Formelsammlung Physik

Mario Felder

15. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Bewegung

1.1 Gerade Bewegung

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}$$

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{v} = \ddot{x}$$

$$\Delta x = \lim_{\Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \Delta t = \int_{t_A}^{t_B} v \mathrm{d}t$$

1.1.1 Spezialfall: konstante Beschleunigung a

$$a(t) = a = \text{konstant}$$

$$v(t) = v_0 + a \cdot t$$

$$x(t) = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a^2$$

$$\Delta x = x - x_0 = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

$$a = \frac{v(t)^2 - v_0^2}{2 \cdot \Delta s}$$

1.2 Bewegung im Raum

Postition, Geschwindigkeit und Beschleunigung sind Vektoren.

$$\vec{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$v \to \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$a \to \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

1.2.1 Bahnkurve

Die Geschwindigkeit liegt immer **tangential** an der Bahnkurve.

Die Beschleunigung zeigt immer nach **innen**.

1.2.2 Kreisbewegung

Bei einer **gleichförmigen** Kreisbewegung (v = konst.) gilt:

$$a_{ZP} = a_{radial} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Bei einer **ungleichförmigen** Kreisbewegung gilt:

$$a_{radial} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r \qquad a_{tangential} = \frac{\mathrm{d}\,|v|}{\mathrm{d}t}$$

1.3 Schiefer Wurf

x- und y-Bewegung sind unabhängig:

horizontal:	**vertikal:**
$a_x = 0$	$a_y = -g$
$v_x = v_0 * \cos\alpha_0$	$v_y = v_0 * \sin\alpha_0 - g \cdot t$
$x = (v_0 * \cos\alpha_0) \cdot t$	$y = (v_0 * \sin\alpha_0) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$
	$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gy$

Wurfdauer:

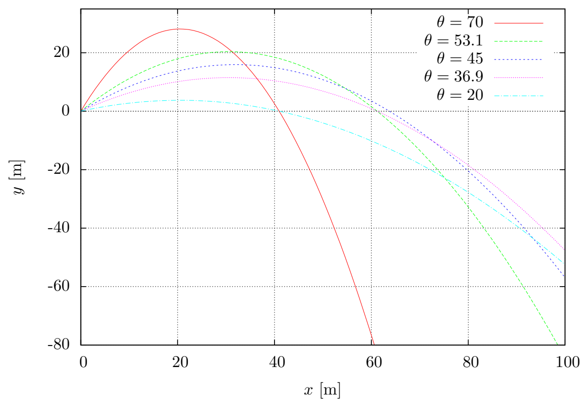
$$\boxed{t_R = \frac{2 \cdot v_{0y}}{g} = \frac{2v_0 \cdot \sin\theta}{g}}$$

Wurfweite:

$$\boxed{R = x(t_r) = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}}$$

1.3.1 $x(t), y(t) \leftrightarrow y(x)$

$$\boxed{y(x) = \tan\theta_0 \cdot x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2} \cdot x^2}$$

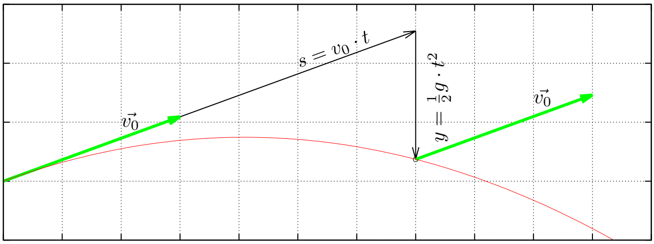


1.3.2 schräge Zerlegung

Die Komponentenzerlegung eines Vektors ist beliebig. Manchmal ist eine schräge Zerlegung besser als eine Senkrechte, beispielsweise in die

$\vec{v_0}$ und $\vec{g}$ Richtung:

$$s = v_0 \cdot t \qquad\qquad y = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$



Kapitel 2

Kraft

Die 4 fundamentalen Käften sind:

- **Gravitationskraft** (Anziehung zwischen Massen)
  (Bsp: Anziehung zwischen Sonne und Erde, Gezeitenkräfte)
- **Elektromagnetische Kraft** (Kräfte zwischen Ladungen)
  (Bsp: Reibung, Seilkraft, Lorentzkraft)
- **Schwache Kraft und starke Kraft** (Kernkräfte)
  (Bsp: Radioaktiver Zerfall, Anziehung zwischen Protonen und Neutronen)

