Formelsammlung Moderne Mathematik und Physik in Anwendung

Mario Felder

3. Januar 2014

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Kerne und Teilchen

1.1 Coulomb Gesetz

Coulomb-Kraft:

$$\boxed{F_{Coulomb} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}}$$

Coulomb-Energie:

$$\boxed{E_{pot} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r}}$$

$\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \quad [\frac{C}{V \cdot m}]$

1.2 Atomare Masseneinheit u

$$\boxed{u = 1.660538921 \times 10^{-27} kg}$$

Masse der Elementarteilchen:

$$m_p = 1.007276466812u$$
$$m_n = 1.008664916u$$
$$m_e = 5.4857990946 \times 10^{-4} u$$

1.3 Kerngrösse

$$\boxed{R = R_0 \cdot A^{\frac{1}{3}}}$$

$R_0 = 1.2 \times 10^{-15} m$
A : Gesamtzahl Nukleonen, $A = Z + N$

1.4 Mol

1 mol enstpricht der **Avogadrozahl**:

$$\boxed{N_A = 6.0221 \times 10^{23}}$$

Anzahl *mol* eines Körpers:

$$\boxed{n = \frac{N}{N_A}}$$

N : Anzahlt Teilchen in einem Körper

Masse m eines Körpers:

$$\boxed{m = n \cdot m_{mol}}$$

1.5 Bindungsenergie der Kerne

Bindungsenergie eines Atomkerns:

$$\boxed{E_B = \left(Z \cdot M_H + N \cdot m_n - {}_Z^A M\right) \cdot c^2}$$

M_H : Masse des Wasserstoffatoms ($1.007825u$)
${}_Z^A M$: Masse des neutralen Atoms

mit:

$$\boxed{1u \cdot c^2 = 931.494061 MeV}$$

Elementarladung:

$$1e = 1.602176487 \times 10^{-19} C$$

Die Atommasse pro Nukleon $\left(\frac{{}^A_Z M}{A}\right)$ ist ein Mass für die Stabilität des Kerns. Je kleiner, desto stärker die Bindung!

$$\boxed{\frac{-E_B}{A} = \frac{\left(Z \cdot M_H + N \cdot m_n - {}^A_Z M\right) \cdot c^2}{A}}$$

1.6 Alpha Zerfall

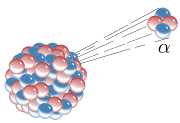


Abbildung 1.1: Alpha Zerfall

Das Alpha Teilchen ist ein ${}^4_2He$ Kern.

Ein Element X zerfällt:

$$\boxed{{}^A_Z X \ \rightarrow \ {}^{A-4}_{Z-2} Y + \alpha + 2e^-}$$

Atomare Masse von α:

$$\alpha = 4.001506179125u$$

1.7 Beta Zerfall

Bei einem **Beta-Minus** Zerfall wird ein Neutron in ein Proton umge-

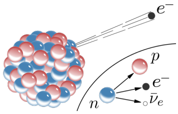


Abbildung 1.2: Beta-Minus Zerfall

wandelt unter Aussendung eines Antineutrinos.

$$\boxed{n \;\rightarrow\; p + \beta^- + \overline{v_e}}$$

$$\boxed{{}^A_ZX \;\rightarrow\; {}^{A}_{Z+1}Y + \beta^- + \overline{v_e}}$$

Bei einem **Beta-Plus** Zerfall wird ein Neutron in ein Proton umgewandelt, unter Aussendung eines Neutrinos.

$$\boxed{p \;\rightarrow\; n + \beta^+ + v_e}$$

$$\boxed{{}^A_ZX \;\rightarrow\; {}^{A}_{Z-1}Y + \beta^- + \overline{v_e}}$$

1.8 Gamma Zerfall

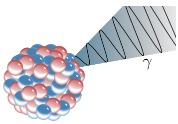


Abbildung 1.3: Beta-Minus Zerfall

Beim Gamma Zerfall befindet sich das Atom in einem angeregten Zustand und sendet dan ein hochenergetisches Photon (γ) aus.

