

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Programa de Capacitación Profesional en Ciencias de
los Datos

Curso: Matemática para Ciencias de los Datos



Informe de Trabajo Práctico 0

Realizado por:

Felipe Alberto Mejías Loría, 201231682

María Mora,

Profesor:

Saúl Calderón Ramírez

Fecha: San José, Mayo 15, 2019

1. Sistemas lineales (20 puntos)

1. Demuestre si los siguientes sistemas $L\{u(t)\}$ (con entrada $u(t)$ y salida $g(t) = L\{u(t)\}$, y $h(t)$ una función cualquiera) son lineales o no lineales:

a) $g(t) = u(t) + 2$

Se tiene que cumplir que:

$$L\{\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)\} = \alpha_1 L\{u_1(t)\} + \alpha_2 L\{u_2(t)\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + 2 \neq \alpha_1 (u_1(t) + 2) + \alpha_2 (u_2(t) + 2)$$

$$\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + 2 \neq \alpha_1 u_1(t) + \alpha_1 2 + \alpha_2 u_2(t) + \alpha_2 2$$

por lo tanto el sistema no es lineal.

b) $g(t) = u(t)h(t)$

Se tiene que cumplir que:

$$L\{\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)\} = \alpha_1 L\{u_1(t)\} + \alpha_2 L\{u_2(t)\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$(\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t))h(t) = \alpha_1 (u_1(t)h(t)) + \alpha_2 (u_2(t)h(t))$$

$$\alpha_1 u_1(t)h(t) + \alpha_2 u_2(t)h(t) = \alpha_1 u_1(t)h(t) + \alpha_2 u_2(t)h(t)$$

por lo tanto el sistema es lineal.

c) $g(t) = \max(u(t))$ Se tiene que cumplir que:

$$L\{\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)\} = \alpha_1 L\{u_1(t)\} + \alpha_2 L\{u_2(t)\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$\max(\alpha u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)) = \alpha_1 (\max(u_1(t))) + \alpha_2 (\max(u_2(t)))$$

$$\max(\alpha u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)) \neq \alpha_1 \max(u_1(t)) + \alpha_2 \max(u_2(t))$$

por lo tanto el sistema no es lineal.

d) $g(t) = u'(t)$

Se tiene que cumplir que:

$$L\{\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)\} = \alpha_1 L\{u_1(t)\} + \alpha_2 L\{u_2(t)\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$u'(\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)) = \alpha_1 u'(u_1(t)) + \alpha_2 u'(u_2(t))$$

$$\alpha_1 u'(u_1(t)) + \alpha_2 u'(u_2(t)) = \alpha_1 u'(u_1(t)) + \alpha_2 u'(u_2(t))$$

por lo tanto el sistema es lineal.

e) $g(t) = |u(t)|$ Se tiene que cumplir que:

$$L\{\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)\} = \alpha_1 L\{u_1(t)\} + \alpha_2 L\{u_2(t)\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$|\alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t)| = \alpha_1 |u_1(t)| + \alpha_2 |u_2(t)|$$

$$|\alpha_1| |u_1(t)| + |\alpha_2| |u_2(t)| \neq \alpha_1 |u_1(t)| + \alpha_2 |u_2(t)|$$

por lo tanto el sistema no es lineal.

2. Demuestre si los siguientes sistemas con múltiples variables de entrada $d(\vec{u}, \vec{v})$ (con entrada vectorial $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y salida escalar $s \in \mathbb{R}$), cumplen la condición de homogeneidad absoluta $d(\alpha_1 \vec{u}, \alpha_2 \vec{v}) = |\alpha_1| |\alpha_2| d(\vec{u}, \vec{v})$ de superposición $d(\vec{u} + \vec{x}, \vec{v} + \vec{y}) = d(\vec{u}, \vec{v}) + d(\vec{x}, \vec{y})$.

a) La Norma de Manhattan l_1

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_i^n |x_i|$$

Se tiene que cumplir que:

$$L\{\alpha \vec{x}\} = |\alpha| L\{\vec{x}\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$|\alpha| \sum_i^n |x_i| = |\alpha| \sum_i^n |x_i|$$

por lo tanto cumple con la homogeneidad absoluta. También se tiene que cumplir que:

$$L\{\vec{x} + \vec{y}\} = L\{\vec{x}\} + L\{\vec{y}\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$\sum_i^n |x_i + y_i| \neq \sum_i^n |x_i| + \sum_i^n |y_i|$$

por lo tanto no cumple la superposición y el sistema no es lineal.

b) Norma Euclidiana l_2

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i^n |x_i|^2}$$

Se tiene que cumplir que:

$$L\{\alpha \vec{x}\} = |\alpha| L\{\vec{x}\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$|\alpha| \sqrt{\sum_i^n |x_i|^2} = |\alpha| \sqrt{\sum_i^n |x_i|^2}$$

por lo tanto cumple con la homogeneidad absoluta. También se tiene que cumplir que:

$$L\{\vec{x} + \vec{y}\} = L\{\vec{x}\} + L\{\vec{y}\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$\sqrt{\sum_i^n |x_i + y_i|^2} \neq \sqrt{\sum_i^n |x_i|^2} + \sqrt{\sum_i^n |y_i|^2}$$

por lo tanto no cumple la superposición y el sistema no es lineal.

