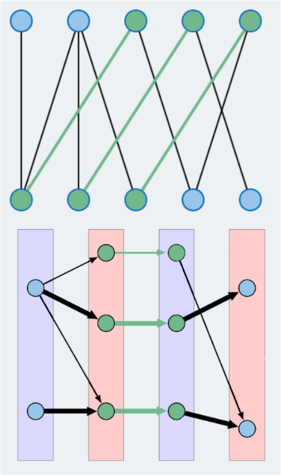
Utrzymywanie skojarzeń w grafach dwudzielnych online

Uniwersytet Warszawski

10 maj 2024

Algorytm Hopcrofta i Karpa

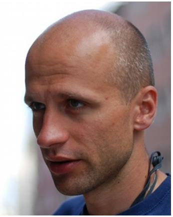


- wymyślony w 1980 roku
- czas działania $\mathcal{O}(m\sqrt{n})$
- mocno opiera się na tym że algorytm od początku widzi cały graf

Jak to się zaczęło

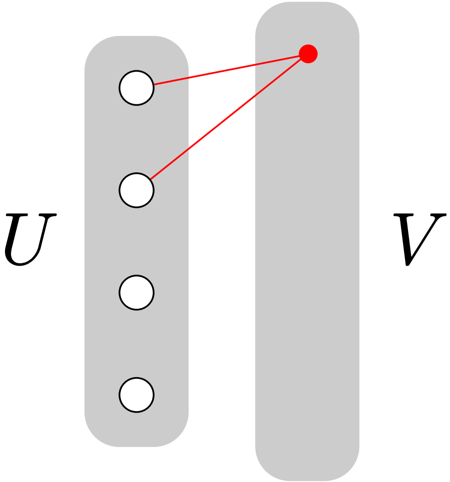
Dariusz Leniowski

Piotr Sankowski

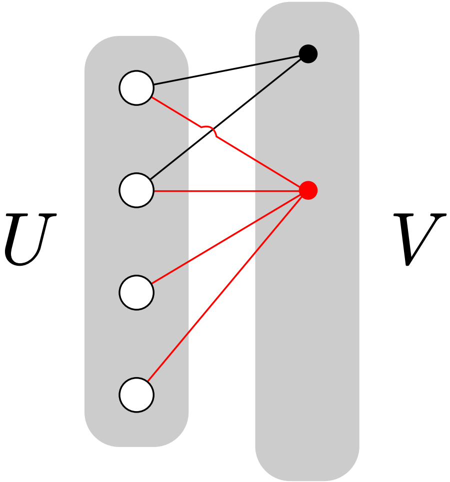


Bartłomiej Bosek

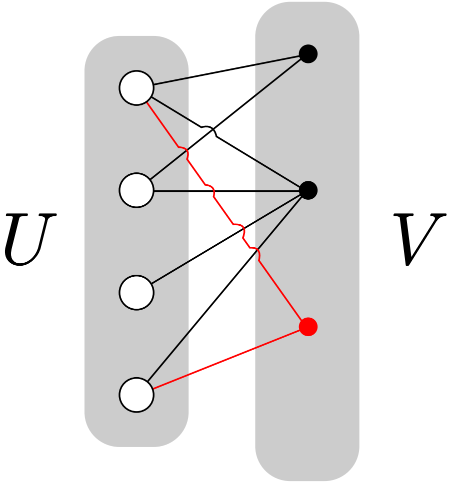
Grafy dwudzielne online



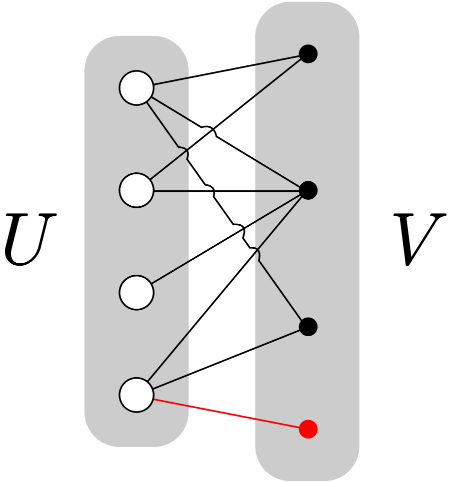
Grafy dwudzielne online



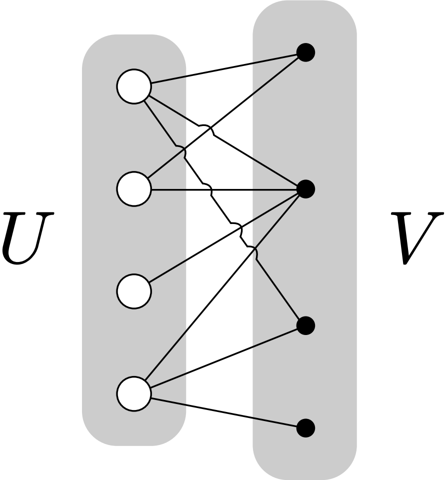
Grafy dwudzielne online



Grafy dwudzielne online



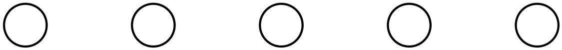
Grafy dwudzielne online



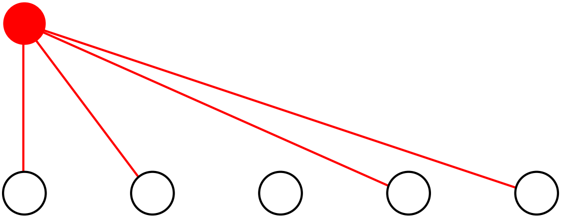
Rozważany problem

- Dany jest dwudzielny graf $G = \langle U \uplus V, E \rangle$ odkrywany w trakcie działania algorytmu.
- Wierzchołki z U są znane od początku.
- Wierzchołki z V są podawane jeden na turę, każdy ze wszystkimi swoimi krawędziami.
- Chcemy utrzymywać skojarzenie o największej liczności, oraz na ile to możliwe, zminimalizować liczbę przepięć.