Es ensteht kein neues Element, sondern der Kern fällt nur in einen energetisch tieferen Zustand.

$$\boxed{E_{Photon} = h \cdot f}$$

Plancksche Konstante:

$$h = 6.6261 \times 10^{-34} J \cdot s$$

1.9 Elektromangetisches Spektrum

Für jede elektromagnetische Welle gelten folgende Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} c &= f \cdot \lambda \\ p_\gamma &= \frac{h}{\lambda} \\ E_\gamma &= h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda} = p_\gamma \cdot c \end{aligned}}$$

f : Frequenz
λ : Wellenlänge
p_γ : Impuls
E_γ : Energie des Photons

$c = 299'792'458 \frac{m}{s}$
$h = 6.626069 \times 10^{-34} J \cdot s$

1.10 Halbwertszeit und Aktivität

Radioaktives Zerfallsgesetz:

$$\boxed{N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\beta \cdot t}}$$

β : Zerfallskonstante

Halbwertszeit:

$$\boxed{T_{\frac{1}{2}} = \frac{\ln 2}{\beta} = \ln 2 \cdot \tau}$$

τ : Zerfallszeit ($\frac{1}{\beta}$)

Aktivität:

$$\boxed{A = \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right| = \beta \cdot N = \frac{N}{\tau}}$$

Becquerel: $1Bq = 1$ Zerfall/Sekunde
Curie: $1Ci = 3.70 \times 10^{10}Bq$

1.11 ^{14}C-Datierung

Alles Lebendige enthält ^{14}C. Das ^{14}C entsteht kontinuierlich durch kosmische Bestrahlung.

Das natürliche Verhältnis:

$$\boxed{\frac{^{14}C}{^{12}C} = 1.3 \times 10^{-12}}$$

Halbwertszeit von ^{14}C:

$$\boxed{T_{\frac{1}{2}} = 5730 \text{ Jahre}}$$

1.12 Strahlendosis

Die absorbierte Energie pro kg lebendes Gewege nennt man **Energiedosis** D:

$$\boxed{[D] = 1Gray = 1Gy = 1\frac{J}{kg} = 100rad}$$

Der biologische Effekt wird beschrieben durch die **Äquivalentdosis** H:

$$\boxed{[H] = 1Sievert = 1Sv = 100rem}$$

Bewertugnsfaktor q:

$$\boxed{H = D \cdot q}$$

$[q] = \frac{Sv}{Gy}$

Strahlung	q $[\frac{Sv}{Gy}]$
γ	1
β	1 - 1.5
langsame n	3
n (0.02 - 0.1MeV)	5 - 8
schnelle n und p	10
α	20
schwere Kerne	20

Die Frei werdende Energie einer Nuklearexplosin wird mit dem Energieäquivalent des Sprengstoffs TNT verglichen.

$$\boxed{1kT = 4.184 \times 10^{12} J}$$

1.13 Wenig Zerfälle - Poisson Statistik

Der radioaktive Zerfall eines Kerns ist **echt zufällig**

$$\boxed{p(x) = \frac{m^x \cdot \mathrm{e}^{-m}}{x!} = \frac{m^x \cdot e^{-m}}{\int_0^\infty (t^x \cdot \mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t}}$$

$p(x)$ ist die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Wert x bei einem Mittelwert von m.

1.14 Viele Zerfälle - Gauss Statistik

Für lange Messzeiten, d.h. gross Mittelwerte geht die Poisson Verteilung in die Gaussverteilung über:

$$\boxed{p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot m}} \cdot \mathrm{e}^{\frac{-(x-m)^2}{2m}}}$$

Standard Abweichung:

$$\sigma = \sqrt{m}$$

1.15 Nukleare Reationen

Zwei Kerne A und B verwandeln sich in einem Prozess zu Kernen C und D. Die **Reaktionsenergie** Q berechnet sich:

$$\boxed{Q = (M_A + M_B - M_C - M_D) \cdot c^2}$$

1.15.1 exotherm

Ist Q positiv, wird die gesamte Masse kleiner und die kinetische Restenergie grösser.

