LA FONCTION DU SECOND DEGRE

1. ÉTUDIER LES SIGNES DES TRINOMES SUIVANTS :

1. $+ \quad 1 \quad - \quad 6 \quad + \quad x$
2. $- \quad 1 \quad + \quad 2 \quad - \quad x$
3. $+ \quad \frac{1}{2} \quad + \quad x$
4. $+ \quad x$
5. $- \quad 3 \quad + \quad 4 \quad - \quad x$
6. $- \quad \frac{1}{5} \quad - \quad x$
7. $+ \quad -\frac{7}{2} \quad - \quad -\frac{1}{2} \quad + \quad x$
8. $+ \quad 0 \quad + \quad x$
9. $- \quad x$
10. $- \quad -\frac{2}{3} \quad - \quad x$
11. $+ \quad -\frac{1}{3} \quad - \quad 2 \quad + \quad x$
12. $- \quad -5 \quad + \quad \frac{7}{6} \quad - \quad x$
13. $+ \quad -8 \quad - \quad 2 \quad + \quad x$
14. $- \quad \frac{1}{2} \quad + \quad 4 \quad - \quad x$
15. $+ \quad \frac{5}{8} \quad + \quad x$
16. $+ \quad x$

2. CALCULER LES COORDONNEES DE L'EXTREMUM DES FONCTIONS SUIVANTES, INDIQUER S'IL S'AGIT D'UN MAXIMUM OU D'UN MINIMUM :

1. $(\alpha;\beta)=\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$, min
2. $(\alpha;\beta)=\left(\frac{1}{10};\frac{41}{20}\right)$, max
3. $(\alpha;\beta)=\left(\frac{1}{2};-\frac{81}{4}\right)$, min
4. $(\alpha;\beta)=\left(-3;\frac{13}{2}\right)$, max
5. $(\alpha;\beta)=\left(-\frac{4}{3};\frac{19}{3}\right)$, max
6. $(\alpha;\beta)=\left(-1;-\frac{13}{4}\right)$, min
7. $(\alpha;\beta)=\left(\frac{1}{4};\frac{95}{24}\right)$, min
8. $(\alpha;\beta)=\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$, min
9. $(\alpha;\beta)=\left(\frac{5}{3};\frac{7}{3}\right)$, max

3. ÉTUDIER COMPLETEMENT LES FONCTIONS SUIVANTES :

