Instituto Tecnológico de Costa Rica

Programa de Capacitación Profesional en Ciencias de los Datos

Curso: Matemática para Ciencias de los Datos

Informe de Trabajo Práctico 1

Realizado por:

Felipe Alberto Mejías Loría, 201231682

María Mora,

Profesor:

Saúl Calderón Ramírez

Fecha: San José, Mayo 26, 2019

1. Traza de una matriz (20 puntos)

1. Implemente la función *calcularTrazaMatriz* la cual calcule la traza de una matriz usando únicamente operaciones básicas en pytorch (multiplicación, multiplicación por elemento, matriz identidad, etc.), prescindiendo de estructuras de repetición como el for el while.

   a) Documente su correcto funcionamiento con matrices arbitrarias $A, B \in \mathbb{R}^{3x3}$y haciendo el cálculo manual de su traza correspondiente.

   Se calcula la $tr(A)$:

$$tr(A) = \sum A_{i,i}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = 1 + 1 + 0 = 2$$

2. Matriz Ortonormal (20 puntos)

1. Para la siguiente matriz:

$$A = s \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

   defina un valor de s que haga la matriz ortonormal, de forma que $U^T U = I = UU^T$.

   Desarrollando la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -s & 2s & 2s \\ 2s & -s & 2s \\ 2s & 2s & 2s \end{bmatrix}$$

   La transpuesta de la matriz A es:

$$A^T = \begin{bmatrix} -s & 2s & 2s \\ 2s & -s & 2s \\ 2s & 2s & 2s \end{bmatrix}$$

Se debe cumplir que $A^T A = I = AA^T$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} s^2 + 4s^2 + 4s^2 & -2s^2 - 2s^2 + 4s^2 & -2s^2 + 4s^2 + 4s^2 \\ -2s^2 - 2s^2 + 4s^2 & 4s^2 + s^2 + 4s^2 & 4s^2 - 2s^2 + 4s^2 \\ -2s^2 + 4s^2 + 4s^2 & 4s^2 - 2s^2 + 4s^2 & 4s^2 + 4s^2 + 4s^2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 9s^2 & 0 & 6s^2 \\ 0 & 9s^2 & 6s^2 \\ 6s^2 & 6s^2 & 12s^2 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la multiplicación de $A^T A$, se observa como no existe un valor de s que logre generar la matriz identidad I. Por tanto, el ejercicio no presenta ninguna solución.

3. Matrices invertibles (20 puntos)

1. Con las matrices no singulares y por ende invertibles $A, X, Y \in \mathbb{R}^{nxn}$, suponga que:

$$XA = I_n$$

$$AY = I_n$$

Utilizando la siguiente propiedad:

$$A^{-1} A = I_n = AA^{-1} \tag{1}$$

Si:

$$XA = I_n$$

$$\implies A = X^{-1}$$

Si $A = X^{-1}$,

$$\implies XX^{-1} = I_n$$

Entonces, si $AY = I_n$, y con $A = X^{-1}$,

$$\implies X^{-1}Y = I_n \tag{2}$$

Y para que (2) se cumpla, siguiendo la propiedad (1):

$$\implies Y = X$$

$$\implies X^{-1}X = I_n$$

4. Igualdad matriz simétrica (20 puntos)

Muestre con un ejemplo numérico que para un vector $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ y una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{nxn}$:

$$(\overrightarrow{x}^T A \overrightarrow{x})^T = (\overrightarrow{x}^T A \overrightarrow{x})$$

Utilizando: $\overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$,

Demostrando el lado izquierdo de la igualdad,

$$\overrightarrow{x}^T A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{x}^T A^T \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 17$$

Demostrando el lado derecho de la igualdad,

$$\overrightarrow{x}^T A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{x}^T A \overrightarrow{x} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 17$$

$\therefore$Se cumple la igualdad.

5. Ecuación matricial (20 puntos)

1. Demuestre la siguiente ecuación matricial:

$$\left\| A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b} \right\|^2 + \|\overrightarrow{x}\|$$

con $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathbb{R}^{mxn}$, se puede reescribir como sigue:

$$\overrightarrow{x}^T A^T A \overrightarrow{x} - 2\overrightarrow{b}^T A \overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}^T \overrightarrow{b} + \sqrt{\overrightarrow{x}^T \overrightarrow{x}}$$

En el espacio euclideano, el producto punto tiene la siguiente equivalencia:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \cdot \cos(\theta)$$

Si $\theta = 0$, $\cos(\theta) = 1$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} &= \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{w}\| \\ \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x} &= \|\overrightarrow{x}\|^2 \\ \|\overrightarrow{x}\| &= \sqrt{\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{x}} \\ \|\overrightarrow{x}\| &= \sqrt{\overrightarrow{x}^T \cdot \overrightarrow{x}} \qquad (3) \end{aligned}$$

Siguiendo la ecuación (3),

$$\|\overrightarrow{v}\|^2 = \overrightarrow{v}^T \cdot \overrightarrow{v}$$

Tomando $\overrightarrow{v} = A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}$,

$$\begin{aligned} \left\|A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}\right\|^2 &= (A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b})^T \cdot (A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}) \\ &= (\overrightarrow{x}^T A^T - \overrightarrow{b}^T) \cdot (A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{b}) \\ &= \overrightarrow{x}^T A^T A\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x}^T A^T \overrightarrow{b} - \overrightarrow{b}^T A\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}^T \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

Si: $(\overrightarrow{x}^T A^T \overrightarrow{b})^T = \overrightarrow{x}^T A^T \overrightarrow{b}$,

$$\Rightarrow \overrightarrow{b}^T A\overrightarrow{x}$$

$$\therefore \overrightarrow{x}^T A^T A\overrightarrow{x} - 2\overrightarrow{b}^T A\overrightarrow{x} + \overrightarrow{b}^T \overrightarrow{b} + \sqrt{\overrightarrow{x}^T \cdot \overrightarrow{x}}$$