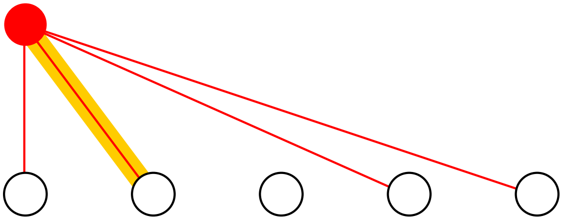
Przykład



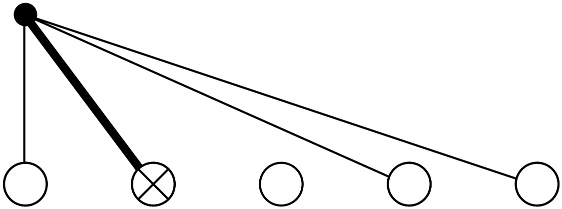
Przykład



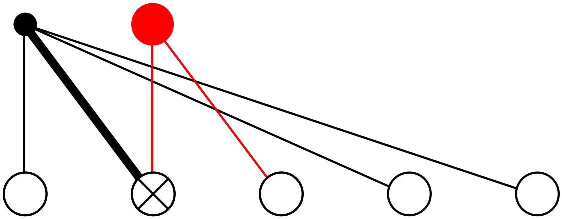
Przykład



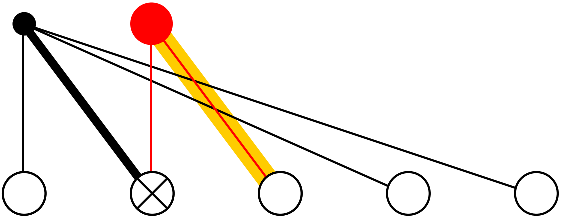
Przykład



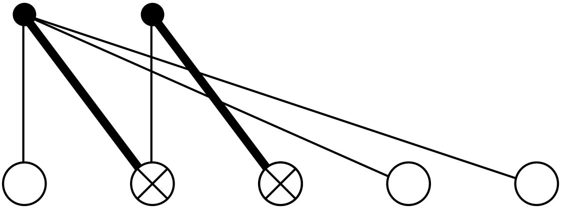
Przykład



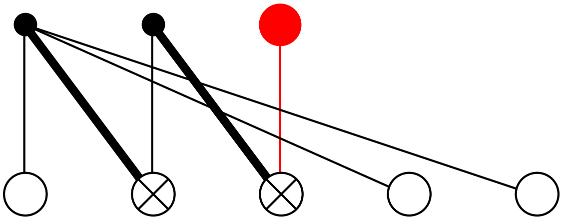
Przykład



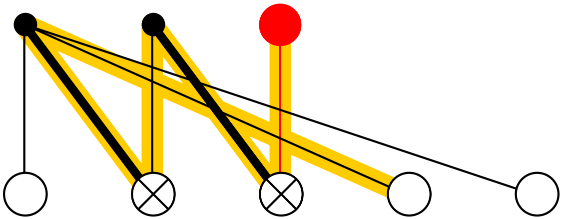
Przykład



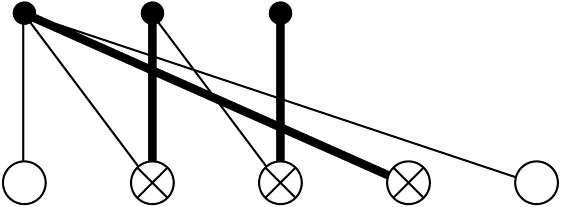
Przykład



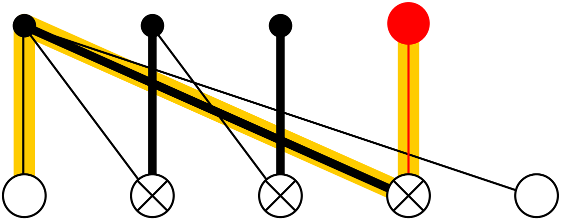
Przykład



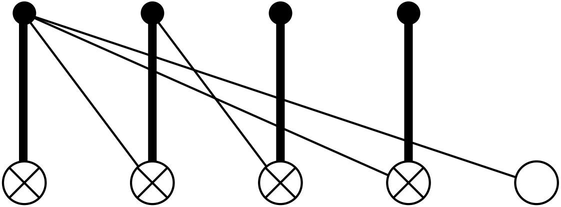
Przykład



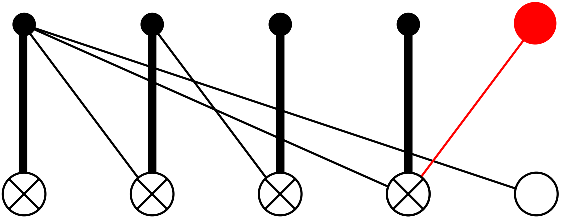
Przykład



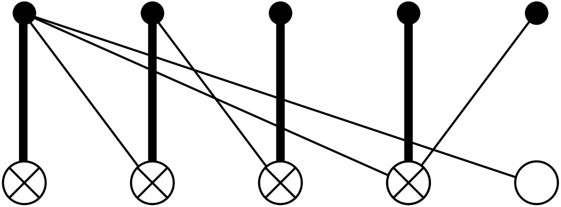
Przykład



Przykład



Przykład



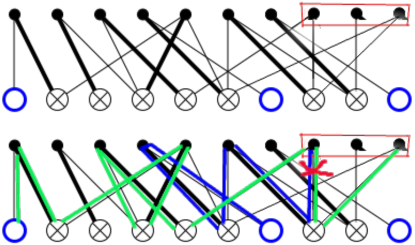
Kontekst naukowy

- Grove, Kao, Krishnan i Vitter, ’95:
  co najwyżej 2 serwery na zlecenie przy $O(\log n)$ przepięciach na wierzchołek, $O(n \log n)$ w sumie.

- Chaudhuri, Daskalakis, Kleinberg i Lin ’09:
  grafy losowe,
  sumaryczne ograniczenie $O(n \log n)$.

- Przypadek ogólny:
  jedynie trywialne ograniczenie $O(n^2)$.

Model losowego pojawiania się



- k nieskojarzonych serwerów
- k rozłącznych ścieżek powiększających
- $E[\text{najkr. ść. pow}] \leq \frac{n}{k}$

Główne wyniki

- Łączna liczba zmian $O(n \cdot n^{1/2})$

Główne wyniki

- Łączna liczba zmian $O(n \cdot n^{1/2})$
- Algorytm działający w łącznym czasie $O(mn^{1/2})$

Główny pomysł

- Dla każdego $u \in U$ utrzymujemy jego *rangę*, czyli ile razy został użyty przez ścieżki powiększające do tej pory.
- Dla nowo odkrytego wierzchołka z V szukamy ścieżki powiększającej, która minimalizuje rangę każdego jej sufiksu.