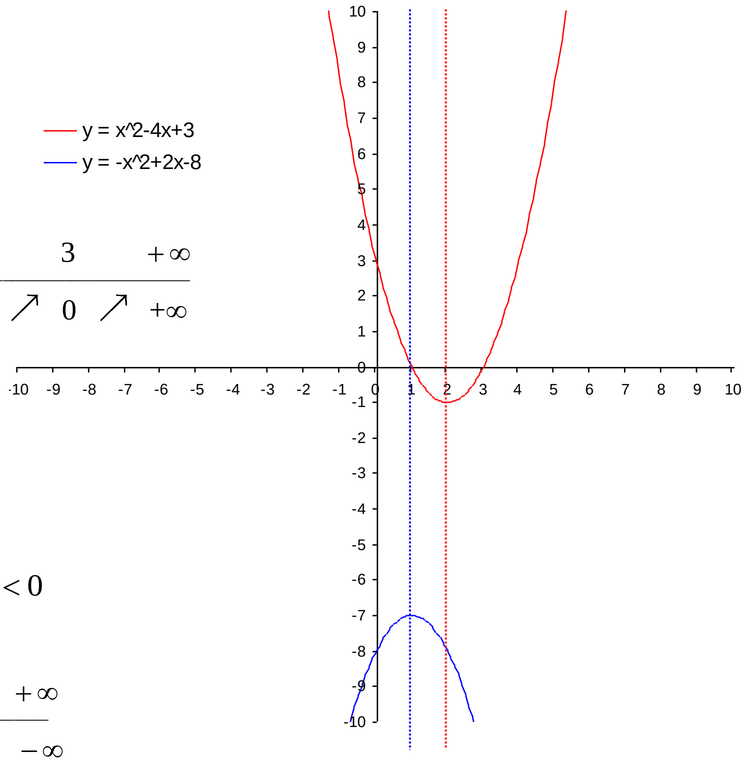
1. $y = x^2 - 4x + 3$

- Axe de symétrie : $\alpha = 2$
- Minimum : $(\alpha;\beta) = (2;-1)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;3)$
- Zéro de fonction : $(1;0)$ et $(3;0)$
- Signe :

x		1		3	
signe	+	0	−	0	+

- TV :

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	3	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$



2. $y = -x^2 + 2x - 8$

- Axe de symétrie : $\alpha = 1$
- Maximum : $(\alpha;\beta) = (1;-7)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;-8)$
- Zéro de fonction : pas de zéro car $\Delta < 0$
- Signe :

x	
signe	−

- TV :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	-8	↗	-7	↘	$-\infty$

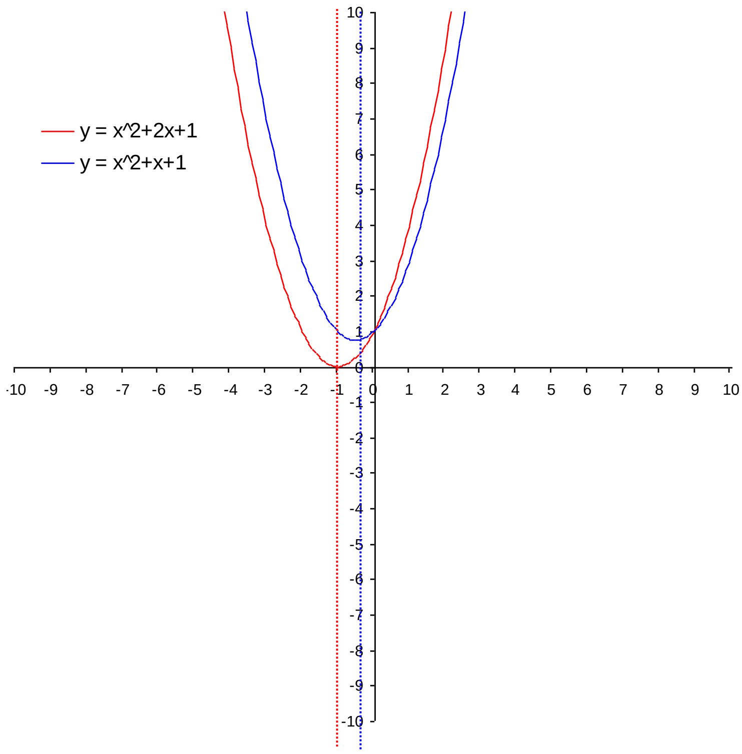
3. $y = x^2 + 2x + 1$

- Axe de symétrie : $\alpha = -1$
- Minimum : $(\alpha;\beta) = (-1;0)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;1)$
- Zéro de fonction : $(-1;0)$
- Signe :

x		-1	
signe	+	0	+

- TV :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	1	↗	$+\infty$



4. $y = x^2 + x + 1$

- Axe de symétrie : $\alpha = -\frac{1}{2}$
- Minimum : $(\alpha;\beta) = \left(-\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;1)$
- Zéro de fonction : pas de zéro car $\Delta < 0$
- Signe :

x	
signe	+

- TV :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$\frac{3}{4}$	↗	1	↗	$+\infty$

