

Elementos de Física Matemática Moderna

Todas las variedades van a ser diferenciales, todas las funciones C^∞ y todos los espacios vectoriales sobre \mathbb{R} .

1 21/03 – Geometría simpléctica

Dada una variedad M , podemos considerar el fibrado de formas bilineales $T^*M \otimes T^*M$. Este fibrado admite una descomposición en suma directa

$$T^*M \otimes T^*M = S^2T^*M \oplus \Lambda^2T^*M,$$

donde los sumandos son las formas bilineales simétricas y antisimétricas respectivamente. Las variedades equipadas con una forma bilineal simétrica no degenerada son los objetos de estudio de la geometría riemanniana. Empezaremos estudiando geometría simpléctica, que se corresponde al segundo caso: el de una variedad equipada con una forma bilineal antisimétrica no degenerada.

Definición 1.1. Un *espacio vectorial simpléctico*, o simplemente *espacio simpléctico*, es un par (E, w) , donde E es un espacio vectorial de dimensión finita y $w : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal antisimétrica no degenerada. Una transformación lineal T entre espacios simplécticos (E, w) y (F, w') se dice *simpléctica* si preserva esta estructura; es decir, si

$$w(x, y) = w'(T(x), T(y))$$

para todo $x, y \in E$. Un espacio simpléctico (E, w) admite una orientación canónica dada por la forma de volumen

$$\Omega = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \underbrace{(w \wedge \cdots \wedge w)}_{n \text{ veces}}.$$

Ejemplo 1.2. Algunos ejemplos de espacios simplécticos:

- \mathbb{R}^2 con la forma bilineal $w((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$.
- $\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ con la forma bilineal $w((x_1, \varphi_1), (x_2, \varphi_2)) = \varphi_2(x_1) - \varphi_1(x_2)$.

Proposición 1.3. Sea (E, w) un espacio simpléctico. Entonces $\dim E$ es par, y además existe una base $B = \{e_1, \dots, e_{2n}\}$ de modo que

$$[w]_B = \begin{bmatrix} 0 & \text{id}_n \\ -\text{id}_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Demostración. Sea $e_1 \in E$. Como la forma w es no degenerada, existe $e_2 \in E$ de modo que $w(e_1, e_2) = 1$.

Dado un subespacio $F \subseteq E$, llamamos $F^\perp = \{x \in E : w(x, y) = 0 \text{ para todo } y \in F\}$. Consideremos el subespacio $E_1 = \langle e_1, e_2 \rangle$. Afirmamos que $E = E_1 \oplus E_1^\perp$. En efecto, si $x \in E_1 \cap E_1^\perp$, escribiendo a $x = ae_1 + be_2$ se tiene que:

$$\begin{aligned} -b &= w(x, e_1) = 0 \\ a &= w(x, e_2) = 0 \end{aligned}$$

y así $x = 0$. Por otro lado, si $x \in E$ y llamamos $w(x, e_1) = a$, $w(x, e_2) = b$, se tiene entonces que

$$x = \underbrace{(-ae_2 + be_1)}_{\in E_1} + \underbrace{(x + ae_2 - be_1)}_{\in E_1^\perp},$$

por lo que $E = E_1 + E_1^\perp$.

De esta forma, aplicando el mismo razonamiento de manera inductiva sobre E_1^\perp obtenemos una descomposición

$$E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_n,$$

donde los subespacios E_i son de dimensión 2 y ortogonales entre sí, y cada uno admite una base similar a la que admite E_1 . Esto prueba que la dimensión de E es par, y reacomodando a la unión de las bases de los E_i obtenemos una base para E en la que w se expresa como en el enunciado. \square

Observación 1.4. Si (E, w) es un espacio simpléctico y $T : E \rightarrow E$ es un endomorfismo simpléctico, entonces T preserva la forma de volumen (y por lo tanto la orientación). Además, si X es la matriz de la forma w y A la matriz de T en cierta base B , tenemos que $A^t X A = X$, por lo que $\det(T) = \pm 1$. En particular, T es un isomorfismo.

