DENOMBREMENTS ET PROBABILITES

DENOMBREMENTS

1. Douze joueurs d'échecs participent à un tournoi dans lequel chaque joueur joue une fois contre chacun des autres joueurs. Combien y a-t-il de parties disputées ?
$C_2^{12} = \dfrac{12!}{(12-2)! \cdot 2!} = 66$

2. Combien de mots différents peut-on former avec le mot GENOVA ? $P_6 = 6! = 720$

3. Cinq personnes désirent s'asseoir dans un compartiment de 8 places. Quel est le nombre de possibilités ? $A_5^8 = \dfrac{8!}{(8-5)!} = 6'720$
Même question avec huit personnes. $P_8 = 8! = 40'320$

4. Dans une société de 25 personnes, on doit désigner 4 qui formeront le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ? $C_4^{25} = \dfrac{25!}{(25-4)! \cdot 4!} = 12'650$

5. Dans une société de 25 personnes, on doit désigner un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire ; ces quatre personnes forment le comité. Combien de comités différents peut-on constituer ? $A_4^{25} = \dfrac{25!}{(25-4)!} = 303'600$

6. On distribue les 36 cartes d'un jeu à quatre joueurs. Chacun reçoit 9 cartes. Quel est le nombre de distributions différentes ?
$C_9^{36} \cdot C_9^{27} \cdot C_9^{18} \cdot C_9^{9} = \dfrac{36!}{(36-9)! \cdot 9!} \cdot \dfrac{27!}{(27-9)! \cdot 9!} \cdot \dfrac{18!}{(18-9)! \cdot 9!} \cdot \dfrac{9!}{(9-9)! \cdot 9!} \cong 2.145 \cdot 10^{19}$

7. De combien de façons peut-on choisir 5 cartes à jouer dans un jeu de 36 cartes, de manière que ces 5 cartes comprennent :

   7.1. les 4 as ? $C_4^4 \cdot C_1^{32} = 1 \cdot \dfrac{32!}{(32-1)! \cdot 1!} = 32$

   7.2. 2 as et 2 rois ? $C_2^4 \cdot C_2^4 \cdot C_1^{28} = \left(\dfrac{4!}{(4-2)! \cdot 2!}\right)^2 \cdot \dfrac{28!}{(28-1)! \cdot 1!} = 1008$

   7.3. au moins un as ? total – cartes sans as
   $C_5^{36} - C_5^{32} = \dfrac{36!}{(36-5)! \cdot 5!} - \dfrac{32!}{(32-5)! \cdot 5!} = 175'616$

8. De combien de façons peut-on remplir une feuille de loterie à numéros ?

$$C_6^{45} = \frac{45!}{(45-6)! \cdot 6!} = 8'145'060$$

Combien, parmi toutes ces possibilités, permettent-elles de réaliser 6 points ? 1

Combien, parmi toutes ces possibilités, permettent-elles de réaliser 0 point ?

$$C_6^{39} = \frac{39!}{(39-6)! \cdot 6!} = 3'262'623$$

9. Avec les chiffres de l'ensemble $E = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

9.1. Combien peut-on former de nombres composés de 6 chiffres différents ?

1ère possibilité :

Nombre total de 6 chiffres différents : $A_6^{10} = \frac{10!}{4!} = 151'200$

Nombres de 6 chiffres commençant par 0 :

$A_5^9 = \frac{9!}{4!} = 15'120$ $\left(0 \underleftrightarrow{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} : \text{reste 5 places pour neuf chiffres}\right)$

Nombres de 6 chiffres (sans le zéro au début) :

$A_6^{10} - A_5^9 = 151'200 - 15'120 = 136'080$

2e possibilité :

Nombres de 6 chiffres (avec le zéro au début) : $A_6^{10} = \frac{10!}{4!} = 151'200$

Neuf nombres sur dix ne commencent pas par zéro : $\frac{9}{10} \cdot A_6^{10} = 136'080$

3e possibilité :

Nombres de 6 chiffres sans le zéro : $A_6^9 = \frac{9!}{3!} = 60'480$

Nombre de 6 chiffres avec le zéro :

