = \int r^2 dm$	m
Drehmoment $[N \cdot m]$	Kraft $[N]$
$M = I \cdot \alpha$	$F = m \cdot a$
Drehimpuls $[\frac{kg \cdot m^2}{s}]$	Impuls $[N \cdot s]$
$L = I \cdot \omega$	$p = m \cdot v$
Newtonsches Gesetz $[N \cdot m]$	Newtonsches Gesetz
$M = \frac{dL}{dt}$	$F = \frac{dp}{dt}$
Rotationsenergie $[J]$	Kinetische Energie
$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$	$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$
Leistung $[W]$	Leistung
$P = \frac{dE}{dt} = M \cdot \omega$	$P = F \cdot v$

6.2 Kreisbewegung

Bogenlänge s :

$$s = r \cdot \theta$$

Geschwindigkeit tangential v :

$$v = r \cdot \omega = r \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Beschleunigung tangential a_{tan} :

$$a_{tan} = r \cdot \alpha = r \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Beschleunigung radial a_{rad} :

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

6.3 Trägheitsmoment

Definition bzgl. fester Achse:

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots = \sum r_i^2 m_i = \int r^2 dm$$

$$[I] = kg \cdot m^2$$

Fehlende Massen haben negatives Trägheitsmoment!

Scheibe mit Loch: $I_{tot} = I^* + I_{Loch}$

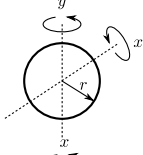
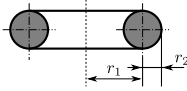
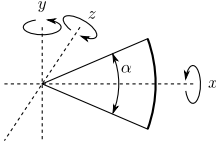
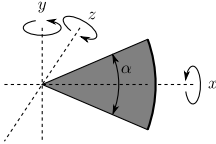
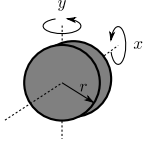
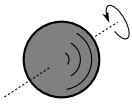
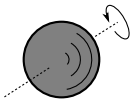
$I^* \Rightarrow I$ der Scheibe ohne Loch

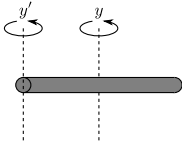
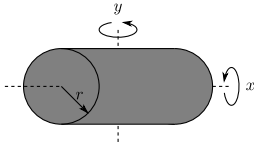
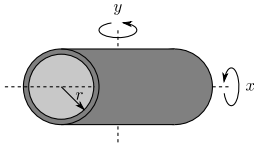
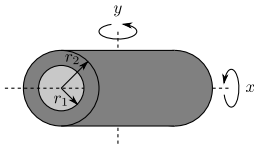
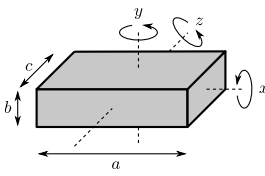
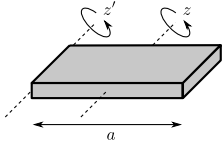
$I_{Loch} \Rightarrow$ negatives Moment

6.3.1 Parallel Axis Theorem:

$$I_P = I_{cm} + m \cdot h^2$$

6.3.2 Trägheitsmoment regelmässiger Körper

Körper	Achse	I
Kreisring, dünn		$I_x = m \cdot r^2$ $I_y = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
Volltorus (Vollring)		$I_x = m \left(r_1^2 + \frac{3}{4} \cdot r_2^2 \right)$
Kreisbogen		$I_x = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \left(1 - \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)$ $I_y = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \left(1 + \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)$ $I_z = m \cdot r^2$
Kreissektor		$I_x = \frac{1}{4} m \cdot r^2 \left(1 - \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)$ $I_y = \frac{1}{4} m \cdot r^2 \left(1 + \frac{\sin(\alpha)}{\alpha} \right)$ $I_z = \frac{1}{2} m \cdot r^2$
Kreisscheibe, dünn		$I_x = \frac{1}{2} m \cdot r^2$ $I_y = \frac{1}{4} m \cdot r^2$
Kugel, solid		$I_x = \frac{2}{5} m \cdot r^2$
Kugel, dünn- wandig		$I_x \approx \frac{2}{3} m \cdot r^2$

Körper	Achse	I
Stab		$I_y = \frac{1}{12}m \cdot l^2$ $I_{y'} = \frac{1}{3}m \cdot l^2$
Vollzylinder		$I_x = \frac{1}{2}m \cdot r^2$ $I_y = \frac{1}{12}m (3r^2 + l^2)$
Hohlzylinder, dünnwandig		$I_x = m \cdot r^2$ $I_y = \frac{1}{2}m (r^2 + \frac{1}{6}l^2)$
Hohlzylinder		$I_x = \frac{1}{2}m (r_1^2 + r_2^2)$ $I_y = \frac{1}{4}m (r_1^2 + r_2^2 + \frac{1}{3}l^2)$
Quader		$I_x = \frac{1}{12}m (b^2 + c^2)$ $I_y = \frac{1}{12}m (a^2 + c^2)$ $I_z = \frac{1}{12}m (a^2 + b^2)$
Platte, dünn		$I_z = \frac{1}{12}m \cdot a^2$ $I_{z'} = \frac{1}{3}m \cdot a^2$