- **Kräfte sind Vektoren:**
  $\vec{F}_{Res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots$
  $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (F_r, F_\varphi, F_z)$
- **Trägheitsgesetz** (1. Axiom)
  $\vec{F}_{Res} = 0 \leftrightarrow \vec{a} = 0 \leftrightarrow \vec{v} = \text{konstant}$
- **Bewegungsgleichung** (2. Axiom)
  $\vec{F}_{Res} = m \cdot \vec{a} \leftrightarrow F_x = m \cdot a_x, F_y = m \cdot a_y, F_z = m \cdot a_z$
- **Wechselwirkungsgesetz** (3. Axiom)
  $\vec{F}_{Körper\ A\ auf\ Körper\ B} = -\vec{F}_{Körper\ B\ auf\ Körper\ A}$

2.1 Übersicht

Kraft	**Gleichung**	**Ursprung und Bemerkung**
Feder	$F_{Feder} = k \cdot x$ ($\vec{F}_H = -k \cdot \vec{x}$)	(em); lineare Näherung - Hooke'sches Gesetz
Normalkraft	$F_N = F_g \cdot \cos\theta$	(em); F_N ist immer senkrecht zur Kontaktfläche
Hangkraft	$F_H = m \cdot g \cdot \sin\theta$	(em); F_H ist immer parallel zu Kontaktfläche
Haftreibung	$F_{HR} < F_{HR,max} = \mu_{HR} \cdot F_N$	(em); Parallel zur Kontaktfläche und der angreifenden Kraft engegengesetzt
Gleitreibung	$F_{GR} = \mu_{GR} \cdot F_N$	(em); Der Bewegung entgegengesetzt; Van der Waals Kräfte
Lorentzkraft	$F_L = qvB \cdot \sin\theta$	(em); $\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$
Hydrostatische Kraft	$F_{hydr} = \rho gh \cdot A = \int \rho gh \mathrm{d}A$	Gravitation (und em); $p_{hydr} = \rho gh$ ist der hydrostatische Druck
Auftrieb	$F_A = \rho_{Fluid} g V_{Körper}$	Gravitation (und em)

2.2 Federkraft

Hooke'sches Gesetz:
$\boxed{F_{Feder} = k \cdot \Delta x}$ $[k] = \frac{N}{m}$

Federn in Serie:

$$F_{Res} = k_{Res} \cdot \Delta x$$

wobei:

$$\boxed{k_{Res} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}}$$

oder allgemein:

$$\boxed{k_{Res} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \dots}}$$

Federn parallel:

$$\boxed{F_{Res} = k_{Res} \cdot \Delta x = F_{H,1} + F_{H,2} + \dots = (k_1 + k_2 + \dots) \cdot \Delta x}$$

2.3 Reibung

2.3.1 Kontaktkräfte: Normal- & Reibungskraft

Die **Normalkraft** steht immer **senkrecht** auf der Kontaktfläche.

Die **Reibungskraft** zeigt immer **parallel** zu Kontaktfläche.

Haftreibungskraft:

$$\boxed{F_{Zug} = F_{HR} \leq \mu_{HR} \cdot F_N}$$

Die Haftreibung muss überwunden werden, damit sich der Körper in Bewegung setzt.
Solange die angreifende Kraft F_{Zug} nicht grösser als $F_{HR,max} = \mu_{HR} \cdot$

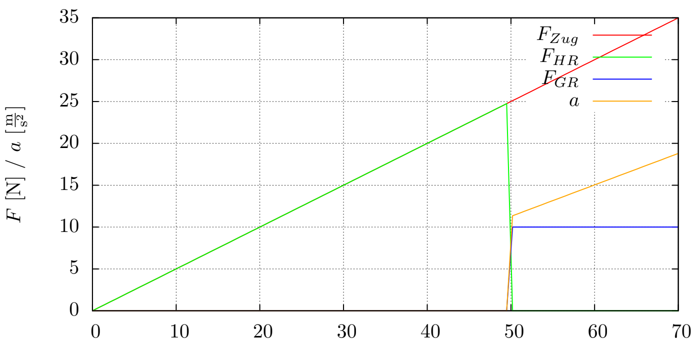
F_N ist, ist die Haftreibungskraft gleich der Zugkraft.

Gleitreibung:

$$\boxed{F_{GR} = \mu_{GR} \cdot F_N}$$

Die Gleitreibung zwischen festen Körpern hängt nicht von deren relativer Geschwindigkeit v ab.

$\mu_{GR} < \mu_{HR}$!



2.3.2 Luftwiderstand

Im Gegensatz zur Reibung zwischen festen Körpern ist der Luftwiderstand von der Fahrgeschwindigkeit v abhängig.

$F_{LW,l} = b \cdot v$	langsam, kleines v
$F_{LW,s} = c \cdot v^2$	schnell, grosses v

2.4 Kurvenkräfte

2.4.1 Zentripetalkraft

$$\boxed{F_{rad} = F_{Zentripetal} = m \cdot a_{rad} = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R = m\frac{4\pi^2 R}{T^2}}$$

2.4.2 Neigungswinkel

Bei hängenden Massenen:

$$\boxed{\tan\beta = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{R}{H}}$$

mit $H = \frac{g}{\omega^2}$; die Höhe unter der Aufhängung ist einzig eine Funktion der Kreisfrequenz ω und g, nicht der Seillänge L!