La observación anterior implica en particular que el conjunto de endomorfismos simplécticos de (E, w) forma un grupo (de hecho, un grupo de Lie), al cual llamaremos $\text{Sp}(E, w)$. Más aún, como T preserva la forma de volumen, debe ser $\Omega = T^*(\Omega) = \det(T) \Omega$, por lo que el determinante debe ser exactamente 1, y así $\text{Sp}(E, w) \subseteq \text{SL}(E)$.

Definición 1.5. Una *variedad simpléctica* es un par (M, w) , donde M es una variedad y w es una 2-forma diferencial cerrada y no degenerada (esto último significa que cada fibra w_p es una forma bilineal no degenerada sobre $T_p M$). De esta manera, tenemos una

familia $(T_p M, w_p)$ de espacios simplécticos de modo que las formas asociadas varían de manera suave. De la misma manera que en el caso de los espacios simplécticos, las variedades simplécticas tienen una orientación canónica.

Ejemplo 1.6. Algunos ejemplos sencillos de variedades simplécticas:

- Cualquier espacio simpléctico, con la estructura de variedad usual sobre un espacio vectorial.
- Si (θ, t) son las coordenadas usuales en el cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$, la 2-forma $w = d\theta \wedge dt$ induce una estructura simpléctica.
- El toro admite una estructura simpléctica dada por $w = d\theta_1 \wedge d\theta_2$, donde (θ_1, θ_2) son las coordenadas usuales.
- Si (θ, φ) son coordenadas esféricas para S^2 , $w = \sin(\theta)d\theta \wedge d\varphi$ induce una estructura simpléctica.

Ejemplo 1.7. Sea N una variedad diferencial y consideremos $M = T^*N$ el fibrado cotangente sobre N junto con la proyección canónica $\pi : M \rightarrow N$. La diferencial de esta aplicación es el mapa $T\pi : TM \rightarrow TN$. Sea $\varphi \in M$ y llamemos p al punto $\pi(\varphi)$. Si $v \in T_\varphi M$, entonces $T\pi(v)$ es un elemento de $T_p N$. Ahora bien, como $\varphi \in (T_p N)^*$, tiene sentido calcular $\varphi(T\pi(v)) \in \mathbb{R}$. Notemos $\alpha = \varphi \circ T\pi$; así, α es una 1-forma en M , llamada *1-forma tautológica*. Definimos $w = -d\alpha$. La 2-forma w , llamada *potencial simpléctico*, es obviamente cerrada, pues es exacta, y además es no degenerada, como veremos al escribirla en términos de cartas locales. Esto da una estructura simpléctica canónica sobre el fibrado cotangente.

Describamos a la 2-forma w en coordenadas locales. Sea $(U, (q^1, \dots, q^n))$ una carta local en N que trivializa el fibrado cotangente, de modo que tenemos una carta para $\pi^{-1}(U)$ dada por $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. De esta manera, todo elemento $\varphi \in \pi^{-1}(U)$ se escribe como

$$\varphi = \sum a_i p_i + \sum b^j q^j.$$

La 1-forma tautológica α se comporta localmente como

$$\alpha(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n) = \pi_{(q^i, p_j)}^*(p_j) = (p_1, \dots, p_n, 0, \dots, 0)$$

y así obtenemos que

$$\alpha = \sum p_i dq^i.$$

Por lo tanto, el potencial simpléctico asociado es

$$w = -d\alpha = \sum dp_i \wedge dq^i.$$

Observemos que si $N = \mathbb{R}^n$, entonces el fibrado cotangente M es $\mathbb{R}^n \oplus (\mathbb{R}^n)^*$ y la forma simpléctica que produce este mecanismo es la forma simpléctica usual.

El comportamiento local de la estructura que dimos sobre el cotangente es característico de las variedades simplécticas en general, como veremos en el siguiente teorema.