6.4 Perfektes Rollen

$$v_{cm} = R \cdot \omega$$

6.4.1 Momentane Drehachse P

Beim perfekten Rollen ist der Kontaktpunkt P zwischen Rad und Unterlage momentan in Ruhe:

$$E_{pot} = E_{kin,cm} + E_{rot,cm} = E_{rot,P}$$

6.5 Drehmoment \vec{M}

Definition:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$[M] = Nm$$

Das Drehmoment ist **senkrecht** zu \vec{F} und \vec{r} .

Rotation eines starren Körpers um feste Achse:

$$\sum \vec{M}_i = \vec{M}_{res} = I\vec{\alpha}$$

Teilchengeschwindigkeit:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{i,rel} = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

6.6 Arbeit und Leistung (rot.)

Bei der Rotation verrichtete **Arbeit**:

$$W = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I\omega_z d\omega_z = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2$$

Bei der Rotation verrichtete **Leistung**:

$$P = M_z \omega_z$$

6.7 Drehimpuls \vec{L} und Drallsatz

Definition:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$[L] = \frac{kg \cdot m^2}{s}$$

Drehimpuls für Symmetrieachse von starrem Körper:

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

Drallsatz (Newton für die Rotation):

$$\sum \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

6.8 Präzession

Die Schwerkraft bewirkt das Drehmoment:

$$M = r \times mg$$

Mit r als Abstand des Schwerpunkts zum Unterstützungspunkt.

Da M senkrecht zu r und F_g ist, ist es auch senkrecht zum Drehimpuls L . Daher ändert sich nur dessen Richtung, nicht jedoch der Betrag. Somit dreht sich der Kreisel horizontal. Es ist:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{L} &= d\varphi \\ \Rightarrow M &= \frac{dL}{dt} = L \frac{d\varphi}{dt} \end{aligned}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω_P dieser Rotation beträgt ($w_P \ll w_K$):

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M}{L} = \frac{mgr}{I\omega_K}$$

w_P auch als Ω

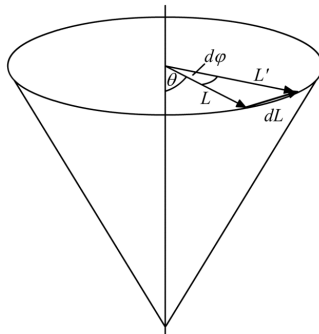


Abbildung 6.1: Präzession

Kapitel 7

Schwingungen

7.1 Einfache harmonische Schwingung

Die rücktreibende Kraft ist proportional zur Auslenkung. In diesem Fall ist die Schwingung harmonisch, d.h. eine Sinus- bzw. Kosinus-Schwingung.

$$-kx = F_x = ma = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Die Lösung aus dieser homogenen Differenzialgleichung:

$$x(t) = A \cos(\omega t \pm \phi)$$

$$\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Eine positive Phase ϕ bedeutet eine Verschiebung nach links, ein negatives ϕ eine nach rechts!

Phase und Amplitude aus Anfangsbedingungen:

$$\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \quad A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

7.1.1 $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ der EHS

Einfache harmonische Schwingung:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t \pm \phi) \\ \dot{x}(t) = v(t) &= -\omega A \sin(\omega t \pm \phi) \\ \ddot{x}(t) = a(t) &= -\omega^2 A \cos(\omega t \pm \phi) \end{aligned}$$

ω = Kreisfrequenz ($2\pi f$)

A = Amplitude

ϕ = Phasenwinkel

v aus Amplitude und Position:

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{A^2 - x^2(t)}$$

$$v_{max} = \omega A = A \sqrt{\frac{k}{m}}$$

a aus Amplitude und Position:

$$a(t) = -\frac{k}{m} \cdot x(t)$$

$$a_{max} = -\omega^2 \cdot A$$

7.1.2 EHS und Kreisbewegung

Position:

$$r(t) = (x(t), y(t)) = A \cdot (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

Geschwindigkeit:

$$v = \frac{dr}{dt} = A\omega \cdot (-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$$

Beschleunigung:

$$a = \frac{v^2}{r} = A \cdot \omega^2$$

7.1.3 Energie der harmonischen Schwingung

Gesamte energie der EHS:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m(v_{max})^2}$$

