Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II - C 2023/2024

Ficha de Exercícios 1
Séries numéricas

1. Determine o termo geral da sucessão das somas parciais, S_n, e, em caso de convergência, indique a soma S de cada uma das seguintes séries:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2n$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 3^{-2n+3}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n}\right)$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n-1}\right)$.

Resolução:

1. (a) Sendo $n \in \mathbb{N}$ fixado arbitrariamente,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k = \frac{1-2^n}{1-2} \cdot 2 = -2(1-2^n) = 2^{n+1} - 2,$$

(uma vez que S_n é a soma dos n primeiros termos da progressão geométrica de razão $r = 2$ e primeiro termo $a = 2$). Uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} (2^{n+1} - 2) = +\infty,$$

podemos concluir que a série dada é divergente.

1. (f) Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado arbitrariamente e $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Uma vez que

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} (a_{k+2} - a_k) = \sum_{k=2}^{n} a_{k+2} - \sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=4}^{n+2} a_k - \sum_{k=2}^{n} a_k = \left(\sum_{k=4}^{n} a_k + a_{n+1} + a_{n+2}\right) - \left(a_2 + a_3 + \sum_{k=4}^{n} a_k\right),$$

podemos concluir que

$$S_n = a_{n+1} + a_{n+2} \ - a_2 - a_3 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

Como

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+2}\right) - 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2+\sqrt{3}}{2},$$

podemos concluir que a série dada é convergente e a sua soma é igual a $-\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

2. Calcule, se possível, a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + b_n\right]$, sabendo que a sucessão das somas parciais associadas à série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é dada por $S_n = \sqrt[n]{\dfrac{e}{n^n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Resolução: Uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{e}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n} = 0$$

então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente e tem soma igual a 0. Pelas propriedades das séries,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + b_n\right] = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n$ é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{4}$ e primeiro termo $\frac{1}{2}$, podemos concluir que esta série é convergente e tem soma igual a $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1} + b_n\right] = \frac{2}{3}.$$

3. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série numérica, convergente e de soma igual a S. Calcule a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[3a_n + \frac{2}{3^n}\right]$.

4. Determine, se existir, a soma da série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$, onde $u_n = \begin{cases} 1 + 2(n-1) & \text{se } n < 4 \\ \left(\frac{2}{3}\right)^n & \text{se } n \geq 4 \end{cases}$.

5. Considere a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{(a+1)^n}$ (onde a é um parâmetro real, com $a \neq -1$).
   (a) Determine os valores de a para os quais a série dada é convergente.
   (b) Para um dos valores encontrados na alínea anterior, determine a soma da série.

6. Indique, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas:
   (a) Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de números reais.
      i. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, então a série converge.
      ii. Se a série converge, então $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
      iii. Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{2}$, então a série diverge.
   (b) A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e só se:
      i. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = 0$;
      ii. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k < 1$;
      iii. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S \in \mathbb{R}$.

7. Estude a natureza das séries seguintes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{\sqrt{3n^2-2}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (1+2n)^{\frac{1}{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n^2\pi}{2}\right)$

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{\sqrt{2n^5+n^3}}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{[(-1)^n+5]^n}$

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n}{n+1}\right)^{n^3}$

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n} \quad (0<b<1)$

(m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{d^n} \quad (d>0)$

(n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^{n}$

(o) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n}$

(p) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(q) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{8^n}+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

(r) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{50}\right)}{2^n}$

(s) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$

(t) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!+n-1}$

(u) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n+1}{2^n-1}$

(v) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n\cos(n\alpha)}{n^{2n}}, \ \alpha\in\mathbb{R}$

(w) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2+1}$

(x) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ (Sugestão: $(\ln n)^{\ln n} > n^2$ para n suficientemente grande)

Resolução:

7. (d) Uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\ln n} = +\infty$$

e $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ é divergente (porque é uma série harmónica de ordem $p=1$), então, pelo Critério do Limite, a série dada é divergente.

7. (e) 1º Processo (Critério do Integral): seja $f : [3,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Uma vez que $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$, podemos concluir que, para todo o $x\in[3,+\infty[$, $f'(x)<0$. Logo f é (estritamente) decrescente no seu domínio. Pelo Critério do Integral, podemos concluir que a série dada (de termos positivos) e o integral impróprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ têm a mesma natureza. Uma vez que

$$\lim_{b\to+\infty}\int_3^b \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_3^b \frac{1}{x}\ln x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_3^b = \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{(\ln b)^2}{2}-\frac{(\ln 3)^2}{2}\right) = +\infty,$$

podemos concluir que o integral impróprio $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx$ é divergente. Conclusão: a série dada é divergente.