Rangi i poziomy

Ranga

Dla wierzchołka $u \in U$

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}_t(u) &= \text{ile razy ścieżki powiększające użyły } u, \\ \mathrm{rank}_t(P) &= \max_{u \in P} \mathrm{rank}_t(u). \end{aligned}$$

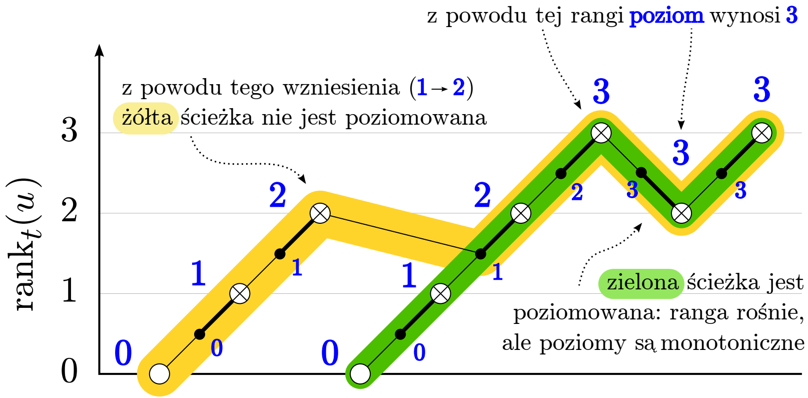
Poziom

Dla wierzchołka $w \in V \uplus U$,

$$\begin{aligned} \mathrm{tier}_t(w) &= \text{najniższa możliwa ranga ścieżki alternującej} \\ &\qquad \text{kończącej się w nieskojarzonym } u \in U \\ &= \min_{\text{nieskojarzony } u \in U} \; \min_{\text{ścieżka alternująca } P \,:\, w \to u} \mathrm{rank}_t(P). \end{aligned}$$

Ścieżki poziomowane

Ścieżkę nazywamy *poziomowaną* jeżeli poziomy wierzchołków wzdłuż niej nie rosną.



Poziomy — kilka faktów

Jeśli algorytm używa tylko poziomowanych ścieżek to:

- Poziomy nie maleją z czasem.
- $\text{tier}(w) \leq \text{dist}_{\text{ALT}}(w, \text{nieskojarzony } u)$.
- **TW:** Rangi są ograniczone przez $O(n^{\frac{1}{2}})$.

Dowód — szkic

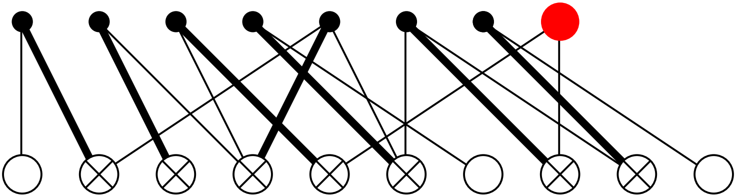
1. Rozważamy zbiór rozłącznych wierzchołkowo ścieżek zaczynających się w nieskojarzonych wierzchołkach $u \in U$.

2. Dowodzimy, że istnieje moment i zbiór ścieżek takie, że suma ich długości jest rzędu $\Omega(\text{maxrank}^2)$.

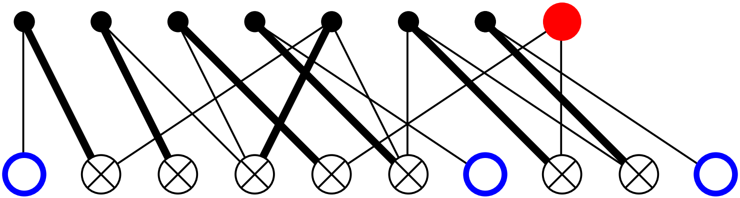
3. Ścieżki są wierzchołkowo rozłączne, więc