7.1.4 Torsion, Koordinate θ

Das rücktreibende Drehmoment M_A ist proportional zum Torsionswinkel θ :

$$M_A = -\kappa \cdot \theta$$

harmonische Torsionsschwingung:

$$M = I_A \cdot \ddot{\theta} + \kappa \cdot \theta$$

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t \pm \phi)$$

Kreisfrequenz und Periode:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I_A}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_A}{\kappa}}}$$

für kleine Winkel:

$$\kappa = k_1 \cdot r_1^2 + k_2 \cdot r_2^2 = \sum_1^n (k_n \cdot r_n^2)$$

7.1.5 Fadenpendel

Es gilt die Näherung: $\sin \theta \approx \theta$ (in rad)

$$m\ddot{x} = F_{tan} = -mg \sin \theta \approx -mg\theta = -mg \frac{x}{L} \rightarrow \ddot{x} + \frac{g}{L}x = 0$$

Kreisfrequenz und Periodendauer:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Fadenkraft:

$$F_s = mg \cdot \cos \theta + m \frac{v^2}{L} = mg \cdot \cos \theta + m\omega^2 L$$

7.1.6 Physikalisches Pendel

Anstelle von $F = ma$ wird $M = I\alpha$ verwendet:

$$I_z \ddot{\theta} = M_z = -d \cdot mg \sin \theta \approx -mgd \cdot \theta \rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_z} \theta = 0$$

Kreisfrequenz und Periodendauer:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_z}} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{mgd}}$$

d : Abstand der Drehachse zum **Schwerpunkt**

I_z : Trägheitsmoment bzgl. der Drehachse

m : Masse des Körpers

7.2 Gedämpfte Schwingung

Reale Schwingungen sind gedämpft durch Reibung. Die Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit v .

$$\vec{F}_{Res} = ma \rightarrow \vec{F}_{Rück} + \vec{F}_{Dämpf} = -kx - bv = ma$$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = 0$$

$$F_{D\ddot{a}mpf} = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v \rightarrow b = 6\pi \cdot \eta \cdot R$$

$$\text{Radikant: } \delta^2 = \beta^2 - \omega^2$$

1. Fall: $\delta^2 > 0 \rightarrow$ Kriechfall

allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{-\beta t} (C_1 e^{\delta t} + C_2 e^{-\delta t})$$

2. Fall: $\delta^2 = 0 \rightarrow$ kritische Dämpfung

allgemeine Lösung:

$$x(t) = e^{-\beta t} (C_1 t + C_2)$$

$$b_{krit} = \sqrt{4k \cdot m}$$

3. Fall: $\delta^2 < 0 \rightarrow$ gedämpfte Schwingung

allgemeine Lösung:

$$x(t) = A \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t \pm \phi)$$

Kreisfrequenz:

$$\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\beta^2 < \omega^2 \Rightarrow b^2 < 4k \cdot m$$

7.2.1 Abklingkonstante β , Zerfallszeit τ

Die Amplitude zerfällt exponentiell:

$$A(t) = Ae^{-\beta t} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\beta = \frac{1}{\tau} \qquad \beta = \frac{\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right)}{t_2 - t_1}$$

7.2.2 Torsionsschwingung mit Dämpfung

Differenzialgleichung:

$$-\kappa\theta - B\dot{\theta} = I_A\ddot{\theta}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d t \pm \phi)$$

Daraus folgt:

$$\beta = \frac{B}{2I_A} \qquad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I_A}} \qquad \omega_d = \sqrt{\frac{\kappa}{I_A} - \frac{B^2}{4I_A^2}}$$

I_A : Trägheitsmoment

κ : Hookesche Proportionalitätskonstante

B : viskose Dämpfungskonstante

7.2.3 Physikalisches Pendel mit Dämpfung

Differenzialgleichung:

$$-mgd \cdot \theta - b^*\dot{\theta} = I_z\ddot{\theta}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d t \pm \phi)$$

Daraus folgt:

$$\beta = \frac{b}{2I_z} \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_z}} \qquad \omega_d = \sqrt{\frac{mgd}{I_z} - \frac{b^2}{4I_z^2}}$$

I_{zA} : Trägheitsmoment

b^* : viskose Dämpfung

7.2.4 Elektrischer Schwingkreis

Differenzialgleichung:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

Daraus folgt:

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \quad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{L}{R^2 \cdot C}}$$

$$q(t) = \hat{q} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)$$

$$u(t) = \frac{\hat{q}}{C} \cdot e^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)$$

$$i(t) = \hat{q} \cdot e^{-\beta t} (-\beta \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi) - \omega_d \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \phi))$$

$i = \frac{dq}{dt}$: El. Strom

$u_c = \frac{q}{C}$: Kondensatorspannung

$u_L = L \frac{di}{dt}$: Spulenspannung

$u_R = R \cdot i$: Spannung am Widerstand

7.2.5 Energieverlust durch Dämpfung

Energie am schwingenden System:

$$E(t) = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

Momentante Energieänderungsrate:

$$\frac{dE}{dt} = kx \frac{dx}{dt} + mv \frac{dv}{dt} = \dot{x}(kx + m\ddot{x}) = \dot{x} \cdot F_D = -bv^2$$