1.15.2 endotherm

Ist Q negativ, wird die gesamte Masse grööser und die kinetische Energie kleiner.
Eine endotherme Reaktion ist nur möglich, wenn die gewonnene Masse in Form kinetischer Energie vorhanden ist. Dabei entspricht der Betrag von Q gleich der kinetischen Energie im Schwepunktsystem:

$$|Q| = Q_{cm}$$

Wenn der einte Körper in Ruhe ist, muss sich der andere mit folgender Energie annähern:

$$\boxed{E_{kin,a} = \frac{M_b + M_a}{M_b} \cdot Q_{cm}}$$

1.16 Kernspaltung

Durch Neutronenbeschuss eines Kerns bei gelegentlichem Beta Zerfall kann seine Massenzahl (Anzahl Nukleonen) um bis zu 25 erhöht werden.
Der Neutronenbeschuss von ^{238}U (99.3%) oder ^{235}U (0.7%) führt zu deren Spaltung in kleinere Fragmente.
Nicht das ^{235}U zerfällt, sondern das hoch angeregte $^{235}U^*$. Dies gemäss zwei typischen Varianten:

$$\boxed{{}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \;\rightarrow\; {}^{235}_{92}U^* \;\rightarrow\; {}^{144}_{56}Ba + {}^{89}_{36}Kr + 3 \cdot {}^{1}_{0}n}$$

$$\boxed{{}^{235}_{92}U + {}^{1}_{0}n \;\rightarrow\; {}^{235}_{92}U^* \;\rightarrow\; {}^{140}_{54}Xe + {}^{94}_{38}Sr + 2 \cdot {}^{1}_{0}n}$$

Der wichtige Unterschied:

Radioaktivität: Spontaner Zerfall instabiler Isotop wie ^{14}C. Der Zerfall erfolgt echt zufällig. Die Hälfte der radioaktiven Kerne ist nach der Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}}$ zerfallen.

Kernreaktion: Erzwungene Umwandlung der Kerne, beispielsweise durch Beschuss mit Neutronen. Die neu entstehenden Kerne können allerdings radioaktiv sein und spontan weiter zerfallen.

1.17 Aktivierungsenergie

Zwei Kerne müssen sich für die Fusion so weit annähern, dass die starke Kernkraft wirksam wird, typischerweise auf etwa $2 \times 10^{-15}m$.

Die durchschnittliche kinetische Energie von Teilchen bei Temperatur T:

$$E_{kin} = \frac{3}{2}k_B \cdot T$$

$k_B = 1.3806488 \times 10^{-23}\ \frac{J}{K}$

Kapitel 2

Relativitätstheorie

Die spezielle Relativitätstheorie basiert auf zwei einfachen und intuitiven Postulaten:

I. Alle physikalischen Gesetzte gelten gleichermassen in jedem Inertialsystem

II. Die Vakuumlichtgeschwindigkeit ist konstant und exakt $c = 299'792'458 \frac{m}{s}$ in allen Inertialsystemen.

2.1 Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit

Maxwell konnte aus seinen vier Gleichungen die Wellengleichung für elektromagnetische Wellen ableiten. Daraus ergibt sich die Lichtgeschwindigkeit als:

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}}}$$

die elektrische Feldkonstante $\varepsilon_0 = 8.8542 \times 10^{-12} \frac{As}{Vm}$
die magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 4 \cdot \pi \times 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

2.2 Zeitdilatation γ

Ein Beobachter im System S, misst eine andere Zeit Δt für ein Ereignis im bewegtem System S':

$$\boxed{\Delta t = \gamma \cdot \Delta t_0}$$

$$\beta = \frac{u}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

2.2.1 Eigenzeit Δt_0

Es existiert nur ein Bezugssystem, in dem eine Uhr in Ruhe ist. ALle anderen Bezugssysteme sind dazu bewegt und werden diese Uhr nachgehen sehen. **Zeitintervalle am gleichen Ort sind die kürzesten.**

2.3 Längenkontraktion $\frac{1}{\gamma}$

Ebenfalls misst ein Beobachter im System S' eine andere Länge L' für eine Länge L_0 parallel zur Bewegung im relativ bewegtem System S:

$$\boxed{L = L_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} = \frac{L_0}{\gamma}}$$

2.3.1 Eigenlänge L_0

In allen zu S' bewegten Bezugssystemen messen die Beobachter eine kleinere Länge L, und zwar umso kleiner, je grösser die Relativgeschwindigkeit u ist.