$$\text{maxrank} = O(\sqrt{n}).$$

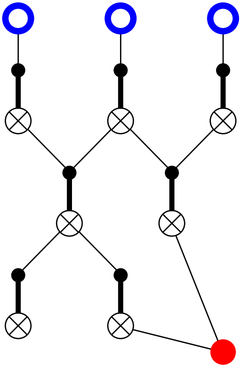
Zbiór ścieżek



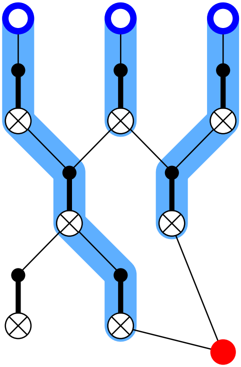
Zbiór ścieżek



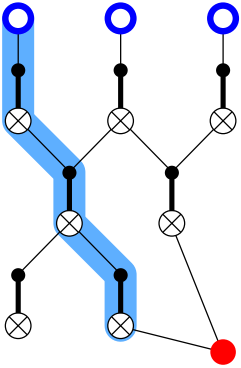
Zbiór ścieżek

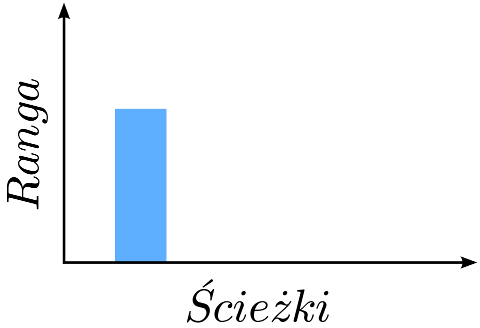


Zbiór ścieżek

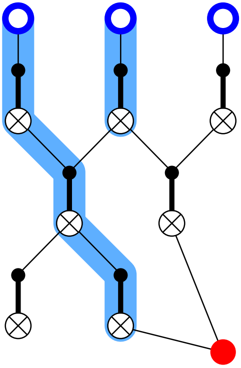


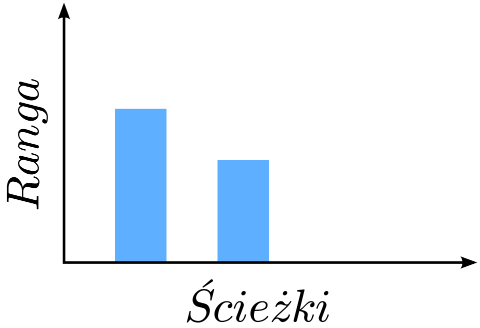
Zbiór ścieżek



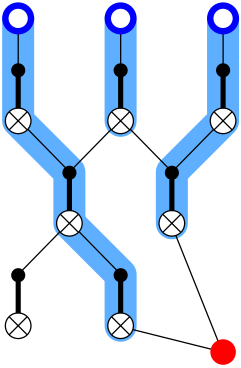


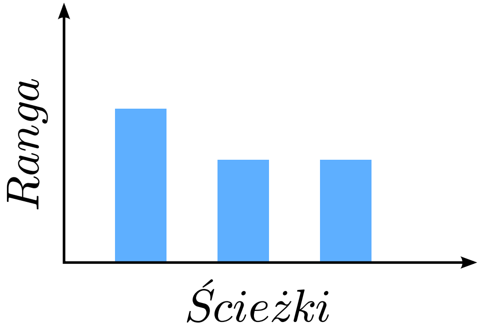
Zbiór ścieżek



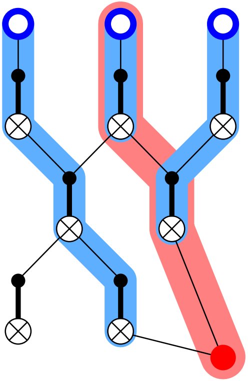


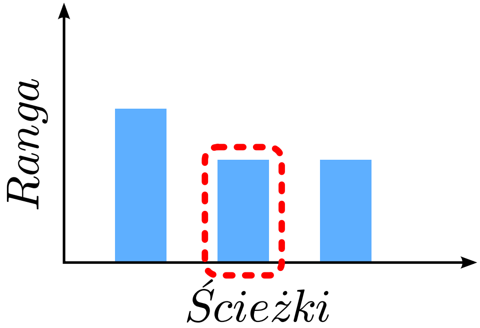
Zbiór ścieżek



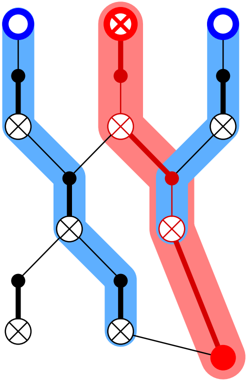


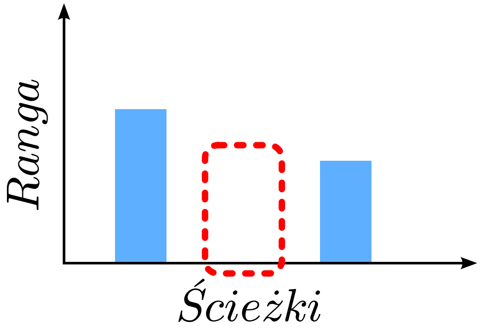