Teorema 1.8 (Darboux). Si (M, w) es una variedad simpléctica de dimensión $2n$, entonces para todo punto $p \in M$ existe una carta local en p de la forma $(U, (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n))$ de modo que

$$w|_U = \sum dp_i \wedge dq^i.$$

Es decir, todas las variedades simplécticas exhiben el mismo comportamiento local. \square

Este teorema implica que la geometría simpléctica no presenta invariantes locales, a diferencia de la geometría riemanniana, en donde tenemos por ejemplo invariantes como la curvatura. De este modo, las características a estudiar en el contexto simpléctico son globales.

2 28/03 – Formalismo hamiltoniano

Definición 2.1. Dado un sistema físico, un *espacio de configuraciones* S es una variedad diferencial que describe todos los posibles estados en los que puede hallarse el sistema.

Ejemplo 2.2. Veamos algunos ejemplos de sistemas físicos y sus espacios de configuraciones asociados:

- El sistema dado por una única partícula puntual tiene como espacio de configuraciones a \mathbb{R}^3 .
- Si consideramos ahora un sistema de n partículas, su espacio de configuraciones es $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \neq x_j \text{ si } i \neq j\}$, pues dos partículas diferentes no pueden posicionarse en el mismo punto.
- Podemos describir la posición de una barra unidimensional de longitud fija precisando la posición de su punto medio y el ángulo que forma con el eje horizontal. Como un ángulo y su inverso describen la misma posición, ya que pensamos a la barra como no orientada, el espacio de configuraciones es entonces $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{RP}^2$.

Supongamos que tenemos un espacio de configuraciones S , de modo que nuestro sistema físico está en el estado $s_1 \in S$ en el instante t_1 y en el estado $s_2 \in S$ en el instante t_2 , con $t_2 \geq t_1$. En ese caso definimos $F_{t_2, t_1} : S \rightarrow S$ poniendo $F_{t_2, t_1}(s_1) = s_2$. El operador F se llamará *operador de evolución* del sistema. Haremos algunas hipótesis sobre este operador. En primer lugar, pediremos que satisfaga las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov:

$$F_{t_3, t_2} \circ F_{t_2, t_1} = F_{t_3, t_1}$$

para $t_1 \leq t_2 \leq t_3$. Esta familia de ecuaciones puede pensarse como una versión continua de la propiedad de Markov, y hacen que el comportamiento del sistema sea independiente de configuraciones previas. Supondremos además que F_{t_2, t_1} depende solamente de la diferencia $t = t_2 - t_1$, pues no queremos que la elección del origen temporal influya en la descripción del sistema. De ahora en más nos referiremos a F_t en lugar de F_{t_2, t_1} . Con esta notación, las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov se escriben

$$F_s \circ F_t = F_{s+t}$$

para $s, t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Usualmente trabajaremos con un campo vectorial sobre el espacio de configuraciones S que modela la evolución del sistema, en el sentido que si $p \in S$, nuestro operador de evolución $F_t(p)$ coincidirá con la curva integral $c_t(p)$ que describe la trayectoria de p . Por definición, se tiene

$$\frac{d}{dt}c_t(p) = X(c_t(p)).$$

Ejemplo 2.3. Supongamos que queremos describir la evolución del sistema compuesto por una única partícula puntual sobre la que actúa una fuerza conservativa. Nuestro espacio de configuraciones es $S = \mathbb{R}^3$ y la fuerza viene descrita por un potencial $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Describiremos la evolución utilizando la segunda ley de Newton. De este modo, si $q(t) = (q^1(t), q^2(t), q^3(t))$ modela la trayectoria de la partícula y m es su masa, entonces

$$m \frac{d^2}{dt^2}q = -\nabla V \quad (1)$$

Esta ecuación es de segundo orden, por lo que trataremos de llevarla a un sistema de ecuaciones de primer orden. Definimos los *momentos*

$$p_i = m \frac{d}{dt}q^i \quad (2)$$

y el *operador Hamiltoniano*

$$H(q^i, p_i) = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(q).$$

Con estas definiciones podemos llevar la ecuación original al siguiente sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}q^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{d}{dt}p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{aligned}$$

La primera de estas ecuaciones encapsula la relación (2) y la segunda refleja la ley de Newton (1). Observamos que si escribimos $c = (q^i, p_i)$, este sistema de ecuaciones se escribe como

$$\frac{d}{dt}c = \begin{bmatrix} 0 & \text{id}_3 \\ -\text{id}_3 & 0 \end{bmatrix} \nabla H,$$

es decir, la evolución del sistema está dada por una forma simpléctica actuando sobre el gradiente del Hamiltoniano.