Steilwandkurven:

$$\boxed{\tan\beta = \frac{F_{ZP}}{F_g} = \frac{v^2}{R \cdot g}}$$

In die Kurve liegen (Winkel β gegenüber horizontalen sonst wie bei Steilwandkurve):

$$\boxed{\tan\beta = \frac{F_g}{F_{ZP}} = \frac{R \cdot g}{v^2}}$$

Kapitel 3

Arbeit und Energie

3.1 Arbeit

Eine Kraft verrichtet Arbeit an einem Körper, wenn sie sich mit diesem verschiebt.

Bei konstanter Kraft:

$$\boxed{W = F_{||} \cdot s = F \cdot \cos\theta \cdot s}$$

$$[W] = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = J = Joule$$

Bei veränderlicher Kraft:

$$\boxed{W = \sum_i F_{||}(x_i) \cdot \mathrm{d}x_i = \int_a^b F_x(x) \cdot \mathrm{d}x}$$

Federarbeit:

$$\boxed{W = \int_a^b F_x \cdot \mathrm{d}x = k \int_a^b x \cdot \mathrm{d}x}$$

3.2 Energie

Energie kann weder vergehen noch entstehen. Energie kann nur umgewandelt oder zwischen Körpern ausgetauscht werden.

Beschleunigungsarbeit $W_{beschl} = ma \cdot \Delta x$	kinetische Energie $\Delta E_{kin} = \frac{1}{2}mv_B^2 - frac12mv_A^2$
Reibungsarbeit $W_{gleiten} = \mu_{GleitR} F_N \cdot \Delta x$	innere, thermische Energie ΔQ
Hubarbeit $W_{hub} = mg \cdot \Delta h$	potentielle Energie der Höhe $\Delta E_{pot} = mg \cdot \Delta h$
Dehnarbeit an der Feder $W_{dehnen} = \int_0^s F_{zug} \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2}ks^2$	potentielle Energie der Spannung $\Delta E_{elast} = \frac{1}{2}ks^2$
	Rotationsenergie $E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$

3.3 Leistung

Definition Leistung:

$$\boxed{P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{F \cdot \mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = F \cdot v}$$

Durchschnittliche Leistung:

$$\boxed{\langle P \rangle = \frac{\int_{t_1}^{t_2} P \mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta W}{\Delta t}}$$

$$[P] = W = \frac{J}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$$

1PS = 735.5W

3.3.1 Bewegung mit konstanter Leistung

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot t}{m}}}$$

$$\boxed{\Delta t = (v_2^2 - v_1^2)\frac{m}{P}}$$

$$\boxed{s = \int v \cdot \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2 \cdot P}{m}} \int \sqrt{t} \cdot \mathrm{d}t = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2 \cdot P \cdot t^3}{m}}\Bigg|_{t_A}^{t_B}}$$

Kapitel 4

Impuls und Kraftstoss

4.1 Impuls $\vec{p}$

Definition:

$$\boxed{\vec{p} = m \cdot \vec{v}}$$

Das zweite Newtonsche Gesetz verallgemeinert:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}}$$

4.2 Kraftstoss $\vec{J}$

Definition des Kraftstosses (Impulsänderung):

$$\boxed{\vec{J} = \int_{t_1}^{t_2} (\sum \vec{F})\mathrm{d}t = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$$

Durchschnittliche Kraft:

$$\boxed{\vec{F}_{average} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\mathrm{d}t = \frac{\vec{J}}{\Delta t}}$$

4.3 Impulserhaltung

Definition Gesamtimpuls:

$$\boxed{\vec{P} = \vec{p}_A + \vec{p}_B + \vec{p}_C + \dots}$$

Ist die Vektrosumme aller äusseren Kräfte auf ein System Null, bleibt der Gesamtimpuls erhalten:

$$\boxed{\sum \vec{F}_{extern} = 0 \leftrightarrow \vec{P} = konst.}$$

4.3.1 elastischer Stoss

Definition:
Beim elastischen Stoss bleibt die kinetische Energie vor und nach dem Stoss vollständig erhalten.

Mit dem Energie- und Impulserhalt:

$$\frac{1}{2}m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B1}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B2}^2$$
$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} = m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B2}$$

ergibt sich:

$$\boxed{\begin{aligned} v_{A2} &= \frac{m_A \cdot v_{A1} + m_B(2 \cdot v_{B1} - v_{A1})}{m_A + m_B} \\ v_{B2} &= \frac{m_B \cdot v_{B1} + m_A(2 \cdot v_{A1} - v_{B1})}{m_A + m_B} \end{aligned}}$$

4.3.2 inelastischer Stoss

Definition:
Beim inelastischen Stoss wird ein Teil der kinetischen Energie in Verformungsarbeit gesteckt.

Gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoss:

$$\vec{v}_{A2} = \vec{v}_{B2} = \vec{v}_2$$

$$\boxed{m_A\vec{v}_{A1} + m_B\vec{v}_{B1} = (m_A + m_B) \cdot \vec{v}_2}$$

$\vec{v}_2$ ist die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der beiden Körper.

Kapitel 5

Schwerpunkt

$$\boxed{\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} \\ y_{cm} &= \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} \end{aligned}}$$

oder durch integrieren:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M} \int_0^M x \cdot \mathrm{d}m \\ y_{cm} &= \frac{1}{M} \int_0^M y \cdot \mathrm{d}m \end{aligned}}$$

5.1 Bewegung des Schwerpunktes

$$\boxed{v_{cm,x} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + m_3 v_{3x} + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots} = \frac{\mathrm{d}x_{cm}}{\mathrm{d}t}}$$

Gesamtimpuls des Systems:

$$\boxed{M \cdot \vec{v}_{cm} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \ldots = \vec{P}}$$

Ableitung nach Zeit:

$$\boxed{M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + \ldots = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{res} = \sum \vec{F}_{ext}}$$

5.2 Raketenantrieb

$$\boxed{\begin{aligned} m \cdot a = v_{rel}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} + \sum F_{ext} \\ \\ v_{rel}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \text{Schubkraft} \end{aligned}}$$

Im Fall $F_{ext} = -mg$ und einem konstanten Massentrom $R = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$:

$$\boxed{a(t) = \frac{v_{rel}}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - g = \frac{v_{rel} \cdot R}{m_0 - R \cdot t} - g}$$

v_{rel} : realtive ausstossgeschw. des Gases (gegenüber der Rakete)

Kapitel 6

Rotation

6.1 Übersicht

ROTATION		LINEARE BEWEGUNG	
Trägheitsmoment	$[kg \cdot m^2]$	Masse	
$I = \sum r_i^2 m_i = \int r^2 \mathrm{d}m$		m	
Drehmoment	$[N \cdot m]$	Kraft	$[N]$
$M = I \cdot \alpha$		$F = m \cdot a$	
Drehimpuls	$[\frac{kg \cdot m^2}{s}]$	Impuls	$[N \cdot s]$
$L = I \cdot \omega$		$p = m \cdot v$	
Newtonsches Gesetz	$[N \cdot m]$	Newtonsches Gesetz	
$M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$		$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$	
Rotationsenergie	$[J]$	Kinetische Energie	
$E_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$		$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2$	
Leistung	$[W]$	Leistung	
$P = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = M \cdot \omega$		$P = F \cdot v$	

6.2 Kreisbewegung

Bogenlänge s:

$$\boxed{s = r \cdot \theta}$$

Geschwindigkeit tagnetial v:

$$\boxed{v = r \cdot \omega = r \cdot \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}}$$

Beschleunigung tangential a_{tan}:

$$\boxed{a_{tan} = r \cdot \alpha = r \cdot \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}^2t}}$$

Beschleunigung raidal a_{rad}:

$$\boxed{a_{rad} = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r}$$

6.3 Trägheitsmoment

Definition bzgl. fester Achse:

$$\boxed{I = m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + m_3r_3^2 + \ldots = \sum r_i^2 m_i = \int r^2 \mathrm{d}m}$$

$[I] = kg \cdot m^2$

Fehlende Massen haben negatives Trägheitsmoment!

Scheibe mit Loch: $I_{tot} = I^* + I_{Loch}$
$I^* \Rightarrow I$ der Scheibe ohne Loch
$I_{Loch} \Rightarrow$ negatives Moment

6.3.1 Parallel Axis Theorem:

$$\boxed{I_P = I_{cm} + m \cdot h^2}$$

6.3.2 Trägheitsmoment regelmässiger Körper

TODO

6.4 Perfektes Rollen

$$\boxed{v_{cm} = R \cdot \omega}$$

6.4.1 Momentane Drehachse P

Beim perfekten Rollen ist der Kontaktpunkt P zwischen Rad und Unterlage momentan in Ruhe:

$$\boxed{E_{pot} = E_{kin,cm} + E_{rot,cm} = E_{rot,P}}$$

6.5 Drehmoment $\vec{M}$

Definition:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

$[M] = Nm$

Das Drehmoment ist **senkrecht** zu $\vec{F}$ und $\vec{r}$.