Kojarzenie wierzchołka



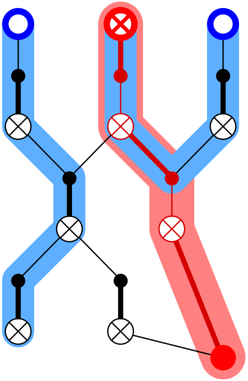


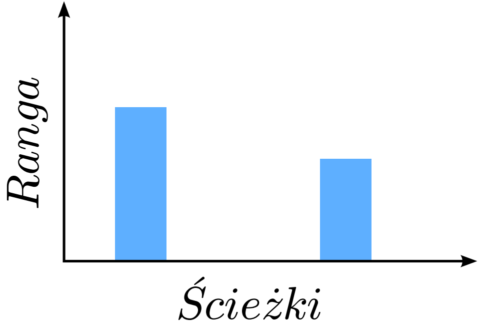
Kojarzenie wierzchołka



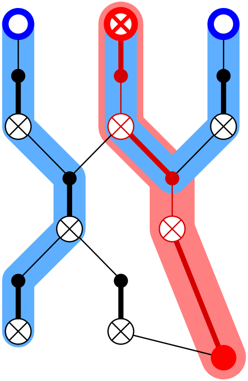


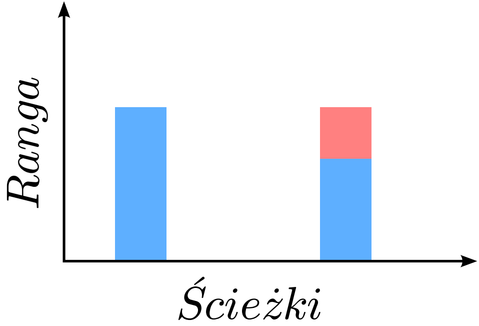
Nowy zbiór ścieżek



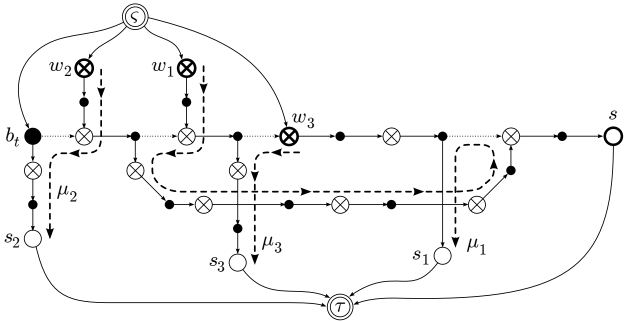


Nowy zbiór ścieżek

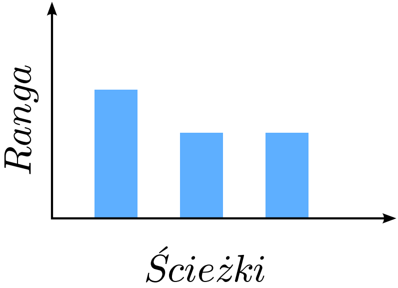




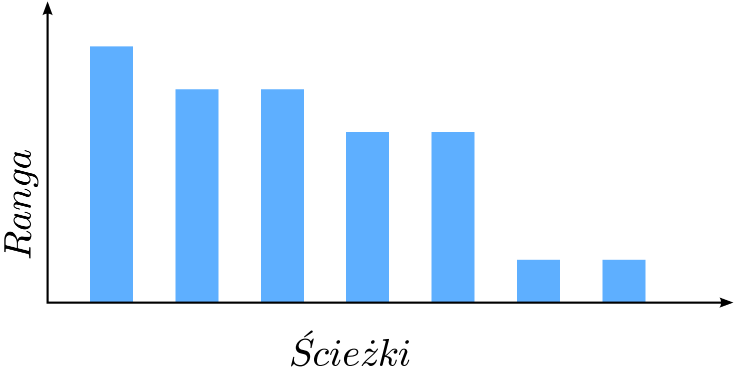
Dowód



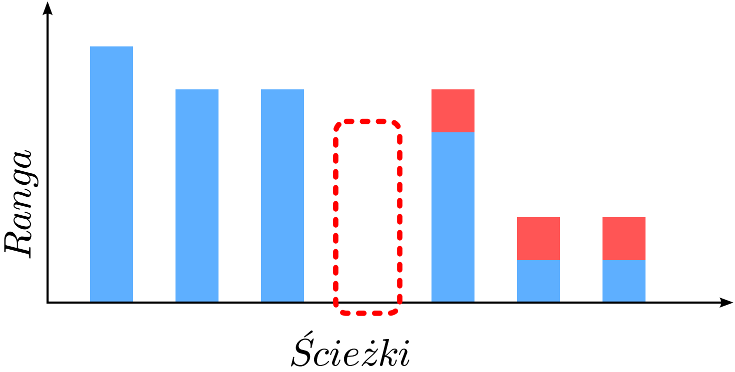
Większy przykład



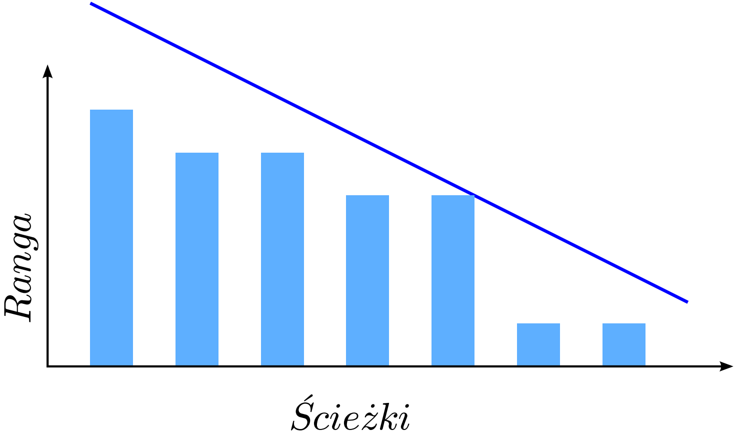
Większy przykład



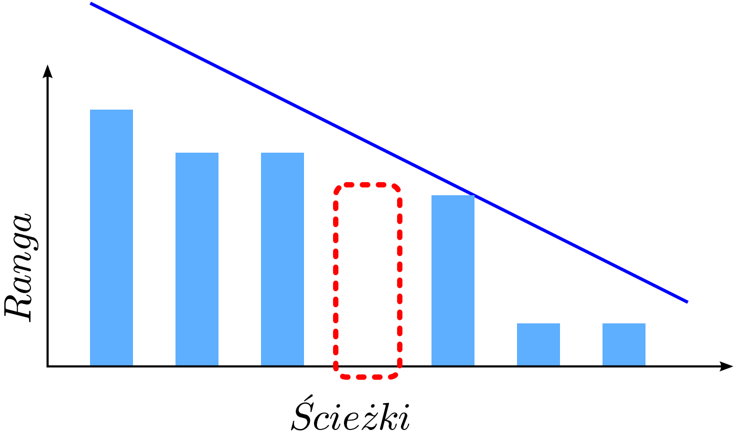
Większy przykład



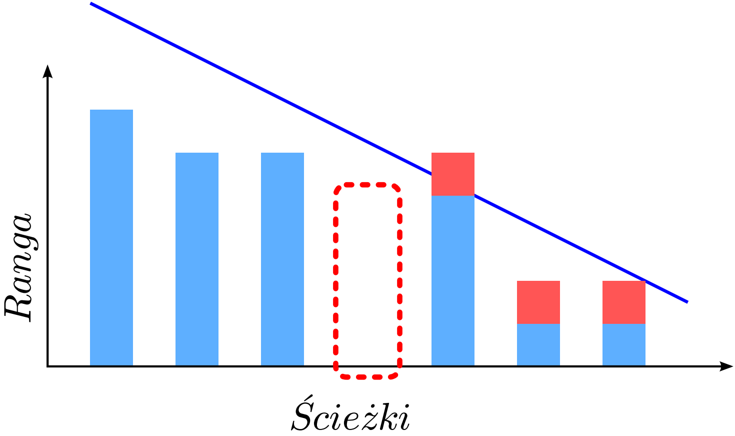
Większy przykład



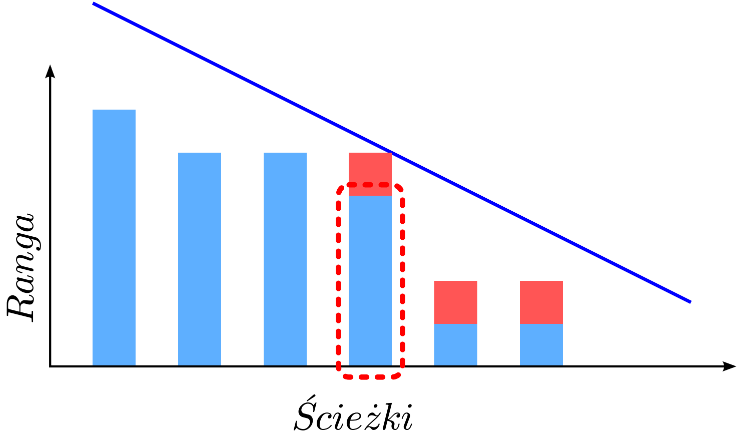