2.4 Formverzerrung

Durch die Längenkontraktion werden Formen verzerrt. Ein Quadrat im System S' wird zu einem Parallelogramm im System S. Der Beobachter im System S sieht den Winkel zur Bewegungsrichtung als:

$$\boxed{\theta = \arctan\left(\gamma \cdot \frac{\sin\theta'}{\cos\theta'}\right)}$$

2.5 Lorentz Transformationen

Koordinaten:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma(x' + ut') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2}) \end{aligned}}$$

Geschwindigkeiten:

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= \frac{v'_x + u}{1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}} \\ v_y &= \frac{v'_y \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}} \\ v_z &= \frac{v'_z \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}} \end{aligned}}$$

Kräfte:

$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= \frac{F'_x + \frac{u}{c^2}\left(\vec{F}' \cdot \vec{v}'\right)}{1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}} \\ F_y &= \frac{F'_y \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}} \\ F_z &= \frac{F'_z \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 + \frac{u \cdot v'_x}{c^2}} \end{aligned}}$$

Die Bewegungsrichtung ist die x-Achse. Alle gestrichenen Grössen sind gemessen in S'. u ist die Relativgeschwindigkeit der beiden Systeme. u ist positiv für S, und negativ für S'. Die Beziehungen lauten genau gleich, nur erhält u ein negatives Vorzeichen!

Wählt man statt der Zeit t die Lichtlänge ct werden die Lorentz Transformationen:

$$x = \gamma\left(x' + \frac{u}{c}ct'\right) \qquad ct = \gamma\left(ct' + \frac{u}{c}x'\right)$$

2.5.1 Relativistischer Impuls

Relativistischer Impuls:

$$\boxed{\vec{p} = \frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0 \vec{v}}$$

daraus kann eine relativistische Masse definiert werden:

$$\boxed{m_{rel} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma m_0}$$

2.5.2 Zweites Newtonsches Gesetz

Anhand der ursprünglichen Formulierung Newtons:

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma m_0 \vec{v}}$$

Fall **(1)**: $\vec{F}$ und $\vec{v}$ sind parallel

$$\boxed{\vec{F}_{||} = \frac{m_0}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \vec{a}_{||} = \gamma^3 m_0 \vec{a}_{||}}$$

Fall **(2)**: $\vec{F}$ und $\vec{v}$ sind senkrecht (v^2 =konst)

$$\boxed{\vec{F}_{\perp} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{a}_{\perp} = \gamma m_0 \vec{a}_{\perp}}$$

Aus **(1)** und **(2)** folgt, dass bei hohen Geschwindigkeiten Beschleunigung und Kraft nicht mehr parallel sind!
$\frac{F_{||}}{F_{\perp}} = \gamma^2 \frac{a_{||}}{a_{\perp}}$

2.5.3 Masse = Energie

Relativistische kinetische Energie:

$$\boxed{E_{kin} = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \cdot c^2 = (\gamma - 1) \cdot m_0 \cdot c^2}$$

Gesamte Energie:

$$\boxed{E = E_{kin} + m_0 \cdot c^2 = \gamma m_0 \cdot c^2 = m_{rel} \cdot c^2}$$

$m_0 \cdot c^2$: Ruheenergie
m_0 ist die Ruhemasse aus Tabellen

2.5.4 Invariante Grössen

Alternativ kann auch geschrieben werden:

$$E^2 = \left(m_0 \cdot c^2\right)^2 + (pc)^2$$

Diese Gleichung gilt auch für masselose Teilchen, beispielsweise für Photonen: $E_{Photon} = 0 + pc = \frac{h}{\lambda} c = h \cdot f$