Rotation eines starren Körpers um feste Achse:

$$\boxed{\sum \vec{M}_i = \vec{M}_{res} = I\vec{\alpha}}$$

Teilchengeschwindigkeit:

$$\boxed{\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{i,rel} = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_i}$$

6.6 Arbeit und Leistung (rot.)

Bei der Rotation verrichtete **Arbeit**:

$$\boxed{W = \int_{\omega 1}^{\omega 2} I\omega_z \mathrm{d}\omega_z = \frac{1}{2}I\omega_2^2 - \frac{1}{2}I\omega_1^2}$$

Bei der Rotation verrichtete **Leistung**:

$$\boxed{P = M_z\omega_z}$$

6.7 Drehimpuls $\vec{L}$ und Drallsatz

Definition:

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}}$$

$[L] = \frac{kg \cdot m^2}{s}$

Drehimpuls für Symmetrieachse von starrem Körper:

$$\boxed{\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}}$$

Drallsatz (Newton für die Rotation):

$$\boxed{\sum \vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

6.8 Präzession

Die Schwerkraft bewirkt das Drehmoment:

$$M = r \times mg$$

Mit r als Abstand des Schwerpunkts zum Unterstützungspunkt.

Da M senkrecht zu r und F_g ist, ist es auch senkrecht zum Drehimpuls L. Daher ändert sich nur dessen Richtung, nicht jedoch der Betrag. Somit dreht sich der Kreisel horizontal. Es ist:

$$\frac{\mathrm{d}L}{L} = \mathrm{d}\varphi$$
$$\Rightarrow \quad M = \frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω_P diser Rotation beträgt ($w_P \ll w_K$):

$$\boxed{\omega_P = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \frac{M}{L} = \frac{mgr}{I\omega_K}}$$

w_P auch als Ω

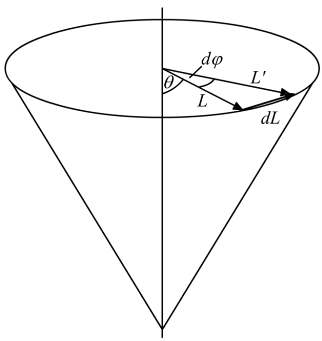


Abbildung 6.1: Päzession

Kapitel 7

Schwingungen

7.1 Einfache harmonische Schwingung

Die rücktreibende Kraft ist proportional zur Auslenkung. In diesem Fall ist die Schwingung harmonisch, d.h. eine Sinus- bzw. Kosinus-Schwingung.

$$-kx = F_x = ma = m\ddot{x} \rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Die Lösung aus dieser homogenen Differenzialgleichung:

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t \pm \phi)}$$

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Die Amplitude A und der Phasenwinkel ϕ sind durch die Anfangsbedingungen gegeben.
Eine positive Phase ϕ bedeutet eine Verschiebung nach links, ein negatives ϕ eine nach rechts!

Phase und Amplitude aus Anfangsbedingungen:

$$\boxed{\phi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) \qquad A = \sqrt{{x_0}^2 + \frac{{v_0}^2}{\omega^2}}}$$

7.1.1 $x(t)$, $v(t)$ und $a(t)$ der EHS

Einfache harmonische Schwingung:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t \pm \phi) \\ \dot{x}(t) &= v(t) = -\omega A \sin(\omega t \pm \phi) \\ \ddot{x}(t) &= a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t \pm \phi) \end{aligned}}$$

ω = Kreisfrequenz ($2\pi f$)
A = Amplitude
ϕ = Phasenwinkel

v aus Amplitude und Position:

$$v(t) = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sqrt{A^2 - x^2(t)}$$

$$v_{max} = \omega A = A\sqrt{\frac{k}{m}}$$

a aus Amplitude und Position:

$$a(t) = -\frac{k}{m} \cdot x(t)$$

$$a_{max} = -\omega^2 \cdot A$$

7.1.2 EHS und Kreisbewegung

Position:

$$r(t) = (x(t), y(t)) = A \cdot (\cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

Geschwindigkeit:

$$v = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = A\omega \cdot (-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$$

Beschleunigung:

$$a = \frac{v^2}{r} = A \cdot \omega^2$$

7.1.3 Energie der harmonischen Schwingung

Gesamte energie der EHS:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}m(v_{max})^2}$$

7.1.4 Torsion, Koordinate θ

Das rücktreibende Drehmoment M_A ist proportional zum Torsionswinkel θ:

$$M_A = -\kappa \cdot \theta$$

harmonische Torsionsschwingung:

$$M = I_A \cdot \ddot{\theta} + \kappa \cdot \theta$$

$$\theta(t) = \theta_{max} \cos(\omega t \pm \phi)$$

Kreisfrequenz und Periode:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I_A}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_A}{\kappa}}}$$

für kleine Winkel:

$$\kappa = k_1 \cdot {r_1}^2 + k_2 \cdot {r_2}^2 = \sum_1^n (k_n \cdot {r_n}^2)$$