Większy przykład



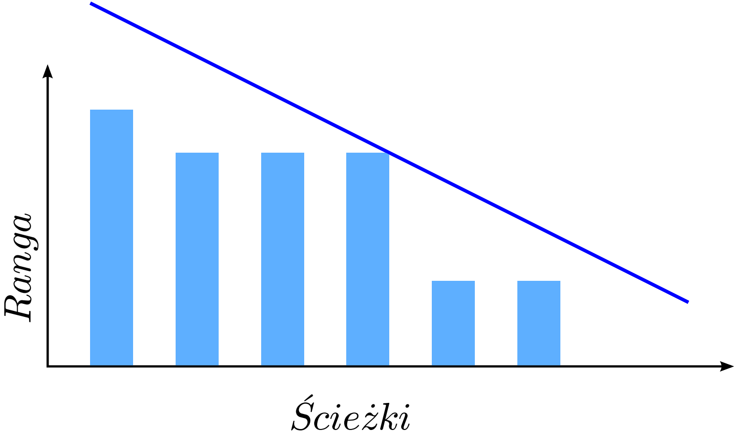
Większy przykład



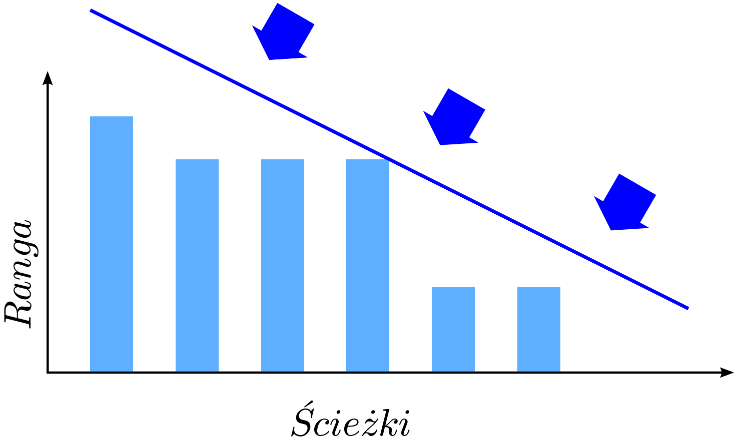
Większy przykład



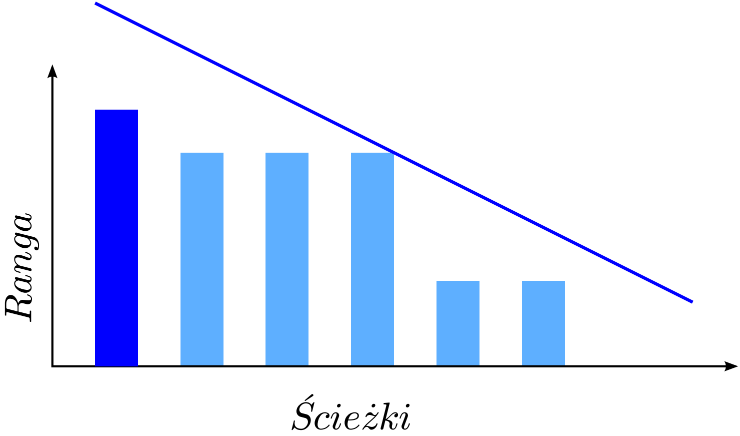
Większy przykład



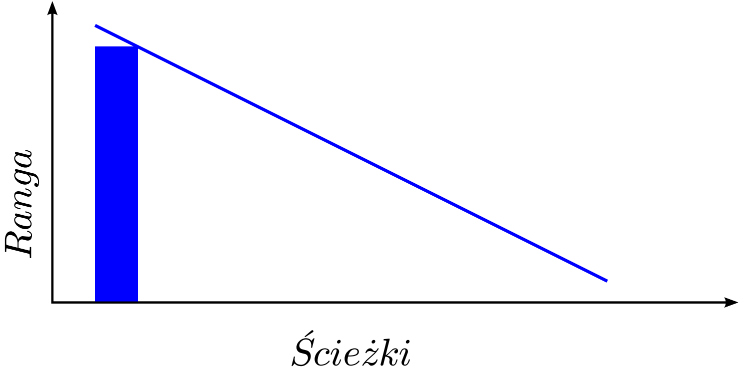
Większy przykład



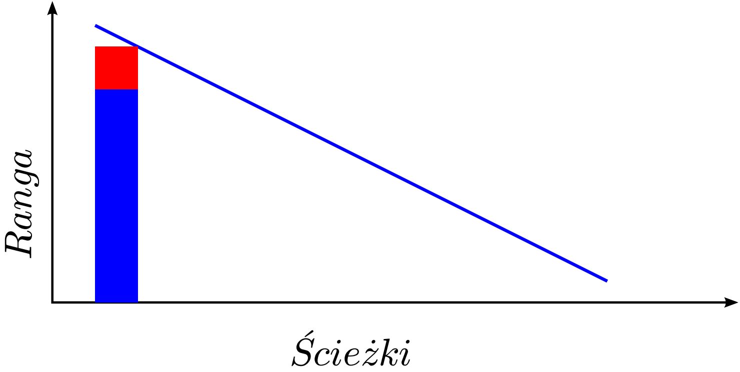
Ograniczenie górne



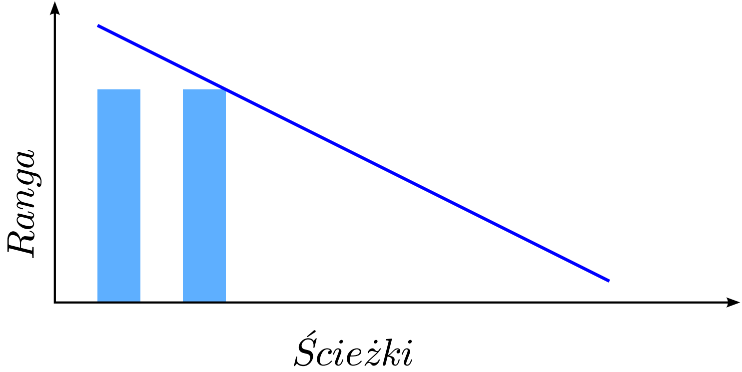
Ograniczenie górne



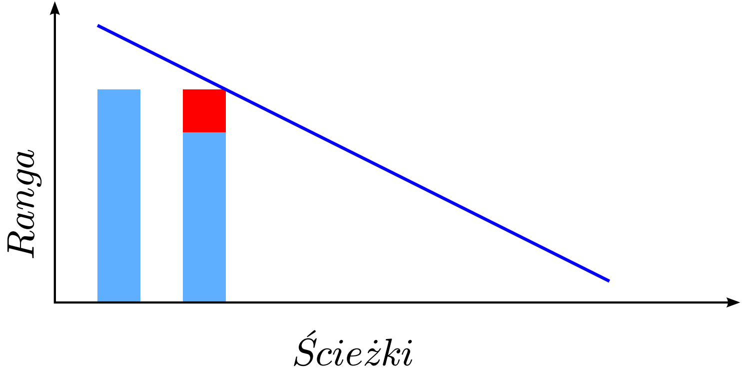
Ograniczenie górne



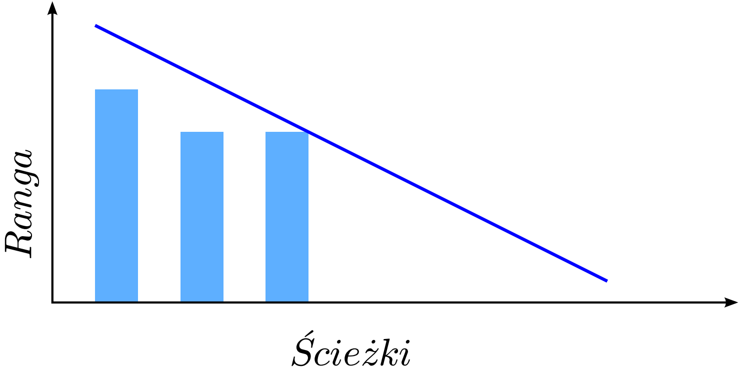
Ograniczenie górne



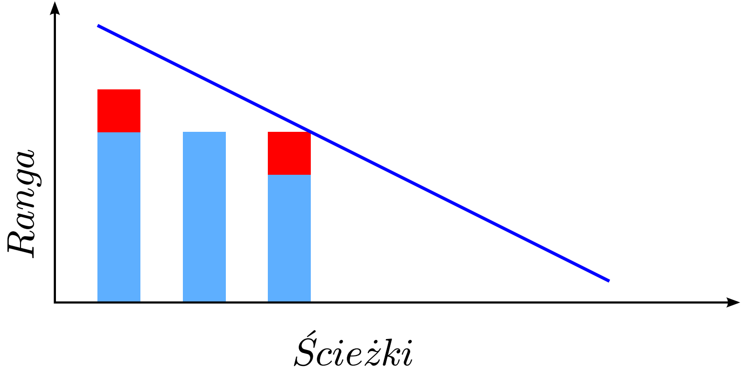
Ograniczenie górne



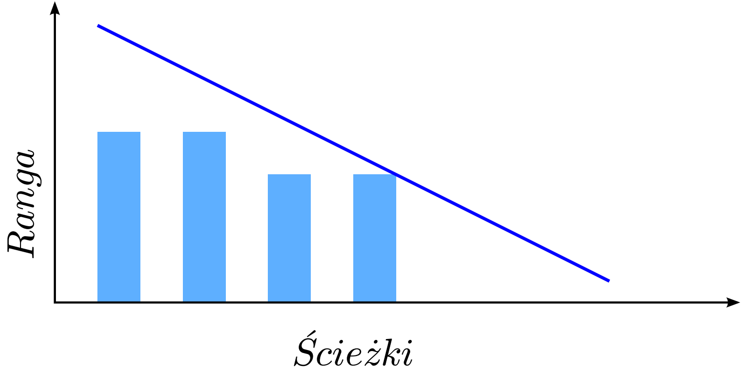
Ograniczenie górne