Invariante Form der Ruheenergie:

$$\boxed{m_0 \cdot c^2 = \sqrt{E^2 - (pc)^2}}$$

Invariante Form des Raum-Zeit Intervalls:

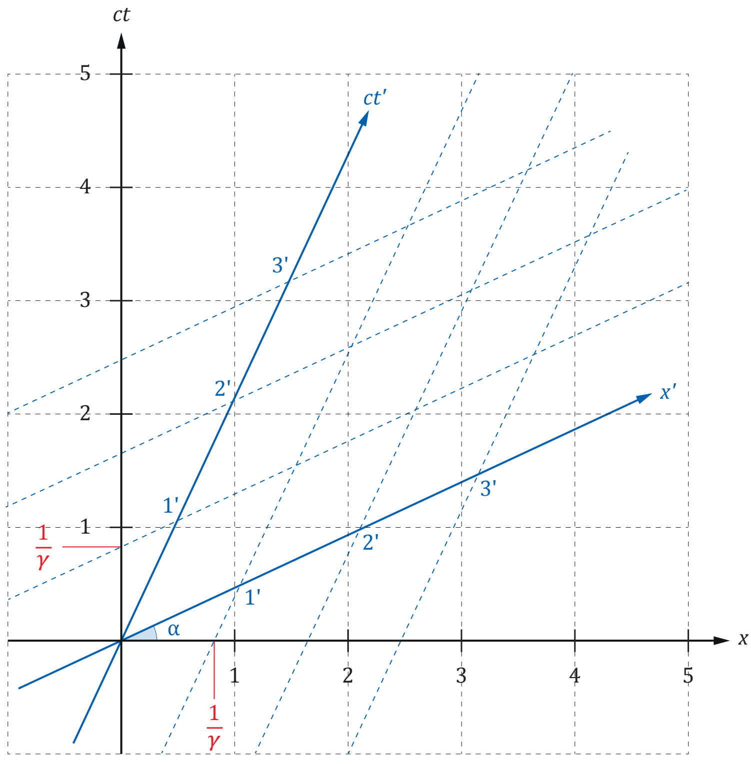
$$\boxed{\Delta s^2 = (c \cdot \Delta t)^2 - \left[\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\right] \begin{aligned} &= (c \cdot \Delta t_0)^2 \\ &= -{L_0}^2 \end{aligned}}$$

$\Delta s^2 = -{L_0}^2 =$ **raumartig**
Zeitintervall ist null, beide Ereignisse finden gleichzeitig statt.

$\Delta s^2 = (c\Delta t_0)^2 =$ **zeitartig**
Ereignise finden am gleichen Ort, aber zu unterschiedlichen Zeiten statt.

2.6 Minkowski Diagramm

Mit Hilfe eines Minkowski Diagramms können Zusammenhänge von zwei Systemen S und S' einfach ausgelesen werden.
Für jedes Ereignis können Ort und Zeit für das jeweilige System zugeordnet werden.



Der Winkel α ergibt sich aus:

$$\boxed{\tan \alpha = \frac{u}{c}}$$

2.7 Relativität der Elektrodynamik

In Bezug auf die Relativ-Geschwindigkeit u wird zwischen parallelen und senkrechten Feldkomponenten unterschieden.

$$\boxed{\begin{array}{cc} E'_{||} = E_{||} & B_{||} = B_{||} \\ E'_{\perp} = \gamma \left(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B} \right)_{\perp} & B'_{\perp} = \gamma \left(\vec{B} - \frac{\vec{u} \times \vec{E}}{c^2} \right)_{\perp} \end{array}}$$

2.8 Dopplereffekt von elektro-magn. Wellen

Da elektro-magnetische Wellen kein Trägermedium benötigen, muss nicht wie beim Schall speziell zwischen der Bewegung der Quelle ud des Beobachters unterschieden werden.

