

Instituto Tecnológico de Costa Rica

Programa de Capacitación Profesional en Ciencias de
los Datos

Curso: Matemática para Ciencias de los Datos



Informe de Trabajo Práctico 1

Realizado por:

Felipe Alberto Mejías Loría, 201231682

María Mora,

Profesor:

Saúl Calderón Ramírez

Fecha: San José, Mayo 26, 2019

1. Trazado de una matriz (20 puntos)

1. Implemente la función *calcularTrazadoMatriz* la cual calcule la traza de una matriz usando únicamente operaciones básicas en pytorch (multiplicación, multiplicación por elemento, matriz identidad, etc.), prescindiendo de estructuras de repetición como el for o el while.

a) Documente su correcto funcionamiento con matrices arbitrarias $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ y haciendo el cálculo manual de su traza correspondiente.

Se calcula la $tr(A)$:

$$tr(A) = \sum A_{i,i}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$tr(A) = 1 + 1 + 0 = 2$$

2. Matriz Ortonormal (20 puntos)

1. Para la siguiente matriz:

$$A = s \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

defina un valor de s que haga la matriz ortonormal, de forma que $U^T U = I = U U^T$.

Desarrollando la matriz A :

$$A = \begin{bmatrix} -s & 2s & 2s \\ 2s & -s & 2s \\ 2s & 2s & 2s \end{bmatrix}$$

La transpuesta de la matriz A es:

$$A^T = \begin{bmatrix} -s & 2s & 2s \\ 2s & -s & 2s \\ 2s & 2s & 2s \end{bmatrix}$$

Se debe cumplir que $A^T A = I = AA^T$:

$$A^T A = \begin{bmatrix} s^2 + 4s^2 + 4s^2 & -2s^2 - 2s^2 + 4s^2 & -2s^2 + 4s^2 + 4s^2 \\ -2s^2 - 2s^2 + 4s^2 & 4s^2 + s^2 + 4s^2 & 4s^2 - 2s^2 + 4s^2 \\ -2s^2 + 4s^2 + 4s^2 & 4s^2 - 2s^2 + 4s^2 & 4s^2 + 4s^2 + 4s^2 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 9s^2 & 0 & 6s^2 \\ 0 & 9s^2 & 6s^2 \\ 6s^2 & 6s^2 & 12s^2 \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De la multiplicación de $A^T A$, se observa como no existe un valor de s que logre generar la matriz identidad I . Por tanto, el ejercicio no presenta ninguna solución.

3. Matrices invertibles (20 puntos)

1. Con las matrices no singulares y por ende invertibles $A, X, Y \in \mathbb{R}^{n \times n}$, suponga que:

$$XA = I_n$$

$$AY = I_n$$

Utilizando la siguiente propiedad:

$$A^{-1}A = I_n = AA^{-1} \tag{1}$$

Si:

$$XA = I_n$$

$$\implies A = X^{-1}$$

Si $A = X^{-1}$,

$$\implies XX^{-1} = I_n$$

Entonces, si $AY = I_n$, y con $A = X^{-1}$,

$$\implies X^{-1}Y = I_n \quad (2)$$

Y para que (2) se cumpla, siguiendo la propiedad (1):

$$\implies Y = X$$

$$\implies X^{-1}X = I_n$$

4. Ecuación matricial (20 puntos)

1. Demuestre la siguiente ecuación matricial:

$$\left\| A\vec{x} - \vec{b} \right\|^2 + \|\vec{x}\|^2$$

con $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ y $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, se puede reescribir como sigue:

$$\vec{x}^T A^T A \vec{x} - 2 \vec{b}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{b} + \sqrt{\vec{x}^T \vec{x}}$$

En el espacio euclideo, el producto punto tiene la siguiente equivalencia:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos(\theta)$$

Si $\theta = 0$, $\cos(\theta) = 1$:

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \\ \vec{x} \cdot \vec{x} &= \|\vec{x}\|^2 \\ \|\vec{x}\| &= \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \\ \|\vec{x}\| &= \sqrt{\vec{x}^T \cdot \vec{x}}\end{aligned}\tag{3}$$

Siguiendo la ecuación (3),

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v}^T \cdot \vec{v}$$

Tomando $\vec{v} = A\vec{x} - \vec{b}$,

$$\begin{aligned}\|A\vec{x} - \vec{b}\|^2 &= (A\vec{x} - \vec{b})^T \cdot (A\vec{x} - \vec{b}) \\ &= (A^T \vec{x}^T - \vec{b}^T) \cdot (A\vec{x} - \vec{b}) \\ &= A^T A \vec{x} \vec{x}^T - A^T \vec{x}^T \vec{b} - \vec{b}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{b}\end{aligned}$$

Si: $(A^T \vec{x}^T \vec{b})^T = A^T \vec{x}^T \vec{b}$,

$$\begin{aligned}&\Rightarrow A \vec{x} \vec{b}^T \\ \therefore \vec{x}^T A^T A \vec{x} - 2 \vec{b}^T A \vec{x} - \vec{b}^T A \vec{x} + \vec{b}^T \vec{b} + \sqrt{\vec{x}^T \cdot \vec{x}}\end{aligned}$$