LES PROGRESSIONS ET LES LOGARITHMES

LES PROGRESSIONS ARITHMETIQUES

1. $\left|\begin{array}{l} t_1 = 3 \\ t_2 = 5 \\ t_{110} = ? \end{array}\right.$ $\quad r = 5 - 3 = 2 \Rightarrow t_{110} = 3 + 109 \cdot 2 = 221$

2. $\left|\begin{array}{l} t_4 = 40 \\ t_{12} = 52 \\ t_1 = ? \\ r = ? \end{array}\right.$ $\quad \begin{cases} t_1 + 3r = 40 \\ 8r = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 3/2 \\ t_1 = 35,5 \end{cases}$

3. $\left|\begin{array}{l} t_1 = 4 \\ r = 2 \\ t_{22} = ? \\ S_{22} = ? \end{array}\right.$ $\quad \begin{array}{l} t_{22} = t_1 + (n-1) \cdot r = 4 + (22-1) \cdot 2 = 46 \\ S_{22} = \frac{n}{2}(t_1 + t_n) = \frac{22}{2}(4 + 46) = 550 \end{array}$

4. $\left|\begin{array}{l} t_8 + t_{14} = 50 \\ t_5 = 13 \\ t_1 = ? \\ r = ? \end{array}\right.$ $\quad \begin{cases} t_1 + 7r + t_1 + 13r = 50 \\ t_1 + 4r = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t_1 + 20r = 50 \\ t_1 + 4r = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 5 \\ r = 2 \end{cases}$

5. $\left|\begin{array}{l} t_1 = 1 \\ r = 1 \\ S_n = 496 \\ n = ? \end{array}\right.$ $\quad \begin{array}{l} S_n = \frac{n}{2}\left(2t_1 + (n-1) \cdot r\right) \Rightarrow 496 = \frac{n}{2}\left(2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 1\right) \Rightarrow n^2 + n - 992 = 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} n' = 31 \\ n'' = -32 \text{ solution refusée} \end{cases} \end{array}$

6. $\left|\begin{array}{l} S_{11} = 253 \\ t_1 = 8 \\ n = 11 \\ r = ? \\ t_{11} = ? \end{array}\right.$ $\quad 253 = \frac{11}{2}\left(2 \cdot 8 + (11-1)r\right) \Rightarrow r = 3 \text{ puis } t_{11} = 38$

7. $\left|\begin{array}{l} S_{11}=0 \\ t_1=35 \\ n=11 \\ r=? \\ t_{11}=? \end{array}\right.$ $\qquad 0=\frac{11}{2}\left(2\cdot 35+(11-1)r\right)\Rightarrow r=-7$ puis $t_{11}=-35$

8. $\left|\begin{array}{l} t_3=11 \\ t_{11}=43 \\ n=13 \\ t_1=? \\ r=? \end{array}\right.$ $\qquad \begin{cases} t_3=t_1+2r=11 \\ t_{11}=t_1+10r=43 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} r=4 \\ t_1=3 \end{cases}$

9. $\left|\begin{array}{l} t_3=13 \\ t_7=29 \\ t_1=? \\ r=? \end{array}\right.$ $\qquad \begin{cases} t_1+2r=13 \\ t_1+6r=29 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} r=4 \\ t_1=5 \end{cases}$ Progression : 5; 9; 13; 17; 21; 25; 29; 33; 37

10. $\left|\begin{array}{l} t_1=11 \\ r=11 \\ S_{50}=? \end{array}\right.$ $\qquad S_{50}=\frac{50}{2}\left(2\cdot 11+(50-1)\cdot 11\right)=14'025$

11. Soit $t-r$, t et $t+r$ trois nombres en progression arithmétique.

$$\begin{cases} t-r+t+t+r=105 \\ (t-r)\cdot t\cdot(t+r)=39'375 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3t=105 \\ t^3-t\cdot r^2=39'375 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t=35 \\ r^2=100 \end{cases}$$

le système à donc deux couples de solutions possibles : $\begin{cases} t_1'=35 \\ r'=10 \end{cases}$ ou $\begin{cases} t_2''=35 \\ r''=-10 \end{cases}$

les trois nombres en progression arithmétique sont donc soit : 25, 35, 45 ou bien évidemment 45, 35, 25.