Supongamos que estamos trabajando con un sistema físico cuya evolución está descrita por un operador F_t . Puede que la definición de F_t siga teniendo sentido para $t < 0$, en cuyo caso diremos que el sistema es *reversible*.

Definición 2.4. Sea M una variedad. Un *flujo (global)* es una familia de funciones suaves $F_t : M \rightarrow M$ que a su vez varían suavemente con $t \in \mathbb{R}$, de modo que

- $F_0 = \text{id}$,
- $F_s \circ F_t = F_{t+s}$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

En particular, esta definición implica que $F_{-t} = F_t^{-1}$, por lo que F_t resulta un difeomorfismo para todo $t \in \mathbb{R}$. Si notamos $\text{Diff}(M)$ al grupo de difeomorfismos en M , un flujo global es simplemente un morfismo de grupos $F : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$ que además verifica una condición de suavidad.

Definición 2.5. Si F_t es un flujo en M , entonces para cada $p \in M$ notaremos $c_t(p) = F_t(p)$ a la curva de trayectoria de p . Como $c_0(p) = p$, podemos pensar al germen $X(p) = [c_t(p)]$ como un elemento de $T_p M$. Queda así definido un campo vectorial X sobre M , que se dice el *campo de velocidades* del flujo.

Es entonces natural considerar el problema inverso: dado un campo vectorial X sobre M , ¿existe un flujo del cual es un campo de velocidades?

Definición 2.6. Dado un campo vectorial X sobre una variedad M , un *flow box* es una terna (U, a, F) , donde $U \subseteq M$ es un abierto, $a \in \mathbb{R}_{>0}$ y $F : (-a, a) \times U \rightarrow M$ es tal que

- para todo $p \in U$, la curva $c_t(p) = F_t(p)$ es una curva integral para el campo X , es decir

$$\frac{d}{dt}c_t(p) = X(c_t(p)),$$

- y para todo $t \in (-a, a)$, la aplicación $F_t : U \rightarrow F_t(U)$ es un difeomorfismo.

En otras palabras, un flow box es un flujo local asociado al campo X .

Teorema 2.7. Si X es un campo vectorial en M , para todo $p \in M$ existe un flow box (U, a, F) con $p \in U$. Además, si (U, a, F) y (V, b, G) son flow boxes para X , entonces F y G coinciden en $U \cap V$. \square

La demostración de este teorema consiste en aplicar el teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ODEs, teniendo en cuenta la dependencia suave de las soluciones respecto al parámetro inicial.

Definición 2.8. Un campo vectorial X en M se dice *completo* si admite un flow box global, es decir, uno de la forma (M, a, F) .

Observación 2.9. Supongamos que (M, a, F) es un flow box para un campo vectorial completo X . Si $p \in M$, entonces la aplicación $f = (t \mapsto F(t + s, p))$ es una solución a la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt}f = X(f)$$

con condición inicial $f(0) = F(s, p) = q$. Por otro lado, la aplicación $g = (t \mapsto F(t, F(s, p)))$ verifica la misma ecuación diferencial, con la misma condición inicial. Por lo tanto,

$$F(t + s, p) = F(t, F(s, p)),$$

es decir que el flujo satisface las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov de manera automática si provienen de un campo completo.

Observación 2.10. Si la variedad M es compacta, cualquier campo sobre ella es completo. Para probarlo, basta con tomar un cubrimiento por abiertos de la variedad tales que cada abierto es el dominio de un flow box. Por compacidad, puedo tomar con un subcubrimiento finito y quedarme con el mínimo de los $a \in \mathbb{R}_{>0}$, de modo que cada uno de estos finitos flow boxes está definido en $(-a, a)$. La condición de unicidad me garantiza que los flow boxes se pegan de manera suave. Este mismo argumento puede llevarse a cabo sobre campos de soporte compacto definidos sobre variedades arbitrarias.