7.1.5 Fadenpendel

Es gilt die Näherung: $\sin\theta \approx \theta$ (in rad)

$$m\ddot{x} = F_{tan} = -mg\sin\theta \approx -mg\theta = -mg\frac{x}{L} \to \ddot{x} + \frac{g}{L}x = 0$$

Kreisfrequenz und Periodendauer:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

Fadenkraft:

$$F_s = mg \cdot \cos\theta + m\frac{v^2}{L} = mg \cdot \cos\theta + m\omega^2 L$$

7.1.6 Physikalisches Pendel

Anstelle von $F = ma$ wird $M = I\alpha$ verwendet:

$$I_z\ddot{\theta} = M_z = -d \cdot mg\sin\theta \approx -mgd \cdot \theta \to \ddot{\theta} + \frac{mgd}{I_z}\theta = 0$$

Kreisfrequenz und Periodendauer:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_z}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgd}}}$$

d: Abstand der Drehachse zum **Schwerpunkt**
I_z: Trägheitsmoment bzgl. der Drehachse
m: Masse des Körpers

7.2 Gedämpfte Schwingung

Reale Schwingungen sind gedämpft durch Reibung. Die Reibungskraft ist proportional zur Geschwindigkeit v.

$$\vec{F}_{Res} = ma \rightarrow \vec{F}_{\text{Rück}} + \vec{F}_{\text{Dämpf}} = -kx - bv = ma$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{b}{m}\dot{x} = 0}$$

$$F_{\text{Dämpf}} = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v \;\rightarrow\; b = 6\pi \cdot \eta \cdot R$$

Radikant: $\delta^2 = \beta^2 - \omega^2$

1. Fall: $\delta^2 > 0 \rightarrow$ Kriechfall
allgeimeine Lösung:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\left(C_1 \mathrm{e}^{\delta t} + C_2 \mathrm{e}^{-\delta t}\right)$$

2. Fall: $\delta^2 = 0 \rightarrow$ kritische Dämpfung
allgeimeine Lösung:

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\beta t}\left(C_1 t + C_2\right)$$

$$b_{krit} = \sqrt{4k \cdot m}$$

3. Fall: $\delta^2 < 0 \rightarrow$ gedämpfte Schwingung
allgemeine Lösung:

$$\boxed{x(t) = A \cdot \mathrm{e}^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t \pm \phi)}$$

Kreisfrequenz:

$$\boxed{\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}}$$

$$\beta = \frac{b}{2m} \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\beta^2 < \omega^2 \;\Rightarrow\; b^2 < 4k \cdot m$$

7.2.1 Abklingkonstante β

Die Amplitude zerfällt exponentiell:

$$\boxed{A(t) = A\mathrm{e}^{-\beta t} = A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$$

$$\beta = \frac{1}{\tau} \qquad\qquad \beta = \frac{\ln\left(\frac{x(t_1)}{x(t_2)}\right)}{t_2 - t_1}$$

7.2.2 Torsionsschwingung mit Dämpfung

Differenzialgleichung:

$$-\kappa\theta - B\dot{\theta} = I_A\ddot{\theta}$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \mathrm{e}^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d t \pm \phi)$$

Daraus folgt:

$$\beta = \frac{B}{2I_A} \qquad \omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I_A}} \qquad \omega_d = \sqrt{\frac{\kappa}{I_A} - \frac{B^2}{4{I_A}^2}}$$

I_A: Trägheitsmoment
κ: Hookesche Prportionalitätskonstante
B: viskose Dämpfungskonstante

7.2.3 Physikalisches Pendel mit Dämpfung

Differenzialgleichung:

$$-mgd \cdot \theta - b^* \dot{\theta} = I_z \ddot{\theta}$$
$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \mathrm{e}^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d t \pm \phi)$$

Daraus folgt:

$$\beta = \frac{b}{2I_z} \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I_A}} \qquad \omega_d = \sqrt{\frac{mgd}{I_A} - \frac{b^2}{4{I_z}^2}}$$

I_{zA}: Trägheitsmoment
b^*: viskose Dämpfung

7.2.4 Elektrischer Schwingkreis

Differenzialgleichung:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

Daraus folgt:

$$\beta = \frac{R}{2L} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \qquad \omega_d = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$Q = \sqrt{\frac{L}{R^2 \cdot C}}$$
$$q(t) = \hat{q} \cdot \mathrm{e}^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)$$
$$u(t) = \frac{\hat{q}}{C} \cdot \mathrm{e}^{-\beta t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi)$$
$$i(t) = \hat{q} \cdot \mathrm{e}^{-\beta t} \left(-\beta \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \phi) - \omega_d \cdot \sin(\omega_d \cdot t + \phi)\right)$$

$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$: El. Strom
$u_c = \frac{q}{C}$: Kondensatorspannung
$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$: Spulenspannung
$u_R = R \cdot i$: Spannung am Widerstand