2º Processo: Critério do Limite (muito mais simples, verifique!).

7. (f) Como

$$0 < \frac{n+1}{\sqrt{2n^5+n^3}} < \frac{n+1}{\sqrt{2n^5}} \leq \frac{n+n}{\sqrt{2n^5}} = \frac{2n}{\sqrt{2n^5}} = \sqrt{2}\frac{1}{n^{3/2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}$ é convergente, pelo Critério de Comparação, a série dada é convergente.

Nota: como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ é convergente (porque é uma série harmónica de ordem $p = 3/2 > 1$), então, pelas propriedades das séries, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{2}\frac{1}{n^{3/2}}$ também é convergente.

7. (m) Uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{d^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{d} = +\infty$$

então, pelo Critério da Raiz, a série dada divergente.

7. (s) Uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n \cdot 2^2(n+2)(n+1)!}{(n+2)^n(n+2)^2} \cdot \frac{(n+1)^n(n+1)}{2\cdot 2^n(n+1)!} = \lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1$$

então, pelo Critério do Quociente, a série dada é absolutamente convergente, logo convergente.

8. Estude a natureza das séries seguintes:

(a) $\displaystyle \frac{1}{2} + \frac{3}{4+1} + \frac{5}{9+1} + \frac{7}{16+1} + \cdots$ (b) $\displaystyle \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \frac{1}{4\cdot 2^4} + \cdots$

9. Sejam $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ duas séries de termos não negativos, tais que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{3}$ e $a_n = b_n + \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$.

Resolução: Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \frac{1}{3} < 1$ então, pelo Critério da Raiz, podemos concluir que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ é convergente e, portanto, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$ (pela Condição necessária de convergência). Como $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3} \neq 0$, então, pela Condição necessária de convergência, podemos concluir que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente. Pelas propriedades das séries, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + b_n)$ é divergente.

10. Sejam $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ para todo o $n \in \mathbb{N}$. Demonstre que se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leq b_n, \forall n \geq n_0$ e se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também é convergente.

11. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso afirmativo, indique se são absolutamente ou simplesmente convergentes:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\ln n}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2^{n-1}}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n+2}}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n^3+3n^2+4}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-2)^n}{(n+1)!}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{1}{e^n+1}$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$;

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$;

(k) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$;

(l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\cos(n)}{e^n+2n+1}$.

12. Sabendo que as sucessões $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ são tais que

$$\sum_{n=1}^{8}a_n=15,\quad a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n,\ \text{ para } n\geq 9 \quad\text{e}\quad b_n>a_n,\ \text{ para } n>20,$$

estude a natureza das séries numéricas $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$.

13. Considere as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n!}{n^n}$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$.

(a) Estude a natureza de cada uma das séries.

(b) Indique o limite do termo geral das séries.

(c) Sendo $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n\frac{n!}{n^n}+b_n\right]=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{n^2+1}$, indique a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}b_n$. Justifique.

14. Uma bola de borracha cai de uma altura de 10 metros. Sempre que bate no chão, a bola sobe 2/3 da distância percorrida anteriormente. Qual é a distância total percorrida pela bola (até ficar em repouso)?

15. Seja (a_n) uma sucessão de números reais tal que $a_1\neq 0$ e $a_{n+1}=\dfrac{n}{2n+1}\,a_n$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Indique, justificando, a natureza da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

16. Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n+n^2}{3^n\,n^2}$ sabendo que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

17. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de termos positivos tal que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}n\,a_n$ é convergente. Prove que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2$ é convergente.

18. Mostre que se $a_n>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ converge, então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\ln(1+a_n)$ converge.

Resolução: Como $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente, então, pela Condição necessária de convergência, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Uma vez que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = 1$$

(porque $lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$) então, pelo Critério do limite, as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ têm a mesma natureza. Logo $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+a_n)$ é convergente.

Exercícios de revisão

19. Estude a natureza da série $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n+2)!} - \frac{1}{n!}\right)$ e, em caso de convergência, indique a sua soma.