12. Soit $t-r$, t et $t+r$ trois nombres en progression arithmétique.

$$\begin{cases} t-r+t+t+r=33 \\ (t-r)\cdot t\cdot(t+r)=1'287 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3t=33 \\ t^3-t\cdot r^2=1'287 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} t=11 \\ r^2=4 \end{cases}$$

le système à donc deux couples de solutions possibles : $\begin{cases} t_1'=11 \\ r'=2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} t_2''=11 \\ r''=-2 \end{cases}$

les trois nombres en progression arithmétique sont donc soit : 9, 11, 13 ou bien évidemment 13, 11, 9.

13. Si les trois nombres suivants $\frac{a}{a+1}$; $\frac{2a+1}{a+1}$; $\frac{3a+2}{a+1}$ sont en progression arithmétique, alors le deuxième est égal à la moyenne arithmétique des deux autres.

$$\frac{\frac{a}{a+1}+\frac{3a+2}{a+1}}{2}=\frac{\frac{4a+2}{a+1}}{2}=\frac{\frac{2(2a+1)}{a+1}}{2}=\frac{2a+1}{a+1} \quad \text{CQFD !}$$

LES PROGRESSIONS GEOMETRIQUES

14. $\left|\begin{array}{l} t_1=3 \\ q=2 \\ n=7 \\ t_7=? \\ S_7=? \end{array}\right.$

$$t_7=t_1\cdot q^{n-1}=3\cdot 2^6=192$$

$$S_7=\frac{t_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{3\left(1-2^7\right)}{1-2}=381$$

15. $\left|\begin{array}{l} t_5=32 \\ q=-2 \\ n=5 \\ t_1=? \\ S_5=? \end{array}\right.$

$$t_1=\frac{t_5}{q^{5-1}}=\frac{32}{(-2)^4}=2$$

$$S_5=\frac{2\left(1-(-2)^5\right)}{1-(-2)}=22$$

Attention la suite est alternée !

$2\ ; -4;\ 8\ ; -16\ ;\ 32$

16. $\left|\begin{array}{l} t_2=2 \\ t_6=8 \\ t_1=? \\ q=? \end{array}\right.$

$$\begin{cases} t_2=t_1\cdot q=2 \\ t_6=t_1\cdot q^5=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{2}{q} \\ \frac{2}{q}\cdot q^5=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{2}{q} \\ q^4=4 \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow \begin{cases} t_1'=\sqrt{2} \\ q'=\sqrt{2} \end{cases} \\ \searrow \begin{cases} t_1''=-\sqrt{2} \\ q''=-\sqrt{2} \end{cases} \end{array}$$

Il y a deux suites différentes, une croissante de raison $q'=\sqrt{2}$ et une alternée de raison $q''=-\sqrt{2}$

17. $\left|\begin{array}{l} t_3=0.01=10^{-2} \\ t_7=100=10^2 \\ t_1=? \\ q=? \end{array}\right.$

$$\begin{cases} t_3=t_1\cdot q^2=10^{-2} \\ t_7=t_1\cdot q^6=10^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{10^{-2}}{q^2} \\ \frac{10^{-2}}{q^2}\cdot q^6=10^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_1=\frac{10^{-2}}{q^2} \\ q^4=10^4 \end{cases} \begin{array}{l} \nearrow \begin{cases} t_1'=10^{-4} \\ q'=10 \end{cases} \\ \searrow \begin{cases} t_1''=10^{-4} \\ q''=-10 \end{cases} \end{array}$$

Il y a aussi deux suites différentes, une croissante de raison $q'=10$ et une alternée de raison $q''=-10$