Proposición 2.11. Si X es un campo vectorial completo, el flujo está definido para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demostración. **turbioooo** Supongamos que tengo un flow box de la forma (M, a, F) . Como ya vimos que satisface las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov, si $t \in \mathbb{R}_{>0}$ escribo $t = ka/2 + \varepsilon$, con $\varepsilon \in (0, a/2)$, se tiene entonces que

$$F_t = \underbrace{F_{a/2} \circ \cdots \circ F_{a/2}}_{k \text{ veces}} \circ F_\varepsilon,$$

y además $F_t = F_{-t}^{-1}$ si $t < 0$. □

El conjunto de campos vectoriales sobre M , al cual notamos $\mathfrak{X}(M)$, admite un corchete de Lie: si $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ y $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces

$$[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf).$$

El corchete de campos puede interpretarse en términos de los flujos locales asociados. Si X, Y son campos de velocidades de flujos F_t, G_s , el corchete mide la falla en la conmutatividad de los flujos a nivel infinitesimal. **enunciar esto de manera precisa**

Definición 2.12. Sea (M, w) una variedad simpléctica. Si $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una función, entonces dH es una 1-forma. La forma simpléctica w nos permite asociarle a f el único campo X_H tal que $dH = w(X_H, -)$. **cómo?** El campo X_H se llama el *campo Hamiltoniano* asociado a H .

Si $p \in M$ y (q^i, p_i) es un sistema de coordenadas canónicas (es decir, las que proporciona el teorema de Darboux) alrededor de p , la ecuación de evolución $dH = w(X_H, -)$ tiene la siguiente expresión local:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}q^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{d}{dt}p_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}\end{aligned}$$

Como podemos ver, este formalismo generaliza el caso estudiado en el [ejemplo 2.3](#).

Teorema 2.13 (Conservación de la energía). Sea F_t el flujo asociado al campo Hamiltoniano X_H . Entonces, la función H es constante en las curvas integrales del campo X_H .

Demostración. Definimos $H_t : M \rightarrow \mathbb{R}$ como $H_t(p) = H(F_t(p))$. Basta probar que la función $H_t(p)$ es constante respecto de t . Si derivamos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H_t(p) &= dH_{F_t(p)} \left(\frac{d}{dt}F_t(p) \right) \\ &= dH_{F_t(p)} (X_H(F_t(p))) \\ &= w(X_H(F_t(p)), X_H(F_t(p))) \\ &= 0,\end{aligned}$$

pues la forma w es antisimétrica. □

Definición 2.14. Sea X un campo vectorial sobre una variedad M . El campo X define un morfismo i_X de grado -1 en el complejo de formas diferenciales en M , dado por la asignación $\alpha \mapsto \alpha(X, -)$. A partir de i_X podemos definir la *derivada de Lie* \mathcal{L}_X asociada al campo X . La derivada de Lie es un morfismo de grado 0 en el complejo de formas diferenciales en M , definido como

$$\mathcal{L}_X(\alpha) = d \circ i_X(\alpha) + i_X \circ d(\alpha).$$

Observación 2.15. Consideremos un campo X con flujo asociado F_t . La derivada de Lie de X está relacionada con el pullback $F_t^* : \Omega^r(M) \rightarrow \Omega^r(M)$ por la siguiente identidad:

$$\frac{d}{dt}F_t^*(\alpha) = F_t^*\mathcal{L}_X(\alpha). \quad (3)$$

dafuq?

Definición 2.16. Un campo vectorial X se dice *localmente Hamiltoniano* si todo $p \in M$ admite en un entorno abierto U de modo que existe una función $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $X|_U = X_H$.

Proposición 2.17. Sea X un campo vectorial sobre una variedad simpléctica (M, w) . Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. La 1-forma $i_X(w)$ es cerrada.
2. La derivada de Lie $\mathcal{L}_X(w)$ es nula.
3. Si F_t es el flujo asociado a X , entonces $F_t^*(w) = w$ para todo t .