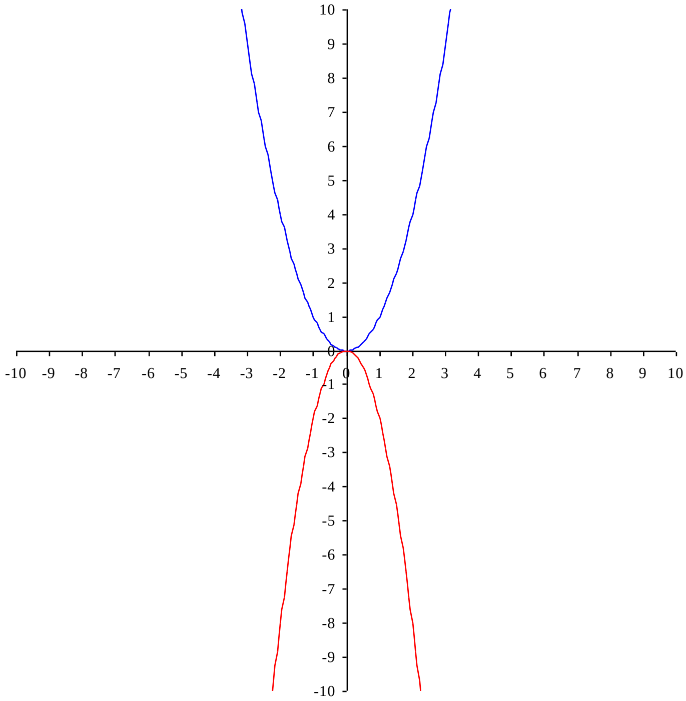
5. $y = x^2$

- Axe de symétrie : $\alpha = 0$
- Minimum : $(\alpha;\beta) = (0;0)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;0)$
- Zéro de fonction : $(0;0)$
- Signe :

$+$	0	$+$	$\longrightarrow x$	( )

- TV :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



6. $y = -2x^2$

- Axe de symétrie : $\alpha = 0$
- Maximum : $(\alpha;\beta) = (0;0)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;0)$
- Zéro de fonction : $(0;0)$
- Signe :

$-$	0	$-$	$\longrightarrow x$

- TV :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

7. $y = x^2 - 4$

- Axe de symétrie : $\alpha = 0$
- Minimum : $(\alpha;\beta) = (0;-4)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;-4)$
- Zéro de fonction : $(-2;0)$ et $(2;0)$
- Signes :

$+$	-2	$-$	2	$+$	$\longrightarrow x$
	0		0		

- TV :

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

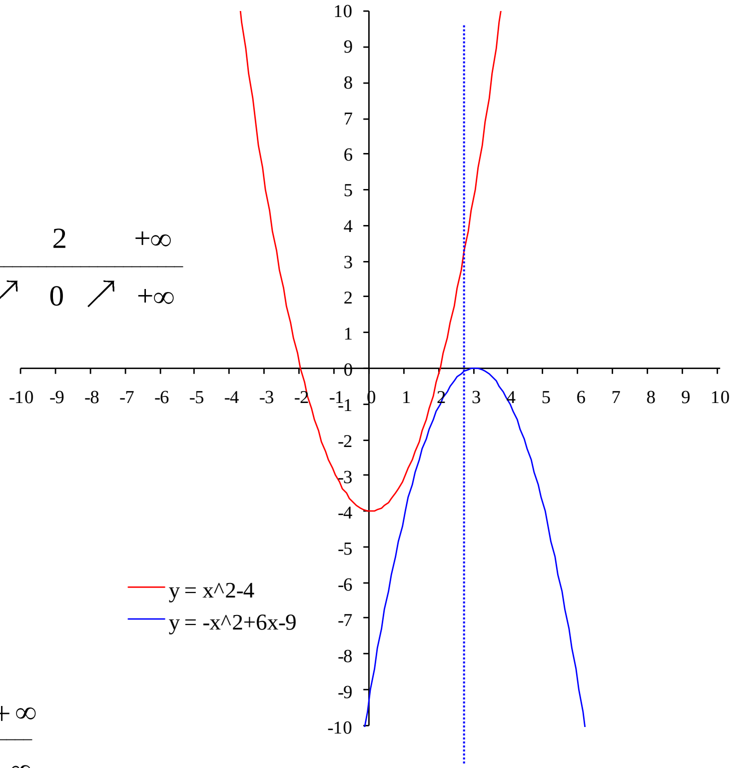
8. $y = -x^2 + 6x - 9$

- Axe de symétrie : $\alpha = 3$
- Maximum : $(\alpha;\beta) = (3;0)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;-9)$
- Zéro de fonction : $(3;0)$
- Signes :