7.2.5 Energieverlust durch Dämpfung

Energie am schwingenden System:

$$E(t) = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2$$

Momentante Energieänderungsrate:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(kx + m\ddot{x}) = \dot{x} \cdot F_D = -bv^2$$

Mittlere Energie des schwingenden Systems:

$$\boxed{\langle E(t) \rangle = \frac{1}{2}kA^2 \cdot \mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}} = E_0 \cdot \mathrm{e}^{-2\frac{t}{\tau}} = E_0 \cdot \mathrm{e}^{-2\beta t}}$$

7.2.6 Güte, Q-Faktor bei kleiner Dämpfung

Der Energieverlust pro Zyklus wird mit der Güte ausgedrückt. Definition:

$$\boxed{Q = \frac{2\pi \cdot E(t)}{|\Delta E(t)_T|} = \frac{2\pi \cdot E(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \cdot T_d\right|} = \frac{\omega_d \cdot E(t)}{\left|\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right|} = \frac{\pi}{\beta \cdot T_d} = \frac{\omega_d \cdot \tau}{2}}$$

Je kleiner die Dämpfung β, bzw. b und je grösser die Kreisfrequenz $\omega_d \approx \omega$, desto grösser die Güte Q.

Für grosse Q ($Q > 5$):

$$\boxed{\omega_d \approx \frac{\omega}{\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}} \approx \omega\left(1 - \frac{1}{8Q^2}\right)}$$

7.3 Erzwungene Schwingung

Differenzialgleichung:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = \omega^2 H \cos(\Omega \cdot t) = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega \cdot t)$$

Die Amplitude A und die Phase ϕ sind nun Funktion der Anreger-Kreisfrequenz Ω:

$$\boxed{\begin{aligned} A(\Omega) &= \frac{F_0}{m \cdot \sqrt{\left(\omega^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\beta \cdot \Omega\right)^2}} = \frac{H}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \frac{b^2}{k \cdot m}\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}} \\ &\approx \frac{H}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\Omega}{Q \cdot \omega}\right)^2}} \end{aligned}}$$

$\approx$ gilt für $Q > 5$

$$\boxed{\phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{2\beta \cdot \Omega}{\omega^2 - \Omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{b}{\sqrt{k \cdot m}}\left(\frac{\Omega}{\omega}\right)}{1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2}\right)}$$

Weiterhin gilt:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \beta = \frac{b}{2m} = \frac{1}{\tau} \qquad Q = \frac{\omega_d}{2\beta} = \pi\frac{\tau}{T}$$

Allerdings ist jetzt:

$$\boxed{x(t) = A(\omega) \cdot \cos(\Omega \cdot t - \phi(\omega))}$$

F_0: Anregerkraft ($= k \cdot H$)
Ω: Anreger-Kreisfrequenz
H: Anreger-Auslenkung

7.3.1 Frequenzgang

Kurvendiskussion von $A(\Omega)$ und $\phi(\Omega)$:

$$\begin{array}{ccc} \Omega := 0 : & A(\Omega) = H & \phi(\Omega) = 0 \\ \Omega := \infty : & A(\Omega) = 0 & \phi(\Omega) = \pi \\ \Omega := \omega : & A(\Omega) = \frac{k \cdot H}{b \cdot \omega} & \phi(\Omega) = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

7.3.2 Resonanz

Resonanz bedeutet maximale Amplitude.

$$\boxed{\begin{aligned}\Omega_R = \sqrt{\omega^2 - \frac{b^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2} \approx \omega \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\ \approx \omega \cdot \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)\end{aligned}}$$

$$\boxed{A_R = A(\Omega_R) \approx \frac{Q \cdot H}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \approx Q \cdot H}$$

$$\boxed{\phi_R = \phi(\Omega_R) \approx \arctan\left(\sqrt{4Q^2 - 2}\right) \approx \frac{\pi}{2}}$$

$\approx$ gilt für $Q > 5$

Q-Faktor und Resonanzkurve

Die Güte ist ein Mass für die Peak-Schärfe. Für grosse Q (=kleine Dämpfung) gilt:

$$\boxed{Q = \frac{\Omega_R}{\Delta\Omega}}$$

$\Delta\Omega$: Kurfenbreite auf der Höhe $\frac{A_R}{\sqrt{2}}$

Kapitel 8

Wärme

8.1 Konstanten

$$\boxed{\begin{array}{l} Avogadrozahl \\ N_A = 6.00221 \cdot 10^{23} Teilchen \\ \\ Universelle Gaskonstante \\ R = 8.314472 \dfrac{J}{mol \cdot K} \\ \\ Boltzmann \\ k_B = \dfrac{R}{N_A} = 1.381 \cdot 10^{23} \dfrac{J}{K} \end{array}}$$