Mittlere Energie des schwingenden Systems:

$$\langle E(t) \rangle = \frac{1}{2} kA^2 \cdot e^{-2\frac{t}{\tau}} = E_0 \cdot e^{-2\frac{t}{\tau}} = E_0 \cdot e^{-2\beta t}$$

7.2.6 Güte, Q -Faktor bei kleiner Dämpfung

Der Energieverlust pro Zyklus wird mit der Güte ausgedrückt. Definition:

$$Q = \frac{2\pi \cdot E(t)}{|\Delta E(t)_T|} = \frac{2\pi \cdot E(t)}{\left|\frac{dE}{dt} \cdot T\right|} = \frac{\omega_d \cdot E(t)}{\left|\frac{dE}{dt}\right|} = \frac{\pi}{\beta \cdot T} = \pi \frac{\tau}{T} = \frac{\omega_d \cdot \tau}{2}$$

$\Delta E(t)_T$: Energieverlust pro Zyklus

Je kleiner die Dämpfung β , bzw. b und je grösser die Kreisfrequenz $\omega_d \approx \omega$, desto grösser die Güte Q .

Für grosse Q ($Q > 5$):

$$\omega_d \approx \frac{\omega}{\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}} \approx \omega \left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right)$$

7.3 Erzwungene Schwingung

Differenzialgleichung:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 H \cos(\Omega \cdot t) = \frac{F_0}{m} \cos(\Omega \cdot t)$$

Die Amplitude A und die Phase ϕ sind nun Funktion der Anreger-Kreisfrequenz Ω :

$$\begin{aligned} A(\Omega) &= \frac{F_0}{m \cdot \sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2\beta \cdot \Omega)^2}} = \frac{H}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \frac{b^2}{k \cdot m} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \\ &\approx \frac{H}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{Q \cdot \omega}\right)^2}} \end{aligned}$$

\approx gilt für $Q > 5$

F_0 : Anregerkraft ($= k \cdot H$)

Ω : Anreger-Kreisfrequenz

H : Anreger-Auslenkung

$$\phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{2\beta \cdot \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{b}{\sqrt{k \cdot m}} \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}\right)$$

Weiterhin gilt:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \beta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{\tau} \quad Q = \frac{\omega_d}{2\beta} = \pi \frac{\tau}{T}$$

Allerdings ist jetzt:

$$x(t) = A(\omega) \cdot \cos(\Omega \cdot t - \phi(\omega))$$

7.3.1 Frequenzgang

Kurvendiskussion von $A(\Omega)$ und $\phi(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \Omega := 0 : \quad A(\Omega) &= H & \phi(\Omega) &= 0 \\ \Omega := \infty : \quad A(\Omega) &= 0 & \phi(\Omega) &= \pi \\ \Omega := \omega : \quad A(\Omega) &= \frac{k \cdot H}{b \cdot \omega} & \phi(\Omega) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

7.3.2 Resonanz

Resonanz bedeutet maximale Amplitude.

$$\begin{aligned} \Omega_R &= \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} \approx \omega \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\ &\approx \omega \cdot \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) \end{aligned}$$

$$A_R = A(\Omega_R) \approx \frac{Q \cdot H}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \approx Q \cdot H$$

$$\phi_R = \phi(\Omega_R) \approx \arctan\left(\sqrt{4Q^2 - 2}\right) \approx \frac{\pi}{2}$$

\approx gilt für $Q > 5$

Q -Faktor und Resonanzkurve

Die Güte ist ein Mass für die Peak-Schärfe. Für grosse Q (=kleine Dämpfung) gilt:

$$Q = \frac{\Omega_R}{\Delta\Omega}$$

$\Delta\Omega$: Kurfenbreite auf der Höhe $\frac{A_R}{\sqrt{2}}$

Kapitel 8

Wellen

Wellentypen:

- **Transversal:** Die Auslenkung ist vertikal oder horizontal zur Fortbewegung. z.B. Seilwelle
- **Longitudinal:** Die Auslenkung ist in die gleiche Richtung wie die Fortbewegung. z.B. Schallwelle in Luft

Allgemein:

$$f(x, 0) = f^*(x)$$

$$f(x, t) = f^*(x - vt)$$

8.1 Seilwelle

Wellengleichung:

$$\boxed{v^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2}}$$

mit der Wellengeschwindigkeit:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}} = \sqrt{\frac{F_S}{\rho S}}}$$

μ : Längendichte

S : Seilquerschnittsfläche

ρ : Volumendichte

8.1.1 Freihängendes Seil

Die Spannkraft ist an jeder Höhe x unterschiedlich:

$$\frac{dx}{dt} = v = \sqrt{\frac{F_S}{\mu}} = \sqrt{\frac{x\mu \cdot g}{\mu}} \Rightarrow t = \int_0^t dt = \int_0^L \frac{1}{\sqrt{x \cdot g}} dx$$

8.2 Harmonische Wellen

Rechts laufende Sinuswelle:

$$\boxed{f(x, t) = A \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (x - vt) + \phi \right)}$$

Eine positive Phase ϕ bedeutet eine Verschiebung nach links!