$5 \cdot A_5^9 = 5 \cdot \frac{9!}{4!} = 75'600$ $\left(\underleftrightarrow{\cdot^0 \cdot^0 \cdot^0 \cdot^0 \cdot^0} \text{ 5 chiffres avec 5 places pour le zéro}\right)$

Total : $60'480 + 75'600 = 136'080$

9.2. Parmi les nombres précédents, combien se terminent par 1 ?

Sans le zéro : $A_5^8 = \frac{8!}{3!} = 6'720$ $\left(\underleftrightarrow{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} 1 : \text{reste 5 place pour 8 chiffres}\right)$

Avec le zéro : $4 \cdot A_4^8 = 4 \cdot \frac{8!}{4!} = 6'720$ $\left(\cdot^0 \cdot^0 \cdot^0 \cdot^0 1 : \text{place pour 4 chiffres sur 8, 4 fois}\right)$

Total : $6'720 + 6'720 = 13'440$

9.3. Combien sont impairs ?

Ce sont ceux qui se terminent par 1, 3, 5, 7, 9 : Il y en a 5 fois plus que ceux qui se terminent par 1
$5 \cdot 13'440 = 67'200$

9.4. Combien sont strictement inférieurs à 300'000 ?

Ce sont ceux qui commencent par 1 et par 2
Nombres commençant par 1, sans le zéro : $A_5^8 = \frac{8!}{3!} = 6'720 \quad \left(1\underleftrightarrow{\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot} : 5 \text{ chiffres sur } 8\right)$
Nombre commençant par 1, avec le zéro :
$5 \cdot A_4^8 = 5 \cdot \frac{8!}{4!} = 8'400 \ \left(1^0 \cdot^0 \cdot^0 \cdot^0 \cdot^0 : \ 4 \text{ chiffres sur 8, 4 fois}\right)$
Total : $6'720 + 8'400 = 15'120$

Nombres commençant par 2 : idem que ceux commençant par 1

Nombres strictement inférieurs à 300'000 : $2 \cdot 15'12 = 30'240$

10. Avec les lettres du mot "MARTIGNY"

10.1. Combien peut-on former de mots de 5 lettres ?
$A_5^8 = \frac{8!}{3!} = 6'720$

10.2. Parmi ceux-ci, combien se terminent par **Y** ?
$A_4^7 = \frac{7!}{3!} = 840 \quad \left(\cdot\cdot\cdot\cdot Y : \text{choix de 4 lettres sur } 7\right)$ 4 lettres sur 7

10.3. Parmi ceux-ci, combien commencent par **M** et se terminent par **Y** ?
$A_3^6 = \frac{6!}{3!} = 120 \quad \left(M \cdots Y : \text{choix de 3 lettres sur } 6\right)$

10.4. Parmi ceux-ci, combien contiennent 3 voyelles (Y est une voyelle) ?
Ces nombres comprennent 3 voyelles (A, I, Y) sur un choix de 3 voyelles (A, I, Y) et de 2 consonnes sur un choix de 5 (M, R, T, G, N).
$C_3^3 \cdot C_2^5 \cdot P_5 = \frac{3!}{(3-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{(5-2)! \cdot 2!} \cdot 5! = 1 \cdot 10 \cdot 120 = 1'200$

10.5. Parmi ceux-ci, combien contiennent exactement 2 voyelles ?
Ces nombres comprennent 2 voyelles sur 3 et 3 consonnes sur 5
$C_2^3 \cdot C_3^5 \cdot P_5 = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} \cdot 5! = 3 \cdot 10 \cdot 120 = 3'600$

10.6. Parmi ceux-ci, combien contiennent au moins deux voyelles ?
Mots avec 3 voyelles + mots avec 2 voyelles
$1'200 + 3'600 = 4'800$

11. Un jeu de cartes contient 36 cartes, 4 couleurs (♣,♦,♥,♠) et 9 symboles (6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as)

11.1. Combien de mains différentes de 9 cartes peut-on obtenir ?

$$C_9^{36} = \frac{36!}{(36-9)!\cdot 9!} = 94'143'280$$

11.2. Parmi ces mains, combien contiennent 4 cœurs

$$C_4^9 \cdot C_5^{27} = \frac{9!}{(9-4)!\cdot 4!} \cdot \frac{27!}{(27-5)!\cdot 5!} = 10'171'980$$