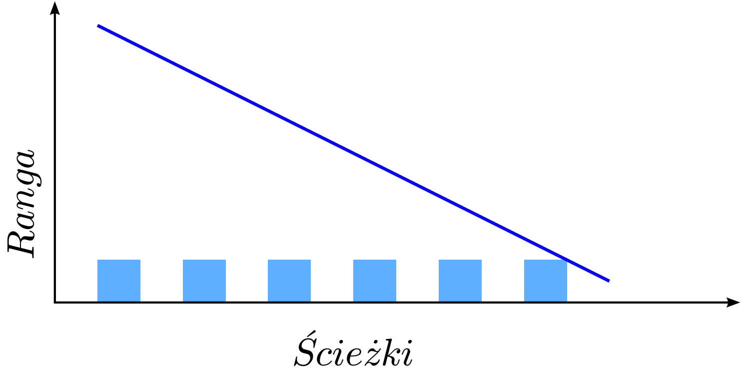
Ograniczenie górne



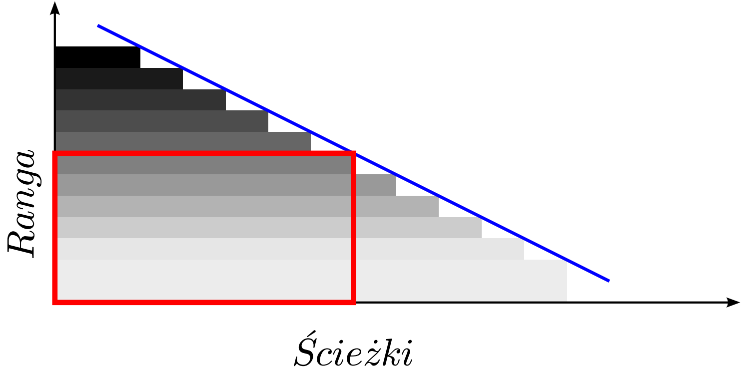
Ograniczenie górne



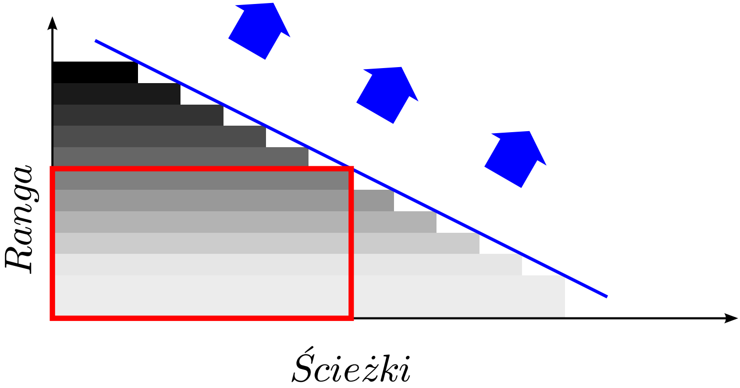
Ograniczenie górne



Ograniczenie górne



Ograniczenie górne



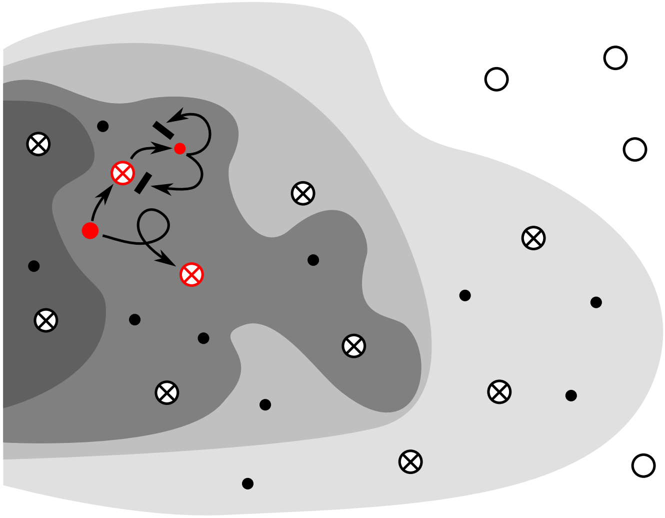
Algorytm

Algorithm 1 Algorithm *Match*

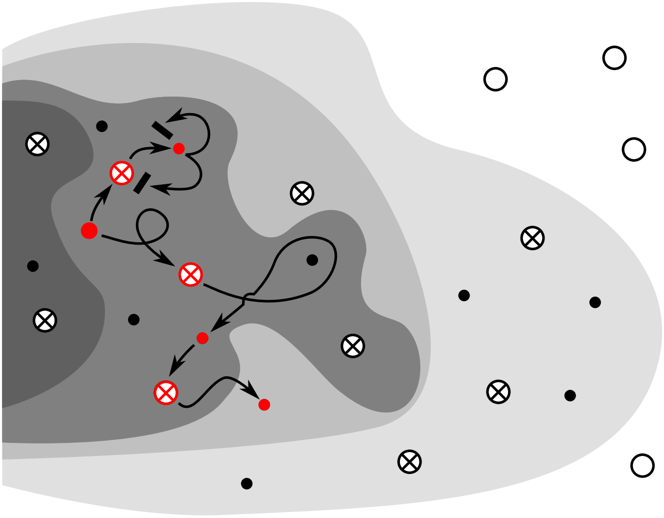
procedure MATCH(b_t)
    $w' \leftarrow$ SMALLESTNEIGHBORUNMATCHEDTO(b_t)
    while $w'.rank^* < \sqrt{2n}$ **do**
        if SEARCH(w') **then**
            $match \leftarrow match \cup \{(b_t, w')\}$
            return `true`
        $w' \leftarrow$ SMALLESTNEIGHBORUNMATCHEDTO(b_t)
    return `false`