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}}$$

A : Amplitude

ω : Kreisfrequenz

k : Wellenzahl

v : Wellengeschwindigkeit

ϕ : Phasenwinkel

T : Periodendauer

λ : Wellenlänge

8.3 Durckwellen, Schallwellen

Schallgeschwindigkeit in einem Fluid wie Luft oder Wasser:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\kappa \cdot \rho}}$$

κ : Kompressibilität des Fluids ($\kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$)

Schallgeschwindigkeit einer Kompressionswelle in einem Festkörper:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

ρ : Dichte

E : Elastizitätsmodul (Hooke)

Luft (20°C)	343 $\frac{m}{s}$
Helium (20°C)	999 $\frac{m}{s}$
Wasserstoff (20°C)	1330 $\frac{m}{s}$
flüssiges Helium (4K)	211 $\frac{m}{s}$
Wasser (0°C)	1402 $\frac{m}{s}$
Wasser (20°C)	1482 $\frac{m}{s}$
Quecksilber (20°C)	1451 $\frac{m}{s}$
Aluminium	6420 $\frac{m}{s}$
Blei	1960 $\frac{m}{s}$
Stahl	5941 $\frac{m}{s}$

8.4 Energiefluss

Allgemein:

$$P \propto A^2$$

Leistung der flachen harmonischen Seilwelle:

$$P_{Seil} = \frac{1}{2} \mu v \cdot \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \rho S v \omega^2 A^2$$

ρ : Volumendichte

S : Seilquerschnittsfläche

$\rho \cdot S = \mu$: Längendichte

Für eine harmonische Schallwelle:

$$P_{Schall} = \frac{1}{2} \rho S v \omega^2 A^2 = \frac{1}{2} \frac{S}{\rho v} \hat{p}^2$$

A : maximale Auslenkung der Luftteilchen

$\hat{p} = \rho \omega v A$: Maximum des Schalldrucks

8.5 Intensität I

Die Intensität I ist definiert als die durchschnittliche Leistung P_{av} einer Welle pro Einheitsfläche, senkrecht zur Ausbreitungsrichtung:

$$I = \frac{P_{av}}{S}$$

S : Querschnittsfläche

Intensität der harmonischen Seilwelle:

$$I_{Seil} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2$$

Intensität der harmonischen Schallwelle:

$$I_{Schall} = \frac{1}{2} \frac{\hat{p}^2}{\rho v}$$

8.5.1 Intensität und Abstand

Die **ebene** Welle oder der gerichtete Strahl entlang x (z.B. Laserstrahl):

$$I(x) = \frac{P_{av}}{S} = konst.$$

Die **Zylinder** Welle oder Kreiswelle entlang r (z.B. Säulenlautsprecher):

$$I(r) = \frac{P_{av}}{S_{Zylinder}} = \frac{P_{av}}{L \cdot 2\pi r} \propto \frac{1}{r}$$

Die Kugel Welle entlang r (z.B. Punktquelle):

$$I(r) = \frac{P_{av}}{S_{Kugelschale}} = \frac{P_{av}}{4\pi r^2} \propto \frac{1}{r^2}$$

8.6 Schallpegel L

Wir nehmen Lautstärke logarithmisch wahr. Zwei Frösche hören wir nicht doppelt so laut wie einen, erst zehn Frösche.

$$L = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

mit:

$$I_0 = 10^{-12} \frac{W}{m^2}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = 10^{\frac{L_2 - L_1}{10}}$$

8.7 Doppler Effekt



Abbildung 8.1: Why so serious?

Quelle bewegt sich:

$$\lambda = \frac{v \mp u_s}{f_s}$$

- : Wellenlänge vor der bewegten Quelle
- + : Wellenlänge hinter der bewegten Quelle

Empfänger bewegt sich:

$$f_e = \frac{v \pm u_e}{\lambda}$$

- + : Bewegung zur Quelle
- : Bewegung weg von Quelle

Quelle und Empfänger bewegen sich:

$$f_e = \frac{v \pm u_e}{v \mp u_s} f_s$$

- + wenn e auf Quelle **zu** steuert
- + wenn s vom Empfänger **weg** steuert

u_e : Geschwindigkeit Empfänger

u_s : Geschwindigkeit Sender

v : Schallgeschwindigkeit ($343 \frac{m}{s}$ @ Luft)

8.8 Überschall

$$\sin \theta = \frac{v}{u} = \frac{1}{Ma}$$

θ : Halber Öffnungswinkel des Kegels

v : Schallgeschwindigkeit

u : Geschwindigkeit des Objekts

8.9 Superposition - Interferenz

Konstruktive Interferenz: Gleiche Phase $\Delta\phi = 0$

$$A = A_1 + A_2 \quad P = \left(\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} \right)^2$$