(4 cœurs sur 9 cœurs, plus 5 cartes sur les 27 qui restent)

11.3. Parmi ces mains, combien contiennent 4 cœurs, 3 piques, deux trèfles ?

$$C_4^9 \cdot C_3^9 \cdot C_2^9 = 381'024$$

11.4. Combien ne contiennent pas d'as ? $C_9^{32} = \frac{32!}{(32-9)!\cdot 9!} = 28'048'800$

11.5. Combien contiennent exactement 1 as ?
Je prends 1 as, il reste à distribuer 8 cartes sur 32 (36 - 4 as) pour ne pas en avoir un deuxième. Je peux réaliser cette opération 4 fois puisque je peux prendre l'as de cœur ou l'as de pique...

$$4 \cdot C_8^{32} = 4 \cdot \frac{32!}{(32-8)!\cdot 8!} = 42'073'200$$

11.6. Combien contiennent exactement 2 as ? 3 as? 4 as, au moins 3 as ?

Exactement deux as : $C_2^4 \cdot C_7^{32} = \frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!} \cdot \frac{32!}{(32-7)!\cdot 7!} = 20'195'136$

Exactement 3 as : $C_3^4 \cdot C_6^{32} = 3'624'768$

Exactement 4 as : $C_4^4 \cdot C_5^{32} = C_5^{32} = 201'376$

Au moins trois as : = 3 as + 4 as $= 3'624'768 + 201'376 = 3'826'144$, ou
= Total - zéro as - 1 as - 2 as

$$= 94'193'200 - 28'048'800 - 42'073'200 - 20'195'136 = 3'876'144$$

12. Pour mettre sur pied la course d'école d'une classe de 20 élèves, six organisateurs doivent être choisis parmi les élèves.

12.1. Combien y a-t-il de possibilités ? $C_6^{20} = 38'760$

12.2. Sachant qu'il y a 9 filles dans la classe, combien de possibilités seront-elles mixtes ?

$$C_6^{20} - C_6^9 \cdot C_0^{11} - C_0^9 \cdot C_6^{11} = 38'214$$

12.3. Seulement composées de filles ? $C_6^9 \cdot C_0^{11} = 84$

13. Un étudiant doit résoudre 8 problèmes sur 10 lors d'une épreuve écrite.

13.1. Combien de choix différents peut-il faire ? $C_8^{10} = 45$

Même question en supposant qu'il doive obligatoirement résoudre :

13.2. les 3 premiers problèmes $C_3^3 \cdot C_5^7 = 21$

13.3. 4 exactement des 5 premiers problèmes $C_4^5 \cdot C_4^5 = 25$

PROBABILITES

14. Une seule carte est tirée d'un jeu de 52 cartes, calculer la probabilité que la carte soit :

14.1. Un as : $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

14.2. Un as de couleur rouge : $\frac{2}{52} = \frac{1}{26}$

14.3. Un roi ou une reine : $\frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$

14.4. Un roi une reine ou un valet : $\frac{4}{52} + \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

14.5. Un trèfle ou un carreau : $\frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

14.6. Un cœur ou un carreau ou un pique : $\frac{13}{52} + \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{39}{52} = \frac{3}{4}$

15. Un seul dé est lancé, calculer la probabilité que le résultat soit :

15.1. un 5 : $\frac{1}{6}$ 15.2. un 2 ou un 3 : $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ 15.3. un nombre pair : $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

16. Une urne contient cinq balles rouges, six balles vertes et quatre balles blanches. Si une seule balle est extraite de l'urne, calculer la probabilité que la balle soit :

16.1. rouge : $\frac{5}{15}=\frac{1}{3}$

16.2. verte : $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$

16.3. rouge ou blanche : $\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$

16.4. verte ou blanche : $\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$

17. Un jeu de cartes contient 36 cartes, 4 couleurs (♣, ♦, ♥, ♠) et 9 symboles (6, 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as). De ce jeu on tire une main de 9 cartes, calculer la probabilité que parmi ces différentes mains :