$-$	3	$-$	$\longrightarrow x$
	0		

- TV :

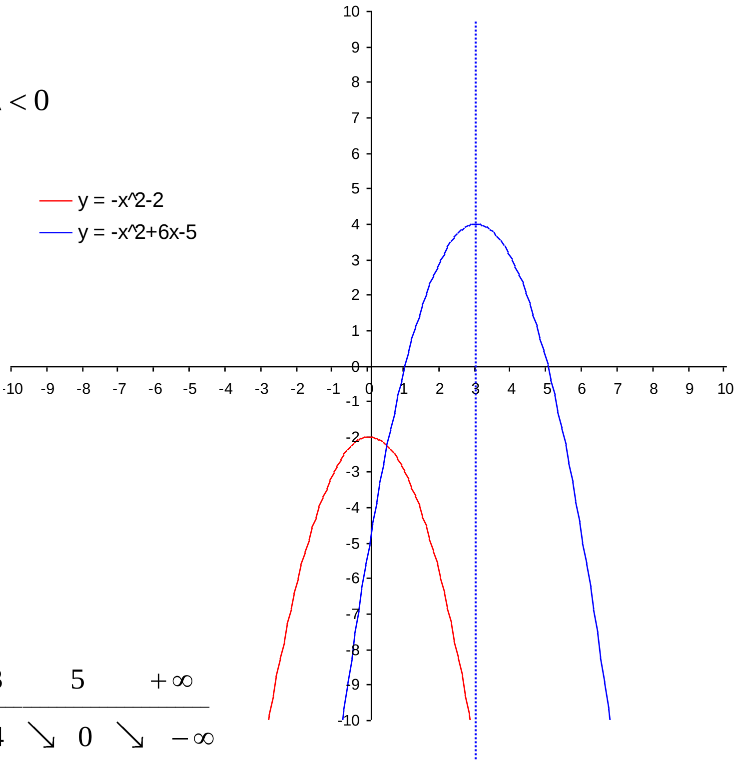
x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-9	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$



9. $y = -x^2 - 2$

- Axe de symétrie : $\alpha = 0$
- Maximum : $(\alpha;\beta) = (0;-2)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;-2)$
- Zéro de fonction : pas de zéro car $\Delta < 0$
- Signe : $\underset{-}{\longrightarrow}\ x$
- TV :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$



10. $y = -x^2 + 6x - 5$

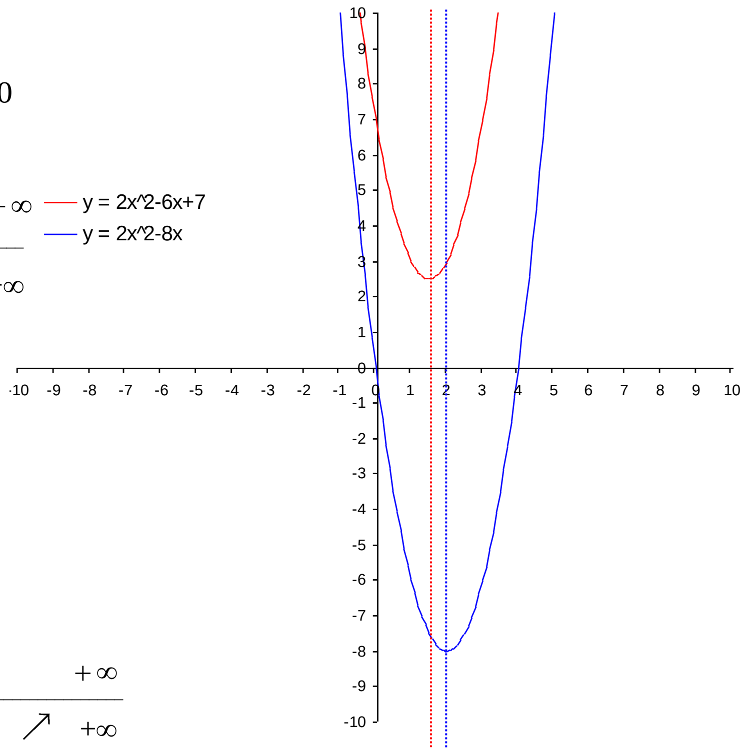
- Axe de symétrie : $\alpha = 3$
- Maximum : $(\alpha;\beta) = (3;4)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;-5)$
- Zéro de fonction : $(1;0)$ et $(5;0)$
- Signe : $\underset{-}{\longrightarrow}\ \underset{0}{\overset{1}{|}}\ \overset{+}{\longrightarrow}\ \underset{0}{\overset{5}{|}}\ \underset{-}{\longrightarrow}\ x$
- TV :