Destruktive Interferenz: gegenphasig $\Delta\phi = \pi$

$$A = A_1 - A_2 \quad P = \left(\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2} \right)^2$$

8.10 Schwebung

Schwebungsfrequenz:

$$f_B = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{|\omega_1 - \omega_2|}{2\pi}$$

Resultierende Welle:

$$f_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{4\pi}$$

8.11 Reflexion und Transmission

- Reflexion einer Seilwelle an der Wand **invertiert** den Puls
- An einem losen Ende wird der Puls ohne Inversion reflektiert
- Trifft die Seilwelle auf ein andere Schnur, findet Reflexion und Transmission statt (Übergang leicht → schwer: invertierte Reflexion; Übergang schwer → leicht: keine Inversion)

8.12 Stehende Welle

$$2A \sin(kx) \cdot \sin(\omega t)$$

8.12.1 Harmonische

n	λ	Bäuche	Knoten	Mitte
1	$\frac{2L}{1}$	1	2	Bauch
2	$\frac{2L}{2}$	2	3	Knoten
3	$\frac{2L}{3}$	3	4	Bauch
4	$\frac{2L}{4}$	4	5	Knoten
5	$\frac{2L}{5}$	5	6	Bauch

Eine Saite ist auf beiden Seiten eingespannt (\Rightarrow Wellenknoten):

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{2L} = n \cdot f_1$$

f_1 : Grundschiwingung

$n = 1, 2, 3, \dots$

$$y_n(x, t) = A_n \sin(k_n x) \cdot \sin(\omega_n t)$$

$n = 1$: 1. Harmonische = Grundton

$n = 2$: 2. Harmonische = 1. Oberschiwingung

$n = 3$: 3. Harmonische = 2. Oberschiwingung

8.12.2 Orgelpfeife

Am Ende der Pfeife ist ein Bauch:

$$\lambda_n = \frac{4L}{n} \quad f_n = \frac{v}{\lambda_n} = n \frac{v}{4L} = n \cdot f_1$$

$$n = 1, 3, 5, \dots$$

8.12.3 Wasserwelle

Wellengeschwindigkeit einer seichten Oberflächenwelle ($\delta y \ll y$):

$$v = \sqrt{g \cdot y}$$

Tiefwasser:

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

y : Wassertiefe

Kapitel 9

Wärme

9.1 Konstanten

Avogadrozahl

$$N_A = 6.00221 \cdot 10^{23} \text{ Teilchen}$$

Universelle Gaskonstante

$$R = 8.314472 \frac{J}{mol \cdot K}$$

Boltzmann

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.381 \cdot 10^{-23} \frac{J}{K}$$

9.2 Ideale Gasgleichung

$$pV = nRT = \frac{N_{tot}}{N_A} RT = \frac{m_{tot}}{m_{mol}} RT$$

Variable	Bedeutung	Einheit
p	Gasdruck	Pa
T	Gastemperatur	K
N_{tot}	Anzahl Moleküle im Gas	
m_{tot}	Gasmasse	
n	Anzahl mol im Gas	
N_A	Avogadrozahl	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{\text{Teilchen}}{\text{mol}}$
m_{mol}	Molmasse	

9.3 Luftdruck vs. Höhe bei konstanter Temperatur

Der Schweredruck in einem Fluid ist $\Delta p = -\rho \cdot g \Delta y$.

$$p(y) = p_0 \cdot e^{-\frac{m_{mol} g}{RT} y} = p_0 e^{-\frac{y}{H}}$$

$$H = \frac{RT}{m_{mol} g}$$

H : charakteristische Höhe (analog zu Zerfallszeit τ)

9.4 Luftdruck bei veränderlicher Temperatur

Troposphäre (0 – 11km):

$$T = a - b \cdot y$$

$$a = 15^\circ C$$

$$b = 6.5 \frac{^\circ C}{km}$$

Druck:

$$p = p_0 \left(\frac{a - b \cdot y}{a} \right)^{\frac{m_{mol} g}{R \cdot b}} = p_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{m_{mol} g}{R \cdot b}}$$

9.5 Energie

Kinetische Energie im idealen Gas.

$$E_{Gas} = \frac{3}{2}nRT$$

Mittlere kinetische Energie eines Moleküls im idealen Gas.

$$\langle E_{kin,kül} \rangle = \frac{1}{2}m_{kül}\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

9.6 Geschwindigkeiten

$$v_{rms} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_{kül}}} = \sqrt{\frac{3RT}{m_{mol}}}$$

Wahrscheinlichste Geschwindigkeit:

$$v_w = \sqrt{\frac{2k_B T}{m_{kül}}} = \sqrt{\frac{2RT}{m_{mol}}}$$

Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$v_{av} = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_{kül}}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi m_{mol}}}$$

9.7 Freiheitsgrade FG

Das einatomige, ideale Gas hat genau drei Bewegungs-Freiheitsgrade: links nach rechts, hinten nach vorn, unten nach oben. Zweiatomige Gase haben mehr Bewegungsmöglichkeiten.