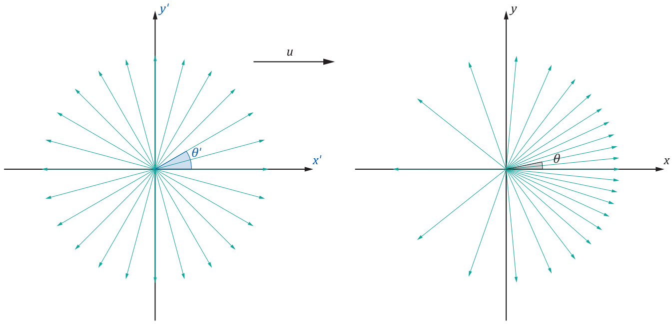
$$\boxed{f = \sqrt{\frac{c+u}{c-u}} \cdot f'_0 \qquad \frac{f-f'_0}{f'_0} = \frac{\Delta f}{f'_0}}$$

u positiv: Quelle bewegt sich auf den Beobachter zu

u negativ: Quelle bewegt sich vom Beobachter weg

2.9 Headlight Effekt - Beaming Effekt

Die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Bezugssystem gleich. Nicht gleich ist aber die Richtung der Strahlung.
Eine isotrope Quelle bewege sich mit der Geschwindigkeit u bezüglich des Laborsystems S. Im Laborsystem S strahlt die Quelle vor allem in die Vorwärtsrichtung.

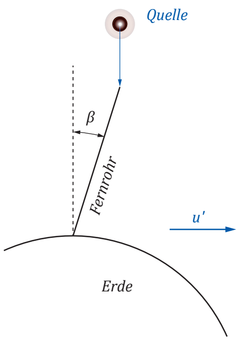


$$\boxed{\cos\theta = \frac{\cos\theta' + \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}\cos\theta'}}$$

Ähnliches gilt für die anderen trigonometrischen Funktionen:

$$\sin\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma\left(1+\frac{u}{c}\cos\theta'\right)} \qquad \tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma\left(\cos\theta'+\frac{u}{c}\right)}$$

2.9.1 Aberration des Lichts



Aberrationswinkel:

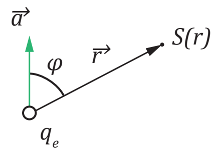
$$\boxed{\tan\beta = \frac{v_x}{v_y} = \frac{\frac{u}{c}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}}$$

Achtung: Der Winkel β ist ein anderer als θ!
$\tan\beta = \frac{1}{\tan\theta} = \cot\theta$

2.10 Strahlung beschleunigter Elektronen

Pointing-Vektor in Richtung Beobachter:

$$\boxed{S(r) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}A} = \frac{q_e^2 a^2 \sin^2\varphi}{(4\pi)^2\,\varepsilon_0 c^3 r^2} \quad \left[\frac{W}{m^2}\right]}$$



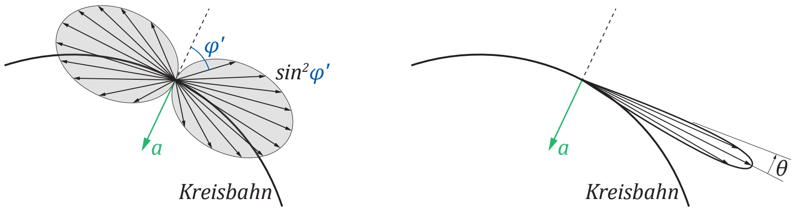
q_e: Elementarladung $1.6 \times 10^{-19} C$
a: Beschleunigung des Elektrons
φ: Beobachtungsrichtung
r: Abstand des Beobachters zum Elektron

Abstrahlung pro Raumwinkel dΩ:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{q_e^2 a^2 \sin^2\varphi}{(4\pi)^2\,\varepsilon_0 c^3} \quad \left[\frac{W}{sr}\right]}$$

2.10.1 Synchrotron Strahlung

In einem Synchrotron bewegen sich geladene Teilchen mit nahezu Lichtgeschwindigkeit im Kreis herum. Die Beschleunigung a bei gleichbleibender Geschwindigkeit zeigt zum Kreismittelpunkt.



Im System S' strahlt die Quelle ringförmig ab. Im Laborsystem S strahlt die Quelle vorwärts ab, die charakteristische Synchrotron-Strahlung.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta'}{\gamma\left(\cos\theta' + \frac{u}{c}\right)}$$