x	$-\infty$		0		1		3		5		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	-5	$\nearrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

11. $y = 2x^2 - 6x + 7$

- Axe de symétrie : $\alpha = \frac{3}{2}$
- Minimum : $(\alpha;\beta) = \left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;7)$
- Zéro de fonction : pas de zéro car $\Delta < 0$
- Signe : $\overset{+}{\longrightarrow}\ x$
- TV :

x	$-\infty$		0		$3/2$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	7	$\searrow$	$5/2$	$\nearrow$	$+\infty$



12. $y = 2x^2 - 8x$

- Axe de symétrie : $\alpha = 2$
- Minimum : $(\alpha;\beta) = (2;-8)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;0)$
- Zéro de fonction : $(0;0)$ et $(4;0)$
- Signe : $\overset{+}{\longrightarrow}\ \underset{0}{\overset{0}{|}}\ \underset{-}{\longrightarrow}\ \underset{0}{\overset{4}{|}}\ \overset{+}{\longrightarrow}\ x$
- TV :

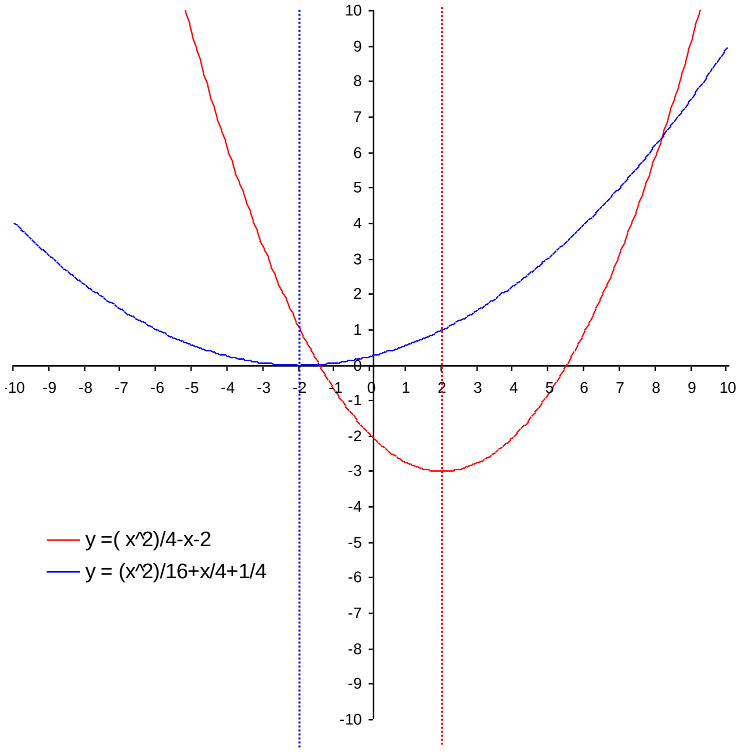
x	$-\infty$		0		2		4		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	-8	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