c) Norma L_∞ Se tiene que cumplir que:

$$L\{\alpha \vec{x}\} = |\alpha| L\{\vec{x}\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$\max(|\alpha x_i|) = |\alpha| \max(|x_i|)$$

por lo tanto cumple con la homogeneidad absoluta. También se tiene que cumplir que:

$$L\{\vec{u} + \vec{v}\} = L\{\vec{u}\} + L\{\vec{v}\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$\max(|u_i + v_i|) \neq \max(|v_i|) + \max(|u_i|)$$

por lo tanto no cumple la superposición y el sistema no es lineal.

d) Para una función multivariable $g(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(\vec{x})$ con dominio en $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$g(\vec{x}) = \vec{w} \cdot \vec{x} + b = \vec{w}^T \vec{x} + b = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n + b$$

con $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y $b \in \mathbb{R}$ coeficientes conocidos, demuestre si es un sistema lineal respecto al arreglo de entradas \vec{x} . Se tiene que cumplir que:

$$L\{\alpha \vec{x}\} = |\alpha| L\{\vec{x}\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, y con $\vec{u} = \alpha \vec{x}$ se tiene que:

$$\vec{w} \cdot \alpha \vec{x} + b = \alpha(\vec{w} \cdot \vec{x} + b)$$

$$\alpha \vec{w}^T \vec{x} + b = \alpha(\vec{w}^T \vec{x} + b)$$

$$\alpha(w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n) + b \neq \alpha(w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n + b)$$

por lo tanto no cumple con la homogeneidad absoluta. También se tiene que cumplir que:

$$L\{\vec{u} + \vec{v}\} = L\{\vec{u}\} + L\{\vec{v}\}$$

Desarrollando la propiedad anterior, se tiene que:

$$\vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + b \neq (\vec{w} \cdot \vec{u} + b) + (\vec{w} \cdot \vec{v} + b)$$

$$\vec{w}^T (\vec{u} + \vec{v}) + b \neq (\vec{w}^T \cdot \vec{u} + b) + (\vec{w}^T \cdot \vec{v} + b)$$

$$w_1(u_1 + v_1) + w_2(u_2 + v_2) + \dots + w_n(u_n + v_n) + b \neq w_1(u_1 + v_1) + w_2(u_2 + v_2) + \dots + w_n(u_n + v_n) + 2b$$

por lo tanto no cumple la superposición y el sistema no es lineal.

d.1.) Para que el sistema sea lineal se debe agregar un elemento más al vector w , el elemento debe tener un valor de uno. Adicionalmente, los arreglos de entrada deben contener un elemento más con valor de b , con esto se elimina b de la ecuación original.

2. Vectores (20 puntos)

1. Graficación y propiedades de los vectores

a) Usando Python grafique los siguientes vectores $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -0,3 \\ 0,8 \\ 0,1 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 =$

$\begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{bmatrix}$ y $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$, usando la función quiver3.

b) Demuestre cuales de los vectores anteriores son unitarios.

1) Para el vector $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -0,3 \\ 0,8 \\ 0,1 \end{bmatrix}$:

Hay que demostrar que:

$$\|\vec{v}_1\| = 1$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^2 |v_i|^2} = \sqrt{(-0.3)^2 + (0.8)^2 + (0.1)^2} = \sqrt{0.09 + 0.64 + 0.01} = \sqrt{0.74} \sim 0.86$$

\therefore No es unitario.

2) Para el vector $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 0,2 \\ 0,4 \end{bmatrix}$:

Hay que demostrar que:

$$\|\vec{v}_2\| = 1$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^2 |v_i|^2} = \sqrt{(0.5)^2 + (0.2)^2 + (0.4)^2} = \sqrt{0.25 + 0.04 + 0.16} = \sqrt{0.45} \sim 0.67$$

\therefore No es unitario.

3) Para el vector $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$:

Hay que demostrar que:

$$\|\vec{v}_3\| = 1$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^2 |v_i|^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (0)^2} = \sqrt{0.5 + 0.5 + 0} = \sqrt{1} = 1$$

\therefore Sí es unitario.

- c) Calcule el ángulo en grados, entre los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 y \vec{v}_1 y \vec{v}_3 , implementando la fórmula en **Pytorch**.
- d) Calcule la distancia en ℓ_1 , ℓ_2 , y ℓ_∞ entre los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 y \vec{v}_1 y \vec{v}_3 , implementando la fórmula en **Pytorch**.
2. Propiedades del producto punto: demuestre lo siguiente. Además, muestrelo con una implementación en Pytorch, usando como entrada un arreglo de 50 arreglos generados al azar, adjunte un pantallazo con la salida de la comparación del resultado a ambos lados de la igualdad, o en su defecto, demuestre el no cumplimiento de la propiedad con un contraejemplo.