18. $\left|\begin{array}{l} t_1 = 8 \\ t_3 = 18 \\ t_{13} = ? \\ t_{14} = ? \end{array}\right.$ $\quad t_3 = t_1 \cdot q^2 \Rightarrow q^2 = \frac{t_3}{t_1} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$ $\quad \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array}$

$$q' = \frac{3}{2} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} t_{13} = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{3^{12}}{2^9} = 1'037.97 \\ t_{14} = 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{13} = \frac{3^{13}}{2^{10}} = 1'556.95 \end{array}\right.$$

$$q'' = -\frac{3}{2} \Rightarrow \left|\begin{array}{l} t_{13} = 8 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{12} = \frac{3^{12}}{2^9} = 1'037.97 \\ t_{14} = 8 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^{13} = -\frac{3^{13}}{2^{10}} = -1'556.95 \end{array}\right.$$

19. $\left|\begin{array}{l} t_1 = 32 \\ t_3 \cdot t_6 = 17'496 \\ q = ? \end{array}\right.$ $\quad \begin{array}{l} \left(t_1 \cdot q^2\right) \cdot \left(t_1 \cdot q^5\right) = t_1{}^2 \cdot q^7 = 32^2 \cdot q^7 = 17'496 \\ \Rightarrow q = \sqrt[7]{\frac{17'496}{32^2}} = \frac{3}{2} \end{array}$

20. $\left|\begin{array}{l} t_1 = 6 \\ q = \frac{1}{4} \\ S = ? \end{array}\right.$ $\quad S = \frac{t_1}{1-q} = \frac{6}{1-\frac{1}{4}} = 8$

EXERCICES DIVERS SUR LES PROGRESSIONS

21. 1er contrat : Progression arithmétique avec $\left|\begin{array}{l} t_1 = 110'000 \\ r = 5'500 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} t_{12} = 110'000 + 11 \cdot 5'500 = 170'500 \\ S_{12} = 6 \cdot \left(110'000 + 170'500\right) = 1'683'000 \end{array}\right.$$

2e contrat : Progression géométrique avec $\left|\begin{array}{l} t_1 = 100'000 \\ q = 1,055 \end{array}\right.$

$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} t_{12} = 100'000 \cdot 1,055^{11} = 180'209.25 \\ S_{12} = 100'000 \frac{1-1,055^{12}}{1-1,055} = 1'638'559.05 \end{array}\right.$$

22. $\left|\begin{array}{l} t_1 = 28'500 \\ q = 0,85 \\ t_6 = ? \end{array}\right.$ $\quad t_6 = 28'500 \cdot 0,85^5 = 12'645.60$

t_1
$\updownarrow$ progression géométrique $q = \frac{8}{7}$

23. t_8
$\updownarrow$ Progression arithmétique $r = 24'500$
t_{14}
On donne $t_9 = 85'616$ calculer t_1 et le bénéfice total des 14 années

$t_8 = t_9 - r = 85'616 - 24'500 = 61'116 \quad t_1 = \frac{t_8}{q^7} = \frac{61'116}{\left(\frac{8}{7}\right)^7} = 24'000.-$

Somme des huit premières années : $S' = 24'000\frac{1-\left(\frac{8}{7}\right)^8}{1-\frac{8}{7}} = 320'927.95$

Somme de la 9^e à la 14^e année : $S'' = \frac{6}{2}\left(2\cdot 85'616 + (6-1)\cdot 24'500\right) = 881'196$

Bénéfice total : $S = S' + S'' = 320'927.95 + 881'196 = 1'202'123.95$

24. a) $32'000 = 12'000 + (n-1)1250 \Rightarrow n = 17$

b) $675'000 = \frac{n}{2}\left(2\cdot 12'000 + (n-1)1'250\right)$
$1'350'000 = 24'000\cdot n + 1'250\cdot n^2 - 1'250\cdot n$
$0 = 1'250n^2 + 22'750\cdot n - 1'350'000$
$n' = -43.5 \Rightarrow$ refusée
$n'' = 25$ semaines

25. a) $t_{10} = 92'195\cdot 1.3718^9 = 1'586'078$

b) $S_{10} = 92'195\frac{1.3718^{10}-1}{1.3718-1} = 5'604'053$

c) $10'000'000 = 92'195\frac{1.3718^n-1}{1.3718-1} \Rightarrow n = 11.7 \approx 12$