# Produto Interno, Distâncias, Projeção ortogonal, Mínimos Quadrados

**Álgebra Linear e Geometria Analítica A** **Soluções da Folha Prática 4**

---

1. (a) $u + v = (0, -1, 1)$ e $3u - 2v = (5, -8, 3)$.
   (b) Não. Não.
   (c) i. $5\pi/6$; ii. $\pi/6$; iii. $\arccos \frac{2\sqrt{7}}{7}$.
   (d) $\left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ ou $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$.
   (e) i. $\frac{\sqrt{6}}{3}(1, -2, 1)$; ii. $-\frac{\sqrt{6}}{3}(1, -2, 1)$.
   (f) $u = -\frac{3}{2}(-1, 1, 0) + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$.
   (g) $\alpha(1, 1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (h) $\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, 2)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. Dois lados do triângulo têm comprimento $\sqrt{41}$.

3. $\left(\frac{1}{3}\sqrt{3y^2 + 3z^2}, y, z\right)$, $y, z \in \mathbb{R}$.

5. (a) $(-1, 2, 4)$.

6. (b) i. $\sqrt{66}$; ii. $\frac{\sqrt{3}}{2}$; iii. 2.

7. (a) $\alpha(2, -1, -3)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (b) $\sqrt{14}$.

9. Uma equação vetorial da reta $\mathcal{R}$ é $(x, y, z) = (1, 1, 0) + \alpha(0, 1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; uma equação vetorial do plano $\mathcal{P}$ é $(x, y, z) = (2, 2, 1) + \alpha(0, 1, 1) + \beta(1, 1, 1)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e uma equação cartesiana de $\mathcal{P}$ é $y - z = 1$.

10. Todos os pontos do plano de equação cartesiana $2x - y - z + 1 = 0$.

11. (a) $(x, y, z) = (3, \frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) + \alpha(0, 1, 1)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; (b) $\sqrt{2}$.

12. (a) 2x+z=3; (b) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$.

13. (a) $x - z + 3 = 0$; (b) 1.

14. (a) Não;
    (b) Sim.

15. $a = b = \frac{1}{2}$ ou $a = b = -\frac{1}{2}$.

16. (b) $[X]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 7/5 \\ 1 \\ 1/5 \end{bmatrix}$. (c) $\begin{bmatrix} 3/5 & 3/5 & 7/5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4/5 & 4/5 & 1/5 \end{bmatrix}$. (d) $[Y]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$.

18. (a) $\left((\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, 0, 1)\right)$;
    (b) $(0, 0, 1)$;
    (c) $\sqrt{2}/2$.

19. $\mathrm{proj}_{\mathcal{W}} X = \left(1 - 9\sqrt{3}/4, 0, \sqrt{3} - 27/4\right)$, $\mathrm{proj}_{\mathcal{W}} Y = \left(1/2 - \sqrt{3}/4, 7, \sqrt{3}/2 - 3/4\right)$.

20. (a) Verdadeira. (b) Falsa. (c) Verdadeira

21. (a) $\left((\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})\right)$;
    (b) $\left((0, 0, 1, 0), \frac{\sqrt{3}}{3}(1, 1, 0, 1), \frac{\sqrt{78}}{78}(-2, 7, 0, -5)\right)$.

22. O erro dos mínimos quadrados é $\sqrt{84}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^2$.

23. (a) A solução dos mínimos quadrados é $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$. O erro dos mínimos quadrados é zero porque $b$ pertence ao espaço das colunas de $A$.

(b) Se $b$ é ortogonal ao espaço das colunas de $A$ então a projeção de $b$ no espaço das colunas de $A$ é 0. Neste caso uma solução dos mínimos quadrados $\hat{x}$ de $Ax = b$ satisfaz $A\hat{x} = 0$.

24. 1.

(a) As equações normais são: $A^TA)x = A^Tb : \begin{bmatrix} 6 & -11 \\ -11 & 22 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 11 \end{bmatrix}$.

(b) $\hat{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

24. 2.

(a) As equações normais são: $A^TA)x = A^Tb : \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(b) $\hat{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}$.

24. 3.

(a) As equações normais são: $A^TA)x = A^Tb : \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \end{bmatrix}$.

(b) $\hat{x} = \begin{bmatrix} 4/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}$.

24. 4.

(a) As equações normais são: $A^TA)x = A^Tb : \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 14 \end{bmatrix}$.

(b) $\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.