a) Conmutatividad del producto punto $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

$$\text{Para el vector } \vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \text{ y el vector } \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} :$$

$$\vec{u}^T \cdot \vec{v} = \vec{v}^T \cdot \vec{u}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i = \sum_{i=1}^n v_i \cdot u_i$$

Se logra observar como $u_i \cdot v_i = v_i \cdot u_i$

b) No asociatividad del producto punto $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w}) \neq (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$

$$\text{Tomando } \vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} :$$

Obteniendo el producto punto de $\vec{v} \cdot \vec{w}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i = (2 \cdot 5) + (3 \cdot 6) + (4 \cdot 7) = 56$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^n u_i \cdot v_i = (1 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 4) = 20$$

Calculando $\vec{u} \cdot (\vec{v} \cdot \vec{w})$ y $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot 56 = 20 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 56 \\ 112 \\ 168 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 100 \\ 120 \\ 140 \end{bmatrix}$$

\therefore Se observa como ambos vectores son diferentes y se demuestra la no asociatividad del producto punto.

3. La distancia de Minkowski como índice de error

Explique la diferencia entre las métricas, analizándolo desde el punto de vista de la sensibilidad a los valores atípicos. La Tabla 1 muestra 3 particiones del set de datos, las cuales le ayudarán a responder entonces la pregunta ¿cuál métrica es más sensible a los valores atípicos? Use como apoyo el cálculo en Pytorch del MAE y el RMSE de los datos pendientes (?) en la tabla 1. Realice el cálculo de forma matricial, prescindiendo al máximo de estructuras de repetición.

i	t_i	\tilde{t}_i	$ \tilde{t}_i - t_i $	$(\tilde{t}_i - t_i)^2$
1	4	2	2	4
2	6	4	2	4
3	5	3	2	4
4	6	4	2	4
5	8	6	2	4
6	10	8	2	4
7	7	5	2	4
8	4	2	2	4
9	2	4	2	4
10	8	10	2	4

Cuadro 1: Primer conjunto de muestras

i	t_i	\tilde{t}_i	$ \tilde{t}_i - t_i $	$(\tilde{t}_i - t_i)^2$
11	5	4	1	1
12	3	2	1	1
13	2	3	1	1
14	4	5	1	1
15	20	21	1	1
16	32	29	3	9
17	5	2	3	9
18	4	7	3	9
19	7	4	3	9
20	41	38	3	9

Cuadro 2: Segundo conjunto de muestras

i	t_i	\tilde{t}_i	$ \tilde{t}_i - t_i $	$(\tilde{t}_i - t_i)^2$
21	6	6	0	0
22	20	20	0	0
23	31	31	0	0
24	41	41	0	0
25	50	50	0	0
26	62	62	0	0
27	73	73	0	0
28	4	4	0	0
29	7	7	0	0
30	40	20	20	400

Cuadro 3: Tercer conjunto de muestras

4. Funciones multivariable (15 puntos)

1. Un hiperplano f definido en un espacio \mathbb{R}^{n+1} se puede expresar como una función con dominio $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ y codominio en \mathbb{R} como sigue: $z = f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{w}$, con $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ el arreglo de coeficientes de tal funcional.

a) Tomese $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,4 \end{bmatrix}$ para la función f_1 y $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ 0,4 \end{bmatrix}$ para la función f_2 , (funciones con dominio en \mathbb{R}^2 y codominio en \mathbb{R}). Grafique ambos planos en Pytorch.

b) Exprese ambos planos en su forma vectorial $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P_1} = 0$, con \vec{n} el vector normal a tal hiperplano, P_0 y P_1 puntos sobre el mismo. Un vector normal $\vec{n} \in \mathbb{R}^m$ a dos vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^m$ y $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ se obtiene en términos del producto cruz como $\vec{n} = \vec{v} \times \vec{u}$, el cual se define

a continuación (con $A_{\setminus i}$ el resultado de eliminar la columna i de la matriz A):

$$\vec{n} = \det(A_{\setminus 1}) \hat{i} - \det(A_{\setminus 2}) \hat{j} + \det(A_{\setminus 3}) \hat{k}$$

$$\text{con } A = \begin{bmatrix} - & \vec{v} & - \\ - & \vec{u} & - \end{bmatrix}$$

2. Para cada una de las siguientes funciones multivariable: grafique su superficie, calcule el vector gradiente manualmente, evalúelo y grafique el vector unitario en la dirección del gradiente para los dos puntos especificados (en la misma figura de la superficie) y calcule la magnitud de tal vector gradiente en cada punto. Además calcule la matriz Hessiana. En general, investigue ¿qué indica la magnitud del vector gradiente y la matriz Hessiana?

- a) $z = f(x, y) = x^3 y^2 + 1$, evaluación del gradiente en los puntos $P_0 = (0, 0)$ y $P_1 = (7, 4, -6, 3)$.
- b) $z = f(x, y) = e^x + e^y + 2x^2 + 4y + 3$, evaluación del gradiente en los puntos $P_0 = (3, 8, 1, 8)$ y $P_1 = (6, 2, 7)$
- c) $z = f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$, evaluación del gradiente en los puntos $P_0 = (-2, 4, 6, 7)$ y $P_1 = (0, 4, 3)$