Cualquiera de estas condiciones es equivalente a que el campo X sea localmente Hamiltoniano.

Demostración. Veamos primero que las tres condiciones son equivalentes:

(1 \Rightarrow 2) Como w es una forma simpléctica, $dw = 0$ por definición. Además por hipótesis $d \circ i_X(w) = 0$. Luego

$$\mathcal{L}_X(w) = i_X \circ d(w) + d \circ i_X(w) = 0.$$

(2 \Rightarrow 3) Por la identidad (3), sabemos que

$$\frac{d}{dt} F_t^*(w) = F_t^* \mathcal{L}_X(w) = F_t^*(0) = 0.$$

Por lo tanto, $F_t^*(w)$ es constante en t , y como $F_0^*(w) = \text{id}^*(w) = w$, entonces $F_t^*(w) = w$ para todo t .

(3 \Rightarrow 1) Si F_t^* es constante, entonces

$$0 = \frac{d}{dt} F_t^*(w) = F_t^* \mathcal{L}_X(w)$$

para todo t . Como F_t es un difeomorfismo, F_t^* es un isomorfismo y por lo tanto debe ser $\mathcal{L}_X(w) = 0$. Luego, usando la definición de $\mathcal{L}_X(w)$ y el hecho de que la forma simpléctica es cerrada, obtenemos

$$0 = \mathcal{L}_X(w) = i_X \circ d(w) + d \circ i_X(w) = d \circ i_X(w)$$

y por lo tanto $i_X(w)$ es cerrada.

Veamos finalmente que la condición (1) implica que X es localmente Hamiltoniano. Como $i_X(w)$ es cerrada, el lema de Poincaré nos garantiza que localmente es exacta; es decir, que para todo $p \in M$ existe un entorno U y una 0-forma $H : U \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $dH = i_X(w)$. Como por definición es $i_X(w) = w(X, -)$, tenemos que $dH = w(X, -)$ en U y así $X|_U = X_H$, como queríamos. \square

Observación 2.18. Vale la pena destacar que si $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, toda 1-forma cerrada es exacta, y por lo tanto siguiendo el argumento de la proposición anterior obtenemos que todo campo localmente Hamiltoniano es globalmente Hamiltoniano.

3 04/04 – Formalismo lagrangiano

Definición 3.1. Una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ es una *cantidad conservada* por el sistema físico descrito por X_H si es constante en las líneas del flujo del campo. En otras palabras, si F_t denota al flujo, entonces

$$\frac{d}{dt} (f \circ F_t) = 0.$$

Por ejemplo, ya vimos que la energía H es una cantidad conservada.

El motivo principal por el cual nos interesa hallar cantidades conservadas por el sistema es porque reducen la dimensión de la variedad en la cual debemos hallar las líneas de flujo. Más precisamente, si sabemos que f es una cantidad conservada, entonces si f tiene valor c en el punto que nos interesa a tiempo $t = 0$, toda la curva integral que describe la evolución del punto pertenece a la hipersuperficie de nivel $\{f = c\}$. Idealmente, si hallamos la cantidad suficiente de cantidades conservadas, es posible hallar la curva integral simplemente reduciendo la dimensión de la subvariedad en donde la busquemos de manera iterada, hasta llegar a una subvariedad de dimensión 1. Los sistemas que pueden resolverse de esta forma se denominan sistemas *completamente integrables*.

Daremos ahora una herramienta útil para determinar si ciertas funciones son conservadas por el sistema.

Definición 3.2. Sea (M, w) una variedad simpléctica. El *corchete de Poisson* en M es la aplicación bilineal $\{-, -\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ definida como:

$$\{F, G\} = w(X_F, X_G) = \mathcal{L}_{X_G}(F).$$

El corchete de Poisson es una derivación y satisface la identidad de Jacobi. Tenemos además una expresión local en coordenadas canónicas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \right).$$

De esta manera, tenemos dos álgebras de Lie relacionadas con nuestra variedad M : el álgebra de campos $(\mathfrak{X}(M), [-, -])$ y el álgebra de funciones $(C^\infty(M), \{-, -\})$. Estas estructuras están relacionadas por la identidad

$$X_{\{F, G\}} = [X_F, X_G],$$

o en otras palabras, el morfismo $C^\infty(M) \ni F \mapsto X_F \in \mathfrak{X}(M)$ es de álgebras de Lie.