Äquipartitions Gesetz der klassischen Mechanik:

Auf jeden aktiven Freiheitsgrad eines Moleküls in einem Gas der Temperatur T entfällt im Mittel die Energie $\frac{1}{2}k_B T$.

$$\begin{aligned}\frac{\langle E_{k\ddot{u}l} \rangle}{FG} &= \frac{1}{2}k_B T \\ \frac{\langle E_{mol} \rangle}{FG} &= \frac{1}{2}R \cdot T\end{aligned}$$

9.8 Spezifische Wärmekapazität c

Um die Temperatur einer Substanz zu erhöhen, kann man ihr Wärme Q zuführen. Wärme ist eine Energieform [J]. Eine Kalorie entspricht $4.186J$.

$$\begin{aligned}Q &= m \cdot c \cdot \Delta T \rightarrow dQ = m \cdot c \cdot dT \\ \text{c pro Masse: } c_{(m)} &= \frac{1}{m} \frac{dQ}{dT} \\ \text{c pro Mol: } c_{(n)} &= \frac{1}{n} \frac{dQ}{dT} \\ c_{(m)} &= \frac{c_{(n)}}{m_{mol}}\end{aligned}$$

Spezifische Wärmekapazität des **idealen Gases** pro Mol, bei konstantem Gasvolumen.

Einatomigen Gases:

$$c_{(n)V} = C_V = \frac{3}{2}R$$

Zweiatomigen Gases:

$$c_{(n)V} = C_V = \frac{5}{2}R$$

9.9 Mittlere freie Weglänge Λ

Wir betrachten die Moleküle als harte Kugeln mit Radius r und leiten eine Kollisionszeit t_{mean} und eine mittlere freie Weglänge Λ her.

Mittlere Kollisionszeit

$$t_{mean} = \frac{dt}{dN} = \frac{V}{4\pi\sqrt{2} \cdot r^2 v N}$$

Mittlere freie Weglänge

$$\Lambda = v \cdot t_{mean} = \frac{V}{4\pi\sqrt{2} \cdot r^2 \cdot N} = \frac{k_B \cdot T}{4\pi\sqrt{2} \cdot r^2 \cdot p}$$

9.10 Wahrscheinlichkeit

Die Verteilfunktion der molekularen Geschwindigkeiten $f(v)$ kann mittels statistischer Mechanik hergeleitet werden.

Maxwell-Boltzmann Verteilung

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_{mol}}{2\pi \cdot RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m_{mol} \cdot v^2}{2RT}}$$

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_{kül}}{2\pi \cdot k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m_{kül} \cdot v^2}{2k_B T}}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$W(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v) dv$$

$$W(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} 4\pi \left(\frac{m_{mol}}{2\pi \cdot RT} \right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{m_{mol} \cdot v^2}{2RT}} dv$$

Energie-Verteilfunktion:

$$W(E_1, E_2) = \int_{E_1}^{E_2} \frac{8\pi}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{E}{k_B T}} dE$$

9.11 Volumenarbeit eines Gases

Das Vorzeichen stellt sicher, dass das Gas bei Expansion ($V_2 > V_1$) Arbeit an der Aussenwelt verrichtet. Die Arbeit W ist bei Expansion negativ und geht aus dem Gas heraus, das Gas verliert Energie!

$$W = - \int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

9.12 Innere Energie U , Erster Hauptsatz der TD

Die innere Energie U eines Körpers ist eine Zustandsgrösse der Thermodynamik. Sie setzt sich zusammen aus der kinetischen (SZittern") und der potentiellen Energie ("Federn") aller Moleküle des Körpers vorstellen. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik besagt: Die innere Energie vergrössert sich mit Zufuhr von Wärme und/oder Arbeit.

$$\Delta U_{U_2-U_1} = Q_{in} + W_{in} \quad dU = dQ_{in} + dW_{in} = dQ - p \cdot dV$$