17.1. Une contienne exactement 6 trèfles :

$$\frac{C_6^9\cdot C_3^{27}}{C_9^{36}}=\frac{\frac{9!}{(9-6)!\cdot 6!}\cdot\frac{27!}{(27-3)!\cdot 3!}}{\frac{36!}{(36-9)!\cdot 9!}}=\frac{245'000}{94'143'280}\cong 0.0026$$

17.2. Une contienne les quatre valets : $\frac{C_4^4\cdot C_5^{32}}{C_9^{36}}=\frac{\frac{32!}{(32-5)!\cdot 5!}}{\frac{36!}{(36-9)!\cdot 9!}}=\frac{201'376}{94'143'280}\cong 0.0021$

17.3. Une ne contienne pas de cœur : $\frac{C_9^{27}}{C_9^{36}}=\frac{\frac{27!}{(27-9)!\cdot 9!}}{\frac{36!}{(36-9)!\cdot 9!}}=\frac{4'686'825}{94'143'280}\cong 0.049$

17.4. Une contienne exactement deux rois et deux reines :

$$\frac{C_2^4\cdot C_2^4\cdot C_5^{28}}{C_9^{36}}=\frac{\left(\frac{4!}{(4-2)!\cdot 2!}\right)^2\cdot\frac{28!}{(28-5)!\cdot 5!}}{\frac{36!}{(36-9)!\cdot 9!}}=\frac{3'538'080}{94'143'280}\cong 0.0375$$

18. Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut former une commission de 7 membres. Quelle est la probabilité que cette commission comprenne 5 députés ?

$$\frac{C_5^{10}\cdot C_2^6}{C_7^{16}}\cong 0.3304$$

19. Calculer la probabilité que l'on tire d'un jeu de 36 cartes

19.1. un as ou un roi : $\frac{4}{36}+\frac{4}{36}=\frac{8}{36}=\frac{2}{9}$

19.2. un as ou un cœur : $\frac{4}{36}+\frac{9}{36}-\frac{1}{36}=\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$

19.3. un as ou une carte rouge : $\frac{4}{36}+\frac{18}{36}-\frac{2}{36}=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

19.4. un as ou un roi ou un cœur : $\frac{4}{36}+\frac{4}{36}+\frac{9}{36}-\frac{2}{36}=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

19.5. un as ou un roi ou une carte rouge : $\frac{4}{36}+\frac{4}{36}+\frac{18}{36}-\frac{4}{36}=\frac{22}{36}=\frac{11}{18}$

20. Dans une assemblée de 25 dames et 15 messieurs, il est décidé de nommer un comité de 5 personnes .

20.1. Quelle est la probabilité que ce comité comprennent 3 dames ? $\frac{C_3^{25}\cdot C_2^{15}}{C_5^{40}}\cong 0.367$

20.2. Quelle est la probabilité que ce comité comprennent au moins 3 dames ?

$$\frac{C_3^{25}\cdot C_2^{15}+C_4^{25}\cdot C_1^{15}+C_5^{25}\cdot C_0^{15}}{C_5^{40}}\cong 0.736$$

21. L'Euromillions consiste à cocher 5 numéros parmi 50 et 2 étoiles parmi 9.
Quelle est la probabilité de cocher 3 bons numéros et une bonne étoile ?

$$\frac{C_3^{5}\cdot C_2^{45}\cdot C_1^{2}\cdot C_1^{7}}{C_5^{50}\cdot C_2^{9}}\cong 0.0018$$

22. Avec les lettres du mot ZURICH, on forme des mots de 4 lettres.

22.1. Quelle est la probabilité que ces mots commencent par R ? $\frac{A_3^5}{A_4^6}\cong 0.167$

22.2. Quelle est la probabilité que ces mots commencent par CH ? $\frac{A_2^4}{A_4^6}\cong 0.033$

22.3. Quelle est la probabilité que ces mots contiennent exactement les 2 voyelles ?

$$\frac{C_2^{2}\cdot C_2^{4}\cdot P_4}{A_4^6}\cong 0.4$$