8.1.1 Ideale Gasgleichung

$$pV = nRT = \frac{N_{tot}}{N_A} RT = \frac{m_{tot}}{M} RT$$

Variable	Bedeutung	Einheit
p	Gasdruck	Pa
T	Gastemperatur	K
N_{tot}	Anzahl Moleküle im Gas	
m_{tot}	Gasmasse	
n	Anzahl mol im Gas	
N_A	Avogadrozahl	$N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \frac{Teilchen}{mol}$
M	Molmasse	

8.2 Luftdruck vs. Höhe bei konstanter Temperatur

Der Schweredruck in einm Fluid ist $\Delta p = -\rho \cdot g \Delta y$.

$$\boxed{\begin{aligned} p(y) &= p_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{m_{mol} g}{RT} y} = p_0 \mathrm{e}^{-\frac{y}{H}} \\ H &= \frac{RT}{m_{mol} g} \end{aligned}}$$

8.2.1 Energie

Kinetische Energie im idealen Gas.

$$E_{Gas} = \frac{3}{2} nRT$$

Mittlere kinetische Energie eines Moleküls im idealen Gas.

$$\langle E_{kin,\text{kül}} \rangle = \frac{1}{2} m_{\text{kül}} \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

8.2.2 Geschwindigkeiten

$$v_{rms} = sqrt\langle v^2\rangle = sqrt\frac{3k_BT}{m_{\text{kül}}} = sqrt\frac{3RT}{m_{mol}}$$

Wahrscheinlichste Geschwindigkeit:

$$v_w = sqrt\frac{2k_BT}{m_{\text{kül}}} = sqrt\frac{2RT}{m_{mol}}$$

Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$v_{av} = sqrt\frac{8k_BT}{\pi m_{\text{kül}}} = sqrt\frac{8RT}{\pi m_{mol}}$$

8.2.3 Freiheitsgrade FG

Das einatomibe, ideale Gas hat genau drei Bewegungs-Freiheitgrade: links nach rechts, hinten nach vorn, unten nach oben. Zweiatomige Gase haben mehr Bewegungsmöglichkeiten.

Äquipartitions Gesetz der klassischen Mechanik: Auf jeden aktiven Freiheitsgrad eines Moleküls in einem Gas der Temperatur T entfällt im Mittel die Energie $\frac{1}{2}k_BT$.

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\langle E_{\text{kül}}\rangle}{FG} &= \frac{1}{2}k_BT\\ \frac{\langle E_{mol}\rangle}{FG} &= \frac{1}{2}R\cdot T\end{aligned}}$$

8.2.4 Spezifische Wärmekapazität c

Um die Temperatur einer Substanz zu erhöhen, kann man ihr Wärme Q zuführen. Wärme ist eine Energieform [J]. Eine Kalorie entspricht 4.186J.

$$\boxed{\begin{aligned} Q = m \cdot c \cdot \Delta T \rightarrow dQ0m \cdot c \cdot dT \\ cproMasse : c_{(m)} = \frac{1 \cdot dQ}{m \cdot dT} \\ cproMol : c_{(n)} = \frac{1 \cdot dQ}{n \cdot dT} \\ c_{(m)} = \frac{c_{(n)}}{m_{mol}} \end{aligned}}$$

Spezifische Wärmekapazität des **idealen Gases** pro Mol, bei konstantem Gasvolumen.

Einatomigen Gases:

$$\boxed{c_{(n)V} = c_V = \frac{3}{2}R}$$

Zweiatomigen Gases:

$$\boxed{c_{(n)V} = c_V = \frac{5}{2}R}$$

8.2.5 Mittlere freie Weglänge Λ

Wir betrachten die Moleküle alas harte Kugeln mit Radius r und leiten eine Kollisionszeit t_{mean} und eine mittlere freie Weglänge Λ her.

Mittlere Kollisionszeit

$$t_{mean} = \frac{dt}{dN} = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}r^2 v N}$$

Mittlere freie Weglänge

$$\Lambda = v \cdot t = \frac{V}{4\pi\sqrt{2}r^2 \cdot N} = \frac{k_B \cdot T}{4\pi\sqrt{2}r^2 \cdot p}$$

8.2.6 Wahrscheinlichkeit

Die Verteilfunktion der molekularen Geschwindigkeiten f(v) kann mittels statistischer Mechanik hergeleitet werden.

Maxwell-Boltzmann Verteilung

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_{mol}}{2\pi \cdot RT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{m_{mol} \cdot v^2}{2RT}}$$

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_{kul}}{2\pi \cdot k_B T}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{m_{kul} \cdot v^2}{2k_B T}}$$

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$W(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} f(v) \mathrm{d}v$$

$$W(v_1, v_2) = \int_{v_1}^{v_2} 4\pi \left(\frac{m_{mol}}{2\pi \cdot RT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{m_{mol} \cdot v^2}{2RT}} \mathrm{d}v$$