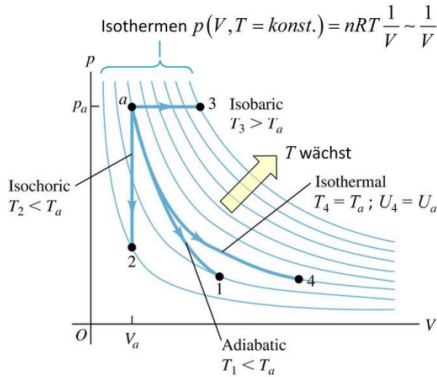
9.12.1 Innere Energie des idealen Gases

Innere Energie des idealen Gas:

$$U = U(T) = n \underbrace{\frac{FG}{2}}_{C_V} RT = nC_V T$$

Freiheitsgrade: = 3 für einatomiges Gas
 = 5 für zweiatomiges Gas

9.12.2 Zustandsänderungen des idealen Gas



<u>a-1:</u>	adiabatischer Prozess, $dQ = 0$ Keine Wärmeaustausch ! $Q_{a1} = 0 \quad \Delta U_{a1} = nC_V (T_1 - T_a) = W_{a1}$
<u>a-2:</u>	isochorer Prozess, $V = \text{konstant}$ Keine Volumenänderung ! $W_{a2} = 0 \quad Q_{a2} = nC_V (T_2 - T_a) = \Delta U_{a2}$
<u>a-3:</u>	isobarer Prozess, $p = \text{konstant}$ Keine Druckänderung ! $W_{a3} = -p(V_3 - V_a) \quad Q_{a3} = nC_p (T_3 - T_a)$
<u>a-4:</u>	isothermer Prozess, $T = \text{konstant}$ $\Rightarrow U = U(T) = \text{konstant} !$ $W_{a4} = \int_{V_a}^{V_4} -pdV = -nRT \ln \left(\frac{V_4}{V_a} \right) = -Q_{a4}$

Abbildung 9.1: Zustandsänderung

adiabatisch = isotrop

9.12.3 Spezifische Wärme C_p des idealen Gas

Molare Wärmekapazitäten des idealen Gas:

$$C_p = C_V + R$$

Verhältnis der molaren Wärmekapazitäten des idealen Gas:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} = \left\{ \begin{array}{ll} 1.67 & 1 - \text{atomiges Gas} \\ 1.40 & 2 - \text{atomiges Gas} \end{array} \right\}$$

9.12.4 Adiabatischer Prozess des idealen Gas

Das System ist thermisch isoliert. Eine Temperaturänderung stammt immer von einer Arbeit, nicht von einem Wärmefluss $\rightarrow \Delta U = W$

$(Q = 0)$

$$T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_2^{\gamma-1}$$

$$p_1 \cdot V_1^\gamma = p_2 \cdot V_2^\gamma$$

$$T_1 \cdot p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 \cdot p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$$


$$\Delta U = nC_V(T_2 - T_1) = W = \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\gamma - 1}$$

Appendices

Anhang A

Periodensystem

ii

										18 VIII A								
										2	4,003							
											He Helium							
										13 III A	14 IV A	15 V A	16 VI A	17 VII A				
										5 10,81*	6 12,01*	7 14,01*	8 16,00*	9 19,00	10 20,18			
										B Bor	C Kohlenstoff	N Stickstoff	O Sauerstoff	F Fluor	Ne Neon			
										13 26,98	14 28,09*	15 30,97	16 32,06*	17 35,45*	18 39,95			
										Al Aluminium	Si Silicium	P Phosphor	S Schwefel	Cl Chlor	Ar Argon			
10 	11 I B		12 II B															
28 58,69	29 63,55	30 65,38*	31 69,72	32 72,63	33 74,92	34 78,96*	35 79,90*	36 83,80										
Ni Nickel	Cu Kupfer	Zn Zink	Ga Gallium	Ge Germanium	As Arsen	Se Selen	Br Brom	Kr Krypton										
46 106,4	47 107,9	48 112,4	49 114,8	50 118,7	51 121,8	52 127,6	53 126,9	54 131,3										
Pd Palladium	Ag Silber	Cd Cadmium	In Indium	Sn Zinn	Sb Antimon	Te Tellur	I Iod	Xe Xenon										
78 195,1	79 197,0	80 200,6	81 204,4*	82 207,2	83 209,0	84 [209]	85 [210]	86 [222]										
Pt Platin	Au Gold	Hg Quecksilber	Tl Thallium	Pb Blei	Bi Bismut	Po Polonium	At Astat	Rn Radon										
110 [281]	111 [281]	112 [285]	113 [286]	114 [289]	115 [288]	116 [293]	117 [294]	118 [294]										
Ds Darmstadtium	Rg Roentgenium	Cn Copernicium	Uut Ununtrium	Fl Flerovium	Uup Ununpentium	Lv Livermorium	Uus Ununseptium	Uuo Ununoctium										
63 152,0	64 157,3	65 158,9	66 162,5	67 164,9	68 167,3	69 168,9	70 173,1	71 175,0										
Eu Europium	Gd Gadolinium	Tb Terbium	Dy Dysprosium	Ho Holmium	Er Erbium	Tm Thulium	Yb Ytterbium	Lu Lutetium										
95 [243]	96 [247]	97 [247]	98 [251]	99 [252]	100 [257]	101 [258]	102 [259]	103 [262]										
Am Americium	Cm Curium	Bk Berkelium	Cf Californium	Es Einsteinium	Fm Fermium	Md Mendelevium	No Nobelium	Lr Lawrencium										