Proposición 3.3. Si $G \in C^\infty(M)$ y F_t es el flujo del campo X_H , entonces

$$\frac{d}{dt} (G \circ F_t) = \{G, H\}.$$

En particular, G es una cantidad conservada sii $\{G, H\} = 0$.

Pasamos ahora a estudiar el formalismo lagrangiano. Para eso, empezamos describiendo la evolución de una partícula en \mathbb{R}^3 dada en coordenadas $q = (q^1, q^2, q^3)$ y sujeta a un campo de fuerzas dado por un potencial $V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos el *Lagrangiano*

$$L(q^i, \dot{q}^i) = \frac{m}{2} \|\dot{q}\|^2 - V(q),$$

donde \dot{q} denota a la derivada temporal de q , es decir, a la velocidad de la partícula. El movimiento está determinado por el principio de mínima acción; más precisamente, si la partícula se encuentra primero en una posición a y luego en una posición b , el camino que toma es el que minimiza el funcional

$$\int_a^b L(q^i, \dot{q}^i) dt.$$

Por lo tanto emplearemos técnicas variacionales para describir el movimiento de la partícula. Si $v_0 = (q_0^i, \dot{q}_0^i)$ y $v_1 = (q_1^i, \dot{q}_1^i)$ describen a la posición y velocidad inicial y final de la partícula respectivamente, buscamos minimizar el funcional dado en el espacio $P = \{\sigma = (q, \dot{q}) \text{ donde } q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ es tal que } \sigma(a) = v_0 \text{ y } \sigma(b) = v_1\}$. Consideremos entonces el funcional $S : P \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$(\sigma, \sigma') \mapsto \int_a^b L(\sigma, \sigma') dt.$$

Si σ_s es una curva en P definida en $(-\varepsilon, \varepsilon)$, entonces σ_0 es un punto crítico para S si

$$\left. \frac{d}{ds} S(\sigma_s) \right|_{s=0} = 0.$$

Si escribimos $\sigma_s(t) = (q_s^i(t), \dot{q}_s^i(t))$ y asumimos que L es lo suficientemente regular, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} S(\sigma_s) &= \frac{d}{ds} \int_a^b L(q_s^i, \dot{q}_s^i) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{ds} L(q_s^i, \dot{q}_s^i) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial s} \right) dt \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\int_a^b \frac{\partial L}{\partial q^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} dt \right) + \left(\int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial^2 q^i}{\partial t \partial s} dt \right) \end{aligned}$$

Aplicando partes sobre el segundo sumando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial^2 q^i}{\partial t \partial s} dt &= \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial q^i}{\partial s} \right) \Big|_a^b - \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \frac{\partial q^i}{\partial s} \right) dt \\ &= - \int_a^b \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \frac{\partial q^i}{\partial s} \right) dt \end{aligned}$$

pues q^i es constante respecto a s en los extremos a y b . Aplicando esto en nuestra igualdad original, concluimos que si σ_0 es punto crítico, se tiene

$$0 = \frac{d}{ds} S(\sigma_s) = \sum_{i=1}^n \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) \right) \frac{\partial q^i}{\partial s} dt,$$

y como esto debe valer para cualquier elección de camino q_s^i , obtenemos por el lema fundamental del cálculo de variaciones las *ecuaciones de Euler-Lagrange*:

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right).$$

Observemos que para la elección de Lagrangiano que dimos, estas ecuaciones recuperan la segunda ley de Newton, pues queda:

$$-\frac{\partial V}{\partial q^i} = m\ddot{q}^i.$$

Tratemos de deducir las ecuaciones de Hamilton a partir del formalismo lagrangiano. Llamemos $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$ y asumamos que el cambio de coordenadas $p_i \mapsto \dot{q}^i$ es no degenerado. De esta manera, definimos el Hamiltoniano $H(q^i, p_i) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i)$. Esta definición tiene sentido pues podemos obtener \dot{q}^i a partir de p_i . Si derivamos H , obtenemos