13. $y=\frac{x^2}{4}-x-2$

- Axe de symétrie : $\alpha=2$
- Minimum : $(\alpha;\beta)=(2;-3)$
- Ordonnée à l'origine : $(0;-2)$
- Zéro de fonction : $\left(2-2\sqrt{3};0\right)$ et $\left(2+2\sqrt{3};0\right)$
- Signe : $\begin{array}{ccccc} + & 2-2\sqrt{3} & & 2+2\sqrt{3} & + \\ \hline & 0 & - & 0 & \rightarrow x \end{array}$
- TV : $\begin{array}{c|ccccccccccc} x & -\infty & & x' & & 0 & & 2 & & x'' & & +\infty \\ \hline y & +\infty & \searrow & 0 & \searrow & -2 & \searrow & -3 & \nearrow & 0 & \nearrow & +\infty \end{array}$

14. $y=\frac{x^2}{16}+\frac{x}{4}+\frac{1}{4}$

- Axe de symétrie : $\alpha=-2$
- Minimum : $(\alpha;\beta)=(-2;0)$
- Ordonnée à l'origine : $\left(0;\frac{1}{4}\right)$
- Zéro de fonction : $(-2;0)$
- Signe : $\begin{array}{ccc} + & -2 & + \\ \hline & 0 & \rightarrow x \end{array}$
- TV : $\begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -2 & & 0 & & +\infty \\ \hline y & +\infty & \searrow & 0 & \searrow & 1/4 & \nearrow & +\infty \end{array}$



4. TROUVER LES COEFFICIENTS M ET N DE LA FONCTION $y = x^2 + mx + n$:

1. Si elle admet pour x = – 2 un minimum égal à 3

$$\begin{cases}\alpha = -2\\ \beta = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-m}{2} = -2\\ \beta = \dfrac{-\Delta}{4a} = -\dfrac{m^2-4n}{4} = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m = 4\\ -\dfrac{4^2-4n}{4} = 3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m = 4\\ n = 7\end{cases} \Leftrightarrow y = x^2 + 4x + 7$$

2. Si elle admet 2 pour zéro de fonction et devient minimum pour $x = \dfrac{5}{4}$

$$\begin{cases}x' = 2\\ \alpha = \dfrac{5}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^2 + 2m + n = 0\\ -\dfrac{m}{2} = \dfrac{5}{4}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 + 2\left(-\dfrac{5}{2}\right) + n = 0\\ m = -\dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n = 1\\ m = -\dfrac{5}{2}\end{cases} \Leftrightarrow y = x^2 - \dfrac{5}{2}x + 1$$

3. Si elle admet 1 pour zéro de fonction et un minimum égal à $\beta = -9$

$$\begin{cases}x' = 1\\ \beta = -9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1^2 + m + n = 0\\ -\dfrac{m^2-4n}{4} = -9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n = -1 - m\\ m^2 - 4n - 36 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}n = -1 - m\\ m^2 + 4m - 32 = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}m' = 4\\ n' = -5\end{cases} \Leftrightarrow y = x^2 + 4x - 5 \qquad \begin{cases}m'' = -8\\ n'' = 7\end{cases} \Leftrightarrow y = x^2 - 8x + 7$$

4. Si elle admet pour x = 2 un minimum égal à 0

$$\begin{cases}\alpha = 2\\ \beta = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{m}{2} = 2\\ -\dfrac{m^2-4n}{4} = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m = -4\\ 16 - 4n = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m = -4\\ n = 4\end{cases} \Leftrightarrow y = x^2 - 4x + 4$$

5. Si elle admet pour zéros de fonction x' = 2 et x" = 4

$$\begin{cases}x' = 2\\ x'' = 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 + 2m + n = 0\\ 16 + 4m + n = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m = -6\\ n = 8\end{cases} \Leftrightarrow y = x^2 - 6x + 8$$

