Matrizes e Sistemas de Equações Lineares

Álgebra Linear e Geometria Analítica - A **Soluções da Folha Prática 1**

---

1. (a) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 1 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$; (e) $\begin{bmatrix} -3 & 1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 8 & 2 & 16 \end{bmatrix}$; (f) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -3 \end{bmatrix}$.

2. $\begin{bmatrix} -6 & -8 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$.

3. $ADBC = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$ ou $BADC = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$.

4. A primeira coluna é $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e a segunda linha é $\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}$.

6. $EA = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 11 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \neq AE = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 19 & 5 & 6 \\ 31 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

7. $\begin{bmatrix} \mu_1^4 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2^4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mu_n^4 \end{bmatrix}$.

9. i. $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$;
   ii. $(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$;
   iii. $(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$;
   iv. $(AB)^2 = ABAB$.

10. (a) Verdadeira; (b) Falsa; (c) Falsa.

14. (a) $AC = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$; (b) $AC = \begin{bmatrix} x-y \\ 2x-y+z \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 1-z \\ 1-z \\ z \end{bmatrix}$, $z \in \mathbb{R}$.

15. (b) e (d).
   i. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
   ii. (a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & 4/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 11/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$.

16. (a) $x_1 = t,\ x_2 = \frac{1}{3} - 2t,\ x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$;
   (b) impossível
   (c) $x_1 = 6 - t,\ x_2 = -5 + t,\ x_3 = 3,\ x_4 = -1 - t,\ x_5 = t,\ t \in \mathbb{R}$;
   (d) $x_1 = 1, x_2 = 0,\ x_3 = -1$.

17. (a) $\alpha = -1$; (b) $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq -1$; (c) $\alpha = 1$.

18. O sistema é impossível se $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$.

O sistema é possível e determinado se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ e nesse caso o conjunto solução é $\left\{\left(0, \frac{1}{\alpha-1}, 1 - \frac{3}{\alpha}\right)\right\}$.

19. O sistema é $\begin{cases} \text{impossível} & \text{se } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -1 \\ \text{possível e indeterminado de grau um} & \text{se } \alpha = -2 \\ \text{possível e determinado} & \text{se } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\} \end{cases}$.

20. Se B é a coluna i de A, então $X = [0 \cdots 1 \cdots 0]^T$ com 1 na linha i e as restantes entradas nulas é uma solução.

21. $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ não é singular e $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -6 & -4 \end{bmatrix}$ é singular.

22. (b) Sim.

(c) $C^5 = AD^5B = \begin{bmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{bmatrix}$.

23. (a) $\begin{bmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}$.

26. $(I_n + A + A^2 + \ldots + A^{k-1})(I_n - A) = I_n - A^k = I_n$.

27. Sendo $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, tem-se $A^3 = O$, logo $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = (I_3 - A)^{-1} = I_3 + A + A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

28. $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

30. $X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$.

31. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.

32. (a) $X = B^T A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$;

(b) $X = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$.

33. (a) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) $x = 1, y = 0, z = -1$.

36. (a)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Resolvendo $Ly = b$ vem $y = \begin{bmatrix} -7 & -2 & 6 \end{bmatrix}^T$. Resolvendo $Ux = y$ vem $x = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}^T$.

(b)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 2 & -6 & 4 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Resolvendo $Ly = b$ vem $y = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}^T$.

Resolvendo $Ux = y$, tem-se $x = \begin{bmatrix} -11 & -6 & -3 \end{bmatrix}^T$.

(c)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Resolvendo $Ly = b$, $y = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -18 \end{bmatrix}^T$. Resolvendo $Ux = y$, $x = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$.

37. A resposta ao Exercício 37 (a), depende da forma como o estudante ordena os setores. Se ordenar os setores por manufaturação, agricultura e serviços, então a matriz de consumo é:

$$C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & -0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}.$$

A demanda interna (necessidades intermédias) para a produção de x é dada por Cx. Neste caso tem-se que

$$Cx = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 20 \\ 10 \end{bmatrix}$$

(b) Resolva a equação $x = Cx + d$ para d.

$$d = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.6 & 0.6 \\ 0.3 & 0.2 & 0.0 \\ 0.3 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9x_1 - 0.6x_2 - 0.6x_3 \\ -0.3x_1 + 0.8x_2 \\ -0.3x_1 - 0.1x_2 + 0.9x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 18 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A solução é $x = \begin{bmatrix} 33.33 \\ 35.00 \\ 15.00 \end{bmatrix}$

(c) Resolvendo como no ponto anterior $d = x - Cx$ vem $x = \begin{bmatrix} 40 \\ 15 \\ 15 \end{bmatrix}$

(d) Resolvendo como no ponto anterior $d = x - Cx$ vem $x = \begin{bmatrix} 73.33 \\ 50 \\ 30 \end{bmatrix}$.

38. $x = (I - C)^{-1}d = \begin{bmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ 1.2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 120 \end{bmatrix}$.

39. $x = (I - C)^{-1}d = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.6 \\ -0.5 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 18 \\ 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{40}{21} & \frac{30}{21} \\ \frac{25}{21} & \frac{45}{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 45 \end{bmatrix}$.

40. Já sabemos que $(I - C)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ 1.2 & 2 \end{bmatrix}$. Assim, $x_1 = (I - C)^{-1}d_1 = \begin{bmatrix} 1.6 & 1 \\ 1.2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6 \\ 1.2 \end{bmatrix}$.

e $x_2 = (I - C)^{-1}d_2 = \begin{bmatrix} 111.6 \\ 121.2 \end{bmatrix}$.