procedure SEARCH(w)
    $w.rank^* \leftarrow w.rank^* + 1$
    for each b **such that** $bw \in E_t^{\text{int}}$ **do**
        UPDATEINFORMATION(b, w)
    if UNMATCHED(w) **then**
        return `true`
    $w' \leftarrow$ SMALLESTNEIGHBORUNMATCHEDTO(b_w)
    while $w'.rank^* < w.rank^*$ **do**
        if SEARCH(w') **then**
            $match \leftarrow match \setminus \{(w, b_w)\} \cup \{(b_w, w')\}$
            return `true`
        $w' \leftarrow$ SMALLESTNEIGHBORUNMATCHEDTO(b_w)
    return `false`

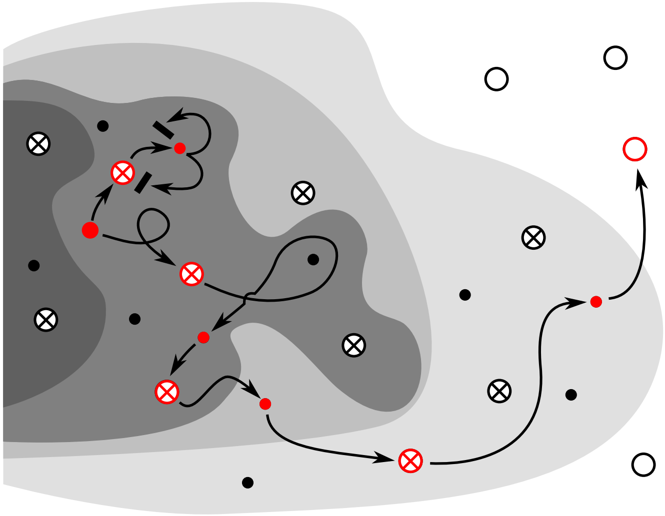
Algorytm — przykład



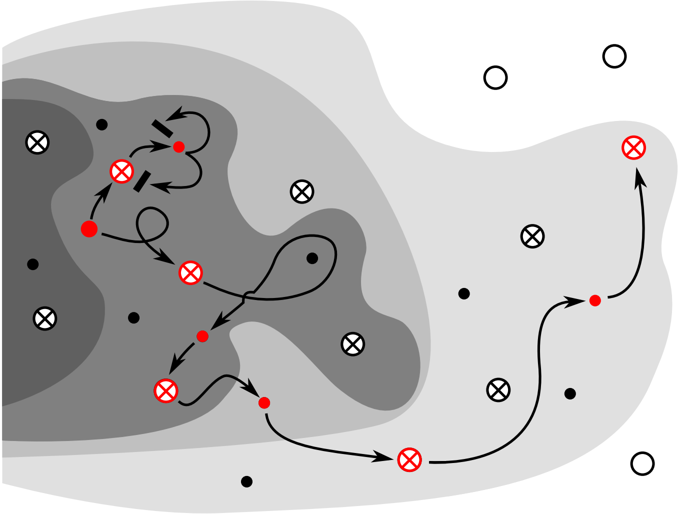
Algorytm — przykład



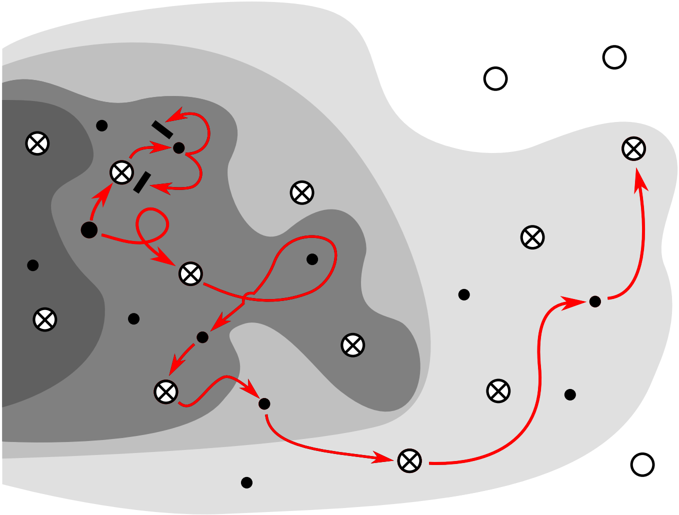
Algorytm — przykład



Algorytm — przykład



Algorytm — przykład



Dalsze badania

- Bernstein Holm i Rotenberg pokazali $\mathcal{O}(n \log^2 n)$ zmian dla najkrótszych ścieżek powiększających skojarzenie
- My dla drzew pokazaliśmy $\mathcal{O}(n \log n)$
- Pytanie otwarte: czy najkrótsze ścieżki mają $\mathcal{O}(n \log n)$ zmian ?

Nowe trendy

- Co jak pojawiają się krawędzie lub wierzchołki z obu stron?

Nowe trendy

- Co jak pojawiają się krawędzie lub wierzchołki z obu stron?
- Wtedy mamy $\Omega(n^2)$ zmian.

Nowe trendy

- Co jak pojawiają się krawędzie lub wierzchołki z obu stron?
- Wtedy mamy $\Omega(n^2)$ zmian.
- A co jak krawędzie pojawiają się w losowym porządku?

Nowe trendy

- Co jak pojawiają się krawędzie lub wierzchołki z obu stron?
- Wtedy mamy $\Omega(n^2)$ zmian.
- A co jak krawędzie pojawiają się w losowym porządku?
- Berstein i inni:
    - Oczekiwana wartość liczby zmian w dowolnych grafach rzędu $\Omega(\frac{n^2}{\log n})$
    - Na drzewach $O(n \log^2 n)$
    - Na ścieżkach $\Theta(n \log n)$
    - Na grafach dwudzielnych nie wiadomo.

Daszek