20. Verifique se as séries seguintes são convergentes e, em caso de convergência, indique se a convergência é absoluta ou simples:

    (a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{(n+1)!}$.

    (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n+2)}$.

    (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + \cos(3n)}{n^{\frac{5}{2}} + n}$.

    (d) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

    (e) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

21. Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ uma série de termos positivos convergente. Indique, justificando, a natureza das seguintes séries:

    (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) + a_n\right)$.

    (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{3 + a_n^2}$.

22. Mostre que, se $a_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n)^2$ também converge.

23. Mostre que se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ são séries convergentes de termos positivos, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n b_n}$ converge.

    (Sugestão: Comece por mostrar que $\forall x, y \in \mathbb{R}_0^+, \quad \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.)

24. Estude a natureza das seguintes séries, indicando, em caso de convergência, se se trata de convergência simples ou absoluta.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2n-1)}{n^{5/2}+7n+3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n} \frac{1}{\ln(n+1)}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

Soluções

1. (a) $S_n = 2^{n+1} - 2$; a série não é convergente;
   (b) $S_n = n(n+1)$; a série não é convergente;
   (c) $S_n = \frac{27}{8}\left[1 - \left(\frac{1}{9}\right)^n\right]$; $\quad S = \frac{27}{8}$;
   (d) $S_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$, $\quad S = 1$;
   (e) $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{3}{2}$, $\quad S = -\frac{3}{2}$;
   (f) $S_n = -1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+1}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n+2}\right)$, $\quad S = -\frac{2+\sqrt{3}}{2}$;
   (g) $S_n = \ln(2) - \ln(n+1) - \ln(n+2)$; a série não é convergente;
   (h) $S_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{25}{12}$, $\quad S = -\frac{25}{12}$.
2. $\frac{2}{3}$.
3. $3S + 1$.
4. $\frac{259}{27}$
5. (a) $a \in]-\infty, -6[\cup]4, +\infty[$. (b) —
6. (a) i. Falso; ii. Verdadeiro; iii. Verdadeiro.
   (b) i. Falso; ii. Falso; iii. Verdadeiro.
7. (a) Divergente;
   (b) Divergente;
   (c) Divergente;
   (d) Divergente;
   (e) Divergente;
   (f) Convergente;
   (g) Convergente;
   (h) Convergente;
   (i) Convergente;
   (j) Convergente;
   (k) Divergente;
   (l) Convergente;
   (m) Divergente;
   (n) Convergente;
   (o) Divergente;
   (p) Convergente;
   (q) Convergente;
   (r) Convergente;
   (s) Convergente;
   (t) Convergente;
   (u) Divergente;
   (v) Convergente;
   (w) Convergente;
   (x) Convergente.
8. (a) Divergente; (b) Convergente.
9. Divergente.
10. —
11. (a) Simplesmente convergente;
    (b) Simplesmente convergente;
    (c) Absolutamente convergente;
    (d) Simplesmente convergente;
    (e) Absolutamente convergente;
    (f) Absolutamente convergente;
    (g) Absolutamente convergente;
    (h) Divergente;
    (i) Absolutamente convergente;
    (j) Absolutamente convergente;
    (k) Simplesmente convergente;
    (l) Absolutamente convergente.

12. São ambas divergentes.
13. (a) São ambas absolutamente convergente;
    (b) 0 (pela condição necessária de convergência);
    (c) Convergente.
14. 50 metros.
15. Absolutamente convergente.
16. $\frac{\pi^2+3}{6}$.
17. —
18. —
19. A série de Mengoli dada é convergente e o seu valor é $-\frac{3}{2}$
20. (a) Absolutamente convergente (Sugestão: Usar o Critério da Razão ou o Critério da Raiz)
    (b) Simplesmente convergente (Sugestão: Usar o Critério do Limite para estudar a série dos módulos e o Critério de Leibniz)
    (c) Absolutamente convergente (Sugestão: Estudar a série dos módulos usando o Critério de Comparação)
    (d) Simplesmente convergente
    (e) Divergente
21. (a) Série divergente (Sugestão: Usar a Condição Necessária de Convergência)
    (b) Série convergente (Sugestão: Estudar natureza da série dos módulos usando o Critério do Limite ou o Critério de Comparação)
22. —
23. —
24. (a) A série é absolutamente convergente.
    (b) A série é absolutamente convergente.
    (c) A série é simplesmente convergente.
    (d) A série é divergente.