6. Si elle admet – 50 pour zéro de fonction et devient minimum pour x = – 55

$$\begin{cases}x' = -50\\ \alpha = -55\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-50)^2 - 50m + n = 0\\ -\dfrac{m}{2} = -55\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2500 - 5500 + n = 0\\ m = 110\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}n = 3000\\ m = 110\end{cases} \Leftrightarrow y = x^2 + 110x + 3000$$

7. Si elle admet une ordonnée à l'origine égale à 4 et un minimum égal à $\beta = -\frac{7}{4}$

$$\begin{cases} x = 0 \Leftrightarrow y = 4 \\ \beta = -\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0^2 + 0 + n = 4 \\ -\frac{m^2 - 4n}{4} = -\frac{7}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ m^2 - 16 = 7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 4 \\ m' = \sqrt{23} \text{ ou } m'' = -\sqrt{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 + \sqrt{23}x + 4 \\ y = x^2 - \sqrt{23}x + 4 \end{cases}$$

8. Si elle admet une ordonnée à l'origine égale à 49 et pour racine x' = 21

$$\begin{cases} x = 0 \Leftrightarrow y = 49 \\ x' = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0^2 + 0 + n = 49 \\ 21^2 + 21m + n = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 49 \\ 441 + 21m + 49 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = 49 \\ m = -\frac{70}{3} \end{cases} \Leftrightarrow y = x^2 - \frac{70}{3}x + 49$$

5. Problemes d'optimisation

1. Quelle est la valeur maximale du produit de deux nombres si leur somme doit être égale à 35 ?

Soit x le 1^{er} nombre et $(35 - x)$ le 2^{e} nombre.

$P(x) = x(35 - x) = -x^2 + 35x$

$P(x)$ est une fonction du second degré qui admet un maximum au point $\begin{cases} \alpha = 17.5 \\ \beta = 306.25 \end{cases}$

Les deux nombres sont 17,5 et 17,5 et le produit maximal vaut 306,25.

2. Quelle est la valeur minimale du produit de deux nombres si leur différence doit être égale à 12 ?

Soit x le 1^{er} nombre et $(x - 12)$ le 2^{e} nombre.

$P(x) = x(x - 12) = x^2 - 12x$

$P(x)$ est une fonction du second degré qui admet un minimum au point $\begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -36 \end{cases}$

Les deux nombres sont 6 et – 6 et le produit minimal vaut – 36.

3. Sur la limite nord de son terrain, Louis a une montagne de roc qu'il peut utiliser pour former un des côtés d'un enclos rectangulaire pour ses chiens. Pour les trois autres côtés, il dispose de 80 m de clôture. Quelle est l'aire maximale qu'il peut donner à son enclos ?

   Soit x la largeur et $(80-2x)$ la longueur.

   $A(x)=x(80-2x)=-2x^2+80x$

   $A(x)$ est une fonction du second degré qui admet un maximum au point $\begin{cases}\alpha=20\\ \beta=800\end{cases}$

   Les dimensions de l'enclos sont 20 mètres et 40 mètres et l'aire maximale vaut 800 m^2.

4. On a une longue pièce de fer-blanc de 30 cm de large. Le long de chacun des rebords, on redresse deux bandes de largeurs égales en les ramenant dans une position verticale formant ainsi une gouttière. Quelle doit être la largeur de ces bandes que l'on relève, si l'on veut que la gouttière ait une capacité maximale (aire d'une coupe transversale maximale) ?

   Soit x la largeur et $(30-2x)$ la longueur.

   $A(x)=x(30-2x)=-2x^2+30x$

   $A(x)$ est une fonction du second degré qui admet un maximum au point $\begin{cases}\alpha=7.5\\ \beta=112.5\end{cases}$

   Les dimensions de la gouttière sont 7,5 centimètres et 15 centimètres et l'aire maximale vaut 112,5 cm^2.