Exemplo

$$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 + x_3 = 7 \\ 8x_2 + x_3 = 5 \\ x_3 = 4 \end{cases}$$

$$B = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Folha Prática 1

15

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ Não é escalonada por linhas

(b) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ \boxed{0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0} \end{bmatrix}$ → esta linha não ter pivot

É escalonada por linhas. Não é escalonada por linhas reduzida (porque os pivots não são todos)

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_4 = L_4 - L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_4 = L_4 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_4 = L_4 - L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad L_1 = \frac{L_1}{2} \quad L_2 = \frac{L_2}{2} \quad L_3 = \frac{L_3}{2} : \begin{bmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

15 a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz escalonada por linhas reduzida

Teorema: Se $[A|B] \sim [C|D]$ então o sistema $Ax = B$ tem o mesmo conjunto de solução que o sistema $Cx = D$

Exemplo

$$\begin{cases} 2x = 8 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Matriz ampliada

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \Bigg| \underbrace{\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}}_{B} \qquad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\sim \; L_1 = \frac{L_1}{2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim L_2 = L_2 - L_1 \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Matriz escalonada reduzida

Exemplo Gauss

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ x + z = 0 \\ 4y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & 6 \end{array}\right]$$

Matriz escalonada por linhas

$= [C|D]$

Escrever

$CX = D$ e resolver

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x + z \\ y - \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y - \frac{2}{3}z = -1 \\ \frac{2}{3}z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 5 \\ z = \frac{6}{2} \times 3 = 9 \end{cases}$$

Sol. $(-9, 5, 9)$

Gauss Jordan

1º matriz ampliada $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right]$

2º $[A|B]$ numa matriz escalonada reduzida por linhas

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 2 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right]$$

3º Escrever $EX = F$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -9 \\ y = 5 \\ z = 9 \end{cases}$$

Ficha Prática 1

17

a) Resolve o sistema $\begin{cases} 4x + 3y + 2z = 1 \\ x + 3y + 5z = 1 \\ 3x + 6y + 9z = 2 \end{cases}$

1º Escrever $Ax = B$

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Matriz ampliada $[A|B]$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -9 & -18 & -3 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{array}\right]$$

$L_2 = L_2 - 4L_1$

$L_3 = L_3 - 3L_1$

$$\sim_{\substack{L_2 := -L_2 \\ L_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -1 \end{array}\right] \sim_{L_3 := L_3 + L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \ldots$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} x - z \\ y + 2z \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = \frac{1}{3} - 2z \end{cases}$$

Solução

$\left\{ \left(z, \frac{1}{3} - 2z, z\right) ; z \in \mathbb{R} \right\}$ Poss indeterminado

se $z = 0$ $\left(0, \frac{1}{3}, 0\right)$, $z = \frac{1}{3}$ $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Seja A uma matriz de ordem $m \times n$ a $car(A)$ é o nº de pivots da matriz escalonada por linhas equivalente A

16 -(Folha 1)

a) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $car(A) = 2$ porque a matriz escalonada equivalente à matriz A tem 2 pivots

Nota $car(A) \leq n$

Exemplos

(1) sistema impossível

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

impossível $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$

$car(A) < car(A|B)$

(2) Sistema poss. det.

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$car(A) = 2$

$car([A|B]) = 2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

$$car(A) = car(A|B) = n$$

(3) Sistema poss. ind

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\begin{cases} x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - y \end{cases}$

$car(A) = 1$

$car([A|B]) = 1$

$\{(1-y, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

$car(A) = car[A|B] < n^{\circ}$ variáveis

FP 1

1)
$$\begin{cases} \alpha x + y = 1 \\ x + \alpha y = 1 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \end{array}\right] \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2 = L_2 - \alpha L_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1-\alpha^2 & 1-\alpha \end{array}\right]$$

$1 = car(A) < car([A|B]) = 2$

A $car(A) = 1$ quando $1 - \alpha^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = \pm 1$

$car(A) = 2$ quando $1 - \alpha \neq 0$

$\Leftrightarrow \alpha \neq 1$

- Poss determinado

$car(A) = car([A|B]) = 2$

A $car(A)$ é 2 quando $1 - \alpha^2 \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq \pm 1$

- Poss indeterminado

$1 = car(A) = car[A|B] < 2$ quando $1 - \alpha^2 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = 1 \vee \alpha = -1$

$\alpha = 1 \downarrow$ P.I

$\alpha = -1 \downarrow$ imp