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \dot{q}^k + \sum_{i=1}^n \left(p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial p_k} \right) = \dot{q}^k$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial q^k} = -\frac{\partial L}{\partial q^k} + \sum_{i=1}^n \left(p_i \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^k} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^k} \right) = -\frac{\partial L}{\partial q^k}.$$

Ahora bien, las ecuaciones de Euler-Lagrange implican

$$\frac{\partial H}{\partial q^k} = -\frac{\partial L}{\partial q^k} = -\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} \right) = -\frac{d}{dt} p_k$$

o en otras palabras

$$-\frac{\partial H}{\partial q^k} = \dot{p}_k$$

y así recuperamos las ecuaciones de Hamilton.

Tratemos de generalizar lo que hicimos a una variedad arbitraria Q de dimensión n con un operador Lagrangiano $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$. Buscamos construir operadores E y FL de modo que este diagrama conmute:

diagrama

Para las cuentas que siguen, elegimos un abierto $U \subseteq Q$ que trivialice tanto al fibrado tangente como al cotangente. Empecemos definiendo $FL : TQ \rightarrow T^*Q$. Si $v \in T_uQ$, entonces definimos $FL(v) : T_uQ \rightarrow \mathbb{R}$ como la aplicación

$$w \mapsto \left. \frac{d}{ds} L(v + sw) \right|_{s=0}.$$

Notemos que el dominio de $FL(v)$ es necesariamente T_uQ por la conmutatividad del triángulo inferior del diagrama. Esencialmente, el mapa FL es el análogo al cambio de coordenadas $(q^i, \dot{q}^i) \mapsto (q^i, p_i)$ del ejemplo anterior.

Escribamos a FL en coordenadas locales. Si $v = (u, e)$ y $w = (u, e')$ son elementos de T_uQ , entonces

$$(FL(u, e))(u, e') = \left. \frac{d}{ds} (L(u, e + se')) \right|_{s=0} = (D_2 L(u, e))(u, e'),$$

donde D_2 denota a la derivada respecto a la segunda variable. De esta manera, si tenemos coordenadas (q^i, \dot{q}^i) , es $FL(q^i, \dot{q}^i) = (q^i, \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i})$, coincidiendo con el caso anterior. El morfismo $E : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ se define entonces como

$$E(v) = FL(v)(v) - L(v).$$

Finalmente, daremos una 2-forma distinguida sobre TQ , a la que llamamos *2-forma de Lagrange*. Recordemos que en T^*Q tenemos la forma simpléctica canónica w . La 2-forma de Lagrange se define como

$$w_L = (FL)^* w.$$

Busquemos una expresión local para w_L . Supongamos que U trivializa el fibrado tangente, de modo que $TQ|_U = U \times E$. Luego, podemos identificar $T(TQ|_U)$ con $TU \times TE$ y a la vez con $(U \times E) \times (E \times E)$. De esta forma:

$$\begin{aligned} w_L(u, e)((e_1, e_2), (e_3, e_4)) &= D_1 D_2 L(u, e)(e_3)(e_1) \\ &\quad - D_1 D_2 L(u, e)(e_1)(e_3) \\ &\quad + D_2 D_2 L(u, e)(e_4)(e_1) \\ &\quad - D_2 D_2 L(u, e)(e_2)(e_3). \end{aligned}$$

Estamos haciendo un pequeño abuso de notación, pues los elementos (e_1, e_2) son en realidad pares $((u, e), (e_1, e_2))$. De esta manera, si tenemos coordenadas (q^i, \dot{q}^i) , la expresión local es:

$$w_L(q^i, \dot{q}^i) = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} dq^i \wedge dq^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} dq^i \wedge d\dot{q}^j \right).$$

Definición 3.4. El operador L se dice *regular* si $D_2 D_2 L$ es no degenerada. Si tenemos coordenadas (q^i, \dot{q}^i) , esto es que la matriz

$$\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right)_{i,j}$$

sea no degenerada.